Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 32 » NÚMERO 1 » AÑO 2019 » ISSN 2448-6469

ALME 32

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 32, Número 1, febrero 2019, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidente: Olga Lidia Pérez (Cuba); Secretario: Hugo Parra Sandoval (Venezuela); Tesorera: Daniela Reyes Gasperini (Argentina); Vocal Norteamérica: Rebeca Flores García (México); Vocal Caribe: Juan Manzueta Concepción (República Dominicana); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Marcela Parraguez González (Chile).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Ana Rosa Corica Caponio
Cecilia Ester Elguero Dotta
Cecilia Rita Crespo Crespo
Christiane Ponteville
Claudia Minnaard
Elisa Silvia Oliva Díaz
Haydeé Blanco Cerchiara
Lidia Beatriz Esper Lara
Liliana Mabel Tauber
Mabel Rodríguez
Marcela Evangelina Götte Salin
María Angélica Pérez Monges
Maria Elina Vergara Viano
María Julia Améndola
María Susana Dal Maso Miná
Patricia Leston
Rodolfo Eliseo D´Andrea
Silvia Vrancken
Verónica Parra

BRASIL

Alexandre Branco Monteiro
Ana Karine Dias Caires Brandão
Ângela Maria Dos Santos
Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Edvonete Souza de Alencar
Fátima Aparecida Da Silva Dias
José Ronaldo Alves Araújo
Juliana Silva De Andrade
Maria Ivete Basniak
Nielce Lobo da Costa Meneguelo
Teodora Pinheiro Figueroa

CHILE

Andrea Dorila Cárcamo Bahamonde
Jaime Mena Lorca
Marcela Parraguez González
Nicolás Sánchez Acevedo
Patricia Vásquez Saldías
Daniela Alejandra Soto-Henríquez
Eduardo Carrasco Heríquez

COLOMBIA

Ingrith Yadira Álvarez

COSTA RICA

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

CUBA

Olga Lidia Pérez González

ESPAÑA

Carmen López Esteban
María Belén Giacomone
María Del Mar López Martín
José Carrillo Yáñez

ITALIA

Mariangela Borello

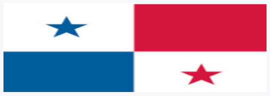
MÉXICO

Adriana Atenea de la Cruz Ramos
Adriana Gómez Reyes
Ana María Ojeda Salazar
Angélica Dueñas Cruz
Clara Eccius
Cuauhtémoc Rodríguez
Edgar Ponciano Bustos
Eduardo Carlos Briceño Solis
Enrique Javier Gómez Otero
Francisco Cordero
Germán Muñoz Ortega
Gricelda Mendivil Rosas
Hipólito Hernández Pérez
Javier García García
José Carlos Ramírez Cruz
José David Zaldivar Rojas
José Marcos López Mojica
José Trinidad Ulloa Ibarra
Judith Alejandra Hernández Sánchez
Julio Moisés Sánchez Barrera
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Lilia Patricia Aké Tec
Lizzeth Aurora Navarro Ibarra
Lorenzo Contreras Garduño
Luis Arturo Serna
Luis Manuel Aguayo Rendón
Luis Manuel Cabrera Chim
Magdalena Rivera Abrajan
María del Carmen Fajardo Araujo
María Teresa Martinez Acosta
Mayra Báez Melendres
Miriam Martínez Vázquez
Nehemías Moreno
Raul Alonso Ramirez Escobar

MÉXICO

Rebeca Ascencio González
Rebeca Flores García
Reyna Arcelia Brito Páez
Rita Angulo
Rogelio Ramos Carranza
Rosa Isela Vázquez Camacho
Rosa María Farfán Márquez
Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Ulises Alfonso Salinas Hernández
Víctor Larios Osorio

PANAMÁ



Analida Isabel Ardila Acuña

PERÚ

Enrique Huapaya Gómez
Flor Isabel Carrillo Lara
Isela Patricia Borja Rueda
Juan Carlos Sandoval Peña
Mihály André Martínez Miraval
Verónica Neira Fernández

URUGUAY

Daniela Pagés
Teresa Cristina Ochoviet Filgueiras
Verónica Molfino Vigo

VENEZUELA

Sandra Liliana Castillo Vallejo
Yaneth Josefina Ríos García

PRESENTACIÓN

Consolidar al ALME como una revista con carácter de publicación semestral, es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se fusionan el respeto a la pluralidad de formaciones, a la multiplicidad de posturas teóricas y a la diversidad cultural. La revista es concebida y desarrollada como un mecanismo de difusión de la productividad académica de la comunidad de Matemática Educativa. Por lo que se busca que la comunidad comparta este interés común, además de conjuntar formadores de profesores, investigadores y profesores de matemáticas de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, impulsar acciones que fomenten la investigación, la profesionalización para el desarrollo científico y social de la comunidad, además de redes de colaboración.

En esta primera parte del volumen 32 se publican 79 artículos que integran las 5 secciones que la conforman y que a continuación se presentan:

Sección 1: Análisis del discurso matemático escolar, se conforma de artículos que tratan analisis didacticos, discurso matemático escolar y la enseñanza de tópicos matemáticos.

Sección 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas, plantea propuestas específicas en torno a estrategias, diseños y acercamientos didácticos.

Sección 3: Aspectos Socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, cuyos artículos aluden a cambio y variación, deconstrucción del saber, formación ciudadana además de matemáticas y género.

Sección 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional, se presentan artículos vinculados con el desarrollo de competencias matemáticas, conocimiento matemático de los profesores y las prácticas pedagógicas.

Sección 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, contiene artículos relacionados con el uso de tecnología, la elaboración de simuladores y la instrumentación de software.

Nuestra *revista*, busca ofrecer a profesores y/o investigadores factibles alternativas de solución a la diversidad de problemáticas identificadas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a partir de las propuestas que docentes de matemáticas y/o investigadores en Matemática Educativa, de Latinoamérica, hacen en relación con sus prácticas docentes, a su experiencia y a su actividad investigativa. Esperamos que la *revista* ALME 32, en su primer número cubra las necesidades de información especializada de la comunidad académica en Matemática Educativa y sea utilizada como una bibliografía global y actualizada y que contribuya a la proyección de nuestra comunidad.

Un reconocimiento especial a los editores y a los árbitros por el riguroso trabajo realizado, por su constancia y responsabilidad para que la revista ALME sea un producto de calidad, a los autores por compartir sus experiencias y/o investigaciones y permitirnos difundir su obra en un escenario de pluralidad.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2020)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES: UMA ANÁLISE COM OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

PROBLEM SOLVING INVOLVING EQUATIONS: AN ANALYSIS CONSIDERING THE THREE WORLDS OF MATHEMATICS

Rosana Nogueira de Lima; Marlene Rosa Sena; Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil). Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (Brasil). Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
rosananlima@gmail.com, marlenejanaina@yahoo.com.br, lgxbarros@hotmail.com

Resumo
Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo que teve como objetivo analisar os procedimentos usados por alunos de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas sobre equações lineares com o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas que envolve as fases de Entrada, Ataque e Revisão propostas por Mason, Burton e Stacey. Os dados coletados foram analisados à luz dos Três Mundos da Matemática de David Tall. Os resultados evidenciam que a Ficha colaborou para que os participantes compreendessem melhor os problemas e encontrassem soluções satisfatórias. Por outro lado, eles ainda utilizaram representação algébrica de maneira inadequada.

Palavras-chave: resolução de problemas, equações, três Mundos da matemática, ensino médio

Abstract
In this paper, we present results from a study aiming at analysing the procedures used by second grade high school students when solving problems related to linear equations with the use of a Problem-Solving Sheet that entails Mason, Burton and Stacey's phases of Entry, Attack and Review. Collected data were analysed in the light of David Tall's Three Worlds of Mathematics. Results evidenced that the Sheet was useful to students to better understand the problems and to find satisfactory solutions. On the other hand, they were still using algebraic representation in incorrect ways.

Key words: problem solving, equations, three worlds of mathematics, high school

Resumo

Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo que teve como objetivo analisar os procedimentos usados por alunos de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas sobre equações lineares com o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas que envolve as fases de Entrada, Ataque e Revisão propostas por Mason, Burton e Stacey. Os dados coletados foram analisados à luz dos Três Mundos da Matemática de David Tall. Os resultados evidenciam que a Ficha colaborou para que os participantes compreendessem melhor os problemas e encontrassem soluções satisfatórias. Por outro lado, eles ainda utilizaram representação algébrica de maneira inadequada.

Introdução

Pesquisas em Educação Matemática, tais como a de Araújo Segundo (2012), há muito discutem problemas enfrentados por alunos ao resolverem equações. Em nossas próprias pesquisas relacionadas a esse conteúdo (por exemplo, Lima (2007), Koch (2011) e Santos (2011)), observamos dificuldades de alunos de Ensino Médio em compreender as "regras" que usam para resolver equações, sejam elas lineares ou quadráticas. Esse uso indiscriminado de procedimentos acaba por impedir que eles compreendam os princípios algébricos envolvidos na resolução.

Ao se trabalhar equações a partir da resolução de problemas, Weber (2012) e Lopes (2007), dentre outros, apontam dificuldades que alunos de diferentes faixas etárias apresentam na interpretação de enunciados de problemas matemáticos. Nessa interpretação, entendemos que há, também, uma dificuldade em representar problemas com o uso de símbolos matemáticos para resolvê-los.

Para minimizar essas e outras dificuldades relacionadas à resolução de problemas, temos realizado pesquisas envolvendo o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas, idealizada na pesquisa de Cybis (2014), e reformulada em outras pesquisas, tais como a de Pita (2016) e de Sena (2017). Tal Ficha é baseada nas ideias de Mason, Burton e Stacey (1982) de que, para se resolver um problema, é preciso passar pelas etapas de Entrada, Ataque e Revisão.

Considerando as dificuldades envolvendo a resolução de equações e a interpretação e representação de problemas identificadas, nesta pesquisa, tivemos por objetivo analisar os processos de resolução de problemas envolvendo equações lineares realizados por alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo. Para isso, propusemos alguns problemas a um grupo de alunos para utilizarem a Ficha de Resolução de Problemas, e observamos se ela colaboraria para que eles os representassem matematicamente e os resolvessem.

Os dados coletados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013), que pressupõe a existência de três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo em Matemática, que habitam três diferentes mundos. Tal quadro teórico nos ajudou a observar o desenvolvimento dos alunos ao resolverem problemas, considerando as características de cada mundo matemático usadas por eles. Além disso, observamos que a Ficha de Resolução de Problemas pode ser um instrumento colaborativo para o entendimento da resolução de problemas.

Entrar, atacar e revisar: uma abordagem para a resolução de problemas

De acordo com Mason, Burton e Stacey (1982), a resolução de problemas é uma atividade que pode ser realizada por qualquer pessoa, desde que algumas fases sejam seguidas.

A primeira delas é chamada por eles de “*Entrada*”. Nela, deve-se ler cuidadosamente o problema, analisar o enunciado e verificar quais informações são dadas. Essas informações devem ser anotadas, para que se possa iniciar a próxima fase, chamada pelos autores de “*Ataque*”. Ao *atacar* um problema, um aluno deve utilizar o que obteve na *Entrada* para definir quais conceitos matemáticos podem ser usados para resolver o problema, e deve se pôr em ação para resolvê-lo. Tendo obtido o resultado solicitado no problema, o aluno passa, então, à próxima fase, a “*Revisão*”. Nela, deve-se voltar ao enunciado do problema, analisar se o resultado encontrado é adequado à pergunta do problema e porque os conceitos matemáticos utilizados guiaram à resolução correta. Os autores ainda mencionam a necessidade de convencer um amigo ou um inimigo da validade da resposta apresentada.

Tendo essas ideias em mente, elaboramos uma Ficha de Resolução de Problemas. Ela contém algumas etapas para possibilitar que o aluno passe pelas fases de *Entrada*, *Ataque* e *Revisão*. Nas pesquisas por nós desenvolvidas, essas etapas foram reformuladas no sentido de contribuir com o desenvolvimento do aluno para compreender como *atacar* um problema, e para melhor esclarecer ao aluno o que ele deveria fazer em cada etapa.

A primeira etapa da Ficha de Resolução de Problemas é a apresentação do enunciado do *Problema*. Em seguida, há a etapa das *Anotações*, em que os alunos devem anotar as informações que extraírem do enunciado do problema, a pergunta nele contida e conceitos matemáticos que podem colaborar para a resolução, completando, assim, a fase de *Entrada* sugerida por Mason, Burton e Stacey (1982).

Tendo essas informações na Ficha, os alunos passam para a etapa de *Estratégias*, na qual efetivamente resolvem o problema, isto é, encaram a fase de *Ataque* ao problema.

A próxima etapa da Ficha é a *Resposta*, na qual devem escrever a resposta do problema. Para isso, é necessário voltar ao enunciado para verificar se a solução encontrada está de acordo com a pergunta nele contida. Este é o início da fase de *Revisão*. Finalmente, a última etapa da Ficha de Resolução de Problemas é o *Convencimento*, na qual os alunos devem explicar o porquê de a solução encontrada ser correta. Entendemos que a etapa do *Convencimento* poderia ser usada pelos alunos como um momento de reflexão sobre as etapas e fases percorridas para chegar à solução do problema, pois, nela, é necessário que eles retomem todo o trabalho realizado para que possam refletir sobre as ações e cálculos efetuados, esclarecendo suas conjecturas e a validade da resposta encontrada. Essa reflexão finaliza a fase de *Revisão* de Mason, Burton e Stacey (1982).

No que se refere à nossa pesquisa, entendemos que esta Ficha de Resolução de Problemas seria adequada para alunos de 2º ano de Ensino Médio ao trabalharem com problemas envolvendo equações lineares, pois as etapas nela contidas poderiam colaborar para que os alunos participantes compreendessem como representar problemas com símbolos matemáticos, já que eles deveriam analisar o enunciado, retirar dele elementos e representá-los. Além disso, a reflexão que ela proporciona, ao solicitar que os alunos escrevam passo a passo o que pensam, o que extraem do problema, como resolvê-lo, também colaboraria para que eles tivessem melhor compreensão de como resolver um problema, isto é, além de ensinar *via* resolução e problemas, também poderíamos discutir o ensinar *sobre* a resolução de problemas (Schroeder & Lester, 1989), proporcionando a alunos uma visão mais ampla dos meios de se resolver problemas, e a professores uma reflexão sobre o uso dessa metodologia em sala de aula.

Os três mundos da matemática

Para analisar os dados coletados, utilizamos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013). Ele foi desenvolvido a partir de críticas às teorias de cognição corporificada e de processo-objeto. Tall (2013) analisa que essas teorias consideram somente um aspecto do desenvolvimento cognitivo em Matemática (respectivamente a corporificação e a utilização de símbolos matemáticos), e conjectura a existência de pelo menos três tipos de desenvolvimento cognitivo que devem ser considerados, e que habitam Três Mundos da Matemática: o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Operacional Simbólico e o Mundo Formal Axiomático.

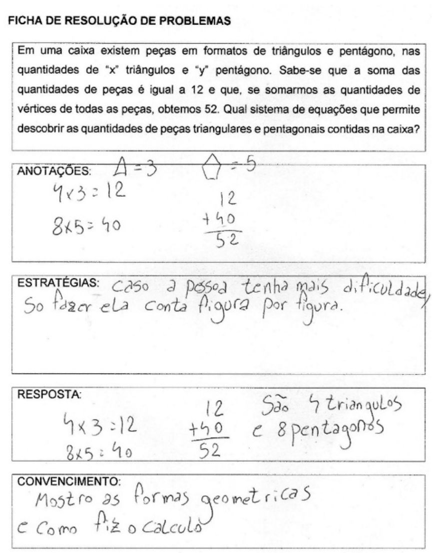
O Mundo Conceitual Corporificado envolve percepções e ações efetuadas em objetos matemáticos. No Mundo Operacional Simbólico, essas ações são representadas por símbolos matemáticos que podem ser vistos como processos e como conceitos. Finalmente, o Mundo Formal Axiomático é o mundo de definições, postulados e teoremas que formam o corpo axiomático da Matemática.

Entendemos que este quadro teórico é adequado para nossa pesquisa pois, com ele, podemos analisar como os alunos utilizam os símbolos matemáticos que habitam o mundo simbólico: de forma proceitual, como processo e conceito (Gray & Tall, 1994), ou de forma procedimental, isto é, somente fazendo manipulações simbólicas sem compreendê-las, com o que chamamos de corporificações procedimentais (Lima, 2007). Além disso, também podemos buscar características corporificadas e a relação delas com as simbólicas, que colaboram para a relação entre dados do enunciado e equação. Finalmente, é de extrema importância analisarmos como características formais estão presentes no trabalho desses alunos com equações lineares.

O uso da ficha de resolução de problemas

Nesta pesquisa, trabalhamos com 25 alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo/SP (Brasil). Apresentamos a eles a Ficha de Resolução de Problemas, e explicamos que informações eles deveriam explicitar em cada etapa dela. Os alunos trabalharam em grupos de três ou quatro integrantes num total de cinco grupos, chamados de G1, ..., G5. Foram propostos seis problemas aos alunos, um em cada encontro de 45 minutos. Para resolvê-los, os alunos deveriam utilizar a Ficha apresentada a eles. Assim, tivemos seis encontros com esses alunos. Na Figura 1 apresentamos uma Ficha como utilizada pelo aluno Jonas para resolver o Problema 1 (os nomes dos participantes foram modificados para garantir confidencialidade).

Os problemas apresentados foram extraídos do Caderno do Aluno fornecido pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, dos Relatórios Pedagógicos do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e da Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP). Todos foram resolvidos com o uso da Ficha de Resolução de Problemas.


FICHA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Em uma caixa existem peças em formatos de triângulos e pentágono, nas quantidades de "x" triângulos e "y" pentágono. Sabe-se que a soma das quantidades de peças é igual a 12 e que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 52. Qual sistema de equações que permite descobrir as quantidades de peças triangulares e pentagonais contidas na caixa?

ANOTAÇÕES: $\triangle = 3$ $= 5$
$4 \times 3 = 12$
$8 \times 5 = 40$
$12 + 40 = 52$

ESTRATÉGIAS: caso a pessoa tenha mais dificuldade, So fazer ela conta figura por figura.

RESPOSTA:
$4 \times 3 = 12$
$8 \times 5 = 40$
$12 + 40 = 52$
São 4 triangulos e 8 pentagonos

CONVENCIMENTO: Mostro as formas geometricas e Como fiz o calculo

Figura 1: Ficha de Resolução de Problemas com a resolução de Jonas ao Problema 1
Fonte: Sena (2017)

O primeiro problema apresentado solicitava que eles representassem matematicamente uma situação que recai em um sistema linear de duas equações e duas incógnitas, sem a necessidade de resolvê-lo. Isso foi feito para que pudéssemos compreender as dificuldades que os alunos participantes teriam para fazer tal representação. Além disso, nosso intuito inicial era o de apresentar problemas que envolvessem conteúdos de álgebra, e não somente equações lineares.

A partir dos resultados obtidos, decidimos utilizar somente problemas relacionados a equações, e buscar colaborar para amenizar as dificuldades que eles tiveram ao passar de um enunciado escrito para uma representação simbólica matemática.

■ "Entrada, ataque e revisão" dos resultados à luz dos três mundos da matemática

O primeiro problema que apresentamos aos alunos participantes solicitava especificamente "Qual sistema de equações que permite descobrir as quantidades de peças triangulares e pentagonais contidas na caixa?", isto é, a resposta ao problema deveria ser um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas. Tal problema permitiria que entendêssemos como os alunos participantes analisavam sentenças e as representavam matematicamente.

As respostas que obtivemos, entretanto, foram numéricas, isto é, a quantidade de peças triangulares e a quantidade de peças pentagonais contidas na caixa. Um exemplo é apresentado na Figura 2 em que Jonas especifica com desenhos o tipo de peça e a quantidade de peças de cada tipo.

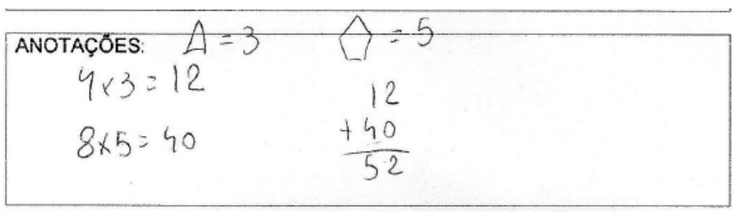


Figura 2: Anotações de Jonas para o Problema 1
Fonte: Sena (2017)

De fato, Jonas apresenta alguns cálculos, no mundo simbólico, e uma representação corporificada para se referir à quantidade de peças de cada tipo, não apresentando equações que representem o problema.

A resposta de Jonas e outras respostas similares à dele podem dar a entender uma dificuldade dos alunos não somente de representar matematicamente uma situação, mas também de compreender o que se pede nesse enunciado. Por outro lado, ao analisarmos a fala de Jonas para resolver este problema, observamos que a dificuldade dele pode ser de representar o enunciado do problema com símbolos matemáticos, mas não de compreender o raciocínio algébrico envolvido nele.

> Então, pra fazer este probleminha eu tive como base que o triângulo são três vértices e o pentágono são cinco vértices, então você precisa de dois pra você fazer chegar no 52 porque seria fácil você pegar e fazer direto nos pentágonos mas faltaria dois, e pra você conseguir este dois você vai ter que usar estes triângulos. Se três mais três é seis, então se você somar seis mais seis é 12, já tem um dois, já tem um 10, então você só precisa dos 40 que faltava e oito vezes cinco é igual a 40 e você junta 12 mais 40 igual a 52, que já tem a quantidade de vértices totais, então x=4 e y=8. E caso o cara duvide, é só pegar quatro triângulos e cinco pentágonos, fazê-lo (sic) contar um por um, que ele vai chegar no 52 certinho, e só o cara ter paciência pra fazer isso né. (Trecho de áudio do aluno Jonas, Grupo G5)

A fala de Jonas apresenta características do mundo formal ao evidenciar que a quantidade de vértices de um ou mais pentágonos só apresentaria múltiplos de 5, e que ele busca um número com duas unidades, logo não pode ser um múltiplo de 5, mas sim de 3, o que o faz iniciar com a quantidade de vértices de um triângulo. Ele também analisa as informações do enunciado simultaneamente, isto é, a quantidade de peças de cada tipo e a quantidade de vértices de cada peça, o que representa o sistema de equações. Tais ideias relacionam-se também ao pensamento algébrico, com características do mundo simbólico de utilização de símbolos para a resolução do problema.

Ao analisarmos como os alunos participantes trabalharam com as etapas de nossa Ficha, observamos que, na etapa de *Anotações*, eles apresentaram elementos do enunciado que são essenciais para a resolução dos problemas propostos, mas nem sempre todos os elementos necessários. Apresentaram também informações relevantes que foram utilizadas durante a resolução, dificuldades com os problemas e, em alguns momentos, esboçaram resoluções nessa etapa da Ficha.

Na Figura 3 apresentamos um exemplo em que os alunos do Grupo G3 identificaram as informações necessárias para a resolução de um problema em que se solicitava a quantidade de questões que se deveria acertar em um concurso com 20 questões para se obter ao menos 28 pontos, dado que, para cada questão correta o candidato ganharia 3 pontos e cada questão incorreta o candidato perderia um ponto. Os alunos ainda sugeriram um conteúdo matemático pertinente para a resolução.

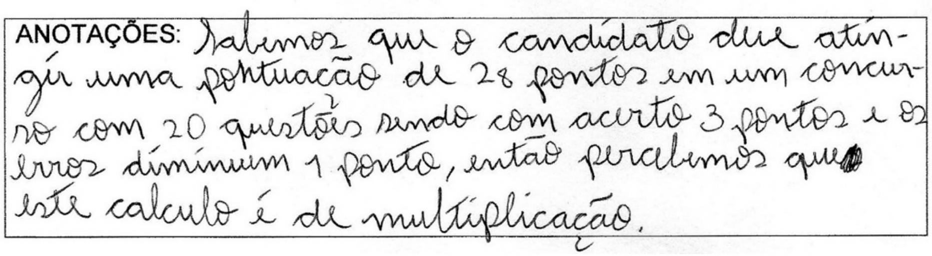

ANOTAÇÕES: sabemos que o candidato deve atingir uma pontuacão de 28 pontos em um concurso com 20 questões sendo com acerto 3 pontos e os erros díminuim 1 ponto, então percebemos que este calculo é de multiplicação.

Figura 3: *Anotações do Grupo G3 para o Problema 2*
Fonte: Sena (2017)

Na etapa da *Estratégia*, os alunos buscaram resolver o problema ou explicar qual estratégia usariam para resolvê-lo, como pode ser visto na Figura 4 em sobre o problema do concurso.

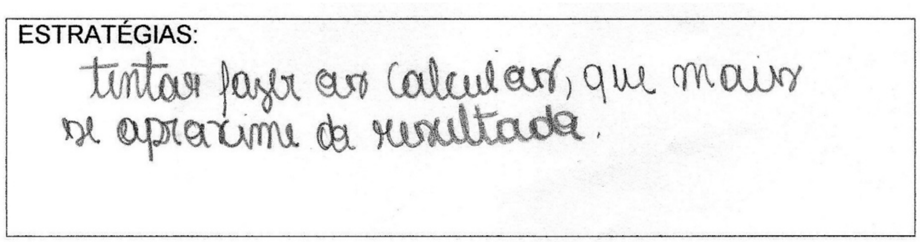

ESTRATÉGIAS:
tentar fazer os calcular, que mais se aproxime do resultada.

Figura 4: *Estratégia do Grupo G2 para o Problema 2*
Fonte: Sena (2017)

É possível que, ao dizer "Tentar fazer os cálculos, que mais se aproxime do resultado", eles se refiram a uma estratégia de tentativa e erro. Na análise do áudio do Grupo G1, percebemos que eles discutem formas de resolver esse problema, e que subjacente a essa discussão há um pensamento aritmético, por meio do qual conseguem chegar a um resultado correto.

Carina: Posso fazer?
Alexandre: Pode.
Carina: x.
Alexandre: Tá fazendo igual.
Alexandre: 9, 12, 18, 27, 28, 29, 30.
Alexandre: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Carina: Quanto tem?
Alexandre: Quem acertou 10 questões ganhou 30, ainda sobra 9. Falei que dá 28. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Tem que tirar mais ainda. Vou fazer os quadradinhos se não vou me perder [veja os “quadradinhos” na Figura 5. A gente já fez essa. 30, 29. 32, 31, 30, 29, 28.
Alexandre: tá certo é isso mesmo.

Na resolução deste problema, o Grupo G1 buscou valores para a resolução do problema. Ao constatar que o candidato precisa somar 28 pontos para obter aprovação no concurso, os alunos desse Grupo buscaram valores para chegar a este resultado. Primeiro realizaram uma tentativa com intervalos de 3 em 3, ou seja, para cada questão respondida corretamente o candidato ganharia 3 pontos, até obter 30. Quando perceberam que obtiveram um valor aproximado, ao apontar “quem acertou 10 questões ganhou 30”, decidiram fazer “os quadradinhos” para melhor visualização da resolução (Figura 5), chegando assim à solução correta, o que evidencia características do mundo corporificado, mas também características do mundo simbólico quando perceberam a necessidade de calcular a quantidade de pontos ganhos e pontos perdidos.

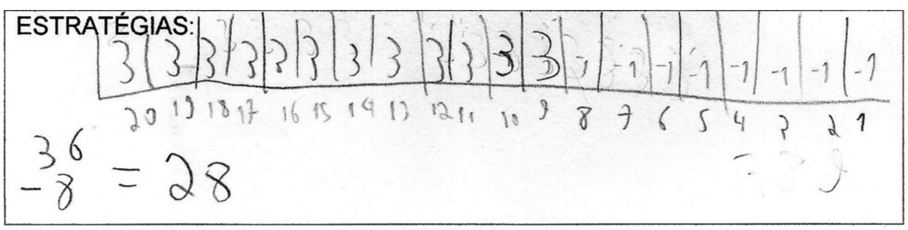


***Figura 5:** Estratégia de resolução do Grupo G1 para o Problema 2*
Fonte: Sena (2017)

Na etapa da *Resposta*, os alunos, em geral, apresentaram respostas aos problemas, mas em alguns protocolos também apresentaram o desenvolvimento de suas resoluções, como observado na Figura 6. O problema envolvido nessa Resposta se refere à quantidade de páginas que se pode enviar via fax dado o preço do envio de cada página e um valor máximo a ser gasto.

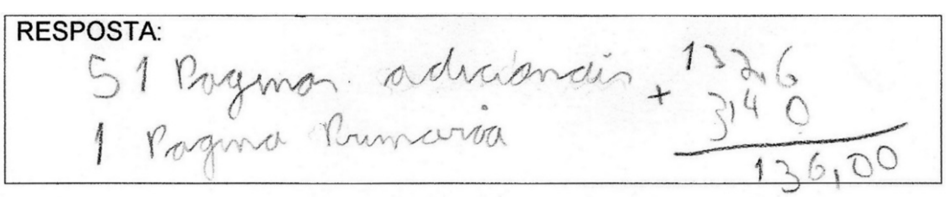


***Figura 6:** Resposta do Grupo G1 para o Problema 3*
Fonte: Sena (2017)

Nesta resposta, os alunos apresentaram características simbólicas ao efetuar uma operação com o uso do algoritmo.

Na etapa do *Convencimento*, observamos que os alunos expuseram algumas de suas ideias, explicando o que foi feito na etapa das *Estratégias* ou o que entenderam ter concluído com a resolução do problema. Exemplo disso é apresentado na Figura 7.

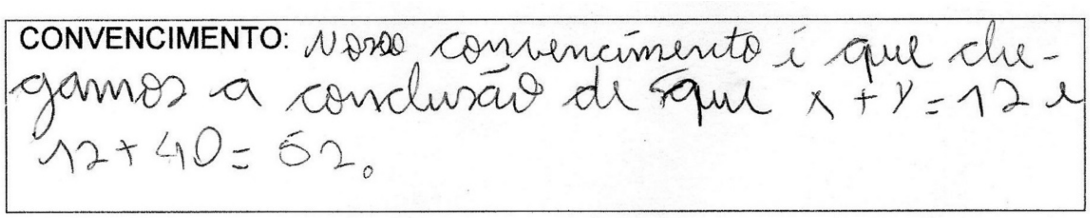

CONVENCIMENTO: Nosso convencimento é que chegamos a conclusão de que x + y = 12 e 12 + 40 = 52.

Figura 7: *Convencimento do Grupo G3 para o Problema 1*
Fonte: Sena (2017)

Na Figura 7 destacamos que os alunos do Grupo G3 iniciaram o *Convencimento* como uma característica simbólica para representar o problema, ao observarem que $x + y = 12$ e que $12 + 40 = 52$. Mesmo não tendo explicado que 12 se refere à quantidade de vértices das figuras triangulares e 40 a quantidade de vértices das figuras pentagonais, e essa igualdade não ter sido expressa em função de x e y, esses alunos chegaram perto da solução solicitada no Problema 1. Assim, aparentemente, para convencer alguém, eles buscaram expressões algébricas.

Entretanto, observamos que esses alunos tiveram certa dificuldade em redigir a etapa do *Convencimento*, e não apresentaram argumentos que fossem suficientes para convencer alguém de que as respostas apresentadas eram matematicamente válidas e corretas, mas explicaram seu raciocínio, como na Figura 8.

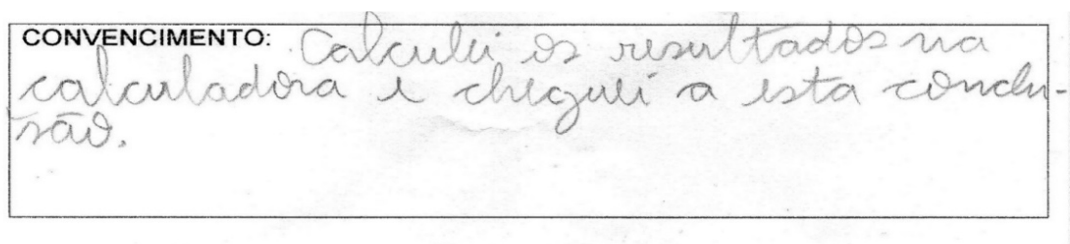

CONVENCIMENTO: Calculei os resultados na calculadora e cheguei a esta conclusão.

Figura 8: *Convencimento do Grupo G2 para o Problema 6*
Fonte: Sena (2017)

Nossas conjecturas são as de que esses alunos não estão habituados a explicarem o raciocínio usado para a resolução de um problema ou de um cálculo. Essa falta de hábito acabou por se revelar em dificuldade para tecer comentários no *Convencimento*, e não compreender quais elementos deveriam explicitar nessa etapa da Ficha.

Ao trabalharmos esses problemas com a Ficha de Resolução de Problemas, observamos que esta colaborou para que os alunos participantes compreendessem melhor como resolver problemas, como podem desenvolver as soluções, entre outros elementos. Por outro lado, eles ainda tiveram dificuldades em etapas algumas etapas da Ficha, como, por exemplo, em explicitar um Convencimento, uma justificativa para a validade da resolução apresentada.

Conclusões

Neste artigo, tivemos como objetivo analisar os procedimentos usados por alunos de 2º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas sobre equações lineares com o uso de uma Ficha de Resolução de Problemas. Para isso, trabalhamos com uma turma de 25 alunos de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de São Paulo/SP (Brasil), que resolveram seis problemas, cada um em um encontro de 45 minutos. Ao resolverem os problemas, esses alunos utilizaram nossa Ficha de Resolução de Problemas, a partir da qual é possível passar pelas fases de Entrada, Ataque e Revisão de Mason, Burton e Stacey (1982). Os dados coletados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013). Buscamos, com esse quadro teórico, entender como os alunos participantes utilizavam equações, característica do mundo simbólico, para representar problemas, com elementos do mundo corporificado, buscando entender se a relação entre esses elementos é feita a partir de características formais.

Ao analisarmos o uso da Ficha de Resolução de Problemas, observamos como os alunos trabalharam com cada uma das etapas nela contida, se fazem a passagem de *Entrada* para *Ataque* e finalmente para *Revisão*.

Verificamos que, ao preencherem as *Anotações* da Ficha, a maioria dos alunos trouxe elementos do enunciado, como esperado, mas, aparentemente, não extraíram todos os elementos necessários para a resolução do problema. Além disso, muitas vezes eles esboçaram resoluções e respostas nesta etapa da Ficha. Weber (2012) aponta as dificuldades que os alunos possuem na leitura do problema e a interpretação dos dados matemáticos. Isso também foi evidenciado em nossa pesquisa, e entendemos que a etapa das *Anotações* colaborou para amenizar essa dificuldade.

Na etapa das *Estratégias,* o aluno deve registrar um método para alcançar um objetivo ou resultado específico, isto é, a forma pela qual ele resolveria aquele problema. Em nossos dados, observamos que os alunos participantes de nossa pesquisa apresentaram possíveis meios de resolver o problema apresentado e extraíram desta etapa dados necessários para chegar ao resultado do problema. Evidenciamos também que eles encontraram dificuldades especialmente em representar algebricamente o problema proposto. Por outro lado, evidenciamos que as tentativas de utilização de equações, mesmo que nem sempre bem-sucedidas, envolviam características do mundo formal.

A etapa da *Resposta* permitiu que o aluno apresentasse a solução do problema a partir das ideias presentes nas *Anotações* e nas *Estratégias*. Não observamos, entretanto, uma volta ao problema para analisar a pergunta e escrever uma resposta adequada. Isso foi evidente particularmente no Problema 1, em que eles deveriam apresentar como resposta um sistema de equações lineares, e apresentaram o resultado desse sistema. Nos outros problemas, as respostas foram coerentes com a pergunta.

A maior dificuldade que observamos nesses alunos foi na etapa do *Convencimento*, tendo em vista que ela envolve diretamente o ato de refletir sobre a resolução apresentada, e buscar uma justificativa para ela. Outra dificuldade evidenciada foi a de escreverem seu raciocínio. Observamos que o uso da Ficha de Resolução de Problemas propiciou uma análise mais detalhada do enunciado do problema, e consequentemente a obtenção de informações relevantes para a resolução, o que favoreceu a descoberta e a reflexão, por parte dos alunos, sobre diversas formas de resolver os problemas propostos. Assim, eles apresentaram resoluções criativas e interessantes. Entretanto, não foi possível sanar todas as dificuldades deles em representar simbolicamente as ideias envoltas nos problemas.

Relatamos ainda que o trabalho em grupo, aliado a essa Ficha, foi importante para que os alunos raciocinassem, discutissem e argumentassem sobre a resolução dos problemas. A discussão, reflexão e cooperação dos alunos entre si foi de fundamental importância para que eles pudessem compreender os problemas, chegar a conclusões acertadas. Ao descrever o raciocínio realizado, os alunos desenvolveram representações simbólicas para os problemas; discutiram aspectos formais ao observarem a validade dos conceitos utilizados; e trabalharam com ideias corporificadas, que guiaram o trabalho deles à solução correta.

No que se refere à análise à luz dos Três Mundos da Matemática, observamos que as características do mundo corporificado foram evidenciadas ao buscarem meios de representar o raciocínio que estavam seguindo. Os alunos tinham pensamento algébrico, utilizavam estratégias de resolução subjacente a uma equação, porém nem sempre escreveram tal equação. Nesse trabalho, surgiram características do mundo formal, quando os alunos utilizaram os conceitos matemáticos.

Mesmo com os avanços observados com esses alunos, eles tiveram apenas seis problemas para se adaptar a essa nova forma de trabalho e aprendizagem matemática. Dessa forma, as mudanças de postura e desenvolvimento algébrico ainda foram tímidas. Entendemos que é necessária a continuação desse trabalho, de forma a obter resultados mais duradouros. Além disso, sugerimos que a continuação de pesquisas com o uso dessa Ficha para a resolução de problemas permitirá que compreendamos como ela pode colaborar ainda mais para o desenvolvimento do pensamento algébrico e do entendimento da representação algébrica por alunos de diversos níveis de escolaridade.

Referências bibliográficas

Araújo Segundo, S. I. (2012). *Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1o grau: representações múltiplas.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande/PB.

Cybis, A. C. (2014). *Resolução de Problemas Multiplicativos: análise de processos heurísticos de alunos de 5º ano do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Gray, E., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), pp. 115-141.

Koch, R. M. (2011). *Uma Introdução ao Estudo de Equações Quadráticas à luz dos Três Mundos da Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Lima, R. N. (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Lopes, S. E. (2007). *Alunos do ensino fundamental e problemas escolares: leitura e interpretação de enunciados e procedimentos de resolução.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically* (1a ed.). London: Addison-Wesley.

Pita, A. P. (2016). *A ideia de função por meio da resolução de problemas: narrativas da educação de jovens e adultos.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Santos, R. P. (2011). *O papel do software Aplusix na transição de equações de avaliação para equações de manipulação: o caso das equações quadráticas.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Schroeder, L. T., & Lester, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. Em P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Sena, M. R. (2017). *Resolução de Problemas Algébricos: Uma análise à luz dos Três Mundos da Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* (1a ed.). New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Weber, R. G. (2012). *Estudos das dificuldades de leitura e interpretação de textos matemáticos em enunciados de problemas por alunos do ensino médio.* Dissertação de Mestrado , Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente.

CONCEPÇÕES EREPRESENTAÇÕESDE VETORES EM LIVROS DIDÁTICOS DE ENGENHARIA

CONCEPTIONS AND REPRESENTATIONS OF VECTORS IN DIDACTIC ENGINEERING TEXT BOOKS

Celso Luiz Andreotti, Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Luiz Gonzaga Xavier de Barros
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN (Brasil)
celso.andreotti@hotmail.com, elisa.gal.meg@gmail.com, lgxbarros@hotmail.com

Resumo
Tem-se como objetivo neste trabalho investigar abordagens conceituais e tipos de registro de representação semiótica utilizados para os vetores em livros didáticos dos cursos de Engenharia. Trata-se de uma pesquisa documental cujos fundamentos teóricos apoiam-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval e os procedimentos metodológicos orientam-se pela análise de conteúdo de Bardin. Constatamos que representações vetoriais privilegiadas em livros da área de Matemática não são as mais utilizadas, necessariamente, nos livros técnico-científicos e o contrário ocorre com a representação algébrica trigonométrica, amplamente utilizada nos textos das áreas técnicas e pouco explorada nos da área de Matemática.

Palavras-chave: conceito de vetor. representações semióticas. livros didáticos de engenharia

Abstract
The aim of this work is to investigate conceptual approaches and types of semiotic representations registers used for vectors in textbooks of the Engineering courses. This is a documental research whose theoretical foundations are based on Raymond Duval's Theory of Semiotic Representations and methodological procedures are guided by Bardin's content analysis. We note that vector representations privileged in Mathematics textbooks are not necessarily the most used ones, in technical-scientific textbooks and the opposite occurs with the trigonometric algebraic representation, widely used in texts of technical areas and little explored in Mathematics.

Key words: vector concept. semiotic representations. engineering textbooks

Introdução

O conceito de vetor está presente em diversas disciplinas do curso de Engenharia e é significativa e relevante sua importância para as disciplinas de Física, Mecânica Aplicada, Mecânica Geral, Resistência dos Materiais, Vibrações Mecânicas, entre outras. O interesse por esta pesquisa nasce, especialmente, das observações cotidianas das dificuldades apresentadas pelos estudantes nas operações vetoriais que exigem o domínio de conceitos básicos da Matemática, das diversas possibilidades de representação desse objeto e das habilidades e conhecimentos necessários que permitem a passagem de uma forma de representação para outra.

Poynter e Tall (2005) traçaram estratégias de abordagem do conceito de vetor no intuito de facilitar o processo de ensino e de aprendizagem, levando em consideração os efeitos das experiências físicas que lançam luz sobre uma nova maneira de compreender este objeto. Segundo os autores, a maneira como o conceito de vetor é construída, a partir de ideias físicas, facilita o acesso ao objeto matemático, o que consequentemente fortalece a ponte entre a representação semiótica e o conceito de vetor. Os autores observam ainda que o conceito de vetor desenvolvido pela Física, como representante de força e aceleração e está diretamente ligado ao movimento, enquanto que a Matemática o relaciona, por exemplo, com a ideia de translação. Estudaram problemas cognitivos advindos destas diferentes abordagens e testaram um conceito mais próximo ao de vetor livre, que está relacionado ao efeito da ação física de translação.

Watson, Spirou e Tall (2003) observam que a aprendizagem de vetores deve ocorrer numa região entre a teoria da corporificação e o simbolismo matemático e explorar o aspecto dinâmico da representação por uma flecha que corporifica tanto a sensação de movimento dinâmico como o conceito da própria flecha como um objeto matemático em si, associado à translação. Os autores exploram os aspectos conceituais de vetor, de acordo com as características pertinentes a cada um dos três mundos da Matemática. Da Física tem-se o conceito de força e os efeitos que ela pode causar no mundo real e, ainda, a ideia mais forte envolvida nesse contexto, que é a possibilidade de que esses efeitos possam ser sentidos ou corporificados, e principalmente emprestados para construir o conceito do objeto matemático vetor. Consideram que essa característica torna o mundo corporificado, com seus aspectos físicos, bastante importante para o processo de aprendizagem desse conceito por parte do aluno.

A noção de vetor no ensino e aprendizagem de Geometria Analítica, a partir da concepção, realização e análise de uma sequência didática que tem por objetivo explorar a articulação entre os registros de representação de vetores é explorada por Castro (2001). A representação semiótica de vetores e a conversão entre as representações envolvendo o registro gráfico, foram apontadas pela autora como as principais dificuldades encontradas pelos alunos, sobretudo quando o registro gráfico era o de chegada. Patrício (2011) tratou das dificuldades dos alunos de Licenciatura em Matemática, com relação à produção, ao tratamento e à conversão das representações semióticas de vetores. Observou que o planejamento e a abordagem do conceito de vetor, feita para o Ensino Médio, que o utiliza apenas no plano, como ferramenta para o estudo da cinemática, dinâmica e estática, entre outros, pode ser uma das origens das dificuldades enfrentadas pelos alunos. Por outro lado, na nossa experiência no ensino superior, constatamos que a representação algébrica trigonométrica para os vetores é amplamente explorada nos textos especializados nas disciplinas das Engenharias, e somam-se às dificuldades já mencionadas aquelas advindas do conhecimento dos conteúdos de Trigonometria.

Encontramos em Duval (2006, 2011a, 2011b) o aporte teórico para orientar nosso olhar e analisar as possibilidades de registros de representação para os vetores nos livros didáticos de disciplinas das áreas de Matemática, Física e áreas técnicas da Engenharia. O livro didático é uma fonte de estudo e consulta e, portanto, justifica-se investigar como os autores exploram as concepções e a diversidade de registros de representações semióticas para vetores levando em consideração as três atividades cognitivas destacadas pela teoria adotada: a produção, o tratamento e a conversão dessas representações. Nesta pesquisa de caráter documental, orientada pela análise de conteúdo proposta por Bardin (1977), os dados foram selecionados nos livros didáticos de forma fornecer subsídios para as respostas a questões relativas à abordagem adotada para o conceito de vetor e aos tipos de representação semiótica explorados nos textos ao longo da teoria e problemas propostos.

Marco teórico

Os tipos de registros de representações semióticas encontrados em livros didáticos para tratar do objeto matemático vetor, das operações, dos tratamentos e das conversões realizadas entre as diferentes representações, levaram à escolha da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Segundo Duval, as representações semióticas são fundamentais para os processos cognitivos do pensamento matemático e para a própria produção de conhecimento e "[...] a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois tipos de registros de representações semióticas" Duval (2011a, p.14). Os tipos de registro considerados por Duval compreendem: registros em língua natural, registros figurais, registros simbólicos e registros gráficos, como apresentados na Figura 1. Para os vetores, no âmbito de cada um dos tipos de registro, destacamos, na Figura 1, exemplos correspondentes às representações que denominaremos: representação em língua natural, representações geométricas, representações algébricas vetorial, em coordenadas, trigonométrica e módulo-ângulo e representações gráficas. Deixaremos de lado as representações algébricas matriciais que estenderiam nossa pesquisa a um numero muito maior de livros texto e ampliaria o número de áreas da Engenharia a serem consideradas.

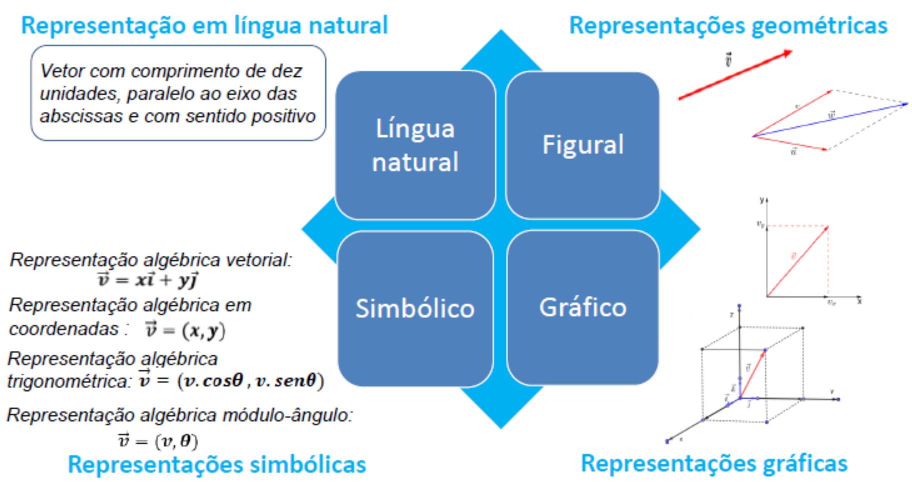


Figura 1: Classificação das representações semióticas utilizadas nesta pesquisa.
Fonte: Acervo pessoal.

Nos utilizaremos das informações da Figura 1 para a análise dos dados obtidos a partir do levantamento realizado tendo como fonte os textos das disciplinas dos cursos de engenharia, nas áreas matemática e técnica.

No exercício da atividade matemática, Duval considera também dois tipos de transformações que são realizadas no âmbito das representações semióticas: o tratamento, que ocorre mantendo o tipo do registro utilizado, e a conversão, que relaciona diferentes tipos de registro de representação. No recorte dos dados escolhido para análise não levaremos em conta essas transformações, daremos ênfase à abordagem conceitual e os tipos de representação mobilizados pelos autores.

Método

A coleta e análise de dados foram delineadas a partir do método da análise de conteúdo proposto por Bardin (1977), adaptada a esta pesquisa. Na fase de pré-análise, selecionamos onze livros didáticos dentre os adotados em disciplinas de Matemática ou técnico-científicas do currículo de Engenharia Mecânica e Engenharia de Produção, livros esses que são de autores reconhecidos no meio acadêmico e indicados com frequência nas bibliografias básica ou complementar dos Planos de Ensino e Aprendizagem de instituições de ensino das rede pública e privada do estado de São Paulo - Brasil. Seis dos livros selecionados, que denotamos Livros 1 a Livro 6, são destinados a disciplinas da área de Matemática (Vetores e Geometria Analítica ou Álgebra Linear) e cinco, denotados Livros 7 a Livro 11, a disciplinas das áreas técnicas (Física - 2, Mecânica para Engenharia – 2 e Resistência de Materiais).

Na exploração do material, estabelecemos os aspectos do objeto matemático vetor a serem considerados relevantes e, finalmente, os categorizamos com a finalidade de orientar a análise de conteúdo dos livros didáticos em nossa pesquisa. Consideramos para esse trabalho:

1) Conceito de vetor estabelecido nos livros didáticos da Engenharia;
2) Representações semióticas utilizadas para os vetores.

Observamos que, nos livros de Matemática, Física e Engenharia selecionados, alguns símbolos e notações adotados apresentam algumas diferenças que mencionaremos quando forem relevantes. Este fato acrescenta um grau a mais na complexidade da produção dos registros de representação, no caso do nosso interesse específico voltado para os vetores.

Análise dos dados

Apresentaremos inicialmente a análise dos dados no que diz respeito à abordagem do conceito de vetor, primeiramente nos livros de Matemática e depois nos livros das disciplinas técnico-científicas da Engenharia e verificar como o objeto vetor é explorado em ambas as áreas e como são estabelecidas as ligações entre os diferentes aspectos dessas distintas abordagens feitas para o mesmo objeto.

Destacamos a seguir, nas Figuras 2 a 4 algumas das definições contidas nos Livros de 01 a 06, da área de Matemática.

> Um vetor é uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se (A,B) é um segmento orientado, o vetor que tem (A,B) como representante será indicado por $\overrightarrow{AB}$. Quando não se quer destacar nenhum representante em especial, usam-se letras latinas minúsculas com uma seta $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{x}\ etc.)$. O conjunto de todos os vetores será indicado por V^3.

Figura 2: Definição de vetor.
Fonte: Livro 01, p.6.

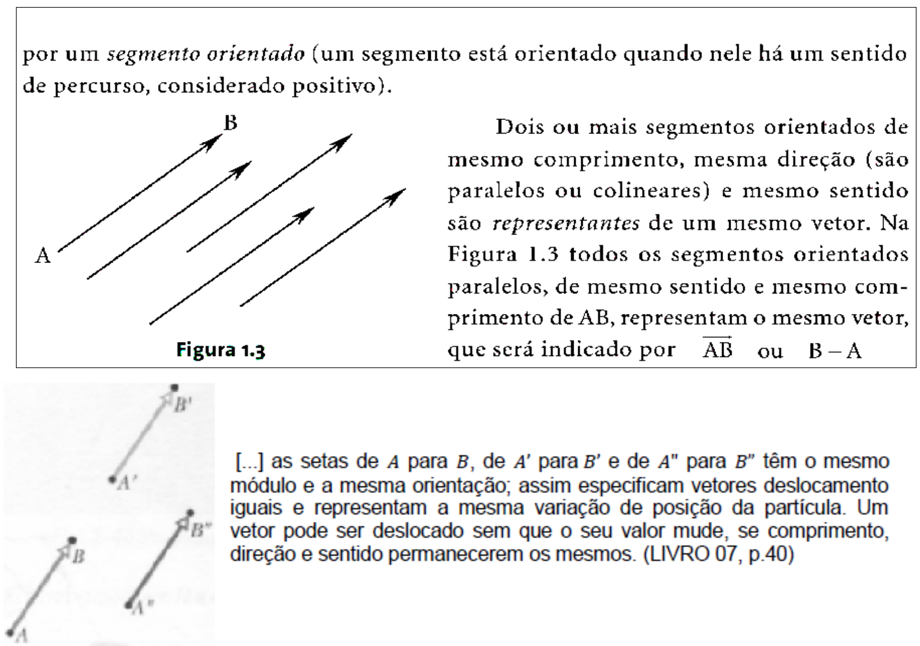
Figura 3: Definição de Vetor
Fonte: Livro 08, p.13

> Os engenheiros e os físicos representam vetores em duas dimensões (no espaço *bidi*-mensional) ou em três dimensões (no espaço *tri*dimensional) por flechas. A direção e o sentido da flecha especificam a ***direção*** e o ***sentido*** do vetor, e o comprimento da flecha descreve seu ***comprimento***, ou ***magnitude***. Os matemáticos dizem que esses vetores são ***geométricos***. A cauda da flecha é o ***ponto inicial*** do vetor, e a ponta da flecha é seu ***ponto final*** (Figura 3.1.1).

Figura 4:
Definição de vetor.
Fonte: Livro 06, p.2.

Nos Livros de 01 a 06, constatamos que o conceito de vetor é em geral abordado rapidamente de maneira intuitiva, destacando os conceitos de grandezas escalares e vetoriais, lembrando o uso da representação de uma força por meio de uma flecha e estabelecendo as noções iniciais de vetor preferencialmente, em todos os textos, por meio da representação geométrica. Em geral, os textos apresentam o conceito de vetor a partir do conceito geométrico de segmento orientado e passam imediatamente à definição formal. Pouca ênfase é dada à contextualização ou aos aspectos dinâmicos ou corporificados, associados às translações, aos movimentos, às forças, aspectos considerados por Poynter e Tall (2005) e Watson, Spirou e Tall (2003) como importantes para a compreensão e aprendizagem do conceito.

Nos Livros 7 e 8, da área de Física, são destacados as grandezas vetoriais e o vetor como a ferramenta para representá-las; no Livro 7, ressalta-se informalmente a possibilidade de deslocar o segmento orientado por translação, como vemos na Figura 5.


por um *segmento orientado* (um segmento está orientado quando nele há um sentido de percurso, considerado positivo).

Dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são *representantes* de um mesmo vetor. Na Figura 1.3 todos os segmentos orientados paralelos, de mesmo sentido e mesmo comprimento de AB, representam o mesmo vetor, que será indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$

[...] as setas de *A* para *B*, de *A'* para *B'* e de *A"* para *B"* têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma variação de posição da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude, se comprimento, direção e sentido permanecerem os mesmos. (LIVRO 07, p.40)

Figura 5: Representantes de um mesmo vetor.
Fonte: LIVRO 07, p.40.

Na Figura 6 trazemos uma abordagem do Livro 8 com características que podemos considerar corporificadas, conforme Watson, Spirou e Tall (2003).

Figura 6: Conceito de magnitude (módulo ou norma) de um vetor.
Fonte: 08, p.13

Ambos os textos dão ênfase às representações algébricas trigonométrica ou módulo-ângulo, como na Figura 7 e apresentam, em apêndices, "tutoriais matemáticos" que resumem os elementos de Trigonometria desde as razões trigonométricas no triângulo retângulo até as funções trigonométricas e suas inversas.

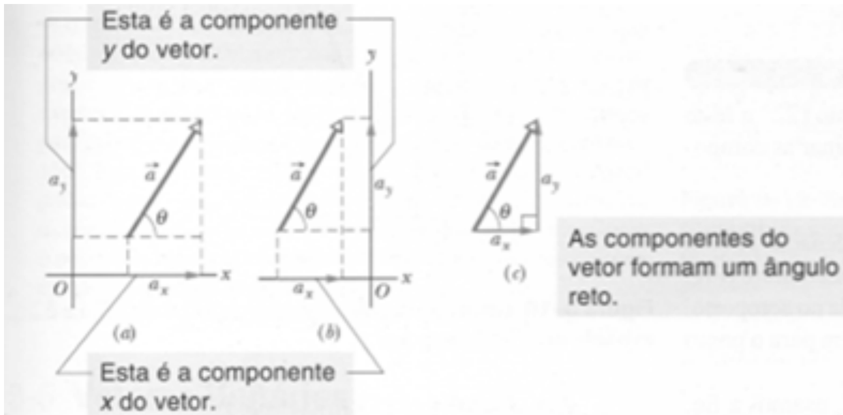


Figura 7: Decomposição de um vetor no plano em suas componentes.
Fonte: LIVRO 07, p.43.

Encontramos referências à representação algébrica vetorial nos Livros 7 e 8, conforme a Figura 8.

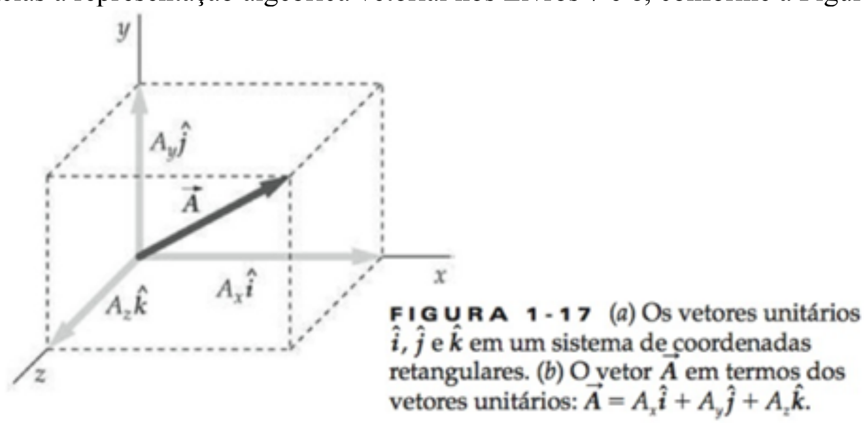


Figura 8: *Representação vetorial na base* $(\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}},\vec{\mathbf{k}})$.
Fonte: LIVRO 08, p.19.

Não há nos Livro 9 a 11, todos do mesmo autor, uma definição formal de vetor; o conceito é introduzido por meio de sua representação geométrica, sem preocupação em mostrar que uma "flecha" é apenas um representante de uma classe infinita de segmentos orientados. sua representação geométrica e seus elementos, conforme Figura 9. A direção é estabelecida considerando inicialmente o ângulo com uma reta horizontal, mas verificamos que também pode ser tomada como referência a direção vertical. A notação para vetor, neste livro, é dada por meio de letras em negrito, como $\boldsymbol{A}$, e sua intensidade (módulo) sem negrito, como A.

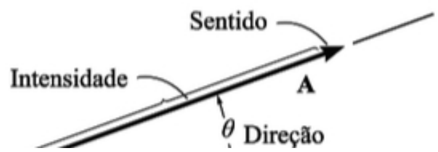
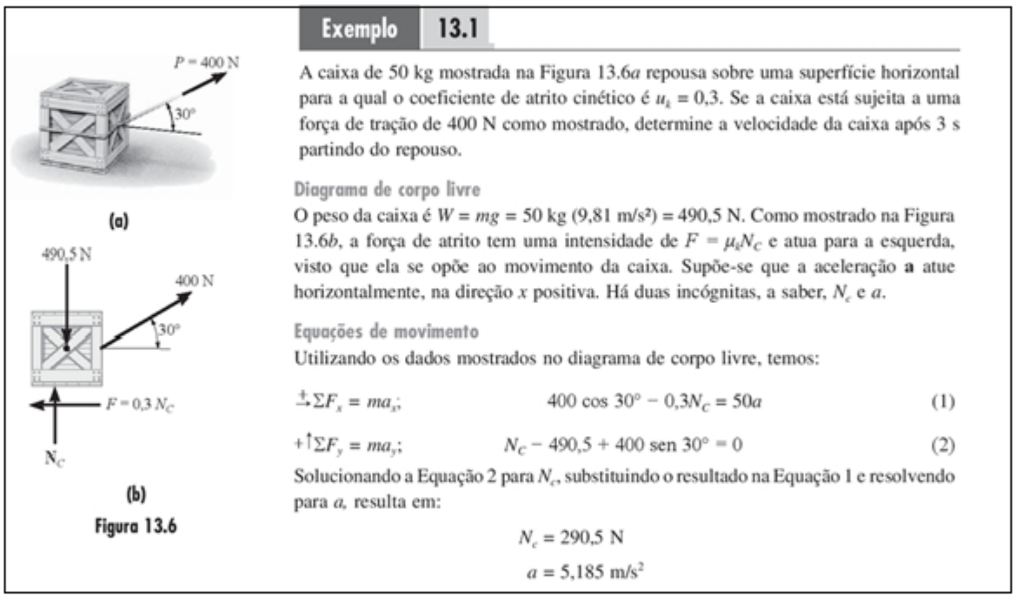


Figura 9: Representação geométrica de vetor e seus elementos.
Fonte: LIVRO 09, p.11.

Nos Livros 10 e 11 encontramos a utilização dos vetores diretamente relacionada às aplicações, como já mencionado. Apresentamos na Figura 10 um exemplo no qual o conceito de vetor é utilizado para a solução e as representações mais comumente identificadas em ambos os textos.



Exemplo 13.1

A caixa de 50 kg mostrada na Figura 13.6*a* repousa sobre uma superfície horizontal para a qual o coeficiente de atrito cinético é $u_k = 0{,}3$. Se a caixa está sujeita a uma força de tração de 400 N como mostrado, determine a velocidade da caixa após 3 s partindo do repouso.

Diagrama de corpo livre

O peso da caixa é $W = mg = 50$ kg (9,81 m/s²) = 490,5 N. Como mostrado na Figura 13.6*b*, a força de atrito tem uma intensidade de $F = \mu_k N_C$ e atua para a esquerda, visto que ela se opõe ao movimento da caixa. Supõe-se que a aceleração **a** atue horizontalmente, na direção *x* positiva. Há duas incógnitas, a saber, N_c e a.

Equações de movimento

Utilizando os dados mostrados no diagrama de corpo livre, temos:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x; \qquad 400 \cos 30° - 0{,}3N_C = 50a \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = ma_y; \qquad N_C - 490{,}5 + 400 \text{ sen } 30° = 0 \qquad (2)$$

Solucionando a Equação 2 para N_c, substituindo o resultado na Equação 1 e resolvendo para a, resulta em:

$$N_c = 290{,}5 \text{ N}$$

$$a = 5{,}185 \text{ m/s}^2$$

Figura 10: Exemplo-utilização das representações algébricas módulo-ângulo e trigonométrica.
Fonte: LIVRO 10, p.90.

A análise dos dados coletados nos livros aponta para uma convergência em relação à introdução do conceito de vetor por meio de uma abordagem geométrica e para uma divergência nas representações utilizadas no que se refere às aplicações do conceito. De um lado, os autores dos livros de Matemática privilegiam o uso de representações algébricas, sobretudo em coordenadas, algumas vezes, vetorial; as representações algébricas trigonométrica e módulo-ângulo não são evocadas nas considerações teóricas, nos enunciados, ou nas resoluções dos problemas.

Por outro lado, os autores dos livros de Física e, também, dos livros técnico-científicos diversificam as representações, tanto no tratamento teórico quanto na resolução de problemas, com presença expressiva das representações algébrica-trigonométrica e módulo-ângulo, e das representações figurais geométrica e gráfica. A representação algébrica-trigonométrica é largamente utilizada nos processos de resoluções dos problemas, assim como as operações de tratamento e conversão; isto é, na parte teórica dos livros de Física observa-se o cuidado em mostrar como se transita de uma representação gráfica ou de uma representação com módulo e ângulo de um vetor para a sua representação algébrica trigonométrica, ou seja, o processo de cálculo das componentes vetoriais por meio da aplicação das razões trigonométricas e, também, partindo dessa última representação para a representação algébrica vetorial.

Nos livros das disciplinas técnico-científicas é fato que a finalidade não é considerar os vetores como objetos matemáticos, mas como ferramenta para se chegar à solução de problemas específicos das áreas técnicas. Nas disciplinas técnico-científicas, assim como na Física, fica evidenciado pelas análises, tanto da parte teórica como dos problemas propostos, que os conceitos trigonométricos são fundamentais para a produção da representação de vetor mais frequentemente utilizada, e também para as operações envolvidas nos cálculos necessários às resoluções de problemas, assim como para as mudanças necessárias de representações, conforme a demanda para as resoluções dos problemas. Nos livros de Matemática (1 a 6), os conceitos trigonométricos não são abordados para a produção de uma representação algébrica trigonométrica, e as considerações sobre ângulos aparecem somente relacionadas ao produto escalar.

Conclusões

Devemos lembrar que a primeira abordagem de vetores para os estudantes acontece no Ensino Médio, exclusivamente nas aulas de Física e sob um único ponto de vista, o geométrico, pois, de acordo com as orientações curriculares, vetores não fazem parte do conteúdo de Matemática.

A abordagem geométrica para conceituar o vetor no Ensino Superior é encontrada em praticamente todos os livros. Nos livros de Matemática essa conceituação geométrica encontra-se preferencialmente como elemento introdutório. De um lado, os autores dos livros de Matemática (1 a 6) privilegiam, na prática, o uso de representações algébricas, sobretudo em coordenadas, não evidenciando representações algébricas módulo-ângulo ou trigonométrica nos enunciados e nas resoluções propostas. Por outro lado, os autores dos livros de Física e, também, dos livros técnico-científicos diversificam as representações, com presença expressiva das representações geométricas, gráficas, algébricas módulo-ângulo ou trigonométrica, nos enunciados ou nas resoluções dos problemas propostos. As representações algébricas módulo-ângulo ou trigonométrica são largamente utilizadas nos processos de resoluções dos problemas. Nos livros de Física, ressalta-se o fato de que as representações em língua natural são praticamente um terço de todas as representações identificadas nos enunciados pela própria característica dos problemas, que é de descrição dos fenômenos envolvidos, necessitando análise e interpretação do texto, a partir do qual se extrai as informações iniciais, em nosso caso específico, sobre vetores. Embora os enunciados apresentem poucas representações geométricas ou gráficas, as resoluções evidenciam a presença desses tipos de representações, associadas às representações trigonométricas.

Ante a esses pontos de vista, observamos que tanto os autores dos livros de Matemática como os dos livros de Física e Técnico-científicos, desenvolvem os conceitos de vetores e as produções de suas representações de forma bastante independentes.

Observamos que os livros didáticos de disciplinas de Matemática não contemplam elementos relativos aos vetores a serem posteriormente utilizados nas disciplinas dos cursos de Engenharia, com relação a abordagem e representações do objeto matemático vetor. Destacamos esse ponto baseados nos dados levantados nas partes teóricas e nos problemas propostos nos livros didáticos examinados, que demonstram, por sua vez, a baixa exploração das representações geométricas e gráficas e, principalmente, a ausência da Trigonometria nas representações de vetores que, como já mencionado, traz elementos essenciais e de ampla utilização nas engenharias.

Verificamos, nesse estudo, a necessidade de reforçar efetivamente, em disciplinas da Engenharia, como Cálculo e Geometria Analítica, a exploração dos conceitos de Trigonometria, visando a convergência dos objetivos estabelecidos nos livros didáticos da Matemática e nos livros didáticos das áreas técnicas, e, a partir daí, chegar a uma uniformização das representações de vetores, incluindo símbolos e notações utilizadas, de forma a termos mais proximidade entre as disciplinas de Matemática e as disciplinas das áreas técnicas. Consideramos importante uma abordagem de vetor que não fique somente no contexto matemático, mas que leve em conta os aspectos e necessidades relacionados aos pontos de vista de aplicações de outras ciências, como a Física e a Engenharia.

Referências

Bardin, l. (1977). *Análise de conteúdo.* Lisboa, Portugal: edições 70

Castro, s. C. (2011). Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Puc-sp.São Paulo.

Duval, R. (2011). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, *S.D.A. aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.* 8ª ed. Campinas: Papirus

Duval, R. (2011b). *Ver e ensinar a matemática de outra forma – entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem editora.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61,* 103-131

Patrício, R. (2011). As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica. Dissertação de mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas. Universidade Federal do Pará – pa.

Poynter, A. e Tall, D. (2005). What do mathematics and physics teachers think that students will find difficult? A challenge to accepted practices of teaching. *Proceedings of the sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick* (128-135).

Watson, A., Spyrou, P. e Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: the concept of vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education, 1(2*), 73-97.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

DIÁLOGO COMO MEDIAÇÃO NO ESPAÇO DA ZDP: NÍVEIS DE AJUDA NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

DIALOGUE AS MEDIATION IN THE SPACE OF THE ZONE OF PROXIMAL DEVELOPMENT: LEVELS OF AID IN MATHEMATICAL LEARNING

Maurílio Antônio Valentim, Maria Helena Palma de Oliveira
Prefeitura de Juiz de Fora. (Brasil)
valenttinos@yahoo.com.br, mhelenapalma@gmail.com

Resumo
O objetivo específico deste trabalho é apresentar uma análise sobre o processo cognitivo na resolução de atividades de Matemática baseado nos 4 níveis de ajuda proposta por Beatón de acordo com Vigotski. O estudo baseou-se nos 4 níveis de ajuda proposto por Beatón. O método seguiu os parâmetros da pesquisa qualitativa. O material de análise foi recolhido do diálogo originado da interação entre 3 alunos do 6º do EF. O estudo permitiu reconhecer a importância, para a educação, da capacidade do professor de poder identificar em que nível de desenvolvimento seu aluno está e em qual zona de desenvolvimento; porém, é necessário que ele, o professor, projete qual o nível de desenvolvimento potencial pode ser alcançado por um aluno por meio de sua ajuda ou de um colega mais capaz.

Palavras-chave: diálogo, mediação, zona de desenvolvimento proximal

Abstract
The objective of this work is to present an analysis of the cognitive process in solving Mathematics activities based on the four levels of aid proposed by Beatón, according to Vygotsky. The study was based on the four levels of aid proposed by Beatón. The method followed the parameters of a qualitative research. The material to be analyzed was collected from the dialogue originated in the interaction between 3 students from the 6th grade of FE. The study allowed recognizing the importance, for education, of the teacher's ability to identify at what level of development her student is and in which zone of development; however, it is necessary for the teacher to project what level of potential development can be achieved by a student through her help or through the help of a more capable colleague.

Key words: dialogue, mediation, zone of proximal development

Introdução

O referido trabalho apresenta uma análise sobre o processo cognitivo na resolução de atividades de Matemática baseada nos 4 níveis de ajuda propostos por Beatón (2003) que tomou como base estudos deVigotski. O presente estudo toma como referência as narrativas que constituem diálogos de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (EF) de uma escola da rede municipal de Juiz de Fora, MG (Valentim, 2015).

O método seguiu os parâmetros da pesquisa qualitativa. O material de análise foi recolhido do diálogo (fragmento) originado da interação entre 3 alunos do6º ano do Ensino Fundamental, crianças entre 12 e 13 anos de idade.Os materiais produzidos por eles foram recolhidos para análise e todo o processo de aplicação das atividades foi gravado e filmado.
Uma das grandes vantagens do método citado é permitir um registro fiel das informações, que não seria possível somente com registros escritos pelo pesquisador. Porém, devemos nos atentar ao fato de que alguns dos instrumentos de coleta descritos, no caso, a gravação e filmagem, podem provocar uma inibição dos participantes. É fato também que somente os questionários e entrevistas escritas não permitem coletar todas as informações sobre a construção de conhecimento dos alunos, como descreve Meira apud Silva (2003) sobre a importância do vídeo que pode:

> [...] capturar múltiplas pistas visuais e auditivas que vão de expressões faciais a diagramas no quadro negro, e do aspecto geral de uma atividade a diálogo entre professor e alunos. O vídeo é menos sujeito ao viés doobservador que anotações baseadas em observação, simplesmente porque ele registra informações em maior densidade (Silva, 2003, p.55).

Nesta perspectiva, as informações foram predominantemente descritivas e obtidas no contato direto com os participantes. Em decorrência, a ênfase recaiu mais sobre o processo do que sobre o produto, conforme explicam Lüdke e André (1986). Além disso, essas formas de registro permitem traduzir com maior qualidade a trajetória da produção dos alunos.

No período em que Vigotski realizou seus estudos, três correntes teóricas tinham a preferência entre os psicólogos. A primeira considerava que a aprendizagem devia seguir o desenvolvimento dos alunos, a segunda considerava que aprendizagem e desenvolvimento tinham o mesmo significado e a terceira que julgava que as duas primeiras teorias tinham razões.

De acordo com Vygotsky (2010), a primeira corrente teórica baseia-se no pressuposto de que os processos de desenvolvimento da criança são independentes do aprendizado já que esse é considerado um processo externo que não se envolve ativamente no processo. Os teóricos dessa corrente afirmam que os ciclos de desenvolvimento precedem os de aprendizado, a maturação precede o aprendizado e que a instrução deve seguir o crescimento mental. O desenvolvimento é o substrato para o aprendizado, uma pré-condição para que ocorra o segundo. Essa corrente tem como principais representantes Piaget e Binet.

Piaget, ao adotar essa posição teórica, procura obter as tendências do pensamento das crianças de uma forma em que a influência de experiências anteriores não interfira na resposta. Para isso ele utiliza de perguntas sobre assuntos que estão bem além do conhecimento.

Já a segunda corrente demanda que a aprendizagem é o desenvolvimento. Segundo os teóricos desta corrente os dois processos ocorrem simultaneamente, se coincidem em todos os pontos. Esse conceito se tornou a base para a teoria em que o desenvolvimento é visto como domínio de reflexos condicionados. Essa corrente tem em comum com as teorias de Piaget em que o desenvolvimento é concebido com a elaboração e substituição de respostas inatas.

A terceira corrente teórica considera que o aprendizado e o desenvolvimento se combinam. Três aspectos são novos nessa corrente teórica: primeiro é a combinação citada acima; segundo é a ideia de que eles são interagentes e mutuamente dependentes e terceiro é o papel atribuído ao aprendizado no desenvolvimento da criança. Para estes teóricos, como Koffka e os gestaltistas, a influência do aprendizado nunca é específica e o desenvolvimento é sempre um conjunto maior que o aprendizado, eles não coincidem.

Vigotski não concordava com nenhuma delas, pois elas não forneciam subsídios necessários para se estabelecer uma teoria única dos processos psicológicos humanos. Para ele, o desenvolvimento das bases psicológicas para o aprendizado não precede o aprendizado, ao contrário, ele é que precede o desenvolvimento e ocorre numa interação com as suas contribuições e que elas não podem ser analisadas separadamente. Ele então elabora uma nova abordagem ao assunto com o que chamou de análise de unidades que é explicado como "um produto de análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades básicas do todo, não podendo ser dividido sem que as perca". (Vygotsky, 2010, p.15).

Ao compreender a relação desenvolvimento/aprendizagem, ele cria, de forma original,o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, a ZDP,que é um processo de caráter interativo e social, uma região de transição entre o que Vigotski chama de "nível de desenvolvimento real", representado pelos conhecimentos já apropriados e usa de modo independente e o "nível de desenvolvimento potencial", que é o local delimitado por essas capacidades. Vigotski define ZDP como

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais ativos. (Vygotsky, 2010, p. 97)

O nível de desenvolvimento potencial: conjunto de atividades que a criança não consegue realizar sozinha, mas que, com a ajuda de alguém que lhe dê algumas orientações adequadas, ela consegue resolver. Para ele, o nível de desenvolvimento potencial é muito mais indicativo do desenvolvimento da criança que o nível de desenvolvimento real, pois este último refere-se a ciclos de desenvolvimento já completos, é fato passado, enquanto o nível de desenvolvimento potencial indica o possível desenvolvimento, ou seja, refere-se ao futuro da criança.

Destacamos, assim, a necessidade de se propor situações em que o aluno possa realizar a atividade com ajuda de outro mais experiente indo além do que seria capaz de fazer individualmente - o que evidencia a importância do trabalho em parceria com outros sujeitos mais competentes para provocar reestruturações e as modificações nos esquemas de conhecimento que possibilitará, aos poucos, uma atuação mais autônoma pelo sujeito aprendiz.

Para Vigotski, "outros" são todos aqueles que podem auxiliar no desenvolvimento de uma criança, ou seja, professores, colegas mais avançados e adultos. Beatón (2003) considera "outros", também como tudo que auxilie na interação entre a criança e o adulto, como TV, vídeos, computador e o próprio sujeito após sua formação.

Essa interação, entre alunos, poderá ser evidente em salas de aulas heterogêneas. Porém a separação de alunos em salas de aulas homogêneas, ou não, conforme nível de aprendizagem, é tema bastante debatido gerando diversas opiniões. Não nos atendo a essa discussão, mas a realidade nas escolas públicas brasileiras nos leva a ter, na sua grande maioria, salas heterogêneas.

De acordo com King (1997), as turmas de escolas públicas estão cada vez maiores e, assim, as diversidades se tornam mais evidentes. A interação entre os alunos proporcionada pelo professor se torna uma ferramenta importante no processo da aprendizagem. Esse método é conhecido como aprendizagem mediada pelos pares e considera um meio natural de aprendizagem.

Tentaremos mostrar ser essa uma possível solução para uma educação que garanta uma qualidade necessária para que se atinja o objetivo da aprendizagem, levando em conta as diversidades dos alunos. E não poderia ser diferente já que essa pesquisa é pautada nos aspectos socioculturais dos autores utilizados como suporte teórico; e de acordo com a teoria de ZDP de Vigotski cada aluno está em uma zona de desenvolvimento que pode não ser a mesma que a de seus colegas e que a interação entre eles, com a ajuda do professor, auxilia na aprendizagem.

Mas o que provoca essa diferença entre as zonas de desenvolvimento? Beatón cita que as causas são variáveis, que podem depender "do sujeito, da interação, do desenvolvimento anterior, da qualidade da ajuda, do conhecimento empírico e de muitas outras coisas". (2005, p. 235).

É neste aspecto, a busca de conhecer em que nível de desenvolvimento o aluno encontra-se, que o pensamento narrativo, proposto por (Valentim, 2015), pode tornar-se um instrumento bastante valioso.

Associando o pensamento narrativo aos níveis de ajuda propostos por Vigotski, que por meio deles é que "propomos à criança que resolva, com uma ou outra forma de colaboração, as tarefas que excedam os limites de sua idade mental" (Vygotsky, 1996, p. 269), e assim, poderemos determinar as prováveis posições dentro uma ZDP.

Consideramos que na esfera escolar, o professor é aquele que detêm mais experiência e em seu processo pedagógico mediará, intervindo com orientações, sugestões, demonstrações, entre outros, na relação do aluno com o conhecimento procurando criar ZDP e intervir nos avanços que não ocorreriam espontaneamente. Ele atuará como um elemento de ajuda, trabalhando junto aos alunos em uma construção (com)partilhada do conhecimento em que o processo é fator primordial na consolidação daquilo que já existia, mas de uma forma rudimentar.

Beatón (2005) afirma que a criatividade e a iniciativa do professor são fundamentais para respeitar essas diferenças e concretizar a aprendizagem por parte dos alunos. Devemos destacar que as iniciativas do professor, citadas acima, não devem ser exclusivamente aquelas em que ele deva ser o mais capaz na interação e, sim, aquelas em que ele, o professor, propicie interação entre os alunos.

Vygotsky atribui à linguagem um papel de grande importância no desenvolvimento cognitivo do sujeito, uma vez que para esse autor, o crescimento intelectual da criança depende dos instrumentos linguísticos, por meio de suas propriedades formais e discursivas, do pensamento e da experiência sociocultural.

Para Vygotsky (1979), os produtos culturais como a linguagem e outros sistemas simbólicos são os mediadores nas nossas representações da realidade. Os nossos filtros interpretativos nos permitem apropriarmo-nos dessa realidade e agirmos sobre ela utilizando, por vezes, modelos que antecipam o comportamento dos outros.

Portanto, o desenvolvimento do pensamento verbal depende de fatores externos, pelo fato do mesmo não se constituir um comportamento natural e inato. No tocante à representação do pensamento em forma de discurso exterior, Vygotsky afirma que:

> A comunicação por escrito repousa sobre o significado formal das palavras e, para transmitir a mesma ideia, exige uma quantidade de palavras bem maior do que a comunicação oral. [...] - Como, precisamente, um pensamento não tem correspondência imediata em palavras, a transição entre o pensamento e as palavras passa pelo significado (Vygotsky, 1979, p.196).

Ainda de acordo com outros conceitos propostos por Vigotski, dois são importantes para nosso estudo pelo fato de podermos analisá-los com base no cotidiano, o conceito espontâneo e o conceito científico. Essa importância dá-se pela liberdade com que os alunos poderão resolver as atividades propostas e que os conhecimentos compartilhados poderão ter aspectos baseados nos conhecimentos cotidianos ou científicos.

Os conceitos espontâneos são formados a partir da interação do sujeito com o meio, suas vivências e situações concretas e depois de utilizado é generalizado. Os conceitos científicos, por sua vez, são enunciados no ambiente formal e nascem como generalizações da realidade. O processo de desenvolvimento dos dois se difere pelo fato de que, com base nos conceitos espontâneos, são formados os conceitos científicos que, por sua vez, reorganizam os conceitos espontâneos.

Os processos de desenvolvimento de funções psicológicas superiores são mediados pelas pessoas. No caso de nosso estudo, destacamos a mediação de um aluno mais "capaz" em relação aos seus colegas.

O avanço propiciado pela aprendizagem ocorre, de acordo com a perspectiva de Vigotski, quando um aluno e um colega mais capaz ou experiente interagem para realizar determinada tarefa. A interação entre os alunos é definida por níveis de ajuda (Beatón, 2005) que caracterizam os graus de independência entre eles.

Outro fator importante é apontado por Beatón (2005) sobre a ZDP, os níveis de ajuda. Por meio de uma representação gráfica Beatón demonstra que entre o desenvolvimento real e o desenvolvimento potencial, próprios da Zona de Desenvolvimento Proximal, acontecem com a ajuda de "outros", zonas de trabalho mais independentes. Assim, a ajuda leva o sujeito a ser mais independente, levando-o a uma nova etapa de desenvolvimento real. Ele ressalta que essas zonas mais próximas do desenvolvimento real podem ser mais vastas ou mais estreitas (Beatón, 2005, p. 235).

Beatón (2005) retorna a proposta de Vigotski de 4 níveis de ajuda dentro do processo de aprendizagem relacionando os níveis à independência do aluno. Essa relação é inversamente proporcional, pois, dependendo de em qual nível ele esteja, sua independência será maior ou menor. O aluno que necessite da ajuda de nível 1 pode ser considerado mais independente e o aluno que necessita de ajuda em nível 4 é aquele menos independente.

No nível 1, o professor, ou o colega mais capaz, somente direciona o aluno para o objetivo da atividade. Nesse nível, os alunos elaboram estratégias para encontrar a solução, utilizando seus possíveis conhecimentos específicos ou a junção de vários conhecimentos. Consideramos que nesse nível o aluno constrói seus instrumentos de resoluções.

No nível 2, é necessária a apresentação de uma atividade semelhante à aquela ou a outras já realizadas por ele para auxiliá-lo na aprendizagem. Assim, ao visualizar ou lembrar-se dos procedimentos já utilizados, ele é capaz de continuar, a resolução da atividade, sozinho.

No nível 3, a ação do agente mais capaz se torna mais contundente. Aluno e professor, ou o mais capaz na tarefa, passam a resolver a atividade, inicialmente juntos, deixando o aluno continuar.

No nível 4, não há como o aluno continuar sem uma ajuda e o mais capaz acaba por ter de terminar a atividade. Nesse nível, é total a dependência do aluno em relação àquele que está ajudando.

A consideração de um aluno como mais capaz não pode ser estanque, ou seja, o diálogo na aprendizagem matemática pode provocar posições intercambiáveis, de modo que cada uma contribui para as narrativas que vão sendo estruturadas coletivamente na solução da atividade, ou sejam o papel do mais capaz é muitas vezes intercambiável, principalmente se considerarmos que os participantes estão em níveis de conhecimento retrospectivo muito próximo. Como podemos destacar no diálogo a seguir.

Quadro 1: Processo de resolução da atividade de sequência -1

R: *Igual eu tou te falando, 5 vezes 5 forma 25, depois 36.*
F: *É. Mas não precisa fazer não. É só escrever.*
J: *É só escrever.*
R: *Multiplicando todos. Multiplicando todos pelo mesmo número.*
F: *Põe assim. Põe assim. Multiplicando 5 vezes 5, 6 vezes 6, 7 vezes 7, 8 vezes 8, 9 vezes nove.*
J: *Não é mais fácil colocar multiplicando todos?*
F: *Não J, tem de especificar.*
J: *Então deixa eu colocar, 4 vezes 4.*

Fonte: Arquivo pessoal

Essa realidade traz desafios para a análise dos diálogos, isso porque o diálogo expressa a comunhão em tempo real, em que as ajudas se sucedem em alternância com o mais capaz. Quando, no contexto do cotidiano de sala de aula, temos, prioritariamente, o professor como o mais capaz mediando esse processo, a identificação dos níveis de ajuda se torna mais explícita na medida em que o papel do mais capaz está posto e é fixo.

Para Vigotski, o que num momento é considerado nível de desenvolvimento potencial de um aluno, por meio da aprendizagem pode se transformar em nível de desenvolvimento real. Logo, podemos deduzir que um aluno pode transpor os níveis de ajuda - do nível 4 para o nível 1, por exemplo, conforme analisa Beatón (2003), do mais dependente para o menos dependente.

O nível 1 ocorre quando só a explicitação do professor é suficiente para que o aluno desenvolva a resolução da atividade. Em nossa investigação, o pesquisador procurou intervir o mínimo possível, deixando a cargo do grupo a interpretação da atividade. Neste caso, um aluno, muitas vezes, assumiu o papel de professor dentro do grupo, ou, como chamamos, do mais capaz. Como podemos demonstrar no diálogo a seguir:

Quadro 2: Processo de resolução da atividade de sequência -2

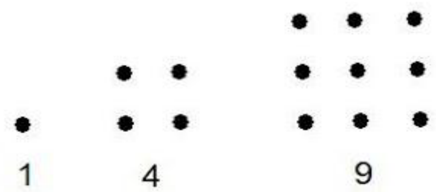
N: E aí gente? Eu não entendi!
Elas olham entre si e olham para mim esperando uma explicação.
N: A gente não entendeu, explica?
P: Então vamos lá. No primeiro desenho, gastou uma bolinha, no segundo desenho, quatro bolinhas, no terceiro desenho nove bolinhas. Aí, está te perguntando quantas bolinhas iriam gastar no quarto desenho.
N: No quarto quadrado? Peraí, pontinho... O quarto quadrado ira precisar. Quarto quadrado é este aqui, né, professor?
P: Primeiro desenho, uma bolinha, segundo desenho forma esse quadrado com quatro bolinhas, terceiro desenho forma um quadrado com nove bolinhas.
N: E o quarto?
P: O quarto desenho vai formar um quadrado com quantas bolinhas?
N: Nove.

Fonte: Arquivo pessoal

O quarto desenho, ao qual se referi o diálogo acima, era a próxima questão da atividade, para a qual era necessário indicar a quantidade de bolinhas para formar o próximo desenho.

Quadro 3: Atividade de sequência aplicada aos alunos

Observe o desenho:
1º 2º 3º



Quantas bolinhas o quarto desenho irá precisar?

Fonte: Arquivo pessoal

Nesse mesmo exemplo, podemos considerar o aluno mais capaz, no nível 2, em que, para a resolução da questão, utilizou a figura, observando os elementos da sequência.

Mesmo tendo por princípio evitar a nossa intervenção nos exercícios, em vários momentos, os alunos solicitaram esclarecimento em alguns pontos na atividade. Uma suposta justificativa para essa dependência com relação ao professor pode ser a metodologia de trabalho empregada na fase I do E.F. e os aspectos peculiares que envolvem os alunos nessa etapa da vida e que não vamos nos ater a essa questão no momento.

O diálogo esteve presente em quase todo o momento da pesquisa. Se considerarmos os níveis de ajuda, de acordo com Beatón, eles estariam no nível 4. Porém, nos momentos das atividades em que perguntas instigavam o pensamento narrativo dos alunos houve uma reluta do mais capaz em auxiliar os colegas. Com isso, não houve muitas respostas diferentes, pois a equipe não conseguiu responder, e o mais capaz acabou por permitir que os colegas copiassem dele.

As análises apresentadas puderam mostrar que na aprendizagem propiciada pelo diálogo no espaço da ZDP, as posições entre os participantes foram de certa forma intercambiáveis. O mais capaz na tarefa, em um determinado momento, pôde ser surpreendido pelo colega que pouco antes não havia entendido e, de repente, dá um salto que acaba por levantar pontos que ainda não estavam tão claros para o que havia se colocado antes como o mais capaz.

Uma possibilidade de explicação pode ser o fato de que os participantes do grupo têm níveis de conhecimento retrospectivo muito próximos. Nesse sentido, a interação em tempo real permite processos evolutivos muito rápidos como se o pensamento fosse um só, completado continuamente por empréstimos da palavra do outro, em tempo real.

Mas como identificar em qual nível de ajuda o aluno está? Para aqueles em que a participação nas aulas é ativa, não será difícil para professor responder a essa pergunta, porém nem sempre, ou quase nunca isso é possível, pois as dificuldades na aprendizagem e outros fatores podem fazer com que os alunos não realizem a tarefa: copiam do colega ou simplesmente resolvem sem se preocupar porque ou como. São essas situações que dão relevo à criatividade do professor e acreditamos que essa pesquisa poderá auxiliá-los na criação de atividades que deem ênfase à promoção de diálogos entre os alunos nos momentos de resolução de atividades matemáticas.

Ressaltamos que somente com uma produção de diálogos, por meio de interação, podemos identificar em que nível de ajuda um aluno pode estar situado com relação a determinado conteúdo. Por isso, insistimos na importância de provocar nos alunos o hábito do diálogo, que só será efetivado quando dermos voz a eles.

Referências bibliográficas

Beatón, G. A. (2003). El papel de los "otros" y SUS características em el processo de potenciacon Del desarrolo humano. *Horizontes Educacionales*, 8, 1-87, Recuperado em 24 de abril, 2014, de <file:///C:/Users/Cliente/Downloads/Dialnet- ElPapelDeLosOtrosYSusCaracteristicasEnElProcesoDeP-3994272.pdf

Beatón, G. A. (2005). *La persona em el enfoque histórico cultural*. São Paulo: Linear

Lüdke, M.; André, M. E.D.A. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.*São Paulo, EPU.

Silva, A. M. da. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática.*256 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP – Rio Claro, S.P.

Vygotsky, L. S. (1976) *Mind in society*: the development of psychological processes. Harvard University Press,

Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e Linguagem*– Lisboa, Portugal: Edições Antídoto.

Vygotsky, L. S. (2010). *A formação social da mente*; O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores – São Paulo: Martins Fontes.

Valentim, M. A. (2015). *Pensamento narrativo na aprendizagem matemática*: estudo com alunos de ensino fundamental na resolução de atividade de álgebra. Tese Doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Valentim, M.A., Oliveira, M.H.P. (2016). A interpretação narrativa da realidade. *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática*. São Paulo.

RELAÇÕES INSTITUCIONAIS ESPERADAS E EXISTENTES PARA O ENSINO DA NOÇÃO DE DERIVADA DE UMA FUNÇÃO NO BRASIL

EXPECTED AND EXISTING INSTITUTIONAL RELATIONS FOR TEACHING THE NOTION OF THE DERIVATIVE OF A FUNCTION IN BRAZIL

Sirlene Neves de Andrade, Marlene Alves Dias,Valdir Bezerra dos Santos Júnior
Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Federal de Pernambuco. (Brasil)
sirlene-neves@hotmail.com, maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com

Resumo

Analisamos aqui as relações institucionais sobre a noção de derivada de uma função desenvolvidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior. Adotamos como referencial teórico central a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e seus colaboradores e, como referenciais de apoio, as abordagens teóricas em termos de quadros de Douady, de níveis de conhecimento esperados dos estudantes, segundo Robert e de pontos de vista, conforme Rogalski e Thruston. Os resultados mostram que as relações institucionais propostas para serem desenvolvidas na Educação Básica são consideradas como conhecimentos prévios mobilizáveis no Ensino Superior, o que nem sempre corresponde à realidade. É preciso uma mudança dos paradigmas de ensino, de modo que estejam centrados em disciplinas ou competências e habilidades para que o aluno seja o responsável central de sua aprendizagem e o professor aquele que propõe situações para as quais será o mediador.

Palavras-chave: derivada de função, relações institucionais, pontos de vista

Abstract

In this paper, we analyze the institutional relations about the notion of derivative of a function developed in the discipline of Differential and Integral Calculus in Higher Education. We have adopted as the central theoretical reference, the anthropological theory of didactics by Chevallard and his collaborators, theoretical approaches related to Douady's frameworks, the level of knowledge expected from the students, according to Robert, and points of view according to Rogalski and Thruston. The results show that the institutional relations proposed to be developed in Basic Education are considered as prior knowledge that can be enhanced in Higher Education, which does not always correspond to reality. It is necessary to change the paradigms of teaching centered in disciplines or competences and abilities, so that the students play the leading role in their learning process, while the teacher proposes situations in which he will be the mediator.

Key words: function derivative, institutional relationships, points of view

Introdução

Em geral, no Brasil, os estudantes que chegam ao Ensino Superior apresentam dificuldades matemáticas que os fazem, muitas vezes, desistir do curso que escolheram; em particular essas dificuldades são sentidas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e, mais especificamente, nos cursos de ciências exatas, como as licenciaturas (formação inicial de professores) e as engenharias.

Considerando a problemática recorrente acima descrita, nos colocamos as seguintes questões: Quais as expectativas institucionais sobre as relações pessoais dos estudantes que iniciam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, quando se considera a noção de derivada de uma função? As relações institucionais esperadas e existentes estão em conformidade com as relações pessoais dos estudantes? Que meios podemos propor para tentar mudar o quadro atual dos cursos de ciências exatas, em particular, dos cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática?

Isso nos conduziu a considerar como objetivo de nossa pesquisa o estudo das relações institucionais esperadas e existentes para o ensino da noção de derivada de uma função para a disciplina de introdução ao Cálculo Diferencial e Integral de forma a compreendermos as expectativas institucionais sobre as relações pessoais que os estudantes do Ensino Superior mantêm sobre a noção de função e de derivada de uma função e, mais especificamente, sobre os novos conceitos e noções que serão desenvolvidos no Ensino Superior, de modo a identificar possíveis meios que nos auxiliem a mudar a situação em que nos encontramos atualmente.

Para tratar das questões acima expostas e atingir nosso objetivo, recorremos à Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard e seus colaboradores, uma vez que uma das premissas da TAD, segundo Chevallard (2015), é que a relação pessoal a um objeto do saber é guiada pela sujeição de uma pessoa a uma instituição; assim, para o autor, a relação institucional desenha a relação pessoal de uma pessoa que seria o sujeito perfeito da instituição I em posição p, à qual ele se submete e ocupa essa determinada posição p.
Desse modo, para operacionalizar nossas análises, escolhemos como referencial teórico central a TAD, em particular os trabalhos de Bosch &Chevallard (1999) e Chevallard (1992, 1999, 2015) e, como abordagens teóricas de apoio, as noções de níveis de conceituação e níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, segundo Robert (1997, 1998), as noções de quadro e mudança de quadros de Douady (1984, 1992) e as noções de pontos de vista, de acordo com Rogalski (2001) e Thruston (1995).

Na sequência, apresentamos os elementos teóricos que nos auxiliaram no desenvolvimento da pesquisa.

Referencial teórico

Iniciamos considerando as noções associadas à TAD que foram, mais especificamente, utilizadas no desenvolvimento da pesquisa, a saber: as noções de relação institucional e pessoal, praxeologias e ostensivos e não ostensivos.

Conforme Chevallard (1992), as noções de relações institucionais e pessoais correspondem às ferramentas que delineiam o método por ele concebido para descrever e estudar as práticas sociais, ou seja, trata-se de um instrumento que possibilita descrever e analisar as práticas sociais.

A partir da explicitação acima, Chevallard (1992, 2015) considera inicialmente a noção de relação a um objeto O, ou seja, para uma determinada pessoa X e para um dado objeto O, essa noção designa o sistema mais ou menos integrado, mais ou menos rico, de todas as maneiras que X pode conectar-se com O. Na sequência, ele observa que essa entidade indicada por R(X, O) reúne o que X sabe (ou crê saber) sobre O, o que ele pode dizer, como ele pode usá-lo ou manuseá-lo, o que ele sente face a O, suas emoções, o conteúdo de seus sonhos em que o objeto O aparece etc. Após definir objeto e relação pessoal R(X, O), o autor explicita por meio de exemplos que na teoria tudo é objeto. Chevallard (2015) observa ainda que a relação pessoal a um objeto varia de pessoa para pessoa, ressaltando que $R(X, O) = \emptyset$, significa que "X não conhece o objeto O", ao contrário, se $R(X, O) \neq \emptyset$, "X conhece o objeto O", o que pode ocorrer simplesmente quando X "ouviu falar" de O, apenas ouviu pronunciar o nome de O, o que conduz o autor a considerar que o verbo conhecer pode ser, em TAD, minimalista ou pode designar uma ampla variedade de conteúdo da relação R(X,O), assim uma pessoa X que conhece O pode ser um eminente especialista de O.

Após definir relação pessoal com um objeto do saber, o autor considera o objeto instituição, ressaltando que este tem em TAD um sentido mais amplo que o usual. Além disso, segundo o autor, uma dada instituição I oferece diferentes posições, como, por exemplo: em uma classe, existe pelo menos a posição de professor de aluno. Isso conduz Chevallard (2015) a observar que uma posição p em uma instituição I pode num determinado momento não ser ocupada ou ser ocupada por várias pessoas. Quando uma pessoa X ocupar a posição p de I, esta pessoa se tornará sujeito de I em posição p, o que indica que ela se sujeitou a ocupar a posição p na instituição I, indicadas por $R_I(p, O)$ que representa a relação pessoal de uma pessoa X, que seria o sujeito perfeito de I em posição p. Consoante Chevallard (2015), tal pessoa não existe, visto que toda pessoa que se sujeita à instituição I está condenada a aparecer um dia como um mau sujeito de I. O autor considera que precisamos nos contentar em encontrar certa conformidade de R(X, O) com $R_I(p, O)$ do ponto de vista da instituição I.

Chevallard (2015), após denominar universo cognitivo de um indivíduo os conjuntos de suas relações institucionais e observar que este conjunto é resultado de sujeições passadas e presentes, observa que, para estudar o surgimento e a evolução de uma relação institucional ou pessoal a um objeto O, é preciso observar a instituição ou o indivíduo em atividades para as quais é necessário acionar esse objeto, o que remete progressivamente às noções tipos de tarefas (T), técnicas (σ), tecnologias (θ) e teorias (Θ), sendo que a quádrupla formada por essas noções é denominada pelo autor de praxeologia.

Conforme Chevallard (1999), a noção de praxeologia permite analisar as práticas matemáticas associando os saberes matemáticos a essas práticas. Observando que *praxeologia* é uma palavra derivada da palavra grega *práxis*, que na TAD corresponde ao bloco do saber fazer composto pelo tipo de tarefa e pela técnica, indicado pelo par $[T, \sigma]$, e da palavra grega "logos", que na TAD corresponde ao bloco do saber composto pela tecnologia e pela teoria, indicado por $[\theta, \Theta]$.

Segundo o autor, as tarefas, os tipos de tarefas não aparecem naturalmente, pois são construções institucionais, cuja reconstrução em uma determinada instituição, por exemplo, em uma classe, é um problema em si, o que a coloca como objeto de estudo da didática. Após observar que as técnicas não se reduzem a algoritmos e que dependem dos atores da instituição, Chevallard (1999) define tecnologia como um discurso racional (logos) sobre a técnica, cuja função é também de explicar, tornar compreensível e clarificar a técnica, além de produzir técnicas. Assim, a necessidade de explicitar afirmações contidas na tecnologia conduz a um nível superior de justificativa, explicação e produção, que o autor denomina teoria, indicada por Θ, que corresponde à tecnologia da tecnologia.

Utilizamos ainda na pesquisa as noções de ostensivos e não ostensivos. De acordo com Chevallard (1994), ao se observar toda atividade humana, vê-se que ela é composta por um determinado número de tarefas, podendo ser analisada por meio da noção de praxeologia.

Existem tarefas que se naturalizam e se tornam rotineiras, como "subir ou descer uma escada" e tarefas problemáticas, para as quais é preciso criar uma técnica, o que consiste em uma ação destinada aos estudantes e professores, tornado o estudo de uma tarefa colaborativo, mas que muitas vezes é deixada a cargo do estudante, em geral, sob a forma de listas de exercícios. Além disso, é preciso estar ciente de que tarefas rotineiras podem tornar-se problemáticas, exigindo a criação de uma nova técnica.

Ao considerar a importância da criação de uma técnica para a solução de tarefas, Chevallard (1994) lança as seguintes questões: de que é feita uma determinada técnica? De quais *ingredientes* ela é composta? Em que consiste a utilização de uma técnica?

Para responder a essas questões, o pesquisador introduz dois tipos de objetos, a saber: os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos, cujas definições são: os objetos ostensivos - os que têm para nós uma forma material, sensível; mas também são considerados objetos ostensivos os gestos, as palavras, os esquemas e os formalismos. Como exemplos de ostensivos, o pesquisador apresenta: os objetos materiais; os gestos; as palavras e, mais genericamente, o discurso; os esquemas, desenhos, grafismos; as escritas e formalismos. Segundo o autor, os ostensivos têm como propriedade a possibilidade de serem manipulados.

Após definir e dar exemplos de objetos ostensivos, Chevallard (1994) define os objetos não ostensivos, que representam usualmente as noções, conceitos, ideias etc. O autor esclarece que os objetos não ostensivos não podem ser manipulados, eles somente podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos que lhe são associados. Desse modo, a manipulação dos ostensivos é regrada pelos não ostensivos e esses últimos, inversamente, são evocados com a ajuda dos ostensivos, originando assim uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos.

Explicitadas as noções da TAD utilizadas, apresentamos brevemente as noções de níveis de conceituação de níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme definições de Robert (1997, 1998).

Segundo Robert (1997), os níveis de conceituação são os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual. Muitas noções matemáticas podem ser abordadas em vários níveis de conceituação, sempre parcialmente encaixados, pois os objetos iniciais mudam, eles se tornam mais gerais, o que possibilita introduzir novas estruturas, mais ricas, e para isso necessitam de um novo formalismo, a eles adaptado. Em geral, os exercícios ditos teóricos de um determinado nível correspondem aos teoremas do nível seguinte. Dessa forma, várias ordens de apresentação são sempre possíveis, não existe hierarquia absoluta entre esses níveis, que, pelo menos durante os estudos, dependem apenas do ensino efetivo, ou seja, das diferentes propostas de ensino.

Após considerar que o ensino das noções matemáticas associadas a um campo conceitual depende da escolha da ordem de apresentação, Robert (1998) define os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber:

O nível técnicorefere-se a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Derive a função $y = x^3 + 5x^2 - 1$.

O nível mobilizável equivale a um início de justaposição de saberes de determinado quadro, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e o objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Exemplo: Esboçar o gráfico da função $y = x^3 + 5x^2 - 1$ utilizando a noção de derivada.

O nível disponível corresponde a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, a poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos.Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos.Exemplo: Os analistas financeiros de uma empresa chegaram a um modelo matemático que permite calcular a arrecadação mensal da empresa ao longo de 24 meses, por meio da função $A(x) = x^3/3 - 11x^2 + 117x + 124$. Em que $0 \leq x \leq 24$ é o tempo, em meses, e a arrecadação $A(x)$ é dada em milhões de reais. A arrecadação da empresa começou a decrescer e, depois, retomou o crescimento, respectivamente, a partir dos meses: a) $x = 0$ e $x = 11$; b) $x = 4$ e $x = 7$; c) $x = 8$ e $x = 16$. d) $x = 9$ e $x = 13$; e) $x = 11$ e $x = 22$. (Brasil, 2011).

Na sequência, apresentamos as noções de quadro e mudança de quadros, segundo definição de Douady (1984, 1992).

As noções de quadro e mudança de quadros foram introduzidas por Douady (1984, 1992) que, a partir de uma análise epistemológica sobre o trabalho do matemático profissional, coloca em evidência a dualidade dos conceitos matemáticos, os quais, em geral, funcionam como ferramentas implícitas e, em seguida, explícitas da atividade matemática antes de adquirirem o status de objeto e de serem trabalhados como tal. Seguindo esta perspectiva, a pesquisadora considera ainda o papel desempenhado pelas mudanças de quadros nas atividades e na produção matemática e as transpõe para o ensino por meio dos jogos de quadros.

Em nossas análises, identificamos os quadros: algébrico, geométrico e analítico, sendo este último constituído dos objetos do Cálculo Diferencial e Integral.
Douady (1984) define ferramenta implícita como um conceito em elaboração, podendo durar vários anos; ferramenta explícita como um conceito ou uma noção utilizada intencionalmente para resolver um problema e objeto como um componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente.

O objeto matemático é parte de um edifício mais amplo que é o saber matemático, constituindo assim o que Douady (1984) denomina quadro, que representa um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. As imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferirem pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Douady (1984, 1992) define as mudanças de quadros como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e possibilitam utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial.
Consideramos ainda no desenvolvimento da pesquisa as noções de ponto de vista segundo Rogalski (2001) e, mais particularmente, os pontos de vista sobre a noção de derivada definidos em Thurston (1995).

Rogalski (2001) ressalta que dois pontos de vista diferentes sobre um objeto matemático são diferentesmaneiras de observá-lo, de fazê-lo funcionar, eventualmente de defini-lo. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro.

Um exemplo interessante de pontos de vista sobre o objeto matemático derivada é o de Thruston (1994), que apresenta uma lista não exaustiva das diferentes maneiras com que os matemáticos são capazes de conceber a noção de derivada de uma função, como podemos notar no extrato que segue.

[...] 1. Infinitesimal: a razão da mudança infinitesimal do valor da função pela mudança infinitesimal da variável. 2. Simbólico: a derivada de x^n é nx^{n-1}, a derivada de sen(x) é cos(x), a derivada de fog é f'og*g', etc. 3. Lógico: f(x) = d se e somente se, para cada ε, existe um δ tal que se $0<|\Delta x|<\delta$, então $\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-d\right|<\varepsilon$. 4. Geométrico: a derivada é a inclinação da tangente ao gráfico, se o gráfico tem uma tangente nesse ponto. 5. Taxa: a velocidade instantânea de f(t) se t é o tempo. 6. Aproximação: a derivada de uma função é a melhor aproximação linear dessa função próxima do ponto. 7. Microscópico: a derivada de uma função é o limite do que se observa com um microscópio aumentando cada vez mais (Thurston, 1995, p. 5).

A seguir, apresentamos a metodologia utilizada no desenvolvimento da pesquisa.

Metodologia

Em coerência entre o referencial teórico e o objetivo da pesquisa, que visa responder às questões apresentadas na introdução, realizamos uma pesquisa qualitativa utilizando o método da pesquisa documental, conforme definição de Lüdke e André (2013), em que analisamos documentos contemporâneos ou retrospectivos considerados cientificamente autênticos.

Para tal, analisamos os planos de ensino da disciplina que contém as noções associadas à derivada de universidades públicas e privadas dos cursos de Licenciatura em Matemática, visando identificar as relações institucionais esperadas. Analisamos ainda livros didáticos indicados na bibliografia básica desses planos, em particular o livro de Stewart (2014), a fim de identificar as possíveis relações institucionais existentes e verificar se essas são coerentes com as propostas de ensino e, finalmente, analisamos a macro avaliação Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) para verificar quais são as exigências institucionais, o que permite observar o que se espera como relação pessoal dos futuros professores de Matemática em relação ao objeto derivada de uma função.

Para a análise dos documentos, construímos uma grade de análise inspirada em Dias (1998). Nessa grade, identificamos os tipos de tarefas, as técnicas, tecnologias e teorias associadas, os pontos de vista, segundo Thruston, privilegiados, os ostensivos em jogo, os quadros e as mudanças de quadros necessárias, os níveis de conhecimentos esperados do estudante em relação às noções indispensáveis para o desenvolvimento da tarefa.

Exemplo de aplicação da grade de análise

Tipos de tarefa: Encontrar os valores máximo e mínimo absolutos para determinar o intervalo em que a função decresce e volta a crescer, sendo f uma função contínua em um intervalo fechado [a, b].

Exemplo de tarefa: A tarefa do ENADE enunciada como exemplo para o nível disponível.
Técnicas: *técnica 1 - encontrar os valores de f nos números (pontos) críticos entre 0 e 24, ou seja, verificar que a função f é contínua no intervalo considerado, calcular a primeira derivada e determinar os pontos críticos, igualando a primeira derivada a zero. Ao encontrar os pontos críticos x= 9 e x =13, verificar se os valores de f para esses pontos pertencem ao intervalo considerado e comparar os resultados. O maior valor f (9) = 529 é o valor máximo absoluto e o menor valor f (13) = 518,3 é o valor mínimo absoluto. *técnica 2 - esboçar o gráfico da função dada, utilizando as noções e propriedades da primeira e segunda derivadas. *técnica 3 - representar graficamente a função dada utilizando, por exemplo, o software Geogebra e visualizar os pontos de máximo e mínimo. Importante observar que esta técnica não pode ser utilizada no exame ENADE, mas pode auxiliar professores em aula. *técnica 4 - esboçar o gráfico ponto a ponto para identificar o intervalo aproximado visualmente.

Tecnologias para cada técnica: *tecnologia 1- noções de função contínua em um intervalo, derivada de uma função contínua em um intervalo, pontos críticos, pontos de máximo e mínimo absolutos de uma função contínua em um intervalo e intervalos em que a função é crescente e decrescente.*tecnologia 2 - noções de função contínua em um intervalo, noções de primeira e segunda derivada de uma função contínua em um intervalo, de pontos críticos, de pontos de máximo e mínimo absolutos e pontos de inflexão e intervalos em que a função é crescente e decrescente. *tecnologia 3 - noções instrumentais para a utilização de um software, que segundo Rabardel (1995) corresponde às construções mentais do sujeito quando se apropria do artefato para resolver tarefas, no caso, o artefato sendo o software Geogebra, função crescente e decrescente e pontos de máximo e mínimo. No caso de um curso, pode-se articular a representação gráfica com o estudo das noções indicadas para as técnicas 1, 2 e 3. *tecnologia 4 - noção de valor numérico de uma função e gráfico de uma função definida em um intervalo. Trata-se de uma técnica cujo interesse é mostrar a importância da noção de derivada para o estudo dos intervalos de variação de uma função.

Teorias associadas às tecnologias das técnicas: Teoria das funções contínuas e da derivada de funções contínuas para as técnicas 1, 2 e 3 e teoria da instrumentação e instrumentalização para a técnica 3. Teoria das funções de uma variável real a valores reais para a técnica 4.

Quadro em que a tarefa é enunciada: algébrico e passagem a quadro analítico

Ostensivos: ostensivo algébrico funcional para a função e sua derivada para a técnica 1. Ostensivo algébrico funcional para a função e sua derivada, ostensivo gráfico e ostensivo ponto no plano cartesiano para as técnicas 2 e 3. Ostensivo artefato computacional para a técnica 3. Ostensivo algébrico e gráfico de uma função de uma variável real a valores reais e ostensivo ponto para a técnica 4.

Não ostensivos necessários: Noções de função contínua, derivada e suas propriedades para funções contínuas em intervalos, regras de derivação de funções polinomiais, resolução de equação do 2º grau, cálculo do valor numérico de uma função, interpretação de gráfico de uma função e artefatos computacionais para o estudo de funções. Aqui a noção de artefato computacional considerada é a definida por Rabardel (1995), a saber: qualquer objeto utilizado intencionalmente, podendo ser um computador ou um software.
Nível de conhecimento esperado dos estudantes: Disponível.

Resultados

As relações pessoais esperadas dos estudantes que iniciam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foram identificadas por meio da análise de planos de ensino da disciplina para cursos de Licenciatura de Matemática de universidades públicas e privadas. Observou-se que, em geral, as universidades públicas introduzem um curso de pré-cálculo, ou um semestre para revisitar noções matemáticas desenvolvidas no Ensino Médio e iniciam a disciplina de Cálculo introduzindo as noções básicas de limite e derivada, utilizando para a noção de derivada os pontos de vista infinitesimal, simbólico, geométrico e aproximação, o que representa uma dificuldade para os estudantes, pois estes não articulam os conhecimentos desenvolvidos nas duas disciplinas, exigindo uma atenção maior da parte dos professores.

Nas universidades privadas, em geral, a revisita a conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio acontece por meio de uma disciplina de Fundamentos de Matemática, que tenta abordar conteúdos desenvolvidos no Ensino Médio, sendo a noção de função de uma variável real a valores reais revisitada ainda na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, mas ao introduzir as noções básicas de limite de derivada por meio dos pontos de vista infinitesimal, simbólico, geométrico e aproximação, fica sob a responsabilidade dos professores a articulação entre esses conteúdos, o que, em geral, parece não estar sendo feito na proporção das necessidades dos estudantes, que precisariam iniciar esse processo de articulação de conhecimentos desde o início de seus estudos matemáticos.

Apesar de os documentos oficiais da Educação Básica (alunos de 6 a 17 anos) indicarem essa necessidade, diversas dificuldades precisam ser resolvidas, em particular, as relacionadas à formação inicial e contínua dos professores, para que estes possam realmente articular os saberes matemáticos do ano em que estão ministrando aulas com os dos anos anteriores e posteriores.

Em geral, no Brasil, em todos os níveis de ensino, tende-se a ficar confinado aos livros didáticos. Isso é reforçado pelo programa do livro didático para a Educação Básica, sendo importante, porém, em alguns casos, restringe-se a utilização de outros materiais, em particular, por questões financeiras. No Ensino Superior, os planos de ensino apresentam uma bibliografia básica e complementar e vários livros são indicados, mas, em geral, muitos estudantes utilizam apenas os livros da bibliografia básica.

O livro de Cálculo Diferencial e Integral de Stewart (2014) é um dos mais indicados na bibliografia básica dessa disciplina e, na análise desse material, encontramos elementos de revisita articulada entre as noções desenvolvidas no Ensino Médio e as novas noções introduzidas no Ensino Superior, mas nos parece que o maior problema é o tempo necessário para que se possam trabalhar, de forma articulada, os conhecimentos prévios dos estudantes com os novos conhecimentos que estão sendo desenvolvidos, ou seja, dispomos de material, mas precisamos motivar os estudantes para um estudo em que eles sejam capazes de conduzir pesquisas pessoais e o professor seja o orientador dessas pesquisas.

A análise do ENADE tende a mostrar que os conhecimentos esperados como mobilizável e disponível dos estudantes que concluem o Ensino Superior estão em conformidade com os planos de ensino das universidades públicas e privadas e com as referenciais bibliográficas encontradas nesses planos, mas como se trata de um exame de avaliação do Ensino Superior e não dos estudantes propriamente dito, observamos que os resultados apresentados por estes estudantes estão aquém do desejado, mas servem de alerta para que as universidades procurem novos meios de conduzir esses estudantes a uma aprendizagem com significado.

Existem ainda diversas pesquisas em Educação Matemática, em particular, sobre a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, que podem auxiliar estudantes e professores a melhorarem as condições de ensino e aprendizagem dessa disciplina que, no Brasil, tem provocado o abandono dos cursos de ciências exatas por um grande número de estudantes.

Considerações finais

O estudo tende a mostrar a pouca importância dada à articulação entre os conhecimentos prévios dos estudantes e a introdução de novos conhecimentos, em particular, em utilizar pontos de vista já trabalhados para auxiliar na introdução de novos pontos de vista sobre a noção de derivada de uma função, em particular, o de taxa de variação, que é introduzido no Ensino Médio sem se referir explicitamente à noção de derivada de uma função.

Apesar disso, é dada ênfase ao ostensivo gráfico, um trabalho que auxilia na visualização do conceito e no desenvolvimento dos pontos de vista infinitesimal, simbólico e lógico, mas ainda é pouco utilizado o recurso computacional, ficando a cargo dos próprios estudantes.

O mesmo ocorre para as relações institucionais existentes, em que observamos que se privilegia a passagem do ostensivo algébrico de uma função para o ostensivo gráfico por meio das propriedades da derivada da função dada, o que possibilita determinar máximos, mínimo, pontos de inflexão, concavidade e assim utilizar um novo método para esboçar gráficos de funções. Entretanto pouca atenção é dada à passagem do gráfico da derivada para o gráfico da função, o que parece ser uma das expectativas institucionais, quando nos referimos ao ENADE.

A preocupação com o ENADE parece dificultar a introdução de novas metodologias de ensino, pois as universidades são avaliadas em função dessa avaliação. As novas metodologias como, por exemplo, metodologias ativas, percurso de estudo e pesquisa, aulas investigativas nas quais o aluno é responsável por sua aprendizagem, precisando dedicar-se ao estudo e aprendizagem de forma autônoma e participativa, que poderiam auxiliar a modificar o estado atual do processo de ensino e aprendizagem, parecem ainda ter apenas o papel de referências para as pesquisas, o que precisa ser alterado, necessitando de uma mudança dos paradigmas escolares consubstanciados em disciplinas isoladas ou no desenvolvimento de competências e habilidades listadas por especialistas para serem avaliadas por meio de provas que, na realidade, indicam apenas a necessidade de mudança. Certamente, para que essas mudanças ocorram, é preciso repensar os cursos de formação inicial e continuada de professores, desenvolvendo com eles essas novas metodologias, em particular, as que colocam os estudantes como responsáveis por sua aprendizagem, além de construir propostas de ensino e aprendizagem, que sejam exequíveis.

Finalmente, ressaltamos que é preciso uma mudança dos paradigmas de ensino, de modo que estejam centrados em disciplinas ou competências e habilidades para que se considere o aluno como o responsável central de sua aprendizagem e o professor, aquele que propõe situações para as quais será o mediador, o que implica mudanças profundas no papel do professor e do estudante, no tempo de estudo que supõe também a pesquisa, se desejamos propor novos meios que conduzam os estudantes a uma aprendizagem autônoma e participativa, que por sua vez mostrará a importância de um desenvolvimento pessoal contínuo.

Referências bibliográficas

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activitémathématiqueauxostensifs. RecherchesenDidactiquedesMathématiques 19(1), 77- 123.

Brasil. (2011). Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes. Recuperado em 28 de julho de 2018 de http://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/provas/2011/MATEMATICA.pdf.

Chevallard, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapport au savoir. Recuperado em 05 de agosto de 2018 de http://www.gfen.asso.fr/fr/dial155

Chevallard, Y. (1999). L'analysedes pratiques enseignantesenthéorieanthropologiquedudidactique. Recuperado em 4 de agosto de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Recuperado em 06 de agosto de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique:perspectivesapportéespar une approche anthropologique. Recuperado em 06 de agosto de 2018 de http://www.numdam.org/article/PSMIR_1991___S6_160_0.pdf

Dias, M. A. (1998). Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbrelinéaire. Tese de doutorado publicada, Université Paris VII. França.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Douady, R. (1984). Jeux de cadre et dialectiqueoutilobjetdansl'enseignementdesmathématiques. Tese de doutorado publicada, Université Paris VII. França.

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies, approches cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin.

Robert, A. (1998). Outils d'analysedescontenusmathématiques à enseigneraulycée et à l'université. RecherchesenDidactiquedesMathématiques 18(2), 139-190.

Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignementsecondaire. En J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et al. (Eds), L'enseignement de l'algèbrelinéaireenquestion (pp. 149-157), Grenoble: La PenséeSauvageÉditions.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In Actes de la journée en hommage à Régine Douady, 13-30. Paris: Didirem.

Stewart, J. (2014). Cálculo. São Paulo: Cengage Learning.

Thruston, W. P. (1995). Preuve et progress en mathématiques. Repères IREM 21, 5-26.

ESTUDIO SOBRE EL PAPEL DE LA CONFRONTACIÓN EN EL TRATAMIENTO DE LA FÍSICA CLÁSICA DE NEWTON AL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

STUDY ON THE ROLE OF COMPARISON IN THE APPROACH OF NEWTON´S CLASSICAL PHYSICS TO SCHOOL MATHEMATICAL DISCOURSE

Roger Pérez García, Ricardo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
roger.perez@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
El propósito de nuestra investigación es vislumbrar el papel prioritario que desempeñan los libros de textos y así destacar la presencia de ideas variacionales en libros de naturaleza distinta. Para ello, con base en la caracterización de los elementos que conforman el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) realizamos un estudio de difusión institucional del conocimiento mediante la confrontación entre la obra original *Principia* (Newton, 1726) y el libro de texto *Cálculo Diferencial e Integral* (Granville, 1980). El estudio se enmarca en una fase *documental, estructural* y *confrontación* de situaciones variacionales homólogas en las obras que reportamos. Una vez, realizado este tipo de estudio da cuenta que los usos y significados que se dan en condiciones socioculturales configuran la construcción del conocimiento matemático y a su vez generan las explicaciones a los fenómenos a luz del PyLV.

Palabras clave: pensamiento y lenguaje variacional, confrontación, ideas variacionales

Abstract
The purpose of our research is to glimpse the priority role played by textbooks and thus highlight the presence of variational ideas in books of a different nature. To do this, based on the characterization of the elements that make up the Thought and Variational Language (PyLV) we conducted a study of the institutional dissemination of knowledge through the comparison between the original work Principia (Newton, 1726) and the textbook Differential Calculus and Integral (Granville, 1980). The study is framed in a documentary, structural phase and is currently deepened in the confrontation of homologous variational situations in the works we report. Once, this type of study realized that the uses and meanings that are given in sociocultural conditions configure the construction of mathematical knowledge and in turn generate explanations to the phenomena in light of the PyLV.

Key words: variational thinking and language, comparison, variational ideas

Introducción

Muchos han sido los colegas que han forjado los andamios de una línea de investigación, que hoy brinda sentido a diversas actividades y acciones en nuestro quehacer cotidiano: Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV). Dada la intencionalidad de significar a los objetos matemáticos a partir de las prácticas propias de la cuantificación de un fenómeno, esta línea promueve un carácter transversal.

Sería muy notorio establecer vínculo entre temas puramente físicos con teoremas o algoritmos matemáticos, sin embargo, hablar de variación y cambio en esta dupla, podría fomentar una concepción mucho más rica en significados dentro del actual discurso Matemático Escolar (dME). En nuestro caso, centraremos la atención en el análisis del dME desde el libro mismo. Y es que, como principal herramienta didáctica empleada por los docentes, constituye uno de los recursos primordiales en la actividad educativa y a su vez en ellos se materializa la visión que fundamenta a la Matemática Escolar.

A lo largo de nuestra investigación se utilizará indistintamente los términos de textos, libros escolares y manuales referido a aquellos libros utilizados por estudiantes y profesores a lo largo del proceso de aprendizaje y diferenciando a su vez a la obra histórica dada su intencionalidad.

Según nos reporta Cantoral (2013), el Cálculo es un producto cultural y no sólo una colección de teoremas y algoritmo. Es fruto de la actividad humana. En este sentido ubicaremos a la figura del texto de Cálculo en el proceso de aprendizaje.

Trataremos la construcción social del conocimiento matemático, en el sentido que éste se produce a través de las prácticas, es decir no es preexistente a la experiencia. Además de su difusión institucional a la vez que se pretende democratizar el aprendizaje de la matemática, señalando de esta forma el objeto de estudio que persigue esta teoría.

Es decir, modeliza las dinámicas del saber o conocimiento puesto en uso atendiendo al aporte fundamental que nos brinda con la transición de un conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso (Cantoral, 2016).

El Pensamiento y Lenguaje Variacional, ha sido la fuente de inspiración del programa socioepistemológico, la cual subyace a nuestro interés para el tratamiento del cambio y la variación en libros de diferentes contextos.

Si bien es cierto que el estudio de la variación es un elemento necesario para poder significar ideas y conceptos del Cálculo (Caballero, 2012), las investigaciones en Matemática Educativa han documentado que el actual dME no propicia estas ideas variacionales. A partir de entonces sirve como motivación para los autores de la investigación preguntarse: ¿cómo *viven* las ideas variacionales en libros de naturaleza distinta? Para evidenciarlo elegimos la obra *Principia* (Newton, 1687) yel libro de texto *Cálculo Diferencial e Integral* (Granville, 1980).

Nuestra hipótesis de investigación sostiene que el Pensamiento y Lenguaje Variacional se encuentra en diversos escenarios de la vida diaria, y aun así en libros de naturaleza distinta. Empero, la posibilidad de que se manifieste implícitamente; el tratamiento centrado en las prácticas alrededor del objeto permitirá entender qué cambia, cómo cambia y cuanto cambia eso que estácambiando.

Por ello, en este trabajo nos propusimos como objetivo realizar un estudio de difusión institucional del conocimiento mediante la confrontación entre la obra original y el libro de texto, relativo a las nociones del Cálculo.

Marco teórico

Cadavid (2015) señala que “desde la Grecia antigua, la inquietud del ser humano por encontrar métodos para *identificar* y *cuantificar* los fenómenos de la naturaleza (óptica, mecánica, astronomía, economía, ingeniería, etc.), lo han motivado a realizar esfuerzos, que le permitiesen cuantificar dichos cambios” (p. 1). Como resultado de lo anterior, para estudiar y resolver los problemas de la variación se crearon los conceptos de variable y función. Así, mientras las variables y las funciones dan cuenta de la variación concreta y de las relaciones que se dan entre ellas, y la razón promedio de cambio da una aproximación sobre la rapidez de la variación; la derivada proporciona la cuantificación exacta de la rapidez con que cambia una variable respecto de otra en cualquier instante.

Partiremos por asumir una postura convencional acerca de la variación en nuestra investigación soslayando interpretaciones desde otras visiones. Es entonces, que entenderemos la variación como una cuantificación del cambio. La caracterizamos como una inferencia de estados, a partir de acciones que nos permiten identificarlos, predecirlos, medirlos, estudiarlos y compararlos (Sánchez y Molina, 2006); y a su vez describe las cualidades del cambio proporcionando elementos para saber cómo cambia eso que cambia (Cabrera, 2009).

Por otra parte, en Caballero (2016) se relacionan los órdenes de variación dada su naturaleza dependiendo qué cambio se cuantifica; viéndose así en las magnitudes de velocidad y aceleración en el estudio del movimiento en Física.

Y es que es cierto, que existe una estrecha relación entre la variación y el cambio. La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto; mientras que la variación requerirá ejercer nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema dado.

Por otra parte, dentro de la estructura curricular de la matemática, que ofrecen Tall (1991) y Cantoral (2004) se hace alusión directa al Pensamiento y Lenguaje Variacional y se propone como uno de los logros para alcanzar en la educación universitaria. Su estudio se inicia en el intento de cuantificarla por medio de las cantidades y las magnitudes y se reconoce la necesidad de estudiar con detalle los conceptos, procedimientos y métodos que involucra la variación para poner al descubierto las interpelaciones entre ellos.

Se sitúa en Caballero (2012), al Pensamiento y Lenguaje Variacional como una línea de investigación dentro del enfoque socioepistemológico y forma de pensamiento que se caracteriza en proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio. Se caracterizan elementos que conforman este estudio tales como: estrategias variacionales (EV), estructuras variacionales (EstV), argumentos variacionales (AV), códigos variacionales (CV), situación variacional (SV) y tarea variacional (TV). Nosotros centramos la atención en las estrategias variacionales quedefinen hasta la fecha (González, 1999; Salinas, 2003; Caballero, 2012), lo cual no exime para nuestro estudio la posibilidad que resulte interesante y valioso la presencia de algunos de los otros elementos, para la cual llamamos en su conjunto más amplio *ideas variacionales*.

Actualmente existen diferentes teorías, enfoques, perspectivas o paradigmas en Matemática Educativa (Educación Matemática o Didáctica de las Matemáticas) definidos con base en cómo conciben los procesos de aprendizaje. En algunas de estas se habla desde una perspectiva platónica, centrada en objetos abstractos ajenos a la realidad, en donde la relación con el conocimiento matemático estaba sustentada en la matemática escolar, con su carácter lógico y estructural.

El enfoque socioepistemológico nace a fines de los años 80 (Cantoral, 2011) y estudia la naturaleza conceptual de los objetos matemáticos, entendiendo a éste desde el posicionamiento del ser humano como actor de la construcción de sus sistemas conceptuales. Este enfoque descentraliza al objeto matemático y su epistemología como prerrequisitos para la acción didáctica y pone en su lugar a las prácticas sociales asociadas a su construcción, para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional (Montiel y Buendía, 2012). En este sentido, procura entender y comprender, al seno de la Matemática Educativa, fenómenos específicos relacionados con la construcción (en nuestro caso evidenciado con la obra de Newton) y la transmisión de conocimiento matemático (visto en el texto escolar).

En Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015) se señaló que los libros de textos son portadores de discurso Matemático Escolar, además de una forma particular de validez epistemológica que induce al docente a reproducir en el aula lo que debe y evitar lo que no debe ser comunicado. Por ende, estos discursos validan la introducción del saber matemático en el sistema educativo y legitiman un nuevo sistema de razonamiento (Cantoral, Moreno-Durazno & Caballero-Pérez, 2018).

Asimismo, Soto (2010) afirma que aquel discurso que considera a la Matemática como prexistente a la actividad humana, se convierte a su vez en un sistema de razón que excluye. Dentro de esto están los contenidos sociales y culturales de los cuales emergen los conceptos matemáticos, así como las argumentaciones posibles al considerar su carácter hegemónico (puesto de manifiesto, por ejemplo, en los libros de texto utilizados).

La Matemática Educativa se define, como una disciplina del conocimiento que se ocupa de estudiar los fenómenos que ocurren cuando los saberes matemáticos se introducen al sistema de enseñanza (Salinas y Alanís, 2009), y dentro de ella la línea de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional permite desarrollar su problemática en cuatro momentos que definen Cantoral y Farfán (2003): didáctica sin estudiantes, didáctica sin escuela, didáctica sin escenarios, y didáctica sin escenarios socioculturales. Es en esta última etapa, donde se introduce la componente social: vertebrando la construcción social del conocimiento matemático. En este sentido, nos centraremos en el papel de las prácticas que reportan las investigaciones de corte socioepistemológico en dos escenarios diferentes, el histórico y el institucional.

■ Metodología

Siguiendo la postura de Schubring (citado en Rodríguez, 2010), el hecho de que la práctica de la enseñanza no está regida por los decretos y órdenes ministeriales como por los libros de textos para enseñar, es que se hace necesario el análisis de estos.

Para organizar el trabajo, con base en el método documental sugerido en Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini (2015), se consideraron las dos fases en que desarrollan su metodología, además se requiere incorporar una tercera fase como vértebra en nuestro análisis documental: *conceptual*, *estructural* y *confrontación*. A continuación, realizaremos una breve descripción de la intencionalidad que se procura en cada una de estas fases.

Fase conceptual

En esta fase, se describen las obras en función de contextualizar y situar los temas específicos que se abordan en los ejemplos analizados. Es importante tener en consideración las circunstancias socioculturales que rodean la construcción del conocimiento, dado que condicionan el uso y significado que las personas dan al saber (Montiel y Buendía, 2012). Además, se realiza un tratamiento lingüístico a partir de identificar categorías en aquellas ideas que aluden a la variación en ambas obras, apoyadas en las estrategias variacionales definidas por Caballero & Cantoral (2013). Para el análisis conceptual también se tomaron en cuenta dos de las categorías propuestas por Rodríguez (2010) para el análisis de textos históricos y contemporáneos: ficha de referencia de la obra y contextos, y propósitos de la obra y del autor.

Fase estructural

En esta fase, se hace uso del modelo de anidación de prácticas que define Cantoral (2013) en la TSME, a partir del cual se identificaron las acciones y actividades que podrían generarse en el análisis desarrollado. Dado el tipo de investigación, comenzamos a identificar las conductas en un primer nivel de acción y a partir de allí, deducir las posibles actividades en el caso de llevarse a cabo éstas en una situación escolar. Siguiendo la propuesta desarrollada en un estudio similar por Cantoral, Montiel & Reyes-Gasperini (2015), nos plateamos en cada problema o ejemplo, las preguntas *¿qué debe hacer?*, *¿cómo lo debe hacer?* y *¿para qué lo hace?* con el propósito de entender las herramientas usadas por el sujeto, la intencionalidad y fines didácticos. Además de formular una explicación acerca de nuestra problemática educativa en cuestión.

Fase de confrontación

En esta fase, se contrastan las obras, mostrando la presencia de ideas variacionales independientemente del tipo de obra en cuestión. En este caso se considerarán aquellas condiciones transversales en las obras relativas a la variación y el cambio, evidenciando así la presencia de éstas, sin hacer distinción de su naturaleza.

Análisis de resultados

Hemos seleccionado seis ejemplos para el análisis, de *Principia*fueron fuerza centrípeta, razones de cantidades y, razones de arcos cuerda y tangente; de Granville fueron longitud de una curva, optimización y demostración del límite fundamental trigonométrico. La selección de estos ejemplos se debe a que están estrechamente relacionados independientemente de las obras, es decir, su trasfondo requiere de un análisis muy parecido, aunque se trata de diferentes contextos.

Resulta interesante para desarrollar esta fase, comprender primero un poco la metodología de trabajo que consideraron los autores de las obras en sus épocas.

Dado que por parte de Newton trabajaremos con ejemplos seleccionados de su Libro I, podemos constatar que las proposiciones que emplea como argumentos para sus posteriores demostraciones en los libros que prosiguen, muestra el carácter matemático su estudio sobre la naturaleza. Sus proposiciones matemáticas fundamentan el proceso de matematización de la naturaleza en el modelo argumentativo al que se refiere al emplear frases como: "si-entonces". Es decir, obtener características matemáticas del fenómeno a partir de condiciones establecidas.

Otro aspecto interesante que encontramos es que la separación entre Matemáticas y filosofía natural (como se le conocía a la Física en aquel entonces) permite a Newton explorar las consecuencias matemáticas relativas a posibles condiciones físicas sin tener obligación de entrar en análisis de la realidad física de los supuestos, lo cual le permite evadir las posibles críticas a sus conclusiones. Este tipo de metodología lo podemos resumir en el esquema que se muestra en la Figura 1:

Figura 1. Metodología de trabajo de Isaac Newton. Adaptado de (Marquina, 2003)

Por su parte, Granville, ha intentado escribir un libro de texto que es moderno y enseñable; y las capacidades y necesidades que persiguen los estudiantes en el primer curso de Cálculo, tal y como refiere en el prefacio de su libro. En este sentido, contiene problemas prácticos sencillos que ilustran la teoría y al mismo tiempo son de interés para el estudiante. Sus problemas no presuponen un conocimiento extendido en una rama particular de la ciencia, sino se basa en el conocimiento que todos los estudiantes de Cálculo suponen en común. Relacionado con esto, su variedad en temas permite su empleo ya sea para el trabajo elemental en ciencias aplicadas o para trabajos más avanzados en matemática pura.

Muestra en sus ejemplos resueltos una forma peculiar de trabajo, donde refiere tres momentos identificados en nuestro análisis. Estos son *teorización*, *tránsito* y *explicitación*; los cuales abordaremos en los resultados finales de nuestra investigación.

Para llevar a cabo esta fase, haremos uso del modelo de anidación de prácticas, el cual mencionamos en la fase estructural de la metodología.

La siguiente tabla muestra uno de los análisis realizados con uno de los ejemplos seleccionados en la obra de Newton: Fuerza centrípeta.

Tabla 1. *Análisis del ejemplo EN1*

<table>
<tr><th>Momento</th><th>Intencionalidad</th><th>Acción</th><th>Actividad</th></tr>
<tr><td>Planteamiento de la situación de un fenómeno real.</td><td>Describir momento inicial para que posteriormente sirva como referente a otros momentos.</td><td>Supone el tiempo partido en partes iguales.
Compara el área de triángulos, para llegar a una razón de igualdad.</td><td rowspan="4">Establece una relación proporcional entre las áreas descritas y los tiempos en que se describen.
Establece que el área barrida por el segmento que une un planeta al sol es directamente proporcional al tiempo invertido en el recorrido.</td></tr>
<tr><td>Alternativa a la situación en condiciones específicas.</td><td>Generar una nueva situación bajo el supuesto de la acción de una fuerza externa.</td><td>Modifica la trayectoria y traza nuevas rectas generando un segundo momento (hace uso de la 1ra y 2da Ley del Movimiento).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Generalización e interpretación de los resultados.</td><td>Buscar nuevos resultados que permitan una comparación entre momentos.</td><td>Compara área entre triángulo buscando relaciones entre los momentos anteriores (hace uso del Corolario I).</td></tr>
<tr><td>Introducir nuevo objeto matemático (infinito).</td><td>Suponer momentos infinitos donde ocurran situaciones similares para llegar a su demostración.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia (2018).

Tomando ya los resultados de las dos fases anteriores, se contrastan en un estudio transversal de elementos comunes y relevantes para promover el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Podemos constatar desde la descripción que se obtuvo en los análisis de las tablas mostradas en el epígrafe anterior, una forma muy distinta en la que se dan los desarrollos de los ejemplos. Por parte de Newton los momentos descritos visualizan una organización de ideas primarias que en el transcurso se formula en una hipótesis a demostrar, para lo cual emplea la geometría. Acuña la idea de momento para utilizarlo en el análisis de la predicción de los fenómenos de cambio, tal como señala Cantoral (2016); como ejemplo de esto observamos en el análisis infinitesimal de curvas. Para Newton su método de análisis y síntesis, le permite descubrir el concepto de la fuerza en la naturaleza y una vez descubierta, se considera para explicar el movimiento de los cuerpos. A partir de este momento su demostración permite eliminar todo el proceso analítico, heurístico y complejo.

Aunado muestra conductas o ideas donde inferimos la presencia del estudio de la variación en niveles muy distintos, dígase: dividir, comparar, “moviéndose hasta encontrarse”, disminuir distancias, entre otras. Cada una de ellas, desde su contexto funcional con base en constructos idealizados, de tal forma que eventualmente puedan ser trasladadas al mundo de los fenómenos.

Por otra parte, y un tanto no tan distinto; los ejemplos que se estudiaron de Granville, formalizan un modelo matemático que bajo los principios newtonianos presenta lo variacional en tres momentos: *Teorización, Tránsito* y *Explicitación*. Cada uno con formas y herramientas diferentes, en la *Teorización* a través de leyes y propiedades, en el *Tránsito* a través de desarrollos analíticos, y en la *Explicitación* en forma de gráficas o tablas de valores. Resulta esto indispensable para Granville en el sentido, que requiere la forma 0precisa para explicitar sus contenidos a un público principiante en el estudio del Cálculo. Y es aquí en donde juega su rol el texto como instrumento de poder, sin perder de vista las raíces socioculturales que dieron su origen en la obra del *Principia*.

Como práctica social que norman y regulan al conjunto de prácticas identificadas en los ejemplos que se seleccionaron de las obras estudiadas, pudimos inferir que permea el Praedicciere como práctica social (Figura 2), y dando surgimiento así a objetos matemáticos a partir del estudio del cambio y el movimiento en fenómenos ya bien sean físicos u otros contextos escolares. En este proceso se distingue el análisis y búsqueda avanzada de influencias socioculturales y orientan el pensamiento en cada una de las épocas estudiadas; lo cual estructura al Praedicciere como práctica social (Cantoral, 2016).

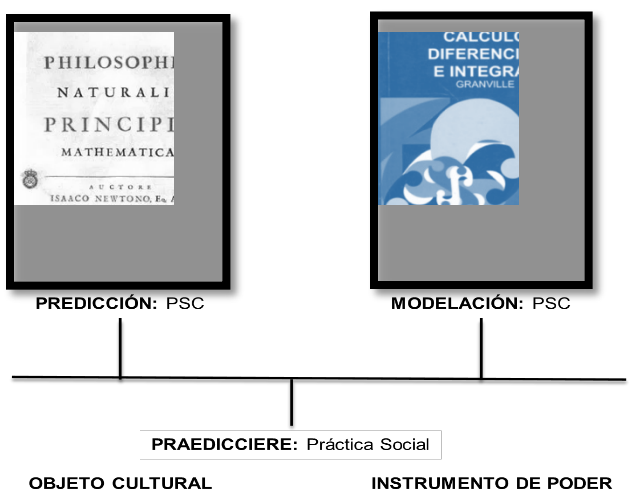


Figura 2. Esquema de articulación de prácticas en la confrontación de las obras

Los pares de ejemplos que seleccionamos para desarrollar nuestro estudio, permite encontrar como elemento diferente, la interacción del objeto en su entorno social, es decir sus prácticas socialmente compartida. Newton por su parte, manifiesta la *Predicción* a luz de su estudio de los fenómenos naturales, mientras que Granville centrado más en el análisis de tablas, gráficas y así construir modelos analíticos con el propósito de emplear en diversas esferas.

Esto se puede argumentar retomando la dupla de problemas estudiados: Fuerza centrípeta y Longitud de un arco de curva. La interpretación que realiza Newton a cada segmento de recta en su modelo geométrico lo infiere como movimiento, mientras que Granville en su modelo los observa como segmentos de curva. Es decir, cada una de estas ideas, así como el resto de las conductas que se tipificaron, desde su contexto funcionan con base en constructos idealizados. Empero, sus estudios convergen en una linealización local, donde cada uno en su contexto, observa la curva como una recta a partir del estudio de las pequeñas variaciones. En el primer contexto la mirada del *tiempo* como infinitesimal, mientras que en el segundo la *longitud* infinitesimal.

A la luz nuestro estudio postulamos que, el papel desempeñado por los libros en su contexto social, histórico y cultural; guía el proceso de formación y desarrollo de las ideas variaciones que se constatan en los objetos matemáticos. Los *Principia*, como objeto cultural promueve la *Predicción* en tanto la necesidad de estudiar los fenómenos naturales, mientras que la obra de Granville, institucionaliza estos saberes. De allí lo valioso de realizar investigaciones documentales tomando como referente los lentes del autor en su tiempo.

Conclusiones

El análisis de las fuentes primarias y de los textos históricos nos sumergen en el mundo del matemático que vivió en una determinada época, nos da cuenta de las concepciones y la forma de pensamiento imperante en el momento, nos indica el tipo de problemas y las formas de solución que se gestaron según los instrumentos de los que se disponía, lo cual puede proporcionar una formación matemática más global y comprensiva que la que se ha practicado en los últimos años.

A su vez, las circunstancias socioculturales que rodean la construcción del conocimiento condicionan el uso y significado que las personas dan al saber. Esto favoreció el generar explicaciones a los fenómenos: los cuales no contradicen; sino que complementan los resultados de investigaciones previas.

De las consideraciones anteriores también podemos concluir que el tipo de orientación de los libros no depende de planes de estudios que los encuadre, sino que son ellos mismos quienes establecen el tipo de tarea que se debe ejercer en el proceso de formación de los estudiantes, esto a partir de la forma en que estructuran los conceptos matemáticos.

En términos generales la investigación nos brinda los referentes para comprender que el uso y significado de las ideas variacionales que permean en libros de naturaleza distintas, apreciados en la obra de Newton y Granville, exige reflexionar sobre epistemologías que hasta ahora se han trabajado en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional, y a su vez es un indicativo para robustecer metodológicamente investigaciones de corte documental.

Referencias bibliográficas

Caballero, M. (2012). *Uso de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los profesores de bachillerato*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Caballero, M. & Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1197-1205). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Caballero, M. (2016). *Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción.* Memoria predoctoral no publicada. México: Cinvestav.

Cabrera, L. (2009). El pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 121-156). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (1997). Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas. *Revista EMA Investigación e innovación en Educación Matemática. Colombia: Universidad de los Andes, 2*(2), 115-131.

Cantoral, R. (2011). Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología. Simposio enMatemática Educativa, 22 – 26 agosto 2011. D. F., México: Centro de Investigación enCiencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Sociepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.). México: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: Cantoral, R. (ed.), El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8, 69-91. Grupo Editorial Iberoamérica, Sevilla.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53(3)*, 255 – 270.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socioepistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education, 50*(1-2), 77-89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Cantoral. R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 8, *9-28*.

Chopin, A. (2001). Pasado y presente de los manuales escolares. *Revista Educación y Pedagogía, 13 (29-30)*, 209-229.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and direction. *ZDM*, *45*(5), 663-646.

González, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigaciones y de estudios avanzados del IPN, México.

González, M. T. y Sierra, M. (2002). La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria, 21*, 177-198.

Granville, W. A. (1980). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

López-Acosta. (2016). Generalización de patrones. Una trayectoria Hipotética de Aprendizaje basada en el Pensamiento y Lenguaje Variacional (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). "This is so": A text on texts. En. A. Boshop. K. Clments, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 371-410). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Marquina, J. (2003). La metodología de Newton. *Ciencias 70*, abril-junio, 4-15. [En línea]

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigaciónsocioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 55-82), México: Lectorum.

Negrin, M. (2009) "Los manuales escolares como objeto de investigación". *Educación, Lenguaje y Sociedad, 6*(16), 187- 208.

Newton, I. (1987). Principios matemáticos de la filosofía natural (E. Rada, Trad.). Madrid, España: Alianza. (Trabajo original publicado en 1687 bajo el título *Philosophicaenaturalis principia mathematica*).

Reséndiz, E. (2004). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar. Tesis de doctorado no publicada. México: Cinvestav.

Reyes-Gasperini, D. (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la trasformación y la mejora educativa (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Rodríguez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, un enfoque didáctico*. Tesis de doctorado no publicada, Salamanca, España.

Romero, F. (2016). *Construcción Social de la Serie Trigonométrica de Fourier. Pautas para un Diseño de Intervención en el Aula* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México.

Salinas, P. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Sánchez, M. y Molina, J. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. En G. Martínez Sierra (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 19, pp. 739–744). México: Clame.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una VisiónSocioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visiónsociepistemológica. *Boletim de EducaçãoMatematica*, *28*(50), 1525-1544.

Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publisher.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PRÁCTICAS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DESCONTENTO DIRIGIDO: UNA APROXIMACIÓN A LA COMPRENSIÓN DE LAS DIFICULTADES EN ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

MATHEMATICAL LEARNING PRACTICES AND DIRECTED DISCONTENT: AN APPROACH TO THE UNDERSTANDING OF DIFFICULTIES IN ADDITION AND SUBTRACTION

Jesús Armando Fajardo Santamaría, Ana Cristina Santana Espitia, Aura Nidia Herrera Rojas
Universidad Manuela Beltrán. Universidad Nacional de Colombia. (Colombia)
Jesus.fajardo@docentes.umb.edu.co, acsantanae@unal.edu.co, anherrerar@unal.edu.co

Resumen
Las dificultades para aprender a sumar y restar se pueden comprender mediante el análisis de las prácticas cotidianas en las que los niños participan, más precisamente indagando la reacción afectiva del infante en las diversas situaciones que puede enfrentar cotidianamente y que le exigen adicionar o substraer. Los niños desarrollan cierto descontento dirigido a los problemas aritméticos a medida que se habitúan a ellos. Se realizó un estudio con 50 estudiantes de grado primero a tercero pertenecientes a una institución educativa oficial del municipio de Mosquera (Cundinamarca) y a una institución educativa no oficial de Bogotá, D.C, a quienes se les aplicó un instrumento de dificultad experimentada en adición y sustracción. Los resultados muestran que la expresión de contento – descontento de los niños se regulariza en los niveles superiores de formación coordinándose con los patrones de acierto que ellos alcanzan.

Palabras clave: prácticas matemáticas, descontento dirigido, etnomatemática

Abstract
The difficulties in learning to add and subtract can be understood by analyzing daily practices in which children participate, more precisely by investigating the affective reaction of the child in the various situations that he may face daily, and that require him to add or subtract. Children develop a certain amount of directed discontent at arithmetic problems as they become accustomed to them. A study was conducted with fifty students from first to third grade from an official educational institution of the municipality of Mosquera (Cundinamarca) and from a private educational institution in Bogotá, DC. They were applied an instrument of difficulty experienced in addition and subtraction. The results show that children`s content–discontent expression is regularized in the higher levels of education in correspondence with the success patterns that they reach.

Key words: mathematical practices, directed discontent, ethno-mathematics

Introducción

Aprender a sumar y restar es un hito académico fundamental, un sinnúmero de destrezas de aritméticas de alto nivel están sustentadas en esta competencia adquirida en los estadios iniciales del proceso de escolarización formal(Castillo, 2014). La interacción con maestros y objetos de aprendizaje propicios es crucial no sólo porque la escuela delimita las posibilidades mismas en la transmisión del conocimiento sino además porque determina la inclusión del individuo en una matriz de intercambios sociales cotidianos regulares que dan forma a la sensibilidad que desarrolla el aprendiz habilitándolo para reconocer las actividades y los elementos que cuentan para la resolución satisfactoria de problemas de adición y sustracción(Sagástegui, 2004).

Marco teórico

Existe una normatividad implícita en los procesos de aprendizaje socialmente mediados (Rietveld, 2008). Ese aspecto normativo tiene que ver con que los comportamientos, concepciones y respuestas del aprendiz están sujetos a corrección por parte de otros que dominan ampliamente las actividades en las que está siendo introducido. Los mayores, padres, maestros o hermanos en grados de escolaridad más avanzada corrigen activamente los despliegues de los aprendices, no sólo a través de indicaciones sobre el acierto o desacierto del individuo cuando trata de solucionar un problema, sino a través de la intervención directa en las actividades que éste despliega al realizar tareas académicas y también mediante la enseñanza de patrones de actividad y de respuesta frente a los cuales el novato debe aprender a responder(Rietveld y Kiverstein, 2014).

El carácter implícito de los parámetros que rigen las prácticas de aprendizaje está conectado con el reconocimiento afectivo más que intelectual de esas regularidades que gobiernan el quehacer correcto cuando se realizan adiciones o sustracciones. El asunto entonces tiene que ver con la inserción del niño recién escolarizado en un nicho que implica contenidos ligados a una tradición cultural de las personas de su sociedad(Rietveld y Kiverstein, 2014). El esquema básico del proceso de formación parece ser el siguiente:

1) Al ingresar a una institución educativa un individuo accede a un nicho que incluye elementos socialmente arreglados, acciones socialmente sancionadas como correctas o incorrectas y patrones afectivos regulados para las prácticas compartidas.
2) El individuo atiende a las configuraciones de su entorno socialmente enriquecido desplegando sus actividades de exploración mientras se nutre de la actividad instruida de sus mayores. Las situaciones así estructuradas configuran triángulos asimétricos(Duica, 2014) en el que los individuos y los objetos de aprendizaje son los vértices mientras que las aristas corresponden a sus actividades comunicativas, la de carácter exploratorio del aprendiz y la instruida del experto.
3) La interacción regular conduce a la estabilización de facilitaciones (Kiverstein, 2015)que el individuo puede reconocer en los elementos que hacen parte de la tarea cuando está en presencia de las configuraciones propicias para los despliegues aprendidos.
4) Las reacciones afectivas del individuo se ajustan progresivamente a las facilitaciones reconocidas en el entorno configurando así una forma de sensibilidad normativa situada(Rietveld, 2008).

Este proceso de inserción socio-cultural puede ser arduo para el individuo, en algunos casos los niños experimentan muchas dificultades para responder a las exigencias de sus mayores. Dado que la reacción afectiva del infante es moldeada por su vida en el entorno escolar, se pueden evaluar las expresiones del niño en esta faceta para dar cuenta de las dificultades que experimenta en el proceso de aprendizaje. Así pues, la idea central que aquí nos ocupa es que cuando los comportamientos y actividades del niño no se ajustan a los requerimientos de la situación, el niño experimenta las situaciones de aprendizaje como difíciles, y despliega una reacción afectiva adversa dirigida a esa situación en particular, reacción que recibe el nombre de descontento dirigido (Rietveld, 2008; Fajardo, 2016).

Rietveld (2008) definió el descontento dirigido como "conducta afectiva" porque: "…muestra que el curso de acción que estaba en curso es afectado ahora como un resultado del estado percibido del objeto"(p.976). El descontento del niño en las tareas de adición o sustracción es una muestra de su nivel de afectación que está enlazado al desarrollo de las competencias propias para la resolución de dicho tipo de tareas. Así pues, el descontento dirigido de los niños en edad escolar es un comportamiento ajustado al marco de interacciones correctivas en que se desarrollan las prácticas culturales específicas que el niño enfrenta con regularidad en su vida cotidiana.

El presente estudio tiene un énfasis descriptivo, la idea es detectar y mostrar las tendencias de la expresión afectiva de contento – descontento dirigido en tareas de adición y sustracción para mejorar nuestra comprensión de los procesos de enseñanza – aprendizaje en los que se ven envueltos los niños en la escuela primaria. Para cumplir esta tarea hay que evaluar el desempeño y la expresión afectiva de los estudiantes en tareas de adición y sustracción que incluyan diversas formas de práctica socio-cultural. Desde el punto de vista metodológico se seguirá el trabajo adelantado por Santana y Herrera (documento de trabajo)quienes han diseñado un instrumento para evaluar la dificultad que permite este tipo de análisis, su trabajo incluye tres categorías de prácticas de aprendizaje. Esta clasificación considera la transición que se da desde prácticas con objetos concretos y proximales, hacia prácticas culturales donde las exigencias de enculturación matemática formal (Bishop, 1999) son cada vez mayores.

Corporeizadas, que son situaciones en las que el estudiante hace uso de partes de su cuerpo para operar situaciones relacionadas con la agregación y el retiro de elementos. En esta categoría los objetos normativos son próximos al niño, están presentes en lugares cercanos a su cotidianidad, y en el marco de un momento inmediato (Aroca, 2015; Muñoz, 2012; Wasner, Moeller, Fischer y Nuerk, 2014).

Investidura, que son aquellas prácticas y escenarios a las que la tradición cultural les ha conferido ciertas propiedades a los objetos en el marco del aprendizaje de la adición y la sustracción Se caracterizan por contar con objetos distales, los objetos se vinculan con escenarios específicos asignados por la cultura, y el momento es ocasional (Van den Brink, 1984; Vasco, Carraher, Carraher, y Schliemann, 2000).

Formalizadas, que tienen lugar en escenarios escolares, donde operan los consensos sobre los criterios conceptuales que definen la adición y la sustracción. Este saber formalizado hace parte de los procesos de enculturación matemática formal en los que se involucra el niño cuando ingresa a la escuela. Estas prácticas se caracterizan por contar con objetos simbólicos y lugares y momentos abstractos (Castrillón, 1990; Godino, Font, Wilhelmi y Arreche, 2009; Lave, 1991).(Santana y Herrera, documento de trabajo, pp 4-5).

El presente estudio tiene dos objetivos principales, en primer lugar, vincular la ejecución del niño en un cierto tipo de práctica con el perfil de contento o descontento que el niño expresa. En segundo lugar, establecer cómo es que la conducta afectiva del niño (su contento - descontento expresado) se adecúa a diversos niveles de complejidad de las tareas.

■ Método

Participaron 50 estudiantes (15 estudiantes de grado primero, 17 de grado segundo y 18 de grado tercero), pertenecientes a una institución educativa (IE) no oficial de la ciudad de Bogotá y una IE oficial del municipio de Mosquera (Cundinamarca), a quienes se les aplicó el Instrumento para Evaluación de Dificultad Experimentada en Situaciones Aditivas y Sustractivas (DESAS, *este instrumento se ha diseñado en el marco de la tesis doctoral de la segunda autora. teniendo en cuenta los estándares de construcción de pruebas psicológicas y educativas de la AERA, APA y NCME, 2014*).); que incluye prácticas de aprendizaje matemático corporeizadas(dedos, pisadas y rondas infantiles), de investidura (monedas, canicas y bus) y formalizadas (estados de cuenta, recta numérica y adición de números naturales), y diez problemas de estructura semántica de las situaciones aditivas (cambio, combinación, comparación e igualación), tomando en cuenta la clasificación de Carpenter, Hiebert y Moser (1981). El descontento dirigido se analizó mediante el uso de una escala gráfica de descontento (tarjeta de 5 caras) para que el niño indicara el grado de gusto que tuvo con cada tarea presentada. Esta escala permite valorar el comportamiento afectivo del estudiante frente a cada problema.

El plan de análisis de los resultados se llevó a cabo en dos etapas: Para dar cuenta del primer objetivo se analizó el grado de asociación que existe entre los niveles de acierto y los niveles de contento – descontento expresados por los niños en cada tipo de práctica, mediante el coeficiente de correlación Pearson. Posteriormente se efectuó un análisis de varianza (ANOVA) para establecer si hay algún tipo de divergencia importante entre el contento expresado para los diferentes tipos de práctica de acuerdo con el nivel de acierto de los aprendices.

Con respecto al segundo objetivo se realizó un análisis factorial de componentes principales con rotación Varimax para establecer cuáles son las tendencias del contento – descontento en relación con las estructuras semánticas de los problemas, y se obtuvieron mediante gráficos algunas tendencias interesantes que exhibe la conducta afectiva expresada por los niños. Los análisis estadísticos se realizaron en el programa SPSS 24.0.

Resultados

Se observaron asociaciones significativas al nivel de p = .05 entre el acierto en las prácticas formalizadas y el contento en las prácticas corporeizadas (r (50) =.336), y entre el acierto en las prácticas formalizadas con su respectivo indicador de descontento (r (50) = .322). Se encontraron asociaciones significativas al nivel de p = .01 entre el acierto en las practicas corporeizadas y el acierto en las prácticas de investidura (r (50) = .548); una correlación de r (50) = .561 entre el acierto de las prácticas corporeizadas y el acierto en las prácticas formalizadas; y un índice de correlación de r (50) = .563 entre el acierto en las prácticas de investidura y el acierto en las prácticas formalizadas.
En cuanto al descontento dirigido, se encontró una asociación entre el contento en las prácticas de investidura y el contento en las prácticas corporeizadas (r (50) = .648), así como asociación entre el contento en las prácticas corporeizadas y el contento en las prácticas formalizadas (r (50) = .565), y entre el contento en prácticas formalizadas con el contento en prácticas de investidura ((r (50) = .565).

Estas asociaciones reflejan tendencias interesantes: En primer lugar, se aprecia que para las prácticas formalizadas el acierto y el contento-descontento dirigido se coordinan entre sí, y esto sugeriría que en el proceso de enculturación formal el componente conceptual va de la mano con la dimensión afectiva en el aprendizaje de la adición y la sustracción. En segundo lugar, las asociaciones entre las valoraciones de contento de las diferentes prácticas en juego son de mayor magnitud en comparación con el componente de acierto entre las prácticas. Tercero, la asociación por acierto es más fuerte en la relacióninvestidura – formalizadas. Pero con respecto al contento-descontento dirigido esta tendencia es más clara en la relación entre prácticas corporeizadas y de investidura.

El análisis de varianza entre el contento en los diferentes tipos de práctica y el nivel de acierto indica que la media de contento aumenta progresivamente conforme los niños aumentan su nivel de acierto en las prácticas de investidura $F(16, 33) = 2.143$, $p = .032$. Esto sugiere que en aquellas prácticas (investidura) hay diferencias significativas en la expresión de contento según se tenga mayor habilidad para resolver las tareas.

El segundo objetivo formulado está relacionado con tratar deentender el ajuste del niño a diversos tipos de práctica y múltiples formas de problema, esto es, a diferentes estructuras semánticas de adición o sustracción. Para lograr un esbozo general del comportamiento del contento – descontento según la estructura de los problemas se practicó análisis factorial de corte exploratorio utilizando el método de rotación Varimax. Se obtuvo un índice KMO de .831 que muestra que los datos permiten suponer la posible existencia de alguna tendencia crucial para entender la afectividad de los aprendices. Se obtuvieron dos factores que explican el 56,91% de la varianza (31,65%, y 25,25%, respectivamente). La estructura factorial se detalla en la tabla 1.

Tabla 1. Estructura factorial de contento-descontento por estructura semántica

Matriz de componente rotado		
	Componente	
	1	2
Contento Cambio 1	,752	,290
Contento Combinación 1	,335	,761
Contento Comparación 3	,600	,401
Contento Cambio 2	,684	,364
Contento Cambio 3	,557	,251
Contento Cambio 4	,840	
Contento Combinación 2	,533	,562
Contento Comparación 1	,348	,715
Contento Igualación 1	,488	,292
Contento Igualación 2		,767

Nótese que el comportamiento de la reacción de descontento es muy claro en el primer factor del análisis por la estructura semántica, los problemas más difíciles (igualación, comparación) generan menos contento que los fáciles (cambio), de hecho, ese factor se define por los puntajes en los ítems de cambio (CA1 y CA4). Esto es muy consistente con el reclamo teórico según el cual la participación de los niños en la actividad escolar da forma a sus reacciones afectivas habilitándolos para reconocer irreflexivamente cómo ajustarse a la práctica.

Al enfocarnos en el tipo de práctica se obtuvo unaestructura aceptable con un índice KMO de .747. Se encontraron dos factores que explican el 56,71% de la varianza (29,67% y 27,04% respectivamente). La estructura factorial se detalla en la tabla 2.

Tabla 2. Estructura factorial de contento-descontento por tipo de práctica

Matriz de componente rotado		
	Componente	
	1	2
Contento Dedos	,698	,401
Contento Rondas		,817
Contento Huellas	,720	,283
Contento Monedas	,181	,900
Contento Canicas	,219	,424
Contento Bus	,446	,489
Contento Estados de cuenta	,837	
Contento Recta	,693	,326
Contento adición de naturales	,442	,435

En el caso del análisis por prácticas, tentativamente puede decirse que el primer factor parece relacionado con la actividad de hacer balances (Dedos, huellas, estados de cuenta) contando o descontando elementos según sea el caso. Lo curioso es que la práctica de usar monedas no se halla vinculada a este factor sino al otro en el que cargan las rondas, quizás la familiaridad del niño con este tipo de prácticas sea un elemento importante a tener en cuenta.

En un nivel de análisis más descriptivo al servirnos de las medias y la dispersión de los datos por curso se pueden construir unos paralelos gráficos que mejoran nuestra comprensión de la historia del desarrollo a través de las estimaciones de acierto y contento – descontento, delineando un paralelo que nos acerca a la trayectoria del aprendizaje en las instituciones educativas. Las reacciones afectivas del infante recién escolarizado son más inespecíficas y la enorme variabilidad de las mismas nos revela que su sensibilidad no está coordinada con las situaciones de aprendizaje que enfrenta(Ver Figuras 1, 2 y 3). Más aún, la media de sus expresiones de contento es baja lo que revela una situación inicial de discomfort más que de descontento porque puede decirse que sus expresiones emocionales están muy poco afectadas por la práctica.Por oposición, entre los aprendices avanzados el desarrollo de sentimientos ligados a hábitos adquiridos en la experiencia académica es el factor dominante de su apreciación de las tareas, por eso entre los niños de cursos superiores, el contento – descontento presenta una menor dispersión en todos los casos y la media de sus aciertos es mucho más alta en todos los casos. Cuando analizamos las prácticas que normalmente tienen preminencia en la escuela, esto es, las formalizadas notamos que la variabilidad aumenta, esto es, hay más casos de niños con habilidad y con dificultad extremas, mientras que en general la sensibilidad irreflexiva se afina lo cual significa que todos los individuos se ajustan afectivamente de manera similar a las tareas(ver Figura 3).Puede decirse así que el contento – descontento dirigido es una reacción afectiva que se ajusta flexiblemente a la trayectoria histórica del aprendizaje de las prácticas sociales armonizando progresivamente con los parámetros prácticos que rigen la actividad escolar en la escuela primaria

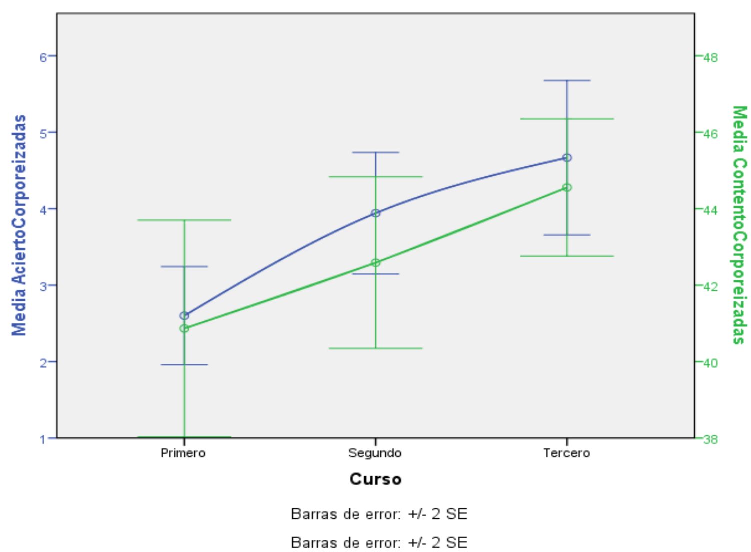


Figura 1. Medias de acierto y descontento en prácticas corporeizadas, por curso

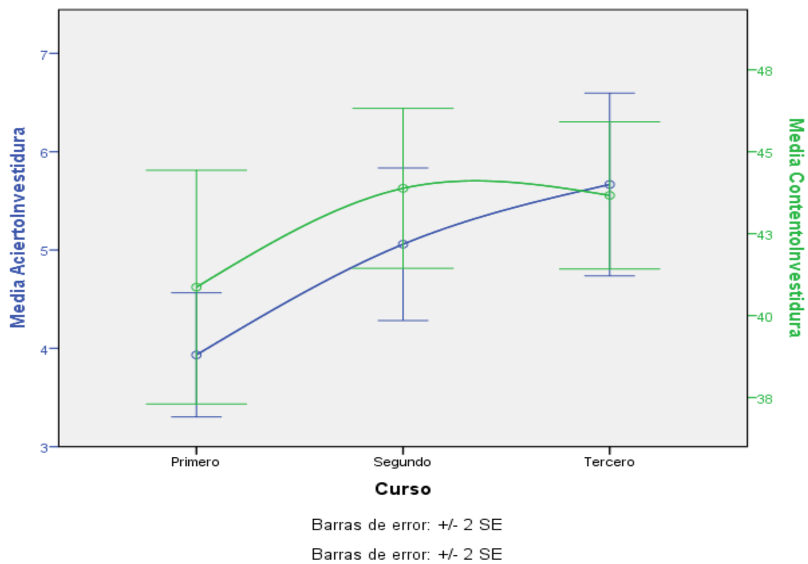


Figura 2. Medias de acierto y descontento en prácticas de investidura, por curso

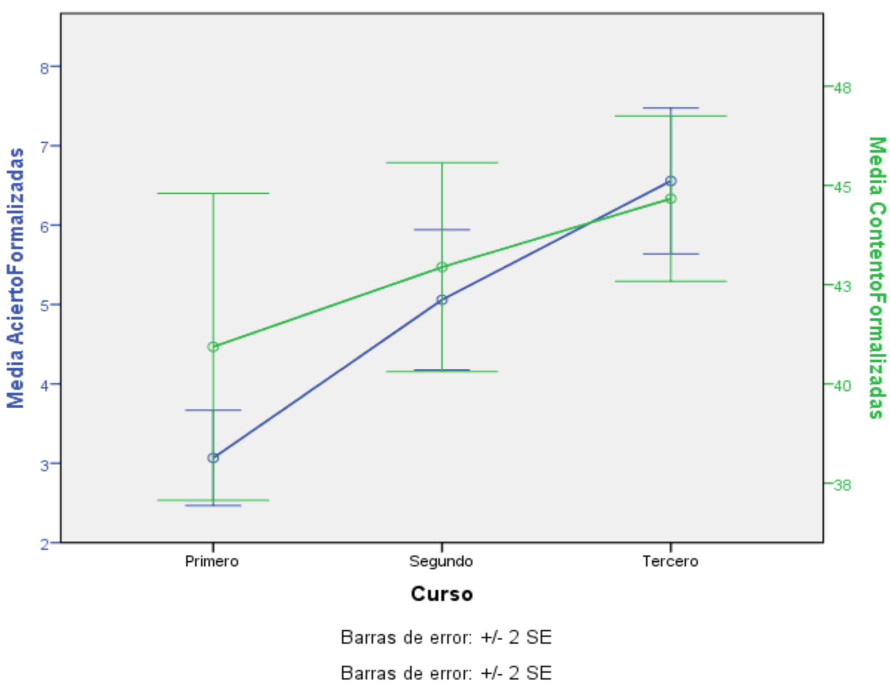


Figura 3. Medias de acierto y descontento en prácticas formalizadas, por curso

Conclusiones

El estudio arrojó resultados interesantes que avalan las concepciones normativo-situadas (NS) del aprendizaje. Se pueden señalar tendencias acordes con (NS) para los dos asuntos abordados; por un lado, se encontró evidencia de asociación entre los puntajes de acierto en todas las prácticas y también entre los niveles expresados de contento para todas las prácticas, pero más aún, se halló que en las prácticas que se aprenden en la escuela (formalizadas) hay una correlación significativa entre el nivel de acierto y el de contento dirigido. El hecho que frente a las prácticas de investidura se hallen irregularidades es quizás el aspecto más destacable porque al tratarse de prácticas fuertemente ligadas a la vida cotidiana del infante en escenarios no escolarizados tiene mucho sentido pensar que el patrón conductual – afectivo dominante para las tareas de ese tipo debería ser divergente.

Sobre el segundo asunto planteado, la expresión del descontento parece ser altamente sensible al tipo de problema en el cual el individuo se involucra (tabla 1). Desde el punto de vista meramente descriptivo los resultadosrevelan ciertas tendencias generales que resultan de interés: (a) Se aprecia un incremento de los aciertos en función del grado al que pertenece el niño, lo cual se acompaña de una especialización progresiva del descontento dirigido, esto es, en los primeros cursos la expresión afectiva del niño es altamente variable lo cual puede ser interpretado más como evidencia de una respuesta emocional general (gusto – disgusto) mientras que en los cursos superiores la expresión emocional se afina ajustándose al nivel de acierto del niño en las tareas evaluadas (contento – descontento dirigido a la tarea). (b) Los niños de grados inferiores tienen un desempeño sorprendentemente bueno en prácticas de investidura, donde pueden desplegar sus habilidades prácticas acordes con formas de vida no escolarizadas, por oposición en los niños de tercero los mejores niveles de desempeño están en prácticas acordes con la vida escolar (formalizadas), (c) El perfil de contento – descontento expresado por los niños difiere con el curso, entre los más pequeños las tareas académicas despiertan muchísimo interés pero la variabilidad de sus afectividad es enorme; entre los mayores la expresión de contento tiene un perfil claramente acorde con las propuestas de normatividad situada en la medida en que ellos tienden a mostrar descontento con tareas "demasiado fáciles o concretas" (ver figuras 1, 2 y 3) y muestran contento más bien hacia el tipo de tareas que hacen parte normal de su vida escolar.

Referencias bibliográficas

American Educational Research Association, American Psychological Association and the National Council on Measurement in Education (2014). Standards for Educational and Psychological Testing. Washington, DC, United States: Autor.

Aroca, A. (2015). ¿Sumar = restar? una perspectiva etnomatemática. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8(2), 237-255. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2740/274041586011.pdf

Bishop, A. (1999). Enculturación matemática: La educación matemática desde unaperspectiva cultural. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (2000). En la vida diez en la escuela cero. México: Siglo Veintiuno.

Carpenter, T., Hiebert, J., y Moser, J. (1981). Problem Structure and First-Grade Children´s Initial Solution Processes for Simple Addition and Subtraction Problems. Journal for Research in Mathematics Education, 12(1), 27-39. DOI: 10.2307/748656

Castillo, C. (2014). Aprendizaje de la adición y la sustracción de números enteros a través de objetos fisicos. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/47573/

Castrillón, A. (1990). Experiencia Instituto Mayor Campesino. En: Centro Laubach de Educación Popular Básica de Adultos; Consejo de Educación de Adultos de América Latina y Dimensión Educativa. (Comps.). La enseñanza de la matemática con los adultos de los sectores populares: experiencias e investigaciones (pp. 61-75). Bogotá, Colombia: DimensiónEducativa.

Duica, W. (2014). Conocer sin representar el realismo epistemológico de Donald Davidson. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Fajardo, J. (2016). Triangulación, normatividad y coordinación afectiva en la ontogénesis del pensamiento. (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Nacional de Colombia: Bogotá,Colombia.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., y Arreche, M. (2009). ¿Alguien sabe qué es el número? Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 19, 34-46. Recuperado dehttp://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/19/Union_019_008.pdf

Kiverstein, J. (2015). Empathy and the responsiveness to social affordances. Consciousness and Cognition, 36, 532-542. https://doi.org/10.1016/j.concog.2015.05.002

Lave, J. (1991). La cognición en la práctica. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Muñoz, D. (2012). Las rondas infantiles: Una propuesta pedagógica para fortalecer el aprendizaje de los números naturales del 20 al 60 en estudiantes de grado primero del Centro Educativo Salamina sede Salamina del municipio de Curillo Caquetá. (Tesis de Pregrado no publicada). Universidadde la Amazonía, Amazonas, Colombia. Recuperado de https://mafiadoc.com/las-rondas-infantiles-una-propuesta-pedagogica-edudistancia2001_59f01b7d1723ddc9e5e85a2d.html

Rietveld, E. (2008). Situated normativity: The normative aspect of embodied cognition in unreflective action. Mind, 117(468), 973-997. https://doi.org/10.1093/mind/fzn050

Rietveld, E., y Kiverstein, J. (2014). A Rich Landscape of Affordances. Ecological Psychology, 26(4), 325-352. https://doi.org/10.1080/10407413.2014.958035

Sagástegui, D. (2004). Una apuesta por la cultura: el aprendizaje situado. Revista Electrónica Sinéctica, (24), 30-39. Recuperado a partir de http://www.redalyc.org/resumen.oa?id=99815918005

Santana; A. C., y Herrera, A.N (documento de trabajo). Desarrollo de un instrumento para evaluación de dificultadexperimentada en situaciones de adición y sustracción. Bogotá, Colombia.

Van den Brink, J. (1984). Numbers in contextual frameworks. Educational Studies in Mathematics, 15(3), 239-257.DOI:10.1007/BF00312076

Vasco, C. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. Comunicación, Lenguaje y Educación, 6, 5-25. Recuperado dehttps://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/126197.pdf

Wasner, M., Moeller, K., Fischer, M., y Nuerk, H. (2014). Aspects of situated cognition in embodied numerosity: the case of finger counting. CognitiveProcessing. InternationalQuarterlyofCognitive Science, 15, 317-328. doi:10.1007/s10339-014-0599-z

O ESTUDO DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS NA TRANSIÇÃO DOS ANOS INICIAIS PARA OS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

THE STUDY OF AREAS OF PLANE SHAPES IN THE TRANSITION FROM THE STARTING GRADES TO THE FINAL GRADES OF ELEMENTARY SCHOOL

Danila Brígida Santana Imafuku, Maria Elisa Esteves Lopes Galvão
Universidade Anhanguera de São Paulo–UNIAN. (Brasil)
danilaimafuku@hotmail.com, elisa.gal.meg@gmail.com

Resumo
Em nossa pesquisa temos por objetivo analisar a apresentação do estudo de áreas de figuras planas nos livros didáticos utilizados por escolas brasileiras no Ensino Fundamental. Observaremos como se conduz a abordagem desse conceito e como os recursos utilizados pelos autores contemplam as possibilidades da apreensão de uma figura geométrica explicitadas por Raymond Duval. Para tal estudo buscamos os dados em algumas das coleções de livros didáticos sugeridas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático. Os aspectos discursivo, perceptivo, operatório e sequencial de uma figura na construção do conceito, segundo Duval, nortearão a análise dos dados coletados.

Palavras-chave: área de figuras planas, livros didáticos, apreensões figurais

Abstract
This study aims to analyze the introduction of the studies of areas of plane figures in the educational books used by Brazilian schools in the elementary grades. We will observe how the approach of this concept is driven and how the resources used by the authors contemplate the possibilities of the apprehension of a geometrical figure explained by Raymond Duval. For this study, we collected data in some of the collections of textbooks suggested by the National Book Program (Programa Nacional do Livro) and Textbook Material. The discursive, perceptive, operative and sequential aspects of a figure in the reasoning of the concept, according to Duval, will guide the analysis of the data collected.

Key words: area of plane figure, textbooks, figural apprehension

Introdução

Neste trabalho, que é um recorte de uma pesquisa de mestrado em desenvolvimento, temos por objetivo analisar como é apresentado o estudo de áreas de figuras planas nos livros didáticos utilizados em escolas brasileiras e como é proposta a transição do estudo deste conceito dos anos iniciais para os anos finais do Ensino Fundamental.

Nas escolas brasileiras, o estudo de áreas de figuras planas geralmente é iniciado no quarto ano do Ensino Fundamental. Em geral, faz-se uso da malha quadriculada no momento da introdução do conceito de área. Encontra-se também o ensino de áreas de figuras retangulares associado ao cálculo do produto das duas dimensões, comprimento x largura, relacionado à contagem dos elementos em uma distribuição retangular. No sexto ano esse estudo é retomado, com a introdução das fórmulas das áreas das principais figuras planas: quadrado, retângulo, paralelogramo, losango e trapézio e, ao final do nono ano são revistas as fórmulas e apresentados novos conceitos, como por exemplo, a área das regiões circulares, também com o foco na aplicação de fórmulas.

Por esse ensino acontecer em momentos diferentes ao longo do Ensino Fundamental, surgiu a motivação de analisar como os autores de livros didáticos introduzem o conceito de área em cada etapa da escolaridade e como orientam a transição dos anos iniciais para os anos Finais do Ensino Fundamental. Buscamos observar como os autores abordam o conceito de área, quais os aspectos sobre o ensino de área são apresentados em cada nível de ensino, e compreender como se dá o uso de recursos como a malha quadriculada e a unidade de medida; a composição e decomposição de figuras e a introdução das fórmulas no percurso da formalização de tal conceito a relação entre as estratégias adotadas e correspondentes representações figurais.

Estudos como de Pessoa (2010), Facco (2003) e Clements e Stephan (2004) enfatizam a importância de uma abordagem no ensino de áreas de figuras planas que valorize a compreensão do conceito e de sua medição. Para esses autores é essencial que durante a aprendizagem sejam utilizados recursos que possam auxiliar a construção do conhecimento e consolidar o uso dos cálculos numéricos e da aplicação de fórmulas, como por exemplo, o uso da malha quadriculada e da reconfiguração.

Pessoa (2010) realizou um trabalho coalunos do sexto ano do Ensino Fundamental, no qual fez uso da malha quadriculada, para investigar a compreensão do conceito de área como grandeza, principalmente mediante a decomposição e composição das figuras. A autora buscou trabalhar com uma variedade de figuras e, destacou que as figuras que não estavam alinhadas com a malha quadriculada geraram um maior número de respostas incorretas. Também observou que o uso de uma unidade de medida inadequada pode acarretar em uma dificuldade em compreender que a medida da área de uma figura pode ser um valor fracionado eque a dissociação entre área e o perímetro propiciaram problemas nas resoluções das atividades propostas.

Facco (2003) desenvolveu uma sequência de atividades para o ensino e a aprendizagem do conceito de área,com trinta e dois alunos do sexto ano. As atividades propostas abordavam a composição e decomposição de figuras planas para facilitar o aprendizado do conceito de área. A autora considerou o reconhecimento de forma, o conceito de área, a diferença entre formas, superfície e área, a compreensão de que a medida da área depende da unidade de medida utilizada, a distinção entre perímetro e área, e o reconhecimento de área enquanto grandeza. Segundo a autora, foi possível verificar ao longo das atividades que os alunos apresentaram um avanço no processo de decomposição e composição das figuras para resolução dos problemas, fato que ficou bem evidente nas últimas atividades que necessitavam totalmente da reconfiguração para determinar a medida de suas áreas.

Clements e Stephan (2004) destacam a importância de desenvolver o ensino de área de figuras planas de uma forma que favoreça a compreensão dos alunos, não meramente restrito a uma aplicação de fórmulas, e descrevem que na aprendizagem da medida de área é importante contemplar cinco conceitos fundamentais: particionamento, repetição da unidade, conservação, organização retangular e medição linear. Segundo esses autores é importante desenvolver uma sequência de atividades que auxiliem os alunos a compreender o conceito de área e a sua medida. Inicialmente, os alunos devem ser estimulados a analisar toda região da figura, utilizar uma unidade medida adequada e observar que toda região precisa ser coberta usando as unidades sem lacunas ou sobreposições. Em seguida, precisam aprender a realizar, ainda usando as unidades de medida, o que os autores denominam uma estruturação retangular. Após essas duas etapas devem ser propostas atividades que levem à percepção de que o comprimento das dimensões de um retângulo pode determinar a quantidade de unidades em cada linha e o número de linhas da estruturação. Por fim, os alunos podem entender que ao multiplicar as duas dimensões, determinam o número total de quadradinhos que compõe a figura. Levaremos em conta a trajetória proposta por Clement e Stephan (2004) em nossa análise da abordagem do conceito de área ao longo do Ensino Fundamental, por encontrarmos, nessa trajetória, um percurso que contempla os aspectos que consideramos importantes para a construção do conceito de área.

Em nosso estudo, recorremos às coleções de livros didáticos sugeridos pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (Brasil, 2016, 2017) como fontes de dados para análise. Pretendemos observar como os autores abordam o conceito de área, quais aspectos sobre o ensino de áreas são apresentados em cada nível de ensino, e compreender o uso de recursos como a malha quadriculada e a unidade de medida, a composição e decomposição de figurasse a introdução das fórmulas no percurso da formalização de tal conceito. Analisaremos também ouso das figuras nos livros didáticos e as possibilidades de apreensões que elas podem mobilizar no desenvolvimento do conceito de área.

Marco teórico

Em nossa análise dos aspectos relativos à construção do conceito de área nos livros didáticos, no que se refere ao uso de figuras, nos apoiamos em Duval (1994), que destaca que os problemas geométricos possuem registros de representações que proporcionam interpretações autônomas. De acordo com Duval (1994), essas interpretações dentro de uma abordagem geométrica de uma figura podem diferenciar em quatro possíveis apreensões: perceptiva, discursiva, sequencial e operatória. Este é um olhar não frequentemente utilizado para examinar o papel e a importância das figuras em problemas relacionados ao estudo dos conceitos de área e perímetro.

Segundo Duval(1994), a apreensão perceptiva é a mais imediata, por estar associada e possibilitar a identificação ou reconhecimento da forma de uma figura; a apreensão discursiva prioriza a articulação dos enunciados por meio de legendas ou hipóteses que explicitam as propriedades existentes em uma figura; a apreensão sequencial está associada à ordem de construção de uma figura por meio algum instrumento, sendo dependente das propriedades matemáticas envolvidas e das restrições técnicas dos instrumentos que serão utilizados; e a apreensão operatória está relacionada às possíveis modificações e reconfigurações que uma figura pode sofrer. Esta última, segundo o autor, é a mais incompreendida das apreensões, apesar de sua exploração heurística ser frequentemente utilizada para justificar o uso de uma figura segundo uma abordagem geométrica (Duval, 1994).

Em uma apreensão operatória consideram-se situações em que as figuras podem sofrer diferentes tipos de modificações que podem ser realizadas mentalmente ou fisicamente. Para o autor, essas modificações são classificadas de três modos diferentes: mereológica, quando a figura é dividida em partes e reagrupada em outra figura; óptica, quando ampliamos, reduzimos ou deformamos uma figura; e posicional, quando deslocamos a figura em relação a um referencial (Duval, 1994).

Segundo Duval (1994) para formar uma sólida compreensão é essencial que cada uma das apreensões seja levada em consideração e, ao analisar uma figura geometricamente é importante mobilizar mais de uma apreensão (simultânea ou alternadamente).

Nesse sentido, observaremos em uma seleção de livros didáticos, além da construção do conceito de área, também, como uso das figuras pode favorecer no desenvolvimento do conceito do cálculo de área de figuras planas, destacando quais apreensões figurais são propostas ou que poderão ser mobilizadas na aprendizagem desse conceito.

Metodologia

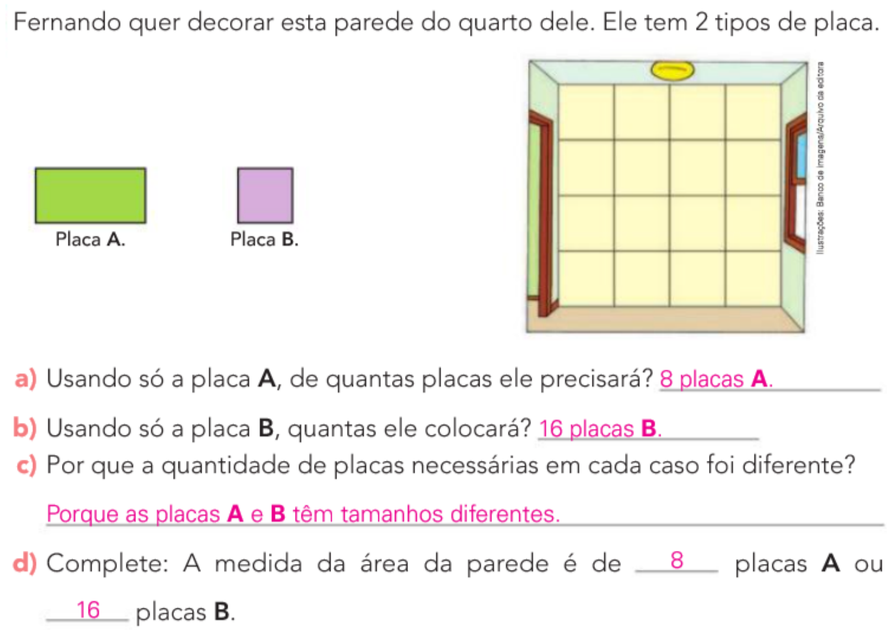
Nossa pesquisa é de cunho documental, de acordo com Gil (2002) e a organização dos dados será construída utilizando as diferentes fases da análise de conteúdo propostas por Bardin (1977).Na primeira fase, a pré-análise, buscamos estabelecer uma organização das ideias centrais, onde iniciamos com a escolha do conteúdo, seguida da escolha dos livros a serem analisados. Optamos por três coleções dentre as dezessete indicadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático de 2016 (PNLD, 2015) dosanos iniciais do Ensino Fundamental, e três dentre as onze sugeridas pelo PNLD 2017, anos finais do Ensino Fundamental. Em seguida, realizamos um levantamento de pesquisas que ressaltam a importância de desenvolver um ensino que valorize a compreensão do conceito de área de figuras planas e de sua medição levando em conta, principalmente os trabalhos de Pessoa (2010), Facco (2003) e Clements e Stephan (2004).Por fim, adotamos os aspectos relativos à apreensão figural, segundo Duval (1994), como fundamentação que norteará toda análise. Na segunda fase, a da exploração do material, identificamos quais livros e quais capítulos das coleções selecionadas abordam o conteúdo de área de figuras planas, observando a existência de articulações entre o desenvolvimento do conteúdo ao longo das coleções. Naúltima fase, o tratamento dos resultados, tratamos os dados obtidos qualitativamente, observando a sequência de atividades apresentada nos volumes e o uso das representações figurais na compreensão do conhecimento.

Para nossa análise delineamos algumas categorias norteadoras: a existência deatividades que evidenciem a possibilidade de mobilização das apreensões perceptiva, discursiva, sequencial e operatória na compreensão do conceito de área; a transição da abordagem do conceito de área e sua medida na passagem dos anos iniciais para os anos finais do ensino fundamental nos livros didáticos; e o desenvolvimento de atividades que contemplem as etapas descritas por Clements e Stephan (2004). Dentre essas atividades, destacamos atividades que envolvam o recobrimento de uma região, a construção da estrutura retangular, a percepção de que o comprimento dos lados de um retângulo está associado ao número de unidades de área retângulo em cada linha e ao número de linhas da estruturação, e, por fim, a área como produto das dimensões de uma estruturação retangular. Trazemos para esse artigo alguns aspectos relacionados a um conjunto de dados relativos aos anos iniciais do Ensino Fundamental, evidenciados por meio de uma seleção de propostas de atividades obtida nos textos previamente escolhidos com base nas categorias norteadoras.

Resultados

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático- PNLD é destinado a avaliar obras didáticas que serão disponibilizadas para rede pública de ensino. Os dados para este trabalho foram coletados de dois dos livros de uma das coleções para os anos iniciais do Ensino Fundamental, selecionadas dentre as aprovadas pelo PNLD para 2016 (Brasil, 2015). Somente os livros destinados ao quarto e quintos anos tratam de áreas de figuras planas e o conceito é abordado por meio da resolução de problemas.

No volume do quarto ano, o tópico grandezas e medidas é apresentado no oitavo capítulo. Nele, inicialmente, são desenvolvidas doze atividades que abordam o conceito de área, dentre elas, duas utilizam a malha quadriculada, quatro utilizam figuras com a superfície quadriculada e as demais abordam o conceito de áreas por meio de problemas que utilizam dados do cotidiano. Ao analisar essas atividades, observamos imediatamente uma apreensão perceptiva, com o reconhecimento das figuras utilizadas, sendo muito enfatizado o uso da contagem de quadradinhos para o cálculo da área desejada. As quatro primeiras atividades, como ada Figura 1, utilizam unidades de medidas não padronizadas (quadrados e retângulos).



Fernando quer decorar esta parede do quarto dele. Ele tem 2 tipos de placa.

Placa A. Placa B.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Usando só a placa **A**, de quantas placas ele precisará? 8 placas **A**.

b) Usando só a placa **B**, quantas ele colocará? 16 placas **B**.

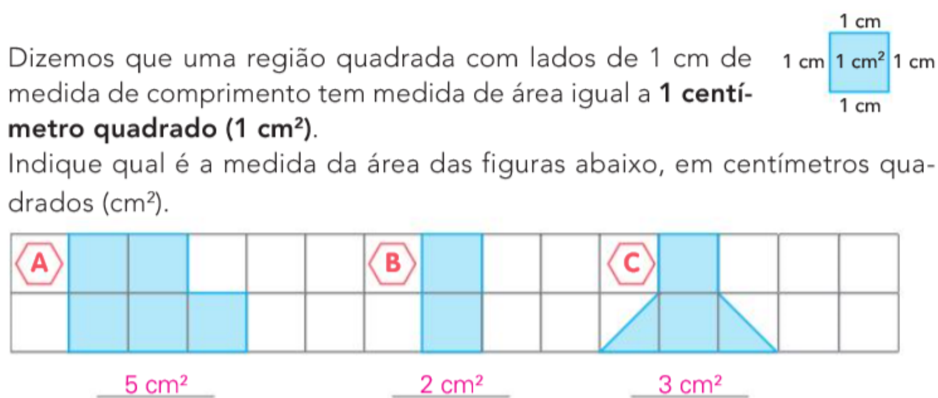
c) Por que a quantidade de placas necessárias em cada caso foi diferente?

Porque as placas **A** e **B** têm tamanhos diferentes.

d) Complete: A medida da área da parede é de 8 placas **A** ou 16 placas **B**.

Figura 1: Unidades de medidas diferenciadas
Fonte: coleção 1 (4° ano, p. 234)

Na quinta atividade (ver Figura 2) é introduzida a unidade padronizada de área, relacionando-a com a medida dos lados de um quadradinho.



Dizemos que uma região quadrada com lados de 1 cm de medida de comprimento tem medida de área igual a **1 centímetro quadrado (1 cm²)**.

Indique qual é a medida da área das figuras abaixo, em centímetros quadrados (cm²).

5 cm² 2 cm² 3 cm²

Figura 2: Unidade de área padronizada
Fonte: Coleção 1 (4° ano, p. 235)

Observamos que essa atividade favorece uma apreensão perceptiva ao solicitar a comparação do formato de cada figura com a unidade de área para chegar à medida solicitada, e uma apreensão discursiva no desenvolvimento do enunciado, ao descrever que a medida de área da região quadrada é igual a 1 cm². No item C (ver Figura 2), também podemos observara necessidade de mobilização de uma apreensão operatória, realizando uma modificação mereológica associada à reconfiguração da figura, e uma posicional, ao deslocar e rodar partes da figura. Tais modificações são sugeridas nos comentários do material de apoio do professor (ver Figura 3).

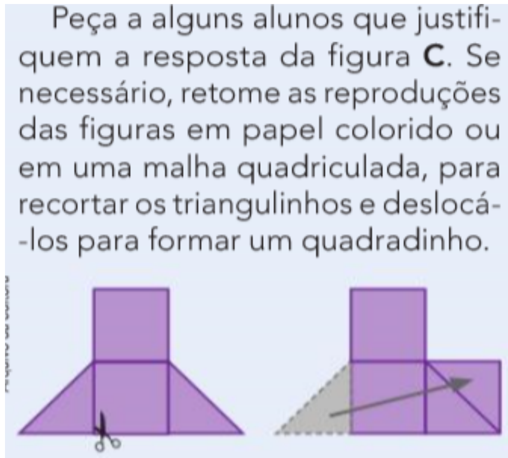

Peça a alguns alunos que justifiquem a resposta da figura **C**. Se necessário, retome as reproduções das figuras em papel colorido ou em uma malha quadriculada, para recortar os triangulinhos e deslocá-los para formar um quadradinho.

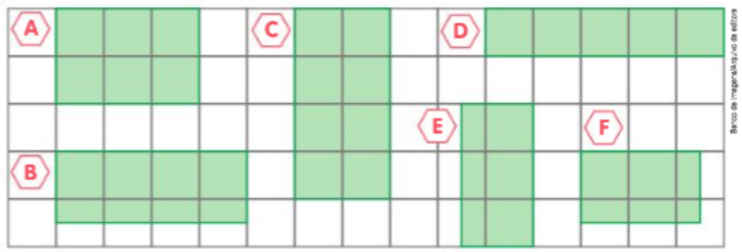
Figura 3: Sugestão de resolução
Fonte: Coleção 1 (4° ano, p. 235)

Observamos que também são apresentadas duas atividades que relacionam o cálculo da área e do perímetro, todas considerando a unidade padronizada, 1 cm², como a área de um quadradinho. Novamente, é enfatizada a contagem de quadradinhos para o cálculo de área. A apreensão perceptiva é propiciada por ambas as atividades, identificando a forma de cada figura, assim como o reconhecimento da superfície e do contorno de cada figura. Por fim, são propostas, no capítulo examinado, mais nove atividades quere forçam o uso de unidades de medidas diferenciadas, as unidades padronizadas ou não, e a relação entre área e perímetro de figuras planas. Podemos observar a necessidade do uso imediato da apreensão perceptiva em todas as atividades propostas e, a apreensão operacional presente em três atividades cujas figuras necessitavam de reconfigurações e de algum deslocamento no plano. Ao final do 4º ano, o percurso para a construção do conceito contempla atividades baseadas no contexto de ladrilha mento, associadas à malha quadriculara, com a introdução à unidade de medida e à reconfiguração em situações simples, alguns dos estágios propostos por Clements e Stephan (2004).

No volume do quinto ano, o conceito de área é reintroduzido com o uso das unidades padronizadas ou não. Na primeira atividade é proposta uma resolução por meio da estruturação retangular, que, segundo o autor, já foi tratada de uma maneira informal no capítulo sobre multiplicação com números naturais. São apresentados, novamente, exercícios que relacionam a medida da área e do perímetro.

Considere as regiões retangulares desenhadas em uma malha quadriculada de 1 cm. Preencha a tabela e verifique em mais alguns exemplos.

Use uma calculadora quando necessário.



Regiões retangulares

Região retangular	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Verificação
A	3 cm	2 cm	6 cm²	3 × 2 = 6
B	4 cm	1,5 cm	6 cm²	4 × 1,5 = 6
C	4 cm	2 cm	8 cm²	4 × 2 = 8
D	5 cm	1 cm	5 cm²	5 × 1 = 5
E	3 cm	1,5 cm	4,5 cm²	3 × 1,5 = 4,5
F	2,5 cm	1,5 cm	3,75 cm²	2,5 × 1,5 = 3,75

Figura 4: Atividade de disposição retangular
Fonte: Coleção 1 (5° ano, p. 280)

Nesse volume encontramos atividades em que os alunos devem calcular a área de retângulos dispostos na malha quadriculada cujas medidas dos lados não são valores inteiros (ver figura 4). Para a resolução dessas atividades o autor sugere que os professores estimulem os alunos a utilizarem tanto a contagem dos quadradinhos, para a qual, em alguns itens, há a necessidade de reagrupar as partes dos quadradinhos, quanto o produto das duas dimensões, com o auxílio de uma calculadora.

Observamos que algumas das atividades do livro do quinto ano, além de mobilizar uma apreensão perceptiva imediata, com a identificação de cada figura representada no plano, também demanda uma apreensão operacional, ao utilizar a contagem de quadradinhos para determinar a área dos itens B, E e F (ver figura 4).Modificações mereológica e posicional relacionadas à possibilidade de reunir duas metades podem auxiliar a compreensão da composição de um quadradinho para efetuar a contagem. Podemos considerar esse tipo de atividade como condutora de uma etapa de transição do uso da malha quadriculada para a fórmula da área de uma região retangular.

Em uma das atividades que aborda as áreas das regiões determinadas por triângulos retângulos, associando com a região retangular, evidenciamos que somente uma apreensão perceptiva não explicitaria todas as informações necessárias para uma possível resolução, sendo, necessária a mobilização de uma apreensão discursiva que descreve, no contexto do enunciado, outras propriedades matemáticas da figura, estas de caráter operatório (ver figura 5).

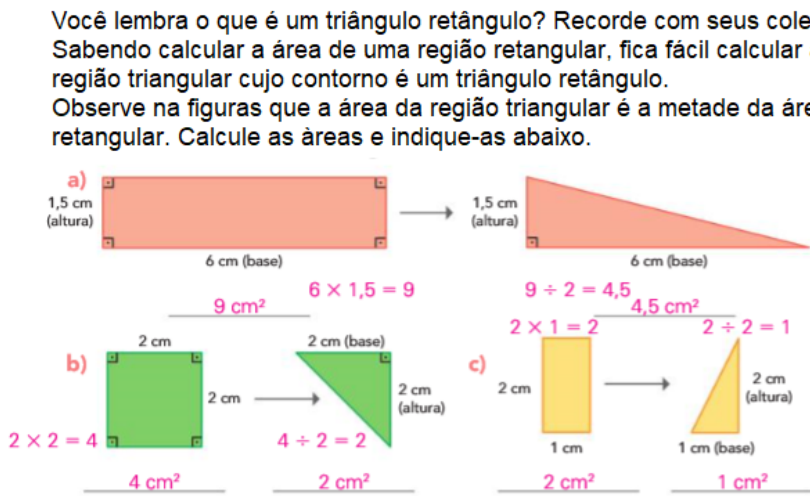

Você lembra o que é um triângulo retângulo? Recorde com seus colegas.
Sabendo calcular a área de uma região retangular, fica fácil calcular a área de uma região triangular cujo contorno é um triângulo retângulo.
Observe na figuras que a área da região triangular é a metade da área da região retangular. Calcule as àreas e indique-as abaixo.

Figura 5: Área de regiões retangulares
Fonte: Coleção 1 (5° ano, p. 283)

Para finalizar, o autor propõe uma série de atividades que retomam as ideias já discutidas. No volume do 5º ano encontramos um aprofundamento da trajetória proposta no volume anterior, em um encaminhamento inicial para o uso das fórmulas da área de figuras retangulares.

Ressaltamos que, nos dois volumes analisados, o conceito de área de figuras planas é introduzido por meio de atividades que exploram as representações figurais, e transitam, de maneira elementar, da malha quadriculada para a fórmula, por meio da contagem de unidades de medida ou reconfiguração. Nessas atividades, verificamos a possibilidade de mobilização das apreensões perceptiva, discursiva e operacional, mas não encontramos exemplos que mobilizem a apreensão sequencial.

Conclusões

Ao realizar nossa análise verificamos que ao introduzir o conceito de áreas de figuras planas, nos dois volumes da coleção, o autor fez uso da representação figural, assim como de alguns aspectos descritos por Clementes e Stephan (2004), tais como: a unidade de medida na malha quadriculada, o particionamento, a organização retangular e as reconfigurações. Apesar das indicações do manual do PNLD para 2016 (Brasil, 2015) destacarem que esses dois volumes não utilizavam fórmulas para o cálculo da medida de áreas, observamos que suas atividades podem auxiliar ou encaminhar a compreensão da resolução por meio delas. Acreditamos que tais atividades poderiam ser reestruturadas e aprofundadas pelo professor para uma melhor compreensão do uso da malha quadriculada, da decomposição e composição de figura seda restruturação retangular, para assim, poder consolidar a compreensão do conceito e do cálculo numérico. Para Clements e Stephan (2004) quando essa sequência de atividades não é desenvolvida é comum que o aluno confunda os conceitos de perímetro e de área, além, de não usar o cálculo para determinar área de forma significativa.

Em relação às apreensões figurais, observamos que nos dois volumes a apreensão perceptiva foi evocada e que a apreensão operacional foi mobilizada somente em algumas atividades, assim como a apreensão discursiva, por vezes mobilizada nos enunciados, mas menos provocada ou favorecida nas soluções. Acreditamos que nessa fase de aprendizagem uma maior mobilização da apreensão operacional, presente na decomposição e composição das figuras, poderia favorecer a compreensão do conceito de área e de sua medida.

Esses fatos reforçam necessidade de aprofundar a investigação, no sentido de identificar nos demais volumes dessa coleção, e também em outras já selecionadas, as articulações entre o desenvolvimento do conceito e o uso das figuras no ensino do conceito de área.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (1977). Análise de conteúdo. (L. A. Reto, & A. Pinheiro, Trads.) Lisboa, Portugal: Edições 70.

Brasil. (2015). Guia de livros didáticos: PNLD 2016: Alfabetização Matemática e Matemática: ensino fundamental anos iniciais. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica.

Clements, D. H., & Stephan, M. (2004). Measuremente in Pre-K to grade 2 mathematics. In: D. H. Clements, J. Sarama, & A. M. DiBiase (Eds.), Engaging young children in mathematics (pp. 299-317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche geometric. Repères - IREM(17), pp. 121-137.

Facco, S. R. (2003). Conceito de área: Uma proposta de ensino aprendizagem. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade católica de São Paulo, São Paulo.

GIL, A. C. (2002). Como elaborar um projeto de pesquisa (4ª ed.). São Paulo: Atlas.

Pessoa, G. d. (2010). Um estudo diagnótico sobre o cálculo da área de figuas planas na malha quadriculada: Influência de algumas variáveis. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernanbuco, Recife.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NA TRANSIÇÃO DO SECUNDÁRIO AO SUPERIOR NO BRASIL

OSTENSIVE AND NON-OSTENSIVE NOTIONS IN THE TEACHING OF ANALYTICAL GEOMETRY IN THE TRANSITION FROM SECONDARY TO HIGHER EDUCATION IN BRAZIL

Miriam do Rocio Guadagnini, Marlene Alves Dias, Valdir Bezerra dos Santos Júnior
Universidade Federal de Goiás, Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Federal de Pernambuco. (Brasil)
miriamguaddagnini@gmail.com, maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com

Resumo
No Brasil, as noções de Geometria Analítica em IR^2 são introduzidas no Ensino Médio e consideradas disponíveis quando do estudo dessa disciplina em IR^3 no Ensino Superior. Para compreender como articular essas noções nessas duas etapas escolares, nosso objetivo foi analisar quais são os ostensivos e não ostensivos em jogo nessa disciplina e as possíveis articulações entre eles por meio de uma pesquisa documental. Para este artigo, consideramos apenas as noções de retas, planos e vetores, pois retas e planos são introduzidos em IR^2 no Ensino Médio e esses conhecimentos são considerados disponíveis no Ensino Superior, que introduz essas noções em IR^3 e em outras dimensões sem articular com os conhecimentos desenvolvidos em IR^2. Este estudo nos auxiliou a propor ações que mostram a importância de revisitar IR^2 para criar as relações pessoais que auxiliam a desenvolver essa disciplina em IR^3 e em outras dimensões, ajudando assim os estudantes a compreenderem o significado do seu estudo.

Palavras-chave: retas, planos, vetores, ostensivos, não ostensivos.

Abstract
In Brazil, the notions of Analytical Geometry in IR^2 are introduced in High School, and they are considered available in the study of this discipline in IR^3 in Higher Education. In order to understand how to connect these notions in both educational levels, this work is aimed at analyzing which of them are ostensive and non-ostensive in this discipline, as well the possible linking between them through a documentary research. In this paper, we only consider the notions of straight lines, planes and vectors, since straight lines and planes are introduced in IR^2 in High School and this knowledge is taken for granted in Higher Education, where these notions are introduced in $IR^{3.}$, as well as in other dimensions without connection with the knowledge developed in IR^2. This study helped us to propose actions that show the importance of revisiting IR^2 to create the personal relationships that helps to develop this subject in IR^3 and in other dimensions, thus helping students to understand the meaning of their study.

Key words: straight lines, planes, vectors, ostensive, non-ostensive notions.

Introdução

Vários problemas são encontrados por estudantes e professores na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior no Brasil, no que se refere ao ensino da Matemática. Neste artigo, propomo-nos a estudar as dificuldades associadas ao ensino da Geometria Analítica nos ensinos Médio e Superior. Essas dificuldades foram identificadas por meio das macroavaliações institucionais estaduais, nacionais e pesquisas. Como exemplo de pesquisa, citamos o trabalho de Gueudet, Bosch, di Sessa, Kwon, Verschaffel (2016), que aborda de maneira mais geral o que pode ser considerado no estudo das transições em Educação Matemática e considera a possibilidade de estudar a transição Ensino Médio e Ensino Superior. Além disso, estudamos essa questão desde 2010, tendo iniciado com um estudo comparado entre Brasil e França, para o domínio das funções, conforme Dias, Artigue, Jahn, Campos (2010).

Iniciamos observando que a disciplina Geometria Analítica é introduzida no Ensino Médio, quando se propõe o estudo de ponto e retas no plano seguido do estudo da circunferência e secções cônicas. No Ensino Superior, é introduzida a noção de vetor em um espaço de dimensão finita, suas operações e propriedades e, na sequência, é definida a noção de sistema de coordenadas de origem O associadas a um espaço vetorial de dimensão 3, em particular, ao espaço vetorial IR^3, o que permite determinar as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{OP}$ de origem O e extremidade P, cujas coordenadas são as coordenadas do ponto P em relação a uma base do espaço vetorial IR^3. Após a introdução de sistema de coordenadas no espaço, é proposto o estudo de retas e planos, das suas representações e propriedades em um espaço afim, cujo espaço vetorial associado é IR^3. É indicado ainda o estudo das cônicas e das curvas e superfícies. Portanto, como tratamos da transição entre os ensinos Médio e Superior, consideramos especificamente o estudo de retas e planos em IR^2 e IR^3.

Os estudos das macro avaliações estaduais e nacionais nos conduziram a considerar que a falta de articulação entre os conhecimentos matemáticos mobilizáveis ou disponíveis dos estudantes que concluem o Ensino Médio (estudantes de 15 a 17 anos) e iniciam o Ensino Superior é um dos elementos que influenciam o desenvolvimento dos mesmos no Ensino Superior, levando muitos daqueles que iniciam carreiras, em que a Matemática é ferramenta para a introdução de novos conhecimentos, a desistirem de seus projetos em função das dificuldades encontradas. Observamos que as disciplinas de Geometria Analítica e Álgebra Linear estão entre as que apresentam maior dificuldade e que levam muitos estudantes a questionarem a razão destas dificuldades, já que eram “bons” alunos de Matemática para a instituição Ensino Médio.

Para melhor compreender e identificar essa falta de destreza, formulamos as seguintes questões: Quais as expectativas institucionais para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica para o Ensino Médio? Quais as expectativas institucionais para o ensino e aprendizagem de Geometria Analítica para o curso de Licenciatura em Matemática (formação inicial)? Quais as expectativas institucionais sobre as relações pessoais a serem desenvolvidas pelos estudantes que terminam o Ensino Superior?

Certamente, as questões acima são amplas e, para este artigo, consideramos como objetivo a análise dos ostensivos e não ostensivos em jogo no estudo de retas e planos em IR^2 e IR^3 na transição entre o Ensino Médio e Superior e as possíveis articulações entre eles.

Como tratamos da transição entre o Ensino Médio e Superior, é importante observar que, no Ensino Médio brasileiro, têm sido implementadas mudanças influenciadas por resultados de pesquisas em Educação Matemática, mas pouco se modifica no Ensino Superior, em particular, quando consideramos o ensino e a aprendizagem de Geometria Analítica. Assim, fica a cargo dos professores a elaboração de novos tipos de tarefas que possibilitem a articulação entre os diferentes conhecimentos. Para tal, é preciso identificar o que se pode considerar como conhecimentos prévios para os egressos do Ensino Médio.

Desse modo, para atingir nosso objetivo, escolhemos como referencial teórico central da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1994, 1998, 2015) e Bosch e Chevallard (1999) e as abordagens teóricas em termos de quadros e mudanças de quadros de Douady (1984, 1992), de pontos de vista de Rogalski (2001) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes de Robert (1997, 1998).

Em relação à TAD, consideramos as noções: praxeologia, ostensivos e não ostensivos e relações institucionais e pessoais. Em relação aos referenciais teóricos de apoio, consideramos as noções de quadro e mudança de quadro segundo Douady, níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme definição de Robert, a saber: técnico, mobilizável e disponível e pontos de vista cartesiano e paramétrico, que correspondem a enxergar retas e planos em IR^2, IR^3 e IR^n por meio de um sistema minimal de equações lineares, que os define para o ponto de vista cartesiano e por meio de um conjunto minimal de vetores para o ponto de vista paramétrico.

Em coerência entre o referencial teórico e o objetivo da pesquisa, nossa pesquisa é qualitativa, seguindo o método da pesquisa documental, conforme proposta de Lüdke e André (2013).

A análise das expectativas institucionais via documentos oficiais e da macro avaliação Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) aplicado a estudantes do primeiro e último ano dos cursos superiores tende a mostrar que fica sob a responsabilidade do professor identificar os conhecimentos prévios de seus estudantes e propor novas praxeologias, que permitam articular os ostensivos e não ostensivos de Geometria Analítica, em particular, considerando os pontos de vista cartesiano e paramétrico em IR^2, IR^3 e IR^n, quando da introdução de novos conhecimentos sobre este quadro no Ensino Superior, explicitando a diferença entre os espaços considerados e que mesmo se algumas propriedades são as mesmas, os espaços vetoriais associados ao espaços afim não estão contidos uns nos outros, o que auxilia quando do desenvolvimento da Geometria Analítica e indica a articulação de conhecimentos desenvolvidos no Ensino Médio com os novos conhecimentos introduzidos no Ensino Superior, possivelmente dificultando o estudo deste domínio pelos estudantes.

A seguir, apresentamos os elementos teóricos que sustentam a pesquisa.

Referencial teórico

Como anunciado acima, o referencial teórico central da pesquisa é a TAD, mais particularmente as noções de praxeologia, ostensivos e não ostensivos e relações institucionais e pessoais.

Iniciamos ressaltando que Chevallard (1994, 1998) indica que a noção de praxeologia corresponde a uma das premissas básicas da TAD, pois segundo o autor, toda atividade regular humana pode ser entendida por meio deste modelo único. Ainda conforme o autor, as atividades humanas podem ser decompostas em certo número de tarefas, mais concretamente em tarefas de um determinado tipo. Esses tipos de tarefas necessitam de uma técnica para serem desenvolvidas; sendo assim, essas técnicas, para se tornarem viáveis, precisam ser compreensíveis e justificáveis. Essa dupla função de possibilitar resolver a tarefa e justificá-la é amparada por um discurso denominado tecnologia de uma técnica. Da mesma forma, a tecnologia de uma técnica deve ser compreensível e justificável, dando origem ao que o autor denomina teoria, que corresponde à tecnologia da tecnologia. Assim, a hierarquia técnica - tecnologia e teoria - está relacionada ao tipo de tarefa considerado.

Após considerar a noção de praxeologia e apresentar alguns exemplos, Chevallard (1994) elabora as seguintes questões: Do que é feita uma determinada técnica? Quais os “ingredientes” que a compõem? Em que consiste a implementação de uma técnica? Para responder a estas questões, o autor distingue dois objetos: os objetos ostensivos, que têm para nós uma forma material, sensível e os objetos não ostensivos, que correspondem às noções, conceitos e ideias etc. O pesquisador observa ainda que os ostensivos nos permitem manipular os não ostensivos aos quais estão associados e que são evocados durante essa manipulação. Ainda consoante Chevallard, toda técnica supõe a ativação de um complexo de ostensivos e não ostensivos, sendo a manipulação dos ostensivos regrada pelos não ostensivos que são evocados com a ajuda dos ostensivos, o que conduz a uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos. Como exemplo, o pesquisador considera: os objetos materiais que possibilitam uma manipulação no sentido estrito (lápis, compasso, ...) e os ostensivos: gestuais, discursivos, gráficos e escriturais, além da voz, olhar etc.

Lembrando que, conforme Chevallard (1998), a primeira noção fundamental da TAD é a de objeto o, que corresponde a toda entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Assim, a noção de objeto é a mais geral, pois tudo é objeto, inclusive as pessoas. Assim, para o autor, toda obra O é um objeto, sendo a obra considerada como qualquer parte de um complexo de praxeologias.

Prosseguindo na introdução das noções fundamentais da TAD, o autor indica que a segunda noção fundamental é a de relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o, representada por R(x, o), que sugere todas as interações, sem exceção, que x pode ter com o objeto o, isto é, x pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele etc. Isso conduz à definição de relação pessoal com o objeto o, indicada por $R(x, o) \neq \phi$, quando esta é não vazia. Continuando, o pesquisador adverte que a terceira noção fundamental é a de pessoa, que é definida pelo par formado por um indivíduo x e o sistema de relações pessoais R(x, o) num dado momento da história de x. Dessa forma, quando um objeto o existe para uma pessoa x, ou seja, quando $R(x,o) \neq \phi$, dizemos que x conhece o e que a relação R(x,o) indica a maneira que x conhece o. O autor, ao introduzir a quarta noção, a noção de instituição I, explicita que as instituições são obras de um tipo particular, que proporcionam e impõem a seus sujeitos maneiras próprias de fazer, pois adotam praxeologias determinadas.

Assim, Chevallard (1998) esclarece que a relação pessoal de x com o objeto o é criada ou muda por meio da entrada de x em certas obras O, cujo objeto o as compõe, e essas mesmas obras vivem em determinadas instituições em que x poderá ocupar a posição p. Isso o conduz a transferir a "teoria do conhecimento" esboçada para os indivíduos para as instituições, ou seja, dado um objeto o, uma instituição I e uma posição p em I, denominamos relação institucional a o em posição p, e indicamos $R_I(p, o)$, a relação com o objeto o que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de I em posição p. Dizer que x é um bom sujeito de I em posição p é o mesmo que afirmar que a relação pessoal do indivíduo x está em conformidade ou é adequada à relação institucional em posição p, que indicamos $R(x, o) \cong R_I(p, o)$. Para diversos objetos o, temos $R_I(p, o) = \phi$, isto é, os sujeitos de I em posição p não são conduzidos a conhecer o objeto o.

Consideramos ainda a noção de quadro e mudança de quadros de Douady (1984, 1992), que a partir da análise epistemológica sobre o trabalho do matemático profissional, coloca em evidência a dualidade dos conceitos matemáticos, os quais, em geral, funcionam como ferramentas implícitas e, em seguida, explícitas da atividade matemática antes de adquirirem o status de objeto e de serem trabalhados como tal e o papel desempenhado pelas mudanças de quadros nas atividades e na produção matemática.

Segundo Douady (1984, 1992), uma ferramenta implícita corresponde a um conceito em elaboração, enquanto uma ferramenta explícita está associada a um conceito ou a uma noção utilizada intencionalmente para resolver um problema, e um objeto é definido como um componente cultural que ocupa um lugar bem determinado no complexo edifício do saber matemático, sendo reconhecido socialmente.

O objeto matemático, tal como definido por Douady (1984, 1992), é parte de um edifício mais amplo que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina quadro, que corresponde a um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. As imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferirem pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas.

Douady define as mudanças de quadros como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e possibilitam utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, favorecendo assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo, tanto o quadro original, como os quadros auxiliares de trabalho.

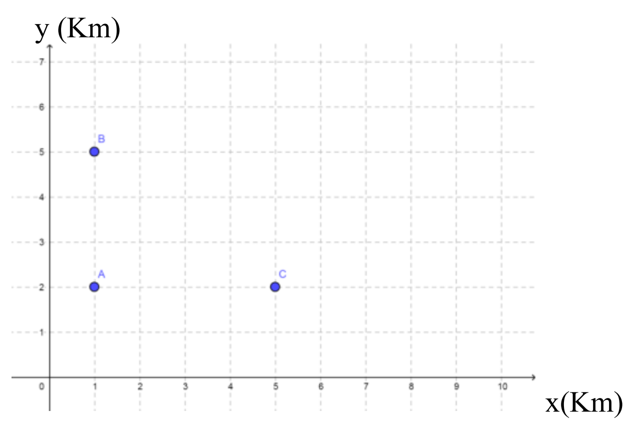
Outra noção que auxiliou nas análises é a noção de ponto de vista que, de acordo com Rogalski (2001), consiste nas diferentes maneiras de observar, fazer funcionar e eventualmente definir os objetos matemáticos. Logo, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro.

Utilizamos ainda a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes definidos por Robert (1997, 1998) que, após definir níveis de conceituação como os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual e indicar que esses níveis são relativos, pois dependem das escolhas em função do nível de conceituação que desejamos abordar, apresenta os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber:

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Representar no sistema cartesiano ortogonal os pontos A(1, 2) e B(-3, 4).

O nível mobilizável equivale a um início de justaposição de saberes de um determinado domínio, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito está em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Exemplo: Calcular a distância entre os pontos A(1, 2) e B(-3, 4).

O nível disponível está atrelado a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos. Exemplo: Um motorista de UBER sai de A passa por B e se dirige a C, conforme indicado na figura a seguir.



Qual o valor da corrida, sabendo que o preço do quilometro rodado é $ 2,00 dólares?

Metodologia

Como anunciado na introdução, trata-se de uma pesquisa qualitativa segundo Lüdke e André (2013), cujo método é o da pesquisa documental, pois, para compreender o fenômeno de transição entre os Ensinos Médio e Superior, quando se introduzem e desenvolvem os saberes a ensinar associados à Geometria Analítica, mais particularmente, às noções de pontos e retas no plano e pontos, retas e planos no espaço, analisamos documentos oficiais para identificar as relações institucionais esperadas e livros didáticos indicados pelo Ministério da Educação ou pela Secretária de Estado da Educação para o Ensino Médio e o mais indicado nos planos de ensino da disciplina de Geometria Analítica para os cursos de Licenciatura em Matemática no Ensino Superior.

Os documentos analisados foram as Orientações Curriculares para o Ensino Médio e planos de ensino de universidades públicas e privadas para cursos de Licenciatura em Matemática (formação inicial de professores). Os livros que sustentam as análises apresentadas neste artigo são Dante (2017), indicado pelo Programa do Livro Didático do Ministério da Educação e um dos mais utilizados nas escolas públicas e o livro de Geometria Analítica de Boulos e Camargo (2004), indicado na maioria dos planos de ensino da disciplina de Geometria Analítica para os cursos de Licenciatura em Matemática.

Para compreender melhor os possíveis traços sobre as relações pessoais que se espera tenham sido desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Superior, analisamos as duas últimas macro avaliações Exame Nacional de Desempenho de Estudantes ENADE (2014, 2017), que avalia estudantes do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática e os do último ano, ou seja, verifica a evolução desses estudantes, uma vez que o exame, em geral, contempla os mesmos estudantes.

Para a análise das praxeologias sobre as noções de pontos e retas no plano e de pontos, retas e planos no espaço, construímos uma grade de análise, segundo o modelo de Dias (1998).

Exemplo da grade de análise

Tipo de tarefa: Representar um plano definido por um de seus pontos e dois de seus vetores diretores.
Exemplo: Seja Q o plano definido pelo ponto $P(0, -1, 2)$ e os vetores $\vec{u}(4, 0, -1)$ e $\vec{v}(0, 2, 1)$. Determinar as representações paramétrica e cartesiana de Q.

Técnica(s): 1) A técnica 1, parece mais natural, em função da forma como a tarefa é enunciada e consiste em escrever uma representação paramétrica do plano $M \in Q \leftrightarrow \exists\, \alpha, \beta$ tais que $\overrightarrow{PM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ para, na sequência, fazer a passagem para a representação cartesiana via determinantes, escrevendo $\det(\overrightarrow{PM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$; 2). A técnica 2 inicia-se da mesma maneira que a técnica 1 e após determinar a representação paramétrica, resolve-se o sistema de equações lineares e interpreta-se a condição de solução como sendo a representação cartesiana pedida; 3) A terceira técnica consiste em determinar um vetor normal ao plano, aplicando o produto vetorial aos vetores diretores dados, que geram o plano. Obtém-se em seguida uma representação cartesiana do plano, considerando um ponto M qualquer desse plano e efetuando o produto escalar $\overrightarrow{PM}.\vec{n} = 0$ após realizar a passagem da representação cartesiana para a representação paramétrica.

Tecnologia(s): 1) Noções de vetores e suas propriedades, noção de ponto e suas representações, noção do plano no espaço e suas representações e propriedades, noção de determinantes e suas propriedades, método de passagem de uma representação paramétrica para uma representação cartesiana; 2) As mesmas noções consideradas na tecnologia 1 e a noção de sistemas de equações lineares, um método de resolução de sistemas e suas propriedades; 3) Noção de vetor normal ao plano e noções de produto escalar e vetorial e método de passagem de uma representação cartesiana para uma representação paramétrica.

Teoria(s): Vetores no espaço, suas operações e propriedades; noção de ponto no espaço e suas representações; noção de plano no espaço, suas representações e propriedades; noção de determinantes de uma matriz, suas operações e propriedades e noção de sistemas de equações lineares, um método de resolução desses sistemas e suas condições de solução, noção de vetor normal, noções de produto escalar e vetorial, suas operações e propriedades.

Resultados

A análise da proposta institucional via Parâmetros Curriculares Nacionais +, Brasil (2002) e Orientações Curriculares para o Ensino Médio, Brasil (2006), a partir da descrição da origem histórica da Geometria Analítica propõe o estudo das coordenadas de um ponto P no plano por meio do que denominamos ostensivo coordenadas ((x,y)). Na sequência, indica-se o estudo das propriedades geométricas por meio do que chamamos de ponto de vista cartesiano, o que conduz a determinar o conjunto solução de uma equação por meio do ostensivo coordenadas, indicando assim a articulação entre álgebra e geometria para o caso particular das retas e círculos. É indicada ainda a introdução do conceito de vetor no plano por meio do que denominamos ostensivo flecha (segmentos orientados com mesmo módulo, direção e sentido) e ostensivo coordenadas ((x,y)), dando ênfase às operações de adição e multiplicação por escalar, utilizando o ostensivo coordenadas. Ressalta-se ainda a importância do estudo de vetores para a disciplina de Física que, por sua vez, só propõe o estudo dessa noção utilizando apenas a ostensiva flecha (↑).

A análise dos planos de ensino da disciplina Geometria Analítica indica uma breve revisita ao estudo das noções de ponto de retas no plano após a introdução da noção de vetores no plano e no espaço, suas operações e propriedades para, na sequência, introduzir e desenvolver tarefas em que a ênfase é dada à determinação de uma das representações e à passagem às outras, e às aplicações a problemas de determinação de posições relativas, ângulos e distâncias, ou seja, os tipos de tarefas privilegiados ficam restritos ao nível mobilizável.

Na análise do livro didático para o Ensino Médio de Dante (2017), um dos mais adotados pelos professores, observamos que é desenvolvida apenas a Geometria Analítica no plano e que a noção de vetor não é considerada, mesmo tendo sido indicada na proposta institucional. Sendo assim, o autor introduz apenas ponto e reta no plano, representados por meio dos ostensivos coordenadas e gráfico. A partir da noção de ponto são consideradas as noções de distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento e condição de alinhamento de três pontos, que é demonstrada utilizando o Teorema de Tales. É interessante ressaltar que a partir da demonstração, o autor introduz o ostensivo determinante simbólico considerando (x, y) um ponto qualquer e dois pontos que determinam uma reta, ou seja, um determinante de ordem três completado por uma coluna de 1 (elemento neutro da multiplicação). Ao igualar o determinante a zero, determinamos a representação cartesiana da reta que passa pelos dois pontos considerados por meio do ostensivo funcional implícito ($ax + by + c = 0$).

Ao introduzir a noção de reta no plano, o autor utiliza os ostensivos funcional ($y = ax + b$) e gráfico, mas não faz a passagem do ostensivo funcional implícito para o ostensivo funcional. A utilização do ostensivo funcional para representar uma reta está associada à abordagem proposta, uma vez que o autor considera a noção de coeficiente angular e, a partir do ostensivo gráfico, determina o mesmo por meio da noção de tangente do ângulo que a reta forma com o eixo dos x, o que lhe permite deduzir a representação cartesiana ($ax + by + c = 0$), mesmo não utilizando essa nomenclatura.

Na sequência, a ênfase é dada à representação funcional ($y = mx + n$) com o objetivo de estudar as posições relativas de duas retas no plano por meio da relação entre seus coeficientes angulares. O estudo das retas no plano prossegue e são apresentadas ainda as noções de distância entre ponto e reta e área de uma região triangular.

Os tipos de tarefas propostos aos estudantes são centrados na determinação das diferentes representações e no estudo de tarefas de Geometria Sintética por meio da Geometria Analítica, ou seja, as tarefas propostas aos estudantes exigem apenas o nível técnico e mobilizável.

São apresentadas ainda as noções de circunferência e cônicas com suas respectivas representações e propriedades.

Para a análise da relação institucional existente no Ensino Superior, escolhemos a obra de Boulos e Camargo (2004). Nossa opção deve-se ao fato de ser esta obra a mais indicada nos planos de ensino dos cursos de Licenciatura em Matemática. Nesta obra, os autores propõem o estudo da Geometria Analítica, iniciando com a noção de vetores no espaço, para a qual os autores explicitam que irão trabalhar com pontos e retas no espaço tridimensional, o que pode representar um momento para o professor associar aos conhecimentos de Geometria Analítica no plano desenvolvido no Ensino Médio.

Ao considerar a noção de ponto, os autores explicitam que este será representado pelo ostensivo letra (A, B, C,...) e a noção de segmento de reta pelo ostensivo segmento (segmento PQ), utilizando os pressupostos da Geometria Euclidiana. Os autores não utilizam a nomenclatura ostensivo, apenas a representação.

Os vetores são introduzidos por meio da ostensiva flecha (↑) e é com essa representação que é definida a operação de adição e suas propriedades, sendo a regra do paralelogramo utilizada para determinar o módulo do vetor resultante. É definida ainda a operação de multiplicação de um vetor por um escalar (número real) e suas propriedades. Ainda em relação à noção de vetores, são consideradas as noções de dependência e independência linear, base e mudança de base, utilizando o ostensivo vetor intrínseco ($\vec{u}$). São consideradas ainda as noções de produto escalar, produto vetorial, duplo produto vetorial e produto misto, com suas respectivas propriedades que serão utilizadas como ferramentas explícitas para introduzir novas noções.

Após o estudo dos vetores em espaços tridimensionais, mais especificamente em IR^3, os autores introduzem a noção de sistema de coordenadas no espaço IR^3 e deduzem a fórmula para determinar a distância entre dois pontos.

Na sequência, introduzem a noção de reta em IR^3 por meio de uma representação paramétrica $\overrightarrow{XA} = \delta\vec{v}$, sendo X um ponto qualquer da reta, A um ponto dado pertencente à reta, $\vec{v}$ um vetor diretor da reta e δ um número real.
A passagem da representação paramétrica para a representação cartesiana fica implícita na representação simétrica de uma reta $\left(\frac{x-a}{\delta} = \frac{y-b}{\delta} = \frac{z-c}{\delta}\right)$, na qual A = (a, b, c), X = (x, y, z) e $\vec{v} = (e_1, e_2, e_3)$. Observamos aqui que ao considerar as igualdades, por exemplo, $\frac{x-a}{\delta} = \frac{y-b}{\delta}$ e $\frac{y-b}{\delta} = \frac{z-c}{\delta}$, podemos efetuar a passagem da representação simétrica para a representação cartesiana de uma reta, mas essa passagem não é realizada pelos autores.

Após o estudo das representações de retas no espaço IR^3 e suas propriedades, os autores introduzem o estudo do plano no espaço IR^3, que é definido por meio de uma representação paramétrica $\overrightarrow{XA} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, sendo X um ponto qualquer do plano, A um ponto dado do plano, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores linearmente independentes que determinam o plano (vetores diretores) e α e β dois números reais.

Na sequência, é definida a representação cartesiana do plano por meio da noção de determinante, a saber: $\det(\overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$, sendo X um ponto qualquer, A um ponto dado do plano, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores linearmente independentes que determinam o plano e $\overrightarrow{AX}, \vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores linearmente dependentes.

Os autores introduzem ainda a noção de vetor normal ao plano para, na sequência, determinar a representação cartesiana de um plano no espaço IR^3 ($\overrightarrow{AX}.\vec{n} = 0$) por meio do produto escalar entre um vetor $\overrightarrow{AX}$ do plano e um vetor normal ao plano $\vec{n}$, mas a passagem de uma representação cartesiana para uma representação paramétrica não é tratada pelos autores. São considerados ainda o estudo das posições relativas entre retas e planos, perpendicularismo e ortogonalidade, ângulos entre duas retas, ângulos entre planos e as distâncias entre ponto e reta, reta e reta, reta e plano, pano e plano. A proposta de estudo prossegue com as definições e representações das cônicas e suas propriedades.

Em relação aos tipos de tarefa, observamos que é dada ênfase aos tipos de tarefas que correspondem à representação de retas e planos dados, seus pontos e seus vetores diretores. Os tipos de tarefa de aplicação são apenas intramatemáticos, ou seja, não exigem conhecimentos de outras disciplinas, sendo focados apenas na passagem da Geometria Euclidiana Espacial para a Geometria Analítica.

Como esperado na macro avaliação ENADE dos anos de 2014 e 2017, a ênfase é dada à Geometria Analítica plana por meio das representações e intersecções de cônicas; e as representações de retas em IR^2 e planos em IR^3 são tratadas nas questões de Álgebra Linear. Observamos aqui que a análise dos livros didáticos acompanhada das provas do ENADE nos mostra que as praxeologias desenvolvidas, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior, são exploradas na prova do ENADE, mas essas não exigem uma articulação entre quadros e um nível de conhecimento que ultrapasse a mobilização das técnicas de passagem de uma representação à outra.

Conclusão

A análise das expectativas institucionais via documentos oficiais, livros didáticos e a macro avaliação ENADE deixa transparecer que compete ao professor identificar os conhecimentos prévios de seus estudantes e propor novas praxeologias que possibilitem articular os conhecimentos de Geometria Analítica desenvolvidos no Ensino Médio com os novos conhecimentos introduzidos no Ensino Superior, o que pode dificultar o estudo deste domínio pelos estudantes.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes podem estar relacionadas ao tratamento puramente descritivo das tarefas que lhes são propostas, tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior, pois além de trabalharem em dois espaços distintos que não são articulados; em ambos os casos, não encontramos tipos de tarefas associadas ao nível disponível que correspondem às possíveis aplicações intra e extramatemáticas que poderiam motivar o estudo dessa disciplina e mostrar sua importância para o desenvolvimento das ciências.

Ressaltamos que a falta de articulação entre as duas etapas escolares pode conduzir a obstáculos didáticos difíceis de serem superados, como, por exemplo, considerar que IR^2 é um subespaço de IR^3, dificuldade apresentada por muitos estudantes, quando se inicia o curso de Álgebra Linear.

Referências bibliográficas

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs. Recherches en didactique des mathématiques 19(1), 77-124.

Boulos, P., Camargo, I. (2004). GeometriaAnalítica: umtratamentovetorial. São Paulo: Makron Books do Brasil EditoraLtda.

Brasil. (2006). Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Recuperadoem 14 de dezembro de 2018 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

Brasil. (2002). Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio +: Ciências da Natureza e suas tecnologias. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf

Chevallard, Y. (2015). Pour une approche anthropologique du rapport au savoir. Recuperadoem 14 de dezembro de 2018 de http://www.gfen.asso.fr/fr/dial155

Chevallard, Y. (1998). L'analysedes pratiques enseignantesenthéorieanthropologiquedudidactique. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. Recuperado em 14 de dezembro de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Dante, L. R. (2017). Matemática: contexto e aplicações. São Paulo: Ática.

Dias, M. A. ; Artigue, M. ; Jahn, A.P. ; Campos, T. M. (2010). A comparative study of the secondary-tertiary transition. In: PME34 - Psychology of Mathematics Educations 34, Belo Horizonte. v. 2. p. 129-136.

Dias, M. A. (1998). Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbrelinéaire. Tese de doutorado publicada, Université Paris VII. França.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Douady, R. (1984). Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques. Tese de doutoradopublicada. Universidade de Paris VII. França.

Guedeut, G. ; Bosch, M. ; diSessa, A.A. ; Keon. O.H. ; Verschaffel, L. (2016). Transitions in Mathematics Educations. Hamburg: Springer Nature.

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignementsecondaire. En J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et al. (Eds), L'enseignement de l'algèbrelinéaireen question (pp. 149-157), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2), 139-190.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. In Actes de la journée en hommage à Régine Douady, 13-30. Paris: Didirem.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

MAPAS CONCEPTUALES HÍBRIDOS, UNA HERRAMIENTA PARA LA INVESTIGACIÓN EN LA MATEMÁTICA ESCOLAR

HYBRID CONCEPTUAL MAPS, A TOOL FOR RESEARCH IN SCHOOL MATHEMATICS

Nehemías Moreno Martínez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí. (México)
nehemias.moreno@uaslp.mx

Resumen
Se presenta una interpretación sistémica de la técnica del Mapa Conceptual Híbrido desde el Enfoque Ontosemiótico. Desde este enfoque, la técnica podría ser considerada como una herramienta útil para indagar las concepciones de los alumnos. Se describe un estudio de caso donde a partir de la producción de un estudiante de secundaria se representa de manera gráfica, mediante un Mapa Conceptual Híbrido, el sistema de prácticas, los objetos matemáticos y algunos procesos cognitivos empleados en la resolución de un problema contextualizado que involucra la noción de área. El Mapa Conceptual Híbrido permite observar la manera en que el estudiante organiza los conceptos, establece significados, permite advertir la realización de algunos procesos como el de idealización, argumentación y también la manera en que organiza y conecta las prácticas que constituyen el sistema de prácticas.

Palabras clave: mapa conceptual híbrido, objetos matemáticos, sistema de prácticas

Abstract
We present a systemic interpretation of the technique of the Hybrid Conceptual Map from the Onto-semiotic Approach. From this approach, the technique could be considered as a useful tool to investigate the conceptions of the students. We described a study case, where from the production of a high-school student, the system of practices, the mathematical objects, and some cognitive processes used in the resolution of a contextualized problem that involves the notion of area are graphically represented, through a Hybrid Conceptual Map. The Hybrid Conceptual Map allows us to observe the way in which the student organizes the concepts and establishes meanings. It also allows us to notice the development of some processes such as thinking, arguing and also the way in which it organizes and connects the practices which constitute the system of practices.

Key words: hybrid conceptual maps, mathematical objects, system of practices

Introducción

Numerosas investigaciones señalan que la técnica del Mapa Conceptual (MC por brevedad) es de gran utilidad en educación, ya que funge como estrategia de aprendizaje para los alumnos, como apoyo para el profesor para organizar y presentar contenidos, para investigar las concepciones de estudiantes respecto a un tema, entre otras aplicaciones.

En particular, se ha reportado también que el MC es una herramienta útil para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar en distintos niveles educativos, ya que favorece el desarrollo de habilidades matemáticas y la resolución de problemas (González, 1992), permite a los profesores y a los alumnos ver la naturaleza conceptual y proposicional del conocimiento a través de la presentación organizada de información por parte del docente(Pérez, 2006) o mediante la elaboración de MC's (Mapas Conceptuales) de tipo argumentativo (pues no describe la práctica de resolución de problemas) por parte de los alumnos.

El empleo del MC en otros contextos ha permitido el desarrollo de otras representaciones como el del Mapa Conceptual Híbrido (MCH a partir de ahora), que resulta al combinar la técnica del MC con la técnica del Diagrama de Flujo (DdF). Cabe destacar que, a diferencia del MC,que se apoya en el enfoque cognitivo del aprendizaje significativo (Ausubel, Novak y Hanesian,1976; Moreira, 2012),en la literatura no se ha reportado algún uso del MCH en el contexto educativo, tampoco se ha presentado alguna interpretación teórica del MCH desde la teoría de Ausubel ni desde alguna otra teoría, sin embargo, en Aguilar (2006) se presenta una adaptación al español de un MCHelaborado en inglés que fue tomado del sitio de CmapTools (http://cmpa.ihmc.us)y que fue empleado para describir una guía sintética que permite construir un buen MC.

En este trabajo se considera al MCH como objeto de estudio, el cual es interpretado desde una teoría proveniente del campo de la Matemática Educativa, el Enfoque Ontosemiótico, EOS (Godino, Batanero y Font, 2007).Se interpreta al MCHcomo una representación gráfica del sistema de prácticas que realiza un sujeto (novato o experto) cuando resuelve una situación problematizada. Cabe señalar que en Moreno (2017) se ha presentado una interpretación ontosemiótica del MCH desde una perspectiva unitaria.

La interpretación ontosemiótica del MCH brinda una herramienta útil para indagar las concepciones de los alumnos, o de los docentes, y se suma a otras investigaciones acerca del aprendizaje de la matemática mediante la resolución de problemas.

Marco teórico

En esta sección se describe el marco teórico de la investigación. En un primer momento se abordan las técnicas del MC, DdF y MCH, posteriormente se presentan algunos elementos teóricos del EOS,y, por último, se describe la manera en la quese ha interpretado el MCH tomando en cuenta los elementos teóricos del EOS.

Mapa conceptual, diagrama de flujo y mapa conceptual híbrido

El MC es una técnica gráfica que muestra de forma organizada el conocimiento. En el MC los conceptos aparecen ordenados jerárquicamente, ubicándose los más generales en la parte superior del MC descendiendo hacia los conceptos más particulares en la parte inferior. La interconexión entre los conceptos se realiza mediante "ligas" (segmentos) y "frases de enlace", produciendo una red de estructuras proposicionales donde el significado no sólo se encuentra en la relación entre concepto y concepto, sino que se extiende a las relaciones que a su vez estos conceptos tienen con otros conceptos; el orden de estas relaciones está orientado por un dominio de conocimiento a partir del cual es posible señalar las relaciones verdaderas conforme al conocimiento (Aguilar, 2006).

Por otro lado, el DdF también tiene muchas aplicaciones, por ejemplo, es empleado para guiar tratamientos médicos, para el desarrollo de software, para el mejoramiento de la calidad en la industria, entre otros. En el contexto de las matemáticas, elDdF sirve para describir qué operaciones y la secuencia en la que estas operaciones se tienen que llevar a cabo para la solución de un problema y, a diferencia del MC, no presenta una estructura jerárquica conceptual. El DdF tiene la finalidad de mostrar esquemáticamente los procedimientos, las relaciones entre las partes, permitiendo representarlos pasos y la lógica ligada al logro de una meta (Macias, 2007).

La técnica del MCH combina las características de las técnicas del MC y del DdF. Se trata de una representación gráfica que presenta simultáneamente tantas redes jerárquicas de conceptos como distintos procesos o procedimientos.

El enfoque ontosemiótico

Se considera al MCH como un objeto interpretable desde otras teorías, en nuestro caso, desde una teoría de la matemática educativa, el EOS. En la interpretación y elaboración del MCH se emplean los siguientes elementos del EOS: objetos matemáticos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), función semiótica, sistema de prácticas, procesos cognitivos y la perspectiva unitaria/sistémica del significado.

Según el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), cuando un sujeto resuelve un problema matemático, el sujeto lleva a cabo un sistema de prácticas en las que emplea diferentes objetos matemáticos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), los cuales se agrupan y se organizan en prácticas discursivas y operativas (procedimentales) más específicas (que tienen una finalidad concreta) que al relacionarse entre ellas contribuyen a lograr la solución del problema.

De acuerdo con el EOS, los elementos anteriores pueden ser interpretados o vistos desde cinco perspectivas duales tales como la personal/institucional, expresión/contenido,ostensivo/no-ostensivo, unitario/sistémico y extensivo/intensivo.

El EOS también señala que algunos procesos cognitivos se encuentran asociados a estas perspectivas duales. Por ejemplo, las perspectivas ostensivo/no-ostensivo se encuentran relacionadas con los procesos de idealización-materialización. Mediante el proceso de idealización, un objeto ostensivo (símbolo, expresión algebraica, gráfica, entre otras representaciones) es pensado o convertido en un objeto no ostensivo (Godino, Batanero y Font, 2012). Por otro lado, mediante el proceso de materialización, un objeto matemático pensado por un sujeto puede ser representado de manera ostensiva sobre el papel. Otros procesos cognitivos también son llevados a cabo, por ejemplo, el proceso de argumentación (que permite justificar el procedimiento empleado en la resolución de un problema), tratamiento, entre otros.

Por otra parte, mediante la perspectiva personal/institucional, los objetos primarios y las prácticas pueden ser personales (cognitivas) o institucionales (epistémicos), según si estos son empleados por un sujeto novato o profesor/experto respectivamente.

El significado de un objeto matemático es concebido por el EOS de dos maneras, una en términos de las perspectivas duales expresión/contenido y ostensivo/no-ostensivo, entendida como la relación o función semiótica entre un objeto ostensivo (expresión) y un objeto no-ostensivo (contenido o significado). Cabe señalar que el EOS también considera el significado como la función semiótica establecida entre cualquiera de los objetos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos) (Font, Godino y D'Amore, 2007).

Por otro lado, cuando el significado de un objeto matemático se interpreta como un sistema de prácticas (perspectiva sistémica) resulta que el significado se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son realizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos (Font, Godino y D'Amore, 2007).

Interpretación ontosemiótica del mapa conceptual híbrido

La interpretación ontosemiótica del MCH considera que los objetos matemáticos primarios (conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) pueden ser representados de manera ostensiva (lenguaje) mediante el MCH. En el MCH, la unión entre conceptos mediante palabras enlace permite expresar propiedades y argumentos. El objeto matemático primario procedimiento se presenta a través de la componente del DdF del MCH. Desde el EOS, el MCH puede ser interpretado como una representación ostensiva del sistema de prácticas discursivas y operativas que lleva a cabo un sujeto al resolver un problema.

Por otro lado, algunos procesos cognitivos también pueden advertirse a través del MCH. El proceso de idealización puede ser "observado" mediante el paso de una jerarquía a otra de la componente del MC presente en el MCH. También es posible observar el proceso de argumentación, a través de las distintas rutas lecturas, o el de tratamiento matemático mediante la componente de DdF.

Tomando en cuenta la dualidad personal/institucional, el MCH puede interpretarse como un MCH epistémico o institucional cuando este se encuentre asociado a la producción de un docente experto. En cambio, si el MCH se encuentra asociado a la producción de un estudiante inexperto puede llamarse MCH cognitivo o personal. El MCH correspondiente a un sistema de prácticas que permite la resolución de un problema no es único, por ejemplo, en la resolución de un mismo problema, distintos MCH's epistémicos pueden ser elaborados a partir de las producciones de distintos docentes expertos, de hecho, teóricamente no se presentarían diferencias significativas en torno a la interpretación u organización conceptual, pues se trataría de representaciones del saber institucional escolar. En cambio, al comparar un MCH epistémico y un MCH cognitivo, esto podría aportarnos información muy importante acerca de las concepciones de cada sujeto a través de las diferencias o semejanzas entre los elementos de cada mapa.

El significado en el MCH también es concebido a través de las nociones de función semiótica y de sistema de prácticas. La primera se apoya en la perspectiva dual expresión/contenido, que permite entender el significado como una relación de tipo representacional, es decir, se trata de una función semiótica que tiene como expresión al objeto lenguaje observable en el MCH (palabras, símbolo, expresión algebraica, entre otros) y como contenido a cualquiera de los objetos matemáticos primarios no ostensivos restantes (conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos). Mediante la segunda, el significado puede ser entendido a través de la organización de prácticas más específicas (las cuales constituyen el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema en un contexto concreto) que son realizadas con una determinada finalidad, con un determinado tipo de notación y que producen un determinado sentido.

Metodología

Se llevó a cabo un estudio de caso, de tipo exploratorio, en el que se planteó a un estudiante de segundo de secundaria la tarea de resolver y explicar el proceso de resolución de un problema que se presenta en el Libro para el maestro de telesecundaria: "El largo de un invernadero mide el doble que el ancho, y alrededor de éste se encuentra un pasillo de 2 metros de ancho y 136 metros cuadrados de área. ¿Cuántos metros cuadrados de superficie tiene el invernadero?" (Barrientos y Solares, 2007, p. 211). De acuerdo con los autores del libro, el propósito del problema es familiarizar al alumno con la resolución de ecuaciones, de hecho, la solución que proponen los autores a este problema consiste en obtener primero el área del rectángulo mayor que encierra el pasillo y el invernadero $(2x+4)(x+4)=2x^2+12x+16$, luego restarle el área del invernadero $2x^2$, esto es $2x^2+12x+16-2x^2=12x+16$, e igualar dicha ecuación lineal resultante al valor del área que proporciona el texto que describe el problema, es decir, $12x+16=136$, para obtener finalmente el ancho del invernadero $x=10$ y un área de $200m^2$.

La producción oral y escrita del alumno fue grabada en un archivo electrónico el cual fue generado mediante el empleo de una pluma electrónica, Smartpen Live Scribe. La reproducción del archivo electrónico en la computadora, y la transcripción de ésta, permitió identificar la organización de los objetos primarios y de las practicas a lo largo del proceso de resolución del problema. Para cada práctica, el discurso oral y escrito fue descompuesto en elementos, los cuales fueron clasificados en cinco categorías las cuales se trataban de los objetos matemáticos primarios señalados por el EOS: lenguaje, argumentos, conceptos, propiedades y procedimiento.

La elaboración del MCH se llevó a cabo de manera heurística y, puesto que el MCH posee una componente de MC, también se adoptaron algunas reglas que se han propuesto para la elaboración de un MC (Aguilar, 2006) tales como colocar conceptos más generales en la parte superior, colocar subconceptos debajo de cada concepto general, unir los conceptos mediante líneas que se denominan mediante una o varias palabras de unión creando así un significado.

Sin embargo, a diferencia del MC, la elaboración de un MCH se apoya en la descripción que realiza el EOS acerca del sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático. En general, se propone que en la elaboración del MCH es necesario considerar los siguientes aspectos:

i. Prácticas interpretativas, que describen el análisis y la interpretación de la situación problematizada, y también se consideran los conocimientos previos necesarios para resolver el problema.
ii. Hacer una lista de los datos numéricos que proporciona el texto que describe la situación problematizada para tomarlos en cuenta en la elaboración del MCH.
iii. Las prácticas interpretativas se presentan mediante la organización de conceptos jerarquizados (componente del MC presente en el MCH).
iv. Las prácticas operativas, presentan el procedimiento o tratamiento matemático que lleva a cabo el sujeto para resolver el problema.
v. Las prácticas operativas se presentan mediante algunos elementos de un diagrama de flujo. Los elementos del diagrama de flujo no necesariamente se conectan mediante palabras enlace, pero si se debe indicar mediante flechas el sentido en el que se lleva a cabo el procedimiento de resolución.
vi. Agregar si es necesario, a las prácticas operativas, cadenas de conceptos interconectados (argumentos), ya sea para justificar el procedimiento empleado o bien para interpretar los resultados obtenidos.
vii. Buscar intervínculos entre los conceptos de las prácticas interpretativas y los elementos del diagrama de flujo que conforman las prácticas operativas, esto permitirá describir otras relaciones.

Resultados y análisis

En la Figura 1 se presenta el MCH que fue elaborado a partir de la producción del estudiante. Para analizar el sistema de prácticas llevado a cabo por el alumno se identificaron tres prácticas A, B y C, la primera interpretativa y las otras dos de operativas.

En cada una de las prácticas el estudiante organizó un conjunto de objetos matemáticos primarios. En la Figura 1 se han enumerado del (1) al (37) algunos de estos objetos. En la práctica A, que es discursiva/interpretativa (discursiva, pues es obtenida cuando el alumno explica oralmente cómo interpreta la situación y la problematización de la situación) se observa el objeto matemático concepto (rectángulo (2), altura (2’), área, entre otros), propiedades (rectángulo que tiene largo 2a), argumentos (pasillo alrededor del invernadero, ruta (3)-(1)) y también es posible advertir al objeto matemático procedimiento llevado a cabo de manera implícita mediante cinco etapas P1-P2-…-P5. El sentido que tiene la realización esta práctica es la de interpretar la situación problematizada, recurrir al conocimiento previo (como el de recordar el área de un rectángulo), llevar la situación concreta al terreno de lo abstracto para luego pasar a la resolución del problema.

En la práctica B aparecen nuevamente los objetos matemáticos primarios, en este caso, el objeto procedimiento aparece de dos maneras, a lo largo de la realización de la práctica mediante cuatro etapas y mediante la ejecución de algunas operaciones como las que van a lo largo de la ruta (1)-(2)-…-(27). La finalidad de esta práctica fue la de calcular el ancho a del invernadero. Por último, la práctica C, que también es de tipo operativa, organiza nuevamente un grupo de objetos matemáticos primarios para obtener como objeto emergente al área del pasillo, ruta (29) a (37). Esta última práctica logra su significado a partir de su interconexión con las dos prácticas previas.

En general, el alumno no resolvió correctamente el problema. Sin embargo, el alumno estableció una trama de funciones semióticas, por ejemplo, entre otras prácticas, se tiene que en la práctica A estableció la función semiótica (1)-(2), que le permitió interpretar al invernadero como un rectángulo; mediante (3)-(4) interpretó, erróneamente, al pasillo como una línea recta; en la práctica B también establece la función semiótica (27)-(28) que le permite interpretar x = 20 con el ancho “a” del invernadero, y en la práctica C establece la función semiótica (35)-(36)-(37) para atribuir al área una magnitud de “800”.

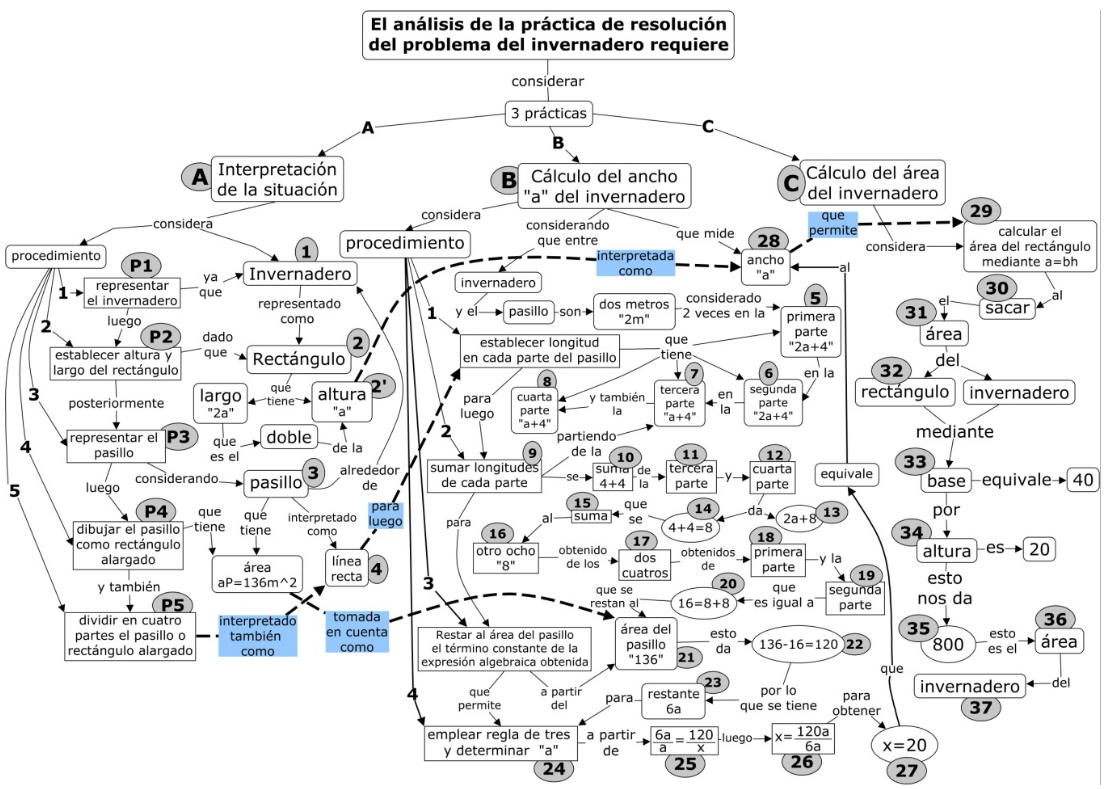


Figura 1. MCH elaborado a partir de la producción del estudiante (elaboración propia mediante CmapTools).

La realización inadecuada de las prácticas B y C condujeron al alumno a obtener resultados (27) y (35) erróneos. Esto se debió a los siguientes aspectos:(i) aunque el alumno tenía en mente considerar al pasillo como una forma rectangular alargada (P5)-(4), ver la Figura 2, continúo trabajando con la idea inadecuada de considerarlo como *una* *línea recta* al establecer la función semiótica (3)-(4), ver la Figura 1,y con base en esta interpretación, (ii) en la práctica B el alumno, prescindiendo del área del pasillo, únicamente consideró el largo del pasillo y por duplicado tomó en cuenta el ancho del pasillo en (7) y (8),dado que éste ya lo había considerado en (5) y (6),ver la Figura 1 y 2, y(iii) la longitud del pasillo la igualó al área del mismo, ver la ruta de conceptos (9)-(7)-(8) y la ruta que va del concepto (9) al (23), ver la Figura 2.

Posteriormente, en la práctica B el alumno determinó el ancho del invernadero (27) a través de la realización de un proceso de tratamiento matemático que consistió en el planteamiento y resolución de una regla de tres (24)-(25)-(26)-(27).

Por otra parte, en la práctica C el estudiante recupera los conceptos que había definido en la práctica A tales como (32), (33), (34), entre otros, luego considera la propiedad que expresa el área del rectángulo como el producto entre la base y la altura, ruta (31) a (34), lleva a cabo el procedimiento de multiplicación para obtener finalmente el área del invernadero.

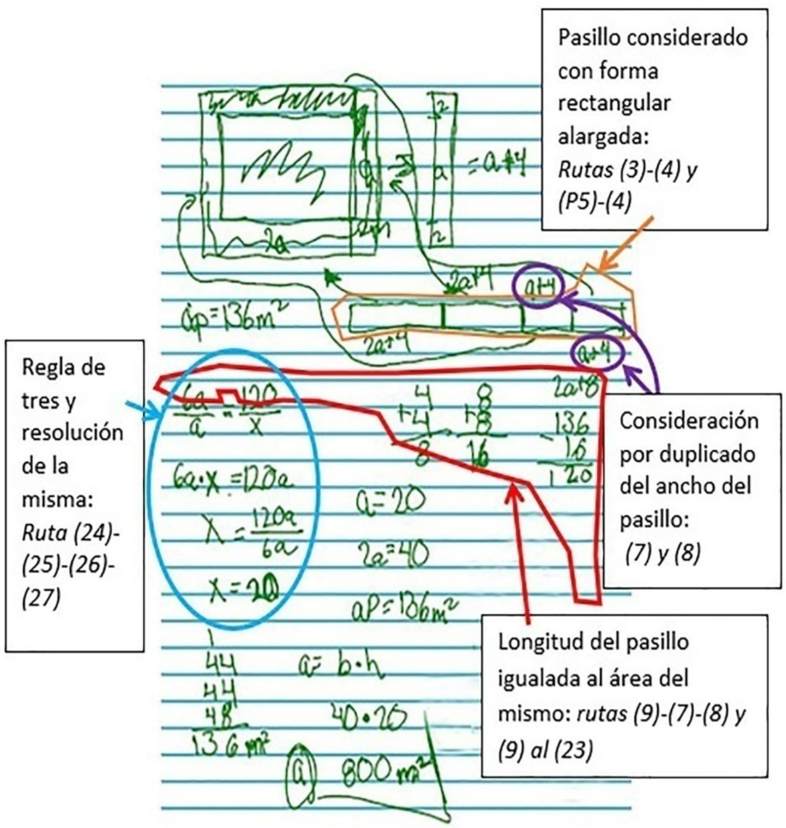


Figura 2. Producción escrita del estudiante al resolver el problema del invernadero (registro escrito obtenido mediante la Smartpen).

También es posible notar que el estudiante llevó a cabo algunos procesos cognitivos: (i) idealización, cuando interpreta al invernadero como un rectángulo (2)-(3) y al pasillo como una línea recta (3)-(4); (ii) particularización, cuando considera pertinente emplear la regla de tres (25) como recurso para abordar el caso particular dela resolución del problema del invernadero; (iii) significación, en términos de la coordinación del sistema de prácticas A-B-C(ver líneas de conexión segmentadas que representan intervínculos) y la trama de funciones semióticas.

El propósito que plantean los autores del Libro del maestro de telesecundaria (Barrientos y Solares, 2007) sobre familiarizar al alumno con la resolución de ecuaciones no resulta una tarea fácil a través de la resolución de una situación problematizada como la del invernadero, pues antes de esto, es necesario tomar en cuenta que en la resolución del problema entran en juego algunos procesos cognitivos como el de significación y el de visualización.

Mediante la significación el estudiante considera al pasillo como como un rectángulo alargado el cual, mediante la visualización (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012) lo transforma al dividirlo en cuatro partes (ruta P5-(5)-(6)-(7)-(8) en la Figura 1), sin embargo, termina por establecer una función semiótica que le permite interpretarlo como un segmento de recta (ruta (3)-(4) en la Figura 1).La realización inadecuada del proceso de visualización lleva al alumno a considerar por duplicado el ancho del pasillo en (7) y (8), ver Figura 1.

También, de acuerdo a la propuesta de los autores del Libro del maestro, mediante el proceso de visualización, el estudiante debería ser capaz de advertir que el ancho, y posteriormente el área, del invernadero puede ser determinado al restar algebraicamente el área del invernadero rectangular al área del rectángulo mayor que contiene al pasillo y al invernadero, sin embargo, este proceso no es inmediato para el estudiante y prefiere otro camino, es decir, sigue un camino que, si el estudiante no hubiese cometido el error de solo considerar la longitud del pasillo, le hubiese conducido a la formulación de la misma ecuación lineal de una manera más directa a través de la suma de las áreas de las cuatro partes en las que el alumno dividió el pasillo, ver la Figura 2 y P5 en la Figura 1.

La realización inadecuada de los procesos anteriores llevó al estudiante al planteamiento innecesario y la resolución de la regla de tres, procedimiento que puede ser considerado como un conocimiento significativo y que seguramente ha resultado de gran utilidad para el estudiante en la resolución de otros problemas previos.

Conclusiones

El MCH, interpretado a la luz del EOS, es una herramienta gráfica que permite tener un acercamiento a las concepciones del estudiante a través de la resolución de una situación problematizada. El MCH presenta de manera ostensiva, u observable públicamente, al sistema de prácticas, la cual presenta de manera organizada prácticas que pueden ser de tipo operativo o discursivo. Cada una de estas prácticas persigue la realización de un objetivo específico, o tiene determinado sentido al interior del sistema de prácticas, sin embargo, a través de sus interconexiones es posible alcanzar la solución del problema.

Cabe destacar que en cada una de las prácticas que forma parte del sistema de prácticas es posible advertir la organización de un conjunto de objetos matemáticos primarios (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos), inclusive, en la práctica interpretativa es posible advertir el objeto procedimiento, lo cual da cuenta de la realización de un proceso interpretativo de la situación problematizada.

La significación aparece en el MCH de dos maneras, la primera, como sistema de prácticas a través de la organización e interconexión de las prácticas que integran el sistema de prácticas. La segunda manera es a través de la trama de funciones semióticas que se establecen entre los objetos matemáticos primarios que se presentan a lo largo del MCH.
Por otro lado, además del proceso de significación, también es posible advertir la realización de otros procesos cognitivos tales como el de idealización en el paso de una jerarquía a otra en el MCH, por ejemplo, cuando el alumno considera al invernadero como un rectángulo. O bien, cuando considera al pasillo como un segmento de recta.
Como consideración técnica, el empleo de la herramienta SmartPen,a través de la grabación sincronizada del audio y la escritura en la resolución del problema, permitió capturar la materialización (proceso por el cual se presenta de manera ostensiva u observable un objeto no ostensivo o no observable) de los objetos primarios, en particular, permitió captura el objeto primario argumento a través del discursivo justificativo del alumno, el cual es soslayado

comúnmente a través de las pruebas que se llevan a cabo únicamente de manera escrita. Por otra parte, también cabe señalar que la herramienta CmapTools, empleada típicamente para la elaboración del MC, resultó sobrepasada en la elaboración del MCH, puesto que ésta última técnica emplea de manera combinada el registro escrito y algebraico especializado de manera simultánea. Fue necesario realizar algunos “trucos” para elaborar el MCH, por ejemplo, en ciertos casos se procedió a quitar el borde y el sombreado del objeto y superponerlo con un objeto con texto para presentar simultáneamente texto y expresión algebraica.

Referencias bibliográficas

Aguilar, T. M. F. (2006). El mapa conceptual una herramienta para aprender y enseñar.Plasticidad y restauración neurológica,5(1), 7-17.

Ausubel, D. P., Novak, J. Y. H. H., y Hanesian, H. (1976). Significado y aprendizaje significativo. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo, 53-106.

Barrientos, R. A. L. y Solares, P. D. V. (2007). Matemáticas II. Libro para el maestro. Volumen I. México: SEP-ILCE.

Font, V., Godino, J., y D’Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. For the learning of mathematics,27(2), 3-9.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, M. V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-The International Journal on Mathematics Education,39(1–2), 127-135.doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, M. V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-78.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas,30(2), 109-130.

González, G. F. M. (1992). Los mapas conceptuales de J.D. Novak como instrumentos para la investigación en didáctica de las ciencias experimentales. Enseñanza de las Ciencias,10(2), 148-158.

Macias, F. D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. Revista Iberoamericana De Educación,42(4), 1-17. Recuperado a partir de https://rieoei.org/RIE/article/view/2406

Moreira, M. A. (2012). ¿Al final, qué es aprendizaje significativo. Qurriculum: Revista de teoría, investigación y práctica educativa,25, 29-56.

Moreno, M. N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en Cálculo diferencial. Investigación en la escuela, 92, 60-75.

Pérez, F. R. (2006). Mapas conceptuales y aprendizaje de matemáticas.
ProceedingsoftheSecondInternationalConferenceon Concept Mapping, 1, 407-414.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓNEN ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL

ADDITION AND SUBTRACTION WORD PROBLEM SOLVING IN STUDENTS WITH IMPAIRED VISION

Jaime Fonseca González, Álvaro Eliécer Ramón Losada
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jaimejaimef@hotmail.com, aeramonl@correo.udistrital.edu.co

Resumen

Se realizó una investigación con el objetivo de identificar estrategias de resolución de problemas verbales de adición y sustracción de estudiantes con discapacidad visual. El estudio es de tipo cualitativo-descriptivo con técnica de estudio de caso. Los datos se recolectaron con una entrevista semi-estructurada que incluyó problemas verbales de adición y sustracción en los tipos: cambio, combinación, comparación e igualación; se aplicó a tres estudiantes con los criterios de inclusión de tener discapacidad visual desde su nacimiento y estar en grados sexto o séptimo. Entre los resultados se encuentra que los estudiantes con déficit cognitivo leve privilegian el contexto como medio para identificar la operación a realizar y el conteo como estrategia de solución, mientras que los estudiantes sin déficit cognitivo leve privilegian como estrategias de solución: el modelado directo con los dedos y el conteo.

Palabras clave: discapacidad visual, problemas verbales, estrategias

Abstract

This research is aimed at identifying strategies for solving addition and subtraction word problems of students with impaired vision. This is a qualitative-descriptive research which involves the case study method. The data were collected through a semi-structured interview which included addition and subtraction word problems: change, combination, comparison and equalization. The sample included three students who had, as inclusion criteria, to suffer impaired vision from birth and to be studying in sixth or seventh grade. The findings show that the students with minor-cognitive impairment give high priority to the context as an aid for identifying the required operation, and they prioritize counting as a strategy for problem solving. Meanwhile, the students without minor-cognitive impairment give high priority to direct modeling, by using fingers and counting, as strategies for problem solving.

Key words: impaired vision, word problems, strategies

Introducción

Una institución de educación básica y media desarrolla procesos de educación inclusiva con estudiantes con discapacidad visual. Para apoyar este proceso y formar profesores inclusivos, un programa de formación de profesores de matemáticas desarrolla trabajos de grado en modalidad de pasantía con sus estudiantes. Los pasantes identifican diferencias y similitudes en la resolución de problemas de estudiantes videntes y con discapacidad visual, aunque la documentación sobre los últimos es escasa. Así, se ha propuesto desarrollar una serie de estudios sobre la resolución de problemas en estudiantes con discapacidad visual, iniciando con la identificación de estrategias de resolución problemas verbales de adición y sustracción, por cuanto hacen parte de en una amplia gama de problemas de matemáticas. Esta información permitirá planear intervenciones de educación inclusiva desde el conocimiento de las habilidades de estudiantes visualmente diversos.

Indagación bibliográfica. -Son diversas las formas de clasificación a problemas aditivos que se encuentran la literatura. Nesher y Katriel (1977) propone una clasificación por criterios sintácticos en los que considera el número de palabras del enunciado, el orden de los enunciados, el tipo de vocabulario. Vergnaud (1982) propone una clasificación por la estructura de las cantidades y la relación o transformación entre ellas. Heller y Greeno (1978) proponen clasificaciones semánticas y los problemas de cambio, combinación y comparación, con variaciones según la ubicación de la incógnita y si la operación es de incremento o decremento. Carpenter y Moser (1983, citados en Bermejo, Lago & Rodríguez,1998) proponen las categorías de cambio, comparación, combinación e igualación. Bermejo, Lago y Rodríguez (1998) siguen las dos últimas propuestas citadas y proponen estudiar la adición y sustracción mediante problemas verbales, entendidos como "situaciones matemáticas con un alto grado de significación, que el niño se plantea frecuentemente en su vida cotidiana y extra-escolar" (Bermejo, Lago & Rodríguez, 1998, p.2). Su clasificación dispone de cinco tipos de problemas verbales y cada uno de estos alberga tres variaciones según la ubicación de la incógnita:

1) Problemas de Cambio: situaciones dinámicas que implican una acción que modifica una cantidad inicial. En estos, se denomina comienzo a la cantidad inicial, antes del cambio; cambio a la cantidad que modifica el comienzo; y resultado a la cantidad final, posterior al cambio. Así la ubicación de la incógnita puede ser en el comienzo, el cambio o el resultado.

2) Combinación: situaciones que involucran dos cantidades comprendidas como cardinales de conjuntos disyuntos se unen para formar uno solo. Cada una de las dos cantidades se denominan parte 1 y parte 2, mientras que el cardinal del conjunto unión se denomina conjunto total. Si bien en esta situación, las partes 1 y 2 pueden ser conmutativas, se identifican cambios en la comprensión y acción de los estudiantes cuando la incógnita se ubica en la primera o segunda parte. Este tipo de situaciones se pueden clasificar según el lugar de la incógnita que puede estar en la parte 1, la parte 2 o el conjunto total.

3) Comparación: situaciones en las que comparan dos cantidades entre sí, correspondiendo la tercera a la diferencia entre las dos iniciales. Las dos cantidades dadas, que son cardinales de conjuntos disyuntos, se denominan comparación y referente. La diferencia es dada por la relación "A (comparación) es n más que el B (referente)" y expresa la diferencia entre comparación y el referente. La connotación de comparación o referente es relativa a la relación de comparación, según sea la comparación tantas más o menos que el referente. Estas situaciones pueden tener la incógnita en el:
   a) referente: situaciones en las que es dada la comparación y la diferencia entre la comparación y el referente. La incógnita es el cardinal de un conjunto de referencia.
   b) diferencia:situaciones en las que se dan la comparación y el referente, mientras que la incógnita se sitúa en la diferencia entrela comparación y el referente (tantos más o menos es el primero que el segundo).

  c) comparación:situaciones en las que se indica la diferencia entre la comparación y el referente, así como este último. La incógnita en el cardinal del conjunto de comparación.

4) Igualación: situaciones en las que se dan dos cantidades y la tercera representa lo que le falta a una para ser igual que la otra. Son situaciones similares a las de comparación, pero la relación entre las dos cantidades es estrictamente de igualación y no de orden de manera general. En estas situaciones intervienen tres cantidades: cantidad de referencia, cantidad comparada y cantidad diferencia. La diferencia es la cantidad que se requiere para que la cantidad de referencia sea igual a la cantidad comparada. Las variaciones del problema son:
  a) Igualar al conjunto desconocido: se da una cantidad y la diferencia con la que igualaría a una tercera cantidad desconocida. Esta última es la incógnita
  b) Igualación desconocida: se dan dos cantidades y la incógnita es la cantidad que aumentada o disminuida de la primera hace que se iguale a la segunda.
  c) Igualar a conjunto desconocido: se da una cantidad de referencia y una diferencia con la que igualaría a una cantidad desconocida. Esta última es la incógnita del problema.

5) Relacional: situaciones en las que se da una cantidad que expresa la relación entre otras dos desconocidas; una de estas últimas se modifica según un segundo dato y el resultado expresa la nueva relación entre las dos cantidades desconocidas. Según la ubicación de la incógnita, los problemas pueden ser del tipo:
  a) Comparación inicial desconocida: la cantidad relacional inicial es desconocida. Se da una cantidad que modifica la cantidad relacional y la nueva cantidad relacional.
  b) Cambio desconocido. Se da la cantidad relacional antes y después de una situación que cambia esta cantidad relacional. La incógnita es la cantidad que provocó el cambio.
  c) Relacional 3. Comparación final desconocida. Se da la cantidad relacional inicial y el cambio sobre una de las cantidades desconocidas. La incógnita es la cantidad relacional final después del cambio.

Por otro lado, Carpenter y Moser (1984, citados por Bermejo, Lago & Rodríguez, 1998) estudiaron estrategias de resolución de problemas verbales de adición y sustracciones y establecieron cuatro estrategias:

1) modelado directo: se representan las cantidades mediante objetos para luego juntarlas o contarlas.
2) transición modelado directo-estrategia de conteo: se reconocen actividades asociadas a añadir y añadir hasta (en el caso de la adición) y quitar, quitar de, o emparejamiento (en el caso de la sustracción).
3) conteo: no requieren de la representación física de los conjuntos, sino de acciones de conteo sobre las cantidades dadas en el problema.
4) hechos numéricos: se aplican reglas que los estudiantes conocen de memoria o infieren mediante otras ya conocidas.

Método.- Es un estudio cualitativo, descriptivo, con método de estudio de caso. La información se recolectó con una entrevista semi-estructurada. La muestra observada fueron cinco estudiantes con discapacidad visual que cursan sexto y séptimo con edades entre los 12 y 14 años. La selección de muestra se realizó con la técnica participantes voluntarios. Los criterios de inclusión son: la discapacidad de nacimiento y cursar grados sexto o séptimo; bajo este criterio de inclusión se encuentran estudiantes con diagnóstico de déficit cognitivo leve. La información se recolectó en ambiente de laboratorio y con consentimiento informado de los padres.

La entrevista semi-estructurada se compuso de 12 problemas verbales de adición de los tipos cambio, combinación, comparación e igualación. Los problemas de tipo relacional no se contemplaron por demandar más tiempo del permitido por los padres que fue una sesión de no más de 1,5 horas. Hubo una entrevista semi-estructurada con situaciones similares a la primera pero variando únicamente el tamaño de las cantidades que estuvo disponible para aquellos casos en los que el entrevistador tiene necesidad de aplicar otro problema del mismo tipo para verificar una observación o conjetura. Además, los estudiantes dispusieron de un sorobán, un conjunto de dados y una caja mackinder por si deseaban realizar alguna modelación del problema. Los problemas de la entrevista semi-estructurada fueron:

1) Problemas de cambio:
    - Con incógnita en el resultado: Carlos tenía 19 libros y en una rifa ganó otros 7 ¿cuántos libros tiene ahora?
    - Con incógnita en el cambio: Paola tenía 25 láminas y su papá le regalo otras. Ahora tiene 38 láminas ¿cuántas láminas le regaló su papá?
    - Con incógnita en el comienzo: José tenía algunos colores y su tía le regaló otros 13 colores. Ahora José tiene 27 colores ¿cuántos colores tenía José?

2) Problemas de combinación:
    - Con incógnita en el conjunto total: Manuel tiene 27 tapas de gaseosa y Juana 16 ¿cuántas tapas tienen entre los dos?
    - Con incógnita en la segunda parte: Camila tiene 13 muñecas y Laura tiene algunas otras muñecas. Si entre las dos tienen 27 muñecas ¿cuántas muñecas tiene Laura?
    - Con incógnita en la primera parte: Felipe tiene algunas manillas y su primo tiene otras 9 manillas. Si entre los dos tienen 22 manillas ¿cuántas manillas tiene Felipe?

3) Problemas de comparación:
    - Con incógnita en la comparación: Paula tiene 15 cuadernos. Si paula tiene 6 cuadernos más que Diego ¿cuántos cuadernos tiene Diego?
    - Con incógnita en la diferencia: Mauro tiene 11 monedas y Cristian tiene otras 7 ¿cuántas monedas tiene mauro más que Cristian?
    - Con incógnita en el referente: Michael tiene 7 años. Wendy tiene 8 años más que Michael. ¿cuántos años tiene Wendy?

Es de aclarar que después de la aplicación del instrumento, los investigadores recomendamos emplear un mismo contexto y unos mismos nombres de personas, pues los estudiantes con discapacidad visual deben retener estos datos en su mente y al variarlos con tanta frecuencia se confunden al momento de comunicar sus soluciones.

Resultados

Para este artículo se presentan los resultados de tres casos:

1) Estudiante de 12 años que cursa 6° grado, con ceguera total de nacimiento. A los tres años inició estudios en centro especializado de educación para ciego y se incorporó a institución educativa regular desde los 8 años en tercer grado.
2) Estudiante de 14 años que cursa 7° grado y tiene diagnóstico de déficit cognitivo leve. Inició su educación en centro especializado de educación para ciegos y continuó en educación inclusiva desde los 8 años.
3) Estudiante de 14 años que cursa 7° grado y tiene diagnóstico de déficit cognitivo leve. A los 6 años inició su educación en centro especializado de educación para ciego y a los 8 se incorporó a una institución educativa regular.

Los resultados obtenidos del estudio de caso se organizan según el diagnóstico de déficit cognitivo leve. Para cada grupo se presentan las estrategias de resolución de problemas verbales por tipo.
Estudiantes con ceguera total de nacimiento y déficit cognitivo leve. Las estrategias de resolución consisten en identificar elementos del contexto que le sugieran la operación a realizar y el cálculo lo realizan mentalmente; así,

la estrategia es de tipo conteo. Cuando no es clara la operación a realizar, justifican solo el cálculo, mientras que sobre operación elegida solo indican que pensaron que lo podía hacer así. En la justificación de la solución, repiten los datos y hacen énfasis en el significado y que es con cierta operación con la que podrían resolver el problema.

Problemas de cambio. En los problemas con incógnita en el resultado, ambos estudiantes asociaron acertadamente con la elección de la adición entre el comienzo y el cambio. Cuando se les pregunta por la elección de la adición repiten el dato de la ganancia y hacen énfasis en esto, lo que sugiere que es el contexto un indicador para la elección de la operación. En los problemas con incógnita en el cambio sugieren incorrectamente que la situación se resuelve con una adición entre el comienzo y el cambio, quizá por referirse al contexto en el que el cambio es provocado por recibir una cierta cantidad; en las respuestas de ambas estudiantes, es notorio que eliminan la magnitud y sus argumentos se reducen a los cálculos numéricos, lo que es contrario al tipo de problema anterior en el que aciertan en la elección y argumentan con el contexto y la magnitud. En los problemas con incógnita en el comienzo, emplean una estrategia de conteo por completado desde el comienzo hasta el resultado, de modo que el conteo lo relaciona acertadamente con la diferencia; así, el argumento de solución es por verificación de que el comienzo sumado al cambio le da el resultado.

Problemas de combinación. Los problemas con incógnita en el conjunto total, suelen ser problemas muy usuales en la enseñanza y el aprendizaje de la adicción, por lo que los estudiantes asocian el contexto con la adición y los resuelven con éxito. Los problemas con incógnita en la parte 2son relacionados incorrectamente con la suma de la parte 1 y el conjunto total; los estudiantes presentan la dificultad de comprender las expresiones verbales de incógnita como dato, por lo que la frase “una cierta cantidad” es comprendida como cantidad a la que le puede asignar un valor deseado por el resolutor o como una cantidad que toma el mismo valor que la parte 2.

Problemas de comparación. En los problemas con incógnita en el referente, los estudiantes asocian acertadamente la situación con una suma, aunque no expresan las razones de esta asociación. A la diferencia no le asignan una magnitud, sino que sabe que al sumarlo con la comparación obtiene el referente. En los problemas con incógnita en el referente cambian la incógnita del problema y el contexto, reduciéndolo a un problema de combinación con incógnita en el conjunto total, por lo que es resuelto incorrectamente.

Estudiantes con ceguera total de nacimiento y sin déficit cognitivo leve. Estos estudiantes hacen una representación mental de las cantidades de la situación, identifican la operación a realizar y la ejecutan mentalmente. De este modo acuden a estrategias de modelado directo y cálculo mental. Cuando se les solicita justificar la respuesta, acuden a conjuntos discretos para modelar, pero no cuentan, sino que identifican la relación y hacen el cálculo mentalmente o por hecho numéricos conocidos.

Problemas de cambio. En los problemas con incógnita en el resultado asocia la solución con una adición entre la cantidad inicial y el cambio; como las cantidades son pequeñas, la estrategia empleada es de hechos numéricos, en tanto reconocen que el resultado ya es conocido. En los problemas con incógnita en el cambio asocian la solución con la sustracción de la cantidad inicial al resultado y reconoce que la diferencia refiere a la cantidad de cambio; los estudiantes realizan una modelación con los dedos y realizan conteo con ellos (primero representa el resultado y a este le descuenta el inicio). En los problemas con incógnita en el comienzo asocian la solución con una sustracción e identifican que el resultado es consecuencia del cambio, por lo que deshacen el cambio sustrayendo la cantidad de cambio del resultado; la estrategia de resolución es transición modelado directo y estrategias de conteo, pues al explicar la resolución del problema realiza la representación de las cantidades con objetos y las ideas mentales de estas.

Problemas de combinación. En los problemas con incógnita en el conjunto total, la estudiante relaciona la solución con una adición, en tanto identifica las dos partes y al juntarlas determina el conjunto total; la estrategia consiste en representar las cantidades con los dedos y en juntar sus dedos mediante el conteo, por lo que se ubica en el tipo estrategia de conteo y modelado directo. En los problemas con incógnita en la segunda parte, se asocia la solución a una sustracción, en tanto identifica que tiene un conjunto total y una de las partes que lo componen. Así, sustrae la parte 2 dada por el problema al conjunto total para obtener la parte 1, por lo que su estrategia es de transición modelado directo – conteo.

Problemas de comparación. En los problemas con incógnita en la comparación, la estudiante relaciona la solución con una adición entre el referente y la diferencia, en tanto identifica que esta última está determinada por la comparación; emplea estrategias de conteo mediante el uso de los dedos para resolver la situación. En los problemas con incógnita en el referente, la estudiante asocia la solución con una sustracción entre la comparación y la diferencia, pues este último indica que la comparación es mayor que la diferencia. En los problemas con incógnita en la diferencia, asocia la solución con una sustracción, reconociendo dos cantidades y que una es mayor que la otra; mediante estrategia de conteo, realiza una sustracción entre las dos cantidades dadas y valida su respuesta haciendo una sustracción entre la cantidad mayor y el resultado obtenido; dicho resultado lo suma a la cantidad menor del problema.

Conclusiones

En los estudiantes con ceguera total y déficit cognitivo leve se observa un dominio de los problemas de cambio con incógnita en el final, los problemas de combinación con incógnita en el conjunto total y en los de comparación con incógnita en la comparación. La estrategia de resolución parte de identificar la operación a realizar mediante el reconocimiento del contexto; luego identifican las cantidades a operar y el cálculo lo realizan por estrategia de conteo. Tienen especial dificultad para comprender los problemas que incluyen una incógnita en el primer sumando, por cuando no disponen comprensiones para frases como “tiene una cierta cantidad”, comprendiéndola como que puede asignarle una cantidad cualquiera o igual al segundo sumando. En los estudiantes con ceguera total y sin déficit cognitivo leve se reconoce un dominio de los problemas verbales de todos los tipos y sus variaciones.

La estrategia de solución supera la relación contexto-operación y se emplea un modelado directo con los dedos o en la mente que les permite identificar la operación a realizar. El cálculo de la solución emplea la estrategia de conteo en tres variaciones: el conteo por cálculo mental para los problemas de cambio con incógnita en el final, los problemas de combinación con incógnita en el conjunto total y en los de comparación con incógnita en la comparación; en los problemas con incógnita en el primer sumando, el conteo se realiza desde una cantidad hasta llegar a la otra que puede ser un dato dado por el problema. También se emplea el conteo para encontrar una solución por tanteo, subitización o hechos numéricos conocido, de modo que tal dato cumple las condiciones del problema.

Referencias bibliográficas

Bermejo, V., Lago, M.O., Rodríguez, P. (1998). Aprendizaje de la adición y sustracción. Secuenciación de los problemas verbales según su dificultad. *Revista de Psicología General y Aplicada 51*(3–4), 533–552.

Nesher, P., Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and subtractionwordproblems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics 8(*3), 251-269.

Riley, M., Greeno J., Heller, J. (1983). Development of children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. En H. Ginsburg (Eds), *The Development of Mathematical Thinking. (pp. 153–196)*. Estados Unidos: Pittsburgh University.

Vergnaud, G. (1991/2000). El niño, las matemáticas y la realidad. México: Editorial Trillas.

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL DE ESTUDIANTES CON DIVERSIDAD FUNCIONAL VISUAL. EL CASO DE LA SUMA

MENTAL ARITHMETIC STRATEGIES USED IN STUDENTS WITH VISUAL-FUNCTIONAL DIVERSITY. THE CASE OF ADDITION

Jaime Fonseca González, Angélica Rodríguez Rojas, Yeni Marcela Sánchez Laiton
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
jaimejaimef@hotmail.com, anitacely.88311@gmail.com, jeniuz.sa.la@gmail.com

Resumen
Durante el apoyo al aprendizaje de las matemáticas de estudiantes en condición de diversidad funcional visual se identificó la constante realización de cálculos mentales en diferentes tareas matemáticas. Las estrategias empleadas por este grupo poblacional no han sido documentadas, por lo que se realizó un estudio cualitativo-descriptivo con método de estudio de caso y una entrevista semi-estructurada para recolectar información sobre de las estrategias de cálculo mental para sumas de estudiantes con ceguera total de nacimiento. Se presentan resultados para los casos que incluyen diagnóstico de déficit cognitivo leve; en ellos se encuentra que la representación mental del número es basada en el ábaco ruso; las estrategias de cálculo mental empleadas son artificios por columnas articulada recuento o hechos numéricos conocidos y la estrategia descomposición disociativa por descabezamiento cuando un sumando es un número natural entre 10 y 39.

Palabras clave: diversidad funcional visual, cálculo mental

Abstract
We identified permanent mental arithmetic in different mathematical assignments along math learning support in visual-functional diversity students. Because the strategies used by the population have not been documented, we made a qualitative-descriptive analysis through the method of case study and applied a semi-structured interview to collect data about mental arithmetic strategies for addition in blind-born students. We present outcomes for the cases involving diagnosis of minor-cognitive impairment students, where the mental representation of the number is based on the Russian abacus; the mental arithmetic strategies used are: appliances by summarized articulated columns or known numerical facts, and the dissociative decomposition strategy by decomposition when an addend is a natural number between 10 and 39.

Key words: visual-functional diversity, mental arithmetic

Introducción

Una institución de educación básica y media de Bogotá - Colombia - asumió el objetivo de desarrollar procesos de educación inclusiva. Para apoyar este objetivo de la institución y formar profesores de matemáticas inclusivos, un programa de formación inicial de profesores desarrolla trabajos de grado en modalidad de pasantía con sus estudiantes. Los pasantes notaron la excelente habilidad de cálculo mental de los estudiantes con diversidad funcional visual en todas las tareas matemáticas que realizan. Sin embargo, el currículo tradicional los obliga a emplear el ábaco y el sorobán como recursos para la realización de cálculos. Ante esta obligación, se notaba apatía de los estudiantes a los recursos y el privilegio del cálculo mental, con el que hacen creer al profesor que dominan los recursos. Con el objetivo de modificar esta práctica de enseñanza y sugerir una modificación al currículo se hizo necesario estudiar las estrategias de cálculo mental de los estudiantes en condición de diversidad funcional visual y se inició por la suma de número naturales.

Al realizar una revisión de literatura sobre cálculo mental en poblaciones diversas, se empleó google académico con los criterios de búsqueda: “cálculo mental” como frase exacta en el título de la publicación, delimitada en el periodo de 1990 a 2018 a los idiomas castellano y portugués. Se encuentran los estudios de Albanese, Adamuz y Bracho (2016) sobre algoritmos de cálculo mental empleados en integrantes de la comunidad gitana con el fin de adoptarlos en la enseñanza de las matemáticas en centros educativos con alta afluencia de esta comunidad; Palacio, Ramírez y Aroca (2016) en el que hacen un estudio sobre estrategias de cálculo de vendedores ambulantes con las que se permiten diseñar intervenciones de aula; Linhares de Mattos (2015) se presenta un estudio de caso sobre el cálculo mental de personas adultas de una comunidad de pescadores de Portugal;Soares y Mariani (2012) en el que analizan un programa de alfabetización para jóvenes y adultos sobre el número natural y las operaciones aritméticas en el reflexionan sobre la habilidad cálculo mental de los participantes y su papel en el desarrollo del programa; Velásquez y del Rio (2016) implementan una estrategia didáctica para la inclusión de estudiantes sordos empleando un enfoque visual. En la revisión de literatura no encontraron investigaciones o estudios sobre cálculo mental en estudiantes o personas con diversidad funcional visual, lo que justifica la pertinencia de este estudio.

Indagación bibliográfica

El cálculo mental se entiende como “una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel y lápiz, y que le permite obtener la respuesta exacta de problemas aritméticos sencillos” (Mochón y Vázquez, 1995, p. 93). En el caso de las personas con diversidad funcional visual, su habilidad para calcular mentalmente ha sido destacada por Fernández del Campo, Núñez y Rosich (1996) cuando afirman que “El alumno ciego parece tener una cierta propensión al cálculo mental” (p. 202). Según Fernández del Campo (2004), esta habilidad es consecuencia de las dificultades instrumentales del cálculo escrito y la mayor complejidad que el uso de instrumentos específicos de cálculo trae para el estudiante. Así, la inclusión de esta habilidad en el currículo propende por la equidad y la eliminación de barreras que el cálculo escrito impone a los estudiantes con diversidad funcional visual.

En cuanto a las estrategias de cálculo mental para las operaciones aritméticas, Gómez (1994) propone una clasificación en cuatro grandes clases:

1) Artificios. Incluye aquellos métodos de cálculo en los cuales los números son operado tomando hechos aislados y no las relaciones que las unen o que unen las cifras. Esta estratégia contiene tres subclases de estrategias:

    a) Columnas. Es la estrategia de ejecutar con la mente el algoritmo usual de lápiz y papel o alguna variación de este; así, el cálculo se efectúa por columnas, obteniendo resultados parciales.

   b) Reglas. Es la estrategia consiste en aplicar algún algoritmo de cálculo proveniente de la aritmética antigua y no el algoritmo usual de lápiz y papel.
   c) Fórmulas. Esta estrategia incluye el uso de igualdades algebraicas, fórmulas o generalizaciones numéricas conocidas para la realización de cálculos.

2) Descomposiciones. Esta estrategia recopila métodos de cálculo mental en los cuales las cantidades se dotan de significado numérico y relacional para expresarlas en relación con otras más pequeñas que son operadas para calcular el resultado. Según el tipo de relación operativa en que se haga la descomposición, la estrategia puede ser de dos subclases:

   a) Disociativas. Cuando la descomposición de uno o ambos datos es por suma. Esta categoria se subdivide en las estrategias de:
      i. Descabezamiento. Consiste en separar las cantidades según su valor posicional en base 10 y operar según el orden de la unidad.
      ii. Subsidiación. Consiste descomponer una de las cantidades en función de la otra.
   b) Factoriales. Cuando la descomposición de por la multiplicación.

3) Compensación. Alberga aquellas estrategias en los que el cálculo dado es alterado por otro en el que las cantidades son distintas a las dadas, pero que facilitan el cálculo, de modo que el incremento o reducción se corrige posteriormente. Se distinguen dos tipos de estrategias de compensación:

   a) Compensaciones Intermedias. Cuando el incremento o reducción se corrige operando sobre el otro dato.
   b) Compensaciones finales. Cuando el incremento o reducción se corrige operando sobre el resultado final.

4) Recuentos. Esta clase cubre aquellas estrategias en las que el cálculo se realiza por el conteo en sucesiones numéricas.

Método

Es un estudio cualitativo descriptivo con método de estudio de caso. La recolección de información se realizó con técnica de entrevista. La selección de la muestra se realizó con la técnica de participantes voluntarios. El criterio de inclusión fue ser estudiante de educación básica con ceguera total. La muestra observada fueron cinco estudiantes con diversidad funcional visual, de los cuales uno perdió la vista a los siete años, dos nacieron con ceguera total y tienen diagnóstico de déficit cognitivo leve, y dos con ceguera total de nacimiento sin déficit cognitivo.

El instrumento de recolección de información fue una entrevista semi-estructurada con cálculos de sumas de cuatro tipos: dos sumandos de dos dígitos; el primer sumando con tres dígitos y el segundo con dos; el primer sumando con dos dígitos y el segundo con tres; y dos sumandos de tres dígitos. A su vez, las sumas se clasifican según la cantidad de cambios de unidad que requiere el cálculo, por lo que pueden ir desde ninguno hasta tres cambios. Los cambios de unidad se consideran desde la combinación de dígitos clasificados en cuatro conjuntos $C1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $C2 = \{4, 5, 6\}$, $C3 = \{7\}$ y $C4 = \{8, 9\}$, ante la hipótesis de que estos a aparición de estos dígitos provocan estrategias de cálculo diferentes. La entrevista se aplicó en un ambiente de laboratorio con previa aprobación y consentimiento informado de los padres.

Resultados

Para este artículo se presentan los resultados de dos casos de estudiantes con ceguera total de nacimiento y diagnóstico de déficit cognitivo leve. Se trata de dos niñas que cursan grados de sexto y undécimo, con edades de 14 y 22 años, respectivamente. La primera inició su escolaridad en centro especializado de educación para ciegos y hacia los 8 años continuó en centro educativo convencional, mientras que la segunda inició sus estudios a una edad mayor de lo esperado ante la ausencia de una institución educativa inclusiva cercana a su lugar de domicilio. Las estrategias de cálculo mental identificadas se presentan según el tipo de suma, segregando por la cantidad cambios de unidad.

En general las estrategias de cálculo mental para adiciones empleadas por estas estudiantes no dependen de la cantidad de cambios de unidad o la cantidad de dígitos de los sumandos, pues siguen la estrategia de artificios en el método de columnas. La representación de los números es con del ábaco ruso cerrado, en el que cada columna tiene 10 cuentas. Esta representación hace que las estrategias de cálculo mental para sumas sigan el algoritmo de columnas articulado con el conteo, el cual simula el movimiento mental de las cuentas en el ábaco. Esta misma estrategia puede ir articulada con hechos numéricos conocidos, específicamente para la suma de cifras iguales, que son expresadas como el doble del número y ya sabe estas relaciones de memoria. El uso de esta estrategia obliga al estudiante a memorizar los números como un vector de cifras y no con su designación convencional en la representación en lenguaje natural; así que con el uso de esta estrategia se favorece la memorización cuando el entrevistador acompaña la representación en lenguaje natural con una enunciación de los dígitos en el orden de izquierda a derecha. Por ejemplo, “123 más 45, expresado como 1, 2, 3 más 4, 5”.

Es muy particular que en la realización de los cálculos la estudiante de 12 años indicaba con mucha persistencia que olvida las cifras que lleva o ubicarlas en la mente con las demás cifras. Sin embargo, con el avance de la entrevista la estudiante fue ganando confianza en sus cálculos mentales y superando la dificultad.

Si bien se identificó una estrategia predominante el cálculo de sumas, los resultados se presentan según la cantidad de cambios de unidad que requiere y algunas variaciones en la estrategia que se identificaron.

Sumas sin cambios de unidad. En estos casos, la estudiante presenta dificultades para recordar las cifras que componen los sumandos o las que lleva en los cambios de unidad. Esto provoca errores en: la recuperación de las cifras en cada posición, la evocación del orden de la posición de las cifras u olvido de algunas cifras (especialmente de las centenas). Esto es en parte provocado por la demanda de memoria en el recuento para sumar las cifras, pues debe concentrarse en las dos cifras a sumar, realizar el recuento desde una de las cifras, recordando la cantidad de saltos que hace en la secuencia numérica hasta hacer tantos como indique el segundo sumando; luego debe descomponer el total, llevar la cifra de las decenas y memorizar las unidades. Al realizar esta acción en la segunda ocasiones, provoca que olvide los resultados y cambios de unidad de la primera. De esta dificultad es consiente la estudiante y le provoca inseguridad en el cálculo mental. En los siguientes cálculos se ejemplifica lo ocurrido:

1) En la suma 132 + 30, la estrategia de la estudiante es de artificio de columnas, pero solo logra retener en su mente las cifras de las decenas y las unidades, olvidando las centenas. La estudiante verbaliza: “2 más 0 da 2.Ehhhh 3 y 3. Da 62”

   La entrevistadora hace la corrección de la solución, indicando que es 162, pues el sumando es 132.

2) Para validar el uso de la estrategia y la capacidad para retener todos los datos en la mente, la entrevistadora propone la suma 564 + 23, a lo cual la estudiante verbaliza: “4 y 3; 7. 6 y 2; 8. Da 587”

   En esta suma, la estudiante recordó con exactitud todas las cifras de los sumandos además de los resultados de las adiciones de las unidades con unidades y las decenas con decenas y recordar la cifra de las centenas.

Al parecer, el cálculo mental de la estudiante pocas veces había superado la suma de sumandos de una cifra y siente inseguridad con dos cifras. La corrección el cálculo anterior le permitió ampliar la estrategia.

3) El uso del recuento como método de cálculo de las cifras demanda la memoria de la estudiante y la lleva a olvidar las cifras que llevaba y quedaban, o la cifras de las centenas. Sin embargo, cuando no acude a este método, sino que lo hace por hechos numéricos conocidos o subitización, es capaz de realizar sumas de dos sumados de tres dígitos cada uno. Esto se observa en el cálculo de 311 + 102, del cual el procedimiento expresado por la estudiante es:
"Entonces 1 más 2 da 3. Eh, 1 más cero pues da el mismo número. Eh, 3 y 1. Da 413."

Una variación de esta estrategia de columnas se presenta cuando la estudiante empieza a sumar por la izquierda desde las cifras de mayor valor posicional. Este método se observó en la niña de 22 años en el cálculo de 23 + 56, el cual es evoca como 23 + 53. Al dar el resultado 76, la entrevistadora indaga el procedimiento y la estudiante señaló:

"Cogí el 5 y lo sumé con el 2 y después cogí los dos 3."

Esta técnica se confirma en la suma 54 + 45. La estudiante la evoca como 54 + 44 y el total que le da es 98. Al indagar por el procedimiento de cálculo, expresa que:

"Cogí el 5 con el 4 y el 4 con el 4."

Con un cambio de unidad. En estos casos la estrategia continúa siendo por artificios en el método de columnas. La estudiante logra retener en la memoria los datos iniciales y los resultados parciales. Por ejemplo, en el cálculo de 777 + 10. La estudiante indica que sumó 7 más 0, 7 más 1 y luego 7 más 0, lo que da 787.

La variación de la estrategia de columnas iniciando por la izquierda empieza a generar errores cuando hay cambios de unidad en la suma de las cifras de la posición de las unidades, pues desecha la decena ganada. Esto ocurre en el cálculo de 12 + 89, en el que la estudiante da un total de 91. Al indagar por el procedimiento de cálculo, la respuesta es muy confusa, pero puede apreciarse que sumó 8 y 1; que da 9. Luego sumó 9 y 2 que da 11. Deja 1 en las unidades y 9 en las decenas, pero no adiciona la decena ganada en el cambio de unidad.

Para evitar el error anterior, la estudiante cambia la estrategia y emplea disociativa de descabezamiento articulado con recuento; esto en especial para los casos en los que el segundo sumando es un número natural entre de 11 a 39. Esta estrategia va acompañada de una conmutación del sumando e inicia con el mayor. En el cálculo de las sumas 13 + 77 y 12 + 98, la estudiante indica su procedimiento así:

"90. Al 77 le sumé 10 y a esos diez le conté los otros tres que me faltaban"
"110. Al 98 le sumé 10 después le coloqué los otros dos que me faltaban"

Con dos cambios de unidad. En estos cálculos la estudiante logra realizar con éxito la memorización de las cifras en cada posición, el recuento de las unidades y las decenas, pero tiene dificultad para componer el resultado y le impide dar un total. Estos se observan en:

1. la suma 64 + 98, cuyo procedimiento es verbalizado por la estudiante así:
"4 y 8: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; llevo 1. 6 y 9: 12. Y una 13. [intenta dar el resultado] ciento treinta y…. Ciento treinta y… ah qué, a mí se me olvida, de verdad, como te digo. Es que a unos números me acuerdo y de otros no"

2. la suma 77 + 54, en la que la estudiante verbaliza su procedimiento:

"7 y 4 da 11. 1 y llevamos 1. 5 y 7: 8, 9, 10, 11, 12. Da 12. y… ¿cuánto era? 1 que llevaba. No, me confundo."

En este mismo tipo de sumas se presentan una variación en la forma de calcular la suma de las cifras, pues acude hechos numéricos conocidos como el doble de un mismo número en lugar de hacerlo por recuento. Esto ocurrió en el cálculo de 98 + 988, en el que la estudiante lo evoca como 98 + 98 y comete un error en el cual suma a las centenas la cifra que llevaba al sumar las unidades.

"8 más 8, da 16. Llevamos 1. 9 más 9, 18 y una que llevaba 19. 0 y 1 da 1. Y la que llevaba pues da 2. Y eso me da 286"

Es notorio el aumento de la memoria para retener datos parciales de la suma cuando la estudiante acude a los hechos numéricos conocidos en lugar del recuento, pues es capaz de realizar con éxito sumas de dos sumandos con tres cifras y dos cambios de unidad. Esto se evidenció en el cálculo de 77 + 777. La estudiante lo evoca como 777+ 777. Y al respecto indica que:

"Entonces 7 más 7 da 14 y llevamos 1. 7 más 7 da 14 y una que llevábamos da 15; llevo 1. 7 y 7 da 14. Eso da 1554."

3. en el cálculo 89 + 446, la estudiante verbaliza el procedimiento como:

   "6 y 9 da 15; 5 y llevo 1. ehhh, 8 más 6: 9, 10, 11, 12, 13, 14. 14 y uno que llevaba 15, da 155.

   En esta suma se nota un error al evocar una de las cifras. Sin embargo al revisar la estrategia, realiza nuevamente un procedimiento similar al primer caso, en el que nuevamente olvida la cifra de las decenas.

4. en el cálculo de 98 + 777, la estudiante logra realizar correctamente el recuento de las decenas y las unidades, pero se le dificulta configurar las cifras del total y termina por invertir dos cifras. Ante el cálculo la estudiante verbaliza.

   8 y 7: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15. 15, llevo 1. Eh, 7 y 9: 8, 9, 10, 11, 12, 13. 16, da 695

   En este tipo de sumas se presentó una variación en la estrategia que ocurre cuando el segundo sumando está entre 10 hasta 20 y consiste en hacer un recuento de uno en uno desde el mayor de los sumandos. Por ejemplo, en el cálculo de 899 + 11, la estudiante acierta en el total 910; mientras hacía el cálculo, en voz muy baja verbalizaba numerales mayores a 899 y señala que la manera en que lo realizó: "cogí el 899 y le sumé los 11".

Con tres cambios de unidad. A medida que avanza la entrevista la estudiante va ganando confianza en su cálculo mental y empieza a realizar los recuentos más rápidamente y a retener mejor los datos. Si bien continúa presentando dificultad para evocar algunos datos, progresa en la reconstrucción del total a partir de los datos parciales. Esto se ve en el cálculo de 645 +889, en el cual la estudiante requirió de una segunda repetición verbal para memorizarlo.

Su procedimiento en la segunda oportunidad fue: 5 más 9 da 14; 4 y llevamos 1. 4 y 8: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12; y una que llevábamos 13. Y seis y nueve da [pronuncia algunos numerales, pero no se escucha claramente]: 12; y una que llevábamos, 13. Eso da 1334.

Conclusiones

En los dos casos analizados de estudiantes con ceguera total de nacimiento y diagnóstico de déficit cognitivo leve se encuentra prevalencia de la estrategia de artificios en el método de columnas. Esto provocado por la enseñanza de la aritmética basada en el ábaco ruso. La estrategia articula el recuento para sumar las cifras de un mismo valor posicional, lo que demanda el uso de la memoria en el recuento y provoca dificultad para retener cifras de las centenas o resultados parciales, así como para componer el total desde los resultados parciales. En esta estrategia se presentan dos métodos de columnas: iniciando por la cifra de las unidades e iniciando por la cifra de mayor valor posicional. Para los casos en los que uno de los sumandos está en el intervalo de 10 a 39, se presenta una estrategia disociativa de descabezamiento, en la cual el sumando en el intervalo citado es descompuesto en decenas y unidades; las decenas se agregan por recuento de 10 en 10 y las unidades por recuento de uno en uno. Cuando los dígitos a operar son iguales o uno de los dígitos están en el conjunto C1 = {0, 1, 2, 3} no se acude al recuento sino a hechos numéricos conocidos y a la subitización, lo que optimiza el uso de la memoria para los datos de la suma y aumenta el éxito en el cálculo mental a dos sumandos de tres cifras con dos cambios de unidad.

Referencias Bibliográficas

Albanese, V., Adamuz, N.,Bracho, R. (2016). Algoritmos alternativos y cálculo mental en las comunidades gitanas. En M. Amor, J. Luengo-Almena, M. Martínez (Eds), *Educación intercultural: metodología de aprendizaje en contextos bilingües (pp. 55-59),* España: Editorial Atrio, S.L.

Fernández del Campo, J., Núñez, J. y Rosich, N. (1996). *Matemáticas y deficiencia sensorial.* Madrid: Síntesis.

Fernández del Campo, J. (2004). *Del cálculo mental.* Madrid: Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE).

Gómez, A. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las ciencias 13 (3),* 313 -325.

Linhares, J.R. (2015) Educação comunitária e cálculo mental em atividades cotidianas. XIV *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 1 – 10.

Mochón, S. y Vásquez, J. (1995). *Cálculo mental y estimación: Método, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. Educación Matemática7 (3*), 93-105.

Palacio R.J., Ramírez F.A., Aroca A.A. (2016). Cálculo mental aritmético desde el conocimiento de algoritmos etnomatemáticos en Barraquilla. *Revista Colombiana de Matemática Educativa 1*(1), 98-99.

Soares, M. A., Mariani, R. C. (2002) O Cálculo Mental/Oral: Uma Experiência na Alfabetização Matemática de Jovens e Adultos. Recuperado de https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/82222/Resumo_20020301.pdf?sequence=1

Velásquez D.M., del Río, N.A. (2016). El desarrollo de habilidades matemáticas desde un enfoque visual, con personas sordas. Tesis de grado, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

CONSIDERACIONES INICIALES PARA EL ESTUDIO DE LA ANGULARIDAD COMO SABER TRANSVERSAL EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO TRIGONOMÉTRICO

INITIAL CONSIDERATIONS FOR THE STUDY OF ANGULARITY AS A TRANSVERSAL KNOWLEDGE IN THE DEVELOPMENT OF TRIGONOMETRIC THINKING

Karen Sánchez Duarte, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
karen.sanchez@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen
Se exponen los principales resultados de la revisión bibliográfica, identificando consideraciones preliminares para el estudio de la angularidad en el desarrollo del pensamiento Trigonométrico. Principalmente se encuentra el tratamiento de la trigonometría en la institucionalización del mismo conocimiento, relacionado a ello se identifican dificultades y fenómenos en el aprendizaje de las nociones de ángulo, trigonometría y el ángulo-trigonometría. De modo que permita responder, grosso modo, por qué surge el tema, cuál es la importancia de investigar al respecto y cuáles consideraciones son importantes al iniciar el estudio del desarrollo del pensamiento Trigonométrico. Permitiendo extraer elementos propicios para analizar el uso de la noción de ángulo en el desarrollo de este tipo particular de pensamiento matemático, para dar cuenta de su transversalidad, en etapas futuras de la investigación.

Palabras clave: pensamiento trigonométrico, noción de ángulo, dificultades, institucionalización

Abstract
Preliminary considerations for the study of angularity in the development of Trigonometric thinking are identified as the main results of bibliographic review. Mainly, we found the approach of trigonometry in the institutionalization of trigonometric knowledge. In this respect, difficulties and phenomena in the learning of the notions of angle, trigonometry and angle-trigonometry are identified. So that. it allows answering, roughly, why the subject arises, what is the importance of investigating about it and what considerations are important when starting the study of the development of Trigonometric thinking. It allows extracting elements conducive to analyze the use of the notion of angle in the development of this particular type of mathematical thought, to account for its transversal knowledge, in future stages of the research.

Key words: trigonometric thinking, notion of angle, difficulties, institutionalization

Introducción

Presentamos el inicio de un proyecto de investigación referente al pensamiento trigonométrico, en particular sobre la noción de ángulo inmerso en el desarrollo de este tipo particular de pensamiento matemático.

El interés por este tópico respectivo surge a partir de algunos cuestionamientos hechos en la experiencia como docente y como alumna, de la primera autora. Tradicionalmente los primeros cursos universitarios inician el estudio de la Trigonometría con el tratamiento de ángulos: su definición (por lo general, como la unión de dos rayos cuyo punto en común se llama vértice y los rayos lados del ángulo), los tipos de ángulo según su medida en grados (agudos, rectos, obtusos, llanos y convexos) o según su posición en el plano cartesiano (posición estándar, de referencia, coterminal y negativo), su conversión de grados a radianes mediante una fórmula; y lo trigonométrico comienza estrictamente hablando con la introducción de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, enfatizando en los rectángulo isósceles y del semiequilátero. Planteadas estas bases se continua con las razones en la circunferencia unitaria (ubicando las coordenadas del punto de intersección del lado final del ángulo en posición estándar y la circunferencia mediante el trazo de triángulo rectángulo) y, por último, se extiende a las funciones trigonométricas mediante el análisis de las gráficas, de donde se extrae lo periódico, lo acotado, la monotonía, etc.

Desde estas experiencias se percibió una desarticulación entre la definición de ángulo, dado al inicio para utilizarse en las razones que se establecen en el triángulo, y su uso imprescindible en las funciones trigonométricas, por ejemplo: se considera la medida angular en grados para las razones trigonométricas en los triángulos, pero en las funciones trigonométricas la medición angular se emplea en radianes; además se traslada de una noción de ángulo estático a una dinámica. Si bien la matemática escolar incorpora estrategias para la transición (fórmula de conversión de grados a radianes), de lo mencionado anteriormente, planteamos la desarticulación desde la postura de quien aprende, pues la sola fórmula no argumenta por qué es necesaria la conversión de grados a radianes.

A propósito de esta inquietud se inició una revisión bibliográfica para documentar los fenómenos y resultados de investigación relacionados, que nos permitan hacer un planteamiento de investigación y una prospectiva sobre cómo llevarlo a cabo. Esta primera parte de nuestro proyecto es lo que reportamos en el presente extenso.

Dificultades asociadas en el pensamiento trigonométrico

En la revisión de programas de estudio y libros de texto, del nivel medio superior mexicano, Buendía y Montiel (2015) reportan el tránsito de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica, considerando que en la primera se aborda todo lo vinculado al estudio de las razones trigonométricas mediante los triángulos rectángulos, ángulo en grados y otras herramientas geométricas; y en la segunda todo lo relacionado con el estudio de las funciones trigonométricas, implicando las gráficas en el plano cartesiano, ángulos en radianes y otras herramientas de análisis.

En la transición de la trigonometría clásica a la analítica, según Buendía y Montiel (2015), se trabaja el círculo unitario como estrategia suficiente y necesaria para establecer: el significado de ángulos negativos y mayores a 360º, la conversión de las unidades de medida de grados a radianes o viceversa, la equivalencia entre radianes y reales, el estudio del dominio de las funciones trigonométricas y las características de lo periódico y acotado de las funciones de seno y coseno de un ángulo.

El tratamiento escolar tradicional que hay en el NMS del concepto de función trigonométrica se percibe como una extensión de la Trigonometría clásica, pues se parte de la definición de las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo para generalizarlas a funciones de x, para x definida en todos los reales. Hardy (1908) caracteriza esta transición como una “traducción del lenguaje geométrico al lenguaje del análisis”, al plantear un método geométrico para trabajar analíticamente las funciones trigonométricas (Buendía y Montiel, 2015, p.174).

Se observa que, comúnmente la equivalencia entre grados y radianes suele basarse en el argumento de conversión mediante una fórmula, más que en la explicitación de su necesidad en cada contexto y relación de los elementos implicados, probablemente porque la argumentación del uso del radián requiere del análisis matemático de la función, y para ello son necesarias herramientas matemáticas que el estudiante no ha trabajado: derivada e integral.

Otra situación que se señala en la Trigonometría escolar es que comúnmente "no hay distinción entre la naturaleza de los distintos objetos matemáticos en juego: razón, ecuación y función, trigonométricas" (Buendía y Montiel, 2015, p. 171). Esto se puede percibir en varios libros, estudiantes y profesores que manejan de manera indistinta los términos "razón" o "función" en la resolución de tareas trigonométricas, por ejemplo, se encuentran expresiones del tipo: $\text{sen} = 1$ (obviando el ángulo y la ambigüedad en el uso).

También, Montiel (2011) reporta la aritmetización de lo trigonométrico como un fenómeno presente en la Trigonometría escolar. La aritmetización ocurre cuando se introduce las razones trigonométricas dejando de lado el proceso geométrico. La investigación de Torres-Corrales (2014) contrarresta, en cierta medida, dicho fenómeno mediante la resignificación de la noción razón trigonométrica mediante una conciencia de uso coherente de otras nociones como es el ángulo, el radio, los arcos, los triángulos y los tópicos geométricos, a través de la circunferencia en situaciones-problemas. Resaltando para nuestro interés, el uso del ángulo y la medición angular para la resignificación de las razones trigonométricas.

De lo anterior, se desprende una serie de obstáculos y fenómenos didácticos implicados en el pensamiento Trigonométrico. A ellos lo denominamos dificultades asociadas en el pensamiento Trigonométrico, las cuales son: la función trigonométrica se percibe como una extensión de la trigonometría clásica, no existe distinción entre las funciones seno y coseno y las razones trigonométricas, y la aritmetización de lo Trigonométrico.

Dificultades asociadas al ángulo y la trigonometría

A propósito del cambio en la noción del ángulo y medida angular, necesario en la transición de la trigonometría clásica a la trigonometría analítica, incluimos en la revisión bibliográfica las investigaciones que analizan al ángulo, tanto como concepto matemático como concepto escolar.

En un terreno matemático, Yeshurun (1982) identifica que, a través del tiempo, la definición de ángulo ha ido cambiando de forma y contenido.Por ejemplo, discutela definición proporcionada por Euclides:"A planeangleistheinclinationtooneanotheroftwolines in a planewhichmeetoneanother and do not lie in a straight line" (Yeshurun, 1982, p. 133), resaltando que no es claro el significado de inclinación, que existe diferenciación entre ángulo y medida del ángulo, y que la medida del ángulo se caracteriza por estar entre 0º y 90º (no incluyendo el borde).

Continua con la definición brindada por Hilbert: *"by an angle is meat a point called the vertex of the angle two rays called the sides of the angle emanating from the point"*(Yeshurun, 1982, p.133), para resaltar que se amplía la medida del ángulo de 0º a 180º (considerando el borde) y que esta es la definición más enseñada en escuelas de todo el mundo. Cabe resaltar que en concordancia con el autor y la experiencia docente, esta noción de ángulo es la más empleada en la introducción de los concepto básicos de Geometría y permanece durante el proceso educativo.

De ambas definiciones se observa el cambio de forma, al considerar elementos distintos en su construcción y contendido, al contemplar o no el borde y su variación en la amplitud de la medida angular. En esa dirección analiza varias definiciones, y realiza una síntesis con cinco tipos de definiciones de ángulo. A partir de ellas se puede identificar que comúnmente las empleadas en Trigonometría se caracterizan por: un tratamiento con el arco de un círculo o la medida del ángulo como la relación entre la longitud del arco y toda la circunferencia o entre áreas de un sector y el área del círculo. Por otro lado, las utilizadas en Geometría se caracterizan por considerar: inclinación, unión de rayos, parte de un plano (determinado por dos rayos), rotación rígida de un rayo.

Yeshurun (1982) resalta que incluso la definición de tipo de rotación es limitada, pues trata de una rotación de una posición a otra sin hacer más de una rotación completa quedando limitada para ángulos de medida mayores a $360°$ o 2πradianes, y negativos. Por lo cual, los argumentos geométricos quedan limitados para Trigonometría. Además, señala que ninguna de las cinco definiciones permite que todos los números reales sean medidas de ángulo, siendo esto característico del dominio de las funciones trigonométricas.

Para solventar lo anterior, el autor propone introducir la noción de ángulo mediante la rotación, pero como parte de una experiencia física, en la cual la rotación de un rayo sea la preimagen y su resultado sea la imagen cuyo punto de rotación se llame vértice. De forma que obtiene sentido las medidas positivas (rotación dirección de las manecillas de reloj) o negativa (dirección anti horario) según su dirección, el dominio se extiende de $-180°$ a $180°$ o -πa π, y se agrega a la medida de un ángulo de rotación $x + 360°k$o$x + 2\pi k$con kentero. Permitiendo transitar de lo concreto mediante fenómenos físicos a la abstracción.

Si bien investigadores, autores de textos y profesores reconocen y trabajan con esta diferencia, para los estudiantes no es explícita ni clara la divergencia entre las definiciones y cuándo es necesaria una u otra. Por ejemplo, en la investigación de Mesa y Goldstein (2016), en la que analizaron diez libros de texto, específicamente los temas de ángulo, función trigonométrica y función trigonométrica inversa, se identifica que el tratamiento del ángulo previo a las funciones trigonométricas no es incluido en tres textos, en cuatro libros solo proporcionan ejemplos, y en los otros lo definen según sus medidas y construcción. Los autores establecen que la definición de ángulo previo o en el tema de Trigonometría se presenta de dos maneras: 1. Referida al arco de la circunferencia con la intersección de dos rayos rotando, iniciando con su forma dinámica por la rotación y 2. El ángulo definido entre la relación de líneas, entre el espacio entre rayos dando como algo estático. Nuevamente, se evidencia diferencias entre las distintas nociones de ángulo, en este caso resaltando el carácter dinámico y estático del ángulo, pero no se argumenta su distinción en el uso según su contexto.

Otros estudios han reportado que el conocimiento fragmentado de la noción y medida del ángulo conduce a una comprensión desconectada de las funciones trigonométricas (Moore, 2009; 2013). Ya que se debe tener en consideración que a pesar de que se pueden introducir y emplear en distintos contextos las funciones trigonométricas, ellas poseen bases comunes, por ejemplo, Moore (2009) menciona la medida de ángulo como un común entre los contextos de la trigonometría en triángulos y la trigonometría en el círculo unitario.

Relacionado con la medida angular, en su investigación Akkoc (2008) menciona que los docentes saben convertir entre radián y grados, pero no pueden definir la relación de dos longitudes. Es decir, se tiene una compresión poco profunda de lo que significa la medida radián. Moore (2013) identifica que los profesores en servicio poseen varias nociones para el radian, resaltando que: “Akkoc suggested that impoverished radian angle measure understandings likely contribute to teacher and student difficulties in trigonometry” (p. 226).

Recapitulando, se determinan algunas Dificultades asociadas al ángulo y la Trigonometría presentes en el discurso matemático escolar, las cuales son: la definición de ángulo tratada en Geometría es diferente a la tratada en Trigonometría; en Trigonometría se trabaja con el ángulo desde su función sin mencionar explícitamente qué es el ángulo y la poca comprensión de la medición angular obstaculizal a compresión y tratamiento de las funciones trigonométricas.

Dificultades asociadas a la naturaleza del ángulo

En el terreno escolar y específico en la noción de ángulo, Mitchelmore y White (2000) fueron los primeros en reconocer la diversidad de definiciones que pueden encontrarse en los libros, acordes al contexto en el que serán utilizados con la adaptación que debe hacerse del concepto a diferentes estructuras matemáticas. Estos autores llaman a esta característica como la naturaleza multifacética del ángulo. A partir de esta naturaleza, Rotaeche y Montiel (2017) identifican y profundizan en la naturaleza polifacética del ángulo al considerar los distintos significados: cualidad (en su forma), cantidad (susceptible a ser medido) y relación (estar relacionado a otros elementos); y el carácter: dinámico y estático. Estos van a encontrar una relación con las definiciones y representaciones usadas para trabajar con el ángulo.

Del estudio de la naturaleza polifacética del ángulo se puede analizar algunas dificultades asociadas a la naturaleza de ángulo, por ejemplo, las dificultades recopiladas por Rotaeche y Montiel (2017): 1. Asumir que la longitud de las rectas que definen al ángulo afecta su medida;2. Reconocer ángulos de medida 0^o, 180^o y 360^o;y 3. Identificar al ángulo dentro de otras figuras. Estas dificultades podrían estar ligadas a los significados reconocidos por las autoras: con la cualidad, según su definición dado que implica rectas o rayos y su intersección o unión; con la cantidad, por la compresión y el trabajo de los ángulos con esas medidas; y con la relación, al reconocer las características y propiedades del ángulo en conjunto o mediante otros elementos.

Hacia un planteamiento de investigación

Con base en la revisión bibliográfica, reconocemos que no se trata de un concepto fácil de comprender. Si a éstas añadimos las dificultades y fenómenos didácticos propios de la enseñanza y aprendizaje de la Trigonometría, estamos frente a una problemática mayor, en la que insertamos nuestro objetivo de estudiar el uso del ángulo en el desarrollo del pensamiento trigonométrico, al transitar de las razones a las funciones. Por lo cual, es conveniente reflexionar acerca de las dificultades asociadas (ver tabla 1).

Dificultades asociadas a la naturaleza de ángulo	Dificultades asociadas al ángulo y la Trigonometría	Dificultades asociadas en el pensamiento Trigonométrico
Asumir que la longitud de las rectas que definen al ángulo afecta su medida. (Rotaeche y Montiel, 2017)	La definición de ángulo tratada en general en Geometría es diferente a la empleada en Trigonometría. (Yeshurun, 1982; Mesa y Goldestein, 2016)	La función trigonométrica se estudia como extensión de la trigonometría clásica.
Reconocer ángulo de medida 0^o, 180^o, 360^o (Rotaeche y Montiel, 2017) Tratamiento de ángulos con medidas negativas.	En los libros de trigonometría trabajan el ángulo desde su función sin mencionar explícitamente qué es el ángulo. (Yeshurun, 1982)	Al no hacer explicita la relación del radián y el real; en el discurso matemático escolar el estudiante le es indistinto el tratamiento como razón o como función. (Buendía y Montiel, 2015)
Identificar al ángulo dentro de otras figuras. (Rotaeche y Montiel, 2017)	La poca comprensión de la medición angular inhibe la capacidad de construir interpretaciones flexibles de las funciones trigonométricas (Moore, 2013)	La aritmetización de lo Trigonométrico. (Montiel, 2011)

Tabla 1. Reporte de dificultades asociadas al ángulo y el desarrollo del pensamiento Trigonométrico.

Llevaremos a cabo nuestro estudio desde la Teoría Socioepistemológica a la Matemática Educativa (TSME), con el fin de identificar y analizar a la noción de ángulo desde sus usos y funcionalidad al transitar de las nociones propias de la trigonometría clásica a las propias de la trigonometría analítica. Es decir, se asumirá a priori como un saber transversal que debe tener un desarrollo de usos, a partir del sentido que de él demande una tarea. Esta postura, se basa en algunos planteamientos socioepistemológicos que en trigonometría ya han cambiado su enfoque de estudio: de los objetos a las prácticas.

Para ello, se parte de investigaciones como las de Buendía & Montiel (2013), quienes, en su planteamiento sobre la funcionalidad trigonométrica, identifican que la unidad de medida, en reales (no en radianes), emerge como necesaria para articular el problema físico con el lenguaje matemático que lo modela. En el estudio de la experimentación didáctica del planteamiento anterior, Beltrán & Montiel (2016), reportan que: "el uso de la unidad de medida (ángulo/radianes) es totalmente contextual" (p.76), refiriéndose a que en todo momento los estudiantes hablaron de la relación tiempo-distancia. De manera complementaria Torres-Corrales (2014) presenta mediante situaciones-problemas un manejo situacional de la medida angular mediante actividades experimentales, en el cual, se trabaja con la relación radio, ángulo y longitud de arco haciendo uso de la medición. Se evidencia la importancia de realizar más reflexiones referentes a la noción del ángulo y medición angular, pues de ello se puede generar marcos de referencias que permitan el análisis o construcción de diseños y el estudio en el desarrollo del pensamiento Trigonométrico desde la Socioepistemología.

Referencias bibliográficas

Akkoc, H. (2008). Pre-service mathematics teachers’ concept images of radian. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(7), 857–878.

Beltrán, M. P., & Montiel, G. (2016). La modelación en el desarrollo del pensamiento funcional - trigonométrico en estudiantes mexicanas de nivel medio superior. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19(3), 255–286.

Buendía, G., & Montiel, G. (2015). Desarrollo del pensamiento Funcional-Trigonométrico. In G. Buendía, M. Ferrari, & G. Martinez (Eds.),Resignificación de funciones para profesores de matemáticas (pp. 169–205). Madrid, España: Díaz de Santos.

Mesa, V., & Goldstein, B. (2016). Conceptions of Angles, Trigonometric Functions, and Inverse Trigonometric Functions in College Textbooks. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3(2), 338–354.

Mitchelmore, M., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive. Abstactiones and generalization. EducationalStudies in Mathematics, 41(1), 209–238.

Montiel, G. (2011). Construcción del conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico. Madrid, España: Díaz de Santos.

Moore, K. (2009). An investigation into precalculus students' conceptions of angle measure.DocumentopresentadoenTwelfth Annual Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education, North Carolina State University, EstadosUnidos. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/crume2009/proceedings.html

Moore, K. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. EducationalStudies in Mathematics, 83(2), 225–245.

Rotaeche, R.A., & Montiel, G. (2017). Aprendizaje del concepto escolar de ángulo en estudiantes mexicanos de nivel secundaria. Educación Matemática, 29(1), 171–199.

Torres-Corrales, D. (2014). Un entorno geométrico para la resignificaicón de las razones trigonométricas en estudiantes de Ingenería. Tesis de maestría no publicada. Instituto Tecnológico de Sonora, Cuidad Obregón, México.

Yeshurun, S. (1982). The angle: a logical gap in teaching geometry and trigonometry and its remedy. International JournalofMathematicalEducation in Science and Technology, 13(2), 133–138.

LIMITACIONES DE APRENDIZAJE QUE EVIDENCIAN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN EL ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

LEARNING LIMITATIONS THAT EVIDENCE STUDENTS OF SECONDARY EDUCATION IN THE STUDY OF THE QUADRATIC FUNCTION

Marianela Alpízar Vargas, Hazel Fernández Álvarez, José Luis Morales Reyes,Steven Quesada Segura
Universidad Nacional. (Costa Rica)
marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr, hazelgt17@hotmail.com, josemore93@hotmail.com, steven_09_11@hotmail.com

Resumen
Este trabajo de investigación plantea las dificultades y errores que presentan estudiantes, de la educación secundaria costarricense, en el aprendizaje de la función cuadrática. La investigación se fundamenta en uno de los organizadores del Análisis Cognitivo, subanálisis perteneciente al Análisis Didáctico del Grupo Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada. Dentro de los resultados, se tiene que la mayoría de los errores se deben a deficiencias en el manejo de contenidos y procedimientos; además, que presentan gran dificultad en situaciones que requieren ir más allá de la aplicación de fórmulas.

Palabras clave: análisis cognitivo, función cuadrática, dificultades y errores

Abstract
This research paper is aimed at analyzing the difficulties and errors that Costa Rican secondary school students present when learning the quadratic function. The research is based on one of the organizers of cognitive analysis, proposed by the Didactic Analysis of the Numerical Thinking Group of the University of Granada. It was found that most errors are due to deficiencies in the management of contents and procedures; besides, they present great difficulty in situations that require more than the application of formulas.

Key words: cognitive analysis, quadratic function, difficulties and errors

Introducción

Esta investigación toma como marco de referencia uno de los subanálisis del Análisis Didáctico, propuesto por el Grupo Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, específicamente desarrolla lo referente al organizador denominado limitaciones de aprendizaje, el cual pertenece al análisis cognitivo.

Lo reportado en este escrito corresponde a algunas reflexiones generadas a raíz de una investigación realizada, como requisito parcial, para optar por el grado académico de Licenciatura en Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica. En dicha investigación se utilizó el Análisis Didáctico, como fundamentación teórica, en la elaboración de un material didáctico, para la enseñanza de la función lineal y de la función cuadrática, coherente con el Programa de Estudios de Matemática del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). El material didáctico está dirigido a estudiantes de décimo año de educación secundaria. Cabe destacar que, en Costa Rica, la educación secundaria consta de cinco años y la edad de los estudiantes oscila entre los trece y los diecisiete años.

En la investigación completa se realizaron los análisis: conceptual, de contenido, cognitivo y de instrucción sobre la función lineal y la función cuadrática; sin embargo, en este artículo solamente se reportan algunos de los resultados referidos con el análisis cognitivo de la función cuadrática.

La importancia del estudio planteado radica en que, los contenidos de cada unidad didáctica se deberían adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos (Abrate, Pochulu y Vargas, 2016). Además que la detección de las dificultades y los errores vinculados a un contenido matemático permiten conocer los factores que pueden interferir en el proceso de aprendizaje del estudiante (Arias y González, 2016); por lo que, se facilita la elección de tareas que permitan enfrentar las dificultades y evitar los errores; es decir, se deben conocer las dificultades y los errores más comunes en los estudiantes para plantear materiales didácticos que colaboren con la labor del docente en el proceso de enseñanza, pero sobre todo, que contribuyan con el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Marco teórico

El análisis didáctico es un sistema cíclico de cinco categorías, a saber: análisis conceptual, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis evaluativo, considerando que los dos primeros son uno solo, dado que su objetivo es analizar el contenido matemático (Rico y Fernández, 2013). La finalidad del análisis didáctico es fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación de materiales didácticos que organizan y transmiten conocimientos matemáticos, así como la puesta en práctica y la evaluación de estos (Rico y Fernández, 2013).

La base de esta investigación es el análisis cognitivo, el cual se ajusta a una concepción escrutadora o regresiva, ya que trata de organizar el para qué y hasta dónde se deben aprender determinados conocimientos sobre un tópico específico (Rico, 2013). Es decir, se enfoca en los estudiantes a los cuales se dirige el proceso de enseñanza.

Para efectuar el análisis cognitivo se establecen tres organizadores. El primero se refiere a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, a su precisión y riqueza, a su alcance en el largo, medio y corto plazo, el segundo se enfoca en las limitaciones de aprendizaje, dentro del cual se consideran los errores y dificultades de los estudiantes, y el último son las oportunidades de aprendizaje, que se refieren a aquellas situaciones que diseña o adapta el docente con el fin de contribuir al aprendizaje de un determinado tópico matemático.

Este estudio se enfoca en las limitaciones de aprendizaje, donde las dificultades de aprendizaje pueden ser hipotéticas o empíricas, conjeturadas o conocidas, y los errores pueden estar ya documentados o ser detectados durante la práctica. Es decir, este organizador se ocupa de algunas situaciones que pueden poner un obstáculo al aprendizaje de los escolares, y se parte del hecho de que son muchas las variables que pueden afectar el desarrollo cognitivo de los estudiantes en el contexto del aprendizaje escolar (Lupiáñez, 2013).

Al enfocar esta investigación en el segundo organizador, fue necesario considerar un apartado teórico para los errores y dificultades que han manifestado los estudiantes al trabajar con los conocimientos de la función cuadrática. Según Lupiáñez (2013) las dificultades de aprendizaje forman parte inherente del propio proceso de aprendizaje y aunque puedan tener su origen en muchas causas, una de ellas tiene que ver con la propia complejidad del conocimiento matemático.

Al respecto Socas (1997) menciona que en el aprendizaje de la Matemática, los alumnos, presentan muchas dificultades y éstas son de naturalezas distintas. Algunas de ellas tienen origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Así mismo, señala que las dificultades pueden abordarse desde varias perspectivas, entre ellas: el desarrollo cognitivo de los alumnos, el currículo de Matemática y los métodos de enseñanza.

Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores; además, el error va a tener procedencias diferentes, pero en todo caso va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste (Socas, 1997).

Para efectos de esta investigación se entenderá por dificultad, cualquier situación cognitiva que enfrente el estudiante, que le impide o afecte en forma negativa sus procesos de resolución de ejercicios y problemas; además, se entenderá por error, aquella situación observable donde el estudiante brinde una respuesta equivocada. Además, se considerará parte de la clasificación de errores propuesta por Radatz (1980) mencionado por Abrate, Pochulu y Vargas (2006), a saber:

1) Errores debido a deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos en la elaboración de una tarea Matemática; por ejemplo, ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios.

2) Errores causados por la ausencia del pensamiento flexible, es decir, para adaptarse a situaciones nuevas (asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento). Dentro de esta clase de errores se tienen:

    - De asociación: Razonamientos o asociaciones incorrectas. Por ejemplo, $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ en asociación con el hecho de que $\sqrt{a^2 \cdot b^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.
    - De interferencia: Cuando los conceptos u operaciones interfieren unos con otros. Por ejemplo la multiplicación de dos números negativos interfiere en la resolución de una resta: $-5\cdot -3=8$ lleva a $-5-3=8$.

3) Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales: aquellos que se presentan cuando cada paso de la tarea es correcto, o responde a la lógica interna del procedimiento esperado, pero el resultado final no es la solución debido a los errores de cálculo que se presentaron en la ejecución de operaciones básicas, o acarreados por la transferencia equivocada de símbolos y números involucrados en la situación.

Propiamente en el aprendizaje de la función cuadrática, en la literatura, se pueden encontrar algunas dificultades. Córdoba, Diaz, Haye y Montenegro (2013) señalan algunas de ellas en cuanto a los estudiantes:

1) No relacionan el coeficiente del término lineal con la posición del eje de simetría de la parábola. Este caso se refiere a que cuando los estudiantes grafican una función cuadrática, sabiendo solo que $a > 0$, $b = 0$ y $c < 0$ no tienen claro que $b = 0$ da como resultado el eje de simetría sobre el eje y.

2) No aciertan al establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.

3) Los problemas se revelan con mayor fuerza cuando el registro de partida es la gráfica. Es decir, teniendo solo una parábola ubicada en el plano cartesiano tienen dificultad al determinar su criterio.

De forma similar Huang, Li y An (2012), en una investigación relacionada con las estrategias de enseñanza de la función cuadrática en China, determinaron las siguientes dificultades generales:

1) Organización del currículo: En China estudian primeramente la función cuadrática, y luego la función lineal y las ecuaciones cuadráticas. A pesar de que tradicionalmente no se hace así, sino que se consideran las ecuaciones cuadráticas y la función lineal como conocimientos previos. Lo que podría afectar el entendimiento de las funciones cuadráticas.

   Por ejemplo: Se le pide a un estudiante encontrar el punto mínimo de la función $f(x) = 3x^2 + 9x - 3$, él la simplifica dividiendo por tres y obtiene $f(x) = x^2 + 3x - 1$ completa cuadrados y halla el punto mínimo de ella, asumiendo que es el mismo de la función dada originalmente. Esto se debe a que usó la misma generalización que cuando se resuelve la ecuación $3x^2 + 9x - 3 = 0$ es equivalente a resolver $x^2 + 3x - 1 = 0$

2) Pocas variaciones de los parámetros: La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene diferentes variaciones dependiendo de si b y c son o no cero. Además cuando el número de variaciones y ejemplos son limitados aparecen errores como los siguientes:

   a) Pensar que la función $f(x) = ax^2 + bx$ no tiene intersección con el eje y porque no aparece c.

   b) Si un estudiante estudia las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + c$ se dará cuenta que c regula el movimiento hacia arriba o hacia debajo de la función $f(x) = ax^2$ pero también lo puede llevar a generalizar que hace lo mismo con $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De las secciones anteriores, se puede evidenciar que los estudiantes, en general, presentan dificultades en la articulación entre las distintas formas de representación funcionales, con mayor tendencia cuando se realiza entre la representación gráfica y la representación algebraica; además se les dificulta el significado de los distintos coeficientes y su afectación en las distintas propiedades de la función cuadrática.

Metodología

Esta investigación es de corte cualitativo con un enfoque descriptivo, ya que define y clasifica los errores y dificultades que evidencian estudiantes de décimo año de la educación secundaria costarricense.

Para el desarrollo de la investigación se elaboraron dos cuestionarios. El primero de ellos, con el objetivo de describir las dificultades y errores que han identificado algunos docentes de Matemática, de la educación secundaria, al momento de enseñar la función cuadrática. Dicho cuestionario se basó, principalmente, en las habilidades específicas, de la función cuadrática propuestas en el Programa de Estudios de Matemática del MEP y los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para la consecución de dichas habilidades. Por otro lado, el segundo cuestionario se aplicó a estudiantes de décimo año con el fin de detectar y conocer otros errores o dificultades que no mencionaran los docentes en el primer cuestionario.

Los participantes a los cuales se les aplicó el cuestionario fueron treinta profesores de Matemática de educación secundaria, con almenos dos años de experiencia impartiendo décimo año, de los cuales al menos en uno debía haber seguido el actual Programa de Estudiosde Matemática del MEP, el cual fue aprobado en 2012. Los docentes fueron escogidos a través de una muestra por conveniencia, se seleccionaron profesores de las regiones educativas Heredia y San José Central, debido a que en dichas zonas se recibieron una mayor cantidad de capacitaciones relacionadas con la aplicación del actual Programa de Estudios del MEP. Además, como no se tenía interés en inferir a la población, se consideró trabajar con una muestra no probabilística, por lo que treintaentrevistados era un número adecuado para aportar información valiosa sobre las dificultades y errores que se han detectado en los estudiantes costarricenses de la educación secundaria al estudiar la función cuadrática.

Para la validación del cuestionario aplicado a los docentes se realizaron dos etapas. La primera, por medio de juicio de expertos, utilizando una rúbrica de evaluación para este fin, donde se detallaban aspectos como: redacción, conexión con las habilidades específicas propuestas por el MEP, coherencia del ítem con la escala utilizada y por último, algunas observaciones generales o recomendaciones. Los expertos fueron cuatro profesores de Matemática, dos de ellos tenían relación con educación secundaria y los otros dos con educación universitaria. La segunda parte de la validación se realizó mediante una prueba piloto, la cual se aplicó a diez docentes de Matemática de educación secundaria que no eran parte de la muestra.

El segundo cuestionario se diseñó considerando algunas de las habilidades propuestas en el Programa de Estudios de Matemática del MEP que se encuentra en vigor, consistió en una serie de ejercicios y problemas relacionados con la función cuadrática. Se aplicó a setenta y seis estudiantes de décimo año, con edades que oscilan entre los 15 y 16 años, estos fueron seleccionados por conveniencia, dado que los investigadores contaban con facilidad de contacto con los mismos y disponían de las lecciones de Matemática para la aplicación de los cuestionarios. La aplicación de este segundo cuestionario se realizó luego de que los estudiantes abordaron en sus clases el tema de función cuadrática.

Resultados

En cuanto al cuestionario que se aplicó a los estudiantes; inicialmente, se revisó uno a uno los setenta y seis cuestionarios aplicados, dentro de los cuales se señalaron y anotaron el tipo de error encontrado, posteriormente se contabilizaron y categorizaron. Además se categorizaron los errores descritos por los docentes en el cuestionario respectivo.

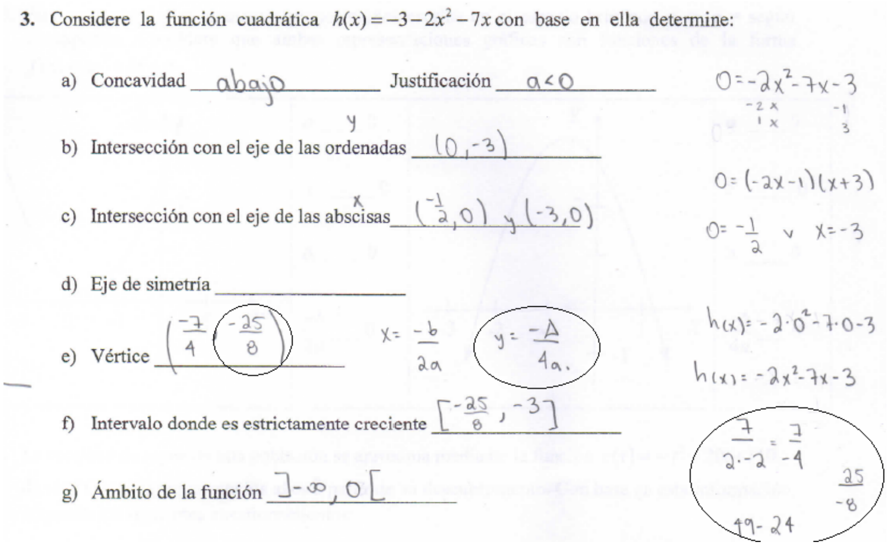
En la siguiente tabla se presenta una descripción de los errores detectados por medio de los cuestionarios aplicados (docentes, estudiantes); además se categorizan de acuerdo con lo expuesto por Abrate et al. (2006) en el marco teórico de este artículo.

Tabla 1. Errores presentes en el aprendizaje de la función cuadrática

Categorización de los errores	**Errores encontrados**
Errores debidos a cálculos incorrectos o accidentales	a. Mal empleo de la ley de signos en la realización de operaciones básicas en el conjunto de los números reales. b. Omite el signo de un número negativo al remplazarlo en la fórmula de las coordenadas del vértice. En la figura 1 puede observarse un ejemplo de este tipo de error.
Errores debidos a asociaciones incorrectas	a. Cálculo incorrecto de potencias de la forma $-a^2$ en confusión con $(-a)^2$
Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para la realización de una tarea matemática.	• Ubicación incorrecta de pares ordenados en el plano cartesiano. En la figura 2 se presenta un ejemplo de este error. • Errores al aplicar métodos de factorización. • Error algebraico al resolver ecuaciones lineales. • No identifica a, b y c dado el criterio de la función. • No asocia el signo deldiscriminante con la cantidad de intersecciones de la función con el eje x. • No distingue que determina cada variable del criterio en su representación gráfica. • Dada la representación gráfica de una función cuadrática, determina de forma incorrecta pares ordenados que pertenecen a la misma. • Confunde el intervalo de crecimiento con el de decrecimiento. • Ubica pares ordenados en un eje cartesiano, pero no traza correctamente la parábola. • Dada la representación gráfica de una función cuadrática al determinar el criterio de la misma, utiliza la fórmula de la pendiente • Calcula el vértice de la representación gráfica de una función cuadrática pero no determina el ámbito y los intervalos de monotonía o lo realiza de forma incorrecta.

Fuente: Elaboración propia basados en los cuestionarios aplicados a estudiantes y docentes

Se ejemplifican a continuación algunos de los errores citados en la Tabla 1, en la primera de las figuras se presenta una omisión de signos.



3. Considere la función cuadrática $h(x)=-3-2x^2-7x$ con base en ella determine:

a) Concavidad abajo Justificación $a<0$

b) Intersección con el eje de las ordenadas $(0,-3)$

c) Intersección con el eje de las abscisas $\left(\frac{-1}{2},0\right)$ y $(-3,0)$

d) Eje de simetría

e) Vértice $\left(\frac{-7}{4}, \frac{-25}{8}\right)$ $x=\frac{-b}{2a}$ $y=\frac{-\Delta}{4a}$

f) Intervalo donde es estrictamente creciente $\left[\frac{-25}{8}, -3\right]$

g) Ámbito de la función $]-\infty, 0[$

$0=-2x^2-7x-3$

$0=(-2x-1)(x+3)$

$0=-\frac{1}{2}$ v $x=-3$

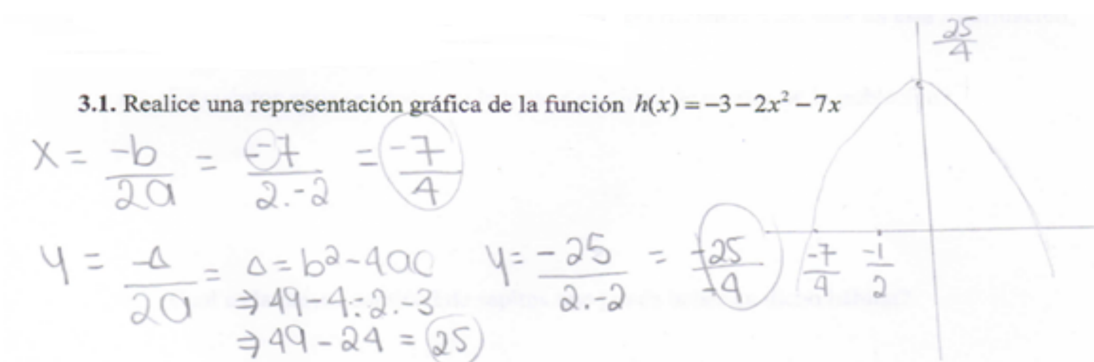
$h(x)=-2\cdot 0^2-7\cdot 0-3$

$h(x)=-2x^2-7x-3$

$\frac{7}{2\cdot -2}=\frac{7}{-4}$ $\frac{25}{-8}$ $49-24$

Figura 1. Error relacionado con la omisión de signos.

En la figura 2 se presenta otro de los errores evidenciados, correspondiente a un conocimiento previo que es necesario para realizar correctamente la representación gráfica de una función, como lo es la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano. En la siguiente imagen se puede observar dicho error, dado que calcula el vértice, pero no es capaz de ubicarlo adecuadamente; así mismo, se observa una confusión en el cálculo de la ordenada del vértice, porque realiza $y=\dfrac{-\Delta}{2a}$ en lugar de $y=\dfrac{-\Delta}{4a}$.



3.1. Realice una representación gráfica de la función $h(x)=-3-2x^2-7x$

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-7}{2\cdot -2}=\frac{-7}{4}$

$y=\frac{-\Delta}{2a}=$ $\Delta=b^2-4ac$ $\Rightarrow 49-4\cdot 2\cdot -3$ $\Rightarrow 49-24=25$

$y=\frac{-25}{2\cdot -2}=\frac{-25}{-4}$

$\frac{25}{4}$ $\frac{-7}{4}$ $\frac{-1}{2}$

Figura 2. Error relacionado con la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano.

Además, de la información en la Tabla 1 se puede inferir que casi la totalidad de los errores corresponden a deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos. Algunos de ellos, de acuerdo con el currículo de Matemática costarricense, corresponden a conocimientos previos como lo son métodos de factorización, resolución de ecuaciones cuadráticas y ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano. Por otro lado, se presentan errores relacionados con el concepto de función, como lo es el distinguir entre abscisas y ordenadas, la comprensión del concepto de monotonía, el dominio de las fórmulas para determinar las coordenadas del vértice de una función cuadrática y la interpretación de la influencia que ejerce en la representación gráfica de una función los parámetros de la representación algebraica.

Por otro lado, para determinar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver tareas relacionadas con la función cuadrática se aplicó el cuestionario a docentes. El cuestionario constaba de una serie de procedimientos relacionados con los aspectos matemáticos, determinados por los autores de este escrito, necesarios para la consecución de cada habilidad específica establecida en el Programa de Estudios del MEP para la función cuadrática.

En el cuestionario los docentes debían indicar la frecuencia con que sus estudiantes realizaban el procedimiento descrito, siendo 5: siempre, 4: casi siempre, 3: algunas veces, 2: casi nunca y 1: nunca. Para efectos de esta investigación, se consideró como dificultad presente a aquellos procedimientos cuyo puntaje otorgado por los docentes fuese menor a noventa. Debido a que el puntaje asignado por los docentes cuando un estudiante realiza algunas veces una determinada actividad es de tres puntos, al ser treinta cuestionarios, si todos seleccionaran la categoría algunas veces, el puntaje total sería noventa. Por lo que, si el puntaje es menor a noventa es porque la mayoría de los profesores asignó puntajes menores a tres, lo que quiere decir que indicaban que sus estudiantes nunca o casi nunca lograban realizar dicho procedimiento, por lo que se infiere que ahí se presentaba una dificultad.

En la siguiente tabla se muestran aquellas acciones en las que, por su puntaje, se determinó que se presenta alguna dificultad.

Tabla 2. Dificultades presentes en el aprendizaje de la función cuadrática

Dificultades detectadas por los profesores	Puntaje obtenido
Determina los intervalos de monotonía a partir del criterio de la función	90
Determina los intervalos de monotonía a partir de la representación gráfica de la función	88
Tiene un manejo adecuado de operaciones algebraicas y aritméticas al resolver ecuaciones cuadráticas	87
Determina los intervalos donde la función es positiva o negativa en la representación gráfica	86
Plantea problemas que involucren funciones cuadráticas	84
Diferencia entre intervalos de monotonía y los intervalos donde la función es positiva o negativa	83
Dada la función cuadrática que modela un problema en un contexto real es capaz de extraer conclusiones a partir de ella	80
Resuelve ejercicios que involucren implícitamente las ecuaciones de segundo grado.	80
Calcula el ámbito de la función cuando el dominio no es $\mathbb{R}$.	79
Determina a partir de la representación gráfica los valores de “a”, “b” y “c”	78
Plantea funciones cuadráticas para modelar problemas en contextos reales	75
Obtiene el mayor intervalo donde la función es inyectiva	74

Fuente: Elaboración propia a partir de los cuestionarios aplicados a los docentes

En la Tabla 2 se puede observar que existen diversas dificultades. Algunas de ellas están relacionadas con los intervalos de monotonía, en primera instancia al determinar los intervalos de monotonía a partir del criterio de la función y luego al determinar los intervalos de monotonía a partir de la representación gráfica de la función. Esto podría indicar que no existe comprensión de lo que son los intervalos de monotonía ni del cómo aplicar las fórmulas en el caso del criterio de la función, estas son las dificultades que se presentan en menor medida ya que están con puntaje cercano al 90.

Además, se evidencian dificultades relacionadas con el manejo inadecuado de operaciones algebraicas y aritméticas al resolver ecuaciones cuadráticas, que corresponden a conocimientos previos necesarios de acuerdo con el currículo de Matemática costarricense.

Por otro lado, se puede evidenciar que los cuatros procedimientos con menor puntaje, es decir, aquellos en los que la mayoría de los docentes indicaron que casi nunca o nunca logran realizar sus estudiantes, corresponden a habilidades que requieren de análisis más allá de simplemente aplicar fórmulas; es decir que conllevan una integración de diferentes procedimientos y conceptos, se vuelve indispensable el paso de una representación a otra, el conocimiento de fórmulas y el dominio de conceptos propios de las funciones, entre otras.

Algunas situaciones que corresponde a lo expresado anteriormente son: calcular el ámbito de una función cuadrática cuando su dominio está acotado, o plantear una función cuadrática que modele una situación de un contexto real. Lo anterior es preocupante, porque son habilidades que incentivan el desarrollo de capacidades cognitivas superiores y la resolución de problemas en diversos contextos, lo cual es perseguido por el currículo costarricense.

Conclusiones

Este estudio evidencia la variedad de dificultades y errores que pueden presentarse en el proceso de aprendizaje de la función cuadrática. La cual corresponde a una de las funciones elementales que se abordan en la educación preuniversitaria. Los resultados reportados en este escrito permitieron, a los autores del mismo, la elaboración de tareas cuya intencionalidad era exponer a los estudiantes ante las situaciones en las que usualmente se presentan mayores dificultades y errores.

Esta investigación brinda, a la comunidad de docentes de matemáticas, elementos para considerarse al momento de planificar la enseñanza de este tópico y para la elaboración de los materiales didácticos a utilizar.

El conocer sobre los errores y dificultades que se presentan en el aprendizaje de un determinado tópico matemático permite la creación de tareas más provechosas, ya que en lugar de evitar que los estudiantes se enfrenten a ciertas dificultades, lo que se debe hacer es exponerlos a las mismas. Así, por ejemplo, uno de los principales errores en el aprendizaje de la función cuadrática corresponde al paso de una representación matemática a otra, por lo que, dentro de las tareas matemáticas se solicita dicho proceso, con el objetivo de ir disminuyendo los errores que se comenten al realizar esta acción.

A manera de cierre, y en concordancia con lo expresado anteriormente, se recomienda a los docentes de matemática encargados de la enseñanza de la función cuadrática, no solo solicitar la representación algebraica de la función, sino también su representación gráfica; esto expondrá al estudiante a la ubicación de pares ordenados en el plano cartesiano y a la resolución de ecuaciones cuadráticas para determinar la intersección con los ejes coordenados.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf

Arias, I. y González, Y. (2016). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica*. (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica.

Córdoba, L., Díaz, M., Haye, E. y Montenegro, F. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. En Y, Morales y A, Ramírez (Eds.) *I CEMACYC Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. (pp. 1-13). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC. Recuperado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/373-401-2-DR-C.pdf

Huang, X., Li, S. & An, S. (2012). Understanding of Teaching Strategies on Quadratic Functions in Chinese Mathematics Classrooms. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*,16 (3), 177-194.

Lupiáñez, J.L. (2013). Análisis Didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 81-101). Granada, España: Editorial Comares, S.L.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1(33), 11-27. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2013/33/ARCHIVO6.pdf.

Rico, L. y Fernández, A. (2013). Análisis Didáctico y Metodología de Investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: Metodología en investigación, formación de profesores e invención curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Editorial Comares, S.L.

Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. En L, Rico (Ed.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Horsori, Barcelona. Recuperado de http://face.uasnet.mx/zona/mochis/recursos_web/alumnos/semestre2/procesoAprendizajeMatematicas/tema2%20obstaculos%20en%20la%20ense+%A6anza%20(1%20a%20la%2018).pdf

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS EN ACCIÓN: EL CASO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA Y ALUMNOS UNIVERSITARIOS

MATHEMATICAL COMPETENCE IN ACTION: THE CASE OF BASIC EDUCATION TEACHERS AND UNIVERSITY STUDENTS

Rosa Eulalia Cardoso Paredes, Maritza Luna Valenzuela,
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Pontificia Universidad Católica del São. Paulo (Brasil)
rcardoso@pucp.pe, luna.m@pucp.edu.pe

Resumen

En este trabajo se reporta un comparativo entre las soluciones de tareas que presentan 30 estudiantes de un diplomado en didáctica de la matemática conformado por profesores de primaria y de secundaria que enseñan en escuelas públicas y privadas, y 13 alumnos del curso de Matemática de la carrera de Arte, ambos grupos son estudiantes de una universidad privada. Para el estudio se adaptó una situación-problema de la propuesta "De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático para todos" (National Council of Teachers o fMathematics, 2015) a fin de indagar alguna relación entre los desempeños de profesores y estudiantes.

Palabras clave: competencias matemáticas, análisis de tareas

Abstract

This paper reports a comparison between the task solutions presented by 30 students of a diploma in mathematics didactics made up of primary and secondary school teachers who teach in public and private schools, and 13 students of the Mathematics course in the degree of Arts, both groups are students of a private university. For the study, a problem-situation was adapted from the proposal "From principles to action: to guarantee mathematical success for all" (National Council of Teachers of Mathematics, 2015) in order to inquiresome relationship between the performance of teachers and students.

Key words: mathematical competence, task analysis

Introducción

Con el problema de la sobreproducción y las economías débiles de las familias de algunos países que aún no logran un nivel de vida adecuado, casi todos asistimos a cualquier centro comercial, grande o pequeño, y estamos buscando siempre el mejor precio. Es decir, los descuentos o rebajas. Además de esto, todos los que estamos inmersos en el trabajo dependiente o independiente pagamos impuestos, pues con el deseo de mantener una economía estable, todos los gobiernos de los países tratan de recaudar por todos los medios, fondos a través de impuestos aplicados a su población económicamente activa para cubrir las necesidades que la población tiene: salud, educación, red vial, seguridad, entre otros. Estas crisis se pueden notar en los diferentes fenómenos que atraviesan los estados, especialmente los de América Latina, específicamente el caso de la región del sur. Perú se ha visto afectado por un fenómeno de inmigración no prevista y, además, poco visto y estudiado a nivel de la región, situación que ha agudizado la necesidad de optimizar recursos para poder, de alguna manera, contrarrestar positivamente el mismo. Así, por ejemplo, en estos últimos meses, es muy notorio que, en los centros comerciales de gran y pequeña escala, existan muchos compradores extranjeros de objetos rebajados.

Las crisis económicas no son aisladas, por ende, el interés internacional por contar con personas matemáticamente alfabetizadas desde hace algunas décadas hizo que se realizara mediciones de esa realidad. Ello ocasionó que se repensaran los currículos de los diferentes países. En el caso del Perú, el currículo diseñado al logro de objetivos viró al centrado en las competencias y es en una de las crisis de hiperinflación que entró a tallar, el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programmefor International StudentAssessment, PISA) a través de la Unidad de Medición de la calidad (UMC) en el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU).

Estos fenómenos que se presentan y que las autoridades del país no lo han prevenido hacen que exista una preocupación de los sistemas educativos de los mismos, por alfabetizar matemáticamente a los ciudadanos para enfrentar la solución de sus problemas cotidianos en una forma óptima posible. Es decir, deben ser matemáticamente competentes, es decir que una persona es competente matemáticamente si ella puede hacer uso óptimo de sus conocimientos matemáticos cuando ellos son necesarios. Para Charpack (2005), por ejemplo, ser competente es saber, hacer y saber hacer con ética y responsabilidad. Por ello, como bien indica Rico (2007), ya desde los 15 años y al finalizar la escolaridad obligatoria estos deben estar preparados para satisfacer los desafíos que las sociedades hoy les presentan, preparación que lo mide el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programmefor International StudentAssessment, PISA), a todos los estudiantes del mundo. En ese sentido, los estudiantes peruanos, según los resultados comparativos internacionales siguen ubicados en los últimos lugares de las evaluaciones que aplican. Ello ocasiona que algunas investigaciones como la presente, se oriente a averiguar si existe alguna relación entre los desempeños de profesores de formación básica y estudiantes universitarios al enfrentar una situación-problema cotidiana relacionada con la aplicación de contenidos sobre las aplicaciones de los números racionales como porcentajes, pues como ya mencionamos, por los problemas económicos que atraviesan las familias, la competencia en los productos por la sobreproducción y su poco consumo, ocasiona que estas bajen sus precios gradualmente, llegando en algunos casos hasta el 70 u 80 por ciento. Sin embargo, a pesar de la necesidad de conocer si son o no correctos los anuncios, no todos los usuarios están en condiciones de verificarlo, situación que sucede con los alumnos de la carrera de Arte, quienes, muchas veces, al realizar las intervenciones con el dictado de los contenidos del curso de Matemáticas, escuchamos las expresiones como las de Vania: “¿para qué me sirve esto?”, es decir, no le encuentran sentido la presencia del curso de matemáticas en su currículo.

Sin embargo, por los comentarios y convivencia con estos estudiantes, también observamos que en sus actividades como artistas, deben realizar actividades donde el contenido de porcentajes está muy presente cuando compran sus insumos para sus trabajos de los cursos de especialidad, obras o producción artística, ellos deben pagar sus impuestos, gestionar sus finanzas para realizar sus exposiciones entre muchas otras situaciones donde usan no solamente el razonamiento cuantitativo, sino también el relacional o espacial y con ello los contendidos matemáticos implicados. Ocasiones donde estos profesionales tienen que mostrar su competencia matemática para formular y resolver cuestiones mediante herramientas matemáticas, a pesar de su manifiesto disgusto y a veces rechazo a su aprendizaje. Es decir, pongan en acción las praxeologías que son entendidas como unión de la praxis y logos, que se amalgaman en tareas, técnicas, tecnología y teoría; categorías que componen una organización matemática servirá para el análisis de los desempeños, para luego realizar la comparación motivo de este trabajo. En este sentido, el problema que nos propusimos abordar la siguiente pregunta: ¿Existe alguna relación entre el conocimiento sobre el porcentaje como una aplicación de números racionales que tiene el profesor de formación básica (primaria o secundaria) y los aprendizajes sobre el mismo tema de los alumnos de la carrera de arte de una universidad privada? Para lograr abordar esta interrogante, nos fijamos el objetivo de identificar algunas diferencias o semejanzas existentes entre los desempeños que registraran en forma escrita los profesores de formación básica y los estudiantes universitarios de la carrera de Arte que llevan un curso de Matemáticas como parte de su formación profesional. Las herramientas con las cuales nos ayudaríamos serían las que proporciona la Teoría Antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1999).

Marco teórico

Como se mencionaen el apartado anterior, en este trabajo se considera los aportes de la Teoría Antropológica de lo didáctico (TAD) desarrollada por Chevallard (1999), que tiene como objeto de estudio los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En el momento en que considera su objeto de estudio una acción humana, ésta deberá pertenecer al campo que estudia el hombre: la antropología. El postulado que sirve de base a esta teoría afirma que toda actividad humana puede ser descrita a partir de un modelo único, el cual llamó praxeología, u organización praxeológica. El autor indica que, en el ámbito de las matemáticas, todo problema solicita medios para resolverlo y el proceso que da soporte teórico a esa resolución es la organización praxeológica matemática u organización matemática. Del mismo modo, a dicho problema matemático éste lo denomina tarea, que la praxeología se encarga de resolver. Otra de las herramientas que proporciona es la conexión que establece entre estos elementos, así por ejemplo indica que, para una determinada tarea existe una técnica, una tecnología que justifica la técnica y una teoría que fundamenta la tecnología. Además, propone que estos elementos componen dos bloques: un bloque técnico-práctico, compuesto de tarea y técnica, y un bloque tecnológico-teórico, compuesto de tecnología y teoría. Es el bloque tecnológico teórico que permite la comprensión de una técnica y hasta la posibilidad de una nueva técnica para resolver una determinada tarea. Una tarea es cualquier problema matemático. Las técnicas son determinadas maneras de hacer la tarea. Las tecnologías son las que justifica la técnica, es decir que su función es la de explicar, de hacer inteligible, de aclarar la técnica; consiste en exponer por qué es correcta yla función de producción de técnicas. Y las teorías son las que fundamentan la tecnología a un nivel superior de justificación explicación-producción, el de la teoría.

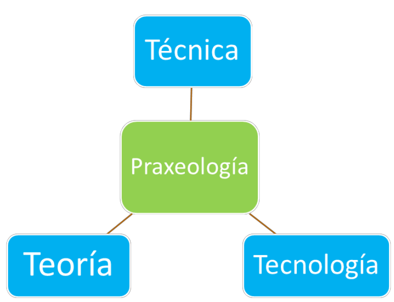


Figura1. Estructura de una praxeología

Metodología

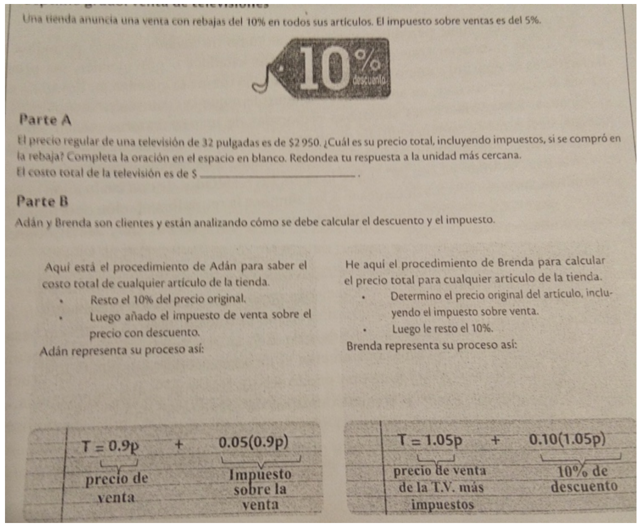
Esta indagación se enmarca en el paradigma cualitativo, específicamente se siguen los procesos que indica la Teoría Fundamentada y los aportes de la TAD, que propone averiguar qué es lo que pasa en las aulas y sobre todo permiten un acercamiento entre la realidad y el investigador. El estudio, también se enmarca en la técnica de estudio de caso, pues es un grupo de participantes que fueron elegidos por los profesores investigadores y está integrado por profesores de enseñanza básica y alumnos universitarios de la carrera de Arte y Diseño que harán las especialidades de Diseño gráfico, Pintura, Grabado y Escultura cuyas edades están entre 17-19 años. Estos alumnos, llevan un único curso con el nombre de Matemáticas que entre sus contenidos se considera el sistema de los números reales y las funciones. En la parte de Números reales, se estudian los números racionales donde también se trata el tema de los porcentajes. Para el caso de los docentes, estos son participantes en una diplomatura de especialización de didáctica de la matemática para el nivel primario y forma parte de la formación continua que también la puede elegir estudiar docentes de otros niveles. Los contenidos de la diplomatura incluyen 6 módulos siendo uno de ellos el denominado Habilidades operatorias II. Los contenidos de este módulo tratan sobre el sistema de los números racionales y sus aplicaciones donde se presenta a los participantes el tema del porcentaje.

En esta investigación se trata de averiguar la competencia matemática que tienen tanto los estudiantes y que diferencias y similitudes se pueden encontrar en ellos a través del análisis de sus respuestas o praxeologías (Chevallard, 1999).

Participantes	Número	Actividad
Estudiantes de Arte y Diseño	13	Diseño gráfico, escultura, grabado y pintura
Profesores de enseñanza básica (primaria y secundaria)	30	Enseñanza básica

Tabla 1: Participantes en las investigaciones

El instrumento que se utilizó para recoger la información fue una situación-problema sobre la compra de un TV, tomado de PARCC (2013) citado en NCTM (2015), que consta de dos partes: la primera es un problema rutinario que solicita una única respuesta y en la segunda parte se debe realizar el proceso de matematizar o modelizar la situación es decir, es una tarea donde los evaluados ponen en práctica una praxeología (Chevallard, 1999; Bosch, et al., 2003) matemática adecuada para construir o reconstruir la situación y lograr dar su respuesta.



Una tienda anuncia una venta con rebajas del 10% en todos sus artículos. El impuesto sobre ventas es del 5%.

Parte A

El precio regular de una televisión de 32 pulgadas es de $2 950. ¿Cuál es su precio total, incluyendo impuestos, si se compró en la rebaja? Completa la oración en el espacio en blanco. Redondea tu respuesta a la unidad más cercana.

El costo total de la televisión es de $ ______________ .

Parte B

Adán y Brenda son clientes y están analizando cómo se debe calcular el descuento y el impuesto.

Aquí está el procedimiento de Adán para saber el costo total de cualquier artículo de la tienda.

- Resto el 10% del precio original.
- Luego añado el impuesto de venta sobre el precio con descuento.

Adán representa su proceso así:

$$T = \underbrace{0.9p}_{\text{precio de venta}} + \underbrace{0.05(0.9p)}_{\text{Impuesto sobre la venta}}$$

He aquí el procedimiento de Brenda para calcular el precio total para cualquier artículo de la tienda.

- Determino el precio original del artículo, incluyendo el impuesto sobre venta.
- Luego le resto el 10%.

Brenda representa su proceso así:

$$T = \underbrace{1.05p}_{\text{precio de venta de la T.V. más impuestos}} + \underbrace{0.10(1.05p)}_{\text{10\% de descuento}}$$

Figura 2. Estructura de la praxeología

Esta tarea (Figura 2) fue adaptada utilizando el contexto de los estudiantes de ambos grupos para permitir que el resolutor encuentre una solución y; además, tome una decisión. En la adaptación también se encuentra que en la situación original se muestran los modelos matemáticos para cada situación; sin embargo, en la adaptación lo que se quería averiguar también fue, como los participantes comprendían el problema y utilizando el lenguaje matemático modelaban o matematizaban dicha situación.

A continuación, se presenta la situación-problema (Figura 3) adaptada que se utilizó para recoger la información que está conformada por tres tipos de tarea: t1 corresponde al ítem a) Cuál es precio final, incluyendo el impuesto y la rebaja. t2: Simbolice el procedimiento que realiza cada una de las clientas y t3): Indique cuál de las clientas tiene la forma correcta de calcular el precio total de cualquier artículo.

En las tiendas "Todobarato" se anuncia una venta con rebajas del 40% en todos sus artículos. El impuesto sobre las ventas es del 20%.

a) El precio de un televisor de 32 pulgadas es de S/2 950 ¿Cuál es su precio final incluyendo el impuesto y la rebaja? (Redondea tu respuesta a la unidad más cercana).

El costo total del televisor es: --

(2 puntos)

b) Rosa y Claudia son clientas de una tienda y están analizando cómo se debe calcular el descuento y el impuesto para saber el costo total de cualquier artículo:

Los procedimientos de Rosa	Los procedimientos de Claudia
- Resta el 40% del precio original. - Luego añade el impuesto de venta sobre el precio con descuento.	- Determina el precio original del artículo, incluyendo el impuesto sobre las ventas. - Luego resta el 40%.

i) Simbolice los procedimientos de cada una de las clientas. **(1 punto)**

ii) Indique cuál de las dos clientas tiene la forma correcta de calcular el costo total de cualquier artículo. Justifique su respuesta escribiendo una fórmula matemática (modelo matemático o función). **(1 punto)**

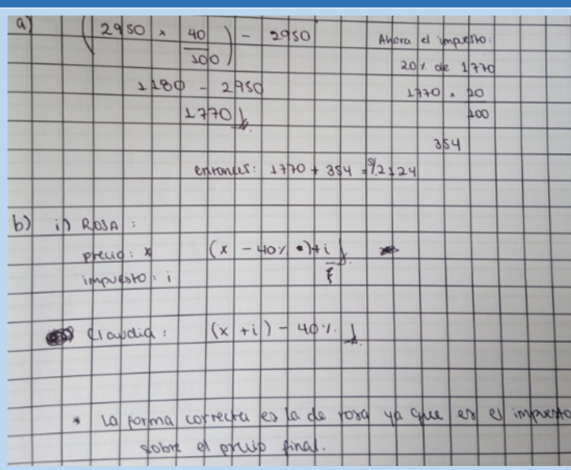
Figura 3. Situación problema adaptada de PARCC (2013) citado en NCTM (2015)

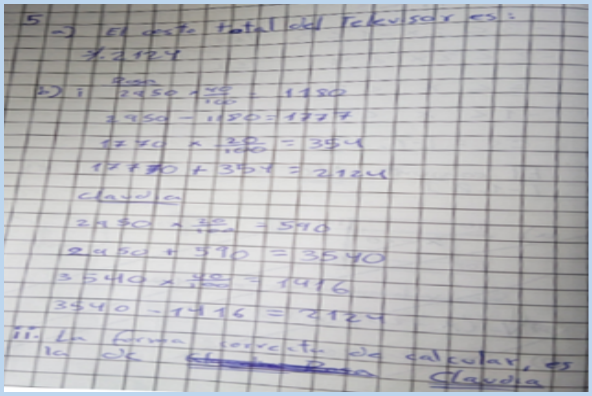
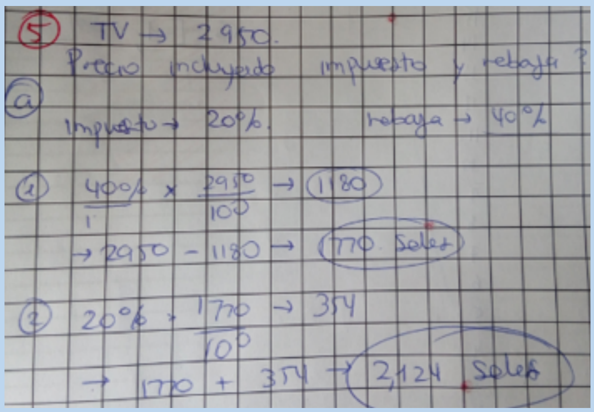
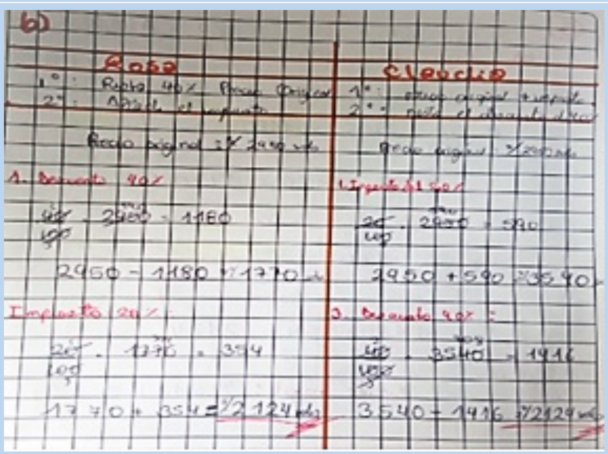
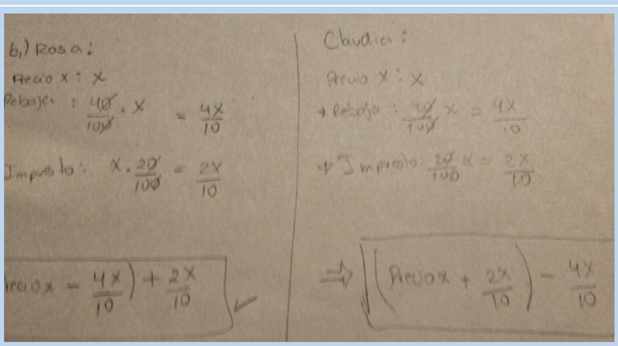
Su aplicación la realizaron las investigadoras a fin de garantizar que cada uno de los participantes evidencie fehacientemente el uso del concepto matemático a situaciones de contexto social. Se aprovechó la fecha de la evaluación parcial del curso para esta aplicación; por tanto, fue para ser resuelta en forma individual y durante el desarrollo de la tarea, no estaba permitido responder a preguntas.

Análisis de los resultados

Los primeros resultados son: El 90% de los evaluados respondió correctamente al primer tipo de tarea. Como se puede leer en el enunciado, esta es una tarea rutinaria y es posible que haya sido utilizada como un ejemplo de aplicación del porcentaje con una técnica muy ejercitada para aprender el concepto de porcentaje (la teoría). Podríamos decir que solo fueron necesarias técnicas envejecidas (Chevallard, 1999). Sin embargo, en relación con la segunda parte, hubo dificultades para comprender el texto o enunciado del problema, situación que coincide con lo planteado por Schoenfeld (1998, pp.148) quien afirma que en las instituciones escolares normalmente tratamos de proporcionar a los estudiantes más situaciones problema simuladas con la intención de mecanizar en el aprendizaje de un concepto que lograr su comprensión. La otra dificultad que se les presentó estaba en el mismo contexto del problema que a pesar de ser una situación que puede darse a diario, daba a entender que no estaban informados de que técnicas, o teorías estaban en juego, a pesar de tener a la mano la tecnología (para hacer los cálculos) para construir el modelo. Esta dificultad se notaba cuando ambos grupos preguntaban: ¿Qué se paga primero, el impuesto o el precio con descuento? Un hallazgo interesante fue que esta pregunta fue más espontanea en los estudiantes universitarios que en los docentes. Algunos de los docentes, a pesar de tener la duda o estar seguros de que no sabían cuál era el procedimiento no se atrevieron a realizar sus preguntas al respecto. Durante el desarrollo de la tarea, muchos de los estudiantes se dieron cuenta que a pesar de haber estado enfrentados a ella en muchas situaciones relacionada nunca se percataron que transacciones matemáticas estaban realizando y declararon que, eso sucede con cualquier persona y como la matemática estaba presente.

Al realizar la revisión de las respuestas se encontraron las siguientes soluciones:

Tipo de técnica	Praxeologías	Algunas Tecnologías
τ_1	 a) (2950 × 40/100) − 2950 1180 − 2950 1770 Ahora el impuesto: 20% de 1770 1770 · 20/100 354 entonces: 1770 + 354 = S/2124 b) i) Rosa: precio: x impuesto: i (x − 40% ·) + i Claudia: (x + i) − 40% * La forma correcta es la de rosa ya que es el impuesto sobre el precio final.	P1: La forma correcta es la de Rosa ya que es el impuesto sobre el precio final. PB: Forma correcta

τ_2		P2: La forma correcta es la de Claudia
τ_3		P3: Hay cálculos, pero no hay la justificación de ellos. Es decir, se aplican las técnicas, pero no se responde a la pregunta. Es decir, no asigna la solución a ninguna de las clientas
$\tau_{4.1}$		P4: Se encuentra que los dos procedimientos son correctos, pero no indica la respuesta.
$\tau_{4.2}$		P5: Se encuentra que los dos procedimientos son correctos, pero se utiliza el lenguaje matemático para generalizar la solución.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

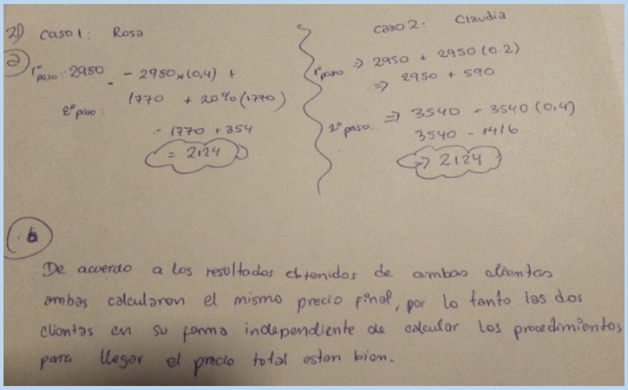
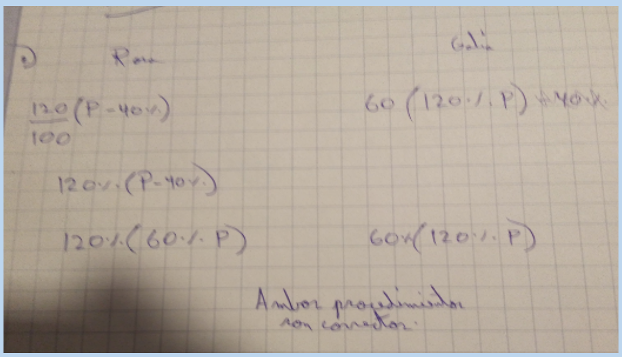
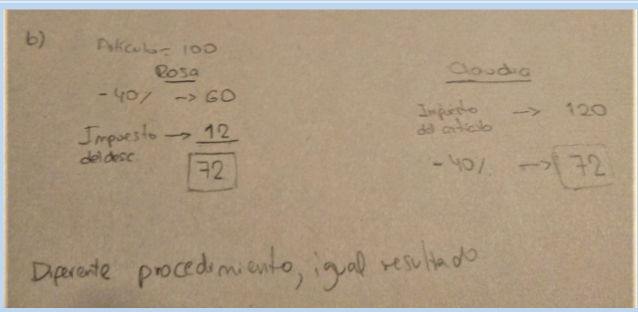
$\tau_{5.1}$		P6: Procedimiento correcto y con la justificación de que a pesar de haber realizados los cálculos en procedimientos diferentes, estos son correctos. Se caracteriza por utilizar los datos de la situación inicial.
$\tau_{5.2}$		P7: Procedimiento correcto con respuesta a la pregunta. Se caracteriza por tener un procedimiento más general. Se hace uso correcto del lenguaje matemático y las propiedades de las operaciones básicas.
$\tau_{5.3}$		P8: Procedimiento correcto con respuesta a la pregunta. Se caracteriza por tener un procedimiento con cantidades, sin embargo, se utiliza la estrategia que indica Schoenfeld (1989, pp. 148).

Tabla 2. Tipos de praxeologías realizadas por los participantes.

Conclusiones

Después de la revisión de las respuestas podemos afirmar que hay una relación de falta de aplicación a la realidad de los contenidos matemáticos básicos por parte de ambos grupos de participantes (profesores y estudiantes).

La pregunta, en ambos grupos, sobre ¿cómo realizar mejor las tareas de este tipo? Son interrogaciones que exigen una producción de técnicas y, por tanto, de praxeologías de parte de las instituciones escolares que forman profesores para remediar la falta de técnicas que ayudan a tener una mejor alfabetización y competencia matemática.

En relación con los hallazgos sobre la falta de técnicas y tecnologías (poco conocimiento) del profesor de formación básica sobre el tema nos hace suponer que ello podría ocasionar el desempeño poco favorable para enfrentar la tarea de parte de los estudiantes.

El conocimiento de las técnicas, tecnologías y teorías adquiridas en la formación previa no favorecen enfrentar la tarea con éxito de los participantes (este caso saber que da lo mismo calcular el descuento que el impuesto). Situación que permite inferir que existe en general un pequeño número de técnicas institucionalmente reconocidas, con la exclusión de técnicas alternativas posibles, que pueden existir efectivamente, en otras instituciones escolares (las universidades).

Es importante repensar las formas de conectar los contenidos matemáticos (organizaciones matemáticas) con las realidades que son más urgentes. De otra manera, si estamos haciendo alguna transacción podemos pagar más de lo que debemos, o al revés ya que, en un universo de tareas rutinarias, también pueden surgir en todo momento, las tareas problemáticas que no se sabe -aún- realizar y son necesarias nuevas praxeologías.

Las técnicas, tecnologías y teorías adquiridas en la formación previa no favorecen enfrentar la tarea con éxito no solamente a los estudiantes sino también a los profesores del nivel primario como a los futuros profesores de secundaria.

Referencias bibliográficas

Bosch M., Espinoza L., Gascón J. (2003). E*l profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas.* Recherches en Didactique des Mathématiques, 23(1), 79-136.

Charpack, G. (2005). *Manos a la obra. La ciencia en la escuela primaria*. Fondo de cultura Económica. Selección de Obras de Educación y Pedagogía. México.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-266.

National Council ofTeachersofMathematics Inc. (2015). De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático para todos. Traducción CIAEM-CME Iztapalapa.

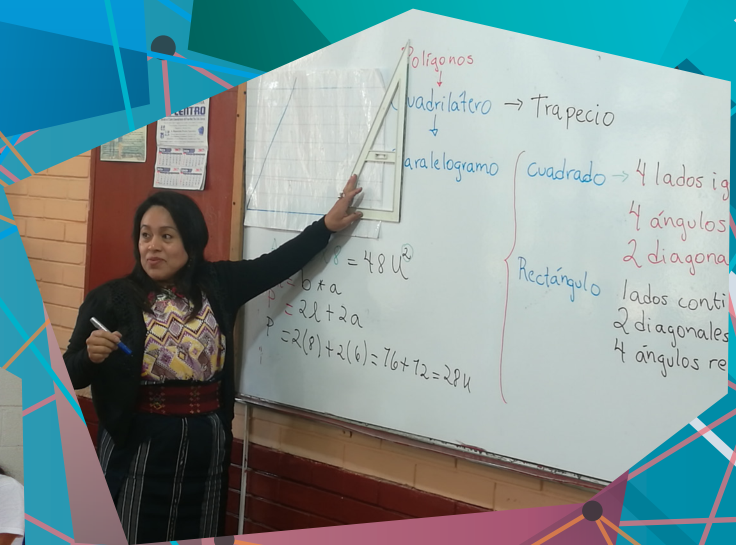
OCDE (2005). *Informe PISA2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid: Santillana.

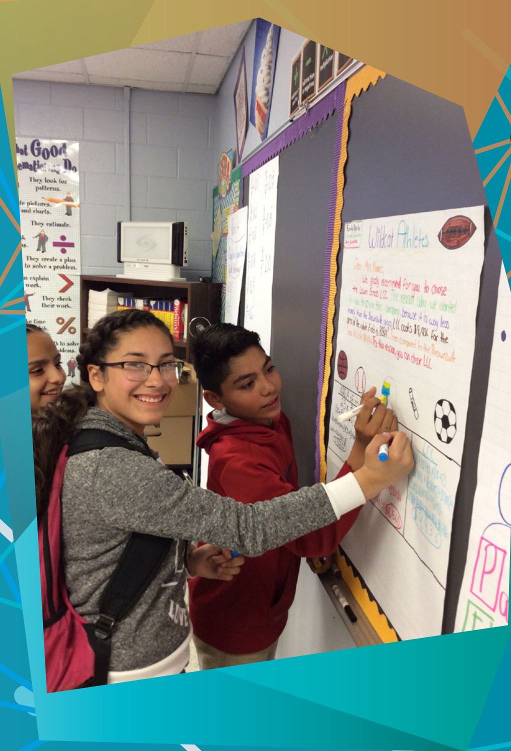
Rico, L. (2007). *La competencia matemática en PISA. PNA 1*(2), 47-66.

Schoenfeld, A. (1989). La enseñanza del Pensamiento matemático y la resolución de problemas. En: Currículum y Cognición. Resnick, L. Klopfer, L. (Compiladores) Editorial Aique. Argentina.

SECCIÓN 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS





DIVERSAS INTERPRETACIONES DE LAS FRACCIONES

DIFFERENT INTERPRETATIONS OF FRACTION

Yaneth Josefina Ríos García
Universidad del Zulia. Facultad de Humanidades y Educación. (Venezuela)
yanriosgarcia@gmail.com

Resumen
En la formación del docente juega un papel importante considerar los contextos para la enseñanza de los contenidos matemáticos pues como lo afirman Skovsmose y Valero (2007), la Matemática es una herramienta de transformación de la realidad. Partiendo de esta premisa se diseñó este taller para los participantes con dos propósitos: identificar contextos propicios para la interpretación de las fracciones en sus diferentes formas, y establecer diferencias y relaciones entre las diversas interpretaciones del concepto de fracción. La metodología aplicada fue la resolución de problemas donde se manifestaron las seis interpretaciones de las fracciones: parte todo, cociente o división indicada (reparto), razón, operador, medida y conteo. Los participantes manifestaron dificultades en identificar algunas interpretaciones así como las relaciones entre ellas.

Palabras clave: interpretaciones, fracción, formación de docentes

Abstract
In teacher training plays an important role to consider the contexts for the teaching of mathematical contents, as stated by Skovsmose and Valero (2007), Mathematics is a tool for transforming reality. Based on this premise, this workshop was designed for the participants with two purposes: to identify propitious contexts for the interpretation of the fractions in their different forms, and to establish differences and relationships between the different interpretations of the fraction concept. The methodology applied was the resolution of problems where the six interpretations of the fractions were manifested: part all, quotient or division indicated (distribution), ratio, measurement and counting. Participants expressed difficulties in identifying some interpretations as well as the relationships between them.

Key words: interpretations, fraction, teacher training

Introducción

En este taller consideramos que la enseñanza de cualquier contenido matemático debe partir de situaciones de contexto (reales), incluyendo las fracciones. En este sentido nos apegamos a la Educación Matemática Realista la cual parte del supuesto que la Matemática es un organizador que permite comprender la realidad (Puig, 1997); por otro lado, desde la Matemática Crítica se afirma que la Matemática es una herramienta de transformación de la realidad (Skovsmose y Valero, 2007).

Muchos investigadores consideran que los fenómenos (esencia de lo que se describe en la situación real), asociados a un concepto matemático, deben ser extraídos de la vida cotidiana, por lo que deben estar asociados al campo experiencial de los alumnos. En este sentido ¿cómo puede asegurarse que determinadas experiencias son usuales para determinadas personas y para otras no? Por ejemplo, si un alumno tiene claro el concepto de reparto (división equitativa) en los números naturales, le será fácil entender la noción de fracción como reparto; en este caso el concepto el concepto referido ya forma parte del campo experiencial de este alumno.

La situación descrita anteriormente tiene implicaciones didácticas. En este sentido, las interpretaciones o significados o nociones de un concepto matemático se definen en función del contexto donde se emplea el concepto del fenómeno al cual hace referencia. El uso adecuado de las interpretaciones tiene implicaciones en la enseñanza, pues para lograr desarrollar los procesos cognitivos y aumentar la capacidad cognitiva, es determinante que se exhiban una variedad de significados del mismo concepto. Las diversas interpretaciones de un concepto matemático cualquiera se complementa, y muestran diversos aspectos de él con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros.

La fracción es un concepto que cumple lo descrito anteriormente, pues su significado depende del contexto en el cual se manifieste. Debido a esto, se producen obstáculos en su enseñanza y aprendizaje, asociados estos a las diversas nociones que se manifiestan en los diversos contextos donde se aplica este concepto. Así pues, en este taller se presentaron y reflexionamos sobre seis fenómenos e interpretaciones asociados a la fracción, los cuales se denominan: parte todo, cociente o división indicada (reparto), razón, operador, conteo y medida.

Es importante que los aprendices conozcan las diferentes interpretaciones o nociones asociadas al concepto de fracción, pues esto les ayudará resolver problemas que requieran de este conocimiento. Pero no es suficiente con que las conozcan, también es importante que las relacionen pues esto permite una mayor comprensión del concepto de fracción (Llinares y Sánchez, 2000).

El estudio en este taller de los significados de la fracción se complementó con un repaso de algunos conceptos claves para el desarrollo del tema, entre ellos, los elementos de una fracción, lo referido a cómo se escriben y se leen las fracciones, los tipos de totalidades que pueden fraccionarse y los tipos de fracciones.

Fundamentos teóricos

En la Matemática tenemos algunos conceptos matemáticos que son preservados en las Matemáticas Escolares y otros son transformados. El concepto de fracción entra en el segundo rubro, pues en el universo Matemático, el concepto asociado a la fracción es el número racional y en el mundo de las Matemáticas Escolares el concepto asociado al número racional es la fracción. Estas relacionales las explica Freudenthal (1983) a través de la fenomenología de un concepto matemático que, según él, la constituye los fenómenos para los cuales dicho concepto es un medio de representación y organización. En este sentido, la fracción es el recurso fenomenológico del número racional.

La fracción está asociada a múltiples significados, por ejemplo la concepción que se maneja al repartir tres pizzas en partes iguales, entre cuatro amigos, es diferente a la de predecir la probabilidad de que llueva en tres días conociendo el record de lluvia de los últimos cuatro días (suponiendo que llovió en tres días de los cuatro); asímismo usar nueve huevos de un cartón de una docena es muy diferente a cortar los tres cuartos de una torta; o usar 0,75 metros de tela para hacer un short es diferente a establecer que la altura de un objeto es ¾ la altura de otro objeto. Como podemos observar, estos significados varían en función de los contextos en los cuales se encuentra inmersa la fracción; estas nociones nos permiten hacer una organización y clasificación de los contextos en los cuales se aplica la fracción. La reunión de estas clases de contextos constituye los fenómenos asociados al número racional.

En este sentido Freudenthal (1983) nos plantea que todo docente debe hacer el estudio de los fenómenos asociados a cualquier concepto o estructura matemática, a lo que denomina análisis fenomenológico, lo que define como la descripción de los fenómenos asociados a los conceptos matemáticos, así como la relación que existe entre ellos (Puig, 1997; Segovia y Rico, 2001).

Esta diversidad de significados asociados a cualquier concepto matemático implica problemas en su aprendizaje y por ende, en su enseñanza. Mancera (1992) al respecto hace un estudio de las diversas interpretaciones, significados o concepciones que ha tenido el concepto de fracción a lo largo del tiempo; estas se exponen a continuación:

a) Dienes (1972) considera dos concepciones: estados de comparación y como operador.
b) Kieren (1976) refiere las concepciones de cociente (numeración decimal) y razones de enteros. El mismo autor en 1981 redefine su clasificación y establece cuatro subconstructos: medida (relación parte – todo), razón, división indicada y operador.
c) Rasimba–Rajón (1982) estudia métodos de medidas: conmensuración y fraccionamiento.
d) Behr, Lesh, Post y Silver (1983) establecen siete subconstructos: medida, razón, tasa, cociente, coordenada lineal, decimal y operador.
e) Freudenthal (1983) realiza las siguientes interpretaciones: operador, parte todo, razón externa, razón interna, medida no exacta, operador inverso de la multiplicación y decimal.
f) Ohlsson (1988) considera las siguientes: razón, partición y operador o función.
g) Mancera (1992) establece los siguientes significados con diferentes subcontructos: cociente o parte todo (partición, extracción, disminución y cociente cartesiano); números racionales (fracción y medida); vectores binarios (razón, cantidades intensivas, proporción y rapidez); y funciones compuestas (operador).
h) Linares (2000) refiere las nociones de parte todo, medida, cociente, razón y operador asociadas a la fracción.

En este taller se consideraron seis interpretaciones (Ríos 2001, 2008, 2010). A continuación, se explicará cada una:

Interpretación de la fracción como parte todo (la más usual).

La fracción bajo esta interpretación hace referencia a la relación entre un número determinado de partes, y todas las partes congruentes en que ha sido dividida la unidad. Pudiéramos decir también que la fracción es una parte del todo.

Interpretación de la fracción como cociente o división indicada (reparto)

Esta noción hace referencia a repartir algo en partes equitativas, donde el resultado del reparto no es entero. En este sentido existen dos tipos de respuestas ante situaciones de reparto equitativo asociadas a la división de números enteras: aquellas donde el *cociente* o resultado de la división puede ser expresado como número decimal (por ejemplo: repartir 4 metros de tela para hacer 5 shorts; se utiliza para cada short 0,75 ó ¾ m de tela); y las respuestas donde el cociente no puede ser expresado como número decimal sino como una fracción (por ejemplo, al repartir 3 barras de chocolate entre cuatro niños a cada uno le toca ¾ de una barra de chocolate). A esta última noción la llamaremos *división indicada.*

Interpretación de la fracción como razón

Según Andonegui (2006), toda razón expresa la relación (comparación) entre las cantidades de una misma magnitud o de magnitudes diferentes. La razón permite comparar totalidades diferentes (la razón entre los miembros de dos secciones de un colegio es de 20:25 ó 25:20), partes diferentes de una misma totalidad (la razón entre mujeres y hombres en una reunión es de 2:3), partes con totalidades (en una reunión la cantidad de mujeres representan los 2/5 de la cantidad de personas) y totalidades con partes (la razón entre la cantidad de personas y los hombres es de 5:2). Cuando se compara una parte con la totalidad estaremos en presencia de la fracción; en los otros tres casos estaremos refiriéndonos a una razón cualquiera. En los ejemplos colocados, el segundo es la fracción.

Interpretación de la fracción como operador

La fracción puede ser interpretada como el orden de ejecución de dos operaciones sobre una totalidad discreta (Bernard, 1972). Nos referimos a la multiplicación y la división, y dependiendo del orden en que se apliquen las dos operaciones, se tienen dos procedimientos. Si primero aplicamos la división y luego la multiplicación, podemos determinar los ¾ de 20 como se indica en la tabla 1:

Tabla N° 1: Secuencia división – multiplicación asociada a la noción de operador

$\mathbf{20}$	$\xrightarrow{\div 4}$	$\mathbf{20 \div 4 = 5}$	$\xrightarrow{\times 3}$	$\mathbf{3 \times 5 = 15}$
Estado inicial	Operación de división	Estado intermedio	Operación de multiplicación	Estado final
↓	↓	↓	↓	↓
$\boldsymbol{Y}$	Operación intermedia	$\boldsymbol{Y \div 4}$	Operación final	$\boldsymbol{3 \times (Y \div 4)}$

Fuente: la autora

Ahora bien, si se aplica primero la multiplicación y luego la división, tenemos el siguiente esquema mostrado en la tabla 2

Tabla N° 2: Secuencia multiplicación - división asociada a la noción de operador

$\mathbf{20}$	$\xrightarrow{\times 3}$	$\mathbf{20 \times 3 = 60}$	$\xrightarrow{\div 4}$	$\mathbf{60 \div 4 = 15}$
Estado inicial	Operación de división	Estado intermedio	Operación de multiplicación	Estado final
↓	↓	↓	↓	↓
$\boldsymbol{Y}$	Operación intermedia	$\boldsymbol{Y \times 3}$	Operación final	$\boldsymbol{(3 \times Y) \div 4}$

Fuente: la autora

Interpretación de la fracción como conteo

El proceso de contar una determinada cantidad de objetos consiste en establecer una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los objetos y cada número natural, empezando por el número uno y continuando con los sucesores; la cantidad de objetos contados viene determinada por el último número natural que se asigne. La fracción, en estos términos, puede ser entendida como el número que resulta de contar una determinada cantidad de partes congruentes de una o varias totalidades.

Así, por ejemplo, el $\frac{4}{3}$ puede ser entendido como cinco veces un tercio. En referencia a este conteo, Andonegui (2006) expresa que las fracciones son las que denotan tantas veces la unidad fraccionada.

Interpretación de la fracción como medida

El proceso de medir algo consiste en determinar cuántas veces y/o qué cantidad de partes de una unidad patrón está contenida en lo que se desea medir. La fracción en este caso permite establecer exactamente las partes de la unidad patrón contenidas en lo que se mide.

Desarrollo

Este taller estuvo dirigido a cualquier docente en ejercicio que trabajase con sus alumnos las fracciones. En este sentido, algunos de los participantes manifestaron su interés de colaborar en este taller por dos razones: algunos son docentes en ejercicio, de primaria y secundaria, que ven con preocupación las dificultades y obstáculos que presentan sus alumnos a la hora de aprender los contenidos asociados a las fracciones; y otros docentes están realizando sus estudios de cuarto nivel, por lo que vieron en este taller la oportunidad de obtener insumos para sus trabajos de investigación.

La metodología aplicada en este taller fue la reflexión sobre las soluciones de diversos problemas matemáticos presentados y discusiones guiadas para la construcción de definiciones asociadas a las diversas interpretaciones de las fracciones.

A los participantes se les presentaron seis problemas para que los resolvieran; posteriormente algunos plantearon sus soluciones y mediante las discusiones guiadas se caracterizaron las interpretaciones de las fracciones aplicadas en cada solución, y luego se estableció un consenso para definir cada interpretación. Estos fueron los problemas presentados:

1. Una pizza fue dividida en cinco partes iguales, y me he comido 4 partes de las 5. Representa la situación gráficamente y numéricamente.
2. En un país se sabe que por cada cinco personas, tres son hombres. ¿Qué fracción representan los hombres de la totalidad? y ¿las mujeres?
    a. Si en el país hay un millón de habitantes, ¿Cuántos hombres y mujeres hay?
    b. Si en el país hay 630.000 hombres ¿cuántas mujeres hay?
    c. Representa las situaciones gráficamente y numéricamente.
3. Si una pared mide cuatro metros y otra mide cinco metros de altura. ¿Cuál es la medida de la primera pared con respecto a la segunda? y ¿cuál es la medida de la segunda pared con respecto a la primera? Representa la situación gráficamente y numéricamente.
4. Se tienen cuatro metros de tela y con ellos se pueden hacer 5 shorts. ¿Cuántos metros de tela se utiliza para cada short? Representa la situación gráficamente y numéricamente.
5. Se tienen cuatro pizzas y se quieren repartir entre cinco personas. Representa gráfica y numéricamente el proceso de repartición y lo que se comió cada quien.
6. Si mi sueldo es de $ 2.000 y en el mes he gastado los 4/5 de mi sueldo, ¿cuánto dinero he gastado? Representa la situación gráficamente y numéricamente.
7. Para preparar una mezcla con sodio (Na), potasio (K) y cloro (Cl) un Químico ha dividido sus componentes en fracciones de decilitros (un litro equivale a 10 decilitros), de manera que, si la receta señala que se deben

agregar 3 decilitros de sodio; él cuenta mientras realiza esta acción: “un decilitro de Na”, “dos decilitros de Na”, “tres decilitros de Na”. Representa la situación gráficamente y numéricamente.

Respuestas de los participantes

Problema 1

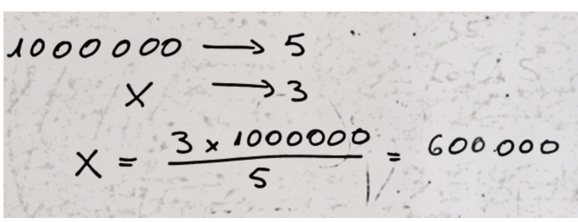
En el caso de las respuestas al primer problema, estas fueron uniformes, pues en todos los casos que se expusieron realizaron una representación gráfica utilizando una circunferencia o un rectángulo donde aplicaron la noción de *parte todo.* Estos resultados son coherentes con la revisión que realizaron Dickson et al. (1991) donde concluyeron que esta interpretación es la más sencilla y usual de todas.

Problema 2

Las respuestas para el segundo problema fueron más variadas. En la primera parte un docente manifiesta que la fracción de los hombres con respecto a la totalidad viene representada por la expresión 3:5. Al preguntarle por qué representa la fracción con los dos puntos manifiesta que eso es una *razón* y al preguntarles nuevamente si era una fracción, permaneció callado.

En este caso se presenta la dificultad de entender que se está hablando de una parte (los hombres) de la totalidad (5 personas); también otra dificultad es el tipo de totalidad que se trabaja en este problema, la cual es discreta (personas) en contraposición con la que se presenta en el primer problema que una unidad continua (la pizza). Como lo reseña Llinares y Sánchez (2000), la totalidad discreta permite asociar la noción de razón con la de operador, propiedad que fue utilizada en la solución de este problema en particular.

Para la segunda parte del problema donde se establece que la totalidad es de un millón de personas, dos docentes lo resolvieron por dos procedimientos: utilizando la regla de tres y utilizando la noción de operador, como se puede observar en las imágenes 1 y 2.



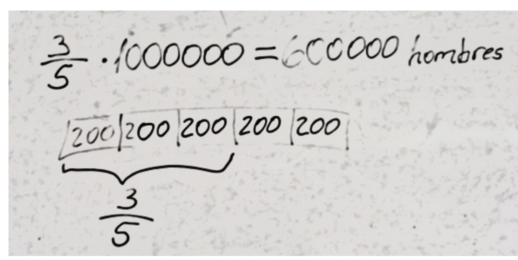


Imagen 1 y 2: Soluciones de la segunda parte del problema 2**.** Fuente: la autora

Al indagar por qué aplicaron la regla de tres y la noción de *operador***,** las justificaciones son algorítmicas; el primer docente explica que aplica la regla de tres porque falta un dato de tres que da el problema, y el segundo docente aplica el operador (primero dividiendo y luego multiplicando) pues debe determinar la fracción de un cantidad. Es curioso observar que el segundo docente a pesar de hacer una representación gráfica de la situación, no lo relacionó con el algoritmo que aplicó, donde la totalidad de un millón fue dividida en 5 partes iguales de las cuales toma 3 partes.

En el caso de la regla de tres, otro docente logró asociarla a las fracciones equivalentes, donde planteó la igualdad $\frac{3}{5} = \frac{x}{1000000}$ y explicó que el millón contiene 200.000 grupos de 5 personas cada uno, por lo que se debe multiplicar

200.000 por 3 para determinar la cantidad de hombres del país. Al preguntarles a los docentes cuál es la relación entre la regla de tres y la igualdad planteada por el último docente, no hubo respuesta. Esta relación fue difícil reconocerla, pues se debe involucrar otro concepto asociado a la *razón* como es el de proporcionalidad directa; este resultado es cónsono con el encontrado por Ríos (2008) donde los docentes en formación no establecen relaciones entre la regla de tres, razón y proporcionalidad directa, donde se concluye que hay obstáculos en establecer relaciones entre los contenidos procedimentales y conceptuales.

En la tercera parte del problema un docente aplicó la noción de *operador* confundiendo los elementos de la razón dada, donde la totalidad la entendió como la cantidad de hombres dados (parte de la totalidad) como dato del problema, como se observa en la imagen 3

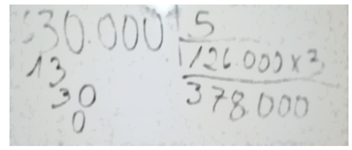


Imagen 3: Solución de la tercera parte del problema 2.
Fuente: la autora

Problema 3

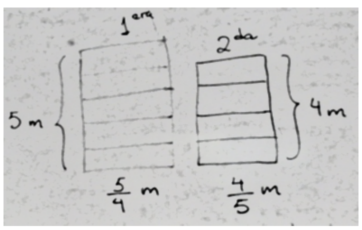


Imagen 4: Solución del problema 3.
Fuente: la autora

Un docente establece la respuesta correcta como se indica en la imagen 4 y reconoce que la noción aplicada es la de *medida*. Se le preguntó cuál es la unidad patrón utilizada en ambos caso. Para el caso de la segunda pared fue inmediata la explicación, no así la primera pared. Quizás la dificultad se debió a que la fracción era impropia, lo cual evidencia que la noción de parte todo es inadecuada para resolver esta parte del problema.

Problema 4

Un docente resolvió el problema utilizando la noción de *reparto* como se indica en la imagen 5.
Otro docente explica que esta forma de repartir es inadecuada pues una costurera no puede hacer cada short con retazos de tela pues se vería "muy feo", los pedazos de tela tendrían que coserse y quizás la tela no alcanzaría por los dobleces al coser los pedazos, además agrega que esta solución es apropiada para el problema 5; al preguntársele cómo sabe esto, el docente responde que sabe algo de costura.

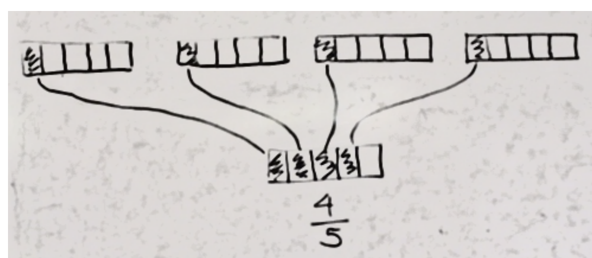


Imagen 5: Solución del problema 4. ***Fuente:*** la autora

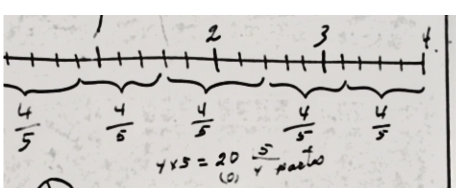


Imagen 6: Otra solución gráfica del problema 4.
Fuente: la autora

En este caso es interesante observar como las experiencias previas de los docentes en el ámbito personal contribuyen a determinar la respuesta adecuada.
El mismo docente realiza una representación asociada a la recta numérica, como podemos observar en la siguiente imagen 6.
El docente explica que cada metro de tela se divide en 5 partes, por lo que se tienen 20 partes en total y luego al hacer la división (reparto) entre los 5 short, cada short le corresponde los 4/5 metros de tela; en este caso el docente aplica la noción de *división indicada*. Otro docente complementa explicando que igualmente se puede usar la noción de *cociente*

considerando que cada metro tiene 100 centímetros, por lo que a cada short le corresponden 75 cm. Como se muestra en la imagen 7.

Se reflexionó con los docentes sobre las dos secuencias de las operaciones asociadas a la noción de *operador*. En el problema 2 primero se dividió y luego se multiplicó, y en este problema se multiplicó y luego se dividió. En este sentido los docentes llegaron a la conclusión que el contexto es determinante para establecer la secuencia de las operaciones, situación que la Matemática considera equivalentes.

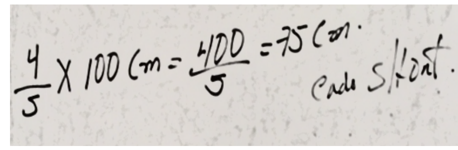


Imagen 7: Solución del problema 4 usando la noción de operador.
Fuente: la autora

Problema 5

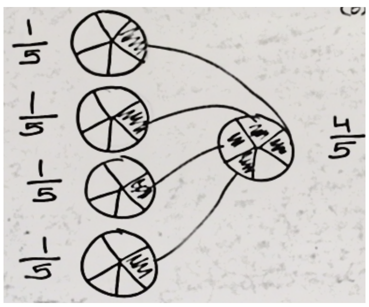


Imagen 8: Solución del problema 5.
Fuente: la autora

Un docente realiza la representación gráfica de la imagen 8. Como se puede observar se realiza una representación gráfica del *reparto* de la 4 pizzas. Se indagó sobre la diferencia entre este problema y el problema anterior. Los docentes concluyeron que en ambos casos se realiza un reparto, pero el resultado en un caso puede ser dado mediante una expresión decimal asociado a la noción de *cociente* y en el otro caso no, asociado a la noción de *división indicada.*

Problema 6

Un docente responde como se muestra en la imagen 9. Se observa que establece una relación entre la representación gráfica y la aritmética, donde la noción de *operador* permite interpretar la representación gráfica o esta última le da sentido a la interpretación de la fracción como operador. Al igual que en el problema 4 se hace hincapié en el orden de ejecución de las operaciones básicas; en este caso se realiza primero la división la cual permite establecer las partes equitativas en que se divide la unidad y luego se multiplica como lo indica el numerador. En esta oportunidad los docentes reflexionaron sobre los significados que tienen los elementos de fracción; como bien lo señalan Andonegui (2006) y Ríos (2010); el denominador etiqueta cada una de las partes divididas (en este caso son quintas partes) y el numerador las numera (son cuatro en este caso).

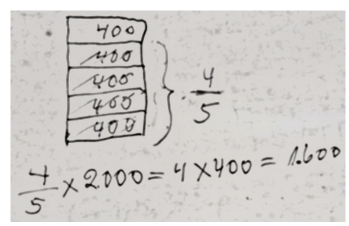


Imagen 9: Solución del problema 6.
Fuente: la autora

Problema 7

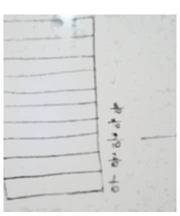


Imagen 10: Solución del problema 7- ***Fuente:*** la autora

Un docente resuelve el problema a través de la representación gráfica que se indica en la imagen 10 y al preguntarle que noción aplicó respondió que uso la interpretación de parte todo. Al respecto se le hizo la observación que en el problema se hace referencia a que el Químico ha fraccionado en decilitros el sodio de tal forma que cada decilitro puede ser contado, el docente manifestó no entender el planteamiento. El facilitador explicó que el Químico separó cada decilitro en diferentes envases, lo que permite contar cada uno; el docente realiza otra representación la cual se muestra en la imagen 11, donde se observa el conteo de los 3 decilitros. Al respecto, los elementos de la fracción permiten entender la noción de conteo como señalan Andonegui (2006) y Ríos (2010), donde el numerador permite en este caso contar, al igual que lo hacen los números naturales, objetos; en nuestro caso se cuentan partes de la totalidad, donde las partes son definidas por el denominador de la fracción.

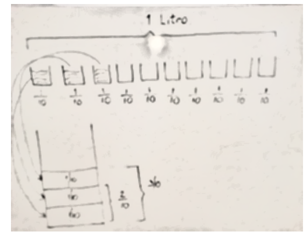


Imagen 11: Solución 2 del problema 7.
Fuente: la autora

Conclusiones

En el taller se pudo observar que los docentes aplicaron todas las interpretaciones de la fracción en la resolución de problemas. En algunas oportunidades se evidenció que ellos establecieron relaciones entre ellas de forma natural, como apoya Llinares y Sánchez (2000); esto se pudo distinguir específicamente en las relaciones entre las nociones de parte todo y operador, donde utilizando las representaciones gráficas sobre unidades discretas lograron comprender que la secuencia división – multiplicación, permite primero dividir en partes iguales la totalidad discreta y luego seleccionar a través de la multiplicación algunas de estas partes.

En el caso de los problemas con las unidades discretas (problemas 2 y 6), la interpretación utilizada en primera instancia fue la de operador, posteriormente se observó que en el problema 2 la solución podía asociarse a la razón utilizando el concepto de proporcionalidad directa. Los problemas 4 y 5 les sirvieron de puente para distinguir dos constructos asociados a la noción de reparto, estos son el cociente y la división indicada. El problema 6 les permitió a los docentes reafirmar la noción de medida y su relación con la fracción; y a través del problema 9 lograron repasar la noción de conteo y su relación con la fracción.

En el cierre del taller los docentes concluyeron que cuando se trabaje con las fracciones ellos deben hacer hincapié en el uso de las totalidades continuas y discretas pues a su parecer ambas totalidades permiten descubrir propiedades diferentes de la noción de fracción. Esto es apoyado por los resultado de Piaget (1960) y Payne (1976, ambos autores citados por Llinares y Sánchez (2000), donde se explica que ambas totalidades permiten establecer propiedades de estas en cuanto a la cantidad, cualidad y relación de las partes con el todo, propiedades que permiten estudios posteriores relacionados con las fracciones como lo son la equivalencia, el orden y las operaciones.

Los tipos de totalidades también, como lo manifestaron los docentes, pueden servir de puente para relacionar las diferentes interpretaciones de las fracciones y pudieran orientar el trabajo en aula de las mismas. En este sentido, la unidad continua permite trabajar las nociones de parte todo, reparto, medida y conteo; por ejemplo, como se observó en el problema 4 que permitió trabajar las interpretaciones de parte todo, reparto y medida simultáneamente. Por otro lado, la totalidad discreta permite trabajar las nociones de razón y operador; por ejemplo, en el problema 2 se trabajaron ambas nociones.

Otra conclusión obtenida por los participantes se refirió al uso de las diversas representaciones externas (oral, gráfica, aritmética, simbólica) en los procesos de enseñanza aprendizaje de las fracciones, donde a su parecer ayudan el paso de situaciones concretas a niveles más formales. Esto es apoyado por Ríos (2008 y 2010) donde las representaciones gráficas de la fracción permiten justificar varios algoritmos asociados a la fracción, logrando así su comprensión. En el mismo orden de ideas, esta conclusión es apoyada por unos de los principios de la Matemática Realista denominado principio de los niveles donde, a través de la matematización vertical, el aprendiz puede transitar por los diferentes niveles de aprendizaje acotados por Gravemeijer (2002, citado por Bressan, 2004) pasando del conocimiento de una situación concreta a la construcción de modelos que le permitan hacer abstracciones mediante los procesos de reflexión y generalización usando para ello la diversidad de notaciones convencionales. Por otro lado, las diversas representaciones externas, como lo señala Ríos (2010), son mediadoras entre la situación empírica y el conocimiento matemático, lo que se asocia con los procesos de modelación matemática por parte del aprendiz.

Asímismo, el uso de varias representaciones externas asociadas a un mismo concepto por un lado, contribuye al desarrollo de las competencias comunicativas del que aprende (Andonegui, 2006; Castro y Castro, 1997; Ríos, 2008) y por otro lado, interviene en la creación y comprensión de los conceptos matemáticos; esto último se debe a que las representaciones externas se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros (Blázquez y Ortega, 2001).

Referencias

Andonegui, M. (2006). Fracciones: concepto y representación. Serie: *Desarrollo del pensamiento matemático.* Número 6. Caracas: Fe y Alegría. Recuperado de http://publicaciones.caf.com/media/1209/61.pdf

Bernard, C. (1972). *Las fracciones*. Madrid: Editorial Teide.

Bressan A., Zolkower B. y Gallego M. (2004). I parte: La educación Matemática realista. Principios en que se sustenta. *Memorias de la Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática*. Recuperado de http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoria_EMR-Final.pdf

Blázquez S. y Ortega T. (2001). Sistemas de representación en la enseñanza de límite. *Revista Relime. Volumen 4. Número 3*. Noviembre. pp: 100-120

Castro E. y Castro E (1997). Representaciones y Modelización. En M. Socas (Ed). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (p. 95-124). Barcelona: Horsori.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Editorial Labor S.A.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomelology of Mathematical Structures.* The Netherlands: D Reidel Publishing Company.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (2000). Las fracciones. *Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Número 4.* Madrid. Editorial Síntesis.

Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática, 4*(2), pp. 30-54. Recuperado de: http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-4.pdf

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En M. Socas (Ed). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (p. 61-94). Barcelona: Horsori.

Ríos, Y. (2001). *Algunos tópicos sobre la enseñanza de las fracciones*. Trabajo de ascenso para optar a la categoría de agregado. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Ríos, Y (2008). *Las fracciones: sus representaciones externas e interpretaciones*. Tesis Doctoral. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Ríos, Y (2010). *Los organizadores didácticos asociados a las fracciones.* Trabajo de ascenso para optar a la categoría de titular. Facultad de Humanidades y Educación. Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Segovia I. y Rico L. (2001). "Unidades didácticas. Organizadores". En Castro, E. (Editor) *Didáctica de las Matemática en la Educación Primaria*. Síntesis. España.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2007). Educación Matemática y justicia social: hacerle frente a las paradojas de la sociedad de la información. En J. Jiménez, J. Díaz–Palomar y M. Civil (Coords.). *Educación Matemática y exclusión*. Editorial Graó. Barcelona.

DISEÑO EVALUACIONES INTERACTIVAS EN EDUCACIÓN SUPERIOR Y NIVELES PRECEDENTES

DESIGN OF INTERACTIVE EVALUATIONS IN HIGHER EDUCATION AND PRECEDING LEVELS

John Jairo García Mora, Sonia Jaquelliny Moreno Jiménez
Instituto Tecnológico Metropolitano (Colombia)
jogalaxyhn@gmail.com, jaquemj24@gmail.com

Resumen
Desde la óptica del docente, en el ecosistema educativo regido por las Tecnologías de la Información y la Comunicación, se hace necesario ofrecer diversas alternativas de evaluación para el proceso de enseñanza y aprendizaje incluyendo estas mismas en el nivel universitario y en los niveles precedentes. Orientar a docentes en el diseño de evaluaciones interactivas bajo la metodología del taller ha permitido a docentes nuevos y expertos sin conocimientos previos en HTML (Hyper Text Marcup Languaje File) en su versión 5 crear actividades interactivas de tipo evaluativo que faciliten a sus estudiantes el conocimiento de nuevas actividades de aprendizaje y se diviertan realizando una prueba. Los diseños de las evaluaciones interactivas se realizan empleando la herramienta de autor Descartes-JS que permite la modificación de plantillas existentes en formato HTML 5. El resultado del taller se evidencia con objetos web unidos que permiten la interacción del estudiante con su evaluación y le brindan a éste retroalimentación inmediata.

Palabras clave: evaluación, interactividad, formato HTML 5.

Abstract
From the perspective of the teacher, in the educational ecosystem governed by Information and Communication Technologies, it is necessary to offer several evaluation alternatives for the teaching and learning process, including these at the university level and at the preceding levels. Guiding teachers in the design of interactive assessments under the methodology of the workshop has allowed new teachers and experts without prior knowledge in HTML (Hyper Text Marcup Language File) in its version 5 create interactive activities of an evaluative type to facilitate their students' knowledge of new learning activities and have fun doing a test. The designs of the interactive evaluation are made using the author tool Descartes-JS that allows the modification of existing templates in HTML 5 format. The result of the workshop is evident with united web objects that allow the interaction of the student with his evaluation and provide him with this immediate feedback.

Key words: evaluation, interactivity, HTML 5 format.

Introducción

La evaluación estandarizada que caracteriza a las denominadas pruebas de estado tiene como propósito establecer si los estudiantes de determinado nivel educativo o programa han alcanzado o no dichas pruebas, y en qué grado las competencias específicas de su curso. A través de las pruebas se le presenta a los estudiantes determinada situación y ellos deben tomar la decisión de acuerdo con su conocimiento y elegir la respuesta adecuada.

Según expresa Mosquera este tipo de pruebas no miden la calidad de la educación ya que elegir la respuesta adecuada es un proceso que está definido por tres situaciones: "… primero lo que se enseña en la escuela, segundo la capacidad intelectual innata del estudiante, y tercero el aprendizaje del estudiante fuera de la escuela" (2018, p.48).

Hay que mencionar además que en Colombia la ley 1324 del año 2009, establece dos exámenes con los que se pretende medir la calidad de la educación

a. Exámenes para evaluar oficialmente la educación formal impartida a quienes terminan el nivel de educación media; o a quienes deseen acreditar que han obtenido los conocimientos y competencias esperados de quienes terminaron dicho nivel.

Esta prueba como lo reza claramente el artículo 7 de la ley citada se realiza al finalizar los niveles precedentes a la Educación Superior. Con respecto al nivel superior el decreto establece que:

b. Exámenes para evaluar oficialmente la educación formal impartida a quienes terminan los programas de pregrado en las instituciones de educación superior. (Colombia; Congreso de la Republica, 2009, p.3)

Sin embargo, el ecosistema educativo generado por las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) le exige al docente adentrarse en el denominado U-Learning (Ubicuos Learning) según lo expresa Ezkauriatza "El termino U-Learning (Ubiquitouslearning) o Aprendizaje-Ubicuo que también se puede describir con el término de aprendizaje-omnipresente, como parte del aprendizaje constructivista" (2011, p.11). El termino agrupa las diferentes tecnologías y a los aspectos pedagógicos de la enseñanza y el aprendizaje a través de diversos medios tecnológicos y la evaluación no puede quedar fuera de este contexto, y por ello se hace necesario diseñar la evaluación desde diferentes ópticas con el apoyo de las TIC.

El taller "Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes" se estructuró para ser elaborado por docentes sin ningún conocimiento en la elaboración de documentos y/o programación en formato HTML (HyperText Markup Language), lenguaje básico para la denominada triple W (World Wide Web). El formato HTML 5 es la última versión de este lenguaje de programación, las plantillas que se intervienen en el taller fueron elaboradas con este lenguaje.

Marco referencial

En Colombia, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación-ICFES- realizó un estudio donde

> la literatura nacional e internacional y de los estudios que abordan el conocimiento profesional del profesor, considera el perfil del docente, sus cualidades, funciones y competencias, y conlleva a pensar en la complejidad de lo que significa, lo que debe saber y saber hacer un docente que adquiere un compromiso social y cultural desde la educabilidad (ASCOFADE, 2017, p. 11).

De los saberes que se agrupan destacamos tres, no más importantes que los otros diez, pero es aquí en estos saberes en donde el taller “Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes” ha de contribuir a la cualificación del docente universitario y del docente de los niveles que preceden al nivel educativo superior:

- Saber monitorear y evaluar el progreso del estudiante.
- Saber organizar y desarrollar ambientes de aprendizaje.
- Saber emplear apoyos tecnológicos para potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Desde la teoría del Conectivismo como gestor del aprendizaje en la era digital, el taller “Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes” brinda a los docentes, independientemente de su saber especifico, las bases para que diseñen evaluaciones interactivas ya sea para evaluar competencias genéricas e incluso, para las competencias específicas del saber que transmiten, los ejes fundamentales del aprendizaje para la vida de sus estudiantes donde las TIC han preparado un camino hacia un nuevo paradigma educativo democrático, buscando más el aprendizaje que la enseñanza y los sistemas evaluativos no pueden desligarse de ese ecosistema educativo.

El taller “Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes” se diseñó para ser elaborado por docentes sin ningún conocimiento para la elaboración de documentos y/o programación en formato HTML (HyperText Markup Language), el lenguaje básico para triple W (World Wide Web). El formato HTML 5 es la última versión de este lenguaje de programación, las plantillas que se intervienen en el taller fueron elaboradas con este lenguaje. Así mismo inmersos en las páginas web aparecen los videos educativos, definidos como aquellos que están elaborados

> con una clara intencionalidad instructiva, tiene unos objetivos educativos perfectamente definidos y el desarrollo de los contenidos, seleccionados y organizados en función de sus destinatarios y de la tipología del vídeo, se realiza de manera progresiva y sistemática. Además, y especialmente si es un vídeo tipo lección, contempla el uso de abundantes recursos didácticos (organizadores previos, resúmenes, preguntas, esquemas, ejemplos...), mediante los cuales despierta y mantiene el interés de los estudiantes y facilita la comprensión de los contenidos (Pere Marqués, 2001).

De acuerdo con lo anterior el video educativo interactivo es un material didáctico, que el profesor ha de utilizar en sus clases como una estrategia de enseñanza que le permita apoyar a los estudiantes en sus procesos de aprendizaje y en la construcción significativa de sus conocimientos.

Metodología

Considerando que “taller es un ambiente educativo en el cual la interacción con el conocimiento es también interactiva e intersubjetiva entre los participantes de manera que generan procesos individuales de cada uno de los participantes” (De Parra, Quintiaquez, & Basto, 2002, p.91) se ha diseñado la siguiente ruta de inmersión de estrategias y saberes:

1. Recorrido visual por el Objetivo Interactivo de Aprendizaje-OIA- producto del taller.
2. Orientación magistral sobre el diseño y edición de las plantillas a utilizar en Objeto Interactivo que cada docente asistente ha de realizar.
3. Dotar a cada docente asistente de la documentación necesaria para realizar diseños posteriores al evento.
4. Exposición magistral de creación básica y edición de páginas HTML 5 sin conocimientos acerca de la programación y diseño de este de documentos.

5. Descripción y edición con el editor de texto plano "Notepad ++".
6. Descarga de las plantillas a editar para el OIA a diseñar desde http://proyectodescartes.org/plantillas/index.htm

Diseños didácticos realizados en el taller

Las plantillas que intervienen en el taller "Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes" proceden de la página Web http://proyectodescartes.org/plantillas/ de la Red Educativa Digital descartes.

Didácticamente conocer el glosario propio de un saber permite su apropiación conceptual, el juego del ahorcado admite una aproximación al crucigrama sin llegar a explicitar su definición. La primera actividad fue editar la plantilla "Juego del Ahorcado" y para este diseño el tema propuesto fue la clasificación, líneas y puntos notables de los triángulos: Rectángulo, Acutángulo, Obtusángulo, Isósceles, Mediatriz, Mediana, Bisectriz, Altura, Ortocentro, Baricentro, Incentro y Circuncentro.

En la Figura 1 podemos observar el contenido descargado de la página web del proyecto Descartes que luego de ser descomprimida presenta la estructura de carpetas que aparece a la izquierda, a la derecha la plantilla editada.

Figura 1. Estructura de archivos y modelo de la plantilla "Juego del ahorcado"
Fuente. Creación propia de los autores desde la plantilla modificada

En la estructura de la plantilla pueden observarse cuatro carpetas y dos archivos en formato HTML como puede observarse en la figura, el ajustar la plantilla a las necesidades del docente se realiza editando el contenido existente del archivo indexb.html tal como se indica en la tabla, resaltando que una <etiqueta> es una sección del formato html5 que se cierra con </etiqueta>:

Tabla 1. Elementos de la plantilla "juego del ahorcado" modificada

Elemento de plantilla	*Contenido*		
Etiqueta de inicio	***<script type="descartes/vectorFile" id="datos/palabras.txt">***		
Titulo	'LOS TRIÁNGULOS'		
Cantidad de palabras	12		
Palabras	'ACUTÁNGULO' 'RECTÁNGULO' 'OBTUSÁNGULO' 'ISÓSCELES'	'ALTURA' 'MEDIANA' 'MEDIATRIZ' 'BISECTRIZ'	'ORTOCENTRO' 'CIRCUNCENTRO' 'BARICENTRO' 'INCENTRO'
Etiqueta final	***</script>***		

Fuente: Creación propia de los autores originada del archivo indexb.html de la plantilla *"juego del ahorcado"*

Entre comillas simples se escriben los textos que han de aparecer en la plantilla con letras mayúsculas, de no ser así la plantilla no funcionará. El número 12 que aparece en la parte inferior del título indica la cantidad de palabras del tema específico, de ellas en cada sesión del juego el script seleccionará aleatoriamente cinco de las que se describen en la tabla 1.

La segunda actividad evaluativa a modificar se describe como "plantilla n°1 de los vídeos interactivos en local", esto significa que el vídeo debe estar dentro de la carpeta "videos".

Empleado como recurso didáctico, el vídeo sirve tanto al docente para la comunicación de información y la orientación de procesos académicos en pro de la construcción de conocimiento los aprendizajes. A los estudiantes les puede servir para reforzar su conocimiento; ampliar información, buscar procedimientos alternativos, confrontar alternativas de respuesta, estudiar según su disponibilidad horaria apoyado en material con audio y video. Por ello, Bravo (1996) expresa que "el video educativo es el que cumple un objetivo didáctico…" Para ampliar este acercamiento al recurso podemos expresar que

> El uso del video en el aula facilita, por tanto, la construcción de un conocimiento significativo dado que se aprovecha el potencial comunicativo de las imágenes, los sonidos y las palabras para transmitir una serie de experiencias que estimulen los sentidos y los distintos estilos de aprendizaje en los alumnos. Esto permite concebir una imagen más real de un concepto (Federación de enseñanza CC, 2011, p.1).

Cada uno de los asistentes descarga a su gusto y acorde con su área de conocimiento un vídeo con licencia estándar de YouTube y a continuación procede a modificar dos archivos: el archivo indexb.html y el archivo ivideo.html.

En la figura 2 se aprecia la estructura de archivos de la plantilla y el resultado de la modificación realizada para orientar la actividad, en la tabla 2 y en la tabla 3 se describen las modificaciones realizadas en la plantilla para orientar el taller "Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes".

Figura 2. *Estructura de archivos y modelo de la plantilla "Vídeo interactivo en local". Fuente. Creación propia de los autores desde la plantilla modificada*

En esta plantilla se realiza la modificación desde tres contextos:

a) EL primer se ubica en la carpeta videos que aparece en la estructura de archivos de la plantilla. Al interior de esta carpeta se encuentra un vídeo de nombre "video1.mp4" el cual debe ser reemplazado por el vídeo con licencia estándar de YouTube descargado, se sugiere que conserve el mismo nombre, de no ser así es necesario intervenir el archivo "ivideo.html" así como se describe a continuación en el segundo ambiente:
b) Simplemente se reemplaza el texto "video1.mp4" por el nombre de nuestro video tal como aparece en la tabla 2.

Tabla 2. Elementos de la plantilla "Vídeo interactivo en local": archivo ivideo.html

Elemento de plantilla	Contenido
Etiqueta de inicio	*<div class="" id="descartes_d">*
Contenido a modificar	<video autobuffer id="video1" style="width:100%; height: auto !importante;"> <!-- URL del video preferíblemente en la misma ubicación con este archivo de código --> <source src="videos/video1.mp4" type="video/mp4"> <source src="videos/video1.ogv" type="video/ogg"> <source src="videos/video1.webm" type="video/webm"> <!-- Subtítulos para este vídeo -->
Etiqueta final	</video>

Fuente: Creación propia de los autores originada desde el archivo ivideo.html de la plantilla vídeo interactivo en local editada

c) El tercer momento de edición de la plantilla transcurre en el archivo "indexb.html" donde se han de intervenir los siguientes elementos que se describen en la tabla 3.

Tabla 3. Elementos de la plantilla "Vídeo interactivo en local": archivo indexb.html

Elemento de plantilla		Contenido
Sección 1	Etiqueta de inicio	<script type="descartes/vectorFile" id="textos/titulo.txt">
	'Título del vídeo'	'Tipos de matrices en Álgebra Lineal'
	Etiqueta final	</script>
Sección 2	Etiqueta de inicio	<script type="descartes/vectorFile" id="textos/segundos.txt">
	Segundos trascurridos desde el inicio del vídeo hasta cada pregunta	Intervalo 1 Intervalo 2 . . . Intervalo n
	Etiqueta final	</script>
Sección 3	Etiqueta de inicio	<script type="descartes/vectorFile" id="textos/preguntas.txt">
	• Escribir pregunta para cada intervalo de tiempo definido. • Escribir 5 opciones de respuesta para cada pregunta (siempre 5). • Escribir número de la opción correcta.	'¿Cuál de las siguientes matrices no existe?:' 'Matriz cuadrada' 'Matriz memorable' 'Matriz inversa' 'Matriz Lineal' 'Matriz identidad' 2
	Etiqueta final	</script>

Fuente: Creación propia de los autores originada desde el archivo indexb.html de la plantilla vídeo interactivo en local editada

Para orientar el taller "Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes" y con el objeto de no saturar el vídeo con preguntas, se establecieron cuatro intervalos de tiempo para suspender el vídeo y realizar las cuatro preguntas correspondientes, lo que indica que es necesario establecer igual número de interrogantes con el mismo formato del ejemplo anterior.

En los procesos de evaluación generalizada de los aprendizajes en la Educación Superior y los niveles precedentes existen básicamente las preguntas abiertas y las preguntas cerradas, para el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación "Las preguntas cerradas son aquellas que proponen una serie de respuestas posibles entre las cuales el evaluado escoge" (ICFES, 2013, p.9).

En el taller "Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes" no podía faltar la plantilla para el tipo de preguntas cerradas, en la figura 3 podemos observar el modelo de orientación diseñado y la estructura de archivos la plantilla "Selección múltiple-Múltiple respuesta"

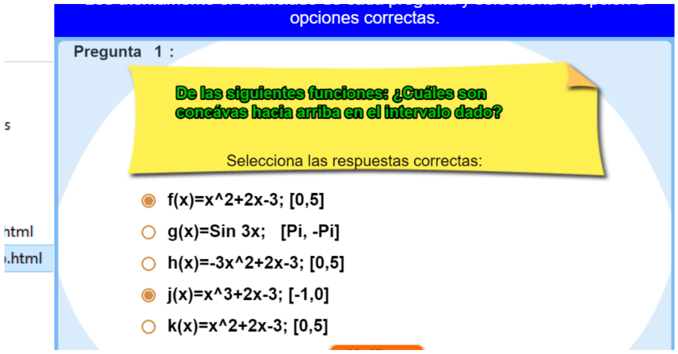


Figura 3. Estructura de archivos y modelo de la plantilla “Selección múltiple-Múltiple respuesta”.

De igual manera que las plantillas anteriores, se modifica el archivo indexb.html los scripts que se detallan a continuación en la tabla 4 según el modelo creado para orientar el taller “Diseño de evaluaciones interactivas en Educación Superior y niveles precedentes”:

Tabla 4. Elementos de la plantilla “Selección múltiple-Múltiple respuesta”: archivo indexb.html

Elemento de plantilla		Contenido
Sección 1	Etiqueta de inicio	<script type="descartes/vectorFile" id="textos/preguntas.txt">
	• Escribir número de preguntas • Escribir las preguntas	5 'De las siguientes funciones: ¿Cuáles son cóncavas hacia arriba en el intervalo dado?' 'De las siguientes funciones: ¿Cuáles son crecientes en el intervalo dado?' ‘Seleccione la(s) funciones con tangente decreciente en el intervalo dado’ '¿Cuáles de las siguientes funciones tienen tangentes horizontales?' 'Cuáles de las siguientes funciones tienen derivadas implícitas?'
	Etiqueta final	</script>
Sección 2	Etiqueta de inicio	<script type="descartes/vectorFile" id="textos/respuestas.txt">
	• Escribir las cinco respuestas de cada pregunta. • Asignar el valor binario de Falso (0) o Verdadero (1) a cada respuesta.	' $f(x) = x^2 + 2x - 3;$ [0,5]' '$g(x) = Sin\ 3x;\quad [\pi, -\pi]$' '$h(x) = -3x^2 + 2x - 3;$ [0,5]' '$j(x) = x$^3 $+ 2x - 3;$ [-1,0]' '$k(x) = x$^2 $+ 2x - 3;$ [0,5]' 1 0 0 1 0
	Etiqueta final	</script>

Fuente: Creación propia de los autores originada desde el archivo indexb.html de la plantilla Selección múltiple-Múltiple respuesta editada

Análisis de resultados

Además de las plantillas anteriormente descritas se modificaron las plantillas: “Test de respuesta escrita”, “Preguntas de Falso y Verdadero” y “Selección múltiple con única respuesta”.
Algunas de las plantillas ya habían sido utilizadas en diseños para el programa de Tecnología e Ingeniería Electromecánica del Instituto Tecnológico Metropolitano de la ciudad de Medellín y en la tesis de maestría “Análisis del rendimiento académico en el estudio de los límites de funciones de variable real con el apoyo de Objetos Interactivos de Aprendizaje-OIA- en la Universidad de Manizales en Colombia.

Cada uno de los docentes participantes modificó las plantillas acordes con su saber específico y se hizo énfasis en que es una excelente estrategia para el trabajo independiente de los estudiantes.

Conclusiones

En primer lugar, con la realización del taller se ha enfatizado que cuando el docente diseña actividades auto evaluativas como las realizadas con la adaptación de las plantillas descritas, se está trascendiendo en la evaluación acumulativa que debe incluirse en el proceso instruccional inmerso en el ecosistema creado por las TIC.

En segundo lugar, se estableció que no existen diseños mejores que otros, la utilidad de la plantilla editada depende en gran medida de los objetivos que se pretendan lograr y de las aplicaciones metodológicas que el docente aplique en su aula

Por último, la relación existente entre los objetivos aprendizaje y este tipo de recursos evaluativos está definida cuando se presenta una retroalimentación inmediata ya que promueve las capacidades sociales de los alumnos creando sana competencia con sus compañeros de aula.

Referencias bibliográficas

ASCOFADE. (2017). *Marco de referencia para la evaluación ICFES.* Bogota: Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes). Recuperado el 04 de enero de 2019 de www2.icfes.gov.co/docman/estudiantes-y-padres-de.../saber.../file?...

Colombia; Congreso de la Republica. (2009). Ley 1324. (pág. 9). Colombia: Congreso de la republica. Recuperado 30 de agosto de 2018 de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-210697_archivo_pdf_ley_1324.pdf

De Parra, N., Quintiaquez, G., & Basto, S. (2002). Integración para la enseñanza de la biología celular en en el programa de ecología. En C. Vasco U., Posmodernidad, ciencias y educación (pág. 172). Bogotá: Centro editorial Javeriano.

Ezkauriatza, M. G. (2011). *Trabajo colaborativo en la WEB: Entorno virtual de autogestion para docentes.* Palma de Mallorca: Universitat de les illes Balears (Departament de Pedagogía Aplicada i Psicologia de l’Educació). Recuperado el 04 de enero de 2019 de http://repositori.uib.es/xmlui/bitstream/handle/11201/2696/Guiza_Ezkauriatza_Milagros.pdf

Federación de enseñanza CC. (13 de 03 de 2011). *Temas para la educación: Revista digital para profesionales de la enseñanza.* Recuperado el 04 de enero de 2019 de https://www.feandalucia.ccoo.es/docu/p5sd8279.pdf

ICFES. (11 de 2017). *Marco de referencia. Ciencias de la Educación: Módulos de Enseñar, Formar y Evaluar.* Recuperado el 30 de agosto de 2018 de http://acreditacion.unillanos.edu.co/contenido/CapacitacionDocente2018IPA1/PRO.

Mosquera Albornoz, D. R. (2018). Análisis sobre la Evaluación de la Calidad Educativa en América Latina: Caso Colombia. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa, 13*. doi:https://revistas.uam.es/index.php/riee/article/view/9245

Pere Marqués, G. (2001). *La evaluación de los vídeos didácticos.* Recuperado el 05 de enero de 2019 de http://www.peremarques.net/videoav2.htm

UNA PROPUESTA DE ESTRATEGIAS PARA EL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA EN POBLACIONES CON DISCAPACIDAD VISUAL

A PROPOSAL OF STRATEGIES FOR THE STUDY OF GEOMETRY IN PEOPLE WITH IMPAIRED VISION

José Andrey Zamora-Araya, Rosibel Tatiana Vallejos-Brenes
Universidad Nacional de Costa Rica, Colegio Técnico Profesional de San Pablo de Barva (Costa Rica)
jzamo@una.ac.cr, rosibelvallejos@gmail.com

Resumen
El documento presenta un caso de estudio sobre diferentes estrategias metodológicas utilizadas en clases de geometría con una adolescente ciega que estudia en una escuela secundaria de Costa Rica. Se presenta un resumen de la normativa legal del país y de las principales dependencias gubernamentales que apoyan el trabajo de los educadores que atienden a estudiantes ciegos. El texto relata la experiencia de aula y los avances que la estudiante ha mostrado en la comprensión de conceptos y la resolución de problemas. El principal resultado fue que el uso de material concreto para enseñar temas de geometría facilitó la comprensión de los contenidos no solo de la estudiante ciega sino de todos los estudiantes de la clase.

Palabras clave: educación inclusiva, matemática educativa, geometría

Abstract
The paper presents a case study about the different methodological strategies, which the subject of geometry has been worked with, in mathematics classes. The study was carried out with a visually impaired adolescent who attends a Costa Rican secondary education institution. The study presents a summary of the legal regulations of the country and the existence of the main government agencies, which support the work of educators who teach blind students. The classroom experience is described, along with the advances that the student has shown in the understanding of concepts and problem solving in this subject. The main result showed that the use of specific teaching materials for geometry topics made easier the comprehension of contents, not only to the visually impaired student but also to all the students of the class.

Key words: inclusive education, educational mathematics, geometry

Introducción

En la actualidad, la educación, más que un servicio, debe ser vista como un derecho humano fundamental que le permite a las personas desarrollarse plenamente en una sociedad marcada por los constantes cambios tecnológicos. Es por ello, que se debe procurar brindar una educación inclusiva donde todos y todas puedan tener acceso, sabiéndose aceptados y desarrollando al máximo sus capacidades.

No obstante, existen grupos sociales -como las personas con discapacidad- que han visto cómo este derecho fundamental no siempre ha sido respetado o atendido de la mejor manera. Debido a esto, surge en la década de los 90's, la Declaración Mundial sobre Educación para Todos (1990), realizada en la ciudad de Jomtiem Tailandia, que pone de manifiesto los esfuerzos y problemas para satisfacer las necesidades básicas de aprendizaje de una gran parte de la población que vive en los países menos desarrollados, reconociendo a la educación como un derecho humano de todas las personas, siendo indispensable para el progreso personal y social. Además, aboga por la equidad de oportunidades educativas y la calidad de la educación, retomando lo estipulado por la Declaración Universal de los Derechos Humanos con respecto a la accesibilidad y obligatoriedad en los diferentes niveles educativos.

Además, en la misma década se firma la Declaración de Salamanca (1994), en la cual se pone énfasis en los derechos de las personas con necesidades educativas especiales, a la vez que aboga por sistemas educativos con una visión más inclusiva e integradora. Ya en este siglo, la ONU (2006), llevó a cabo la Convención Internacional sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad, en la que se menciona que todavía existe discriminación contra las personas con discapacidad y la existencia de barreras que limitan su participación en la sociedad en igualdad de condiciones. Específicamente, el artículo 24 del documento, insta a los Estados a implementar medidas que garanticen la posibilidad de hacer efectivo el derecho a la educación para las personas con discapacidad para que les permita participar en una sociedad libre; y por ello, entonces, promover la formación de docentes capacitados para atender las necesidades de esta población.

Los sistemas educativos deben propiciar alternativas para las personas con necesidades educativas especiales que no solo les permitan acceder al conocimiento disciplinar, sino que al mismo tiempo posibiliten la inclusión de estas personas en la comunidad educativa en un ambiente de respeto y solidaridad.

Es así como, el presente trabajo muestra las estrategias didácticas utilizadas para abordar el tema de geometría plana con una adolescente ciega de un colegio público de Costa Rica. Dichas estrategias se basan en el Aprendizaje Multisensorial (AM) y en la premisa de una educación inclusiva, en el contexto de la educación secundaria costarricense. La intención de este escrito es aportar ideas sobre la manera de cómo enseñar temas de geometría plana a estudiantes ciegos, esperando que las actividades aquí expuestas puedan representar una opción para docentes de matemáticas que requieren de alternativas para la enseñanza de personas con discapacidad visual.

Antecedentes

En varios países de Latinoamérica existe diversa legislación que vela por los intereses de la población con discapacidad visual. Con respecto a las investigaciones que abordan el tema, dentro de las más representativas están: a) la guía para la atención de estudiantes con discapacidad del Ministerio de Educación de Perú (2013), b) sistemas para graficar ejercicios y contenidos de matemática a alumnos ciegos de enseñanza media integrada en escuelas regulares, Cabello (2011) y c) herramientas para la enseñanza de la matemática a los ciegos (Fernández del Campo, 1998), entre otros.

En el caso de Costa Rica, en lo que respeta a adecuaciones visuales, se cuenta desde 1986 con la ayuda del Instituto Helen Keller; que tiene como objetivo ser una "institución líder en servicios de apoyo, ayudas técnicas, asesorías, capacitación e investigación en las áreas funcionales, educativa y laboral, tendientes a la generación y facilitación de condiciones para la igualdad de oportunidades de las personas con discapacidad visual". (Decreto Nº16831, 1986). Aquellos docentes que atienden poblaciones con algún tipo de discapacidad visual o sordera cuentan con la colaboración y apoyo de los educadores especialistas del instituto.

Asimismo, en las últimas décadas, el estado costarricense ha implementado políticas hacia una educación más inclusiva. Prueba de ello, es la Ley N° 7600 (1996), la cual aborda el tema de igualdad de oportunidades para las personas con discapacidad. Esta ley, busca garantizar el disfrute de iguales condiciones de acceso y participación, para el desarrollo integral de todas las personas en la sociedad. En el ámbito educativo la Ley N° 7600, busca que las personas con discapacidad alcancen su máximo desarrollo posible, en un ambiente de inclusión, de acuerdo con sus talentos y habilidades.

En este mismo sentido, en la Declaración de Salamanca (1994) se proclama que: "[…] el principio fundamental que rige a las escuelas es que todos los niños deben aprender juntos, siempre que sea posible" (p.11). Por ello, el Estado costarricense, consciente de la necesidad de llevar a cabo un proyecto que beneficie a la población con discapacidad, creó el Centro Nacional de Recursos para la Inclusión Educativa, órgano especializado para dar respuestas a poblaciones con discapacidad, y que mediante el Decreto Ejecutivo N°34206 (2007), se convierte en el Centro Nacional de Recursos para la Educación Inclusiva (CENAREC).

El objetivo primordial del CENAREC, es ser un ente del Estado que satisfaga las necesidades de los profesionales, padres de familia y estudiantes, a nivel de información, asesoría, capacitación e investigación, con el fin de repercutir en una mejor atención educativa de los estudiantes con necesidades especiales. De acuerdo con lo anterior, el docente que atiende ocasionalmente poblaciones con algún tipo de discapacidad, especialmente visual, cuenta con instituciones que ayudan en la obtención de materiales, mas no necesariamente, en la capacitación sobre estrategias metodológicas que le permitan brindar una educación acorde a las necesidades de esta población en tópicos específicos, pues la ayuda trata sobre temáticas generales.

Específicamente en el tema de geometría plana, existe poco desarrollo en cuanto a estrategias concretas para su estudio en la población ciega. Por ello, se considera oportuno proporcionar a los docentes de matemáticas algunas estrategias que pueden ser utilizadas para la enseñanza de la geometría plana con estudiantes que tienen discapacidad visual y que han mostrado ser efectivas con la estudiante cuyo caso se expone en este texto, que le han permitido potenciar los procesos de visualización, clasificación, construcción y argumentación en esta temática particular.

Marco referencial

Las estrategias propuestas en este trabajo tienen como base el aprendizaje multisensorial (AM), el cuál asume que los individuos aprenden mejor si utilizan para la enseñanza más de un sentido o modalidad, es decir, el AM es aquel aprendizaje que hace uso de varios sentidos a la vez (Carneiro, 2004). Los sentidos que usualmente son empleados en el AM son la vista, el oído y el tacto, aunque dependiendo del propósito de las actividades también pueden incluirse el olfato, el gusto y el balance (Bermejo, Fajardo & Mellado, 2002). El AM, en poblaciones con necesidades educativas especiales es de gran ayuda, pues es conocido que recordamos solo el 20% de lo que leemos, 30% de lo que oímos, 40% de lo que vemos, 50% de lo que decimos, 60% de lo que hacemos, pero hasta un 90% de los que vemos, oímos, decimos y hacemos, lo que hace del AM una herramienta muy importante en la enseñanza (Shams & Seitz, 2008).

El AM, busca una integración de los sentidos con el fin de comprender mejor los conceptos y, a diferencia de la teoría de los estilos de aprendizaje, no se centra o clasifica las actividades de acuerdo con un estilo particular de aprendizaje (auditivo, visual o kinestésico) sino que trata de incorporar dinámicas de clase donde se potencie el uso de los diferentes sentidos. Al respecto, varias investigaciones apoyan que es más probable que el cerebro humano haya evolucionado para procesar, aprender y operar de manera óptima en ambientes multisensoriales más que unisensoriales (Fredembach, Boisferon, & Gentaz, 2009; Shams & Seitz, 2008; Thelen, Cappe & Murray, 2012; Thelen, Matusz & Murray, 2014).

Con respecto al campo de la enseñanza, de acuerdo con García (2009), el propósito del AM es el entrenamiento de los sentidos para producir un desarrollo neurofisiológico sensorial, mediante dos alternativas: la adaptación de la información al canal de percepción sensorial más adecuado y, estar conscientes que muchos estímulos poseen información asociada que son percibidas de manera simultánea por varios sentidos. Otros autores como Prioretti (2016), señalan que en el aprendizaje hay que incluir a toda la persona y que los estudiantes en general aprenden mejor con presentaciones visuales, táctiles, kinestésicas e interactivas que con un carácter meramente auditivo.

A pesar de que un estudiante con discapacidad visual no se beneficia de la misma manera con todos los tipos de presentaciones de la información mencionadas, se pueden combinar métodos para adquirir un aprendizaje significativo, dando en el proceso el protagonismo al estudiante. Al respecto Prioretti, (2016), menciona que el aprendizaje multisensorial posee varios beneficios para el alumnado, entre ellos:

1. Todos los educandos pueden beneficiarse de las lecciones multisensoriales, incluyendo los estudiantes que no tienen dificultades de aprendizaje y de atención. Si el estudiante aprende algo usando más de un sentido, es mucho más probable que retenga la información. Usar todos los sentidos ofrece a estos estudiantes, muchas maneras de conectarse con lo que están aprendiendo.
2. El aprendizaje multisensorial puede ser particularmente útil para los educandos con dificultades de aprendizaje y de atención. Por ejemplo, ellos pueden tener problemas con el procesamiento visual o con el procesamiento auditivo. Esto les dificulta el aprendizaje, si tienen que depender solo basados en el sentido de la vista o el oído.
3. Este tipo de aprendizaje práctico puede facilitar a los estudiantes a:
    - Recolectar información
    - Hacer conexiones entre nueva información y lo que ya saben
    - Entender y resolver problemas
    - Utilizar habilidades no verbales para resolver problemas

Específicamente con respecto a los estudiantes ciegos, la guía para la atención de estudiantes con discapacidad visual (2013), menciona que entre sus necesidades están: la utilización de material que faciliten la participación en actividades en el aula, la interiorización de acciones que aseguran la autonomía personal, y la integración de la información procedente de experiencias multisensoriales. Asimismo, de acuerdo con estudios de neurociencias, mediante entrenamientos táctiles pasivos se puede generar experiencias visuales, las cuales permiten que las neuronas aumenten la conectividad de manera estable como consecuencia de la experiencia, el aprendizaje y la estimulación sensorial y cognitiva (Ortiz y Santos, 2012).

Con ayuda de la estimulación táctil pasivo repetitivo en personas ciegas, se busca el desarrollo de sensaciones visuales, para interpretar y procesar un determinado estímulo. Además, la estimulación táctil continua posee muchos beneficios para las personas ya que les permite conocer, manipular, representar e interiorizar una amplia gama de recursos que les posibilitan el desarrollo de la capacidad de abstracción.

Por ello, es que se utilizó este tipo de estimulación junto con algunas recomendaciones pedagógicas para enseñar el tema geometría plana a la estudiante, con el fin de que interiorizara de mejor manera los conceptos geométricos.

Metodología

Se realiza un estudio de caso con una joven que posee discapacidad visual (ceguera total) de 13 años, que ingresa en el 2017 al sétimo año de Educación General Básica en un colegio público de Costa Rica. Para Eisenhardt (1989), el estudio de caso resulta una estrategia de investigación adecuada que permite comprender las dinámicas presentes en contextos particulares y además se considera apropiado para comprender la forma en que la estudiante visualiza los conceptos geométricos.

Como parte de la atención requerida, se realizó un diagnóstico de las habilidades de la estudiante en el área de matemática que ayudó a describir y explicar su situación actual, con respecto a conceptos geométricos, obteniendo evidencias que sirvieron de punto de partida para el desarrollo de una serie de estrategias de enseñanza y aprendizaje, donde la estudiante pudo potenciar los procesos de visualización en el estudio de la geometría.

Posterior al diagnóstico, se realizaron observaciones participantes de aula donde se pusieron en práctica las estrategias didácticas que pretendían, por una parte la apropiación de conceptos geométricos en la estudiante ciega y, por otra, la inclusión más que la integración de la estudiante a las actividades de aula, de tal forma que participara activamente de las dinámicas de clase.

Asimismo, el estudio se enmarca en la perspectiva teórica del paradigma socio crítico, el cual posee un carácter auto-reflexivo al considerar que el conocimiento se construye a partir de los intereses y las necesidades de los grupos humanos (Alvarado & García, 2008). Al respecto, Godino (2010), menciona que es una corriente importante que considera la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje y potencia las estrategias de reflexión sobre la práctica por parte de los propios actores. Además, según (Alvarado & García, 2008), el paradigma socio crítico aplicado al ámbito educativo posee las siguientes características: a) la adopción de una visión global y dialéctica de la realidad educativa, b) la aceptación una visión democrática sobre el conocimiento, así como de los procesos involucrados en su elaboración y c) el supuesto de una visión particular de la teoría del conocimiento y de sus relaciones con la realidad y la práctica.

Como ya se mencionó, las técnicas usadas para la recolección de la información fueron la entrevista personal y la observación participante, las cuáles dieron insumos para valorar el progreso de la estudiante en cuanto a la visualización de los conceptos geométricos por medio de las estrategias y actividades propuestas.

Resultados

Con el fin de realizar un diagnóstico sobre las habilidades en el área de geometría, se entrevistó a la joven sobre las estrategias que utilizaba en la escuela primaria y comentó que los principales materiales utilizados eran los textos en escritura Braille, gráficos de figuras básicas (triángulo, cuadrado, círculo) en relieve. No obstante, no se mencionó el uso de herramientas adaptadas a su discapacidad como el compás, regla graduada, transportador o material concreto para representar objetos geométricos.

Esto, al inicio representó una limitación, pues la estudiante con discapacidad visual debe tener un tacto más sensible, esto lo desarrolla mediante la estimulación táctil repetitiva de objetos geométricos del entorno. Por lo tanto, fue necesario brindar una serie de actividades que ayuden a favorecer la adquisición de habilidades, como la manipulación de geoplanos, reglas plásticas, juego de geometría adaptado entre otros.

Es importante mencionar, que los conceptos geométricos desarrollados durante las clases responden al programa de estudios en el área de matemática vigente que de acuerdo con el MEP (2012), en el caso del nivel de sétimo año, corresponden a las siguientes habilidades:

1. Identificar en dibujos y objetos del entorno puntos, segmentos, rectas, planos, puntos colineales y no colineales, puntos coplanares y no coplanares.
2. Identificar y localizar el punto medio de un segmento.
3. Identificar y trazar rectas paralelas en diferentes contextos.

Con el fin de cumplir con lo propuesto en el programa de estudio, se brindaron estrategias de mediación pedagógica, bajo un enfoque de AM, que posibilitaron el desarrollo de las habilidades antes mencionadas en la estudiante ciega y en los demás estudiantes del nivel. Por ejemplo, a la hora de explicar en la pizarra la docente procuró verbalizar todos los procedimientos para la construcción de la representación geométrica de puntos colineales, segmentos, rectas, entre otras; pues en este caso el sentido (a falta del sentido de la vista) del oído es fundamental.

Al respecto, cabe destacar que autores como Andrade (2010), mencionan que no existe relación directa entre la ceguera y las dificultadas que puedan encontrarse en el aprendizaje de los contenidos propios del área de matemáticas. Sin embargo, en el área de la geometría, las limitaciones propias de la discapacidad visual que presenta una persona ciega son evidentes, especialmente cuando no cuenta desde sus inicios con el desarrollo de capacidades de organización y orientación espacial.

Con el objetivo de reconocer los conceptos geométricos básicos, a la estudiante se le proporcionó un geoplano, que sirvió como herramienta manipulativa para utilizar el sentido del tacto como apoyo a su aprendizaje de la temática (ver figura 1). De acuerdo con Morin (2014), el conocimiento del esquema corporal, un suficiente desarrollo de la lateralidad y cierta destreza manipulativa y de reconocimiento táctil serán prerrequisitos para iniciar el aprendizaje de la geometría.

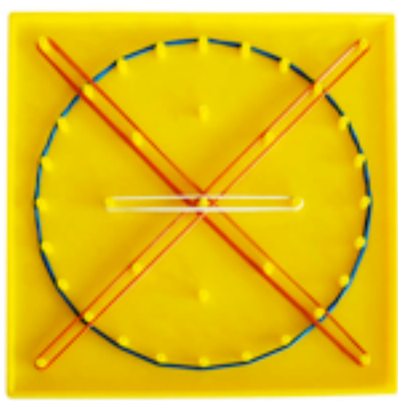


Figura 1. Geoplano

En este mismo sentido, se realizaron actividades con paletas de madera, con las cuáles formar figuras geométricas, representar el concepto de segmento, plano y punto medio, como se muestra en la figura 2. Esto con el fin de iniciar la introducción al estudio de la geometría plana, desde los conceptos más intuitivos hasta llegar a la visualización de rectas y puntos coplanares y no coplanares.

Figura 2. Juego de ángulos geométricos

Como lo menciona Andrade (2010), las personas con discapacidad visual tienen más de una manera de aprender. Por ejemplo, la enseñanza se puede dar de forma táctil, verbal, auditiva o kinestésica que, los estudiantes por su condición desarrollan al 100%. Los beneficios que tienen para las personas con discapacidad visual, el conocer, manipular, representar e interiorizar material didáctico son indudables. Esto potencializará el desarrollo de la capacidad de abstracción en la construcción de estrategias de resolución de problemas del entorno y la generación de aprendizajes significativos.

Por ejemplo, a la hora de explicar los conceptos geométricos de segmento, plano, puntos coplanares y no coplanares se utilizó material concreto como hojas de papel grueso, figuras tridimensionales (cubos, pirámides y esferas) donde se identifican puntos, segmentos y rectas pertenecientes a diferentes planos. Para el contenido de rectas paralelas, se trabajó con prismas rectos donde ella identificara segmentos paralelos y perpendiculares, y posteriormente se trabajó fuera del aula para que la estudiante palpara objetos que dieran la noción de rectas como barandas, cuerdas, bordes de aceras, etc.

Como parte del proceso de estimulación táctil repetitiva, se manipularon objetos con figuras geométricas de diferentes tamaños, formas (figura 3). El objetivo fue familiar a la joven con los implementos o formas geométricas en estudio, para que sean utilizados por la joven en el momento de clase de acuerdo con el tema en estudio.

Figura 3. Formas geométricas

Siguiendo con el proceso de aprendizaje multisensorial, durante las clases se trabajó con la estudiante el uso del juego de geométrica adaptado (figura 4), en ocasiones se requirió un trabajo diferenciado en clases adicionales, para que posteriormente la joven con discapacidad visual lograra plasmar los conceptos geométricos básicos, así como las relaciones entre ellos en conjunto con sus compañeros en el salón de clase.

Figura 3. Juego de geometría adaptado

Conclusiones

En un principio, el trabajo con material concreto fue pensado para realizarse únicamente con la estudiante ciega, sin embargo, las representaciones geométricas de las figuras que pueden manipularse con facilidad también ayudaron a una mejor comprensión de los conceptos al resto de estudiantes. Para la joven, el principal resultado obtenido fue un gran avance en la comprensión conceptual de los términos y de estructuras mentales que permitieron la resolución de ejercicios y problemas geométricos, estableciendo contactos estrechos entre representaciones mentales generadas por medio del tacto y las formas geométricas.

Con las actividades propuestas anteriormente, los estudiantes que presentan discapacidad visual pueden aprender los mismos contenidos que los demás estudiantes, pues poseen la capacidad de adaptarse y ser parte del entorno, siempre y cuando tengan los recursos y condiciones necesarias que les permitan ser incluidos como un estudiante más en el salón de clases, teniendo autonomía con respecto a su proceso de aprendizaje. No obstante, no es suficiente con disponer del material ya que es necesario capacitar al usuario en cuanto a su manipulación y uso, pues, por ejemplo, para que los instrumentos observados en la figura 4 cumplan con su función, la estudiante tuvo que pasar por un proceso de aprendizaje en cuanto al uso de dichos instrumentos y posterior a ello, utilizarlos para construir los conceptos vistos en clase.

Ahora bien, no cabe duda de los muchos beneficios que se obtienen de la aplicación de estas propuestas, a nivel general, el mejoramiento del proceso de aprendizaje de todos los estudiantes, dado que la manipulación de material concreto permite un AM, mejorando el desempeño académico y la adaptación con el entorno, no solo de los estudiantes con discapacidad visual sino de todos en la clase. Por otro lado, el poder realizar este tipo de actividades mejoró la cohesión de grupo y permitió que la estudiante se sintiera incluida en las dinámicas de clase.

Por otra parte, la docente pudo reflexionar sobre su práctica profesional para tener en cuenta diferentes actividades, de tal forma que generen la participación de todo el estudiantado. En cuanto a la estudiante ciega, este tipo de actividades además de propiciar un mejor entendimiento de la materia generó un sentimiento de independencia al poder participar de las actividades sin ayuda de sus compañeros, mejorando así las relaciones sociales con sus pares.

Con base en esta experiencia, se espera continuar con el proceso de creación de actividades o materiales que sirvan como herramientas a la estudiante, y a su vez le permitan la apropiación de conceptos y procedimientos lógicos y deductivos, con el fin de razonar, argumentar y probar conceptos geométricos. Además, se continuará reforzando la construcción de los aprendizajes geométricos, desde el nivel de intuitivo, manipulable y visual, con el fin de ser utilizados en cualquier área de la matemática.

Referencias bibliográficas

Alvarado, L. J., & García, M. (2008). Características más relevantes del paradigma socio-crítico: su aplicación en investigaciones de educación ambiental y de enseñanza de las ciencias realizadas en el Doctorado de Educación del Instituto Pedagógico de Caracas. *Sapiens: Revista Universitaria de Investigación*, 9(2), 187-202. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=41011837011

Andrade, P. (2010). *Desafíos de la diferencia en la escuela. Guía de orientación para la inclusión de alumnos con necesidades educativas especiales en el aula ordinaria*. Escuelas Católicas, Madrid, España.

Bermejo, M. L., Fajardo, M. I., & Mellado, V. (2002). El aprendizaje de las ciencias en niños ciegos y deficientes visuales. Integración. *Revista sobre Ceguera y Deficiencia Visual*, 38, 25-citation_lastpage. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2653883

Cabello, A. (2011). *Sistemas para graficar ejercicios y contenidos de matemática a alumnos ciegos de enseñanza media integrada en escuelas regulares Universidad de Chile*. Recuperado de http://repositorio.uchile.cl/tesis/uchile/2011/aq-cabello_a/pdfAmont/aq-cabello_a.pdf

Carneiro, M.B. (2004). Multiambientes de aprendizaje en entornos semipresenciales. Pixel-Bit. *Revista de medios y educación*, (23), 65-68. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/368/36802306.pdf

Declaración de Salamanca y el marco de acción para las necesidades educativas especiales (1994). *Conferencia Mundial Sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad*. Recuperado de http://www.unesco.org/education/pdf/SALAMA_S.PDF

Declaración Mundial sobre Educación para Todos (1990). *Conferencia Mundial sobre Educación para Todos: Satisfacción de las Necesidades Básicas de Aprendizaje*. Recuperada de http://www.unesco.org/education/pdf/JOMTIE_S.PDF

Decreto Ejecutivo Nº16831. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, San José, Costa Rica, 05 de febrero de 1986.

Decreto Ejecutivo N°34206. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, San José, Costa Rica, 14 de diciembre de 2007.

Eisenhardt, K. M. (1989). Building Theories from Case Study Research, *Academy of Management Review*, 14 (4), 532-550. https://doi.org/10.5465/amr.1989.4308385

Fernández del Campo, J.E. (1986). *La Enseñanza de la Matemática a los Ciegos. Organización Nacional de Ciegos Españoles, Dirección General*. Departamentos de Servicios Sociales para Afiliados, Madrid, España.

Fredembach, B., de Boisferon, A. H., & Gentaz, E. (2009). Learning of arbitrary association between visual and auditory novel stimuli in adults: the "bond effect" of haptic exploration. *PloS one*, 4(3). doi: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0004844

García, G. (2009). *Impacto de estrategias didácticas multisensoriales para estimular el desarrollo de habilidades intelectuales de alumnos prescolares con discapacidad intelectual del centro de atención múltiple*. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_01/ponencias/1744-F.pdf

Godino, J. (2010). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecno científica*. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino

Ley N° 7600. *Diario Oficial la Gaceta de la República de Costa Rica*, San José, Costa Rica, 29 de junio de 1996.

Ministerio de Educación, Perú (2013). *Guía para la atención de estudiantes con discapacidad visual*. Recuperado de http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos/a/002/05-bibliografia-para-ebe/4-guia-para-la-atencion-de-estudiantes-con-discapacidad-visual.pdf

Ministerio de Educación Pública, Costa Rica (2012). *Programa de Estudio, Matemática. I, II y III Ciclo*. Recuperado de https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/ programas/matematica.pdf

Morin, A. (2014). *The Everything Parent's Guide to Special Education, The Everything Kids' Learning Activities Book y On-the-Go Fun for Kids!: More Than 250 Activities to Keep Little Ones Busy and Happy—Anytime, Anywhere!* Masachusetts, USA: Aadams Media.

Organización de Naciones Unidas (2006). *Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad y Protocolo Facultativo*. Recuperado de http://www.un.org/disabilities/documents/convention/convoptprot-s.pdf

Ortiz, T., & Santos, J. M. (2012). Generación de experiencias visuales en ciegos mediante estimulación táctil repetitiva. *Ciencia Cognitiva*, 6, 9-12. Recuperado de http://medina-psicologia.ugr.es/~cienciacognitiva/files/2011-18.pdf

Prioretti, L. (2016). *Inclusión y calidad educativa. Enseñanza multisensorial: recomendaciones, beneficios y actividades*. Recuperado de https://inclusioncalidadeducativa.wordpress.com/2016/04/16/ensenanza-multisensorial-recomendaciones-beneficios-y-actividades/

Thelen, A., Cappe, C., & Murray, M. M. (2012). Electrical neuroimaging of memory discrimination based on single-trial multisensory learning. *Neuroimage*, 62(3). https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2012.05.027

Thelen, A., Matusz, P. J., & Murray, M. M. (2014). Multisensory context portends object memory. *Current Biology*, 24(16). https://doi.org/10.1016/j.cub.2014.06.040

Shams, L., & Seitz, A. R. (2008). Benefits of multisensory learning. *Trends in cognitive sciences*, 12(11). https://doi.org/10.1016/j.tics.2008.07.006

CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO IRRACIONAL: UNA EXPERIENCIA ÁULICA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

CONSTRUCTION OF THE IRRATIONAL NUMBER: A CLASS EXPERIENCE IN THE SECONDARY SCHOOL

Daniela Emmanuele, Verónica Acero
Fac de Cs Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA), Universidad Nacional de Rosario (UNR) – Colegio San Bartolomé - Colegio La Salle – Universidad Tecnológica Nacional (UTN) Fac Regional Rosario (FRRo). (Argentina)
emmanueledaniela@gmail.com, veroacero24@gmail.com

Resumen
En este trabajo (Proy ING548) se comunica una experiencia áulica que tuvo como propósito la generación del concepto de número irracional en un curso de segundo año de la escuela secundaria. Para ello se diseñó una propuesta didáctica con la intencionalidad de construir la noción de número irracional a partir de una práctica de referencia concreta donde los alumnos pudieran manipular cantidades y experimentar con ellas. Tal diseño se efectuó con base en observaciones de clases, entrevistas con el docente a cargo y análisis de propuestas editoriales. Los resultados parciales son alentadores respecto de la mejora de los aprendizajes logrados.

Palabras clave: número irracional, prácticas de referencia

Abstract
In this work (Proy ING548) we present a classroom experience which is aimed at formulating the concept of irrational number in a second-year course of secondary school. So, a didactic proposal was designed with the intention of constructing the notion of irrational number based on a specific reference practice where students could manipulate quantities and experiment with them. This design was made based on observations of classes, interviews to the teacher in charge and analysis of published proposals. The partial results are encouraging with respect to the improvement of the learning students achieved.

Key words: irrational number, reference practices

Introducción

Según el enfoque socioepistemológico el conocimiento matemático surge a partir de la actividad humana, es decir, se aprende a partir de lo que los grupos humanos hacen; esa actividad, ese hacer, que está normado, regulado socialmente, es fuente generadora de saber; sin esa actividad no es posible que el saber se constituya como tal.

La enseñanza tradicional de los números irracionales se sustenta en bases algorítmicas, tendientes al desarrollo de ejercicios en forma mecánica que no contribuyen necesariamente a la construcción significativa de la noción misma de número irracional. Los docentes noveles suelen frecuentemente preguntarse cómo enseñar dicho tema.

Desde la perspectiva socioepistemológica, se propone un rediseño del discurso matemático escolar (dME) pues éste se halla fuertemente centrado en el objeto. Esta centración en el objeto formal hace que los docentes – particularmente los noveles y en determinadas situaciones - trabajen con conceptos puros, atomizados, cuyo tratamiento se reduce a meros procesos algorítmicos, secuenciados, repetitivos.

En pos de la efectivización del rediseño del dME, sostenemos la importancia de dinamizar las clases y la enseñanza de los contenidos a través de la recreación de prácticas de referencia. Nos propusimos llevar a cabo una experiencia de aula genuina (en el sentido de que contemple los reales intereses del grupo de alumnos al que estaría dirigida la propuesta) con un docente novel.

En este trabajo comunicamos dicha experiencia áulica que tuvo como propósito la generación del concepto de número irracional en un curso de segundo año de la escuela secundaria orientada. En esta experiencia se incorpora el diseño y recreación en el aula de elementos de una práctica de fabricación de ornamentos y objetos decorativos, con la que, por un lado, se busca dotar de significado a las actividades de la clase sobre el número irracional, con la pretensión de hacerlas más dinámicas; y por el otro, se pretende favorecer y agilizar el proceso de empoderamiento de un docente novel.

Marco teórico

Nuestro marco teórico se nutre principalmente de la socioepistemología que nos brinda los conceptos de descentración del objeto matemático, discurso matemático escolar, prácticas de referencia, dinamización (Cantoral, Montiel, Reyes Gasperini, 2015; Camacho Ríos, 2011) pero también de las teorías psicológicas del aprendizaje significativo (Ausubel, Novak, Hanesian, 1976).

La matemática escolar se rige por un sistema de razón de carácter hegemónico (supremacía de argumentaciones y significados frente a otros sistemas de razón) y caracterizado fuertemente por la atomización en los conceptos, el carácter utilitario del conocimiento, y la falta de marcos de referencia para la resignificación. Este sistema de razón se traduce en un discurso matemático institucionalizado que no contempla los aspectos sociales, contextuales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.

> En general, se formula que el discurso matemático escolar consensúa y valida la construcción de la matemática escolar a través de las estructuras y los conceptos matemáticos en desmedro de la funcionalidad de la matemática en la vida cotidiana de los ciudadanos. (Cordero, F.; Gómez, K.; Silva-Crocci, H.; Soto, D.; 2015, p. 50)

La socioepistemología se vale de este constructo, el discurso matemático escolar (dME), que le permite modelar la génesis del problema del aprendizaje y de la enseñanza de la matemática en la escuela. Se trata de un discurso fuertemente centrado en el valor mismo de los conceptos puros -en nuestro caso, el de número irracional- "**[…]** que, al ser introducidos al aula como objetos formales acompañados de procesos algorítmicos, se les reduce a meros tratamientos didácticos secuenciados y debidamente cronometrados" (Cantoral, R.; Montiel, G.; Reyes-Gasperini, D.; 2015; p. 7).

Entonces, el aula escolar se transforma en el lugar donde se le presentan al alumno una serie de objetos matemáticos sin referencia a ningún contexto específico, una colección de entes abstractos secuenciados y jerarquizados según pautas externas a lo que ocurre en las vidas cotidianas de esos estudiantes y ajenos a su propia experiencia. Este fenómeno de centración en el objeto es lo que impide un aprendizaje genuino de la matemática y es por esto que se vuelve necesario un rediseño del dME. Daniela Reyes-Gasperini (2016) distingue dos acepciones del rediseño que propone la socioepistemología: 1) rediseño del dME (rdME): referido a la confección de propuestas didácticas áulicas basadas en una epistemología renovada y que será objetivada en libros del texto, programas de estudio, etc; 2) Rediseño del dME (RdME): referido a la ruptura de orden epistemológico con lo instituido. El RdME es lo que posibilita el pasaje de la centración en el objeto a la centración en las prácticas sociales consideradas como la base de la construcción del conocimiento matemático. Este rediseño "privilegia la articulación de argumentaciones, propicia la emergencia de racionalidades situadas y contextualizadas, favorece el carácter funcional del saber (su valor de uso) e impulsa una resignificación progresiva que considere marcos de referencia diversos" (Reyes-Gasperini, D.; 2016).

En esta experiencia se incorpora el diseño y recreación en el aula de elementos de una práctica de fabricación de ornamentos y objetos decorativos, con la que, por un lado, se busca dotar de significado a las actividades de la clase sobre el número irracional, con la pretensión de hacerlas más dinámicas; y por el otro, se pretende favorecer y agilizar el proceso de empoderamiento de un docente novel. "En sí mismas, ese tipo de acciones devienen de matematizar la realidad inmediata y son concebidas en la socioepistemología (se) como prácticas de referencia" (Camacho; 2011; p.154).

La recreación de prácticas de referencia se articula con lo que Ausubel denomina aprendizaje significativo y que, en tanto categoría, se opone al aprendizaje mecánico, también llamado aprendizaje memorístico. Este último está relacionado al fenómeno de centración en el objeto, que provoca un aprendizaje pasivo. Muchas veces se produce incluso de manera no intencionada a causa de la simple exposición a conceptos repetidos, a la insistencia en algoritmos prepautados, que van dejando su marca en nuestros esquemas mentales. En el aprendizaje memorístico, los nuevos contenidos se van acumulando en la memoria sin quedar vinculados a los viejos conocimientos por medio de la significación, es decir, sin el establecimiento de una referencia concreta a lo ya aprendido. Esta clase de aprendizaje se diferencia del aprendizaje significativo no sólo porque no ayuda a expandir el conocimiento real, sino porque además la nueva información es más volátil y fácil de olvidar. El aprendizaje significativo, en cambio, requiere de la búsqueda en forma activa de una vinculación personal entre los contenidos que se aprenden y aquellos que ya se han aprendido. La recreación de prácticas de referencia apunta en este sentido.

A partir de la descentración del objeto se produce un verdadero aprendizaje de las matemáticas. Este aprendizaje resulta significativo cuando se produce la incorporación de la dimensión sociocultural en la enseñanza, lo cual es necesario para enriquecer el entendimiento de aquello que se pretende enseñar. La recreación de prácticas sociales, actividades, acciones, que acompañan al objeto, tiende en este sentido a incorporar dicha dimensión sociocultural. Mudar la mirada del objeto a las prácticas también colabora con la dinamización de las clases, problematizando el saber. Es a través de esta problematización que el docente cambia de práctica en cuanto a su relación con el saber y con ello se modifica el qué se enseña. Se trata de dejar de observar al concepto matemático en sí, y comenzar a observar las prácticas que lo producen o favorecen su aparición, lo cual es un factor imprescindible para el empoderamiento docente, entendiendo por ello

> **[…]** el proceso vivido por el docente, en conjunto con sus colegas (profesores e investigadores) con objeto de comprender, asimilar, asumir, aceptar y adherirse a una propuesta novedosa sobre el aprendizaje centrado en prácticas y no en objetos abstractos, donde se privilegie la articulación de

> distintas argumentaciones, se permita la emergencia de diversas racionalidades situadas o contextualizadas, se posea o desarrolle el carácter funcional del saber, se favorezca la resignificación progresiva al considerar varios marcos de referencia, sobre la consideración de que las prácticas sociales son la base de la construcción que realizará el individuo del conocimiento matemático. (Reyes-Gasperini, Cantoral, 2014, p. 378).

La problematización del conocimiento le permite al docente hacerse dueño de su propia práctica, transformando su propia realidad. De esta manera el docente adquiere el poder de tomar decisiones sobre sus acciones didácticas a través de una herramienta principal en su profesión: la centración en las prácticas. Así, es el propio docente quien se empodera y toma las riendas de su crecimiento profesional.

Metodología

Se diseñó una propuesta didáctica con la intencionalidad de construir la noción de número irracional a partir de una práctica de referencia concreta (la confección de ornamentos decorativos, como flores o pulseras) donde los alumnos pudieran manipular cantidades y experimentar con ellas. Entre los materiales utilizados para la recreación de prácticas de referencia se encuentran hilo encerado, sorbetes, cinta, regla y compás, tijeras, entre otros. Se pretendió con todo ello apuntalar la experiencia hacia una dinamización de la enseñanza del número irracional. La propuesta didáctica se llevó a cabo en 6 clases en total, cada una de ellas de 80 minutos. El diseño de la misma se efectuó sobre la base de:

a. Análisis de propuestas editoriales
b. Entrevista con el docente novel
c. Observaciones de clases

Análisis de datos

Análisis de propuestas editoriales

Por razones de espacio, sólo detallaremos 3 de los libros de texto analizados. En primer lugar, nos dedicamos a estudiar los libros de texto de uso habitual en las escuelas secundarias. En uno de los libros analizados (Mariana Aragón, Liliana Laurito, Gabriela Net, Eduardo Trauma (2005) *Matemática 8. Carpeta de Actividades. Entender*. Buenos Aires: Estrada) en la página 57 se pide a los alumnos que “armen números “con coma” pero que no sean periódicos ni finitos”. Se explica que éstos no son periódicos, pues no hay un período que se repita. Entonces concluyen que “si encuentran una expresión decimal de infinitas cifras que no sea periódica, esta expresión no puede ser el desarrollo de ningún número racional.” En un cuadro de la misma página queda expresado: “Los números irracionales son aquellos que no pueden ser expresados mediante el cociente de números enteros”.

Otro de los libros (Domínguez, D.; Zigneno, C. (2011) *Matemática básica 3. Secundaria 2*. Buenos Aires: Longseller) comienza en la página 28 con el título: “Números Irracionales” y comenta que se puede observar cómo el número de oro tiene infinitas cifras decimales que no se repiten. Además, agrega en la misma página que “los números con infinitas cifras decimales, no periódicas, no pueden expresarse en forma de fracción y se llaman números Irracionales”. Concluye (también en la misma página) con un diagrama donde quedan determinadas las contenciones entre los distintos conjuntos numéricos. Luego, se pide completar una tabla indicando a qué conjunto pertenecen varios números dados.

También analizamos otro texto (Cólera Giménez, J. (2015) *Matemáticas: Bachillerato 1.* Anaya) en el cual bajo el título: “Un nuevo tipo de números: los irracionales” (pág. 44), se comenta que 2 no es racional, es decir no se puede

expresar como cociente de dos números enteros ni, por tanto, como decimal exacto o periódico. Luego da su expresión decimal con las primeras 10 cifras decimales, continuando con puntos suspensivos. A partir de esto, se define a los números irracionales como aquellos que poseen infinitas cifras decimales no periódicas. Después de esto, presenta otros números irracionales, como aquellos que son radicales, por ejemplo, raíz cuadrada de tres, el número π, el número de oro φ, el número e.
En todos los textos analizados, no hallamos un enfoque constructivista del concepto de número irracional, así como tampoco encontramos un acercamiento intuitivo; por otra parte, todas las conclusiones a las que se arriban están dadas sin mayor justificación.

Entrevistas con el docente novel

En segundo lugar, mantuvimos entrevistas abiertas con el docente que iba a llevar a cabo la experiencia. Se trata de un profesional novel recientemente recibido (menos de 5 años, de hecho, 2). Hemos tenido con él una serie de entrevistas abiertas, dialogadas, antes y después de la experiencia. Las entrevistas atendieron en todo momento a la inquietud a partir de la cual el docente novel se acercó al equipo y al establecimiento conjunto de una propuesta didáctica alternativa que contribuyera al empoderamiento de este docente. Para ello se le consultó acerca de las características del grupo de alumnos para así poder diseñar un tipo de prácticas de referencia acorde con el mismo. Usaremos D para referirnos al docente y E, para el entrevistador. Cuando el docente nos consulta, nos plantea lo siguiente:

> D: “¿Empiezo por la definición de número irracional? Me gustaría enseñarlo de otra manera, pero no se cómo, los libros no me han aportado ideas nuevas tampoco.” A partir de esta pregunta empezamos a trabajar con él las cuestiones relativas a una propuesta alternativa basada en prácticas de referencia que a su vez contemplara su propia relación con el saber.
> E: ¿Has enseñado el tema números irracionales anteriormente?
> D: No, ésta es la primera vez y no me convence comenzar dando la definición. Estuve buscando ideas en algunos libros de texto, pero la mayoría arranca el tema así, y yo quiero que los alumnos construyan el concepto. También creo que yo debo construirlo, porque en el profesorado me lo enseñaron a partir de una demostración por el absurdo, suponiendo que un irracional es racional y es el último registro que tengo del concepto… bueno… también sé que no es conmensurable.
> E: ¿Y por qué consideras importante enseñarlo de otra manera?
> D: Porque creo que, si el conocimiento se les presenta como algo dado, sin sentido ni significado para ellos (como ahora me doy cuenta de que me pasó a mí mismo), el aprendizaje no se producirá. También necesito que se involucren, quiero que quieran aprender.

El docente se mostró entonces muy interesado en enseñar el tema de una forma que haga que sus estudiantes se involucren y que además puedan aproximarse a la construcción del concepto de número irracional. Después de haber llevado a cabo la experiencia en el aula, seguimos trabajando a partir de entrevistas abiertas con el docente novel.

> E: ¿Qué conclusión o reflexión podrías hacer luego de la experiencia en el aula?
> D: Fue muy enriquecedora, me emocionó mucho ver cómo mis alumnos se ayudaban y colaboraban entre todos para realizar producciones muy lindas. Varios hasta hicieron mandalas, se notó que se apropiaron de la propuesta y además me vinculé con ellos desde otro lugar, desde un lugar “más humano”. Creo que yo aprendí lo que es un número irracional al confeccionar las actividades y luego en las clases junto con mis alumnos”.
> E: Con respecto al desarrollo de las clases, ¿notaste alguna diferencia en cuanto a las clases anteriores a la experiencia?
> D: Sí, claro. Hasta para mí resultaban aburridas a veces, y sobre todo tenía algunos problemas de conducta y de desinterés por parte de muchos chicos del curso. Durante la experiencia, las clases se volvieron más

dinámicas, todo el grupo estaba interesado en hacer y aprender, y rara vez tuve que llamarles la atención para que trabajaran. En este sentido noté una gran diferencia muy favorable con respecto a mis clases tradicionales.

Observaciones de clases

Con respecto a las observaciones de clase, la propuesta estuvo dirigida a un grupo de alumnos de segundo año de la escuela secundaria orientada de la ciudad de Rosario, provincia de Santa Fe. Se ha observado a un docente novel durante varias semanas con diferentes criterios de observación: interacción docente-alumnos, interacción alumnos-texto, interacción alumno-alumno (y otros que por razones de espacio, omitimos). Interacción docente- alumno: El docente trabajó siempre con la intencionalidad de generar preguntas en sus estudiantes, ya que a partir de esto se logra que se apropien de los conceptos y les den significado, construyendo así el conocimiento. Las actividades fueron guías para trabajar con el material concreto (tiritas de hilo, sorbetes) y a partir de ello ir arribando a conclusiones, respondiendo preguntas. Se generó un vínculo afectivo entre el docente y los estudiantes, lo cual favoreció el desarrollo de las clases y la generación de conocimiento. El grupo trabajó muy bien durante las actividades, todos cumplieron con el material pedido y estuvieron muy entusiasmados. Interacción alumno-texto: En una primera instancia, los alumnos manifestaron no estar acostumbrados a trabajar con actividades del estilo de lo que proponía el profesor, se los notaba un tanto desconcertados y sin saber cómo proceder. Sin embargo, con la ayuda del docente que los fue acompañando y orientando, todos pudieron llegar a alguna conclusión y hasta proponer ideas. Interacción alumno-alumno: los estudiantes se mostraron en un principio trabajando de manera individual, pero a medida que avanzaron las clases se fueron ayudando mutuamente, compartiendo material, estableciendo un vínculo colaborativo entre todos.

Clases anteriores a la experiencia propiamente dicha

En las clases previas el profesor ha venido trabajando números racionales, representación en la recta numérica, operaciones entre números racionales, pasaje de expresión decimal a fracción (distintas representaciones de un mismo número), todos temas dados en primer año. En la ejercitación se realizaron varios ejercicios donde los alumnos debían marcar distintas fracciones en la recta numérica, comenzaron marcando algunas positivas o enteras, luego negativas, con denominadores 2 y 4 en una primera instancia; luego con denominadores como 10, 20, 15. Los estudiantes iban tomando distintas escalas según su conveniencia en cada ejercicio. También se les aclaró que las rectas no se cortan, son infinitas (por lo que en algunos casos necesitaron apaisar la hoja o recortar una tira de papel extra y pegarla para continuar las rectas, evitando así seguir en el renglón siguiente cortando la recta en dos partes). Previamente también se trabajó el Teorema de Pitágoras. De varios alumnos ha surgido la inquietud de si todos los números son racionales, a partir de venir trabajando solo con números de este tipo.

Alumno A: ¿Todos los números son racionales?
Alumno N: … entonces todos los números son racionales.
D: veamos si esto es cierto…

En la última clase el docente le pidió a sus alumnos que de tarea dibujaran un triángulo rectángulo isósceles de catetos de 8 cm y que luego recortaran hilo encerado con las medidas del triángulo dibujado (lo más preciso posible). Los estudiantes trajeron los hilos de varios colores (algunas alumnas ya lo tenían en sus casas, ya que hacen pulseras con este material).

Clases propias a la experiencia

Durante la experiencia, llevando adelante la actividad de construcción del concepto, el docente comienza la clase pidiéndole a los estudiantes que miren las rectas que han dibujado hasta el momento para ubicar ciertos números racionales, que observen las unidades elegidas y las comparen, entonces pregunta:

D: ¿Hemos elegido siempre la misma unidad?, ¿de cuántos centímetros las han elegido?

Alumno A: no siempre tomamos la misma unidad, fue según qué nos convenía, de 2 cm, de 3 cm, de 20 cm profe (risas).

D: ¿podríamos elegir como unidad el cateto del triángulo que dibujamos?

Alumno B: sí, podríamos tomar 20 cm entonces también.

D: ¡Exacto!

Luego el profesor pregunta: "¿si tomamos a los catetos como unidad, ¿cuánto vale la hipotenusa?". Una alumna pregunta por qué los catetos debían ser de 8 cm y no podrían ser de 25 cm por ejemplo, a lo que el docente le comenta que podría haber sido así pero que eligió que sean de 8 para trabajar "más cómodos" en la carpeta. Uno de los alumnos de adelante responde a la pregunta del docente: "podemos hacer cateto cuadrado más cateto cuadrado", entonces comienza a plantear el Teorema de Pitágoras con la ayuda de los estudiantes quienes le dictan qué escribir. Una vez que terminan de despejar el valor de H, el docente pregunta: "¿entonces cuánto vale la hipotenusa?".

Alumna C: Vale raíz cuadrada de 2 pero no sabemos cuánto es ese valor.

El profesor afirma lo dicho por la estudiante y comienza a realizar una especie de repaso acerca de cómo vienen marcando en la recta numérica, los números racionales. Pregunta: "¿Cómo podemos marcar en la recta 5/2", entonces los alumnos le explican al docente: "tenemos que dividir la unidad en dos partes y después ir moviéndonos en la recta hasta llegar al valor de arriba (haciendo referencia al numerador)". El profesor va realizando el procedimiento en el pizarrón y afirmando aquello que los alumnos le explican, atentos, un poco dispersos en el aula, pero muy compenetrados con lo que el docente está haciendo en pizarrón. Acto seguido, el profesor le pide a la clase que tome las tiritas y les pregunta: "¿entonces cuánto vale la hipotenusa?", la mayoría responde raíz de dos. Luego los desafía a que intenten decir cuántas veces entra la unidad en ella, es decir, cuántas veces entra uno en raíz de dos. Los alumnos comienzan a comparar y concluyen que entra una sola vez y sobra "un cachito". Entonces el profesor les pregunta, "¿será que la unidad entra una vez y media en raíz de dos?", a lo que varios alumnos dicen: "sí!", "no profe, entra una vez y un cuarto", "no, entra una vez y un tercio". Luego el profesor los invita a cortar ese "cachito" que sobró y decir cuántas veces entra éste en la unidad. Los estudiantes cortan y comienzan a "hacer entrar ese cachito tantas veces en la unidad". Después de esto, observan que entra dos veces más un "cachito" de la segunda unidad. Un alumno se acerca al docente y le comenta, preocupado, que a él le entró tres veces en la segunda unidad y que no entiende por qué al resto no. Luego el profesor le explica que cuando medimos con la regla las tiritas y cuando las cortamos con la tijera las medidas obtenidas van siendo cada vez "menos exactas". Quizás nuestra vista no lo nota, pero microscópicamente no es así, entonces le pide que realice lo que queda de la experiencia con su compañero de banco al cual no le sucedió esto. Ambos trabajaron muy bien juntos.

D: Vuelvan a repetir el procedimiento y nuevamente corten ese "cachito" que sobra, e intenten decir cuántas veces entra en la segunda unidad.

Alumno C: ¡pero profe, sigue sobrando!

D: Intenten decir cuántas veces entra eso que sobró en la unidad.

Alumno C: ¡profe no termino más, es un proceso infinito!

D: Exacto.

Alumno D: ¡es un proceso infinito!

D: ¿y entonces podemos decir que raíz de dos es racional?, ¿pudimos decir que es uno más tal fracción?

Alumnos: No, es un número "no racional".

Después de esto, el profesor pasa a comentarles que vamos a decir que raíz cuadrada de 2 es un número irracional, que el conjunto de los Números Irracionales contiene a todos aquellos números que no podemos expresar/pensar como una fracción de una unidad. Escribe esto en el pizarrón y agrega que en su desarrollo decimal las cifras decimales son infinitas y no periódicas. Algunos estudiantes dicen: "y claro! Son infinitas y distintas por eso no puedo expresarlo como fracción". También escriben el símbolo del conjunto de Números Irracionales.

En las clases siguientes, el docente presenta otros números irracionales como π, e, raíz cuadrada de 3, el opuesto de la raíz cuadrada de 5, raíz cuadrada de 7 y continúa realizando un diagrama de Venn junto con los estudiantes, en el cual se pueden visualizar los distintos conjuntos numéricos que conocen hasta el momento, agregando recientemente el de los números Irracionales y Reales. En la penúltima clase, el profesor les pidió a los estudiantes que, de tarea para la clase siguiente, recortaran 5 tiritas de hilo encerado de un color, cuya medida sea raíz de dos, además 5 tiritas de otro color que midieran raíz de tres y otras 5 de un color diferente que midieran raíz de cinco. Les explicó que, para hacerlo, debían marcar en una misma recta numérica raíz de dos, raíz de tres y raíz de cinco, luego apoyar el inicio del hilo encerado sobre el origen y recortarlo justo donde quedó marcado el punto que representa raíz de dos, por ejemplo. Además, les indicó que trajeran plasticola o cinta transparente. El docente comienza la clase escribiendo en el pizarrón la siguiente consigna:

Actividad:

1. Con las tiritas que trajiste hoy, armá 3 o 4 figuras, combinando como más te guste los colores (no se puede recortar las tiras).
2. ¿Cuánto vale el perímetro de cada una de las figuras que construiste?

A pedido de varios alumnos el docente recuerda en el pizarrón que el perímetro de una figura es la suma de las medidas de sus lados. Todos comienzan a realizar las figuras, algunos le preguntan al profesor si sólo pueden ser figuras geométricas, pero éste les responde que no y vuelve al pizarrón para dibujar un corazón de dos colores, para ejemplificar una figura que podrían armar. Además, encima de cada tirita de color escribe su medida, y les pide a los alumnos que lo hagan en cada una. Los estudiantes comienzan a realizar figuras de todo tipo, están muy entusiasmados. Algunas de ellas son: flores, corazones, una corona, un castillo, rombos, cuadrados, soles, nubes, palabras, nombres de personas queridas, etc.

El docente va pasando por los bancos, observando cómo trabajan y ayudándolos a pegar las tiras en la carpeta. En una segunda instancia de actividad, los estudiantes comienzan a escribir las sumas en su carpeta. Luego el docente toma una flor hecha por una de las alumnas y la "copia" en el pizarrón, junto con la suma que la alumna también escribió: "Perímetro de la flor:..". Luego, les pregunta: "¿Cuántas tiritas de raíz de dos usó Martina para hacer la flor?", todos responden dos, y varios dicen que también usó dos de raíz de tres y una sola de raíz de cinco. Entonces el profesor les pide que escriban esa suma de una manera más "reducida", más "simple", por lo que los alumnos le dicen que podría escribir: "dos raíz de dos más dos raíz de tres más raíz de cinco". En la clase siguiente, se trabajaron algunas cuestiones sobre las propiedades de la radicación, los alumnos notaron que no vale la propiedad distributiva de la radicación respecto de una suma. Más aún, pudieron avanzar hasta el planteo y deducción correctos de propiedades muy importantes en relación a las operaciones con irracionales.

> D: ¿entonces vale que la raíz de dos más dos es raíz de dos más raíz de dos?
> Alumno M: ¡no profe! Porque entonces un número racional sería igual a otro irracional y eso no puede pasar.
> Alumno J: no profe, es igual a dos, no podría ser igual a dos tiritas rojas de raíz de dos.
> D: ¡Muy bien! Ahora podemos decir que no vale la propiedad distributiva de la raíz con respecto a la suma.

Resultados de la experiencia y reflexiones finales

Dado que no tenemos la intención de generalizar lo que se produjo a partir de la puesta en práctica del diseño didáctico - puesto que se llevó a cabo sólo con ese grupo de alumnos y estuvo involucrado sólo ese docente novel - , no podemos establecer fehacientemente resultados acabados. Pero sí, podemos destacar ciertas particularidades de dicha experiencia que, por un lado, nos dieron una perspectiva muy alentadora en cuanto a la mejora de los aprendizajes logrados, y por el otro, nos conduce a querer repetir dicho encuadre variando el docente a cargo y grupo de alumnos destinatarios. (Cabe mencionar que estamos realizando un seguimiento de los aprendizajes de este grupo que sería comunicado en un encuentro próximo).

En relación al análisis de propuestas editoriales, a partir de la exploración y examen de varios libros de textos de nivel secundario, observamos – en general - que en la mayoría de ellos el tema se enseña de una manera no constructivista. Al presentar el número irracional, se opta por definirlo directamente como aquel número que no es racional porque posee infinitas cifras decimales no periódicas, sin mediar ninguna actividad que conduzca al estudiante en esa dirección.

También constatamos que el número irracional suele presentarse (o representarse) a través de ciertas aproximaciones sin hacer la distinción con sus expresiones exactas, esto es, sin enfatizar que se trata de meras aproximaciones (quizás a los efectos de su graficación en la recta numérica) pero que ése no es el número en cuestión. En general, no se fundamentan las conclusiones a las que se arriba ni las definiciones que se establecen, ni se da lugar al cuestionamiento, siendo todos los textos fieles reproductores del dME instituido.

Con respecto al trabajo con el docente, en este trabajo desarrollamos las evidencias puntuales que obtuvimos para sostener cómo, a lo largo del trabajo conjunto, el docente logró empoderarse, esto es, logró modificar su relación con el saber a partir de la problematización del conocimiento matemático, dado en un principio como incuestionable. Esto mismo favoreció el desarrollo deseable de las actividades propuestas mediante las cuales, no sólo él pudo deconstruir sus propios saberes, sino que fue capaz de ofrecer un espacio adecuado y fértil para que los alumnos construyan los propios. Fue él mismo quien manifestó haber notado un gran cambio positivo en cuanto al desarrollo de sus clases y se mostró muy contento por ello. El profesional docente pudo, a partir de la reflexión conjunta y de la problematización del saber, consolidar una propuesta basada en acciones concretas (recreación de prácticas de referencia) que le permitirían ofrecer un espacio de construcción de conocimiento en el aula, a sus alumnos. Creemos que el trabajo realizado contribuyó efectivamente con el proceso de empoderamiento que comenzó a atravesar este docente y tenemos confianza que como consecuencia se producirá un cambio en su práctica pedagógica en pos de su profesionalización.

Con respecto a las observaciones de clase, el grupo de alumnos participantes no estaba familiarizado con este tipo de trabajo en el aula, sino que estaban acostumbrados a que los conocimientos se les presenten en forma de lección, como algo dado, que es así sin más razón, sólo porque lo dice el profesor, y donde ellos como alumnos sólo se debían dedicar a resolver ejercicios todos muy similares, mecánicamente (y no significativamente).

En un primer momento, la propuesta los descolocó; sin embargo, gracias a los esfuerzos conjuntos del docente y de los alumnos mismos, pudieron admitir la lectura de consignas más complejas que convocaban a una interpretación de aquello que debía hacerse y a un trabajo de carácter grupal, en equipo. De esta manera, los alumnos evidenciaron progresos notables en cuanto a la aceptación de las tareas propuestas y la apropiación de los saberes en cuestión.

Con respecto a esto último, se logró que los alumnos construyeran – aunque sea en forma aproximada – la noción de número irracional sin la mediación de una definición formal previa del concepto sino a partir de las prácticas concretas ejecutadas.

A modo de reflexión final, creemos que los resultados preliminares alcanzados (sin pretensión de generalización) permitirían concluir que las prácticas de simulación propuestas y ejecutadas posibilitarían una real y significativa mejora en cuanto a la construcción de conocimiento matemático se refiere (relativo al pensamiento numérico en este caso). Incluso, tenemos algunos indicios que señalarían que este tipo de encuadre disminuye y acota los factores generadores de error en el plano algebraico. Esto motiva nuestro seguimiento de los aprendizajes logrados por este grupo y el tipo de articulaciones que podrían hacer con conocimientos posteriores. Puntualizamos además que la recreación de prácticas de referencia mejora notablemente el tipo de interacciones que se dan en el aula, así como los vínculos afectivos y colaborativos que allí se generan.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D.; Novak, D.; Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Camacho-Ríos, A. (2011) *Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial*. Recuperado el 4 de mayo de 2017 de http://ries.universia.net

Cantoral, R; Montiel, G; Reyes-Gasperini, D (2015). El Programa Socioepistemológico de Investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Relime, 18 (1), 5-17.*

Cordero, F.; Gómez, K.; Silva-Crocci, H.; Soto, D. (2015) *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: Gedisa.

Reyes-Gasperini, D. (2016) *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: Gedisa.

Reyes Gasperini, D.; Cantoral, R. (2014) Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema 28* (48), 360-382.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ALGUNAS EXPERIENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA VINCULADAS CON LA DISCIPLINA EXPRESIÓN GRÁFICA EN LA CARRERA DE ARQUITECTURA Y URBANISMO DE LA UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE LA HABANA

SOME ANALYTICAL GEOMETRY TEACHING EXPERIENCES LINKED TO GRAPHICAL EXPRESSION DISCIPLINE IN ARCHITECTURE AND URBAN PLANNING AT THE TECHNICAL UNIVERSIDAD OF HAVANA

Miriam Caridad Crespo Estrada, Karen Sanabria Ortega
Universidad Tecnológica de la Habana José Antonio Echeverría, Cujae. (Cuba)
mcrespo@cemat.cujae.edu.cu, karen@arquitectura.cujae.edu.cu

Resumen

Uno de los propósitos de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Arquitectura y Urbanismo en Cuba, es demostrar cada vez más su pertinencia en el Plan de Estudios. Esto se ha logrado en un proceso progresivo de integración de esta disciplina con las de la especialidad, donde la Matemática, dentro de otras cosas, procura establecer un vínculo natural con Expresión Gráfica, a partir del fortalecimiento de la relación percepción-análisis-interpretación-representación de los objetos de estudio comunes de la Geometría Analítica y la Geometría Descriptiva, temas de ambas disciplinas. El presente trabajo, muestra algunas experiencias en la enseñanza de la Geometría Analítica vinculadas con la carrera y en particular con la disciplina Expresión Gráfica, en la Universidad Tecnológica de La Habana.

Palabras clave: matemática, arquitectura, geometría para arquitectos

Abstract

One of the objectives of Mathematics teaching in Architecture and Urbanism university studies in Cuba is to demonstrate more and more, its relevance in the curriculum. It has been achieved in a progressive process of integration of this discipline with those of the specialty, where Mathematics, among other things, seeks to establish a natural link with Graphic Expression, based on the strengthening of the perception-analysis-interpretation-representation relationship between the common study objects of Analytical Geometry and Descriptive Geometry, subjects of both disciplines. The present study shows some experience in the teaching of Analytical Geometry linked to Architecture and Urbanism studies and in particular to the Graphic Expression discipline, at the Technical University of Havana.

Key words: mathematics, architecture, geometry for architects.

Introducción

En Cuba, la enseñanza de la Matemática en la carrera de Arquitectura ha evolucionado, desde versiones de sus programas un poco alejadas de las necesidades del futuro arquitecto, hasta ediciones más actuales que intentan alcanzar un mayor acercamiento a la Matemática que necesita un estudiante de este perfil. Esto ha estado en correspondencia con la instrumentación de manera gradual de estrategias diversas de formación en los sucesivos planes de Estudios de esta carrera, que se concretan en la actualidad en acciones de integración, no sólo entre disciplinas de la especialidad, sino también entre estas y las ciencias básicas como la Matemática.

En la Universidad Tecnológica de la Habana José Antonio Echeverría, Cujae, la disciplina Matemática ha incorporado progresivamente esta práctica. La Geometría Analítica, ha sido uno de los temas donde las experiencias de integración con otras disciplinas de la carrera han tenido mayor impacto. Es reconocido en el ámbito académico la importancia de la enseñanza de este tema, no solo para la comprensión de otros conceptos matemáticos, sino también para el desarrollo del pensamiento espacial.

Para el arquitecto es de gran importancia lograr controlar el espacio en la mente. Esa estructuración y ese orden se desarrollan por medio de la geometría. (Pozo, 2002). La geometría es una de las ciencias más antiguas y en la Arquitectura ha estado presente desde el inicio. Constituye una poderosa herramienta para el desempeño del futuro arquitecto.

Si se desarrolla el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la geometría como parte de un todo, el estudiante siente la necesidad de aprender, porque conoce qué función cumple y en qué medida esos conocimientos son importantes, tanto para llevar a cabo su trabajo a lo largo de la carrera, así como para resolver los problemas en su ocupación después de graduado. (Pozo, 2002)

En el de cursar de la historia, se han identificado muchas obras arquitectónicas que han surgido de ideas y croquis los cuales han necesitado posteriormente una definición geométrica precisa y una elaboración analítica de la estructura para su posterior ejecución basada en las matemáticas. A partir de los años 90 del siglo pasado, la escuela de Arquitectura cubana, ha utilizado diferentes variantes para lograr la integración entre dos de las ramas de la geometría (descriptiva y analítica).

La Geometría Descriptiva proporciona el conocimiento de los lenguajes gráficos, y los medios gráficos rigurosos para la redacción del discurso arquitectónico, contribuyendo al desarrollo de la capacidad de ver el espacio como parte del proceso de preparación para el ejercicio proyectual. Proporciona al alumno el conocimiento y dominio de la estructura y definición geométrica de todas las formas y superficies con las que, como arquitecto, tendrá que elaborar su arquitectura en el futuro. (Pozo, 2002).

Por otro lado, la Geometría Analítica estudia objetos materiales concretos, esquemas o representaciones gráficas y utiliza fundamentalmente el lenguaje simbólico, a través de ecuaciones de curvas y superficies, obtenidas a partir de la conceptualización de los lugares geométricos reconocidos y estudiados también en Geometría Descriptiva. El análisis de la generación de superficies y la construcción de sólidos y sus proyecciones contribuyen asimismo al desarrollo de la visión espacial y por tanto a la imaginación tridimensional.

Vincular la Geometría Descriptiva y la Analítica permite enriquecer las diferentes interpretaciones que se pueden realizar de los entes geométricos y, a su vez, llevar el pensamiento geométrico de lo concreto a lo abstracto y nuevamente a lo concreto. (Rodríguez, Rodríguez, 2007)

■ Evolución de la enseñanza de la Geometría Analítica vinculada con la Geometría Descriptiva en la formación de arquitectos en Cuba

El comienzo del pasado siglo marcó el inicio de la formación de arquitectos en Cuba, y en todos sus planes y programas de estudio ha estado presente en mayor o menor medida la Matemática, en particular la Geometría Analítica. Hasta 1990, sus programas se caracterizaron por ser un agregado de asuntos que seguían fundamentalmente la lógica de la ciencia y centraban la atención en el ordenamiento de contenidos, algunos no necesarios ni de interés para los estudiantes, y otros presentados tal cual fueron diseñados para primer año de ingeniería. En las clases, se enfatizó fundamentalmente en los métodos de cálculo y resolución de ejercicios, en detrimento de la aplicación y vinculación de los contenidos con las asignaturas de la especialidad. La organización de estos se caracterizó por la fragmentación y el alejamiento entre diferentes temas, percibidos de manera independiente unos de otros, frenando la generalización de conceptos, tan frecuente en Matemática y limitando las posibilidades de ejercitar operaciones del pensamiento. (Crespo, González, Sanabria, 2016)

Hace casi tres décadas se realizan reiterados intentos para transformar el panorama de la enseñanza y del aprendizaje de la Matemática en esta carrera, introduciendo cambios, que, dentro de un proceso de perfeccionamiento continuo, están dirigidos a lograr la Matemática necesaria para la formación del futuro arquitecto. La Geometría Analítica es uno de los temas que ha sido más susceptible a los cambios en cuanto a la forma de impartirlo y relacionarlo con otros temas estudiados en disciplinas de la especialidad como la Geometría Descriptiva.

La necesidad de vincular estos dos temas se identificó con mayor fuerza a partir del diseño e implementación del programa de Matemática para esta carrera del Plan de Estudios C (1990-1998), el cual incluyó en su programa, dentro de la asignatura Matemática I, algunos temas de Geometría Descriptiva, que también formaban parte de la disciplina Comunicación, hoy Expresión Gráfica para la Arquitectura y Urbanismo (EGAU). Estos conocimientos facilitaban la enseñanza de la Geometría Analítica y servían de base para su aprendizaje. Se logró además el establecimiento de una terminología y lenguaje común entre ambas geometrías.

El uso de un lenguaje geométrico común facilitó la comprensión de los contenidos de ambas disciplinas, ya que la Matemática ofrece la herramienta teórica necesaria y la disciplina de Comunicación reafirma lo dado por la Matemática y extiende su estudio a otros aspectos de la geometría propios de la arquitectura. (Rodríguez, Rodríguez, 2007).

Esto constituyó un valioso aporte al proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría para arquitectos, pero requirió de una mayor preparación de los profesores de Matemática en temas de Geometría Descriptiva, así como de los de Comunicación en temas de Geometría Analítica.

En esta etapa se ejecutaron diferentes experiencias, entre ellas se destacaron la implementación de un sistema didáctico para la enseñanza de la Matemática I de Arquitectura, dirigido por el doctor Guillermo Pérez Pantaleón y la realización de ejercicios integradores entre las asignaturas de Matemática y Comunicación, diseñados y coordinados por la Prof. Dra. Arq. Alexis Méndez González y posteriormente por la arquitecta Isabel Fernández Gutiérrez, entre otros, donde los estudiantes aplicaron los conocimientos matemáticos adquiridos en la Geometría Analítica, a la descomposición de obras arquitectónicas: gráfica y analíticamente. En ese período las acciones emprendidas fueron en su mayoría, experiencias aisladas, unilaterales y no en todos los casos como parte de un sistema planificado, ni consensuado a nivel de los años implicados (Crespo, Guerra, Sanabria, 2012).

No obstante, a los logros obtenidos, la resolución de ejercicios similares en asignaturas de ambas disciplinas, conllevó a la duplicidad de sistemas de conocimientos y habilidades en las mismas, una de las razones por la cual fue necesario ajustar el programa de Matemática del plan C. (Crespo, Guerra, Sanabria, 2012).

En el perfeccionamiento realizado en la enseñanza superior cubana, que conllevó al diseño del plan de estudios C perfeccionado, conocido como C', (1998-2007), los cambios más significativos relativos al diseño del programa de Matemática y su vínculo con Comunicación estuvieron asociados a la eliminación, en el programa de Matemática, de la mayoría de los contenidos y habilidades de la Geometría Descriptiva, que eran comunes con los de la disciplina Comunicación, obteniéndose así una ganancia de horas para incluir otros temas como proporciones y teoría de grafos, por su importancia en la carrera. No obstante, de la Geometría Descriptiva se dejó lo relativo a la definición y generación de superficies planas y curvas y los cuerpos limitados por ellas, para lograr un mayor acercamiento a la Geometría Analítica del Plano y del Espacio que estudia las rectas, las cónicas, los planos, las superficies cuádricas y los sólidos con sus proyecciones. En esta etapa se reeditaron los ejercicios integradores de cursos anteriores, se realizaron Seminarios Evaluativos de Matemática donde, a partir de maquetas de poliedros simples y regulares construidas por los estudiantes, se analizaban sus propiedades y las aplicaciones en obras arquitectónicas. Estas maquetas posteriormente se utilizaron como medios de enseñanza en escuelas primarias y círculos infantiles.

Con la aplicación del Plan de Estudios D de la carrera de Arquitectura (2007-), se implementa la disciplina Matemática para Arquitectos, (Crespo, 2007), la cual tiene identidad propia y es el resultado de las experiencias acumuladas por años en la integración entre la Matemática y otras disciplinas de la carrera, que ha evolucionado en correspondencia con la paulatina toma de conciencia del problema, tanto de los profesores de Matemática, como los de la especialidad. Esta disciplina, hoy en implementación, establece tres principios fundamentales para la selección de sus contenidos: los contenidos seleccionados por la lógica de la Profesión, los seleccionados por la lógica de la ciencia sistematizada como asignatura o disciplina científica en la práctica pedagógica y los seleccionados por la lógica del instrumento o la etapa de realización de una tarea profesional. (Corral, Núñez, 1990). En las indicaciones metodológicas para su implementación se destaca entre sus líneas directrices la geometría, la resolución de problemas de la especialidad y la integración de contenidos, tanto dentro de la propia Matemática como con las restantes asignaturas del Plan de Estudio donde esto sea posible. (Crespo, 2007).

La actual disciplina, elimina totalmente la duplicidad de sistemas de conocimientos de las geometrías analítica y descriptiva que forman parte de las asignaturas de Matemática y de EGAU, sin que esto implique la pérdida de la integración lograda anteriormente entre estos dos temas. Por el contrario, se han ido consolidando las acciones de integración entre ambas disciplinas y en consecuencia entre ambos temas.

El diseño de esta disciplina fue la consecuencia del perfeccionamiento de la enseñanza de la Matemática en la carrera de Arquitectura, que partió de la revisión de los Planes de estudios anteriores, planes temáticos de sus disciplinas y resultados de ejercicios integradores realizados en cursos anteriores. Este estudio permitió conocer y analizar en qué medida se han transformado y adecuado los programas de Matemática, específicos para la carrera, la identificación de las acciones de integración que han sido desarrolladas en los diferentes períodos y en cada caso, los aspectos positivos y las limitaciones relacionadas con la insuficiente vinculación de la Matemática con la especialidad. A partir de estos elementos se trazó una estrategia dirigida a fortalecer las relaciones interdisciplinarias entre la Matemática y otras disciplinas.

En particular, en el tema de Geometría Analítica, se identificaron deficiencias en su enseñanza relacionadas con la memorización de ecuaciones y la solución de problemas tipos y repetitivos. La automatización de procedimientos, en algunos casos ha conllevado a que se pierda la esencia de la geometría, y el concepto de lugar geométrico. Estos problemas detectados no son exclusivos de Cuba, también han sido identificados en otros contextos como lo describen Calvo, Capilla y Gómez-Collado (2008) y Villarreal, Carmona y Arango (2013). Para revertir esta situación, dentro de la aplicación de la estrategia definida se diseñan y desarrollan diversas estrategias de enseñanza, con el objetivo de minimizar los problemas revelados.

Para tratar de definir una estrategia propia de la disciplina Matemática para la enseñanza de la Geometría Analítica en la carrera de Arquitectura, se revisaron, entre otros, varios trabajos relacionados con la aplicación del modelo de Van Hiele, como una teoría de la enseñanza de la geometría, (Arango, Carmona y Villarreal, 2013). El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana, (Rodríguez, Rodríguez, 2007), también constituyó uno de nuestros puntos de partida.

La estrategia definida para la enseñanza de la Geometría Analítica en la carrera de Arquitectura en la Universidad Tecnológica de la Habana José Antonio Echeverría, Cujae, se basa fundamentalmente en tres principios:

- Lograr un vínculo natural con la disciplina EGAU.
- Aportar herramientas de representación e interpretación.
- Aplicar los conocimientos adquiridos de geometría a la descomposición gráfica y analítica de obras arquitectónicas.

En su implementación, se han proyectado y ejecutado experiencias de integración de la Matemática con la disciplina EGAU. Las buenas prácticas logradas, en el marco de una investigación en la acción, después de realizar los ajustes pertinentes en sus distintas ediciones, han contribuido notablemente a la elevación de la motivación de los estudiantes por la Matemática, así como a demostrar la pertinencia de los contenidos de su programa en la carrera, lo que actualmente se toma en cuenta para el diseño del nuevo Plan de Estudios

En la actualidad, durante el estudio de la Geometría Analítica se profundiza en el uso consecuente de conceptos y terminologías, propios de la Geometría Descriptiva utilizados en la disciplina EGAU, así como en la adquisición de habilidades en el dibujo a mano libre y/o con instrumentos de curvas, sólidos y sus proyecciones. Se reeditan ejercicios integradores realizados en programas anteriores, los que han sido enriquecidos con la incorporación de nuevos elementos, pero con el mismo propósito: que los estudiantes apliquen los conocimientos matemáticos adquiridos en la Geometría Analítica, a la descomposición de obras arquitectónicas: gráfica y analíticamente.

Recíprocamente, la disciplina EGAU utiliza los elementos de la Geometría Analítica estudiados en la disciplina básica, con el fin de entender las construcciones geométricas, la obtención de la forma real de caras planas y, en consecuencia, la representación de desarrollos y elaboración de maquetas. Se utilizan técnicas digitales para la interpretación, modelación tridimensional y representación en proyecciones ortogonales de geometrías complejas, generalmente asociadas a obras con valor arquitectónico, captadas digitalmente de la realidad a través de nubes de puntos y que requieren ser estudiadas con precisión para su conservación, reconstrucción o reproducción.

Se realizan trabajos de cursos y exámenes de premio de Matemática, para los alumnos de altos rendimientos, que vinculen contenidos de ambas disciplinas. Se ejecutan trabajos extracurriculares de matemática sobre temas que vinculan a las dos disciplinas, para presentar en Jornadas Científicas Estudiantiles. Para la presentación de resultados, se combinan técnicas de representación manuales y digitales, profundizando en el diseño gráfico plano, así como en la elaboración de portales webs y productos multimediáticos.

Con la estrategia seguida en la enseñanza de la Geometría Analítica, la Matemática consigue un vínculo natural con la disciplina EGAU, a partir del fortalecimiento de la relación percepción-análisis-interpretación-representación de los objetos de estudio comunes de la Geometría Analítica y de la Geometría Descriptiva, así como aporta herramientas de representación e interpretación que les facilita a los estudiantes modelar el espacio circundante.

La percepción se realiza a través de la observación directa o del levantamiento fotogramétrico realizado, con lo que el estudiante logra el reconocimiento de los elementos geométricos que lo componen y sus relaciones.

Para el análisis se examina las diferentes variantes en las que se identifica un objeto geométrico para clasificarlo y en consecuencia, seleccionar o construir el modelo más eficaz en función del objetivo que se pretenda. Para una correcta interpretación el estudiante tiene que llegar a la esencia de las relaciones analíticas y descriptivas entre el objeto y su representación geométrica o el modelo tridimensional que lo sintetice, ya sea gráfico o físico.

Para la representación, se parte de la disposición de los elementos que identifican al objeto y de la conformación mental de imágenes de su geometría, que son trasladadas posteriormente al sistema gráfico de representación más conveniente.

La realización de estas experiencias integradoras, ha requerido un trabajo metodológico conjunto en cuanto al uso de la terminología, orden y tratamiento de los contenidos, determinación de los nodos de articulación, definición de conocimientos y habilidades, aplicación de un sistema de evaluación coherente, análisis de la posición relativa de materias según intereses de la otra disciplina de la especialidad, así como del diseño de actividades docentes y científicas conjuntas como el proyecto actualmente ejecución Forma y Métrica de la Arquitectura cubana.

Las acciones realizadas han contribuido a dar cumplimiento a los objetivos y orientaciones metodológicas de la disciplina Matemática tales como:

- Lograr la articulación intra e interdisciplinaria de los contenidos de Matemática, lo que permitirá: valorar la correcta ubicación de la asignatura en el plan, enriquecer las clases con ejercicios y problemas de aplicación dentro de la propia Matemática y en temas de la especialidad y fomentar el interés de los estudiantes por la Matemática

- Desarrollar habilidades para la comunicación y comprensión oral, escrita y gráfica de propiedades y características geométricas de formas y cuerpos geométricos, lo que posibilita la defensa de sus criterios en el proceso de solución de un problema, el análisis geométrico en general y de los objetos urbano-arquitectónicos, ayudándole a organizar las ideas y contribuyendo a la toma de decisiones sobre la forma de organizar el espacio.

A continuación, mostramos algunos ejemplos de ejercicios y actividades desarrolladas en asignaturas de Matemática y EGAU

Ejemplos de ejercicios realizados en clase

1. Obtenga las ecuaciones de los planos proyectantes de la recta *r*, represéntela gráficamente e interprétela según las tres tríadas de conceptos básicos (posición básica, relaciones de posición y modos de percibir), contenidos y habilidades estos definidos por EGAU (Gispert, 1987)

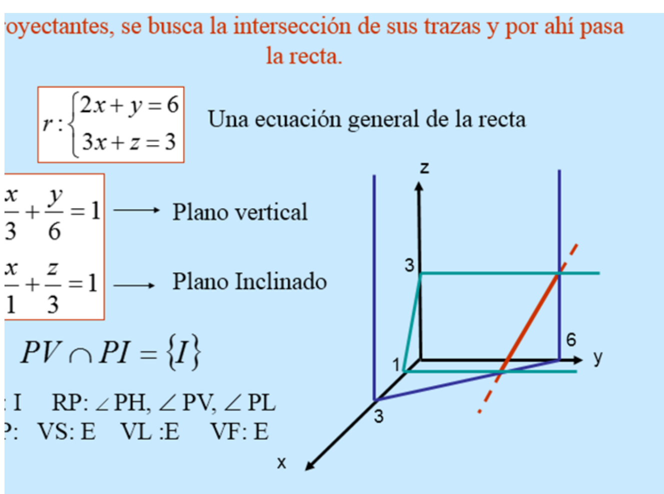


Fig. 1. Ejemplo de representación y obtención de las ecuaciones de dos planos proyectantes y la recta de intersección entre ambos, obtenida de forma analítica y descriptiva, a partir de su interpretación objetiva. (Donde PV: plano Vertical, PI: plano Inclinado, I: recta Inclinada, PB: posición básica respecto a los líquidos en reposo, RP: relación de posición, PH: plano Horizontal, PL: plano Lateral, VS: en Vista Superior, VL: en Vista Lateral, VF: en Vista de Frente, E: en escorzo, ∠: oblicua a). Fuente: elaboración propia.

2. Dado el siguiente sólido:

$$W=\left\{(x,y,z)\in R^3\,/\,x^2+y^2\le 4,\quad x+z\le 2,\quad 0\le x\le y,\quad z\ge 0\right\}$$

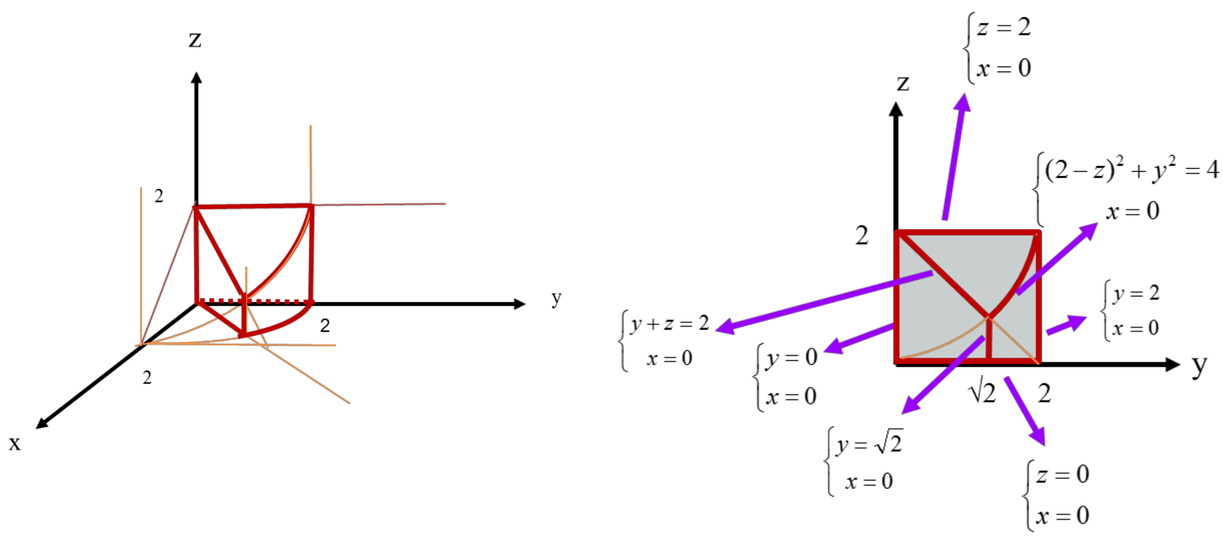
a) Represéntelo gráficamente y obtenga su proyección ortogonal sobre el plano Lateral. Escriba las ecuaciones de las aristas respectivas en la proyección.

b) Diga si la curva $C:\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x+z=2\end{cases}$ es plana o alabeada.

c) Interprete las caras del sólido a partir de las tres tríadas de conceptos básicos.

Respuestas:

a)



b) La curva C es plana porque todos sus puntos están contenidos en el plano $x+z=2$

Tabla Nº1. Representación Isométrica del sólido, representación objetiva de caras planas con el uso de las triadas de conceptos manejados desde EGAU, proyección ortogonal en el plano Lateral y ecuaciones de las curvas que lo limitan. (*) Generalmente son denotados los vértices, pero para mayor limpieza de la imagen fueron nombrados por la forma o la ubicación en el espacio.

Elemento de análisis (*)	Posición Básica	Relación de posición			Modo de Percibir		
		Con PV	PH	PL	En VS	VdF	VLI
Cara inferior	H	Perpendicular	Contenida	Perpendicular	Frontal-mente	De canto	De canto
Cara trapezoidal	V	Oblicua	Perpendicular	Oblicua	De canto	En escorzo	En escorzo
Cara superior	I	Perpendicular	Oblicua	Oblicua	En escorzo	De canto	En escorzo
Cara cuadrada	V	Perpendicular	Perpendicular	Contenida	De canto	De canto	Frontal-mente

Fuente: elaboración propia

Ejemplo de ejercicios realizados en seminario

En la construcción de una vivienda, se desea rematar un pórtico de acceso a un portal con un arco de circunferencia rebajado, que cubra una luz de 2.5 metros y una flecha de 0,6 metros Para ello se decide construir un dintel, (sombreado en la Fig.2), que requiere elaborar un cofre o molde que sirva para obtenerlo. Si Ud. cuenta con un cordel para trazar el arco que remata el pórtico:
a) ¿Qué longitud debe tener el cordel que permite trazar dicho arco?
b) ¿A qué altura del piso debe fijarse uno de los extremos del cordel para poder trazar el arco?

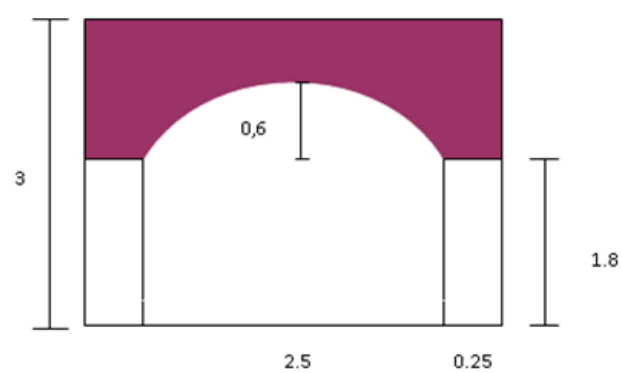


Fig. 2 Representa el pórtico de acceso a un portal

El arco de un puente ferroviario cuya luz es L= 60 m y la altura h= 12 m tiene forma parabólica. Determinar la altura h_1 de los soportes laterales del arco que se encuentra a 15 m de distancia de los extremos del puente.

Otros tipos de ejercicios más complejos realizados en EGAU

Realizar levantamiento fotogramétrico con cámaras convencionales, interpretar la nube de puntos a partir de la obtención de las ecuaciones de las curvas que se generan y completar la representación del modelo en sistema Axonométrico y en proyecciones ortogonales.

Fig. 3 Nube de puntos de levantamiento de la Iglesia del Santo Ángel Custodio, La Habana, y ecuaciones obtenidas de algunas de las curvas que definen el objeto arquitectónico. Trabajo dirigido por la Dra. Karen Sanabria y Arq. Carlos Guerra en 2012, como parte del Proyecto Forma y Métrica de la Arquitectura cubana (Sanabria, K. y otros, 2012)

Conclusiones

La actualización y el perfeccionamiento de las disciplinas en Educación Superior constituyen acciones estratégicas en la elevación continua de la calidad de la formación. En particular la adecuación de los planes de ciencias básicas en carreras técnicas, como es el caso de las Matemáticas en Arquitectura y una mayor interrelación y coordinación entre asignaturas básicas y de la especialidad, así como la realización de ejercicios conjuntos, debe y puede contribuir significativamente al aumento de la motivación y al protagonismo del aprendizaje autónomo del estudiante, y consecuentemente a una mayor eficacia de la formación desde la integración conceptual y didáctica.

Los resultados de experiencias mostradas han permitido profundizar en contenidos y habilidades de los programas de ambas disciplinas, comparar resultados analíticos y descriptivos y detectar errores y limitantes de ambos métodos, el analítico y el gráfico en el alcance de objetivos de la profesión. Ejercicios más complejos que requieren del dibujo simultáneo de diferentes funciones demuestran la validez de la parametrización de superficies.

Las actitudes de los alumnos, inicialmente reacias a las Matemáticas, por considerarse demasiado teóricas y difíciles, han pasado a ser más receptivas y a reconocer aplicaciones reales que pueden tener en la práctica de la profesión y su innegable valor, y que a pesar de la diversidad de aplicaciones informáticas existente en el mercado para el cálculo simbólico y la representación gráficas de funciones, todos ellos requieren de conocimientos teóricos multidisciplinares previos para la interpretación y justa valoración de los resultados.

Referencias bibliográficas

Calvo, V., Capilla, E. y Gómez-Collado, M. C. (2008). Una propuesta de experiencia conjunta en la enseñanza del Dibujo Arquitectónico y las Matemáticas. *Actas del XII Congreso Internacional de Expresión Gráfica Arquitectónica, 29-31 mayo. Madrid. España. pp. 155-165.*

Corral, R. y Núñez, M. (1990). Aplicación de un método teórico a la elaboración del perfil profesional en la Educación Superior. *Revista Cubana Educación Superior,* X

Crespo, M. (2007). *Programa de la Disciplina Matemática para Arquitectos (Plan D)*. Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría. La Habana. Cuba

Crespo, M., Guerra, C. y Sanabria, K. (2012). Matemática para arquitectos: convergencias conceptuales y experiencias pedagógicas integradas con Expresión Gráfica. *Revista Arquitectura y Urbanismo*, *vol. XXXIII, No 3, 113-121.*

Crespo, M., González, M. A., Sanabria, K. (2016). La contribución de la matemática a la formación socio-humanista de los futuros arquitectos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29,* 351-360.

Gispert. P.P. (1987) *Fundamentos de Representación.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Pozo, J. M. (2002). *Geometría para la Arquitectura. Concepto y práctica*. T6 Ediciones S.L.

Rodríguez, M. L. y Rodríguez, L. R. (2007). El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana*.* *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *vol. 10, núm. 3, 421-461.*

Sanabria, K. y otros (2012) *Forma y Métrica de la Arquitectura cubana*. Proyecto de investigación, Facultad de Arquitectura, Cujae. Ref. 510.

Arango, C. M. Carmona, J. A. y Villarreal, J. E. (2013). La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica: una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de Van Hiele y la metodología de aula taller. *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1-8. Montevideo. Uruguay.*

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

LA CUBICACIÓN DE MADERA COMO UN PROBLEMA GEOMÉTRICO REAL DISEÑADO PARA PROMOVER EL DESARROLLO DE HABILIDADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CUBICAL CALCULATION OF WOOD AS A REAL GEOMETRIC PROBLEM DESIGNED TO CONTRIBUTE TO THE DEVELOPMENT OF SKILLS IN PROBLEM SOLVING

Gloria Martínez Cruz, Estela de Lourdes Juárez Ruíz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. (México)
kishower07@gmail.com, estela.juarez2000@gmail.com

Resumen
Este trabajo analiza desde la perspectiva de la resolución de problemas, las estrategias de solución utilizadas por estudiantes de bachillerato ante un problema geométrico real. La propuesta surge del interés y necesidad por cuantificar el volumen de madera comercial de un árbol. El objetivo más allá de una respuesta es identificar las habilidades relacionadas con la resolución de problemas, detectadas a partir del análisis y contraste de las producciones de los estudiantes, donde muestran las diversas maneras de explorar, representar y resolver el problema, dadas las irregularidades geométricas e inaccesibilidad para realizar mediciones directas. Los resultados muestran las estrategias y procesos de resolución utilizados por los estudiantes para estimar el volumen, involucrando fórmulas geométricas, semejanza de triángulos y razones trigonométricas.

Palabras clave: resolución de problemas, contexto, habilidades, semejanza, cubicación

Abstract
This work analyzes, from the perspective of problem solving, the strategies used by high school students in a real geometric problem. This approach is originated from the interest and necessity to quantify the volume of commercial wood of a tree. The objective, beyond a numeric response, is to identify the skills related to problem solving, detected from the analysis and contrast of the students' performances, where they show the different ways of exploring, representing and solving the problem, given the geometric irregularities and inaccessibility to make direct measurements. The preliminary results show the strategies and resolution processes used by students to estimate volume, involving geometric formulas, similarity of triangles and trigonometric ratios.

Key words: problem solving, context, abilities, similarity, cubication

Introducción

En México, en los distintos niveles educativos y durante varios años, el currículo de matemáticas así como los métodos de enseñanza han estado sujetos a un eje común basado principalmente en conceptos y procedimientos, reflejados en objetos matemáticos formales y en métodos didácticos condicionados por la memorización y la repetición algorítmica, ocasionando que los estudiantes, desmotivados por la imperceptible vinculación o aplicación de estos conocimientos, pierdan el interés hasta el grado de llegar a la deserción escolar (Cantoral, 2013). Por lo cual es necesario generar cambios hacia una matemática inclusiva y no una matemática que sea factor de exclusión escolar.

En respuesta a esta demanda social y haciendo énfasis en la conexión entre la matemática escolar y la vida cotidiana, la propuesta actual de cambio curricular de matemáticas en el nivel medio superior en México reafirma la propuesta de fomentar en los estudiantes la capacidad de aprender a aprender, señalando las situaciones de resolución de problemas como una de las vías más asequibles para conseguir esta capacidad (Pozo, Pérez, Domínguez, Gómez y Postigo, 1998).

Esta marcada orientación del currículo hacia la resolución de problemas tiene implícita la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje contextualizadas, basadas en prácticas que favorezcan la funcionalidad y transversalidad del contenido, y que permitan propiciar en los estudiantes un aprendizaje significativo a través de la participación activa en la búsqueda de estrategias adecuadas para encontrar y proponer respuestas a preguntas no sólo escolares, sino también que den alternativas de solución a problemas de su realidad cotidiana (Pozo *et al.*, 1998).

En Oaxaca, estado situado al sureste de México, como subsistema educativo alternativo en el nivel medio superior, se encuentra el Modelo Educativo Integral Indígena presente en (CSEIIO, 2014), que rige a los Bachilleratos Integrales Comunitarios (BIC). En este modelo educativo, la matemática tiene sus principios metodológicos basados en la resolución y argumentación de problemas, referenciados a la vida cotidiana del estudiante y la comunidad, por lo que es necesario diseñar actividades que consideren las particularidades de las regiones y localidades donde se ubican los planteles.

Centrado en estas condiciones, el presente trabajo parte de un diagnóstico de la comunidad donde se ubica el plantel, identificando que la zona alta de la localidad está cubierta con vegetación de pino (*pinus strobus variedad chiapensis*), recurso forestal con relevancia ambiental y económica para sus habitantes. En el análisis exploratorio de las problemáticas detectadas por los estudiantes, prevaleció la importancia y necesidad de conocer técnicas básicas de cubicación de los productos forestales.

Atendiendo a los intereses y necesidades de los estudiantes, identificadas a partir de un diagnóstico, así como a los objetivos curriculares del modelo educativo y las características de la comunidad, se estableció la siguiente pregunta general de investigación: ¿Qué habilidades relacionadas con la resolución de problemas se fomentan en los estudiantes de bachillerato al enfrentarse al problema de la cubicación de la madera en sus principales etapas en la cadena forestal?

El objetivo es promover las habilidades relacionadas con la resolución de problemas en estudiantes de bachillerato a través de la implementación de un problema de su realidad comunitaria diseñado a partir de la cubicación de los productos forestales primarios.

Marco referencial

El término *problema,* como lo definen Pozo *et al*. (1998), hace referencia a situaciones muy diferentes en función de las características de las personas que se encuentran en ellas, de sus expectativas y del contexto en que se produce la situación, poniendo en marcha una serie de habilidades y conocimientos en función del tipo de problema al que se enfrentan.

Lester (1983), incluye en la definición la necesidad individual o grupal de resolver una situación y para la cual no dispone de un camino inmediato y correcto que lo conduzca a la solución, pero para lo cual se requiere un proceso de reflexión o toma de decisiones sobre la secuencia de pasos a seguir.

Existen varias clasificaciones de las posibles estructuras de los problemas tanto la función del área al que pertenece y del contenido de estos, como al tipo de operaciones y procesos necesarios para resolverlos. Pese a las diferencias entre los tipos de problemas que conducen a una divergencia en los procedimientos de resolución, existen procedimientos y habilidades que son comunes en todos los problemas y que tiene que realizarse en un determinado orden de manera que nos conduzca a la meta deseada (Pozo *et al*., 1998). Considerando la clasificación realizada por Díaz y Poblete (2001), un problema del contexto real se produce efectivamente en la realidad y compromete al estudiante a actuar.

Habilidades en la resolución de problemas

En la resolución de problemas matemáticos, Estrada (1999) define habilidad como la preparación del estudiante para estructurar modos de actuar y métodos de solución utilizando los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos, en calidad de instrumentos, y las estrategias de trabajo heurístico para la sistematización de esos instrumentos en una o varias estrategias de solución.

Situados en el contexto escolar, en el nivel medio superior, las áreas donde el estudiante debe presentar habilidades, según Estrada (1999) son:

Comunicación de ideas matemáticas. Manejo del lenguaje y notación matemática, comprender y expresar las ideas matemáticas transmitidas de forma oral, escrita, etc.
Razonamiento matemático. Llegar a conclusiones a partir de un conjunto dado de condiciones, justificar su pensamiento a través de modelos, o usando hechos conocidos, propiedades o generalizaciones.

Aplicación de la matemática a la vida cotidiana. Representar matemáticamente situaciones de la vida real a través de gráficos, diagramas, tablas y expresiones matemáticas, así como a procesar matemáticamente los datos.

Percepción de que la respuesta es razonable. Verificar si las soluciones que aportan son razonables o no, en relación con los datos iniciales, supone el desarrollo de la habilidad para estimar, entendida como el rango en que puede ubicarse la solución de un problema.

Habilidades propias del cálculo. Son aquellas que permiten al estudiante efectuar rápidamente cálculos exactos o aproximados, ya sea a través de la aritmética mental o empleando otras técnicas disponibles.
Pensamiento algebraico. El desarrollo del pensamiento algebraico permite resolver problemas prácticos, por ejemplo, de razones y proporciones y de variación directa o inversa.

Resolución de problemas. Se considera como un proceso de aplicación de conocimientos previamente adquiridos a situaciones nuevas y no familiares. Para la resolución de problemas podemos aplicar las estrategias de: presentación de preguntas, análisis de situaciones, transferencia de resultados, ilustración de resultados mediante el trazado de diagramas y uso de la técnica de prueba y error, a través de los cuales los estudiantes pueden desarrollar soluciones alternativas para los problemas y enfrentarse a problemas que tengan más de una solución o que no la posean.

El sistema de acciones y procedimientos de la habilidad para resolver problemas es el siguiente:

Para la comprensión y búsqueda de una vía de solución: determinar lo conocido y lo desconocido, establecer las relaciones entre lo dado y lo buscado, seleccionar los instrumentos para la solución (conceptos y teoremas conocidos), determinar la necesidad de buscar nuevos instrumentos para la solución (conceptos, teoremas, procedimientos nuevos), buscar analogías en ejemplos o problemas ya resueltos, determinar los problemas parciales que se deben resolver y determinar una estrategia de solución.

Para la descripción de la solución: utilizar la terminología y simbología apropiada, realizar inferencias lógicas, fundamentar los pasos de la solución, realizar los cálculos y las mediciones, realizar el planteo matemático (ecuación, fórmula, entre otros).
Para la verificación de la solución: Comprobar la solución, valorar las posibilidades de las soluciones y plantear la respuesta del problema

Para Villalobos (2008), la resolución de problemas se liga tanto con habilidades que capacitan para el uso de herramientas y procedimientos basados en rutinas, como en la aplicación de principios, leyes generales, conceptos y criterios. Dichos conocimientos se encuentran directamente vinculados con habilidades desarrolladas durante el proceso de resolución de problemas, como: buscar la información necesaria, conectar la investigación con los conocimientos previos, comprender conceptos, conocer y aplicar procedimientos rutinarios, organizar y encadenar argumentos matemáticos, interrogar, cuestionar e indagar, categorizar y comparar, utilizar distintos lenguajes, algoritmos y destrezas, describir lo que hacemos al resolver el problema, establecer conclusiones y trabajar en pequeños grupos de discusión donde se contribuya a la reflexión (Pozo *et al*., 1998; Villalobos, 2008).

Fases en la resolución de problemas

Bahamonde y Vicuña (2011) resaltan la importancia en la resolución de un problema la planificación de las fases. En el modelo de Polya (1965), se engloban las fases de solución de problemas y los métodos heurísticos para buscar esta solución. Este modelo ha sido exportado a otras áreas por diversos autores hasta el punto en que ha quedado instituido como método general de resolución de tareas independientemente de su contenido (Pozo *et al*., 1998).

Polya (1965), quien, utilizando el método introspectivo y basado en su propia experiencia, identifica cuatro etapas dentro de este proceso: comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida.

Estas cuatro fases indicadas en el modelo de Polya, proporcionan un esquema general, en el cual es preciso desarrollar específicamente para cada área y tipo de problema, es decir, acompañadas de un conocimiento contextual específico. Dado el estrecho vínculo entre el dominio de habilidades procedimentales y la adquisición de conocimiento conceptual (Pozo *et al*., 1998).

Metodología

La población del estudio está constituida de 14 estudiantes de entre 16 y 19 años inscritos en el Bachillerato Integral Comunitario No. 44, ubicado en Santa María Yaviche, Sierra Norte del estado de Oaxaca, México, localidad catalogada como zona de alta marginación y pobreza.

Durante seis sesiones semanales (dentro y fuera del aula) se implementó un problema real sobre la cubicación de la madera en sus principales etapas forestales, dicho problema hace referencia a la medición y cuantificación del volumen de la madera en sus principales formas y etapas: árboles en pie y trozas (secciones del tronco con dimensiones normalizadas); por lo que se requiere hacer mediciones principalmente de diámetro y la altura de los árboles.

El diseño seleccionado aborda un problema de medida, en el que la inaccesibilidad matemática no es de índole numérica sino geométrica y deriva de la diversidad morfológica de los objetos que deben medirse.

Los contenidos matemáticos abordados son semejanza de triángulos y razones trigonométricas, así como cálculo de perímetro y volumen. La situación problemática planteada a los estudiantes fue ¿Cómo determinar la cantidad de madera comercial contenida en un pino *strobus variedad chiapensis* en sus etapas primarias dentro de la cadena forestal?

Ante este problema, se observa que no se proporciona información numérica que amerite el uso de algún algoritmo de forma inmediata, los estudiantes tienen que obtener los datos a partir de la interacción con objetos reales (pinos), realizar mediciones que consideren necesarias e incluso la creación de algún instrumento de apoyo para realizar dichas mediciones.

Respecto a la estructura de la implementación en el aula se realiza considerando las cuatro actividades de instrucción importantes identificadas en Santos (2007): exposición por parte del instructor, discusión en grupos pequeños, presentaciones individuales por parte de los estudiantes y participación grupal.

La autora realizó una revisión de los conceptos y terminología básica del tema, exponiéndola ante el grupo. Durante el proceso de resolución, los estudiantes organizados en equipos tuvieron la facilidad de investigar el proceso de cubicación forestal o métodos para la estimación de volúmenes. En plenaria se dio la apertura para la discusión de la base matemática de las fórmulas y modelos propuestos donde la autora participó fortaleciendo contenidos pertinentes.

Los estudiantes identificaron los métodos factibles y diseñaron los instrumentos necesarios para realizar las mediciones, plantearon problemas más simples para llegar a la meta, resolvieron los problemas planteados, analizando y comprobaron las propuestas.

En las distintas fases de resolución del problema, los estudiantes muestran producciones iniciales, descripciones, explicaciones y predicciones que son progresivamente refinadas, revisadas y/o rechazadas con base en la retroalimentación y discusión de sus ideas dentro del equipo y en el grupo. Durante el proceso se orientó a los estudiantes a través de preguntas para favorecer su desempeño, analizando las producciones y de ser necesario, formular otras preguntas que permitieran orientar el proceso de resolución del problema.

Resultados

En las tablas siguientes se describen las actividades realizadas por un equipo de estudiantes durante la primera etapa, referente al cálculo del volumen de madera del árbol en pie, indicando las estrategias relacionadas y las habilidades identificadas durante cada una de las fases del proceso de resolución del problema considerando el modelo de Polya: comprender el problema (Tabla 1), concebir un plan (Tabla 2), ejecutar el plan (Tabla 3) y examinar la solución obtenida (Tabla 4).

Cubicación del árbol en pie

Tabla 1. 1ª Fase del modelo de Polya: Comprender el problema

<table>
<tr><td colspan="2">Identificar los conceptos y definiciones involucradas o relacionadas con la información que brinda el problema.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategias relacionadas
Descomponer un problema en casos más simples.
Dibujar alguna figura relacionada al problema y destacar en ella la incógnita y los datos.
Nombrar elementos presentes en la figura e introducir una notación adecuada.</td></tr>
<tr><td>Habilidades identificadas
Identifica palabras claves que expresan relaciones en el problema.
Identifica las variables que intervienen en el problema.
Expresa con sus palabras la idea fundamental del problema.
Identifica los datos necesarios y suficientes para encontrar la solución.
Identifica de qué tipo de problema se trata a partir de la información de que se dispone.
Reconoce en sus conocimientos previos la existencia de problemas con las mismas condiciones o similares.
Analiza una posible forma de representación de lo que se pide en el problema.
Identifica conocimientos propios disponibles y los necesarios para resolver el problema.</td><td>Descripción del proceso de resolución
Equipo 1. Identifican la terminología básica del problema y las relaciones elementales que existen en él. Expresan con sus propias palabras la idea fundamental del problema, pero desconocen cómo resolverlo. Dividen el problema principal y analizan como primer problema estimar el volumen de madera del árbol en pie. Reconocen que no se proporcionan los datos y que para obtenerlos deben efectuar mediciones. Como primera aproximación mencionan la fórmula del volumen de un cilindro. Identifican la medida de la altura y del diámetro como incógnitas y que su medición no se puede realizar de manera directa. Utilizan para representar a las incógnitas las letras usuales. Identifican como elemento auxiliar al triángulo, para calcular la altura. Reconocen el uso de datos u operaciones adicionales, por ejemplo, el promedio, dada la irregularidad del objeto a medir.</td></tr>
</table>

Tabla 2. 2ª Fase del modelo de Polya: Concebir un plan

<table>
<tr><td colspan="2">Organizar la información en tablas, esquemas u otros organizados gráficos que faciliten el descubrimiento de relaciones que no son evidentes directamente, se exploran estrategias, se realizan acciones para obtener ideas sobre la vía de solución.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Estrategias relacionadas
Recordar un problema relacionado con el actual, con la misma incógnita o similar.
Modificar el problema de forma que nos pueda conducir a algún otro problema auxiliar.
Tratar de resolver primero algún problema similar.</td></tr>
<tr><td>Habilidades identificadas
Indica la manera de organizar la información.
Elige el método más adecuado para buscar la solución.
Selecciona las fórmulas con las que se puede resolver el problema.
Indica las repeticiones necesarias para resolver el problema.
Revisa las condiciones iniciales para encontrar la solución del problema
Analiza los efectos que se producen al variar un parámetro
Descripción del proceso de resolución</td><td>Producciones del equipo

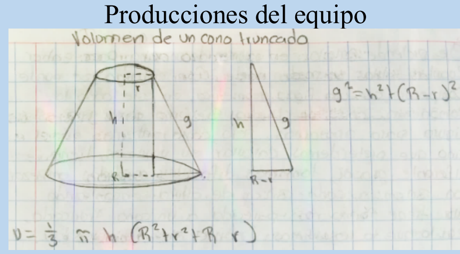



Figura 1. Aproximación del volumen por medio de la fórmula del cono truncado</td></tr>
</table>

Equipo 1. Investigan fórmulas para calcular el volumen de cuerpos geométricos con características similares a las que presenta el tronco del pino, proponen la fórmula del cono truncado (Figura 1). Señalan que con la medida del contorno del tronco, considerada como una circunferencia (Figura 2) es posible obtener la medida del diámetro. Indican que llegará un momento en que no podrán alcanzar a medir el diámetro, entonces requieren calcular la altura aproximada del pino. Proponen construir un clinómetro para poder calcular el ángulo que les permita el empleo de una razón trigonométrica. Analizan gráficamente los efectos de variar la distancia desde el observador (Figura 3).

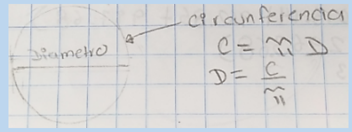


Figura 2. Uso de la fórmula de la circunferencia para calcular el diámetro

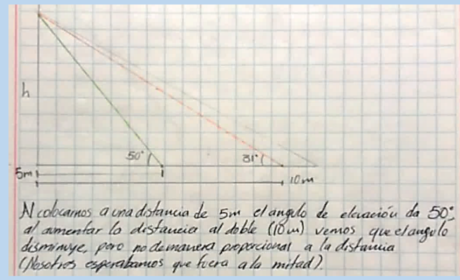


Figura 3. Variación del ángulo debido a un cambio en la distancia

Tabla 3. 3ª Fase del modelo de Polya: Ejecutar el plan

Articular las deducciones y proposiciones pensadas de forma lógica y coherente, se validan las hipótesis formuladas anteriormente, entre otras acciones dirigidas a estructurar la vía de solución y satisfacer la exigencia del problema.

Estrategia relacionada
Verificar cada paso del razonamiento

Habilidades identificadas

Reconoce la validez de utilizar el método y las fórmulas propuestas.
Piensa y describe el procedimiento para resolver el problema con las fórmulas.

Sustituye los datos y calcula con las fórmulas.
Calcula las variaciones que se sugieren.
Verificar que la solución responda a lo que se pide en el problema.

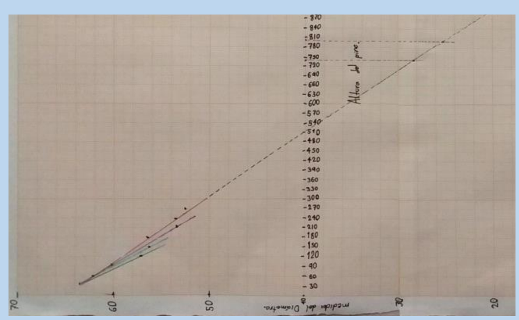
Identificar si existe una contradicción con lo pensado inicialmente.

Descripción del proceso de resolución:

Equipo 1. Los estudiantes realizaron las mediciones del tronco cada 30 centímetros (Figura 4), para hallar volúmenes parciales de cada sección y conocer el comportamiento de la circunferencia en esos intervalos y realizar una estimación del diámetro en las alturas posteriores a partir de la construcción de una recta que mejor se aproximara a los datos (Figura 5). Construyeron un clinómetro casero para realizar la

Producciones del equipo


Figura 4. Medida del contorno a cada 30 cm



medida del ángulo de elevación y por medio de razones trigonométricas calcular la altura del pino. A partir de la medida del diámetro obtenida en la gráfica y la medida de la altura calculada a partir de la razón trigonométrica tangente (Figura 6), los estudiantes emplearon la fórmula para el cálculo del volumen del cono truncado. A partir de este volumen y con los estándares utilizados para la cubicación, determinaron la cantidad de madera aprovechable y el valor comercial de la misma. Manifestaron la importancia de realizar las mediciones de forma adecuada y con instrumentos más precisos.

Figura 5. Construcción de una recta para aproximación de los datos

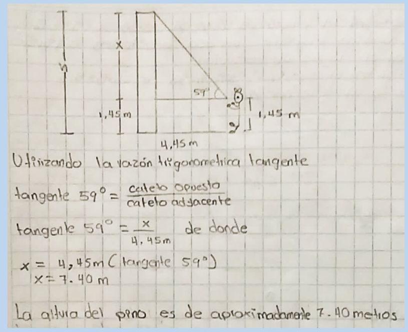


Figura 6. Cálculo de la altura con razones trigonométricas

Tabla 4. 4ª Fase del modelo de Polya: Examinar la solución obtenida

Comprobar la vía de solución, si existen otras vías de solución alternativas y la posibilidad de transferirla a otros problemas.

Estrategias relacionadas
Reconsiderar la solución, reexaminar el resultado y el camino que conduce a la solución.
Identificar la existencia de otro medio para asegurarse de la exactitud del resultado.
Utilizar el resultado o el método para resolver algún otro problema.

Habilidades identificadas

Verifica si el resultado es correcto.
Revisa si existen contradicciones con las condiciones reales.
Compara la vía de solución con las de otros problemas resueltos anteriormente.
Reflexiona sobre la pertinencia de la vía empleada para resolver el problema.
Indaga sobre la existencia de una vía mejor para resolver el problema.
Revisa todos los pasos para llegar a la vía de solución

Descripción del proceso de resolución:

Equipo 1. Los estudiantes utilizaron las mediciones adicionales del contorno para obtener el diámetro a la altura de pecho (Figura 7) y con el clinómetro (Figura 8) obtiene la altura a partir de razones trigonométricas. Con estos datos adicionales utilizan la fórmula de Smalian (Figura 9) utilizada para la cubicación de la madera y comprueban los resultados obtenidos a través del método geométrico propuesto. Observan que hay diferencia en el volumen que obtuvieron calculado a partir de los datos obtenidos a través de la graficación ($1.32 m^3$) y el volumen obtenido utilizando la fórmula de cubicación de

Producciones

Figura 7. Medida del contorno para calcular el diámetro a la altura de pecho

Figura 8. Medida del ángulo para determinar la altura

Smalian ($1.42m^3$) donde esta presente una constante de forma. Por lo que consideran que el método empleado en sus estimaciones puede ser utilizado con instrumentos que permitan una mayor exactitud en las medidas.

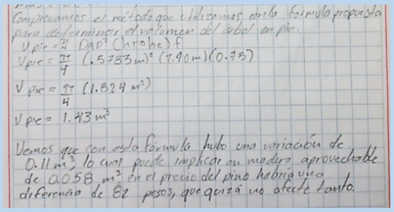


Figura 9. Cálculo del volumen a partir de la fórmula de Smalian.

Conclusiones

En la implementación del problema se observó que aun cuando los estudiantes no conocían las fases del modelo de Polya en la resolución de problemas, fueron siguiendo dichas fases no precisamente de manera lineal y consecutiva, pero se orientaron a partir de las preguntas guía. Las fases iniciales (*comprender el problema* y *concebir un plan*) fueron más difíciles de guiar dado que los estudiantes están acostumbrados a una revisión rápida del problema e ir directamente a la ejecución de un algoritmo, pero el diseño de este problema no permitía una vía de solución rápida, por lo que fue necesario detenerse a comprender el problema, plantear alguna propuesta de solución y analizar dicha propuesta antes de ejecutarla.

El resolver el problema con objetos reales permitió a los estudiantes explorar vías de solución, recurrir a diversas estrategias. Resaltar la importancia de cuestionarse sobre el efecto de ciertas variables al cambiar algún dato, la necesidad de construir o usar instrumentos específicos de medición, el ser un propio crítico y evaluador de sus procesos y resultados, así como el no limitarse al empleo de un solo método de solución, y proyectar esta solución a otros problemas similares o relacionados, les permitió promover el carácter funcional del conocimiento matemático escolar y por lo tanto fortalecer el desarrollo de habilidades relacionadas con la resolución de problemas no solo del área de matemáticas sino también con problemas que se le presentan cotidianamente.

Referencias bibliográficas

Bahamonde, S. y Vicuña, J. (2011). *Resolución de problemas matemáticos*. Tesis de licenciatura no publicada, Universidad de Magallanes. Chile.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

CSEIIO (2014). *Modelo Educativo Integral Indígena. Planes y programas de estudio 2014*. México.

Estrada, P. (1999). *El desarrollo de las habilidades matemáticas en función de su repercusión interdisciplinaria.* Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Nuevo León. México.

Díaz, V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, 45, 33-41.

Lester, F. (1983). *Trends and issues in mathematical problema solving research. Acquisition of mathematics concepts and processes.* London: Academy Press. 229-261.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Pozo, J., Pérez, M., Domínguez, J., Gómez, M. y Postigo, Y. (1998). *La solución de problemas*. México: Aula XXI. Santillana.

Santos-Trigo, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Villalobos, X. (2018). Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 6(3), 36-58.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

CONSTRUCCIÓN DEL SENTIDO ESTADISTICO EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE CIENCIAS NATURALES

CONSTRUCTION OF THE STATISTICAL SENSE IN UNIVERSITY STUDENTS OF NATURAL SCIENCES

Liliana Tauber, Yanina Redondo, Silvana Santellán
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. (Argentina)
estadisticamatematicafhuc@gmail.com, yaniredondo@gmail.com, santellansilvana@gmail.com

Resumen
En el presente trabajo describimos las componentes de una propuesta de enseñanza de Estadística aplicada a las Ciencias Naturales. Inicialmente se describe el marco de referencia centrado en las ideas estocásticas fundamentales en el que se basa la propuesta, teniendo como propósitos: generar una postura reflexiva y a la vez crítica en los estudiantes y favorecer la apreciación de los métodos estadísticos como un medio válido para la toma de decisiones. Asimismo, se describe la metodología de trabajo basada en el uso de simulaciones y del software R y centrada en el desarrollo de tareas de análisis de datos.

Palabras clave: sentido estadístico, ideas estocásticas fundamentales, cultura estadística

Abstract
In this work we describe the components of a teaching sequence of Statistics applied to Natural Sciences. Initially, the frame of reference centered on the fundamental stochastic ideas on which the proposal is based is described, having as objectives: to generate a reflexive and critical position in the students and to favor the appreciation of the statistical methods as a valid means for the decision making. Likewise, the methodology based on the use of simulations and R software and focused on the development of data analysis tasks is described.

Key words: statistical sense, fundamental stochastics ideas, statistical literacy

Introducción

Movilizadas por la necesidad de fomentar un aprendizaje significativo de los conceptos estocásticos en estudiantes de Profesorado de Biología y de Licenciatura en Biodiversidad, adherimos a los enfoques propuestos por diversos autores quienes indican la importancia de desarrollar en los estudiantes un *Sentido Estadístico* a través de propuestas que no deriven en aprendizajes ambiguos y a corto plazo de los conceptos. Con la clara convicción de que debemos enfocarnos en que los estudiantes comprendan conceptos, técnicas y fundamentos estadísticos, consideramos que es necesario planificar nuestras propuestas de enseñanza combinando en ellas el conocimiento disciplinar, los enfoques actuales de Educación Estadística y los recursos tecnológicos disponibles para fusionar potencialmente las anteriores.

A partir de estas inquietudes, hemos planificado e implementado diversas tareas de análisis de datos entrelazadas en una propuesta didáctica enfocada en revalorizar y relacionar las ideas estocásticas fundamentales, buscando fortalecer la interpretación y comunicación de resultados basados en la evidencia empírica. Esta propuesta se ha diseñado junto a una evaluación continua complementaria, que busca favorecer el aprendizaje a largo plazo de los estudiantes.

Fundamentos teóricos

Diversa es la literatura que indica que, durante largo tiempo, los cursos de estadística se ocuparon específicamente del desarrollo de algoritmos y reglas en las que se utilizaba más el razonamiento matemático que el estadístico, con actividades descontextualizadas y aisladas de las aplicaciones reales con las que efectivamente va a enfrentarse el estudiante en su vida profesional, laboral o cotidiana (Behar y Grima, 2014; Moore, 2004). Como consecuencia de esto, ha cobrado relevancia el término *Cultura Estadística* (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013; Gal, 2002; Murray y Gal, 2002; Moreno, 1998; ASA, 2005), con la intención de promover que la Estadística forme parte de la herencia cultural necesaria para cualquier ciudadano educado. Lo que se pretende es proporcionar una *cultura estadística* entendida como la interrelación de dos componentes:

a. capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (Gal, 2002, p. 2-3).

Todos los modelos centrados en promover la *Cultura Estadística* coinciden en que resulta fundamental el desarrollo de las *Ideas Estadísticas Fundamentales* (Burril y Biehler, 2011), dentro de las cuales se consideran los datos, la variación, los resúmenes, el concepto de distribución, el de asociación y correlación, el concepto de probabilidad desde sus diferentes aproximaciones y las ideas de muestreo e inferencia. Además de la comprensión de estas ideas, su adecuada utilización en la resolución de situaciones que las involucren requiere del desarrollo del *Razonamiento Estadístico*, el cual representa un componente esencial del aprendizaje y del desarrollo de la *Cultura Estadística*, e involucra cinco componentes que, siguiendo a Wild y Pfannkuch (1999), podríamos diferenciar de la siguiente manera: *Reconocer la necesidad de los datos,* ya que la Estadística se basa en la evidencia proporcionada por los datos. Considerar la *Transnumeración,* que involucra la comprensión necesaria para interpretar la información cuando se cambia de una representación a otra. La *Percepción de la variación,* que involucra no sólo la identificación de las fuentes que la producen sino también la búsqueda de explicaciones y predicciones de la misma. El *Razonamiento con modelos estadísticos,* considerándolos como representaciones de la realidad e instrumentos para comprenderla y, la *Integración de la Estadística y el contexto*, el cual resulta una componente fundamental debido a la importancia que adquiere el contexto al tratar de brindar conclusiones válidas sobre los datos.

Si bien el desarrollo del *Sentido Estadístico* (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013), entendido como la unión de todas las componentes antes descriptas, debería darse de modo progresivo, construyéndose poco a poco y aumentando el nivel de formalización a lo largo de los diferentes niveles educativos, desde nuestra experiencia hemos notado que generalmente recibimos a los estudiantes con escasa o nula formación en lo que a conceptos estadísticos refiere. Esto ocurre a pesar de que varias de las ideas estocásticas fundamentales aparecen en los Núcleos de Aprendizaje Prioritarios para la Educación Secundaria de nuestro país (NAP, 2011).

Considerando la realidad de nuestros alumnos y movilizadas por el deseo de formar ciudadanos estadísticamente cultos, resulta necesario centrar nuestros esfuerzos en diseñar y desarrollar propuestas que presenten a la Estadística como herramienta para el campo profesional específico, destacando su importancia en la toma de decisiones y fomentando el *razonamiento estadístico* por sobre el trabajo mecánico rutinario con conceptos y propiedades teóricas aislados del propio contexto, incorporando la tecnología como herramienta para el tratamiento de un gran volumen de datos y para la realización de técnicas que involucran cálculos complejos.

Aspectos metodológicos de nuestra propuesta de enseñanza

Posicionadas en este marco de referencia del *Sentido y la Cultura Estadística* y considerando la necesidad de brindar los conocimientos, técnicas y métodos estadísticos requeridos para la futura vida profesional de nuestros estudiantes, los siguientes propósitos generales guían el desarrollo de nuestra propuesta:

- Generar una postura reflexiva y a la vez crítica del estudiante, que favorezca la apreciación de los métodos estadísticos como un medio válido para la toma de decisiones.
- Estimular la toma de decisiones relacionadas con la elección de técnicas de análisis apropiadas que permitan elaborar conclusiones basadas en los datos.
- Promover el aprendizaje activo y colaborativo en los alumnos, utilizando un software estadístico como instrumento idóneo para agilizar el análisis de datos.
- Favorecer en los estudiantes la elaboración de sus propios argumentos y conjeturas basados en el análisis exploratorio de datos.
- Fomentar el razonamiento estadístico a través de la modelización y el estudio del ajuste de modelos a los datos reales.

Teniendo siempre presente estos objetivos y las referencias que detallamos antes, es que elaboramos las estrategias de enseñanza y aprendizaje y la propuesta de evaluación continua que pasamos a describir a continuación.

Es así que el hilo conductor que guía nuestra propuesta es el análisis de situaciones vinculadas con problemáticas propias del área de interés de nuestros estudiantes: las Ciencias Naturales. Asimismo, muchas de las problemáticas que hemos seleccionado se retoman a lo largo de los dos semestres que duran las dos asignaturas en las que desarrollamos esta experiencia, de tal manera que nos permiten desarrollar distintas técnicas descriptivas y exploratorias para seguir analizando los datos por medio de los métodos de la Estadística Inferencial. Las problemáticas mencionadas están en relación con situaciones basadas en datos reales, en ocasiones obtenidos por investigadores de la misma carrera, un ejemplo de estas problemáticas se puede observar en el Cuadro 1 y Figura 3. Esto nos permite además, reflexionar sobre los alcances y las limitaciones de los datos y analizar cuando es o no posible realizar inferencias o utilizar uno u otro método. De esta forma, nuestra propuesta de trabajo pone en relación las siguientes componentes:

Componente 1. Uso de la simulación como recurso digital para el descubrimiento, interpretación y comunicación del conocimiento.

Siguiendo a Moore (2004), el enfoque de nuestra propuesta se centra en la comprensión conceptual de las ideas estocásticas fundamentales evitando la excesiva algoritmización de los conceptos, de tal forma que los contenidos teóricos sean trabajados de una manera que permita interpretar y comprender sus significados. Es así que, introdujimos la simulación como un medio para comprender los modelos subyacentes, especialmente en los métodos inferenciales, y sus propiedades (por ejemplo: para interpretar las propiedades de un estimador). Tanto a través de materiales concretos como por medio de simuladores virtuales (los cuales abundan en la web) hemos podido acercar al estudiante los conceptos de una manera más concreta, utilizando el enfoque de la *Inferencia Estadística Informal* (Tauber y Santellán, 2014) y permitiéndonos centrar el aprendizaje en las *ideas estocásticas fundamentales* (Burril y Biehler, 2011). Sólo por mencionar un ejemplo, para desarrollar los conceptos teóricos asociados a las distribuciones muestrales, utilizamos el simulador *Sampling Distribution* - http://onlinestatbook.com/stat_sim/sampling_dist/index.html (Figura 1).

A través de la realización de algunas tareas de exploración del mismo, favorecemos que los estudiantes puedan descubrir las características que definen a la distribución muestral de cada estadístico y entender las propiedades de los estimadores. En el simulador es posible discriminar diversos conceptos tales como: distribución poblacional, distribución de frecuencias, distribución muestral de un estadístico y las propiedades de los estimadores. Además, se pueden explorar las características de las distribuciones muestrales de la media, de la mediana, de la varianza, de la varianza insesgada, de la desviación estándar y del rango. Una vez que los alumnos han podido investigar y sacar conclusiones sobre las tendencias observadas en la simulación, presentamos las propiedades y teoremas de manera más formalizada, pero sólo después de que los alumnos tuvieron la oportunidad de darle significado a cada uno de los elementos que constituyen esas propiedades y teoremas.

En este punto somos conscientes que la incorporación de los simuladores en la clase, como todo recurso TIC, implica que presentemos actividades y tareas que favorezcan el aprendizaje de las propiedades antes mencionadas. Para el lector interesado en dichas tareas le sugerimos consultar Bianchi y Tauber (2014) y Tauber y Cravero (2012). Las intervenciones docentes que planteamos y las decisiones inmediatas que tomamos a lo largo del devenir de la clase tendrán como fin único el aprovechamiento de este simulador, lo que nos exige que no sólo conozcamos como manipular el simulador y cómo leer la información que puede extraerse de él en cada iteración, sino que sepamos cómo enseñar los conceptos de estimadores puntuales y sus propiedades o las propiedades de las distribuciones muestrales. Tal como puntualizan Mishra y Koehler (2006), saber utilizar ciertas tecnologías no es sinónimo de saber enseñar con tecnología. Aquí es donde fusionamos nuestro enfoque de enseñanza basado en la construcción del *sentido estadístico* con el conocimiento de los beneficios de esta tecnología y con un claro conocimiento disciplinar del o de los contenidos que pretendemos que aprendan y re-signifiquen nuestros estudiantes.

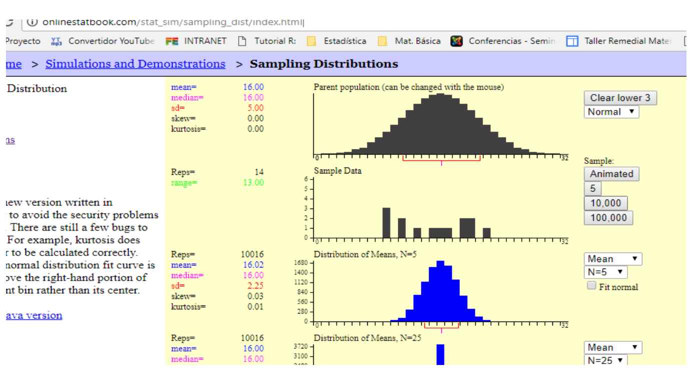


Figura 1. Pantalla del simulador *Sampling Distribution*

Componente 2. Utilización del software R-Studio para el procesamiento de datos y realización de diferentes test.

Dado que nuestro principal objetivo es promover el razonamiento estadístico en nuestros estudiantes, de tal manera de brindar fundamentos en la toma de decisiones de ciertas problemáticas de las Ciencias Naturales, es que nuestro interés no se focaliza en que el alumno memorice procedimientos y algoritmos, sino más bien en que el estudiante logre tomar decisiones sobre el análisis adecuado para buscar respuestas a su problema mediante los recursos estadísticos disponibles. Por otra parte, hoy en día la Estadística asistida con el uso de software específicos, permite el manejo y procesamiento de los datos de manera más sencilla, aunque introduce otras problemáticas diferentes. Por todo esto, desde hace varios años hemos incorporado a las cátedras el uso del software estadístico R para el procesamiento de los datos y la realización de todos los análisis y pruebas que desarrollamos en nuestras clases. El fundamento de la elección de este software radica en que, además de cubrir todas nuestras necesidades en lo que a procedimientos y análisis estadísticos refiere, constituye un software libre y es apto para distintos sistemas operativos. Por otra parte, R presenta diversos módulos que trabajan en entornos más amigables, tales como R-Commander y R-Studio. Es así que en el primer semestre se trabajan con estos módulos, ya que ambos permiten trabajar con diversas ventanas donde se pueden presentar una variedad amplia de análisis, numéricos y gráficos (como se muestra en la Figura 2).

Si bien R-Studio constituye un entorno más sencillo dentro del lenguaje R, tiene cierta estructura funcional que puede generar inconvenientes si es que no se la sigue según todos los requerimientos necesarios. Por este motivo, hemos elaborado un tutorial de 10 capítulos, en el que se desarrollan desde los pasos básicos para la instalación de R y del entorno R-Studio, pasando por el manejo de los datos, las diferentes técnicas de la Estadística Descriptiva, las distribuciones de probabilidad, hasta los métodos (paramétricos o no) de la Estadística Inferencial que desarrollamos a lo largo de ambas asignaturas. Asimismo, hemos realizado algunos videos explicativos del uso del software que los alumnos tienen disponible en el entorno de las asignaturas.

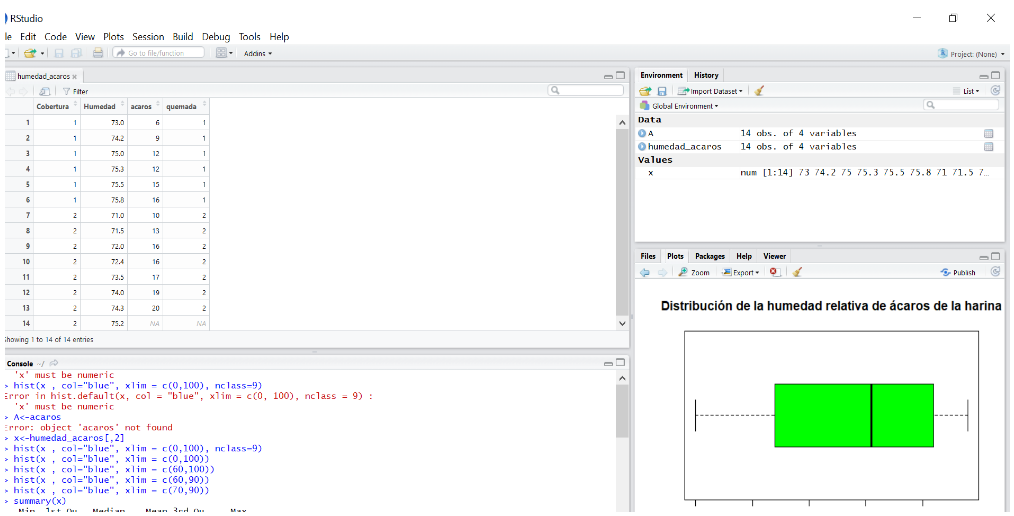


Figura 2. Ventanas de R-Studio

Es así que, a través de la propuesta de enseñanza y de las tareas diseñadas para la misma, hemos podido lograr una combinación didáctica disciplinar que busca desarrollar en nuestros estudiantes el razonamiento estadístico necesario en esta etapa de formación. De esta manera, el uso del software nos permite analizar bases de datos reales, la interpretación de la información obtenida mediante distintos resúmenes sobre la misma variable estadística (*Transnumeración*), la interpretación de conceptos básicos como medidas de posición o de dispersión asociada a la idea de distribución, analizar y comparar resultados obtenidos de distintas muestras de una misma población, entre otras cuestiones asociadas al Análisis Exploratorio de Datos. Y, como segunda meta, permite acercar a los futuros profesionales al uso del software para la obtención de resultados de investigaciones, según el método de inferencia adecuado. En esta segunda parte de la propuesta, además de aprender estos métodos, los estudiantes tienen la oportunidad de realizar un análisis comprensivo de "las salidas" del software que se presentan en investigaciones de su área, y de esta manera poder discutir y comunicar los resultados que observan (lo cual estaría relacionado con uno de los tipos de razonamiento que hemos enunciado antes, como es la integración de la estadística con el contexto).

Componente 3. Guías de tareas prácticas centradas en el análisis de datos reales derivadas de diferentes investigaciones de las Ciencias Naturales.

Las asignaturas en las que desarrollamos nuestra propuesta se llevan a cabo durante dos semestres mediante el cursado en clases teórico-prácticas. Es así, que las guías de actividades prácticas, que hemos elaborado con el mismo enfoque que la propuesta de enseñanza, cumplen la función de aportar tareas y situaciones problemáticas que permiten la integración de los conceptos que se van desarrollando. En las clases hay instancias en las que los alumnos analizan, discuten y resuelven algunas de estas tareas y luego exponen las conclusiones a sus pares. El contenido de las tareas presentadas en estas guías surge como una necesidad al buscar fomentar el *Sentido Estadístico* en nuestros estudiantes y a partir de la escasa existencia de bibliografía con una propuesta de tareas que promuevan el razonamiento estadístico para el área específica con la que estamos trabajando. Si bien, existen algunos autores que proponen este tipo de situaciones, como Triola (2013) o Mendenhall, Beaver y Beaver (2010), no todas las actividades se contextualizan en el área de nuestros alumnos, además de proveer datos ajenos al contexto nacional. Algunas características que consideramos diferencian a las tareas y situaciones que diseñamos respecto de los autores mencionados son:

- La mayoría de las situaciones problemáticas presentadas parten de datos provenientes de investigaciones reales, vinculadas directamente con la Biología y la Biodiversidad y contextualizadas en la región de donde provienen los estudiantes.
- Muchas de las tareas propuestas se elaboraron como pequeños proyectos que parten de una problemática en particular, con preguntas orientadoras que implican la participación activa de los estudiantes en la toma de decisiones respecto de los análisis necesarios para arribar a las conclusiones deseadas y esas conclusiones dependerán de las suposiciones iniciales que realicen los alumnos. Esto permite evaluar los criterios que utilizan los estudiantes para fundamentar sus decisiones y conclusiones.
- Los datos que se trabajan en las primeras guías se retoman a través de las subsiguientes para lograr profundizar el análisis a partir de los nuevos conceptos que se van desarrollando.

Por ejemplo, en el primer semestre, los estudiantes comienzan a reconocer en dos bases de datos, el tipo de muestreo empleado, la identificación de variables y sus correspondientes resúmenes descriptivos y tienen la oportunidad de analizar la metodología con la que se recolectaron los datos. Luego, en base a estos resultados, los estudiantes se involucran en el análisis de los modelos de probabilidad más pertinentes en cada caso para relacionarlos más adelante con los métodos inferenciales correspondientes para poner a prueba las hipótesis o conjeturas que ellos mismos han elaborado a partir del análisis exploratorio.

Componente 4. Prácticos evaluativos domiciliarios con apoyo en el uso de R-Studio para el análisis de datos.

Reconociendo que la propuesta de enseñanza que diseñamos involucra un cambio en la manera tradicional de evaluar los aprendizajes de nuestros estudiantes, en estos dos últimos años hemos centrado nuestros esfuerzos en una propuesta de evaluación continua, para la cual nuestros estudiantes, deben resolver tres prácticos evaluativos grupales y domiciliarios (a lo largo de cada semestre), en los que deben utilizar los fundamentos desarrollados en las clases y deben discutir con los integrantes del grupo de trabajo.

Estos prácticos pretenden fortalecer nuestra propuesta de enseñanza, proponiendo el desarrollo de un pequeño proyecto que parte de una problemática central, la cual interconecta las diferentes etapas evaluativas, y presentado consignas que inducen a que los estudiantes piensen, reflexionen y tomen las decisiones necesarias para encontrar respuestas sobre el problema bajo estudio. En los mismos no sólo se pretende enfrentar a los alumnos a una situación real de análisis de datos sino que además, al tener que resolverlo en grupos, tienen la posibilidad de discutir, confrontar opiniones y deben llegar a un consenso para poder dar las respuestas necesarias. Las tareas que se proponen tienen como finalidad dar la posibilidad que los estudiantes tomen decisiones respecto del tipo de análisis que van a utilizar, siendo necesario para esto que deban fundamentar claramente sus elecciones basándose en los conceptos que tienen disponibles. A modo de ejemplificación de estos prácticos, en el Cuadro 1 y en la Figura 3, presentamos la estructura de uno de ellos implementado en el año 2017.

Cuadro 1. Contextualización y actividades planteadas en un práctico evaluativo

En la base de datos se presentan distintas variables biométricas del cangrejo de agua dulce *Aegla uruguayana* (de distribución en la Cuenca del Plata: ríos Paraná, Uruguay y Colastiné), además del sexo y la localidad en la que se ha realizado el muestreo. Las variables corresponden a medidas y relaciones entre las mismas, correspondientes al cefalotórax y a las que las de cada cangrejo, las cuales se explicitan en la Figura 3.
Los datos son parte de la tesis: *Revisión de la variabilidad morfológica intrapoblacional e interpoblacional mediante métodos de análisis cuantitativos de la forma. Especies del género* ***Aegla Leach*** *(Crustácea, Decápoda, Anomura) de la Argentina. Giri,(2009).* Datos proporcionados por su autor con la debida autorización.

i. Consideren la variable "distancia entre las espinas orbitales (EO)", realicen los análisis estadísticos que consideren pertinentes, elaboren un informe en el que se describan las diferencias observadas sobre la distancia entre las espinas orbitales de los cangrejos según el lugar de observación, fundamentando la elección de todos los análisis que han realizado.
ii. A partir de la descripción realizada, ¿qué hipótesis pueden sugerir? ¿Qué métodos inferenciales elegirían para validar la hipótesis generada? ¿Cuáles son los fundamentos de la elección realizada?
iii. Verifiquen las condiciones de aplicación del o de los métodos seleccionados, elijan el que consideren más adecuado, aplíquenlo y extraigan conclusiones en base a ello.
iv. ¿En cuál o cuáles de los sitios observados se encuentran los especímenes con menores distancias entre las espinas orbitales? ¿En cuáles se observan los especímenes con mayores distancias? Expliciten en qué información se basan para dar la conclusión.
v. ¿Qué implicaciones biológicas tienen las conclusiones que han obtenido?

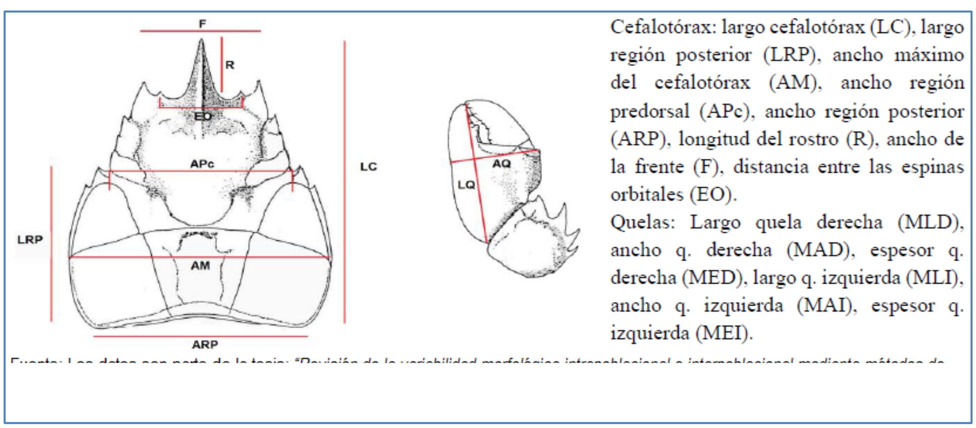


Figura 3. Variables estudiadas en cangrejos de agua dulce

En el Cuadro 1, hemos incluido preguntas de distintos prácticos evaluativos para dar cuenta del proceso que deben seguir los estudiantes, pasando desde el análisis exploratorio y descriptivo, la elaboración de conjeturas, la verificación de supuestos teóricos, hasta la realización de inferencias estadísticas formales. De esta manera se potencia el trabajo centrado en los diversos razonamientos estocásticos que hemos descripto en el marco de referencia.

Consideramos que la propuesta de evaluación tiene muchas potencialidades aún por explorar, pero la misma es una componente fundamental para el correcto engranaje de una enseñanza de la Estadística que se funda en favorecer el pensamiento estadístico en nuestros estudiantes (Behar y Grima, 2014). Además, esta manera de trabajar nos permite evaluar el conocimiento y las habilidades que ponen en práctica los alumnos respecto de la utilización del software, promoviendo de esta manera comportamientos autónomos.

Implicaciones didácticas

Más allá de las potencialidades de la propuesta que hemos detallado en las secciones anteriores, podemos indicar que desde el inicio de la implementación de este tipo de enseñanza y de las actividades asociadas, pudimos ver mayor nivel de compromiso en los estudiantes, así como mayor profundidad en las preguntas que realizan y en la discusión que se genera en el aula. Esto mismo puede observarse en las resoluciones a los prácticos evaluativos, información que analizaremos en próximos trabajos.

La interacción de los alumnos con el simulador de distribuciones muestrales, nos ha permitido discutir sobre la variación aleatoria y la variabilidad muestral, también fue posible distinguir de manera práctica, conceptos tales como la distribución de frecuencias, la distribución muestral de un estadístico y la distribución poblacional, ideas que generalmente resultan muy difíciles y abstractas para los alumnos, tal como lo reportan algunos investigadores (Canal y Behar, 2010; Tauber, 2001). Además, esta exploración nos ha permitido profundizar en el análisis de ideas conceptuales que, generalmente son complejas para los estudiantes, tales como los resultados que enuncia el Teorema Central del Límite o la problemática en la diferenciación de una variable estadística y una aleatoria. Estas ideas, tales como lo reportan algunos investigadores (Alvarado, 2007; Batanero, López Martín, González-Ruiz y Díaz-Levicoy, 2017), resultan sumamente complejas para los estudiantes y el haber trabajado de esta forma, nos permitió observar una comprensión conceptual que perduró en el tiempo, lo cual no había sido detectado cuando utilizábamos actividades más tradicionales. Esta comprensión conceptual ha podido detectarse en trabajos de integración que se realizan con otras asignaturas de la carrera, los cuales no se incluyen aquí por cuestiones de extensión, pero es posible indicar que en dichos trabajos se pudo observar que los estudiantes han logrado integrar la Estadística y sus ideas fundamentales al trabajo investigativo que deben realizar en asignaturas de las áreas de Ecología y Medioambiente.

Reflexiones finales

Teniendo en cuenta que, el principal objetivo que perseguimos es el desarrollo de la Cultura Estadística y, apoyando la idea que recuperan Batanero. et. al. (2013), en relación a que no es posible separar la Estadística de sus aplicaciones, consideramos que tanto en la propuesta de enseñanza que incorpora el uso de simuladores y software, como en la elaboración de las guías de actividades con situaciones problemáticas afines a la disciplina y con el proceso evaluativo presentado, favorecemos el desarrollo del razonamiento y de la cultura estadística.

La modalidad de evaluación favorece el trabajo colaborativo entre los estudiantes y la necesidad de forjar una actitud crítica ante las distintas situaciones a las que son expuestos.
Si bien lo hemos mencionado ligeramente en este trabajo, en las actividades propuestas también incorporamos situaciones que favorecen el desarrollo de la Inferencia Estadística Informal, con la intención de que mediante ciertas afirmaciones y análisis los estudiantes cuenten, al momento de comenzar el estudio de técnicas formales, con ideas previas que faciliten la comprensión de los fundamentos de la inferencia estadística, tal como lo sugieren muchas investigaciones (Pfannkuch, 2007; Gil y Ben-Zvi, 2014).

Conscientes de que la propuesta necesita mejoras, consideramos que hemos elaborado una propuesta de enseñanza que posibilita espacios de reflexión y aprendizajes más duraderos en los futuros profesionales que cursan estas asignaturas.

Agradecimientos: Proyecto CAI+D 50120150100032LI y PROMAC 2018 (Universidad Nacional del Litoral)

Referencias bibliográficas

Alvarado, H. (2007). *Significados del Teorema Central del Limite en la Enseñanza de la Estadística en Ingeniería*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

American Statistical Association. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education: College report.* Alexandria, VA: Author.

Batanero, C. (2004) Los retos de la Cultura Estadística. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral, 1, 04.*

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números, 83, 7-18.

Batanero, C.; López Martín, M.; González-Ruiz, I. y Díaz-Levicoy, D. (2017). Las medidas de dispersión en el estudio de la inferencia estadística. En Vásquez, Claudia; Rivas, Hernán; Pincheira, Nataly; Rojas, Francisco (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática (pp. 312-316)*. Villarrica: SOCHIEM.

Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: Aprendizaje a largo plazo. Factores que inciden y estrategias plausibles. En: *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos.* Costa Rica.

Bianchi, J. y Tauber, L. (2014). Análisis de Contenido de un simulador que permite introducir la idea de distribución muestral. En L. Tauber (Ed.), *Actas de V Jornadas de Educación Matemática y II Jornadas de Investigación en Educación Matemática*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral. Recuperado el 18 de agosto de 2018 de: http://www.fhuc.unl.edu.ar/materiales_congresos/CD_matematica%202014/paginas/poster.html

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer.

Canal, G. y Behar, R. (2010). The confidence intervals: a difficult matter, even for experts. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics.*Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Gil, E. y Ben-Zvi, D. (2014) Long-Term impact on students' Informal Inferential Reasoning. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Giri, F. (2009). Revisión de la variabilidad morfológica intrapoblacional mediante métodos de análisis cuantitativos de la forma. Especies del género Aegla Leach (Crustacea, Decapoda, Anomura) de la Argentina. Tesis Doctoral. Universidad Nacional de la Plata.

Mendenhall, Beaver y Beaver (2010). Introducción a la Probabilidad y Estadística. Décimo tercera edición. Editorial Cengage.

Ministerio de Educación de la Nación. (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Ciclo Básico. Educación Secundaria*. Recuperado el 20 de octubre de 2014 de: http://direcciondenivelsecundario.blogspot.com.ar/p/naps.html

Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Moreno, J. (1998). Statistical literacy: statistics long after school. In *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statisti*cs (pp. 445-450). International Statistics Institute.

Moore, D.S. (2004). *The basic practice of statistics*. New York: W. H. Freeman.

Murray, S. y Gal, I. (2002). Preparing for diversity in statistics literacy: Institutional and educational implications. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics.* Ciudad del Cabo: IASE. CD ROM.

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: A case study about the interpretation of box plots. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. 2, N. 3.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la asociación a partir de actividades de análisis de datos.* Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

Tauber, L. y Cravero, M. (2012). Generación de las ideas fundamentales de la Alfabetización Estadística a través del trabajo con proyectos. *Serie B. Trabajos de Matemática, 61 (2012), 93-106*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba. Recuperado el 10 de agosto de 2018 de: http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_b/BMat61.pdf

Tauber, L. y Santellán, S. (2014). Conceptos fundamentales de un marco teórico sobre inferencia estadística informal. En: Veiga, D. (Ed.). *Acta de la XI Conferencia Argentina de Educación Matemática*, República Argentina, Ciudad de Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.

Triola, M. (2013). *Estadística*. 11va edición. Editorial Pearson.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67* (3), 221-248.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

APROXIMACIONES A UN MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERENCIA PARA EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA

APPROACHES TO A PRAXEOLOGICAL MODEL OF REFERENCE FOR LEARNING ALGEBRA

Myrian Luz Ricaldi Echevarria
Universidad Femenina del Sagrado Corazón (Perú)
myrianluz@hotmail.com

Resumen
El reporte forma parte de una investigación en curso que analiza las condiciones de nuevos tipos de modelos didácticos para el aprendizaje del álgebra. Parto del hecho que en el nivel escolar los cuestionamientos sobre las razones de ser de su estudio están ausentes. Por ello, propongo una primera aproximación a un modelo praxeológico de referencia que modela el contenido del álgebra en los dos primeros grados del nivel secundario. Para el análisis considero elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Los resultados muestran oportunidades para superar la pérdida de sentido y el olvido de la mayor parte de lo que se estudia.

Palabras clave: matemática, teoría antropológica de lo didáctico, modelo praxeológico de referencia, álgebra

Abstract
The report is part of an ongoing investigation that analyses the conditions of new types of didactic models for learning algebra. I am working on the assumption that at school level the questioning of the raison d'être of the study of algebra is absent. That is why I propose an approach to a praxeological reference model which defines the content of algebra in the first two years of secondary school. In order to carry out this analysis, I take into account different elements from the Anthropological Theory of Didactics. The results show opportunities to overcome the loss of sense and the oversight of the greatest part of the content which is studied in these years.

Key words: mathematic, anthropological theory of the didactic, reference praxeological model, algebra

Introducción

En contextos escolares la enseñanza del álgebra se sigue asumiendo como la simple aplicación de reglas y propiedades, de manera poco relacionada y sin explicitación de su utilidad o aplicación en otros contextos. En este escenario se hace necesario generar reflexiones y proponer posibilidades de nuevos tipos de procesos basados en una visión más cuestionadora que genere el desarrollo de los conocimientos matemáticos. Por lo anterior en este estudio planteamos como pregunta de investigación ¿cómo y para qué estudiar el álgebra a nivel escolar? Creo que este planteamiento develará respuestas que cuestionan nuestra propia práctica y nos lleva a alternativas reales y útiles a los actuales tiempos donde lo esencial ya no es el dominio de conocimientos específicos sino el sentido de uso del conocimiento interdisciplinar sobre la base de preguntas y la búsqueda de respuestas.

En cuanto a las investigaciones didácticas vinculadas al presente estudio tenemos que Chevallard y Bosch (2012) analizan los conocimientos y actividades que constituyen el álgebra elemental, en cuanto saber enseñado, y los que no se enseñan en la escuela. Este estudio brinda aportes esenciales para indagar las condiciones de posibilidad de un cambio educativo que vaya más allá de lo local. Por otro lado, Ricaldi (2011) concluye que los modelos algebraicos planteados para una situación son específicos para esa situación; no se plantea la generalidad de los mismos. Perdiéndose con ello importantes oportunidades para llegar a la generalización.

La presente propuesta surge de una reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. La experiencia en aula, la observación de clases y la revisión de los programas curriculares me permiten conjeturar sobre la necesidad de introducir modificaciones no solo en las estrategias de enseñanza de los profesores, sino también sobre los énfasis del currículum.

Marco teórico

El marco teórico de esta investigación es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) la cual busca promover y responder a la demanda real de la educación para la vida a través de cambios radicales sobre todo en la forma de hacer matemática. Esto requiere de una modificación sustancial del modelo pedagógico imperante, es decir, transitar de la pedagogía monumentalista a una pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Para lograr el cambio anterior Otero (2013) menciona que Chevallard propone los recorridos de estudio e investigación (REI) los cuáles son dispositivos didácticos que consisten en el estudio de preguntas como punto de partida del saber matemático. Esto implica transformaciones en los siguientes aspectos:

- Distribución de responsabilidades entre los agentes de una clase (topogénesis).
- Constitución y gestión del medio didáctico (mesogénesis).
- Dominio del tiempo requerido respecto al establecido por las instituciones escolares (cronogénesis)

La TAD sitúa el estudio de la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, y se basa en la focalización en las determinaciones sociales de los fenómenos indagados (¿cuáles son las determinaciones sociales que condicionan el aprendizaje del álgebra?), el análisis de las culturas humanas basada en el modelo praxeológico (¿cuáles son los límites de aprender álgebra a nivel escolar?) y el enfoque institucional y epistemológico en la enseñanza y el aprendizaje (¿qué tipos de tareas deben enfrentar los estudiantes?, entre las técnicas de resolución que existen socialmente ¿cuáles se espera que los estudiantes sepan emplear?). A lo largo del presente escrito daremos respuesta a las interrogantes antes planteadas. Para ubicarnos teóricamente desde la TAD se propone un modelo de referencia didáctico compuesto por el modelo praxeológico de referencia y el modelo pedagógico de referencia. El primero modela el contenido del ámbito educativo, a su vez, este modelo constituye una herramienta fundamental para el estudio de la organización matemática a enseñar y efectivamente enseñada. El modelo praxeológico de referencia está relacionado a lo que se entiende por enseñar y aprender matemática en una cierta institución e implica profundizar en el análisis praxeológico de una obra. Por otro lado, el modelo pedagógico de referencia, describe los procesos de estudio, analiza los que existen y propone condiciones para nuevos tipos de procesos, especialmente, el referido a la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo. El modelo pedagógico, según la TAD, busca transitar de la pedagogía monumentalista S(X, Y, O) a la pedagogía de la investigación y el cuestionamiento del mundo S(X, Y, Q) donde: **x** es la institución que enseña, **y** la institución que aprende, **O** es la obra, y Q son las preguntas. Este tránsito se hace a través del dispositivo didáctico llamado recorrido de estudio e investigación (REI) que consiste en el estudio de preguntas como punto de partida del saber matemático.

Metodología

La metodología del presente estudio es de tipo cualitativo, ya que pretende comprender los significados e interpretar prácticas en ambientes naturales desde el punto de vista de quiénes la experimentan (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El diseño de investigación es descriptivo (Salkind, 1999).

En nuestro estudio el modelo praxeológico de referencia (MPR) está relacionado con el contenido a enseñar y efectivamente enseñado, su origen y las transformaciones que experimenta en los contextos escolares. Por ello, para el procedimiento de estudio propongo un recorrido por la historia de la matemática que evidencie los cambios que ha sufrido el saber algebraico, luego analizaremos cómo y porqué está presente el objeto de estudio “álgebra” en el sistema escolar peruano, para finalmente, proponer el estudio del álgebra a nivel escolar no a partir de contenidos, sino de preguntas. Para la recolección de los datos se utilizó la técnica del análisis de documentos. El análisis buscó examinar, categorizar y evaluar elementos para responder a la pregunta de investigación: ¿cómo y para qué estudiar el álgebra a nivel escolar? En cuanto al marco contextual el estudio se centra en los dos primeros grados del nivel secundario del sistema educativo peruano.

Análisis epistemológico del álgebra:

A continuación, presentamos descriptivamente, manera de síntesis, la evolución de los principales conocimientos algebraicos vinculados a nuestro objeto de investigación.

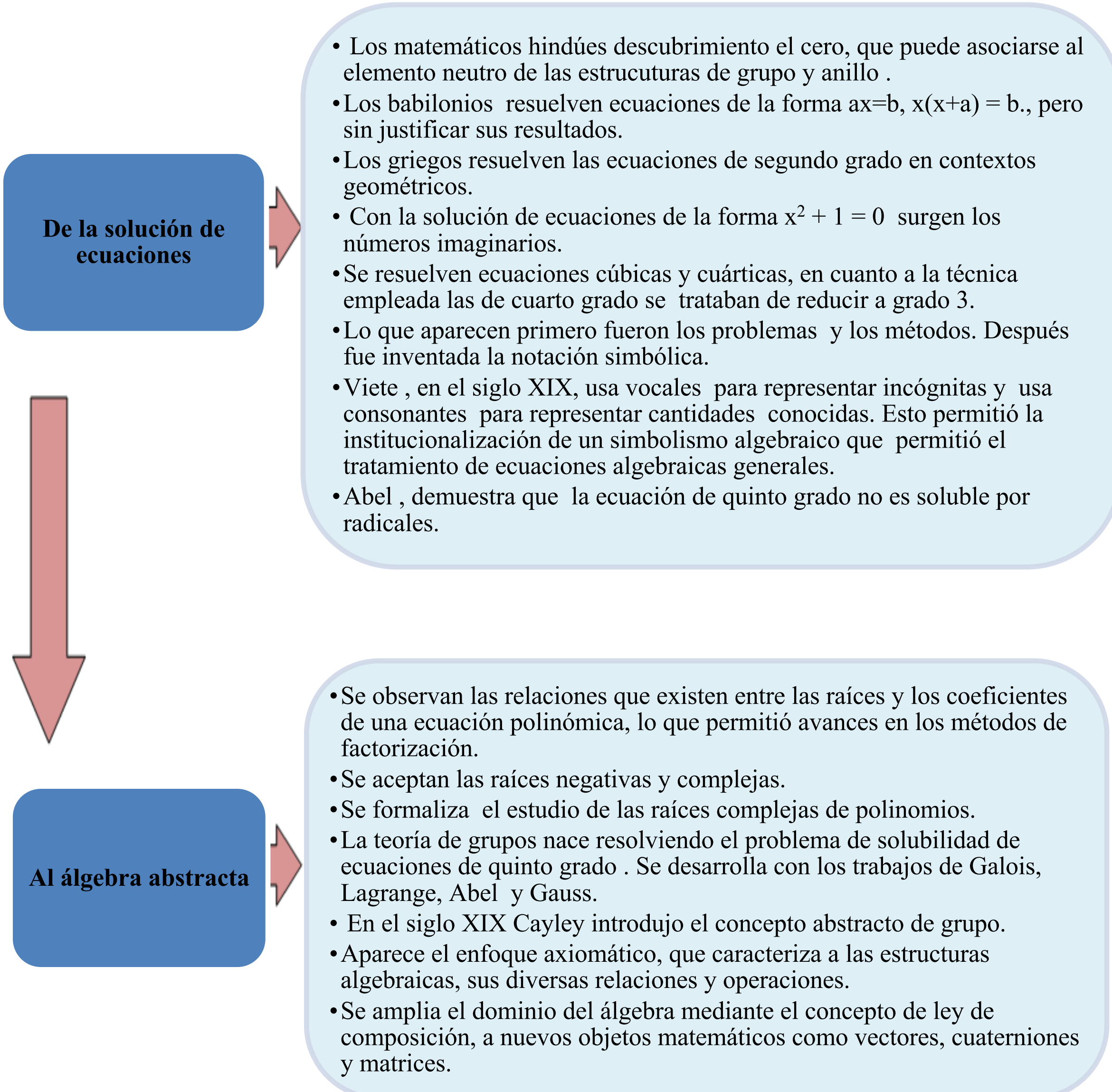


Figura 1. Evolución de los principales conocimientos algebraicos.

En referencia al análisis epistémico, puedo determinar que el desarrollo de algoritmos para resolver ecuaciones particulares fue el hecho que abrió caminos hacia la construcción de significado y hacia la generalidad.

El análisis epistemológico del álgebra abstracta nos muestra el carácter estructural y riguroso del tema de polinomios. Dentro del estudio de las estructuras algebraicas, considero al anillo de polinomios, y especialmente a la factorización de polinomios como el tema central que permite obtener las raíces de una ecuación. Quizás esto de pie para pensar en el futuro que la presentación de tareas asociadas a la búsqueda de raíces pueda ser el foco de atención cuando se trabaje la noción de polinomio en la escuela (Ricaldi, 2011). Esta idea está presente cuando

tomamos como punto de partida una situación que genera a través de una pregunta la necesidad de plantear ecuaciones y hallar sus raíces.
Por otro lado, otro aporte presente, aunque no detallado en este escrito, corresponde a los estrechos vínculos entre álgebra y geometría; por ello, proponemos abordar los problemas matemáticos considerando diferentes formulaciones, que, sin ser equivalentes, permiten la puesta en práctica de herramientas y recursos para transitar entre diferentes registros de representación.

El álgebra escolar en el currículo nacional de Perú y los tipos de tareas

Las determinaciones sociales que condicionan el aprendizaje del álgebra están principalmente asociadas a su uso como herramientas para entender conceptos complejos, cambiantes y abstractos. Al mismo tiempo, estimula al cerebro, ayudando a los estudiantes a pensar de formas nuevas, las técnicas que se aprenden en álgebra representan la base de las matemáticas y ciencias de alto nivel que se requieren para entrar a la mayoría de las universidades. Asimismo, los límites de aprender álgebra en el nivel escolar están condicionados por las sucesivas reformas que ha experimentado el currículo peruano, las cuales están asociadas a la intención de fortalecer las destrezas lógicas e iniciar en el pensamiento abstracto. Por ello, según constatamos el tipo de tareas presentes está, principalmente, asociada al planteamiento y resolución de ecuaciones.

Actualmente, el Currículo Nacional es el documento marco de la política educativa de la educación básica que contiene los aprendizajes que se espera que los estudiantes logren durante su formación básica, en concordancia con los fines y principios de la educación peruana, los objetivos de la educación básica y el Proyecto Educativo Nacional. En Perú el recorrido que sigue la organización matemática escolar "álgebra" está definida en la competencia regularidad, equivalencia y cambio en los siguientes términos:

> Consiste en que el estudiante logre caracterizar equivalencias y generalizar regularidades y el cambio de una magnitud con respecto de otra, a través de reglas generales que le permitan encontrar valores desconocidos, determinar restricciones y hacer predicciones sobre el comportamiento de un fenómeno. Para ello plantea ecuaciones, inecuaciones y funciones, y usa estrategias, procedimientos y propiedades para resolverlas, graficarlas o manipular expresiones simbólicas. Así también razona de manera inductiva y deductiva, para determinar leyes generales mediante varios ejemplos, propiedades y contraejemplos (Ministerio de Educación: Currículo Nacional, 2016, p.136).

Según el currículo nacional de Perú esta competencia implica el desarrollo de las siguientes capacidades: traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas, comunica su comprensión sobre relaciones algebraicas, usa estrategias y procedimientos para encontrar reglas generales, argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.

Sin embargo, el tratamiento del álgebra a nivel escolar no siempre fue el mismo. A continuación, presentamos la tabla 1 que muestra la evolución del conjunto de conocimientos matemáticos en los dos últimos diseños curriculares.

Tabla 1. *Contenidos de matemática en el currículo escolar peruano*

	Primer grado de secundaria	Segundo grado de secundaria
Diseño curricular nacional 2009	• Álgebra • Patrones numéricos. • Ecuaciones lineales con una incógnita. • Valor numérico de expresiones algebraicas. • Funciones • Noción de dependencia, función, variables dependientes e independientes. • Representación tabular y gráfica de funciones. • Dominio y rango de funciones lineales. • Proporcionalidad directa e inversa.	• Álgebra • Variable y simbolización de enunciados verbales mediante el lenguaje algebraico. • Teoría básica de exponentes. • Reducción de términos semejantes. • Operaciones de adición, multiplicación y división de polinomios. • Factorización de expresiones algebraicas por el factor común. • Funciones • Función lineal. • Función lineal afín. • Dominio y rango de una función lineal. • Modelos lineales. • Representación verbal, tabular y gráfica de funciones lineales. • Proporcionalidad directa e inversa.
Diseño curricular nacional 2016	Patrones geométricos • Combinación de transformaciones geométricas. • Expresiones gráficas y simbólicas de patrones geométricos. • Posición de un patrón geométrico. • Patrones cíclicos. Progresión aritmética • Términos. • Índice de términos. • Regla de formación. • Razón. • Suma de términos. Ecuaciones lineales • Miembros, términos, incógnita y solución. • Interpretación de gráficas y datos. • Transformaciones algebraicas de equivalencia. • Ecuaciones equivalentes. • Ecuaciones con fracciones homogéneas, equivalentes y números enteros. Inecuaciones lineales • Desigualdad considerando expresiones algebraicas. • Condiciones de desigualdad de la forma $x > a$ ó $x < a$, $ax > b$ ó $ax < b$, $\forall a \neq 0$ • Transformaciones algebraicas de equivalencia. • Conjunto solución. Proporcionalidad, función lineal y lineal afín • Relaciones en la proporcionalidad.	Progresión aritmética • Términos. • Índice de término. • Razón. • Regla de formación. • Suma de términos. • Relación entre una sucesión y la progresión aritmética. Ecuaciones lineales • Miembros, términos, incógnita y solución. • Transformaciones algebraicas de equivalencia. • Ecuaciones con decimales y enteros. • Ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Pares ordenados. • Operaciones con polinomios de primer grado. Inecuaciones lineales • Condiciones de desigualdad de la forma $x > a$ ó $x < a$, $ax > b$ ó $ax < b$, $\forall a \neq 0$ • Conjunto solución. Función lineal y lineal afín • Relaciones en la proporcionalidad inversa. • Función lineal. • Función lineal afín. • Familia de una función lineal y lineal afín. • Proporcionalidad inversa.

	• Función lineal con coeficientes enteros. • Dominio y rango. • Intercepto con los ejes. • Proporcionalidad inversa. • Regla de una función. • Pendiente.	• Regla de una función. • Pendiente. • Ordenada y abscisa.

A modo de identificar el enfoque de enseñanza que subyace en el tratamiento del álgebra escolar de Perú, se presenta a continuación lo que el Ministerio de Educación de Perú (MINEDU) menciona como descripción del nivel de la competencia esperado al final del ciclo VI que comprende el primer y segundo grado del nivel secundario:

> Resuelve problemas referidos a interpretar cambios constantes o regularidades entre magnitudes, valores o entre expresiones traduciéndolas a patrones numéricos y gráficos, progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones con una incógnita, funciones lineales y afín, y relaciones de proporcionalidad directa e inversa. Comprueba si la expresión algebraica usada expresó o reprodujo las condiciones del problema. Expresa su compresión de la relación entre función lineal y proporcionalidad directa; las diferencias entre una ecuación e inecuación lineal y sus propiedades; la variable como un valor que cambia; el conjunto de valores que puede tomar un término desconocido para verificar una inecuación; las usa para interpretar enunciados, expresiones algebraicas o textos diversos de contenido matemático. Selecciona, emplea y combina recursos, estrategias, métodos gráficos y procedimientos matemáticos para determinar del valor de términos desconocidos en una progresión aritmética, simplificar expresiones algebraicas y dar solución a ecuaciones e inecuaciones lineales, y evaluar funciones lineales. Plantea afirmaciones sobre propiedades de las progresiones aritméticas, ecuaciones e inecuaciones, así como de una función lineal, lineal afín con base a sus experiencias, y las justifica mediante ejemplos y propiedades matemáticas; encuentra errores o vacíos en las argumentaciones propias y las de otros y las corrige (MINEDU, Programa Curricular de Educación Secundaria, 2016, p.158).

En el Currículo Nacional del MINEDU (2016) la evolución de las temáticas en el álgebra escolar se desarrolla principalmente en relación con la comprensión de las ecuaciones, la proporcionalidad y las funciones, desde la traducción de patrones geométricos hasta la representación gráfica. Por otro lado, se presenta la noción de variable como objeto que cambia que es usado para representar expresiones, esto corresponde a una visión sesgada de la variable. Otro elemento claramente explicitado es la presencia de la regularidad y los patrones como contenido que atraviesa este y el ciclo posterior (VI y VII).

Por otro lado, el tipo de tareas asociadas presente en los libros de texto comienza con actividades que usan letras para representar números desconocidos (la letra como incógnita), tal como se muestra en la siguiente figura.

resa en lenguaje algebraico si x representa al número.

Lenguaje usual	Lenguaje algebraico
:riple de un número, más el doble de 8.	$3x + 2(8)$
número más su consecutivo.	$x + (x + 1)$
cuarta parte de un número, menos su mitad.	$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x$
doble de un número, más su triple.	$2x + 3x$
:uadrado de un número, menos 1.	$x^2 - 1$

:xpresa en lenguaje algebraico si y representa la edad de Patricia.

) La edad de Patricia hace 7 años.

Figura 2. Tomada del libro Matemática, p.158

Luego, los estudiantes se ven enfrentados a resolver ecuaciones, situación vinculada al despeje de la incógnita y la aplicación de reglas asociadas.

Resuelve $x + 7 = 12$.

1.ª FORMA Aplicando la propiedad de monotonía:

$$\mathbf{x + 7 = 12}$$

Restamos 7 a ambos miembros.

$$x + 7 - 7 = 12 - 7$$

$$x = 5$$

2.ª FORMA Por transposición de términos:

$$\mathbf{x + 7 = 12}$$

Como en el primer miembro 7 está sumando, pasa al segundo miembro restando.

$$x = 12 - 7$$

$$x = 5$$

Comprobamos la solución para $x = 5$ ▶ $x + 7 = 12 \rightarrow 5 + 7 = 12$

Figura 3. Tomada del libro Matemática 1, p.229

Los estudiantes con este tipo de prácticas luego representan como ecuación una situación que deben resolver utilizando las técnicas previamente ensayadas.

Diego pagó S/. 80 por inscribirse en un gimnasio y además, comenzó a pagar una cuota mensual. Si luego de 12 meses el gasto total que realizó fue de S/. 1 520, ¿de cuánto era la cuota mensual?

- Sea x el valor de la cuota mensual:

  Gasto total = Inscripción + 12 cuotas mensuales

  $1\,520 = 80 + 12x$

- Resolvemos la ecuación: $80 + 12x = 1\,520$

  $12x = 1\,520 - 80$

  $12x = 1\,440 \rightarrow x = 120$

La cuota mensual era de S/. 120.

Figura 4. Tomada del libro Matemática 1, p. 237

En este tipo de situaciones se plantea al estudiante problemas para resolver con ecuaciones que no hacen necesario el uso de esa herramienta, pues los recursos aritméticos de los que dispone son suficientes para dar una solución. De esta manera, alejada de la necesidad de su utilización el empleo de ecuaciones aparece como una complicación, el énfasis está en la memorización de las reglas para despejar x. Lo ideal sería proponer situaciones que permitan identificar la ecuación como modelo de un tipo de relación, independiente de la situación particular que lo originó. Otro aspecto ausente en los ejemplos propuestos en los libros de texto es la comprensión de la ecuación más allá de la igualdad, como el tratamiento de ecuaciones lineales con una variable sin solución o con infinitas soluciones.

Propuesta

El MPR hace mediante una red de cuestiones y respuestas, las que tienen estructura praxeológica (Fonseca, Gascón & Olivera, 2014). El MPR que se propone se compone de diferentes organizaciones matemáticas (OM) en las que se vincula el estudio algebraico con el geométrico. Esta característica es de vital importancia porque evita lo que usualmente ocurre en la escuela secundaria, que es el estudio aislado de organizaciones matemáticas (Gascón, 2002). La revisión de la literatura y los resultados de investigación desde la TAD, nos invitan a proponer una aproximación al estudio del álgebra con más sentido y que se corresponde a una visión de investigación y de cuestionamiento del mundo, en el sentido de lo propuesto por Chevallard, según los siguientes términos:

Tabla 2. *Propuesta para la enseñanza y aprendizaje del álgebra a nivel escolar*

	¿Cómo estudiar el álgebra escolar?	¿Para qué estudiar el álgebra?
Pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo	Organización matemática: ¿Qué son las ecuaciones? ¿Qué es un polinomio? ¿Cómo se vinculan las ecuaciones con los polinomios? ¿Cómo podemos modelar situaciones relacionando polinomios y ecuaciones? ¿Qué significado geométrico tiene la solución de sistemas de ecuaciones? ¿Qué relación hay entre el cálculo de áreas y los productos notables? ¿Cuál es el significado geométrico de los productos notables? ¿Cómo se relacionan las ecuaciones de primer grado con las funciones lineales? ¿Qué tipos de actividades se llevan a cabo con las ecuaciones y las funciones? ¿Se utilizan las funciones para construir modelos?	Organización didáctica: ¿Qué papel juega el álgebra en el currículo? ¿Cómo justificar en la enseñanza escolar el estudio de los polinomios? ¿Qué se enseña actualmente? ¿Qué se ha enseñado en otros periodos? ¿Cómo ha evolucionado el proceso transpositivo para desembocar en la organización matemática “álgebra escolar”? Tipo de tareas: Analiza, demuestra, calcula y representa.

Los tipos de tareas asociadas, desde esta propuesta están descritas en los siguientes términos:

- Demuestra: tareas que requieren la formulación de una secuencia de enunciados organizados según determinadas reglas o propiedades matemáticas.

- Calcula: tareas que implican llevar a cabo procedimientos basados en propiedades válidas. Representa: tareas asociadas a la realización de esquemas que posibiliten estudiar una noción matemática.

Se propone una aproximación al estudio del álgebra en el nivel secundario que sea más acorde con el papel que este desempeña en la actividad científica, sentimos la necesidad de postular una razón de ser distinta de la que le asigna el currículo oficial, lo que comporta una modificación profunda de las cuestiones y de las tareas que habitualmente se supone dan sentido al estudio del álgebra en el nivel educativo escolar. Esta nueva razón de ser provocaría una reformulación y hasta una nueva definición, de la estructura de cómo se aborda el estudio del álgebra y de su relación con el resto de las organizaciones matemáticas escolares.

A continuación, una propuesta de MPR, aún en proceso, para abordar el estudio del álgebra en los dos primeros grados del nivel secundario:

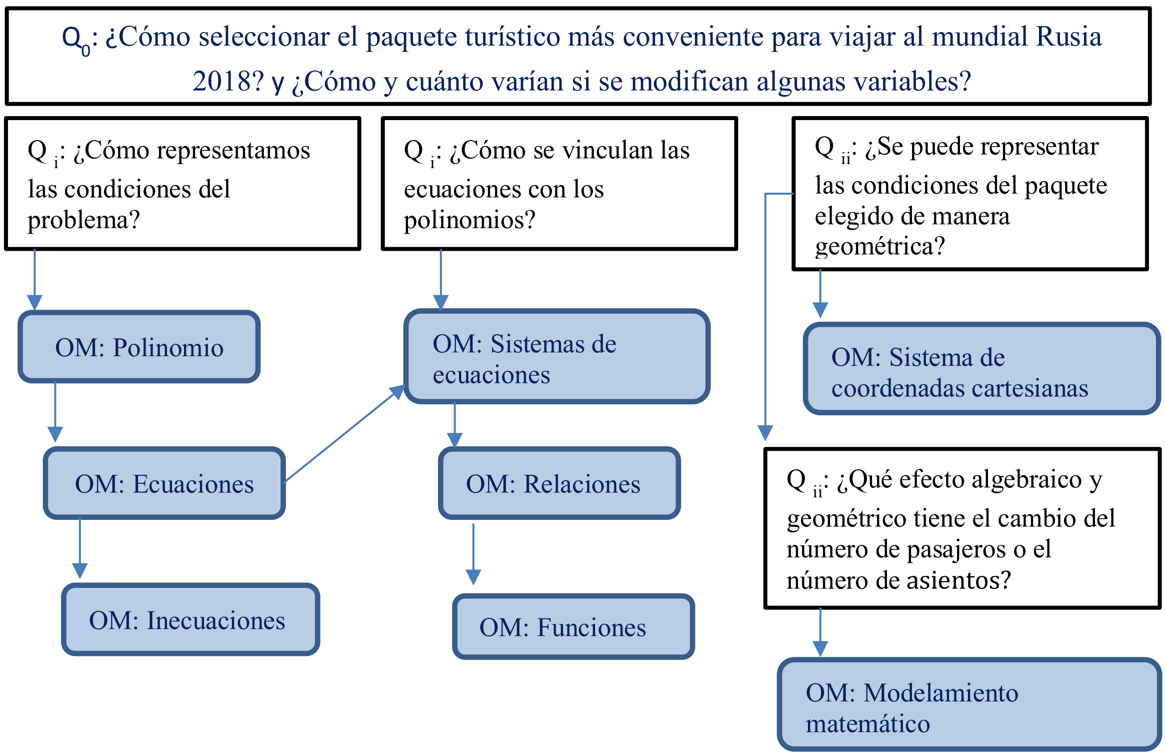


Figura 5. Aproximación de un MPR para el estudio del álgebra escolar.

En este trabajo plantemos una aproximación a un MPR, el cual está conformado por una red de praxeologías matemáticas que permite trazar un mapa de recorridos posibles, vinculados a nociones algebraicas que se estudian en los dos primeros grados de educación secundaria.

Las condiciones que se requieren para hacer evolucionar el actual paradigma pedagógico hacia el nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2013) requiere reflexionar y cuestionar si las prácticas asociadas en los documentos curriculares y que se ven reflejados en las ejecuciones docentes y en los textos, han logrado algún cambio positivo para el aprendizaje del álgebra. La respuesta desde nuestra visión es que no, nuestras prácticas responden a modelos de memorización a corto plazo, sin sentido y de fácil olvido. En definitiva, las normas institucionales son agentes restrictivos porque se dan por aceptados contenidos y los profesores condicionan su práctica de enseñanza a modelos aprendidos y aceptados, pero que, al mismo tiempo, él cuestiona como poco motivadores y efectivos para el aprendizaje de los estudiantes. Lo anterior implica un cambio de postura del docente en torno a lo que significa enseñar, aprender y estudiar. El docente tiene que desarrollar habilidades vinculadas al diseño de actividades que representen verdaderos desafíos.

Implicaciones

La enseñanza y el aprendizaje ya no se organizan únicamente en función de los contenidos matemáticos sino de los problemas que el estudiante debe resolver. Situaciones que deben emerger como respuestas a preguntas concretas, y que al mismo tiempo permitan transitar por diversos conceptos como respuestas a nuevas preguntas extensivas y relacionadas.

Se hace necesario controlar las variables relacionadas a las OM del programa de estudio.
Los MPR son un recurso importante para generar cambios en la enseñanza de la escuela secundaria (promueve recorridos con base en la viabilidad de los instrumentos, intenta encontrar respuestas que originen caminos diferentes y profundizar en el estudio de las dificultades). Es real que gran parte de la actividad matemática, a nivel escolar, ignora absolutamente los procesos de la actividad matemática como tal y, como consecuencia, no se concede ninguna importancia, tanto epistemológica como didáctica, a la génesis y el desarrollo de los conocimientos matemáticos.

Conclusiones

El desarrollo de algoritmos para resolver problemas particulares fue el hecho que abrió caminos hacia la construcción de significado y hacia la generalidad. Asimismo, en el contexto de la búsqueda de soluciones de ecuaciones se evidencian los nexos entre el álgebra y la geometría. Dentro del estudio de las estructuras algebraicas considero al anillo de polinomios, y especialmente a la factorización de polinomios como el tema central que permite obtener las raíces de una ecuación. Quizás esto de pie para pensar en el futuro que la presentación de tareas asociadas a la búsqueda de raíces pueda ser el foco de atención cuando se trabaje la noción de polinomio en la escuela.

Los principales hallazgos encontrados, de la revisión teórica, develan ausencia y restricciones en la forma de gestionar didácticamente el estudio del álgebra y su proceso de estudio en el nivel secundaria.

Referencias bibliográficas

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. En L.Coulange,J. Drouhard, J. Dorier, A. Robert (Eds). *Recherches en Didactique des Mathématiques.* (pp.19-39). Tesis doctoral no publicada. Université Joseph Fourier. Grenoble.
Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. doi: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2013.26
Fonseca, C., Gascón, J. & Oliveira, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 289-318. doi: http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1732
Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13- 25. Disponible en: https://revistasuma.es/IMG/pdf/39/013-025.pdf
Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, L. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.
Ministerio de Educación del Perú. (2016). Currículo Nacional de la Educación Básica.
Ministerio de Educación del Perú. (2016). Programa Curricular de Educación Secundaria.

Otero, R. (2013). La Teoría Antropológica de lo Didáctico. En R. Otero, M. Fanaro, A. Corica, V. Llanos, P. Sureda, V. Parra (Eds). *Teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática* (pp. 15-27). Buenos Aires: Dunken.

Ricaldi, M. (2011). *Análisis del tratamiento de álgebra en el primer año de secundaria: su correspondencia con los procesos de algebrización y modelización.* Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Ruíz- Olarría, A. (2015). *La formación matemático-didáctica del profesorado de Secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza*. Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Madrid. España.

Salkind, N. (1999). *Métodos de Investigación*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

UN ACERCAMIENTO DIDÁCTICO ENTRE QUÍMICA ORGÁNICA Y ÁLGEBRA LINEAL

A DIDACTIC APPROACH BETWEEN ORGANIC CHEMISTRY AND LINEAR ALGEBRA

Marcela Rodríguez, Ana María Narvaez
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Mendoza. Universidad Nacional de Cuyo, Facultad de Ingeniería (Argentina)
marcela.rodriguez.aghem@gmail.com, ana.narvaez@frm.utn.edu.ar

Resumen
Este trabajo interdisciplinario entre Álgebra Lineal y Química Orgánica, específicamente, entre la teoría de grafos y la topología molecular, tiene como propósito optimizar la calidad de los conocimientos impartidos en Ingeniería, pues la articulación consciente potencia el conocimiento científico propio del nivel universitario. Se están investigando los objetos matemáticos del Álgebra Lineal cuya aplicación permita obtener la caracterización estructural de moléculas. El marco teórico privilegiado es la Transposición Didáctica y la metodología es Ingeniería Didáctica. Los resultados obtenidos se refieren a los conocimientos adquiridos sobre los fundamentos epistemológicos necesarios para el diseño y la implementación de material didáctico que integra las matrices relacionadas a la teoría de grafos con la topología molecular. La singularidad de la topología molecular es que es una vía matemática de descripción de la estructura molecular y un método para descubrir nuevas moléculas.

Palabras clave: teoría de grafos, grafo molecular

Abstract
This interdisciplinary work between Linear Algebra and Organic Chemistry, more specifically between Graph Theory and Molecular Topology, is intended to optimize the quality of the knowledge taught in Engineering courses, since conscious articulation fosters scientific knowledge at university level. We are researching on mathematical objects of Linear Algebra whose application allows us to get the structural characterization of molecules. The theoretical framework used is Didactic Transposition, and the methodology is Didactic Engineering. The results show the acquired knowledge about the epistemological foundations necessary for the design and the implementation of didactic material that integrate the matrices related to the Graph Theory with Molecular Topology. The peculiarity of Molecular Topology is that it is a mathematical means to the description of molecular structure and a method for discovering new active molecules.

Key words: graph theory, molecular graph

Introducción

En los últimos años se ha desarrollado una corriente científica, apta para la enseñanza universitaria, que integra la química con la matemática, tal disciplina es actualmente conocida como química matemática. Uno de sus ejes es abordado desde la teoría de grafos, desarrollada en el siglo XIX por A. Cayley y J. J. Silvester, si bien existen resultados dados por Leonard Euler desde un siglo antes. Recordemos que la teoría de grafos es un exponente de la matemática pura que ha encontrado con el tiempo diversas aplicaciones; es una herramienta imprescindible en áreas en las que estructura y conectividad juegan un papel preponderante (Amigo, Falcó, Galves y Villa, 2007).

Es bien conocido el hecho que ejemplos sencillos de la teoría de grafos aparecen en la literatura de Álgebra Lineal para cursos básicos de ingeniería: redes de comunicación y transporte, diseño de circuitos eléctricos, optimización de líneas de suministro, epidemiología, etc., en relación con el estudio de matrices (Grossman, 1992).

Por otro lado, la representación de compuestos químicos mediante grafos es cada vez más frecuente, dada la utilidad de estos para predecir las propiedades de una molécula antes de sintetizarla.

Propósitos y descripción

Los propósitos de la presente propuesta se refieren a que los aprendizajes logrados por los estudiantes sean de la mejor calidad posible; para ello, una estrategia es anclar los nuevos conocimientos a los anteriores. En esta dirección se está trabajando para dar en Álgebra Lineal (materia del primer semestre de primer año) ejemplos de grafos que podrán ser puestos en acto en el curso de Química Orgánica (segundo semestre de segundo año). Además, se pretende que los contenidos de Álgebra Lineal y Geometría Analítica tengan aplicaciones interesantes, no estándares en la bibliografía básica para estos cursos. Por ejemplo, Grossman (1995), Kolman y Hill (2006) y Larson (2010), entre otros.

La investigación consiste en realizar el estudio de las definiciones, ejemplos, propiedades y teoremas necesarios de la teoría de grafos para ser incluidas en el curso de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, no alterando el cronograma planificado para los contenidos obligatorios de la asignatura y, también estudiar conceptos de topología molecular para realizar la transposición didáctica que se adecue a los alumnos a quienes va dirigida. De esta forma, los conceptos de la mencionada teoría de grafos estarán disponibles para realizar la caracterización estructural de moléculas, tema central de Química Orgánica.

La caracterización de moléculas se puede realizar mediante unos invariantes sencillos, llamados *índices topológicos*. Estos índices, una vez procesados estadísticamente juegan un papel decisivo en el descubrimiento de nuevas aplicaciones de moléculas conocidas y en el diseño de moléculas con propiedades químicas específicas. Esto es lo que actualmente se llama *topología molecular.*

Esencialmente la topología molecular sirve para encontrar correlaciones entre una propiedad física, química o biológica y las estructuras moleculares, basándose en los índices topológicos (Villar, Falcó, Casanova, Moreno, Antón, García, 2015). Dichos índices se pueden obtener a partir del tratamiento matemático de matrices asociadas a la teoría de grafos.

La aplicación de la teoría de grafos en la química es la topología molecular; ésta se basa en la aplicación de dicha teoría de grafos a la descripción de las estructuras moleculares, siendo un *grafo* un conjunto de puntos (llamados *nodos* o *vértices*) con algunos pares de ellos conectados mediante uniones llamadas *aristas* o *ejes*. Los nodos del grafo G los numeraremos arbitrariamente y denotaremos por $e_{i,j}$ al eje que une los nodos i y j. Utilizaremos n para denotar el número de nodos de un grafo, mientras que $E(G)$ representa el conjunto de ejes y $/E(G)/$ su cardinalidad, es decir el número de ejes de *G*. Si dos nodos están conectados por un eje, se llaman *adyacentes*. El número de ejes que salen de un nodo se llama *grado* del nodo. Un *camino* o *trayectoria p* en *G* es el subgrafo obtenido al conectar consecutivamente varios nodos adyacentes; si, además, conectamos el primer nodo al último nodo de *p*, obtenemos un *ciclo*. La *longitud* de un camino o ciclo es el número de ejes que lo componen (Bollobas, 1998).

Cuando la teoría de grafos se aplica a moléculas, los nodos representan átomos y las aristas, enlaces químicos, normalmente enlaces covalentes puesto que es en la química orgánica donde la topología molecular ha encontrado su mayor campo de aplicación. El grafo resultante que nos dice como están ligados los átomos y el camino (o caminos) que une (n) un átomo a otro en una misma molécula, se llama *grafo molecular.*

Supongamos que queremos caracterizar estructuralmente un compuesto orgánico, si es posible, se eliminan los átomos de hidrógeno de la molécula, en segundo lugar, los átomos restantes (los vértices del grafo molecular) se numeran de forma conveniente. Por último, la caracterización estructural contenida en el grafo molecular puede ser encapsulada de muy diversas maneras como, por ejemplo, mediante matrices, índices numéricos, polinomios, espectros, grupos u operadores; en este trabajo sólo veremos las herramientas más sencillas utilizadas en la topología molecular.

Matrices asociadas a grafos moleculares

Entre las diferentes matrices asociadas a los grafos moleculares, cabe destacar las siguientes por su sencillez de cálculo: matriz de adyacencia y matriz de distancia.

La matriz de adyacencia se puede utilizar como instrumento algebraico, para indicar qué pares de nodos están unidos por aristas; si la molécula consta de *N* átomos, la matriz de adyacencia del grafo molecular *G*, *A* = *A(G)* es una matriz *NxN* simétrica cuyas componentes son

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si los átomos } i \text{ y } j \text{ están ligado} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La matriz de distancia D = D*(G)*, es una matriz *NxN* simétrica cuyas componentes son las distancias topológicas. Se define:

$$\mathrm{D}_{ij} = \begin{cases} \text{longitud mínima de los caminos que unen } i \text{ y } j\text{, si } i \neq j, \\ 0, \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Así, D proporciona una imagen cualitativa de las relaciones de proximidad o lejanía entre los átomos de la molécula. La suma de las distancias topológicas entre el vértice *i* y todos los demás vértices del grafo molecular, se llama *suma de las distancias* del vértice *i*

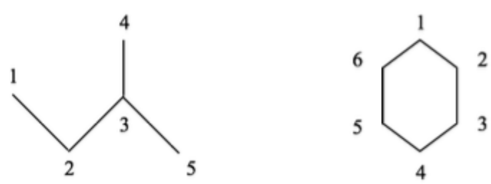
$$DS_i = \sum_{j=1}^{N} D_{ij} = \sum_{j=1}^{N} D_{ji} \qquad (1)$$

Obsérvese, finalmente, que la matriz de distancia puede obtenerse a partir de la matriz de adyacencia (Amigo *et al*, 2007).

Índices de conectividad

Una vez construida la matriz de adyacencia, se obtiene la valencia δ_i, de cada vértice. La valencia de cada vértice es el número de ejes que convergen en él, lo que es igual a la suma de los términos que hay en la fila o columna correspondiente a dicho vértice. Como se aprecia, es una expresión matemática que relaciona la estructura con una descripción numérica. Su importancia en los estudios estructura – actividad radica en que a partir de ella se calculan la mayoría de los índices topológicos.

La figura 1 ilustra la construcción de la matriz topológica de adyacencia para el isopentano y el ciclohexano, junto con los valores obtenidos para las valencias de los diferentes átomos.



Isopentano   Ciclohexano

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \delta_i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \delta_i \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array}$$

Figura Nº 1: representación como grafos y matrices

Una vez obtenido un índice (o varios), se establecen correlaciones entre ellos y diferentes propiedades moleculares para grupos de compuestos más o menos homogéneos; así se pueden enunciar ecuaciones que relacionan tales propiedades con la estructura molecular, caracterizada a través de sus índices.

Estas ecuaciones se conocen como “funciones de conectividad” (la conectividad representaría el “ensamblaje” topológico entre los elementos). Si se calculan entonces los valores de los índices de nuevas moléculas, es decir de moléculas no utilizadas en la correlación, y se sustituyen en la ecuación, se podrá predecir el valor de la propiedad correlacionada para ese nuevo compuesto, el cual puede incluso no tener aún una existencia física.

Marco teórico

Para lograr el objetivo propuesto, en este trabajo del área de la Didáctica de la Matemática y de la Química como disciplinas experimentales, se privilegia la Teoría de Transposición Didáctica de Ives Chevallard. Ahora bien ¿por qué utilizar esta teoría? Chevallard (1991) expresa que "permite la articulación del análisis didáctico con el epistemológico y se convierte en guía del buen uso de la epistemología para la didáctica" (p.23).

Esta teoría es la adecuada para sustentar la presente investigación que pretende darle respuesta a la pregunta ¿las innovaciones ayudan a una mejor aprehensión del tema matrices?, pues en este marco se le da respuesta al interrogante ¿qué se entiende por mejor...?

Mejor significa que la nueva contextualización que se le otorgue al objeto de estudio sea adecuada para los alumnos hacia los cuales va dirigida, eligiendo para ello una red de problemáticas y de problemas que pudiendo coincidir o no con la génesis histórico – epistemológica del concepto, encuentre su uso, su empleo, es decir su significado. Chevallard (1991) afirma *"*Todo saber está vinculado a sus productos y se encarna en él*"* (p. 24).

Más aún, se pretende que los alumnos logren mejor comprensión e interpretación y competencias adecuadas para la solución de problemas específicos del área ingenieril.
La teoría de la Transposición Didáctica se inserta en el sistema didáctico, que es ternario, formado por el docente, alumnos y saber matemático. La misma designa el conjunto de las transformaciones que sufre un saber con el fin de ser enseñado. Este fenómeno de transposición queda a veces oculto en la enseñanza.

En un sentido restringido, la transposición didáctica designa el paso del saber sabio o disciplinar o matemático al saber enseñado.

Metodología de la investigación

Las deficiencias detectadas en el aprendizaje de los alumnos manifestadas en exámenes finales son consideradas como resultados a priori para el diseño de la presente metodología que privilegia no sólo *qué enseñar* sino *cómo mejorar* la enseñanza y aprendizaje de los contenidos disciplinares.

La metodología requiere de una participación activa del estudiante y del docente, quien tiene como tarea fundamental generar la aparición de competencias en el alumno, por lo que se deben diseñar secuencias didácticas que den lugar a los objetivos previstos, esto lleva al docente a planificar los contenidos vinculándolos a situaciones que resulten de interés para el estudiante.

En el presente trabajo se emplea la metodología de investigación llamada micro ingeniería didáctica. La ingeniería didáctica se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase, esto es sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

La expresión ingeniería didáctica se utiliza para denominar una forma de trabajo didáctico comparable al trabajo del ingeniero, término que proviene de la palabra "ingenio". Este último, apoyándose en los conocimientos científicos de su dominio y aceptando el control de la teoría, está obligado a trabajar con objetos más complejos que los objetos puros de la ciencia y debe gestionar problemas específicos sobre los que la ciencia no se hace cargo (Artigue, 1995).

Experiencia áulica

En el primer semestre de 2018 se incorporó a la Guía de Trabajos Prácticos de la cátedra de Álgebra y Geometría Analítica, en el primer trabajo práctico que se refiere a matrices (concepto, operaciones matriciales, propiedades, clasificación de matrices, inversas de matrices) una actividad integradora entre el Álgebra y la Química.

En el diseño de la misma se tuvieron en cuenta distintos aspectos, a saber: a) el objetivo de la innovación; b) que las actividades a ser desarrolladas por el alumno deben ser construidas en distintos contextos (Duval, 1991) con el control de variables didácticas que permitan la aparición de obstáculos para su tratamiento (Sierpinka, 1985); c) el interés de los estudiantes a quienes iba dirigida la actividad y d) se encaró la enseñanza y aprendizaje con actividades de dificultad creciente para que los alumnos fueran construyendo los distintos niveles cognitivos indicados en la Teoría APOE (Dubinsky, 1991) y profundizando en los mismos para lograr alcanzar el nivel de *esquema*, siendo esta una construcción óptima para el entendimiento del tema, según nuestra experiencia docente anterior en el diseño de actividades sobre límite (Narvaez, Berman, Rodriguez, 2011).

Actividad propiamente dicha: Matrices asociadas a grafos moleculares

La siguiente actividad les fue dada a los estudiantes.
Actividad: Se puede utilizar como instrumento algebraico la matriz de adyacencia de un grafo, que indica qué pares de nodos están unidos por aristas; si la molécula consta de N átomos, la matriz de adyacencia del grafo molecular G, $A = A(G)$ es una matriz N x N simétrica cuyas componentes son

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si los átomos } i \text{ y } j \text{ están ligados,} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

A continuación, la figura 1 muestra la molécula de 2-bromopropanol y su grafo molecular, propuesto por Rozas (2011).

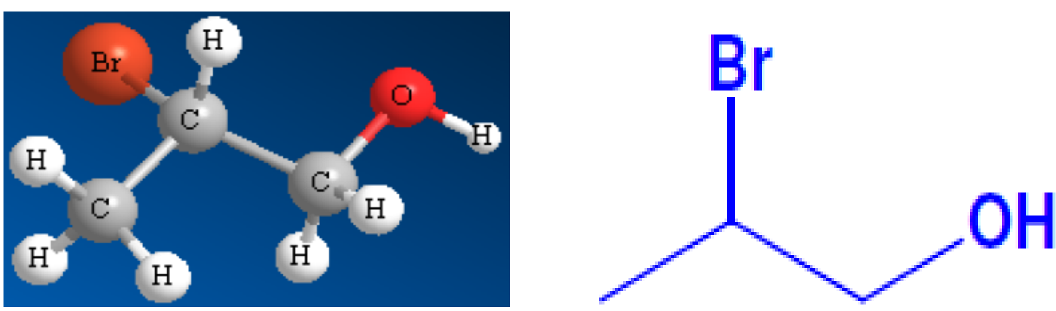


Figura Nº2: molécula 2- bromopropanol. Gráfico de barras y esferas y grafo molecular.

La representación del grafo matemático puede ser la siguiente:

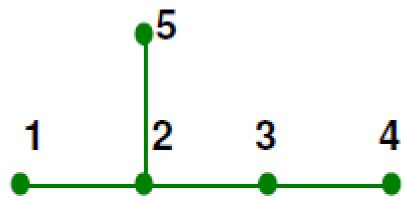


Figura Nº 3: grafo matemático de la molécula 2- bromopropanol

i) Entonces, la matriz de adyacencia $A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ es $A =$ ………………………..
ii) Verificar que la matriz de adyacencia es simétrica.
iii) Verificar que, en la molécula dada, que sólo tiene enlaces simples, la suma de todos los elementos de la fila i de A, $\sum_{j=1}^{N} A_{ij}$ así como la suma de todos los elementos de la columna i, $\sum_{j=1}^{N} A_{ji}$, dan indistintamente el número total de ejes que confluyen en el átomo i.
iv) La matriz de distancia $D = (D_{ij})$, es una matriz N x N cuyas componentes son las distancias topológicas. Se define:

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{longitud mínima de los caminos que unen } i \text{ y } j, \text{ si } i \neq j, \\ 0, \text{ si } i = j. \end{cases}$$

Entonces la matriz de distancia es D = …………………..
v) Verificar que la matriz de distancia D es simétrica.

Notas sobre la Actividad

a) Las respuestas de las matrices de adyacencia y distancia solicitadas en el ejercicio son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Se obseva la relevancia de la imagen del compuesto dado en la actividad, pues permite observar la relación de adyacencia entre los átomos y su posterior representación mediante el grafo molecular y el algebraico.

c) Con respecto a esta actividad, se ha realizado la validación de la misma en una oportunidad y se vio que el enunciado era entendido por docentes y estudiantes.
d) En este momento, sólo se registran evaluaciones cualitativas de impacto positivo en docentes y estudiantes.
e) Se espera que en el cursado intensivo de la asignatura, correspondiente al segundo semestre del año en curso, se puedan obtener nuevas evaluaciones con un protocolo que se está diseñando para realizar mediciones cuantitativas que valoren el impacto de dicha actividad.

f) A partir de la actividad dada, se diseñarán otras que permitan obtener matrices adicionales, como, por ejemplo, la matriz laplaciana, que es igual a la diferencia entre la matriz identidad y la de adyacencia, para calcular su espectro, es decir, el conjunto de autovalores; dicho tema es uno de los ejes centrales en Álgebra Lineal. En topología molecular sólo se utilizan el mínimo y el máximo autovalor (el máximo autovalor representa el número de ramificaciones o *branching* del compuesto químico). Este ejercicio se agregará en la guía de trabajos prácticos 2019; específicamente en el trabajo correspondiente a autovalores y autovectores.

Conclusiones y trabajos futuros

En esta etapa de la investigación se continúan estudiando las definiciones, propiedades y teoremas necesarios, sobre grafos, para dar en el curso de Álgebra Lineal y Geometría Analítica, teniendo en cuenta que no se altere significativamente el tiempo planificado para impartir dicho programa y que, a su vez permita, dar ejemplos de matrices que destaquen, entre otros aspectos, su funcionalidad como lenguaje compacto de amplia utilización en ciencias.

Asimismo, es interesante mostrar que la introducción de innovaciones que articulan conceptos de distintos espacios curriculares es enriquecedor tanto para los docentes como para los alumnos, quienes reciben de manera directa la actualización científica de sus profesores, quienes, en este camino de investigación, no perderían de vista los conceptos que se van desarrollando en ciencia.

La incorporación en la guía de trabajos prácticos del ejemplo mencionado ha sido bien recibido por los docentes, a quienes se les preguntó previamente si deseaban incorporarlo a la mencionada guía; según transmitieron, también impactó positivamente en los estudiantes; por lo tanto, el siguiente paso será la obtención del espectro de las matrices asociadas a grafos moleculares.

La articulación consciente entre distintos espacios disciplinares favorece la capacitación y la actualización de docentes y, en consecuencia, la calidad de los aprendizajes de los estudiantes.

Según Amigo Amigó *et al*, 2007), las características singulares de la topología molecular pueden resumirse de la siguiente manera: es una vía puramente matemática de describir la estructura molecular y un método muy eficaz para descubrir nuevas moléculas activas barriendo bases de datos, dado que todo el proceso es fácilmente computarizable.

Referencias bibliográficas

Amigó, J., Falcó, A., Gálvez, J. y Villar, V. (2007) *Topología Molecular*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. nº 39 (2007), pp. 135-149.

Artigue, M. (1995) Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (ed.). *Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericano. México.

Bollobas, B. (1998) *Modern Graph Theory*. Springer Verlag. New York.

Chevallard, I. (1991) *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique Grupo Editor S. A. Buenos Aires. Argentina.

Contreras de la Fuente, A. (2002) *¿Se aprende por medio de los cambios entre sistemas de representación semiótica?* XVIII JORNADASDEL SI- IDM, Castellón.

Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience.* Nueva York: Springer-Verlag.

Duval, R. (2002). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática*.* Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes, 1995. (1991).

Grossman, S. (1992). *Álgebra Lineal con Aplicaciones.* McGraw W-Hill Interamericana de México. México.

Kolman, B., Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* Pearson Educación. México.

Larson, R., Falvo, D. (2010). *Fundamentos de Álgebra Lineal.* Cengage Learning. México.

Narvaez, A., Berman, C., Rodriguez, M. (2011). *¿Problemas con el límite o el límite de los problemas enseñados?* Publicado en: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. ALME 24. Volumen: 24 Año 2011. Editores: Patricia Lestón. Editorial: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Páginas: 585 a 595. Guatemala. Universidad Galileo. ISBN: 978-607-95306-4-8.

Rozas, I. (2011) *Web*. http:// www.imus.us.es/ACT/RSME-RSEQ-2011/php/rozas.pdf

Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.

Villar, V., Falcó, A., Casanova, C., Moreno, M., Antón, G., García, R. (2015) *La topología molecular en el descubrimiento de nuevas terapias.* http://elfarmaceutico.es/index.php/la-revista/secciones-de-la-revista-el-farmaceutico/item/6622-la-topologia-molecular-en-el-descubrimiento-de-nuevas-terapias#.W1oZc7ivHIW

APRENDIZAJE DE LAS RAZONES Y PROPORCIONES A TRAVÉS DEL USO DE LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES: PROPUESTA DIDÁCTICA

LEARNING OF THE RATIOS AND PROPORTIONS THROUGH THE USE OF MULTIPLE INTELLIGENCES: A DIDACTIC PROPOSAL

Alma Soto Castillo, Juan Carlos Macías Romero
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
soto_taurus13@hotmail.com, jcmacias24@hotmail.com

Resumen
Esta investigación tiene por objetivos identificar los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas de razones y proporciones y, diseñar una propuesta didáctica que favorezca su aprendizaje a través de las Inteligencias Múltiples (IM). Se aplicó un test de las IM al docente y a los estudiantes; se realizaron actividades introductorias y de explicación de las IM. Posteriormente se aplicó un pre test de razones y proporciones diseñado con diez problemas. En éste, se encontró que los estudiantes expresan la razón como un solo número y que no etiquetan las cantidades que la forman; además, operan con números sin establecer relaciones de proporcionalidad y utilizan el razonamiento aditivo para resolver problemas de proporcionalidad directa. En seguida, se diseñaron y aplicaron actividades referentes al tema, usando en éstas las IM de los alumnos. Finalmente, se aplicó un post test cuyos resultados mostraron 75% de respuestas correctas.

Palabras clave: aprendizaje, razones, proporcionalidad, inteligencias múltiples

Abstract
This research is aimed at identifying the mistakes made by students in the first grade of secondary school when solving ratio and proportion problems and, at designing a didactic proposal that favors their learning through the use of Multiple Intelligences (MI). The teacher and the students answered a MI test, in which introductory activities and explanation were carried out. Subsequently, a pre-test of ratios and proportions was applied; it was designed with ten problems. We found that students express the ratio as a single number, and they do not label the numbers of the ratio. Besides, they operate with numbers without establishing relations of proportionality and use additive reasoning to solve problems of direct proportionality. Then, we designed and applied activities related to the topic, but now using students' MI. Finally, a post-test was applied, and the results showed a 75% of correct answers.

Key words: learning, ratios, proportionality, multiple intelligences

Introducción

En un principio la inteligencia se consideró como algo biológico, hereditario, que estaba dentro de la mente del individuo y que podía medirse (Gardner, Kornhaber y Krechevsky, 1993). Fue Gardner (1994) quien afirmó que es importante reconocer y alimentar todas las inteligencias humanas y todas las combinaciones de inteligencias (lingüística, lógico-matemática, espacial, cinético-corporal, musical, interpersonal, intrapersonal y naturalista). A raíz de la Teoría de Inteligencias Múltiples, Armstrong (2006) afirmó que existen ocho maneras distintas de enseñar a los alumnos.

Ferrándiz, Bermejo, Sainz y Ferrando (2008) realizaron un estudio del razonamiento lógico-matemático, desde el modelo de las Inteligencias Múltiples, en el que proponen evaluar en los alumnos por lo menos seis de las ocho inteligencias para analizar las destrezas y dificultades y así configurar una instrucción más ajustada a las necesidades cognitivas de los estudiantes. Aunque su estudio profundizó en la inteligencia lógico-matemática, concluyen que utilizar el modelo de Inteligencias Múltiples tiene grandes ventajas, entre ellas, la posibilidad de ofrecer una respuesta educativa adecuada a los alumnos evaluados mediante diseños de currículos.

Por otro lado, uno de los elementos que forman parte de la estructura del programa de matemáticas 2011, son los aprendizajes esperados (SEP, 2011, p. 26). El último aprendizaje esperado del curso de primer grado exige que un estudiante sea capaz de resolver problemas de proporcionalidad directa del tipo valor faltante, pero el inconveniente surge cuando el docente se enfrenta al diseño de la secuencia didáctica. Comúnmente los profesores optan por enseñar a sus alumnos a resolver problemas de proporcionalidad mediante la regla de tres, lo que concuerda con Ramírez y Block (2009), quienes mencionan que las ideas de proporcionalidad son en general mal entendidas, debido a que es común que en el aula se enseñe este tema de manera mecánica utilizando la regla de tres. Es Mochón (2012) quien comenta que la enseñanza de la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad es insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad.

Sabiendo que una proporción es básicamente la igualdad entre dos razones (Mochón, 2012, p. 134), el profesor frente a grupo debe considerar que antes de enseñar a resolver problemas de proporcionalidad, el trabajo de la clase tiene que anteponer a las razones entre dos números, ya que, si sus alumnos no saben plantear una razón, mucho menos lo harán con una proporción, aunque esta última, sí, de manera mecánica. Por todo lo anterior, esta investigación tiene por objetivos: identificar los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas de razones y proporciones, y también de diseñar una propuesta didáctica que favorezca el aprendizaje de las razones y proporciones a través del uso de las Inteligencias Múltiples.

Marco teórico

La teoría de las Inteligencias Múltiples propone que toda persona posee capacidades en las ocho inteligencias, las cuales funcionan juntas de un modo único para cada persona. Es un modelo que valora la educación y la naturaleza de ésta para el desarrollo de las inteligencias. Gardner (1994) menciona que las inteligencias reciben un estímulo cuando se participa en una actividad con valor cultural y el crecimiento del individuo en esa actividad, sigue un patrón de desarrollo. Diaz (2002) menciona que la concepción constructivista del aprendizaje y la intervención educativa deben considerar, entre otras cosas, la búsqueda de alternativas novedosas para la selección, organización y distribución del conocimiento escolar, asociadas al diseño y promoción de estrategias de aprendizaje e instrucción cognitivas. Para esas alternativas novedosas fue Armstrong (2006) quien, basado en las 8 inteligencias de Gardner, proporcionó ejemplos de las ocho maneras en que los alumnos pueden adquirir y demostrar sus conocimientos en temas específicos.

Tabla 1. Maneras en que los alumnos adquieren su conocimiento.

Tabla 1. Organización de las ocho maneras de aprender			
Los estudiantes muy	Piensan	Les gusta	Necesitan
Lingüísticos	En palabras	Leer, escribir, explicar historias, los juegos de palabras.	Libros, casetes, objetos para escribir, papel, periódicos, diálogo, conversación, debates, historias
Lógico-matemáticos	Razonando	Experimentar, preguntar, resolver enigmas lógicos, calcular.	Materiales para experimentar, materiales científicos y para manipular, visitas al planetario y al museo de la ciencia.
Espaciales	Imágenes	Diseñar, dibujar, visualizar, garabatear.	Arte, piezas de construcción, video, películas, diapositivas, juegos de imaginación, laberintos, rompecabezas, libros ilustrados, visitas a museos de arte.
Cinético-corporales	A través de sensaciones somáticas.	Bailar, correr, saltar, construir, tocar, gesticular.	Juegos de rol, teatro, movimiento, juegos de construcción, deporte y juegos físicos, experiencias táctiles, aprendizaje manual.
Musicales	A través de ritmos y melodías.	Cantar, silbar, canturrear, crear ritmos con los pies y las manos, escuchar.	Cantar acompañados, asistir a conciertos, tocar algún instrumento en casa y en el colegio.
Interperso-nales	Transmitiendo ideas a otras personas.	Liderar, organizar, relacionarse, manipular, mediar, asistir a fiestas.	Amigos, juegos en grupo, reuniones sociales, actos colectivos, clubes, mentores/discípulos.
Intraperso-nales	En relación con sus necesidades, sentimientos y objetivos.	Establecer objetivos, mediar, soñar, planificar, reflexionar.	Lugares secretos, soledad, proyectos propios, decisiones.
Naturalistas	A través de la naturaleza y las formas naturales.	Jugar con sus mascotas, la jardinería, investigar la naturaleza, criar animales, cuidar del planeta.	Tener acceso a la naturaleza, oportunidades para relacionarse con animales, herramientas para investigar la naturaleza.

De acuerdo con Fandiño (2015) hay varias formas de entender el concepto de fracción, entre ellas, la fracción como razón, a quien ella llama “relación”. Una relación es una comparación de dos cantidades. Se puede usar una relación para transmitir una idea que no se puede expresar como un solo número (Lamon, 2006, p. 182). La notación de fracciones se usa cuando se hace referencia a aquellos aspectos en los que las relaciones se comportan como otras interpretaciones de números racionales escritos en forma de fracción mientras que la notación de dos puntos se ve favorecida por formas en que las proporciones no actúan como otras fracciones. Si se usa la notación de fracción, se debe tener cuidado de usar cantidades, y no meramente números. Es decir, una proporción de 5 niñas a 7 niños no debe escribirse $\frac{5}{7}$ sino $\frac{5\,niñas}{7\,niños}$ ya que cuando no se etiquetan las cantidades las diferencias conceptuales y operativas entre las razones y las fracciones. Cuando los niños intentan construir significados entre éstas, cualquiera de las siguientes notaciones puede servir como una interpretación verbal de los símbolos: ***a*** a ***b***, ***a*** por ***b***, ***a*** para ***b***, ***a*** por cada ***b***, por cada ***b*** hay un ***a***, la razón de ***a*** a ***b***, ***a*** es a ***b.*** Cid, Godino y Batanero (2003) proporcionan literatura útil al profesor para distinguir entre fracciones y razones. Manifiestan que la razón se usa cuando se comparan dos tamaños de colecciones de objetos de naturaleza diferente, que se pueden expresar 4:7 o 4→7 y que pueden tener al cero como segunda componente.

El papel del profesor en el tema de razonamiento proporcional es enseñar las diferentes formas de razonamiento que se pueden aplicar en situaciones de este tipo. Así, la enseñanza de la regla de tres como única estrategia para resolver problemas de proporcionalidad resultaría insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques, y saber cuándo aplicar correctamente esta regla. Karplus *et al.* (1983) concluyeron que los estudiantes deciden o no utilizar el razonamiento proporcional de acuerdo con la facilidad o dificultad que encuentran en relacionar los números involucrados. Hart (1984), por otro lado, mostró estrategias y errores comunes de los estudiantes entre los que se encuentra la 'estrategia aditiva', esto es, los estudiantes utilizan un razonamiento aditivo dentro de una situación de proporcionalidad. Mochón (2012) quien manifiesta que una proporción es básicamente igualdad entre dos razones, dicha igualdad puede aparecer como una relación entre cuatro números relacionados entre sí o dentro una variación entre dos cantidades. El papel del profesor cuando imparte el tema de proporcionalidad es el de guía para encaminar a los estudiantes en las direcciones correctas. Mochón propone acercamientos para la instrucción en este tema: Uso de tablas y razonamiento "preproporcional", valor unitario por medio de tablas y razonamiento proporcional (constancia de la razón).

Metodología

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), este diseño de estudio es cualitativo de tipo descriptivo porque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados, utiliza técnicas como la observación no estructurada y la indagación es flexible. La investigación se realizó con 16 alumnos de primer grado de secundaria del Colegio José Vasconcelos ubicado en Cuautlancingo Puebla, México. Las edades oscilan entre 11 y 12 años, habiendo en el grupo 5 mujeres y 11 hombres.

En toda la investigación se hizo lo siguiente:

1.Cuestionario de IM al docente y a los estudiantes: el objetivo es ayudar a conectarse con las propias experiencias vitales de las ocho inteligencias, así como entender la teoría desde la experiencia y personalizar el contenido.

2.Actividades de introducción a las I.M.: con la finalidad de darle a conocer al alumno las ocho inteligencias que posee, consiste, sencillamente en explicársela (Armstrong, 2006; p. 66).

3.Actividades de explicación a las I.M.: cuyo objetivo no es decidir a qué grupo exclusivo se pertenece, sino celebrar las potencialidades de aprendizaje de cada uno. Entre ellas está la pizza de Inteligencias Múltiples (Armstrong, 2006; p. 69).

4.Anotaciones de la observación directa: para describir lo que se está viendo, escuchando y palpando del contexto de los participantes observados. Implica adentrarse profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, suceso, eventos e interacciones (Hernández, Fernández y Baptista, 2014; p. 399).

5.Pre-test del tema razones y proporciones: aplicación del instrumento de razones y proporciones (véase tabla 2) el cual fue diseñado basándose en diversas fuentes. Evalúa tanto razones como proporciones. Se decidió trabajar con ambos temas debido a que el último Aprendizaje Esperado que plantea el Programa de Matemáticas en primer grado de secundaria es: "Resuelve problemas de proporcionalidad directa del tipo "valor faltante", en los que la razón interna o externa es un número fraccionario". (SEP, 2011, p. 35).

Tabla 2. Ítems del pretest y postest de razones y proporciones

RAZONES	PROPORCIONES
Ítem 1. Un segmento AB mide 20 cm de largo y otro segmento CD de 25. El primero son los 4/5 del segundo. Escribe la relación que indica las longitudes entre los dos segmentos. (Fandiño, 2015).	Ítem 6. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura? (Pitta-Pantazi y Christou, 2011).
Ítem 2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal? (Lamon, 2005).	Ítem 7. Si Jorge pedalea a una razón de 8 km por hora, al cabo de 45 minutos ¿a qué distancia está de su casa? (Cid, Godino y Batanero, 2002).
Ítem 3. La Academia Posh cuenta con una proporción de 150 estudiantes a 18 profesores. ¿Cómo se puede ajustar el número de profesores para que la proporción de alumnos por profesor de la academia sea de 15 a 1? (Lamon, 2006).	Ítem 8. Una motocicleta puede funcionar durante 10 minutos con un valor de $24 en combustible. ¿Cuánto tiempo podría funcionar con $17 en combustible? (Lamon, 2006).
Ítem 4. Se tiene un sólido que tiene una masa de 340 gramos y ocupa un volumen de 120 centímetros cúbicos. ¿Cuál es la razón entre los gramos y el volumen del sólido? (Arons & Redish, 1997).	Ítem 9. Para tu fiesta, habías planeado comprar 2 kg de nueces mixtas para 8 personas, pero ahora vendrán 10 personas. ¿Cuántos kilogramos deberías comprar? (Lamon, 2006).
Ítem 5. L_1= 30m (altura del edificio 1) L_2= 12m (altura del edificio 2) ¿Cuál es la razón entre la altura de ambos edificios? (Arons & Redish, 1997).	Ítem 10. En una fotografía de un edificio hay una ventana de 3 cm de altura por 6 cm de ancho como la mostrada a continuación.  Un pintor quiere hacer un dibujo amplificado de esta ventana, de tal manera que la altura de la ventana le quede de 15 cm. ¿De cuánto debe ser el ancho de la ventana amplificada? (Mochón, 2012)

Los ítems 1, 2, 3 se tradujeron al idioma español, respetando el contexto y sintaxis de los mismos. El 4 y el 5 pertenecen a la investigación realizada por Arons & Redish (1997). Estos autores diseñaron los problemas con el objetivo de conocer el significado que daban los estudiantes al resultado de la operación que da solución. Para este trabajo, consideramos la respuesta numérica de los problemas, anexando la pregunta: ¿cuál es la razón…? El ítem 10 no fue modificado, mientras que el 7, 8 y 9 fueron traducidos del inglés, además de que los dólares se cambiaron a pesos mexicanos (en el ítem 8) y las libras a kilogramos (en el ítem 9).

6.Actividades para enseñar contenido matemático usando las inteligencias múltiples: se emplea el procedimiento de siete pasos que sugiere un modo de planificar las unidades curriculares utilizando la teoría de las IM como marco organizativo (Armstrong 2006, p. 88): centrarse en un tema específico, formular preguntas clave de IM, considerar todas las posibilidades, tormenta de ideas, seleccionar las actividades adecuadas, establecer un plan secuencial y, por último, poner el plan en práctica. Dicho plan consistió en la implementación de dos secuencias didácticas de cinco sesiones para cada tema. Todas las sesiones tienen un objetivo que incluye el uso de ciertas inteligencias según se adaptaran a las actividades seleccionadas de la tormenta de ideas. La razón por la que las sesiones tienen objetivos es porque nos basamos en las sesiones propuestas por Mochón (2012) como alternativa para la enseñanza del razonamiento proporcional.

Tabla 3. Nombres y objetivos de las sesiones de las secuencias didácticas

Secuencia 1: Razón entre dos números

Sesión 1: *Etiquetas y simplificación*

Identificar la diferencia entre fracciones y razones, reconociendo a $\frac{3}{2}$ como fracción y a $\frac{3\ rojas}{2\ azules}$ como razón, a través de la utilización de fichas de colores y llamando las palabras “rojas” y “azules” como etiquetas. Reconocer que las razones sirven para comparar dos cantidades (Lamon, 2006).
Inteligencias usadas (*Iu*): lógico-matemática, espacial e interpersonal.

Sesión 2: ¿Cuántos quito, ¿cuántos pongo?

Formar y simplificar razones formadas con alumnos ($\frac{6\ niños}{4\ niñas}$) con ayuda de una línea roja para separar una cantidad de la otra.
Analizar qué debe hacerse para simplificar la razón (quedando $\frac{3\ niños}{2\ niñas}$) y qué debe hacerse para que quede $\frac{3\ niños}{1\ niña}$.
Iu: interpersonal y corporal.

Sesión 3: Comparación entre dos cantidades

Medir y comparar correctamente parejas de cuadrados para simplificar las razones formadas con las medidas de éstos.
Iu: lógico-matemática, interpersonal y espacial.

Sesión 4: Dibujos a escala

Aplicar las escalas en los dibujos, trazando cuadrículas en la hoja del dibujo original y en la hoja donde realizarán la copia. Escribir correctamente una escala de reducción.
Iu: espacial y lógico-matemática.

Sesión 5: Los animales

Explicar oralmente características del animal que reprodujeron a escala y resaltar por qué su escala es la mostrada.
Iu: lingüística y naturalista.

Secuencia 2: Proporcionalidad directa

Sesión 6: *Estrategia sumativa versus estrategia multiplicativa*

Aplicar la estrategia sumativa en una y la estrategia multiplicativa al trazar la copia de un triángulo y comparar cuál estrategia permite conservar la proporción en la figura original.
Iu: intrapersonal, lógico-matemática y lingüística.

Sesión 7: Razonamiento preproporcional

Reflexionar sobre si la situación planteada es de tipo proporcional y que inicie el razonamiento proporcional a través de razones sencillas como el triple, la mitad, una vez y media y dos veces y media. (Mochón, 2012, p. 144)
Iu: intrapersonal, lógico-matemática, lingüística e interpersonal.

Sesión 8: Valor unitario

Mostrar la estrategia unitaria para que el alumno se dé cuenta que, una vez que se llega a conocer una de las dos cantidades cuando la otra tiene el valor unitario (1), el problema se torna en un simple problema multiplicativo. (Mochón 2012, p. 147)
Iu: intrapersonal, lógico-matemática, lingüística e interpersonal.

Sesión 9: Razonamiento proporcional

Concebir a la proporcionalidad de una manera integral como una igualdad de dos razones formadas por cuatro valores. (Mochón, 2012, p. 150)
Iu: intrapersonal, lógico-matemática, lingüística e interpersonal.

Sesión 10: Soy cantautor

Elaborar y presentar una canción habiendo modificado la letra, adaptándola a las experiencias y aprendizajes adquiridos durante las nueve sesiones anteriores. Implementar en la letra de sus canciones las palabras: razón, proporción, etiqueta, etc., redactando sin errores ortográficos. Conservar la métrica de la canción al cantarla frente al grupo.

Iu: musical y lingüística.

7.Post-test del tema razones y proporciones: Aplicación del mismo instrumento de razones y proporciones para medir el avance que tuvieron los estudiantes en el tema.

8.Entrevistas: se utilizaron preguntas como las siguientes: ¿Qué crees que te haya funcionado para entender un poco más el tema?, ¿crees que las actividades sirvan para aprender matemáticas?, ¿te sirvió usar tus inteligencias?, ¿con qué crees que hayan tenido que ver tus resultados? Éstas se hicieron únicamente a los alumnos que tuvieron un retroceso en los resultados del post test o que tuvieron cero aciertos en el pre test.

Resultados

1.Cuestionario de IM al docente y a los estudiantes: de acuerdo con el test de IM de Gardner, en el docente de matemáticas pondera la inteligencia lógico-matemática mientras que tiene pocas habilidades de la cinético-corporal. En el alumnado predomina la inteligencia espacial en un 44%, a su vez, las que menos desarrolladas tienen son la inteligencia interpersonal en un 25% y la intrapersonal en un 31%.

2.Actividades de introducción a las IM: después de que el profesor de matemáticas preguntara “¿Quién se considera inteligente?”, únicamente el 37% de los estudiantes levantó la mano. Lo que coincide con los resultados de Armstrong (2006) quien afirma haber descubierto que parece existir una relación inversa entre el número de manos que se levantan y el curso al que se dirige.

3.Actividades de explicación a las IM: una a una comenzó a identificar la inteligencia que representaba cada imagen de los sectores circulares de la pizza. Dados ocho personajes conocidos, lograron identificar y relacionar 7 con la inteligencia predominante en ellos.

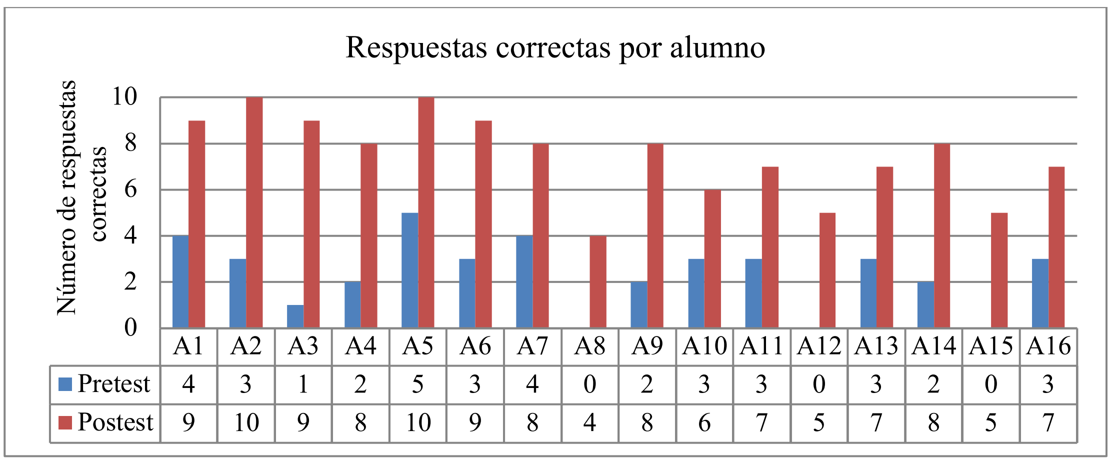
4.Anotaciones de la observación directa: basándose en las ocho maneras de aprender de Armstrong (tabla 1), el profesor identificó a través de la observación durante las clases de matemáticas la inteligencia sobresaliente en sus alumnos. Los resultados de la observación coinciden con los del test de IM de Gardner en 9 de 16 alumnos.

5.Pre-test del tema razones y proporciones: en promedio hay 9% en respuestas correctas y un 91% en incorrectas en el tema de razones. Cumpliendo con uno de los objetivos de investigación, encontramos que los errores que cometen los estudiantes de primer grado de secundaria al resolver problemas de razones entre dos números son: expresan la razón como un solo número, no simplifican la razón, no etiquetan las cantidades que forman la razón y, no saben resolver problemas que emplean razones entre dos números por lo que únicamente operan con las cantidades.

En proporciones hay un 39% en respuestas correctas, resultado superior al obtenido en el tema de razones entre dos números. Los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad directa son: operan con los números sin establecer relaciones de proporcionalidad, utilizan un razonamiento aditivo y, no saben plantear ni resolver problemas de proporcionalidad directa.

6.Actividades para enseñar contenido matemático usando las inteligencias múltiples: en todo momento los estudiantes se mostraron interesados y entusiastas. El haberles explicado las IM y hacerles notar que todos ellos son inteligentes, permitió que fueran reconociendo sus inteligencias más desarrolladas, manifestando agrado y compromiso para trabajar en las menos desarrolladas. A grandes rasgos, lograron diferenciar rápidamente entre fracción y razón, usaron adecuadamente las etiquetas en las razones y las representaron correctamente. Cuando tuvieron que usar su inteligencia espacial para hacer las cuadrículas de su dibujo original y copia (*sesión 4*), presentaron dificultades al realizar los cálculos del número de cuadrados que convenía trazar en cada dimensión de las hojas (largo y alto) de manera tal que coincidiera en ambas la cantidad de cuadrados; por otra parte, no se logró un avance significativo en la simplificación de razones. En el tema de proporciones, ayudó considerablemente la actividad de la sesión 6, ya que descubrieron que para conservar las proporciones se debe aplicar una estrategia multiplicativa y no una sumativa. En las hojas de trabajo utilizadas para el resto de las sesiones, los estudiantes de primero de secundaria externaron su asombro al conocer que existe más de una forma de resolver un problema de proporcionalidad directa.

7.Post-test del tema razones y proporciones: después de aplicar nuevamente los 10 ítems, los resultados fueron favorables. En los ítems de razones se obtuvo un 78% en resultados correctos y en los de proporcionalidad un 73%.



	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	A16
Pretest	4	3	1	2	5	3	4	0	2	3	3	0	3	2	0	3
Postest	9	10	9	8	10	9	8	4	8	6	7	5	7	8	5	7

Figura 1a. Comparación de resultados por alumno entre el pretest y postest

En la figura 1b se observa que el ítem 4 (I4) fue resuelto correctamente por el 100% de los alumnos, pero hemos de resaltar que la mayoría decidió no simplificar las razones; A5 fue quien redujo hasta $\frac{17\ gramos}{6\ cm^3}$, A6 lo dejó en $\frac{34\ gramos}{12\ cm^3}$ y el resto del grupo en $\frac{340\ gramos}{120\ cm^3}$.

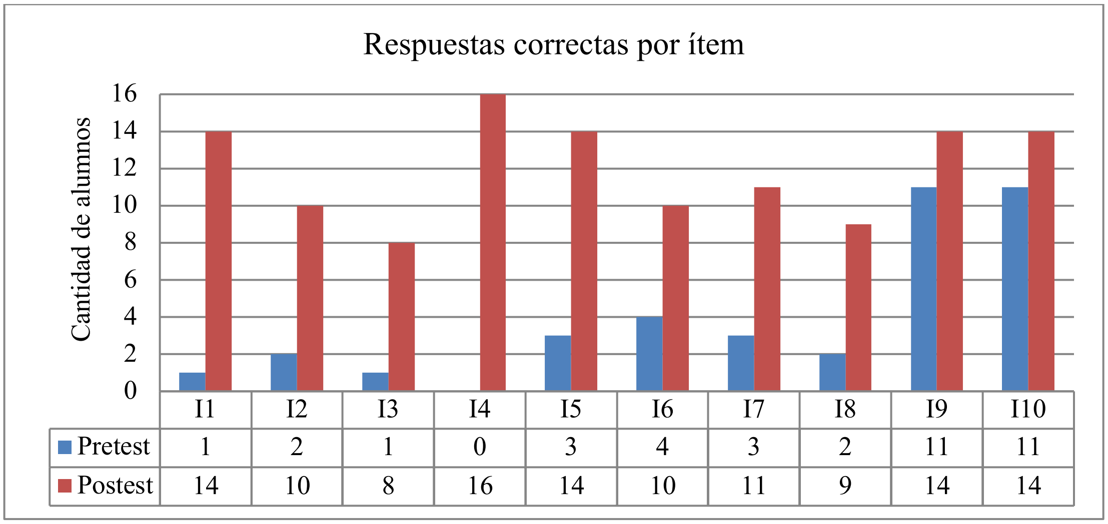


Figura 1b. Comparación de resultados por ítem entre el pretest y postest

El instrumento permitió identificar los errores de los alumnos y la propuesta coadyuvó en el aprendizaje de los estudiantes, principalmente en el tema de razones, pero es precisamente en la simplificación de razones en las que la propuesta didáctica presentada no favoreció como se esperaba.

8.Entrevistas: se entrevistaron a los alumnos A8, A12 y A15, porque fueron quienes tuvieron aciertos nulos en el pre test. Ellos externaron haber comprendido más el tema de razones que el de proporciones y consideraron que el haber hecho todas las actividades planteadas en la propuesta didáctica (tabla 3) mejoró la percepción que tenían de sí mismos y atribuyeron que sus resultados tuvieron que ver con haber usado sus inteligencias, porque nunca les habían enseñado de la misma forma en un salón de clases.

Conclusiones

Si los alumnos no se sienten seguros de simplificar correctamente una razón, prefieren no hacerlo. Para lograr que lo hagan correctamente es necesario dedicar mayor número de sesiones, una sola no es suficiente.

Algunos de los errores cometidos están relacionados con lo encontrado por Hart (1984) quien habla de la estrategia aditiva usada por los estudiantes, estrategia que usó gran parte de la población que resolvió el pre-test. Los resultados de esta investigación también coincides con Karplus *et al.* (1983), debido a que los estudiantes decidieron usar o no el razonamiento proporcional. Mochón presenta una alternativa funcional para acercar a los alumnos al razonamiento proporcional, una vez que éstos la conocen, son capaces de resolver un problema de proporcionalidad, no solo aplicando regla de tres sino usando tablas o hallando el valor unitario tres según consideren.

Reflexiones

Mucho se ha trabajado al respecto de las Inteligencia Múltiples de Gardner, pero poco se ha realizado después de la investigación de Armstrong (2006). Haber diseñado y aplicado la propuesta didáctica no fue una tarea sencilla, aun así, consideramos que es necesario continuar con investigaciones que impliquen el uso de las inteligencias de los estudiantes dentro del aula de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Armstrong, T. (2006). *Las inteligencias múltiples en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Manantial.

Arons, A. B., & Redish, E. F. (1997). *Teaching introductory physics* (Vol. 22). New York: Wiley

Cid, E., Godino, J. D., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Díaz, F., & Hernández, G. (2002). Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. *Una interpretación constructivista*, *2*. México: Mc. Graw Hill.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio.

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., y Ferrando, M. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales de psicología*, *24*(2), 213.

Gardner, H. (1994). *Estructuras de la mente. La teoría de las inteligencias múltiples*. México: FCE.

Gardner, H., Kornhaber, M., & Krechevsky, M. (1993). Abordar el concepto de inteligencia. *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica. Barcelona: Paidós*.

Hart, K. (1984). Ratio: *Children's Strategies and Errors*. Windsor: NFER-NELSON.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill.

Karplus, R., Pulos, S. & Stage, E. (1983). "Proportional reasoning of early adolescents". In: R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Mochón Cohen, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, *24*(1), 133-157.

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149-169.

Ramírez, M. y Block, D. (2009). "La fracción y la razón: un vínculo difícil en las matemáticas escolares". En *Educación Matemática*, 21, 1, 63-90.

SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica.* México: D.F.

ESTRATEGIAS COLABORATIVAS EN LA COMPRENSIÓN DE DESIGUALDADES MATEMÁTICAS

COLLABORATIVE STRATEGIES IN THE UNDERSTANDING OF MATHEMATICAL INEQUALITIES

Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Edgar Esaúl Saucedo Becerra, Leticia Sosa
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
mtorres@matematicas.reduaz.mx, borjonrojo@hotmail.com, edsaucedo@uaz.edu.mx lsosa@uaz.edu.mx

Resumen
Se presenta una propuesta de intervención didáctica, parte de una investigación en curso que pretende evidenciar el impacto de la incorporación de tecnologías CAS en el aula de matemáticas frente a los procesos de enseñanza–aprendizaje de un ambiente tradicional. Se utiliza como referente teórico el aprendizaje colaborativo, bajo una metodología cualitativa de corte cuasi-experimental en la que se compara el desempeño de dos grupos de alumnos en la primera etapa de formación del nivel superior. Específicamente se hace un recuento del tema de desigualdades matemáticas, elegido un tema fundamental en la construcción de conceptos de cálculo, donde los alumnos se enfrentan a situaciones que los conducirán a compartir sus conocimientos y dificultades en el tema, para lograr con ello la solución de los problemas propuestos, evidenciando así el impacto de la estrategia utilizada.

Palabras clave: desigualdades matemáticas, aprendizaje colaborativo, tecnología

Abstract
This work presents a didactic approach proposal, part of an ongoing research that is aimed at highlighting the impact of the use of CAS technologies in the mathematics classroom facing up the traditional environment of the teaching-learning processes. Collaborative learning is used as a theoretical reference, with a semi-experimental qualitative methodology, where the performance of two groups of first-year university students is compared. Specifically, we describe the topic of mathematical inequalities, which was chosen as a fundamental topic in the construction of calculus concepts, where students confront the situations that will lead them to share their knowledge and difficulties in the subject, to achieve the solution of the proposed problems; thus, showing the impact of the strategy used

Key words: math inequalities, collaborative learning, technology

Introducción

En un afán por innovar en aquellos temas que reiteradamente presentan dificultades por parte de nuestros alumnos, como docentes incorporamos estrategias y dinámicas de trabajo que contribuyen en la disminución de los problemas que en el aula se presentan. Con esto, se propicia algún efecto en nuestros estudiantes que nos lleve a mejorar los niveles de comprensión de los conceptos expuestos.

En este sentido, se expone este trabajo, como parte de una investigación en curso que analiza el impacto de la incorporación de la tecnología CAS (Computer Algebra System) en la de comprensión de los objetos matemáticos, específicamente lo relacionado al tema de desigualdades matemáticas, puesta en marcha mediante estrategias de trabajo colaborativo.
Se realiza una comparación del desempeño de dos grupos de alumnos del primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas, en un laboratorio de la materia de pre-cálculo: uno mediado con tecnología CAS y el otro en un ambiente tradicional de lápiz y papel.

El objetivo es evidenciar el impacto que proporciona cada una de las herramientas en los desempeños de los propios alumnos, ya que como mencionan Cordero y Moreno (2005, citados en García, 2013): "Una de las causas más significativas que dificultan el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes se encuentra en que la enseñanza de la disciplina se ha venido realizando, desde hace mucho tiempo, desde una perspectiva "axiomatizada", algorítmica y rutinaria. Esto lleva a considerar a las matemáticas como un conjunto de reglas y fórmulas que existen y valen por sí mismas, incluso ajenas a la cotidianeidad y al entorno de los sujetos", por lo que se ponen en juego diferentes dinámicas, en las que los alumnos interactúan con sus compañeros, con el profesor como mediador del proceso.

Se utiliza una metodología cualitativa, de corte cuasi-experimental en la que se tienen dos grupos de alumnos ya establecidos, se ponen en juego algunas secuencias didácticas que incorporan propuestas de actividades de clase, desarrolladas por TI (2013) y rediseñadas para su implementación en pequeños grupos de trabajo. La finalidad es que puedan observar y manipular las desigualdades en diferentes representaciones, planteando con ello soluciones a problemas propuestos. En los resultados, se evalúa tanto en el contenido como en el proceso, distinguiendo claras ventajas de la implementación de tecnología ante las estrategias de trabajo tradicionales desarrolladas.

Marco teórico

El sustento teórico que respalda el trabajo es el aprendizaje colaborativo, el cual tiene sus orígenes en la teoría constructivista, postulada en los trabajos de Jean Piaget y complementada con los de Lev Vygotsky. Se pone mayor énfasis la interacción social como factor clave para el aprendizaje y la transmisión de la cultura (Galindo, Galindo, Martínez, Ley, Ruiz y Valenzuela, 2012). Ambas teorías señalan que la importancia es la obtención del conocimiento por el individuo mismo, más allá de la asimilación de información recibida.

Estas visiones multidisciplinares, nos permiten ver al aprendizaje colaborativo como un modelo de trabajo para el aula; por ejemplo, Maldonado (2007) menciona que: "un modelo de aprendizaje interactivo invita a los estudiantes a construir juntos, para lo cual demanda conjugar esfuerzos, talentos y competencias mediante una serie de transacciones que les permitan lograr las metas establecidas concensuadamente", (Maldonado, 2007, p. 268).

Se toman como premisas el diseño de las actividades, la participación del grupo y el respeto a las aportaciones de los compañeros. Además, este modelo de aprendizaje experimenta con la incorporación de tecnología, dando paso a lo que se conoce como aprendizaje colaborativo mediado por computadora (CSCL, por sus siglas en inglés). Se define como "una disciplina en la que las ciencias de la educación combinan la noción de aprendizaje colaborativo con el potencial de las TICs para apoyarlo" (Stahl, et. al, 2006, citado en Onrubia, Colomina y Engel, 2010, p. 235).

Por su parte, Galindo, et. al. (2012) lo describen como el resultado de la suma de diferentes teorías, afirmando que:

> Comprende la corriente tradicional del aprendizaje cooperativo (Slavin, 1999; Johnson & Johnson, 1999), pero suma aportes neopiagetianos, como la teoría del conflicto sociocognitivo (Doise & Mugny, 1981), neovygotskianos, como la teoría de la intersubjetividad y del aprendizaje situado (Rogoff, 1993; Wertsch, 1988; Cole, 1990) y sistémicos, como la teoría de la cognición distribuida (Hutchins, 1991; Salomon, 2001), y converge en la teoría del aprendizaje colaborativo mediado por computadora (Computer Supported Collaborative Learning) (O'Malley, 1989; Warschauer, 1997).
>
> (Galindo, et. al., 2012, p. 1-2)

Esta dinámica permite unir e intercambiar los esfuerzos de los participantes de un grupo, con la finalidad de llegar a un objetivo común. Para ello es necesario establecer estrategias que propicien esta colaboración, vigilando en todo momento que todos los miembros del equipo se involucren en el proceso de manera homogénea, con una participación activa en la que expongan sus puntos de vista y lleguen a un acuerdo común, además de estar convencidos de que cooperar significa trabajar juntos para alcanzar objetivos compartidos.

Por otra parte, como el trabajo se desarrolla de manera colectiva, se debe evaluar tanto los resultados como el proceso de asimilación; Maldonado (2007) menciona que el trabajo colaborativo debe contar con las siguientes características:

1. Un profesor o facilitador. Acompaña la dinámica y funge como mediador
2. Responsabilidad por la tarea. Individual y grupal.
3. División baja de tareas. Realizar el trabajo juntos
4. Proceso para construir el resultado final. En conjunto, en ningún caso corresponderá a la suma de esfuerzos o desempeños individuales.
5. Responsabilidad por el aprendizaje. Miembros del grupo con el acompañamiento del profesor.
6. Tipo de conocimiento. No fundamental, se requiere razonamiento, cuestionamiento y discusión

Cabe aclarar que el aprendizaje colaborativo no necesariamente está ligado a la implementación de tecnología, y sin embargo permite su incorporación de una manera natural, por lo que lo consideramos un escenario ideal para estudiar el impacto que pudiera tener en el aula el uso de herramientas tecnológicas y tradicionales.

Se selecciona la tecnología CAS, entendida como toda aquella que permite interactuar con paquetes de software en los que es posible operar simbólicamente expresiones matemáticas con variables en sus diferentes representaciones, ideal para manipular las desigualdades en diferentes representaciones semióticas.

Por otra parte, las actividades planteadas en las secuencias involucran resolver alguna desigualdad, entendido este proceso como "encontrar el conjunto de todos los números reales que hacen que la desigualdad sea verdadera. En contraste con una ecuación, cuyo conjunto solución por lo regular consiste en un número o quizás un conjunto finito de números, el conjunto solución de una desigualdad por lo regular es un intervalo completo de números, o en algunos casos, la unión de tales intervalos" (Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, pag. 8), que involucran la utilización de las propiedades de los números reales y valor absoluto de desigualdades.

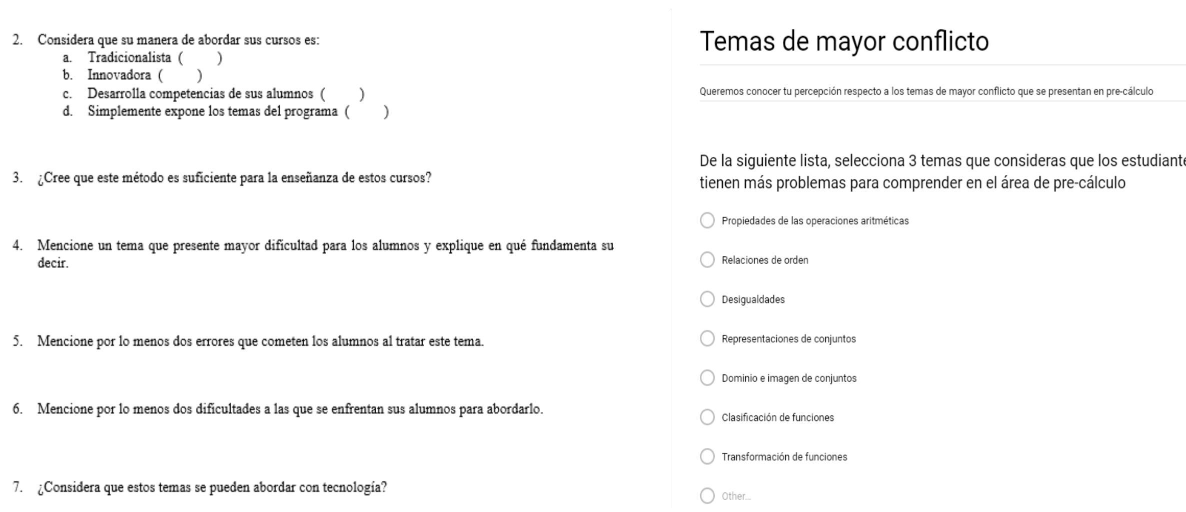
Metodología

La propuesta se pone en marcha bajo una metodología de investigación cualitativa de corte cuasi-experimental con dos grupos de alumnos previamente establecidos; conformados por 12 alumnos del primer semestre de la

Licenciatura en Matemáticas: un grupo de control, que trabaja bajo un esquema de clase tradicional con lápiz y papel y otro experimental, cuya herramienta de trabajo es la tecnología CAS, específicamente calculadoras TI-NSpire CAS. Ambos grupos utilizan las mismas secuencias didácticas con diferencia del método de manipulación.

La investigación que se realiza consta de cuatro fases:

1. Análisis preliminar y selección de actividades. Primeramente, se realizaron dos entrevistas a los maestros que imparten clases en el programa de Licenciatura en Matemáticas, la primera (cara a cara) con la finalidad de conocer el tipo de estrategias didácticas a las que recurren; y la segunda (por medio de un cuestionario virtual) para detectar los temas que desde su percepción provocan algún problema a los alumnos en el área de pre-cálculo (figura 1); encontrando a las desigualdades como el tema de mayor conflicto en el área.



2. Considera que su manera de abordar sus cursos es:
   a. Tradicionalista ( )
   b. Innovadora ( )
   c. Desarrolla competencias de sus alumnos ( )
   d. Simplemente expone los temas del programa ( )
3. ¿Cree que este método es suficiente para la enseñanza de estos cursos?
4. Mencione un tema que presente mayor dificultad para los alumnos y explique en qué fundamenta su decir.
5. Mencione por lo menos dos errores que cometen los alumnos al tratar este tema.
6. Mencione por lo menos dos dificultades a las que se enfrentan sus alumnos para abordarlo.
7. ¿Considera que estos temas se pueden abordar con tecnología?

Temas de mayor conflicto

Queremos conocer tu percepción respecto a los temas de mayor conflicto que se presentan en pre-cálculo

De la siguiente lista, selecciona 3 temas que consideras que los estudiante tienen más problemas para comprender en el área de pre-cálculo

- Propiedades de las operaciones aritméticas
- Relaciones de orden
- Desigualdades
- Representaciones de conjuntos
- Dominio e imagen de conjuntos
- Clasificación de funciones
- Transformación de funciones
- Other...

Figura 3. Captura de las entrevistas realizadas a maestros

En base a los resultados obtenidos , se toma como referencia el análisis realizado por Bernardis, Nitti y Scaglia (2017), quienes describen las desigualdades a lo largo de la historia, y encuentran que “los símbolos < y > se introdujeron por primera vez por el matemático inglés Thomas Harriot en su obra Artis Analyticae Praxis publicada en Londres en 1631, inspirado por un símbolo que había visto en el brazo de un nativo americano (figura 2) para inventar los símbolos de las desigualdades” (Bernardis, et. al, 2017, p.178), encontrando que las desigualdades se pueden entender como un fenómeno de ordenación, generalización y especificación, procesos que deberán estar presentes en las actividades planteadas.

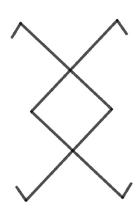


Figura 4. Insignia del orden de los símbolos (Bernardis, Niti y Scaglia, 2017, p. 178)

2. Diseño y elaboración de secuencias didácticas. Se diseña una secuencia que consta de 5 actividades, 4 de ellas para el trabajo en equipo, indicando los momentos de interacción, con la finalidad de implementarlas bajo un esquema de trabajo colaborativo; generando un instrumento guiado para el grupo de control (figura 3) y un libro de actividades digitales para el grupo experimental (figura 4), así como una actividad planteada como evaluativa, que será trabajada de manera individual.

Actividad 1. Noción de orden de una desigualdad

Instrucciones. En equipo discutan los procedimientos necesarios para demostrar gráfica y aritméticamente las siguientes situaciones, posteriormente elijan el signo final de la expresión.

1. Multiplicar $-5 < 7$ por 2 $-6 < 14$
2. Multiplicar $-5 < 7$ por -2 $-5 > 14$
3. Sergio es 4 años mayor que Mario, ¿cómo será dentro de 5 años?
   S>M =4 años Sergio seguira siendo 4 años Mayor

Actividad 2. Identificación de inecuaciones en diferentes contextos

Instrucciones. Observen la siguiente representación gráfica de $y < x + 2$ en el plano, los valores que se satisfacen se representan con una sombra en el plano y como un rayo en la recta, la línea frontera es punteada ya que los valores en ella no satisfacen la inecuación, por lo tanto el intervalo que la satisface es: (2,∞). Tomando como referencia esta representación, discutan con sus compañeros de equipo y elijan o escriban el intervalo que la satisface a la expresión en la primera columna, posteriormente represéntenlo en la recta como un rayo

Figura 5. Instrumento de trabajo del grupo de control.

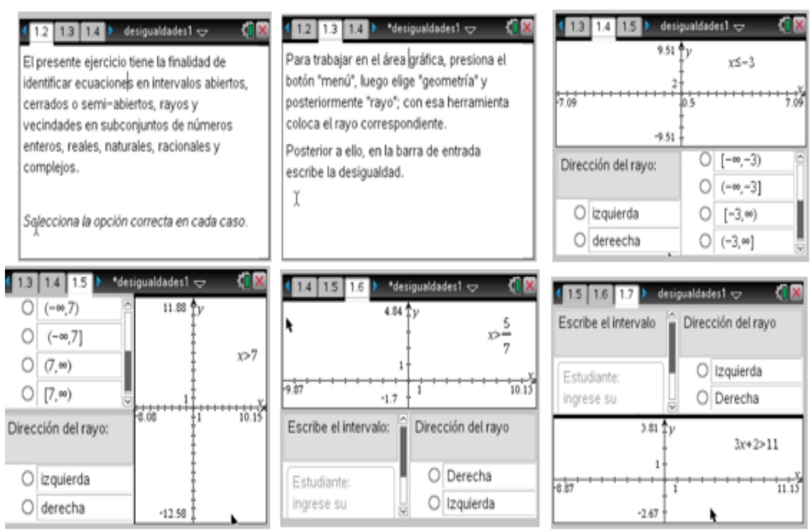


Figura 6. Contexto de trabajo del grupo experimental

Esta parte representa la de mayor carga para el profesor, pues se planean los tiempos de trabajo de los equipos, el monitoreo del trabajo realizado por cada uno de los integrantes, así como los momentos de intervención y/o mediación de las actividades.

3. Experimentación y recogida de datos. Cada actividad se realizó en el laboratorio de cómputo de la unidad académica, en 4 sesiones de 60 minutos, 30 minutos de trabajo en equipo y 30 minutos de confrontación de opiniones y consenso.

   En cada grupo se conformaron equipos de 3 integrantes, de acuerdo a las afinidades de los propios alumnos. En general la dinámica de trabajo se realizó como se esperaba, pues en el momento de las indicaciones se dio la consigna de que se elegiría a uno de los integrantes de manera aleatoria para que argumentara el porqué de la elección que hicieron, los alumnos participaron activamente, ya sea cuestionando o explicando a sus compañeros de equipo tomando así la responsabilidad y no la división de las tareas planteadas (ver figuras 5 y 6).

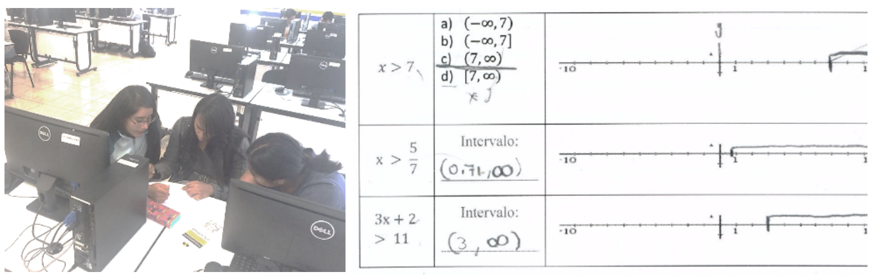


Figura 5. Trabajo del grupo de control

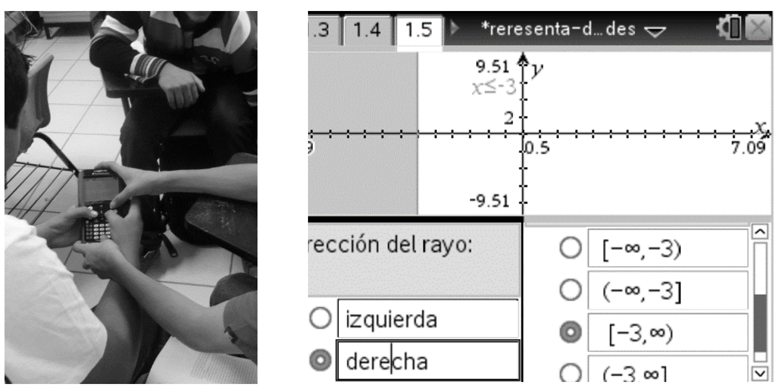


Figura 6. Trabajo del grupo experimental

4. Análisis y evaluación de resultados. Los planteamientos se realizaron en diferentes representaciones, pasando de lo aritmético a lo gráfico, de lo verbal a lo algebraico, de lo gráfico a lo simbólico y de lo algebraico a lo verbal.

   Una vez realizadas las actividades grupales, se compartieron los resultados de cada equipo: en el grupo de control se intercambian las hojas de repuesta, mientras que en el grupo experimental, se proyecta la comparación de selecciones en las calculadoras una vez que se reciben - vía TI Navigator - las respuestas de todos.

En ambas modalidades se propicia con ello una discusión con el profesor como mediador, con la finalidad de tomar como referencia los esfuerzos de cada equipo y llegar primeramente a un consenso argumentado y posteriormente una conceptualización construida en grupo.

Análisis de resultados

Dentro de la evaluación del proceso, en la dinámica de trabajo se observó que algunos integrantes de los equipos formados en el grupo de control no participaron en todas las actividades, argumentando que no se acordaban del tema, lo cual corrobora los argumentos presentados por los maestros en la segunda entrevista, donde resaltan que no fomentan el trabajo colaborativo porque “no todos trabajan”, sin embargo, a medida que avanzaron las actividades y las dinámicas de confrontación, se mejoró notablemente la participación. En contraparte, en otros equipos fue notable la explicación de unos a otros, lo que propició que sus resultados y argumentos individuales fueran mejores notablemente.

En contraparte, en el grupo experimental, la dinámica de trabajo motivó de sobremanera la participación de todos los integrantes, en un primer momento por el hecho de manipular individualmente la calculadora y después evidenciar sus resultados en la confrontación (ver figura 7), esto se vio reflejado en las respuestas del equipo; por lo que en este sentido el trabajar con tecnología representó una ventaja para los alumnos, así mismo, nos da elementos para considerar una evaluación favorable al proceso de integración, sin que esto implique que se empleen nuevas estrategias para propiciar la participación.

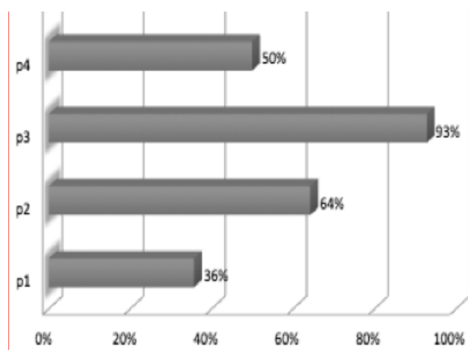


Figura 7. Confrontación de respuestas en el grupo experimental

En cuanto al cambio de representación de las actividades planteadas, se encontró que el contexto gráfico brindó elementos a los participantes para comprender el concepto de orden y posición, pues una vez que lo representaron gráficamente, observaron lo que sucedía y expresaron “las flechas cambian de dirección cuando en la desigualdad entra un número negativo”, y luego lo corroboran en la representación aritmética, indicando con una “X” que la desigualdad no es verdadera; mientras que uno de los equipos expresó este resultado al cambiar el signo de la desigualdad pero no realizó correctamente el desplazamiento en la gráfica (ver figura 8).

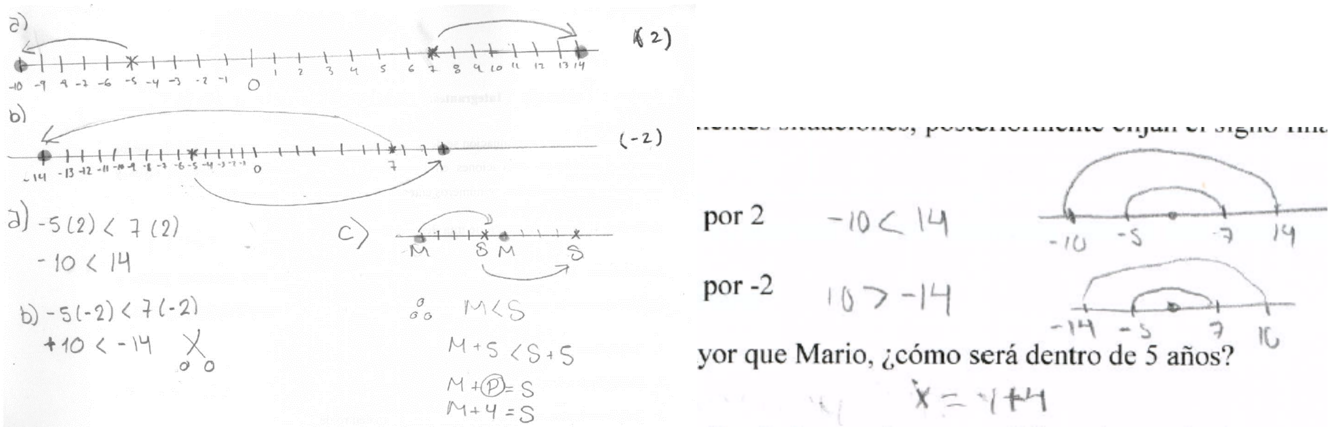


Figura 8. Trabajo en la representación gráfica y aritmética del grupo de control

Por otro lado, en el grupo experimental, a quienes se les presentaron áreas sombreadas en el contexto gráfico, no tuvieron problemas para interpretar el sentido en que debía representarse el rayo, como se puede observar en la respuesta del equipo “star” (figura 9).

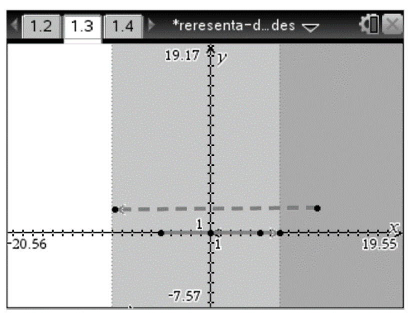


Figura 9. Representación de la desigualdad del equipo “star”

Del mismo modo, los participantes en el grupo de control en su mayoría representaron correctamente la desigualdad como un rayo, sin embargo, ésta no se vio reflejada en la representación simbólica, a diferencia del grupo experimental, quienes una vez que observaron la representación gráfica, detectaron los elementos que determinan si un conjunto es cerrado o abierto; consideramos entonces que la representación gráfica y algebraica es la ventaja principal que proporcionan las calculadoras.

En cuanto a los argumentos verbales que debían guardar en los instrumentos trabajados, el grupo de control la realizó de manera más amplia, pues escribieron cada una de las cosas que observaron, mientras que en el grupo experimental almacenaron solo algunas ideas, esto último, de acuerdo a lo que manifestaron, se debió a que no podían escribir mucho, pues batallaban para encontrar las letras (la distribución del teclado de las calculadoras es en orden alfabético); por lo que la transitar de cualquier representación hacia la verbal se vuelve una desventaja de las calculadoras CAS utilizadas.

Finalmente, en la actividad de evaluación, se pudo observar que los estudiantes de ambos grupos están familiarizados con la representación algebraica de las desigualdades, las actividades les perimieron “ver” la forma correcta de representar el conjunto solución en diferentes contextos; por otro lado, el grupo experimental concluyó que las desigualdades no-inclusivas tienen un círculo vacío en la recta numérica o una línea frontera discontinua en el plano coordenado, imágenes previstas en las representaciones gráficas presentadas en las calculadoras, evidenciando también algunas propiedades de los reales que se reflejan en la noción de orden de las desigualdades.

Conclusiones

Con base en los resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo, podemos concluir por una parte las dinámicas del trabajo colaborativo puestas en marcha rindieron resultados favorables, pues el proceso permitió que aquellos estudiantes que en un primer momento no querían participar, fueron motivados por sus compañeros de equipo, propiciando una participación general de los participantes.

Por otra parte, en cuanto al manejo de las herramientas puestas en juego, nos podemos dar cuenta de que en algunos procesos, tales como el tratamiento aritmético, la actividad realizada fue la misma para ambos grupos, es decir, es necesario replantear este tipo de actividades de forma que no se haga lo mismo con la tecnología que con el papel, implementado espacios para que los alumnos puedan realizar operaciones que les permitan reflexionar el proceso y no solo seleccionen posibles respuestas.

Corroboramos que la incorporación de herramientas tecnológicas en el aula de clase representa un impacto positivo en la comprensión del concepto de desigualdad sobre todo en el manejo e interpretación gráfica; más no así cuando se habla de una representación verbal, como se describió en el análisis de resultados, dependiendo de la dinámica que se lleve a cabo para incentivar la participación de los alumnos y se realice un cierre por parte del profesor, de modo que los estudiantes encuentren sentido al desarrollo de cada actividad, así como a su participación en el grupo.

Concluimos también que combinando las seis características del trabajo colaborativo que menciona Maldonado (2007), podemos alcanzar los objetivos previstos en las actividades planteadas

Referencias bibliográficas

Bernardis, S. Nitti, L. y Scaglia, S. (2017). Indagación de la historia de las desigualdades matemáticas. *Educación Matemática, 29* (3) 161- 187.

Galindo, R., Galindo, L., Martínez, N., Ley, M., Ruiz, E. y Valenzuela, E. (2012). Acercamiento epistemológico a la Teoría del Aprendizaje Colaborativo. *Revista Apertura, 4*(2). Recuperado de: http://www.udgvirtual.udg.mx/apertura/index.php/apertura/ rt/printerFriendly/325/290#conceptual

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *The Free Library by farlex. Gale, Cengage Learning*. Universidad de Costa Rica. Recuperado de https://www.thefreelibrary.com/_/print/PrintArticle.aspx?id=345775045

Maldonado, M. (2007). El Trabajo Colaborativo en el Aula Universitaria. *Revista Laurus, 13* (23), 263-278. *Universidad Pedagógica Experimental Libertador*, Caracas, Venezuela.

Onrubia, J.; Colomina, R. y Engel, E. (2008). Los entornos virtuales de aprendizaje basados en el trabajo en grupo y el aprendizaje colaborativo, *Psicología de la educación virtual. Enseñar y aprender con las tecnologías de la información y la comunicación*. Coll y Monereo (eds.), Madrid: Morata, (pp. 233-252)

Purcell, E., Varberg, D. y Rigdon, S. (2007). Cálculo. Pearson Educación, México.

TI (2013). Actividades de clase: Desigualdades. Texas Instruments Education Technology. Recuperado de: https://education.ti.com/es/activity/search/advanced#!gs=recent&k=desigualdades&pgs=15

DISEÑO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA ENRIQUECER EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE VARIACIÓN LINEAL

DESIGN OF DIDACTIC SEQUENCES TO ENRICH THE DIDACTIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS ON LINEAR VARIATION

Karina Jaquelin Herrera Garcia, María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora (México)
jaquelin_herrera@hotmail.es, tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen

En este trabajo presentamos los avances de un proyecto de tesis de maestría, cuyo objetivo es el diseño de secuencias didácticas para enriquecer el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de secundaria sobre el tema *variación lineal*. Para el diseño de las actividades nos apoyamos en herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y en el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM). Los avances por presentar consisten en el planteamiento de los objetivos y fases metodológicas del proyecto, observaciones sobre el significado pretendido por el currículo de secundaria sobre la variación lineal, así como el diseño preliminar de una actividad didáctica mediada por GeoGebra.

Palabras clave: variación lineal, conocimiento didáctico-matemático, formación de futuros profesores

Abstract

In this paper we discuss some important aspects of an ongoing master's thesis project which is intended to design didactic sequences to improve the didactic-mathematical knowledge of prospective secondary mathematics teachers on *linear variation*. The design of the activities is based on both, the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA) and the Model of Didactic-Mathematical Knowledge and Competences (DMKC) of mathematics teachers. The aspects to be discussed are both the objectives of the project and the methodological phases, advances on the intended meaning of secondary education curriculum with respect to linear variation, as well as a preliminary design of a didactic activity mediated by GeoGebra.

Key words: linear variation, didactic-mathematical knowledge, initial training of prospective teachers

Introducción

Los profesores de matemáticas han sido y siguen siendo uno de los focos principales de interés en la investigación. Desde hace ya varias décadas, los conocimientos matemáticos de los profesores, sus conocimientos para la enseñanza y sus prácticas en el aula se han convertido en el objeto de estudio de distintos investigadores, algunos de los cuales han orientado sus esfuerzos a la caracterización de los conocimientos que requiere un profesor para llevar a cabo una práctica en el aula que facilite el aprendizaje en sus alumnos (Pino-Fan, Godino & Font, 2015). De manera paralela, la formación inicial de los profesores se erige como un campo fértil de investigación y plantea el reto de cómo lograr favorecer en los futuros profesores esos conocimientos, no solo matemáticos, sino didáctico-matemáticos, que son necesarios para la enseñanza. Es en esta problemática de la formación inicial de los profesores de matemáticas donde se ubica el trabajo que presentaremos en este escrito.

En este documento discutiremos los avances de un proyecto de tesis de maestría, que busca atender la problemática de la formación inicial de profesores a través del diseño de secuencias didácticas que tienen como objetivo enriquecer el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de educación secundaria sobre un tema central en la educación: la variación lineal.

Este proyecto se fundamenta en las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2009) así como en el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero & Font, 2017). La naturaleza de la población a la cual dirigimos nuestro trabajo, los futuros profesores, impacta en la naturaleza del diseño de las secuencias didácticas que pretendemos realizar. Por un lado, pretendemos promover el desarrollo de prácticas matemáticas que enriquezcan el significado de variación lineal de los futuros profesores, pero también pretendemos que las secuencias didácticas promuevan en los profesores reflexiones de carácter no solo matemático, sino didáctico-matemático. Más concretamente, retomamos la teoría de significados del EOS para determinar el sistema de prácticas matemáticas que dan cuenta del significado pretendido por el currículo de secundaria sobre la variación lineal, que es la base del significado que un futuro profesor debe tener y por lo tanto será también el punto de partida para definir el significado pretendido por las secuencias didácticas que diseñaremos para los futuros profesores de secundaria. Por otro lado, el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM) será un referente sobre las reflexiones que se pueden promover y desarrollar en los futuros profesores en aras de enriquecer su conocimiento didáctico-matemático en torno a la variación lineal.

Los avances que presentaremos en este escrito corresponden, por una parte, al planteamiento de los objetivos y fases metodológicas del proyecto de tesis. Por otra parte, presentaremos observaciones sobre la parcialidad del significado de variación lineal pretendido por el currículo de matemáticas de segundo grado de secundaria y describiremos una de las actividades didácticas que forman parte de las secuencias que están en proceso de diseño.

Problemática

En México, la educación obligatoria corresponde a cuatro niveles educativos: preescolar, primaria, secundaria y bachillerato. La educación secundaria es la culminación de la educación básica y constituye el paso previo a la educación media superior, el bachillerato. La educación secundaria consta de tres grados y se proporciona a estudiantes de 12 a 16 años que han concluido la educación primaria.

La demanda educativa en México es creciente y trae consigo la necesidad de seguir formando profesores que atiendan a la población estudiantil. Según la Secretaría de Educación Pública (SEP) (2016) existe un aumento en la matrícula de estudiantes que ingresan a todos los niveles educativos en México, en el número de maestros que laboran en las escuelas y en el número de escuelas que imparten educación básica. En el caso específico del estado de Sonora, entidad federativa donde se realiza el presente trabajo, el Sistema Nacional de Información Estadística Educativa (SNIEE) (2017) registró 742 escuelas en funcionamiento, con un total de 151, 888 alumnos y 9203 docentes laborando en esas instituciones durante el ciclo escolar 2016-2017 en el nivel educativo secundaria.

Por otro lado, la educación secundaria en México presenta una problemática compleja con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la cual se vuelve evidente en los resultados obtenidos por los estudiantes en evaluaciones como la Prueba Planea. Según Backhoff (2018), seis de cada 10 alumnos de tercero de secundaria del país fueron ubicados en el nivel uno de la prueba, es decir el nivel más bajo de la evaluación, que corresponde a un "dominio insuficiente de los aprendizajes", debido a que sólo son capaces de resolver problemas de comparación o problemas que involucran números naturales.

El profesor desempeña un papel fundamental en el aula en pro del aprendizaje de sus alumnos. Autores como Godino et al., (2017) afirman que la evolución del pensamiento matemático y el desarrollo de las competencias matemáticas básicas de los alumnos dependen de manera esencial de la formación didáctica de los profesores. Es por ello que el bajo desempeño de los estudiantes en matemáticas conduce a poner especial atención en los profesores y en sus procesos iniciales de formación.

La formación inicial de los profesores de matemáticas, es decir, la educación formal que reciben los futuros maestros en las Escuelas Normales (Santibáñez, 2007), es una problemática de innegable importancia; son ellos quienes atenderán a los estudiantes que año tras año egresan de la educación primaria en busca de consolidar su educación básica y continuar su formación académica.

Dentro de la problemática de la formación inicial de los profesores de matemáticas, centramos la atención en un contenido específico del currículo de matemáticas de secundaria: la variación lineal. Resulta fundamental que los futuros docentes desarrollen un significado suficientemente sólido y robusto del tema, pues es un contenido matemático transversal en la educación secundaria, cuyo estudio comienza desde quinto año de primaria y sigue hasta el bachillerato y el nivel educativo superior. Además, la variación lineal tiene íntima relación con otros temas centrales en matemáticas: la proporcionalidad y la función lineal.

Es importante que el docente adquiera un conjunto de conocimientos y habilidades para resolver de forma satisfactoria las situaciones a las que se enfrenta en su quehacer profesional, en particular cuando se trata en el aula el tema de la variación lineal. En el Programa de Estudios 2011 de educación secundaria (SEP, 2011) se plantea el estudio de la variación lineal en el segundo año de secundaria, teniendo como uno de sus propósitos que los estudiantes "identifiquen conjuntos de cantidades que varían o no proporcionalmente" (p. 14), que analicen situaciones problemáticas de diversos contextos de las ciencias en las que "existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades" (p. 51) y las representen mediante "una tabla o una expresión algebraica de la forma: y= $ax + b$" (p.42). Además, plantea el análisis de "relaciones de variación entre diferentes medidas de prismas y pirámides" (p.40). Con relación a la *variación lineal,* el Nuevo Modelo Educativo (2017), que actualmente se encuentra vigente para el primer año de secundaria, plantea como propósito para la educación mexicana en secundaria que el estudiante modele "situaciones de variación lineal, cuadrática y de proporcionalidad inversa; así como también, definir patrones mediante expresiones algebraicas" (p. 300)

El estudio de la variación lineal puede resultar problemático. Resultados de diversas investigaciones muestran que el estudio de la variación lineal suele ser complicado para algunos docentes. Senzeytun y Centinkaya (2010) reportan que los profesores suelen tener habilidades de razonamiento covariacional deficientes y dificultades para representar e interpretar gráficos que involucran la covariación. Así mismo dan cuenta que los profesores piensan funciones como una regla de correspondencia y no como un modelo de covariación. Otros investigadores como Panorkou y Maloney (2016) resaltan que el estudio de las funciones en el currículo se centra en estudiar reglas de correspondencia y descuida la dimensión variacional de las funciones. Ante esta situación, sugieren el estudio de problemas contextuales que promueva que los estudiantes puedan reconocer y distinguir fácilmente las relaciones de covariación y también de correspondencia entre las variables involucradas para ayudar a profundizar su aprendizaje de las matemáticas.

Por ello, consideramos de fundamental importancia enriquecer el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la variación lineal pues, como menciona Torres (2007), es indispensable para poder enseñar matemáticas que los futuros profesores tengan conocimientos matemáticos sólidos del tema que están enseñando, conocimientos matemáticos suficientes que le permitan ayudar al alumno a comprender el tema.

Para poder enriquecer el conocimiento didáctico-matemático sobre variación lineal de los maestros en formación inicial nos hemos planteado los siguientes objetivos: El *Objetivo general* es diseñar actividades didácticas para enriquecer el conocimiento didáctico-matemático de variación lineal a los futuros profesores de secundaria de matemáticas con la mediación de GeoGebra. A partir del objetivo general, se fijan los siguientes *objetivos específicos*:

1. Determinar qué es la variación lineal en secundaria.
2. Determinar el significado de variación lineal que queremos promover en los futuros profesores de secundaria.
3. Formular situaciones problemas adecuadas para promover los conocimientos deseados de variación lineal.
4. Diseñar applets con GeoGebra para profundización matemática, simular y/o modelar las situaciones problema y favorecer el estudio de diferentes representaciones de la variación lineal.
5. Determinar las reflexiones didáctico-matemáticas en torno a la variación lineal que sean adecuadas para los futuros profesores.

Perspectiva teórica

Consideramos que el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) aporta diversas nociones y herramientas que permiten identificar y analizar diferentes aspectos de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino et al., 2017). En particular este marco permite caracterizar el significado de un objeto matemático a través de las prácticas matemáticas realizadas en torno a tal objeto. Por ello consideramos que es una herramienta útil para determinar las prácticas matemáticas en torno a la variación lineal que promoveremos con los futuros profesores.

Para enriquecer el conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores del tema variación lineal, retomaremos algunos elementos del Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (Modelo CCDM) (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016) como orientación sobre las reflexiones didácticas en torno a la variación lineal que se pueden promover y desarrollar en los futuros profesores.

En el EOS, el significado de un objeto matemático se define a partir de la noción de *práctica matemática*, que se refiere a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino et al., 2009, p.4). En este sentido, el significado de un objeto matemático que posee alguien (una institución o un sujeto) es todo lo que puede hacer con el objeto y decir sobre el objeto. Según Godino et al. (2009), se concibe a los *objetos matemáticos* como los emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas realizadas al resolver problemas matemáticos y siendo que al resolver situaciones problema pueden emerger distintas entidades (leguajes, conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos y nuevas situaciones problema), en el EOS se conoce como *objetos matemáticos primarios* a estas seis entidades. Tales objetos participan en la realización de las prácticas matemáticas al abordar la resolución de situaciones problema, pero no lo hacen de manera aislada, sino que están relacionados entre sí, formando redes de objetos intervinientes y emergentes que, junto con las relaciones que establecen, se denominan *configuraciones* (Godino et al., 2009).

Para caracterizar el significado de variación lineal que será pretendido por las secuencias didácticas que diseñaremos, es necesario caracterizar previamente el *significado institucional* de variación lineal *pretendido por el currículo* de secundaria, pues es el sistema de prácticas de referencia de la educación secundaria como comunidad matemática. Con base al significado institucional pretendido por el currículo y a resultados de investigaciones sobre variación lineal, pretendemos caracterizar *el significado institucional pretendido* por las secuencias didácticas. El primer significado nos permitirá orientar el análisis hacia la identificación de los sistemas de prácticas y configuraciones de objetos matemáticos primarios, de la cual seleccionaremos muestras adecuadas a las características particulares que se pretenden diseñar (Godino et al., 2017). En este sentido, determinar el significado institucional de referencia y el significado institucional pretendido es un paso necesario para elaborar las secuencias didácticas, pues estos significados serán la base de las matemáticas que promoveremos en los profesores con las secuencias didácticas.

Para el diseño de las secuencias nos apoyaremos en la herramienta *idoneidad didáctica* del EOS que proporciona una serie de orientaciones y criterios para el diseño y la valoración de procesos de instrucción matemática que sean considerados "idóneos" desde diferentes perspectivas. La *idoneidad didáctica* consta de la articulación de seis idoneidades: *epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica*, cada una de las cuales se distingue por una serie de componentes e indicadores de idoneidad. En este trabajo consideraremos solamente las facetas epistémica, cognitiva y mediacional.

Por otro lado, el marco del EOS ha desarrollado el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (CCDM) (Godino et al., 2016). Por un lado, este modelo nos orientará sobre los conocimientos matemáticos (conocimiento común del contenido) que debe tener un futuro profesor de matemáticas sobre variación lineal, pero también nos orientará sobre los conocimientos y competencias matemáticas que debe desarrollar un futuro profesor para enseñar la variación lineal en secundaria. Con estas orientaciones podremos determinar las reflexiones didácticas en torno a la variación lineal que se pueden promover y desarrollar en los futuros profesores.

Consideraciones metodológicas

El presente proyecto se desarrollará en cinco etapas: Revisión documental, diseño, implementación, análisis y evaluación, las cuales explicaremos en este apartado.

La Primera etapa (revisión documental) se orienta al logro de los primeros dos objetivos. El Objetivo 1, *Determinar qué es la variación lineal en secundaria,* se traduce dentro del EOS en determinar el *significado institucional pretendido por el currículo* de la variación lineal. Para determinarlo, analizamos el Plan de Estudios 1999 de la Escuela Normal Superior, específicamente el programa de la asignatura Procesos de Cambio y Variación, también analizaremos un libro de texto de primer grado de secundaria y las orientaciones didácticas del Nuevo Modelo Educativo 2017.

El Objetivo 2, *Determinar el significado de variación lineal que se promoverá en el diseño de las secuencias didácticas*, en términos del EOS se traduce en determinar el *significado institucional pretendido* por las secuencias didácticas sobre la variación lineal. Este significado se determinará a partir del Significado Institucional de Referencia y a partir de artículos de investigación sobre el tema de variación lineal.

La segunda etapa del diseño comprende acciones que incidan en el diseño de las actividades didácticas, tomando como eje tres aspectos: las situaciones problema, los applets diseñados con GeoGebra y las reflexiones didáctico-matemáticas. Esta etapa de diseño comprende el logro de dos de nuestros objetivos específicos: la *formulación y diseño de situaciones problema y applets con Geogebra.* Para la realización de estos objetivos se tomarán en cuenta los componentes y descriptores de la idoneidad didáctica, así como también los resultados de investigaciones que documentan dificultades existentes para aprender el tema de variación lineal, proporcionalidad y función lineal.

Con respecto al objetivo 5, *Determinar reflexiones didáctico-matemáticas en torno a la variación lineal que sean adecuadas para los futuros profesores,* se utilizará el modelo del Conocimiento y Competencias Didáctico-Matemático (CCDM), específicamente la dimensión matemática para determinar los conocimientos matemáticos que debe tener un profesor sobre variación lineal y la dimensión didáctica para orientarnos en torno a las reflexiones que podríamos promover sobre aspectos involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema.

Para cumplir con la etapa de análisis y evaluación de la secuencia didáctica se necesita implementar la secuencia didáctica, por lo tanto, la tercera etapa de implementación consiste en realizar una puesta de escena preliminar y una puesta de escena definitiva.

Para la puesta en escena preliminar se realizarán las siguientes acciones:

1.1 Se aplicarán las secuencias didácticas a tentativamente diez estudiantes normalistas para probar los diseños.
1.2 Se analizarán los conocimientos que pusieron en juego los futuros profesores.
1.3 Se realizarán ajustes al diseño.

Posteriormente se realizará la puesta en escena definitiva con las siguientes características:

2. La población con la que se implementarán las actividades son aproximadamente 10 futuros profesores.
2.1 Los instrumentos para recopilar datos serán las hojas de trabajo para cada uno de los futuros maestros, videograbaciones y las participaciones en la plataforma de GeoGebra.
2.2 Los materiales necesarios para el desarrollo de las actividades son: computadoras, proyector, hojas de trabajo para los futuros profesores, software GeoGebra y conexión a internet.
2.3 Se contará con una planeación para llevar el control del desarrollo de las actividades.

La cuarta etapa, de análisis, y la quinta etapa de evaluación, se orientan a valorar las secuencias didácticas y a identificar cambios que puedan mejorar el diseño para el estudio del tema variación lineal, por lo anterior es necesario realizar la evaluación de la secuencia a partir del análisis de los datos recopilados, utilizando las siguientes herramientas del EOS: los criterios de idoneidad, específicamente, las idoneidades epistémica, cognitiva y mediacional, análisis de los significados que pusieron en juego los estudiantes normalistas, y análisis de las reflexiones didáctico-matemáticas realizadas, apoyándonos en el modelo de CCDM del profesor de matemáticas.

■ Resultados preliminares

Una de las actividades que está en proceso de diseño parte de una situación problema de contexto extramatemático, que plantea discutir si un método cotidiano para estimar el peso de una persona a partir de la estatura (que corresponde a una variación lineal) es adecuado según los datos del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS).

Se muestra un esbozo del diseño de una actividad que trata de discutir sobre la variación lineal y contrastarla con una variación que no es lineal. Esta actividad promueve la emergencia de conceptos, lenguajes, propiedades, procedimientos y argumentos que constituyen el significado de variación lineal pretendido por la secuencia. La actividad está mediada con tecnología digital GeoGebra, que permitirá a los estudiantes tener acceso a la plataforma virtual de GeoGebra donde podrán trabajar la actividad en una hoja de trabajo virtual que les permitirá llenar tablas y construir gráficas a partir de las actividades que se le demanden. Los alumnos podrán ingresar a la plataforma virtual de GeoGebra usando el siguiente enlace: https://ggbm.at/PtnRz2mU.

Actividad de inicio: Tiene el objetivo de abrir una discusión a partir de la experiencia cotidiana de los estudiantes para establecer la apertura al tema. Se les plantea a los futuros profesores la siguiente situación:
estudiantes para profesor la siguiente situación:

1) Algunas personas calculan su peso (Kg) según su estatura (cm) de la siguiente forma: Si mido 155 cm, debería pesar aproximadamente 55 kg. ¿Crees que este método es apropiado?
2) Llena la siguiente tabla considerando el método anterior.

Estatura (cm)	144	146	148	150	152	154		156	157
Peso (Kg)									

Figura 1. Actividad peso-estatura. Elaboración propia

Actividad de desarrollo: La siguiente actividad tiene el objetivo de que el futuro profesor interaccione con una nueva información para discutir y darle sentido a lo que se intenta promover sobre el tema. Se muestra en la hoja de trabajo virtual la tabla de estatura (cm) y peso (kg) de los adolescentes (Figura 2). Los futuros profesores tienen que llenar una tabla en una hoja de cálculo (Figura 3) que incluye el cálculo del peso predicho y el cálculo del peso promedio.

Tabla de índice de masa corporal

PESO	ÍNDICE DE MASA CORPORAL: NORMAL		SOBREPESO		GRADOS DE OBESIDAD I		II		II
IMC	18.5	24.9	25	29.9	30	34.9	35	39.9	≥ 40
Estatura	Min.	Máx.	Min.	Máx.	Min.	Máx.	Min.	Máx.	Igual o mayor de:
1.44	38.4	51.6	51.8	62.0	62.2	72.4	72.6	82.7	82.9
1.46	39.4	53.0	53.3	63.7	63.9	74.4	74.6	85.1	85.3
1.48	40.5	54.5	54.8	65.5	65.7	76.4	76.7	87.4	87.6
1.50	41.6	56.0	56.3	67.3	67.5	78.5	78.8	89.8	90.0
1.52	42.7	57.5	57.8	69.1	69.3	80.6	80.9	92.2	92.4
1.54	43.9	59.1	59.3	70.9	71.1	82.8	83.0	94.6	94.9
1.56	45.0	60.6	60.8	72.8	73.0	84.9	85.2	97.1	97.3
1.58	46.2	62.2	62.4	74.6	74.9	87.1	87.4	99.6	99.9
1.60	47.4	63.7	64.0	76.5	76.8	89.3	89.6	102.1	102.4
1.62	48.6	65.3	65.6	78.5	78.7	91.6	91.9	104.7	105.0
1.64	49.8	67.0	67.2	80.4	80.7	93.9	94.1	107.3	107.6
1.66	51.0	68.6	68.9	82.4	82.7	96.2	96.4	109.9	110.2
1.68	52.2	70.3	70.6	84.4	84.7	98.5	98.8	112.6	112.9
1.70	53.5	72.0	72.3	86.4	86.7	100.9	101.2	115.3	115.6
1.72	54.7	73.7	74.0	88.5	88.8	103.2	103.5	118.0	118.3
1.74	56.0	75.4	75.7	90.5	90.8	105.7	106.0	120.8	121.1
1.76	57.3	77.1	77.4	92.6	92.9	108.1	108.4	123.6	123.9
1.78	58.6	78.9	79.2	94.7	95.1	110.6	110.9	126.4	126.7
1.80	59.9	80.7	81.0	96.9	97.2	113.1	113.4	129.3	129.6
1.82	61.3	82.5	82.8	99.0	99.4	115.6	115.9	132.2	132.5
1.84	62.6	84.3	84.6	101.2	101.6	118.2	118.5	135.1	135.4

Fuente: Organización Mundial de la Salud, 2007

Figura 2. Datos del IMSS (2018)

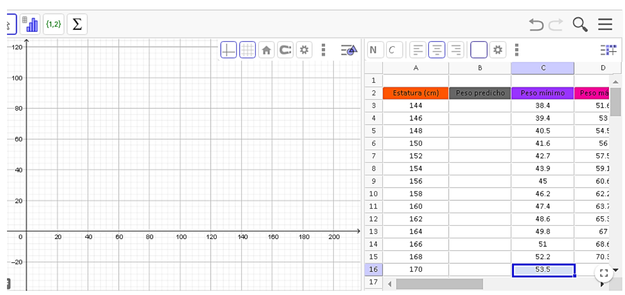


Figura 3. Tabla en la hoja de cálculo de GeoGebra.

Después del llenado de las tablas se realizarán preguntas con el objetivo de que emerjan conceptos, propiedades y argumentos que desarrollen conocimientos de variación lineal. Aquí se presentan algunas cuestiones a analizar sobre el peso que predice el modelo y el peso promedio obtenido con los datos del IMSS.

Una vez llenada la tabla, gráfica la columna del peso predicho y contesta:

a) ¿Cómo es la recta trazada que pasa por esos puntos?
b) Elige un valor de la estatura y el peso correspondiente. Si la persona crece 10 cm ¿qué tanto aumenta su peso? ¿pasa lo mismo con otros valores?
c) ¿Qué relación encuentras entre la estatura y el peso correspondiente?

Después de calcular el peso promedio según el peso mínimo y el peso máximo de las estaturas correspondientes contesta:
a) ¿Qué características tiene la recta trazada?
b) ¿Puedes trazar una recta que pase por todos los puntos? Explica por qué.
c) Elige un valor para la estatura y el peso correspondiente. Si aumenta la estatura 8cm ¿cuánto aumenta el peso promedio? ¿pasa lo mismo con otros valores?
d) ¿Qué método crees que es más conveniente para calcular el peso según la estatura de las personas? ¿por qué lo crees más conveniente?

Figura 4. Actividad de desarrollo del peso-estatura (elaboración propia)

Se pretende que la actividad genere discusiones sobre qué método resulta conveniente utilizar para calcular el peso ideal de las personas y esto permita la interacción con los objetos matemáticos primarios que permiten enriquecer el conocimiento de variación lineal.

Reflexiones finales

El diseño de la secuencia didáctica se encuentra en fase inicial de desarrollo, se han establecido las siguientes características generales de las secuencias: que las situaciones-problemas partan de contextos cotidianos de diversos campos de aplicación y que potencien el uso de diferentes registros de representación, se privilegie el planteamiento de prácticas contextualizadas y se empleen como recurso para trabajar con contenidos pertinentes al tema de variación lineal. Además, las actividades didácticas estarán apoyadas en el software educativo GeoGebra, con el objetivo de familiarizar a los futuros profesores con el uso de tecnología digital para el aprendizaje de las matemáticas y también porque GeoGebra nos permite crear applets que pueden depositarse en una plataforma virtual donde los futuros profesores puedan manipular los diseños, tener contacto en línea con los diseñadores de las actividades, preguntar dudas, contestar preguntas, entre otras más. Este modo de interacción en línea es de vital importancia para la puesta en escena de las secuencias didácticas, pues facilita extender el proceso de instrucción más allá del aula de matemáticas y permite que los estudiantes normalistas puedan seguir interactuando con las secuencias, aunque se encuentren realizando sus prácticas de clase fuera de las escuelas normales, como periódicamente lo hacen.

Los resultados del análisis del significado pretendido por el currículo de secundaria, hasta el momento, indican que el tratamiento que se da al tema variación lineal en el programa de estudios, así como en los libros de texto, promueve el establecimiento y articulación de diferentes representaciones (o formas de lenguaje): tabular, gráfica y algebraica, por medio de situaciones-problema de contexto extramatemático que favorece el desarrollo de prácticas como: llenar tablas de valores, trazar gráficas, determinar la variable dependiente e independiente, determinar cantidades constantes, proporcionar expresiones algebraicas y realizar gráficas. Es notorio el énfasis en el estudio de las diferentes representaciones de la variación lineal; sin embargo, también es notable la ausencia de un estudio variacional de la variación lineal; se descuida el estudio de cómo cambia una variable cuando la otra variable cambia, como había sido señalado por Panorkou y Maloney (2016). Este hallazgo en el currículo de secundaria nos motiva a incorporar el estudio de la co-variación dentro del significado pretendido por las secuencias didácticas que diseñaremos, para favorecer la comprensión y la reflexión de los futuros maestros sobre la variación lineal, no solo como regla de correspondencia entre valores, sino como una relación de variación entre dos conjuntos de cantidades que varían conjuntamente de una manera muy particular.

Referencias bibliográficas

Backhoff, E. (2018) Alumnos de secundaria apenas entienden las matemáticas: INEE. Recuperado de: https://noticieros.televisa.com/ultimas-noticias/en-mexico-alumnos-secundaria-apenas-entienden-matematicas-inee/

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Tomado de https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Godino, J D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. González, F. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Instituto Mexicano del Seguro Social (2018). Calcula tu Índice de Masa Corporal. Recuperado de: http://www.imss.gob.mx/salud-en-linea/calculaimc

Panorkou N. y Maloney A. (2016) Early algebra: Expressing Covariation and correspondence. *Teaching children mathematics*, *23* (2), 90-99.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *Bolema*, *29*(51), 60-89.

Santibáñez, L. (2007) Entre dicho y hecho. Formación y actualización de maestros de Secundaria en México. Distrito Federal México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *12*(32), 305-335.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programa de estudios 2011. Guía para el maestro*. Educación Secundaria Matemáticas. México. Recuperado de:
http://siplandi.seducoahuila.gob.mx/SIPLANDI_NIVELES_2015/7ESPECIAL/PLANES_Y_PROGRAMAS/PROGRAMAS/PP_SECUNDARIA/Matematicas.pdf

Secretaría de Educación Pública (2016). *Cuarto informe de labores 2015-2016*. México. Recuperada de:
http://www.planeacion.sep.gob.mx/Doc/informes/labores/2012_2018/4to__informe_de_labores.pdf

Secretaría de Educación y Cultura (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral*. México. Recuperado de:
https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/198738/Modelo_Educativo_para_la_Educacio_n_Obligatoria.pdf

Senzeytun, A. y Cetinkaya, B. (2010). Mathematics Teacher´s Covariational Reasoning Levels and Predictions about Student´s Covariational Reasoning. *Educational Sciences: Theory & Practice, 10*(3), 1601-1612.

Sistema Nacional de Estadística Educativa (2017). *Estadística del sistema educativo mexicano Ciclo escolar 2016-2017*. Recuperado de:
http://www.snie.sep.gob.mx/descargas/estadistica_e_indicadores/estadistica_e_indicadores_educativos_15mex.pdf

Torres, E. (2007). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: Enseñanza de la proporcionalidad* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona. Barcelona. Recuperado de:
http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/290741/etm1de1.pdf?sequence=1

ETNOMATEMÁTICA COMO UMA POSSIBILIDADE PARA A VALORIZAÇÃO DA CULTURA QUILOMBOLA: RELAÇÃO ENTRE CONHECIMENTO ESCOLARIZADO E EMPÍRICO NA AMAZÔNIA ORIENTAL

ETHNOMATHEMATICS AS A POSSIBILITY FOR THE ASSESSMENT OF *QUILOMBOLA* CULTURE: RELATIONSHIP AMONG EMPIRICAL AND SCHOOL KNOWLEDGE IN THE EASTERN AMAZON

José Roberto Linhares de Mattos, Romaro Antonio Silva
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amapá (Brasil)
jrlinhares@gmail.com, romaro.silva@ifap.edu.br

Resumen
Este trabalho é parte de uma pesquisa realizada no estado do Amapá, região no extremo norte do Brasil, situado na Amazônia oriental. Motivados pelo processo histórico, social e cultural na formação de mais de 138 comunidades remanescentes de quilombos e buscando compreender o processo de ensinagem da matemática escolar com foco no cotidiano, realizamos uma pesquisa sobre a Etnomatemática vivenciada em uma comunidade quilombola, sua relação com o saber escolarizado e a forma que o ensino escolar dialoga com a realidade local. Como procedimentos metodológicos, utilizamos técnicas de entrevistas e observação participante, com foco na prática pedagógica dos professores do ensino fundamental. Os resultados foram pautados na relevância da perpetuação da cultura ancestral dos membros da comunidade, por meio da manifestação dos aspectos históricos e culturais no processo de formação acadêmica e social dos educandos.

Palabras chave: comunidades quilombolas, etnomatemática, valorização cultural

Abstract
This work is part of a research carried out in Amapá state, region in the extreme north of Brazil, located in the eastern Amazon. Motivated by the historical, social and cultural process in the formation of more than 138 remaining communities of *quilombos,* and seeking to understand the teaching process of school mathematics with a focus on daily life, we conducted a research on Ethno-mathematics experienced in a *quilombola* community, its relationship with school knowledge and the way that the school education dialog with the local reality. As methodological procedures, we used interviewing techniques and participant observation, focused on the pedagogical practice of the teachers of elementary education. The results were based on the relevance of the perpetuity of the ancestral culture of the community members, through the manifestation of historical and cultural aspects in the process of academic and social development of the students.

Key words: *quilombola* communities, ethno-mathematics, cultural assessment

Introdução

O Brasil é composto, atualmente, por 26 (vinte e seis) estados e um distrito federal (Brasília). O Amapá é um desses estados brasileiros, mas que um dia já foi território federal. O município de Mazagão possui um distrito chamado Mazagão Velho, que remonta ao século XVIII, com a chegada de algumas famílias com escravos, enviadas pela coroa portuguesa. Segundo Boyer (2008),

> [...] a história de Mazagão começa há mais de três séculos do outro lado do oceano Atlântico, quando, em 1769, a Coroa portuguesa resolve, sob a pressão dos Mouros, retirar-se da costa marroquina. Toma-se então a decisão de mandar as 436 famílias da fortaleza de Mazagão para a Amazônia, que estava sendo colonizada. Entre 1770 e 1776, após demoradas etapas em Lisboa e em Belém do Pará em que se perde quase um quarto do contingente inicial, 313 destas famílias, com os escravos recebidos na capital do Grão-Pará no lugar de soldos, chegam ao lugar onde esperam fundar a Mazagão americana. (Boyer, 2008, p. 14)

Durante o período de escravidão no Brasil, vários escravos resistiram, fugindo e formando grupos, em locais de difícil acesso nas matas, que eram chamados quilombos. Atualmente, existem várias comunidades negras originadas de quilombos, que são chamadas comunidades quilombolas. De acordo com Silva (2012, p. 3), "até 2011, foram identificadas 138 comunidades remanescentes de quilombos no estado do Amapá". Estas comunidades quilombolas tiveram origem em dois principais movimentos de ocupação do território, que são a fuga dos escravos e a migração de núcleos familiares em busca de novas áreas para agricultura e trabalho. A Constituição Brasileira de 1988 (Brasil, 1988) reconheceu o direito de posse da terra a essas populações negras, oriundas dos quilombos.

Muitas são as inquietações acerca da pouca difusão, no meio científico, das contribuições dos negros no processo de formação do estado do Amapá, região localizada no extremo norte do Brasil, geograficamente situada dentro da Amazônia oriental. Motivados pelo processo histórico e social na formação das comunidades remanescentes de quilombos, identificadas na região, buscamos compreender o processo de ensinagem (Anastasiou, 2015), ou seja, o ensino que conduz à aprendizagem, da matemática escolar com foco no cotidiano deste grupo social, que utiliza o açaí como fonte de renda através da agricultura familiar.

Dessa forma, realizamos uma pesquisa sobre a etnomatemática vivenciada em uma comunidade quilombola, e a forma como o conhecimento escolarizado dialoga com a realidade local. Os resultados obtidos apontam para uma educação escolarizada com foco na valorização da cultura local e que fortalece as relações étnicas na busca por igualdade.

Referencial teórico

A pesquisa tem base nas dimensões da Etnomatemática, em particular as dimensões política e educacional (D'Ambrosio, 2011), e também em trabalhos de autores que tratam a luta e a resistência negra nos quilombos do Brasil.

Segundo D'Ambrosio (2009):

> Diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é o estudo apenas de matemáticas das diversas etnias. Mais do que isso, é o estudo das várias maneiras, técnicas, habilidades (technés ou ticas) de explicar, entender, lidar e conviver (matema) nos distintos contextos naturais e socioeconômicos, espacial e temporariamente diferenciados, da realidade (etno). (D'Ambrosio, 2009, p. 125)

Também, da mesma forma, para Knijnik (1996), a abordagem etnomatemática é caracterizada como:

> [...] a investigação das tradições, práticas e concepções de um grupo social subordinado (quanto ao volume e composição de capital social, cultural e econômico) e o trabalho pedagógico que se desenvolve com o objetivo de que o grupo: a) interprete e decodifique seu conhecimento; b) adquira o conhecimento produzido pela matemática acadêmica e estabeleça comparações entre o seu conhecimento e o conhecimento acadêmico, analisando as relações de poder envolvidas no uso destes dois saberes. (Knijnik, 1996, p. 88)

Por outro lado, as contribuições de Munanga e Gomes (2006), trazem o destaque da história da escravidão onde se converte um momento, marcado por muita luta e organização, atos de coragem que caracterizaram o que se convencionou chamar de ”resistência negra”, cujas formas variavam de insubmissão às condições de trabalho, revoltas, organizações religiosas, fugas, até aos chamados mocambos ou quilombos. De inspiração africana, os quilombos brasileiros constituíram-se em estratégias de oposição, hoje possuem em grande maioria o registro de Comunidade Remanescente de Quilombos, através da Fundação Cultural Palmares.

Inter-relacionar as diversas formas de conhecimento matemático, sejam eles, sociais, culturais, filosóficos ou práticos, aproximando-os do saber escolarizado, é de fundamental importância para os processos de ensinagem e aprendizagem dos conteúdos da matemática escolar, por meio da cultura matemática de um grupo sociocultural. Neste contexto, “a etnomatemática tem surgido como a principal ponte de interligação entre essas diversas “Culturas Matemáticas”” (Mattos & Ferreira Neto, 2016, p. 83), entre os diversos modos de lidar com situações em distintos contextos naturais, socioeconômicos, espaciais e diferenciados.

Faz-se necessário então buscar dois princípios fundamentais: o da contextualização e o da interdisciplinaridade (Tomaz & David, 2013), ou seja, buscar as práticas de ensino a partir da realidade do aluno afim de que contribua efetivamente para seu crescimento e neste sentido, o papel do docente a as práticas pedagógicas são essenciais para a manifestação cultural ao longo do processo de ensinagem.
De acordo com (Mattos & Polegatti, 2013, p. 2):

> A Etnomatemática surge a partir do reconhecimento de que muitas coisas importantes do saber e do fazer matemático são criadas por “matemáticos não formais”. Nesse contexto o conhecimento matemático é visto como um produto cultural independente entre cada grupo e ao mesmo tempo interligado.

Ainda de acordo com (Mattos & Polegatti, 2013, p. 2):

> Entendemos que se dois ou mais grupos culturais vivem contextos completamente diferentes um do outro, isso torna a “Cultura Matemática” de cada grupo, mais ou menos “desenvolvida”, dependendo das necessidades de cada grupo, o local onde eles estão inseridos, o clima, o tipo de vegetação, a quantidade de água enfim os recursos disponíveis, que levam a produções diferentes de “Cultura Matemática”.

Quando se trata das comunidades remanescentes de quilombos, esta matemática como produto cultural, por meio dos conhecimentos empíricos dos grupos sociais, se torna mais evidente, considerando jogos, brincadeiras, músicas, danças e contos que vieram de povos de outro continente, que manifesta a pluraridade cultural do Brasil, em especial as questões africanas. Isso está respaldado na Lei 10.639/03 (Brasil, 2003) que instituiu a obrigatoriedade da temática História e Cultura Afro-brasileira no currículo oficial da rede de ensino do Brasil.

Em Lima e Mattos (2017), os autores tratam desses aspectos sobre o ensino em uma escola de cultura negra, por meio da implementação da Lei 10.639/03, que contribui não somente para contextualizar conteúdo da matemática escolar, mas, também, para nortear uma educação, por meio de jogos, danças e projetos, que promova a valorização da cultura africana.

Metodologia

A pesquisa base foi realizada na Escola Municipal Goiás, localizada às margens da comunidade Remanescente do Quilombo do Coração, em Macapá, Amapá (Figura 1). Esta escola atende anualmente 400 (quatrocentos) alunos, regulamente matriculadas no segundo segmento do ensino fundamental, na forma regular ou na Educação de Jovens e Adultos – EJA.

Figura 1 – Localização Geográfica da Escola Municipal Goiás.

Fonte: Google Maps.

No que tange aspectos metodológicos, quanto à natureza da pesquisa utilizamos a pesquisa básica, e quanto à forma de abordagem do problema, adotamos uma pesquisa exploratória com enfoque qualitativo. O local da Pesquisa foi a Comunidade Preta Remanescente do Quilombo do Coração, no estado do Amapá, na região norte do Brasil.

O instrumento utilizado para a produção dos dados foi a entrevista com professores, com foco na prática pedagógica, da escola da comunidade, escola municipal Goiás, localizada no distrito do coração, divisa entre os municípios de Macapá (capital do estado do Amapá), Santana e Mazagão Velho.

Os participantes da pesquisa foram cinco docentes da área de matemática e ciências (chamados aqui por X, Y, Z, W, R). Os professores foram entrevistados sobre as suas práticas pedagógicas, com o objetivo de saber se estão relacionadas com as atividades cotidianas da comunidade e, também, se há uma maior dedicação dos seus alunos quando as atividades escolares dialogam com tais atividades cotidianas. A análise dos dados foi feita por meio das respostas desses professores.

Resultados e discussões

Traremos aqui resultados obtidos pelas falas dos professores sobre suas práticas pedagógicas nos processos de ensinagem da matemática, na escola municipal Góias. A realização de projetos interdisciplinares na escola é evidente e a escola é modelo na adoção de tais práticas. Dessa forma, procuramos identificar, nas falas dos professores, como a etnomatemática atua nos projetos.

Foi possível identificar que a realização dos projetos é o maior elo da escola com as práticas que valorizam a realidade social e cultural dos alunos. Na fala da professora R, por exemplo, sobre a horta comunitária (Figura 2), é possível observar que as vivências dos alunos e relação com os mais velhos da comunidade, pais, avós e vizinhos, são fontes de aquisição de saber. Este saber dialoga com o ensino escolarizado na realização das atividades.

> Quando estou trabalhando com geometria, utilizo a horta comunitária como exemplo. Aí os alunos lembram do que vivenciam em casa com os pais, avós e vizinhos no cultivo, na maioria dos casos as analogias estão em coisas comuns, objetos utilizados no Marabaixo entre outros. (Professora R)

Figura 2 – Um exemplo de Horta Comunitária na Escola Municipal Góias

.

Fonte: Acervo da escola.

Segundo Ausubel (2003), a aprendizagem significativa ocorre quando um novo conhecimento fica ancorado em conhecimentos pré-existentes, na estrutura mental do aluno. As novas aquisições de conhecimento são baseadas nos conhecimentos anteriores, nas vivências, inerentes à cultura, que são relevantes, da estrutura cognitiva do aluno. Nesta perspectiva, a horta comunitária é uma ação de aprendizagem significativa realizada pelo professor. Assim, observamos a relevância de um ensino construído a partir de uma realidade, remetendo a importância do processo que leva em consideração aspectos locais presentes no dia a dia da comunidade.

Em Lima e Mattos (2017), vemos que na escola da comunidade quilombola do Curiaú, também na cidade de Macapá, o professor de matemática desenvolve conteúdos utilizando elementos culturais da comunidade, como a farinha produzida e comercializada nas feiras de Macapá, a produção e venda do tucupi, a colheita e venda do açaí, acerola, abacaxi, limão, manga, muruci, taperebá entre outras frutas. As hortaliças também são utilizadas pelo professor de matemática no ensino e na aprendizagem em sala de aula.

> Entre as hortaliças, os moradores que são agricultores, da comunidade do Curiaú, plantam e comercializam alface, repolho, cebolinha, cheiro verde, quiabo, e a própria mandioca que é a raiz de onde eles extraem o tucupi e a farinha d'água. Os custos com a plantação e o lucro obtido nas vendas dessas hortaliças também são utilizados como exemplos durante as aulas de matemática. (Lima & Mattos, 2017, p. 58)

Nesse sentindo, observa-se as contribuições de Knijnik, Wanderer, Giongo e Duarte (2012), acerca da Educação Matemática, onde relatam a importância de trazer a realidade do aluno para a aula de matemática e como deve acontecer essa prática de ensinar e aprender matemática nas escolas. De acordo com essas autoras,

> Apontar para a complexidade da operação de transferência de significados implica no enunciado que diz ser importante trazer a "realidade" para o espaço escolar para possibilitar que os conteúdos matemáticos ganhem significado permite-nos problematizar a vontade de "realidade" que habita cada um de nós, ou seja, a busca pela harmonia e pela sintonia com a "realidade" traduzida pela necessidade de estabelecer ligações entre a matemática escolar e a "vida real". (Knijnik, Wanderer, Giongo & Duarte, 2012, pp. 71-72)

Ainda frente aos desafios da escola, as práticas têm mostrado resultados positivos, o que fortalece a concepção dos professores que estão atuando na direção certa. Como é o caso de um projeto de música chamado Marabaixo (Figura 3).

Figura 3 – Projeto de Música Marabaixo na Escola Municipal Góias.

Fonte: Acervo da escola.

De acordo com a professora de matemática:

> Nossos projetos têm colocado os alunos em uma posição de destaque, ganhamos com o projeto de música em 2016 o Festival do Marabaixo, a matemática está em tudo, e como professora preciso ajudar os alunos, aí sempre discutimos e exemplificamos situações do mundo fora das cercas da escola. (Professora R)

Também, de acordo com outro professor:

> É inevitáve não vivenciar a realidade dos alunos aqui no quilombo, é enraizado em todos eles o desejo pelo Marabaixo, as histórias de lutas para o direito a terra, e hoje isso tudo está sendo ocupado por pessoas que não lutaram. Como professor de matemática o uso da etnomatemática foi algo que surgiu como ferramenta de podermos ajudar a fortalecer esta cultura, que vem sendo perdida ao longo do tempo. (Professor X)

Desta forma, identificamos a etnomatemática de D'Ambrosio (2011), pois nos deparamos com ações de ensinagem que vão ao encontro da realidade social e cultural dos alunos, que fortalecem e se correlacionam com o saber escolarizado. Cada povo tem sua própria maneira de matematizar os seus conhecimentos visando atender aos anseios e às necessidades a partir de uma cultura matemática construída em cima de muita luta, considerando a individualidade em favor do engrandecimento coletivo, ou seja, valorização da cultura que o identifica.

Perguntamos aos professores, quais foram, ou são, os desafios enfrentados para a oferta de um ensino que valorize as questões sociais dos alunos e que possibilite o desenvolvimento de ações e propostas que envolvam questões da sociedade. Neste questionamento, observamos fatores diversos e específicos na óptica de cada docente, contudo, alguns fatores nos chamaram atenção, tais como:

> Enfrentamos questões diversas, alguns pais questionando o fato dos filhos estarem em horário de aula presentes numa horta ou participando de algum outro projeto na escola, enquanto deveriam está aprendendo a fazer contas, ou até mesmo, resistência de alguns colegas, ao fato dos livros didáticos ficarem em segundo plano. (Professor W)

Na fala do Professor W, se nota claramente uma distorção na visão da sociedade acerca do papel da escola. As entidades de ensino, além de processos sistematizados para troca de conhecimento cientifico, precisam ser reafirmadas como espaço de formação e valorização de saberes sociais e culturais, onde o indivíduo consiga construir um processo que o qualifique para uma formação também humana.

Outros docentes, como Y e Z, também mencionaram em suas respostas a necessidade da construção de um espaço com os demais colegas. O início do processo de readequação dos projetos foi lento, foi necessária uma quebra de paradigmas, para que ao invés de vários projetos individuais, fossem potencializados projetos coletivos, envolvendo diferentes áreas e diferentes docentes.

> Enfrentamos questões diversas, antes, cada qual atuava com seus projetos, de forma desassociada, na maioria das vezes os projetos se encerravam sem antes construir um fruto, posteriormente, quando coletivamente potencializamos alguns projetos e de forma coletiva os executamos, começamos a ter resultados além do esperado, até mesmo, maior melhor presença e participação dos pais na escola, o rendimento em matemática e em outros componentes foram maiores em todos os níveis de ensino. (Professor Y)

Ainda, segundo relato presente nas respostas do professor Z, mencionado também por R e X:

> Hoje este diferencial apontado pelos indicadores de avaliações externas e pela própria Secretária de Educação, se tornou a engrenagem para o contínuo processo de ensino, envolvendo as questões que valorizem questões sociais da comunidade quilombola no Coração. É interessante observar que pequenas ações, proporcionam grande resultados quando construídos em coletividade. (Professor Z)

Portanto, um fator que merece destaque é o papel dos setores pedagógicos e gestor das entidades de ensino. É necessário compreensão de todos os atores envolvidos neste cenário, para um resultado positivo quando se fala na oferta de ensino que leve em consideração os aspectos étnicos. Esta afirmativa se alicerça, na observação de que os professores entrevistados mencionaram o apoio e articulação dos dois setores mencionados acima na realização dos projetos e na divulgação dos resultados.

Conclusões

Ao analisarmos a forma e o meio em que se dão os processos de ensinagem e de aprendizagem na comunidade remanescente de quilombo, no âmbito da Escola Municipal Goiás, vemos, por meio dos projetos, que as atividades da escola estão atreladas ao fortalecimento da valorização da cultura local, dos ritos e dos conhecimentos históricos, repassados de geração em geração. Esse fato é observado, através das atividades dos projetos desenvolvidos na instituição e no envolvimento dos docentes e discentes com a música e com o Marabaixo, conforme pudemos ver na fala do professor X, e com a prática agrícola na horta comunitária, comentada pela professora R.

Isso corrobora a não aceitação da concepção bancária criticada por Freire (2014), na qual a sociedade opressora prática sobre o oprimido a cultura do silêncio, enfraquecendo suas raízes e suas origens. Nessa relação da Matemática com a diversidade de culturas, a Etnomatemática pode ser um caminho para uma ressignificação dos conteúdos curriculares, uma aproximação dos conhecimentos escolarizados e culturais, e valorização da história baseada na luta e fugas por melhores condições de vida.

Nesse sentido, se a matemática for abordada nas comunidades remanescentes quilombolas de forma descontextualizada, engessada num currículo que não leva em consideração os conhecimentos adquiridos pelos agentes ao longo do tempo, não terá sentido, será sem motivação o seu estudo, acabada e estanque.

A adoção de práticas que fortalecem os projetos com ações interdisciplinares, propicia aos docentes da instituição atuar com os aspectos etnomatemáticos como potencializadores da relação entre ensino e aprendizagem. Assim, a escola tem conseguido atender as metas do Plano Nacional de Educação.

Sobre as metodologias docentes utilizadas pelos professores na Escola Municipal Goiás, observa-se os projetos interdisciplinares como norteadores, modo prático e técnico, vislumbrando a realidade social do aluno, como ponte para o ensino da matemática, no caso da área de exatas, considerando o sujeito como fator fundamental do processo. Nas falas dos professores Y e Z vemos que o trabalho coletivo e interdisciplinar na execução dos projetos é importante não só para uma melhoria no rendimento escolar, em especial na matemática, como também para a valorização social e cultural da comunidade.

Podemos destacar que os professores usam métodos mais participativos, pois se exige a integração e participação ativa do aluno para que haja a aprendizagem. Os projetos envolvem diferentes áreas do conhecimento e valorizam a cultura local: a horta comunitária envolve a matemática e a agricultura; o marabaixo envolve música, dança, matemática e história, com as lutas e resistências dos afrodescendentes. A interdisciplinaridade está bem presente e como forte ferramenta para superar as problemáticas do trabalho. Nesse cenário, percebemos a etnomatemática como um amplo campo de estudo, vinculado a diversas temáticas.

Para além dos resultados aqui apresentados, esperamos que este trabalho contribua em relação à divulgação da relevância dos descendentes de quilombos no Brasil, em especial no estado do Amapá. Suas histórias de lutas por liberdade e melhores condições de vida, suas danças e suas músicas. Esperamos, também, que fortaleça o entendimento da importância da etnomatemática como uma alternativa não só para o ensino da matemática escolar, como, também, para a valorização social e cultural.

■ Referências bibliográficas

Anastasiou, L. G. C. (2015). Ensinar, aprender, apreender e processos de ensinagem. In Anastasiou, L. G. C. & Alves, L. P. (Eds.). *Processos de ensinagem na universidade*: *pressupostos para as estratégias de trabalho em aula* (12-38). (10th ed.). Joinville: Univille.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

Boyer, V. (2008). Passados português, presente negro e indizibilidade Amerínda: o caso de Mazagão Velho, Amapá. *Religião e Sociedade*, 28(2), 11-29.

Brasil. (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil*. Brasília, DF: Gráfica do Senado.

Brasil. (2003). Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática História e Cultura Afro Brasileira, e dá outras providências. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF: MEC.

D'Ambrosio, U. (2011). *Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrosio, U. (2009). *Transdisciplinaridade*. (2nd ed.). São Paulo: Palas Athena.

Freire, P. (2014). *Pedagogia do oprimido.* (58th ed.). Rio de Janeiro: Editora Paz e Terra.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e Resistência, Educação Matemática e Legitimidade Cultural.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Knijnik, G., Wanderer, F., Giongo, I. M. & Duarte, C. G. (2012). *Etnomatemática em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Lima, E. D. B. & Mattos, J. R. L. (2017). *Etnomatemática e a Lei 10.639/03 na Comunidade Quilombola do Curiaú: Ensino e aprendizagem na escola através da cultura afro-brasileira*. Saarbrucken: Novas Edições Acadêmicas.

Mattos, J. R. L. & Polegatti, G. A. (2013). Etnomatemática em três dimensões na educação escolar indígena. *Anais do Congreso de educación matemática de América Central y el Caribe*, Santo Domingo, República Dominicana, 1.

Mattos, J. R. L. & Ferreira Neto, A. (2016). O povo Paiter Suruí e a Etnomatemática. In Bandeira, F. A. & Gonçalves, P. G. F. (Eds.). *Etnomatemáticas pelo Brasil: aspectos teóricos, ticas de matema e as práticas escolares* (79-100). Curitiba: CRV.

Munanga, K. & Gomes, N. L. (2006). *O Negro no Brasil de Hoje.* São Paulo: Editora Global.

Silva, M. G. (2012). Territórios Quilombolas no Estado do Amapá: um diagnóstico. *Anais do Encontro Nacional de Geografia Agrária*, Uberlandia, MG, Brasil, 21. Recuperado de www.lagea.ig.ufu.br/xx1enga/anais_enga_2012/eixos/1308_1.pdf. Acesso em 27 mai. de 2018.

Tomaz, V. S. & David, M. M. M. S. (2013). *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula* (3th ed.). Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PRINCIPALES ERRORES EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO EN ESTUDIANTES DE FORMACIÓN INICIALEN LA EDUCACIÓN A DISTANCIA

MAIN ERRORS IN THE LEARNING OF CALCULUS IN INITIAL TRAINING STUDENTS IN DISTANCE LEARNING

Eric Padilla Mora, Cristian Quesada Fernández, Luis Andrés Ortiz Hernández
Universidad Estatal a Distancia (Costa Rica)
epadilla@uned.ac.cr, cquesadaf@uned.ac.cr, lortiz@uned.ac.cr

Resumen
Diversos estudios señalan los obstáculos, dificultades y errores que afrontan los estudiantes en el aprendizaje del cálculo; no obstante, hay una carencia de información en torno a esta temática en educación a distancia, en particular con estudiantes de carreras de formación docente. Este trabajo muestra una síntesis de un estudio realizado con el propósito de analizar los errores que cometen los estudiantes, de la asignatura Cálculo Diferencial de la Universidad Estatal a Distancia en Costa Rica. Se realizó una categorización de los errores tomando como referencia la propuesta de Saucedo, así como un análisis detallado de los mismos. Los resultados evidencian errores conceptuales, así como deficiencias en el cálculo de límites que requieren aplicar conocimientos previos y un uso incorrecto de simbología matemática. Se busca con el estudio mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y optimizar el rendimiento académico de los estudiantes.

Palabras clave: errores, dificultades de aprendizaje, didáctica del cálculo, educación a distancia

Abstract
Several studies point out the obstacles, difficulties and errors that students face in learning calculus; however, there is a lack of information on this topic in distance education, in particular with students of teacher training careers. This work shows a synthesis of a study carried out with the purpose of analyzing the errors that students commit, of the subject Differential Calculus of the State University to Distance in Costa Rica. A categorization of the errors was made taking as reference the proposal of Saucedo as well as a detailed analysis of them. The results show conceptual errors as well as deficiencies in the calculation of limits that require applying previous knowledge and an incorrect use of mathematical symbology. This study seeks to improve both the teaching and learning processes of the contents mentioned above and to optimize students´ academic performance.

Key words: errors, learning difficulties, calculus didactics, distance education

Introducción

La enseñanza y sobre todo el aprendizaje de la teoría de límites de funciones, es un tema clave en el análisis matemático; y pilar sobre el cual se sostiene toda una estructura que da pie al desarrollo de contenidos como: continuidad, derivación e integración, entre otros. Sin embargo, diversas investigaciones como las realizadas por: Vrancken, Gregorini, Engler, Müllery Hecklein (2006), Claros (2010); García (2013) y Neira (2013), entre otras, por lo general realizadas con estudiantes de carreras universitarias no matemáticas, advierten que el aprendizaje de dicho contenido presenta diversas dificultades.

Al respecto,Vrancken et al (2006), señalan:

> La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos tales como la abstracción, el análisis y la demostración.
>
> A veces se supone que los alumnos fracasan por no llegar con una preparación adecuada, no saben álgebra, no conocen las propiedades de los números, las características de las desigualdades no saben geometría, etc. Pero los alumnos pueden tener todos estos conocimientos y fracasar en el estudio del cálculo. (p.10)

Dichas dificultades pueden estar relacionadas con obstáculos de origen didáctico, producto de la forma de la enseñanza del cálculo a nivel universitario, la cual se lleva a cabo con métodos tradicionales que solo se exige del estudiante un dominio algorítmico repetitivo y algebraico; en otros quizá porque la aprehensión del concepto implica procesos poco utilizados por los estudiantes como: la abstracción, el análisis y la demostración.

Otro aspecto por considerar es que estas investigaciones se han realizado en procesos de enseñanza y de aprendizaje presenciales; pero ¿Qué sucede cuando dichos procesos se dan en una educación a distancia? Tal y como ocurre en la Universidad Estatal a Distancia (UNED), de Costa Rica, con la asignatura: Cálculo Diferencial, específicamente con estudiantes de la carrera enseñanza de la matemática.

Factores como la poca publicación de investigaciones en esta temática bajo un modelo de educación a distancia, aunado a los deficientes niveles de aprobación que se obtienen en los estudiantes, en dicha asignatura, los cuales se muestran en la tabla 1.

Tabla 1 Rendimiento académico de los estudiantes de cálculo diferencial 2015-2017

Año	Periodo	Aprobado	Perdido	Retirado
2015	II Cuatrimestre	16,6%	50,0%	33,4%
	III cuatrimestre	42,9%	37,1%	20,0%
2016	II Cuatrimestre	35,2%	53,0%	11,8%
	III Cuatrimestre	30,5%	56,5%	13,0%
2017	II Cuatrimestre	13,3%	80,0%	6,7%
	III Cuatrimestre	38,7%	41,9%	19,4%

Fuente: propia con datos de la cátedra.

Además conscientes que durante el proceso de calificación de los instrumentos de evaluación aplicados a los estudiantes, en los diferentes periodos, se ha notado que estos incurren en errores, que no han sido evidenciados ni documentados, los cuales están relacionados con conocimientos previos, el uso inapropiado de simbología y con la naturaleza del contenido (obstáculos epistemológicos), entre otros; propició el desarrollo de este proceso investigativo, cuyo objetivo principal fue analizar los errores que cometen los estudiantes, de la asignatura Cálculo Diferencial de la UNED, en las pruebas escritas.

Como etapa inicial el análisis se enfocó en el estudio de los ejercicios relacionados con el tema: límite de funciones, dado que es la base sobre la cual se sostiene la estructura del cálculo. Cabe señalar que en este artículo se enfatizará en el análisis los errores relacionados con aspectos de conocimientos previos y uso incorrecto de la simbología.

Con los resultados obtenidos se pretende que estos contribuyan con la toma de decisiones que permitan favorecer los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y así mejorar el rendimiento académico.

Marco referencial

Obstáculos epistemológicos, dificultades y errores en el aprendizaje del cálculo

Al analizar los errores en que incurren los estudiantes en el aprendizaje del cálculo, es posible detectar que los mismos no se producen de manera aleatoria; resulta factible detectar que estos se presentan al pedirle al estudiante realizar determinado procedimiento o llevar a cabo alguna acción específica. Para abordar esta temática, primero es pertinente hacer un repaso sobre las principales teorías propuestas sobre los obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de la matemática, y específicamente del cálculo.

En relación con los obstáculos, Brousseau (1983, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes y Vallecillos, sf) indica las siguientes características:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento. El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas a un cierto contexto que encuentra con frecuencia. Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica. (p.2-3)

Además, señalan que Brousseau se refiere a tres tipos de obstáculos: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. Sobre estos últimos, diversos autores, principalmente de la Escuela Francesa (Bachelard, Brousseau y Artigue) han realizado trabajos importantes, por ejemplo, Bachelard (1976) define los obstáculos epistemológicos como las limitaciones o impedimentos que afectan la capacidad de los individuos para construir su conocimiento. Según este autor, se dan cinco obstáculos principales: los conocimientos previos, el obstáculo verbal, el peligro de la explicación por la utilidad, el conocimiento general y el obstáculo animista.

En relación con las dificultades de los estudiantes al acceder al cálculo, Sierpinska (1994, citado por Neira, 2013) plantea cinco categorías:

- El rechazo al status operacional que permite el paso al límite,
- El referente al Principio de Continuidad,

- Los obstáculos relacionados con la noción de función,
- Los obstáculos geométricos,
- Los obstáculos lógicos, y los obstáculos simbólicos. (p. 46)

En el aprendizaje del cálculo, se requiere la comprensión de muchos conceptos los cuales son expresados mediante simbología matemática, por tal motivo, toma gran importancia que el estudiante realice un uso correcto de la notación empleada, por ejemplo: para representar límites infinitos y límites laterales, entre otros. En el caso de las demostraciones, se requiere emplear un formalismo para emplear la definición de límite al demostrar la existencia de los mismos.

A su vez, Neira (2013) menciona que Artigue (sf) reagrupa las dificultades en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, objetos que están en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico. (p. 46)

En relación propiamente al concepto de límite, los estudiantes deben saber determinarlo, reconocerlo tanto de forma gráfica como algebraica, mediante tablas, representación en el plano cartesiano, así como de manera verbal. Ante esto, son recurrentes la aparición de errores por parte de los estudiantes. Algunos de los obstáculos que pueden manifestar los estudiantes para Cornu (sf, citado por Vrancken et al, 2006) corresponden a:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas. (p.11).

En cuanto a las dificultades que presenta el concepto de límite Tall (sf, citado por Claros, 2010) señala: dificultades producidas por el lenguaje, la imposibilidad de transformar el cálculo de cualquier límite en una simple operación algebraica o aritmética y la idea de si el límite es alcanzado o no genera dificultades, así como el paso de lo finito a lo infinito tiende a confundir.

Por su parte Saucedo (2007) propone dos categorías de errores, adaptadas del trabajo de Pinchback. En este sentido, se mencionan los errores conceptuales y errores pre-requisito.

- En el error conceptual los estudiantes pretenden aplicar un procedimiento adecuado tal como es requerido por el concepto, pero produce errores al llevar a cabo los pasos necesarios.
- En el error pre-requisito los estudiantes aspiran resolver el problema, pero producen el primer error en una deficiencia de un concepto discutido anteriormente.

Cabe indicar que esta categorización fue la utilizada como referencia durante el desarrollo de esta investigación.

En suma, durante las últimas décadas, el estudio de obstáculos, dificultades y errores ha sido ampliamente abordado por diversos estudiosos. No obstante, todos ellos hacen mención al modelo de educación presencial tradicional. La bibliografía en torno a esta temática en el modelo a distancia es prácticamente nula. Por ello, resulta pertinente el estudio específico de los errores en que incurren los estudiantes en el aprendizaje del cálculo, específicamente en el estudio de límites, bajo la modalidad a distancia.

Metodología

El estudio realizado es de carácter descriptivo, y se tomó como referencia los estudiantes que aplicaron la primera prueba escrita ordinaria del III cuatrimestre del 2017. La muestra estuvo conformada por 20 estudiantes con la misma cantidad de hombres que mujeres. La edad promedio de la muestra fue de 33 años con una desviación estándar de 7,68 años.

Para el estudio se consideraron las siguientes categorías de análisis.

1. *Errores de pre-requisito:* dentro de esta categoría están aquellos en los cuales los estudiantes intentan resolver el ejercicio, pero comenten errores relacionados con los conocimientos de asignaturas previas. Dentro de estos se consideró
   - Los errores de cálculo numérico.
   - Los errores algebraicos.
2. *Errores conceptuales:* en esta categoría se ubican aquellos en los que los estudiantes intentan aplicar el procedimiento apropiado tal como es requerido por el concepto, pero producen errores al llevar a cabo los pasos necesarios. Dentro de estos están
   - Los errores de definición.
   - Errores de formalismo al emplear la definición de límite al demostrar la existencia de estos.
   - Incorrecta aplicación de los teoremas.
   - No reconocer las formas indeterminadas.
   - El empleo de argumentos que conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.
   - No reconocer que por las condiciones se debe aplicar el teorema de intercalación.
3. *Errores de formalismo simbólico*: en esta categoría están aquellos en los cuales los estudiantes cometen errores al confundir el uso de la simbología correspondiente, la omite o bien tiene dificultades para estructurar las relaciones entre los objetos matemáticos. Dentro de estos están
   - Empleo incorrecto de la simbología.
   - Omite el uso de la simbología correspondiente.
   - Su estructura de trabajo no evidencia orden.

Por lo anterior y tomando como referencia la categorización propuesta por Saucedo (2007) para los errores, elaboramos una lista de tipos de errores y su definición, que son analizados en este estudio (ver tabla 2)

Tabla 2. Tipo de error y su definición

Error	Definición
Presencia de errores de tipo aritmético.	Cuando se presenta al menos un error de tipo aritmético.
Presencia de errores de tipo algebraico.	Cuando se presenta al menos un error de tipo algebraico.
Presencia de errores conceptuales.	Cuando se presenta al menos un error relacionado con el concepto de límite de una función.
En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	Cuando en el proceso de solución los argumentos empleados no son claros, el razonamiento no conlleva una secuencia lógica o la explicación carece de sentido.

Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	Cuando en el proceso de solución se omite o se emplea de forma incorrecta algún símbolo.
No estructura de manera lógica o argumentada la solución del ejercicio.	La forma de trabajo evidencia desorden, no es clara y es difícil comprende la secuencia y los pasos realizados por el estudiante.
No hace uso de racionalización para resolver el ejercicio o lo hace de manera incorrecta.	No reconoce o se evidencia que no sabe qué se debe aplicar racionalización en el proceso de solución del ejercicio.

Fuente: elaboración propia.

Al trabajar con los objetivos relacionados con el cálculo de límites; se consideraron las soluciones dadas a los ejercicios relacionados con dicho tema, tanto en la parte de respuesta breve como en la de desarrollo. En la tabla 3 se muestra la relación entre objetivo e ítem. En total se analizaron 6 ejercicios.

Tabla 3. Relación objetivo-ítem respecto a los instrumentos

Objetivo	Ítem en la prueba
Calcular límites tales como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ en donde $f(x)$ es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ usando los procesos de simplificación o racionalización.	RB (1a)
Aplicar los teoremas básicos de límites en la resolución de ejercicios y problemas.	RB (1b)
Calcular límites trigonométricos especiales: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$	RB (1c)
Utilizar el teorema de intercalación para calcular $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$.	RB3
Demostrar, usando la definición formal, que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ existe.	D1
Aplicar los límites trigonométricos especiales en el cálculo de límites de funciones trigonométricas que producen formas indeterminadas del tipo $\frac{0}{0}$.	D2
Simbología RB: corresponde a los ítems de respuesta breve de la prueba escrita. D: corresponde a los ítems de desarrollo.	

Fuente: instrumento de evaluación aplicado a estudiantes y diseño curricular de curso.

Análisis y discusión de resultados

El trabajo se enfocó en el estudio de los errores de prerrequisito y los de simbología. De acuerdo con los datos obtenidos, se puede inferir que:

a) Los estudiantes intentaron resolver los ejercicios, no obstante, aunque realizan diversos pasos en el proceso de resolución, la respuesta no es correcta. Esto permite concluir que, aunque no tengan noción de lo que se debe hacer intentan hacer un "algo" aunque no sea correcto. En su mayoría, el resultado es correcto para menos del 50%.

b) Aunque en el enunciado del ejercicio RB3, se les indica que se debe resolver aplicando el teorema de intercalación, la mayoría de los estudiantes no lo aplican, además, aunque pudieron resolverlos por otros métodos lo realizado era incorrecto. Esto permite forzar la idea anterior, de realizar cualquier cálculo, aunque no les lleve a resolver el problema.

c) En los diversos ejercicios, los estudiantes no incurren en errores de tipo aritmético.

En la tabla 4, se muestra la frecuencia relativa relacionada con diversos aspectos para cada uno de los ejercicios por analizar.

Tabla 4. Frecuencia relativa de los ítems analizados respecto a los criterios

Criterio	RB(1a)	RB(1b)	RB(1c)	RB3	D1	D2
1. Hay evidencia que permita asegurar que intentó resolver el ejercicio.	1,00	1,00	0,85	0,80	1,00	0,95
2. Resuelve solo algunos pasos del ejercicio.	0,15	0,05	0,25	0,00	0,30	0,10
3. Resuelve el ejercicio hasta obtener el resultado final.	0,85	0,95	0,30	0,55	0,65	0,50
4. El resultado final es correcto.	0,45	0,35	0,30	0,25	0,60	0,35
5. Utiliza el teorema de intercalación.	na	na	na	0,30	na	na
6. En la resolución se evidencia la presencia de errores de tipo aritmético.	0,05	0,00	0,00	0,05	0,00	0,10
7. En la resolución se evidencia la presencia de errores de tipo algebraico.	0,60	0,50	na	0,45	0,15	na
8. En la solución sus argumentos conllevan errores de razonamiento, justificaciones inadecuadas o explicaciones sin sentido.	0,65	0,50	0,35	0,70	0,25	0,35
9. Omite o confunde el uso de la simbología correspondiente durante la resolución del ejercicio.	0,40	0,30	0,25	0,35	0,00	0,50
10. Se evidencia una estructura de orden en la solución del ejercicio.	0,80	0,80	0,25	0,45	0,70	0,20
11. No hace uso de racionalización para resolver el ejercicio.	na	0,45	na	na	na	na
12. Plantea las condiciones iniciales de la definición de límite.	na	na	na	na	0,80	na
13. Encuentra el delta y es correcto.	na	na	na	na	0,60	na

14. Prueba que el delta obtenido funciona.	na	na	na	na	0,60	na
Simbología RB: corresponde a los ítems de respuesta breve en la prueba escrita. D: corresponde a los ítems de desarrollo en la prueba escita. na: no aplica.						

Fuente: solución brindada por los estudiantes en el instrumento de evaluación. III cuatrimestre 2017.

d) Los errores de tipo algebraico se dan cuando al resolver el límite se debe aplicar algún conocimiento previo.

A continuación, se muestran algunos de los errores de tipo algebraico más frecuentes; se muestra el procedimiento empleado por el estudiante y a la derecha un análisis del mismo:

- Al aplicar las fórmulas notables

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

Pese a que identifica que debe racionalizar, confunde la expresión $(a+b)(a-b)$ con $(a+b)^2$.

- Al factorizar

Al factorizar la expresión $16x^2-16x+4$ algunas de las propuestas los estudiantes corresponde a • $(2x-1)(2x-1)$ • $(2x-1)^2$ • $(16x-8)(2x-1)$ • $x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=\frac{1}{2}$ $(2x-1)(2x-1)=0$	En este caso las factorizaciones dadas por los estudiantes no son correctas. Desde nuestra perspectiva consideramos que es probable que para factorizar se utilizara los cero del polinomio que brinda la calculadora.
Al factorizar la expresión $8x^3-1$ algunas de las propuestas de los estudiantes corresponden a • $[(8x-1)(8x-1)](8x-1)$ • $(2x-1)^3$ • $(2x-1)\left((2x)^3-3\cdot 2^2\cdot x+3\cdot 2x^2-1^3\right)$	En este caso las factorizaciones dadas por los estudiantes no son correctas. Nótese que además existen errores en el uso las fórmulas notables.

$\sqrt{x^2+3x}+x$ $=\sqrt{x^2\left(\frac{3}{x}\right)}+x$	Factoriza incorrectamente, omite el símbolo de la suma.
$\left\lvert x^2+3x-54\right\rvert<\varepsilon$ $\left\lvert 3\left(x^2+x-18\right)\right\rvert<\varepsilon$	Extrae un factor común de manera errónea.

- Al racionalizar

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\sqrt{x^2+3x}+x$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2$ $\lim\limits_{x\to\infty}x^2+3x-x^2$	Racionalización incorrecta.

- Otros errores algebraicos detectados

$x\sqrt{3x}+x=2x\sqrt{3x}$	Suma incorrecta de monomios.
$-1\le senx\le 1$ $\Rightarrow -\sqrt[3]{x}\le\sqrt[3]{x}\lvert senx\rvert\le\sqrt[3]{x}$	El multiplicar por $\sqrt[3]{x}$ en la desigualdad no es un procedimiento correcto.

e) Respecto al empleo de la simbología, los estudiantes aún tienen dificultad para utilizarla de forma correcta, dentro de los principales problemas se encontraron

- Olvidan escribir la expresión $\lim\limits_{x\to a}$ cuando era necesario.
- Utilizar de forma incorrecta el símbolo de igualdad.

Algunos ejemplos de lo realizado por los estudiantes se muestran a continuación.

$-1<senx<1$ $-1<\lvert senx\rvert<1$ $\lvert senx\rvert=1$	Se omite el símbolo correspondiente entre cada relación, además la última conclusión no es correcta.
$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x=\sqrt{x^2+3x}-x\cdot\sqrt{x^2+3x}+x$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2-x^2$ $\lim\limits_{x\to\infty}x^2+3x-x^2$	Comete un error de simbología y sintaxis al colocar el signo "=" entre expresiones que no son equivalentes. Además, omite la expresión $\lim\limits_{x\to\infty}$ y el signo de igualdad entre expresiones que sí deben llevarlo.

$f(x)=x^2+3x+1$ $\lim\limits_{x\to 6}=x^2+3x+1=\lim\limits_{x\to 6}=6^2+3\cdot 6+1=55$ $f(x)=x^2+3x+1$ $x^2+3x+1-55=0$ $f(x)=x^2+3x-54$ $\underset{x\to 6}{f(x)}=6^2+3\cdot 6-54=0$	Error algebraico, conceptual, simbólico. El estudiante no hace lo que se le solicita en el ejercicio. Comete errores simbólicos escribiendo igualdades equivocadas. Primero evalúa en la función. Posteriormente divaga en la solución al realizar procedimientosin sentido.
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{16\left(\frac{1}{2}\right)^2-16\cdot\frac{1}{2}+4}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{4\left(4x^2-4x+1\right)}$	Hace uso incorrecto de la simbología. La igualdad que propone, además de no tener sentido no es correcta.
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{16x^2-16x+4}=\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^3-1}{16\left(\frac{1}{2}\right)^2-16\left(\frac{1}{2}\right)+4}=\dfrac{0}{0}$	Uso erróneo de simbología y además propone una igualdad donde no corresponde.
$=\dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+1}{2\left(\frac{1}{2}\right)-1}=\dfrac{1+1+1}{1-1}=\dfrac{3}{0}$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{16x^2-16x+4}$ no existe	Propone igualdades de no tienen sentido, además hace un uso erróneo de la simbología. Nótese que coloca un implica concatenando algo que no tiene relación.

f) Cuando en la solución de los ejercicios se requiere aplicarlas propiedades de los límites, factorizar o bien racionalizar los estudiantes son ordenados; sin embargo, si el ejercicio requiere análisis, por ejemplo, alguna sustitución o en el caso de demostración de límites por definición (cálculo de $\delta-\varepsilon$) no son tan ordenados.

g) El cálculo de límites como $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$, 65% de los estudiantes no lo resolvió correctamente y 45% de este no considera la racionalización como una alternativa para resolver el ejercicio.

h) Respecto al cálculo de límites por definición (cálculo de $\delta-\varepsilon$), parece que al ser un ejercicio que se incluye en la mayoría de las pruebas escritas de la asignatura, es probable que los estudiantes le den cierta prioridad a resolver este tipo de ejercicios, nótese que de acuerdo con los resultados en la tabla, la mayoría plantea bien las condiciones iniciales para la demostración y 60% resuelve el ejercicio de forma correcta. Los errores frecuentes encontrados están relacionados con aspectos algebraicos y de justificaciones inadecuadas.

Conclusiones y recomendaciones

Los objetivos planteados para esta primera etapa de la investigación fueron alcanzados. En primer lugar, fue posible realizar una categorización de los errores detectados, así como un análisis minucioso de los mismos e inferir sus posibles causas. Los resultados evidencian que los estudiantes incurren en errores de tipo algebraico en el cálculo de límites que requieren aplicar conocimientos previos como factorizar, racionalizar o emplear productos notables. Además, se presenta uso incorrecto de simbología matemática en los diversos ejercicios, excepto en aquellos de naturaleza demostrativa. Cabe destacar que, a lo largo del análisis, la aparición de errores de tipo aritmético fue casi nula.

Al tomar en cuenta las concusiones obtenidas en esta investigación, se hace pertinente hacer una revisión de la metodología que se está siguiendo en los cursos de formación inicial de la carrera, de manera que la misma sea más activa y permita al estudiante el dominio de habilidades instrumentales requeridas en el aprendizaje del cálculo, las cuales conlleven a que el estudiante sea capaz de identificar las principales estrategias a emplear al calcular un límite. Además, es oportuno en los cursos iniciales establecer mecanismos para reconocer los errores en que están incurriendo los estudiantes, detectar las posibles causas y se logre además crear estrategias de solución a los mismos, de manera que las dificultades presentadas sean subsanadas y no se arrastren a cursos de corte superior.

Con los resultados obtenidos en el presente estudio se busca mejorar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje de dichos contenidos y por ende lograr que los estudiantes puedan comprenderlos y mejorar su rendimiento académico.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo Veintiuno.

Batanero, C., Godino, J., Green, R., Holmes, P., Vallecillos, A. (sf). *Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales*. Recuperado de www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/erroresestadis.doc

Claros, F. (2010). *Límite Finito de una Sucesión: Fenómeno que organiza*. Tesis Doctoral. Recuperado de http://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/5663/18909772.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Del Puerto, S, Minnaard, C y Seminara, S. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas*. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1704266

García, J. (2013*). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería*. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002

Neira, G. (2013). *Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación Matemática*. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4817228

Saucedo, G. (2007). *Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad. Itinerarios educativos 2*. Recuperado de http://bibliotecavirtual.unl.edu.ar/ojs/index.php/Itinerarios/article/view/3898/5909

Vrancken, S., Gregorini, M., Engler, A., Müller, D y Hecklein, M. (2006). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite*. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

ESTILOS DE APRENDIZAJE Y EL USO DEL PLAYPOSIT EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS SOBRE TEORÍA DE CONJUNTOS

LEARNING STYLES AND THE USE OF PLAY-POSIT IN CONTEXTUALIZED-PROBLEM SOLVING ON THE THEORY OF SETS

Mary Luz Meneses Román
Universidad Privada Norbert Wiener (Perú)
mmeneses1957@gmail.com

Resumen

El objetivo de la investigación consistió en determinar si existe relación entre *los estilos de aprendizaje y el uso del PlayPosit en la resolución de problemas contextualizados sobre teoría de conjuntos*. Se obtuvo una muestra no aleatoria de 100 estudiantes del primer ciclo 2018-I matriculados en la asignatura de Matemática Básica de la Universidad Privada Norbert Wiener. La variable estilos de aprendizaje se identificó con el inventario de Kolb (1984) y la variable uso del PlayPosit en la resolución de problemas contextualizados sobre la teoría de conjuntos se usó como software libre. Se aplicó la metodología del aula invertida para el planteamiento y resolución de los problemas contextualizados alineados a los estilos de aprendizaje. Se desarrolló una actividad para medir el aprendizaje significativo de los estudiantes a través de cuatro problemas que demandan habilidades de los estudiantes como: indagación, reflexión, resolución e interpretación, cuyos resultados fueron evaluados a través de una rúbrica. También se aplicó una lista de cotejo para evaluar el impacto del PlayPosit en los estudiantes. Se usó la prueba Gamma donde no se encontró relación entre ambas variables.

Palabras clave: estilos de aprendizaje, PlayPosit, problemas contextualizados, aula invertida

Abstract

The aim of the investigation was to determine if a relationship exists between learning styles and the use of the PlayPosit in the resolution of contextualized problems on theory of sets. There was obtained a not random sample of 100 students of the first cycle 2018-I registered persons in the subject of Basic Mathematics in a Private University. The variable styles of learning identified with the inventory of Kolb (1984) and variable use of the PlayPosit in the resolution of contextualized problems on the theory of sets. There was applied the methodology of the classroom invested for the exposition and resolution of the contextualized problems aligned to the styles of learning. An activity was developed to measure students' meaningful learning through four problems that demand students ‘abilities as: investigation, reflection, resolution and interpretation, which results were evaluated across a rubric. Also, a list of check was in use for evaluating the impact in the students of the PlayPosit. We used the Gamma test and we didn’t find relation between both variables.

Key words: styles of learning, Play-Posit, contextualized problems, inverted classroom

Introducción

El presente estudio se da en función a las siguientes razones: la primera obedece a la necesidad de sentar precedentes con respecto a los estilos de aprendizaje que presentan los estudiantes del primer ciclo de Medicina en la asignatura de Matemática Básica y el uso del PlayPosit, identificando los estilos de aprendizaje propios que traen los estudiantes de la educación secundaria, con el propósito de fortalecer las que ya tienen y potenciar aquellos estilos que todavía no han desarrollado con el uso del PlayPosit en la resolución de problemas contextualizados sobre la teoría de conjuntos, como base para ser analizado en futuras investigaciones; la segunda, identificar las habilidades de los estudiantes que evidencian al resolver los problemas contextualizados a su carrera profesional planteados con el PlayPosit; y, la tercera razón, es indagar si existen asociaciones entre las variables estilos de aprendizaje y las habilidades de los estudiantes con el uso del PlayPosit al resolver los problemas planteados.

Para tal fin, la investigación se basa en la teoría de David Kolb (1984), quien desarrolló un modelo de aprendizaje cíclico que se cumple con el aprendizaje de las matemáticas, principalmente en la resolución de problemas; y empieza con la experiencia de aprendizaje y termina con nuevas experiencias. Este ciclo de aprendizaje, incluye cuatro formas: la primera, llamada experiencia concreta que se inicia a partir de la experiencia inmediata, y es la base de la observación y reflexión de los hechos; la segunda, es observar y reflexionar acerca de algo, como por ejemplo, el enunciado de un problema sobre conjuntos, o una representación gráfica con datos de un problema; la tercera, elaborar ideas, conceptos abstractos y generalizaciones; la cuarta, asimilar a una teoría de la que se pueden deducir ciertas implicancias o hipótesis que llevarán al sujeto a nuevas y eficaces acciones, en este caso a la resolución de problemas.

Así de esta manera, las nuevas deducciones o hipótesis se convertirán en guías o nuevas alternativas para actuar en la creación de nuevas experiencias y así continuar con el proceso de aprendizaje en la resolución de problemas, por lo que nos identificamos con Chamorro (2005) y Bonilla (1998) cuando señalan que el verdadero aprendizaje de las matemáticas está centrado en la actividad de resolver problemas por lo que el docente debe indagar cómo aprenden los estudiantes desde el punto de vista de los estilos de aprendizaje.

La investigación se basó también en el uso del PlayPosit, que es un software libre y es una herramienta en la clase invertida especialmente en la clase de Matemática Básica, donde los profesores crean y comparten videos interactivos. Siguiendo las afirmaciones de Prado y Lara (2018) cuando señalan que el PlayPosit, es una herramienta digital que permite incluir videos desde YouTube, donde se pueden agregar preguntas en el video, completar espacios en blanco, respuestas libres o bien reflexiones. También, se puede establecer qué sector del video se quiere mostrar, compartir el enlace y tiene la posibilidad de registrar a los alumnos, con la ventaja de tener un listado de resultados por alumno.

En nuestro caso, se han creado cuatro tipos de problemas contextualizados a la carrera profesional de Medicina sobre el tema de Teoría de conjuntos, proponiendo preguntas que conllevan a identificar habilidades en los estudiantes como: indagación, reflexión, resolución e interpretación.

El objetivo del presente estudio fue determinar si existe relación entre los estilos de aprendizaje y las habilidades de los estudiantes con el uso del PlayPosit en la resolución de problemas contextualizados sobre Teoría de conjuntos. Consideramos que es importante esta investigación, porque busca establecer las bases teóricas y de análisis para futuros estudios, dado que hasta el momento no existe antecedentes con respecto a la relación entre las variables antes mencionadas.

Metodología

La investigación fue de tipo básico, llamado pura o fundamental por Sánchez (2015) cuyo propósito es recoger información de la realidad para enriquecer el conocimiento científico, entendiendo mejor el problema con el aumento de los conocimientos teóricos. Fue observacional, porque describimos las características que tienen los estudiantes sin intervención del investigador y transversal porque se recolectaron los datos en un solo momento con el propósito de describir las variables y analizar su interrelación en un momento dado como señala Hernández, Fernández y Baptista (2010).

Asimismo, fue de nivel descriptivo, porque se buscó conocer las características que presentan los estudiantes en sus estilos de aprendizaje y las habilidades que evidencian cuando resolvieron los problemas contextualizados con el uso del PlayPosit. De allí es que tomamos en cuenta las afirmaciones de Solis (1988) y de Hernández et al. (2010) cuando señalan que describir también es medir.

La investigación tuvo dos enfoques: cualitativa y cuantitativa. Decidimos por el enfoque cualitativo, como señala Hernández et al. (2010), porque utilizamos la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de "interpretación", que nos permite conocer las características y comportamientos de los estudiantes diagnosticados en sus estilos de aprendizaje y las habilidades mostradas en sus estrategias que utilizaron para resolver los cuatro tipos de problemas contextualizados sobre Teoría de conjuntos con el uso del PlayPosit.

Además, la investigación tomó del enfoque cuantitativo, porque se efectuó el análisis de confiabilidad del inventario de Kolb versión Escurra que nos permitió diagnosticar los estilos de aprendizaje de los estudiantes del primer ciclo de Medicina matriculados en la asignatura de Matemática Básica; asimismo, analizamos la confiabilidad de la Rúbrica de desempeño que nos permitió recoger información valiosa sobre las habilidades mostradas en la resolución de problemas realizados por los estudiantes y el tratamiento de los datos numéricos como resultado de la medición de las variables en estudio.

El diseño de la investigación fue correlacional, que según Salkind (1998), nuestro propósito fue mostrar o examinar la relación entre variables o resultados de variables, pero en ningún momento fue de explicar que una variable sea la causa de la otra, dado que se buscó examinar posibles asociaciones pero no relaciones causales, en nuestro caso fue entre las variables estilos de aprendizaje y las habilidades de los estudiantes mostradas con el uso del PlayPosit al resolver los problemas planteados. Se tomó en cuenta una muestra no aleatoria de 100 estudiantes del primer ciclo 2018-I, de la carrera profesional de Medicina, matriculados en la asignatura de Matemática Básica, y para ello se aplicó la prueba Gamma.

Para la variable estilos de aprendizaje, optamos por la definición de Keefe(1982, en Alonso y Gallego, 1997), como los rasgos cognitivos, afectivos y fisiológicos, que sirven como indicadores relativamente estables de cómo los alumnos perciben, interaccionan y responden en sus ambientes de aprendizaje. Y para ello, tomamos en cuenta el modelo experiencial de Kolb(1984) con los cuatro estilos de aprendizaje: Convergente, Divergente, Asimilador y Acomodador, y su operacionalización en las siguientes dimensiones: Conceptualización Abstracta, Experiencia Activa, Experiencia Concreta y Observación Reflexiva.

Para la recolección de los datos se ha utilizado como instrumento el inventario de estilos de aprendizaje de Kolb, construido en el año 1975, adaptado por Escurra (1991) a nuestro contexto peruano, y lo conocemos con el nombre de versión Escurra. Optamos por este instrumento porque toma como base conceptual el modelo experiencial de Kolb y evalúa la preferencia por un determinado estilo de aprendizaje, comparando los relativos predominios de una particular modalidad de aprender entre todas las posibles modalidades definidas por el modelo.

El inventario de Kolb, versión Escurra, está constituido por 36 palabras, de las cuales 24 están asociadas a cada una de las cuatro fases del ciclo de aprendizaje experiencial, las 12 palabras restantes fueron incluidas como elementos distractores para controlar la deseabilidad social, de ahí que no fueron utilizadas para el cómputo final. Las 24 palabras evaluaron las cuatro etapas del aprendizaje experiencial, así como las siguientes dimensiones: a) Concreta-Abstracta, y b) Actividad –Reflexión. El inventario consta de nueve grupos de cuatro palabras cada uno, los sujetos deben responder ordenando jerárquicamente cada grupo de palabras, según el grado con el cual percibe a la palabra que mejor caracteriza su estilo individual de aprender, asignando los puntajes que van de uno a cuatro (del menos al más característico).

Escurra (1991) señala que los puntajes directos de cada una de las cuatro fases de aprendizaje con sus dimensiones respectivas son convertidos a rangos percentiles. Para la elaboración del perfil de estilo de aprendizaje, se utilizó un nomograma circular de las cuatro fases, con círculos concéntricos que representan los percentiles: 20, 40, 60, 80 y 100, construido en base a ejes coordenados que unen las dos dimensiones de aprendizaje, los cuales se interceptan en sus puntajes promedios respectivos como resultado de las respuestas de los estudiantes.

El inventario, está formado por los siguientes elementos: una hoja de instrucciones, en el cual se detalla el concepto que se mide y la forma de responder al inventario; y, el instrumento de aplicación conformado por ternas de cuatro palabras con un espacio adicional al costado de cada una de ellas, para asignar el puntaje que se crea conveniente de 1 a 4 (del menos al más característico).

En nuestro trabajo de investigación, se actualizó el inventario de Kolb versión Escurra, analizando la confiabilidad con una prueba piloto aplicada a 30 estudiantes escogidos al azar, en base a la homogeneidad, que utiliza todos los ítems en forma simultánea para determinar la consistencia interna de la prueba, según Brown (1980) y Escurra (1991). Se utilizaron los Coeficientes Alfa de Cronbach y de Castaños, encontrándose que nuestros resultados obtenidos tanto en las capacidades y dimensiones alcanzan valores que oscilan entre 0,65 y 0,85, que se aproximan a los resultados de Escurra (1991) quien encontró valores entre 0,67 y 0,87. Por lo que nos permitió determinar que el instrumento era confiable, para luego ser aplicado a los estudiantes objeto de estudio.

Para la variable uso del PlayPosit, se editó un video que contiene cuatro problemas contextualizados a la carrera profesional de Medicina sobre el tema Teoría de conjuntos. Dichos problemas tienen por objetivo indagar sobre las habilidades evidenciadas por los estudiantes en sus respuestas a través de una rúbrica de desempeño, cuya confiabilidad se evidencia en la tabla 1. La confección y aplicación de la rúbrica nos permitió analizar e interpretar las siguientes habilidades: la indagación y reflexión acerca de los datos, la resolución de los problemas y la interpretación de los resultados obtenidos por ellos.

Tabla 1. *Confiabilidad por Consistencia Interna a través del coeficiente Alfa de Cronbach de la rúbrica de evaluación.*

	INDAG	REFLEX	RESOL	INTERP
α	0,745	0,763	0,874	0,875

En la Tabla 1, se observan los valores α que son cercanos a 1 por lo que se verificó que los problemas propuestos por los investigadores emergen de la base de datos recolectados en la presente investigación. Finalmente, se aplicó una encuesta para ver el impacto del PlayPosit en los estudiantes.

Procedimiento

Se realizaron dos actividades de aprendizaje: en la primera actividad que duró 40 minutos, se aplicó el inventario de estilos de aprendizaje de Kolb, versión Escurra a los estudiantes para diagnosticar los estilos de aprendizaje, y organizarlos en grupos colaborativos de cuatro integrantes según sus estilos de aprendizaje: Asimilador, Acomodador, Divergente y Convergente; se les envió el enlace del vídeo a sus WhatsApp. Este enlace los derivaba a un video en YouTube que contenía cuatro problemas contextualizados sobre Teoría de Conjuntos. Los estudiantes observaron el video, contrastaron datos, discutieron la resolución de los problemas y procedieron en grupo a contestar verbalmente las preguntas incrustadas en cada problema. Al final de cada problema del vídeo, se hizo un feedback del proceso de resolución y respuesta para que los estudiantes pudieran contrastar con sus resultados. En la segunda actividad de 40 minutos, se les repartió fichas con los mismos problemas expuestos en el Playposit para que los estudiantes resuelvan de manera individual, estas fichas fueron evaluadas con una rúbrica de desempeño.

Y finalmente, se les entregó una encuesta con 4 preguntas donde debían contestar Si o No. El objetivo de la encuesta fue medir el impacto del PlayPosit con la presentación y resolución de los 4 problemas contextualizados.

Estas actividades de aprendizaje se ejecutaron en la sexta semana de clases y segunda sesión con un tiempo total de 90 minutos.

Resultados

Tabla 2. Estilos de aprendizaje y habilidades con el uso del PlayPosit en la resolución de problemas sobre teoría de conjuntos por estudiantes peruanos de Medicina Humana en el ciclo 2018-1de la Universidad Privada Norbert Wiener.

Habilidades / Estilos de aprendizaje	Indagación p- valor	Reflexión p- valor	Resolución p- valor	Interpretación p- valor
Asimilador	0,159	0,149	0,179	0,143
Acomodador	0,112	0,102	0,152	0,123
Divergente	0,110	0,140	0,137	0,146
Convergente	0,141	0,131	0,143	0,108

De acuerdo al nivel de significancia p-valor de los resultados de la prueba Gamma observamos que no hay asociación entre las variables estilos de aprendizaje y el uso del PlayPosit en sus habilidades al resolver problemas sobre Teoría de conjuntos.

Tabla 3. Estilos de aprendizajes de estudiantes peruanos de Medicina Humana del ciclo 2018-1matriculados en la asignatura de Matemática Básica 1 de la Universidad Privada Norbert Wiener.

Estilos de aprendizaje	Frecuencia
Asimilador	24
Acomodador	24
Divergente	37
Convergente	15
Total	100

En la tabla 3, el estilo de aprendizaje predomínate es el divergente, que según Kolb (1984) caracteriza a los estudiantes de Medicina como personas sensibles, imaginativas, que les gusta experimentar y procesar la información de manera reflexiva, capacidades importantes para resolver problemas contextualizados.

Tabla 4. *Estilos de aprendizajes y nivel de rendimiento en la resolución de problemas con el uso del PlayPosit en teoría de conjuntos por estudiantes peruanos de Medicina Humana en el ciclo 2018-1de la Universidad Privada Norbert Wiener.*

Estilos de aprendizaje	Nivel de rendimiento con PlayPosit			
	Necesita mejorar (%)	Bueno (%)	Excelente (%)	Total (%)
Acomodador	19	5	0	24
Asimilador	5	5	14	24
Convergente	5	2	8	15
Divergente	13	21	3	37
Total	42	33	25	100

De los resultados de la Tabla 4, Diecinueve estudiantes con estilo de aprendizaje acomodador y 13 estudiantes con estilo divergente se encuentran en el nivel que necesitan mejorar sus estrategias para resolver problemas contextualizados sobre teoría de conjuntos.

Tabla 5. *Opinión de los estudiantes de Medicina Humana en el uso del PlayPosit en la presentación de problemas contextualizados, 2018-1de la Universidad Privada Norbert Wiener.*

Preguntas	SI	NO
1. ¿Desde su experiencia reciente en la solución de problemas planteados a través del PlayPosit le ha propiciado un mejor rendimiento?	86	14
2. ¿Usted considera que el uso del PlayPosit permiten una buena oportunidad de aprendizaje en el aula?	78	22
3. ¿Usted considera que el uso del PlayPosit permiten una buena oportunidad de aprendizaje fuera del aula?	90	10
4. ¿Considera que el uso del PlayPosit mejoran las prácticas de enseñanza?	89	11

En la Tabla 5, se observa que la gran mayoría de los estudiantes están de acuerdo con el uso del PlayPosit en la presentación de los problemas contextualizados, al responder "Si" a las preguntas hechas en la encuesta después de haber concluido la actividad de aprendizaje.

Discusión de resultados

De acuerdo al nivel de significancia de los resultados de la prueba Gamma en la tabla 2, afirmamos que no hay asociación entre las variables estilos de aprendizaje y las habilidades de indagación, reflexión, resolución e interpretación con el uso del PlayPosit en resolución de problemas contextualizados sobre Teoría de conjuntos. Este resultado no ha podido ser contrastado con otros porque es un trabajo inédito, por lo que asumimos que resulta importante y proponemos para futuras investigaciones del uso de PlayPosit para generar actividades de aprendizaje como una forma diferente de presentar problemas contextualizados, tomando en cuenta los estilos de aprendizaje de los estudiantes.

Los resultados de la Tabla 3 coinciden con los resultados de Romero, Salinas y Mortera (2010) y Bitran, Zúñiga, Lafuente, Montserrat y Mena (2003). Contrastando con la teoría nos basamos en las afirmaciones de Alonso (1991), Tompson y Mazcasine (1997), Gallego y Nevot(2008), Santaolalla (2009) y Saldaña (2010) concluyendo que los estudiantes presentan diferentes formas de aprender para esta muestra de 100 estudiantes, cuyos estilo predominante es el divergente.

Con respecto a los resultados de la Tabla 4, resulta todavía preocupante que un 42% de los estudiantes necesitan mejorar, lo que nos permite reflexionar sobre cómo presentamos los cuatro problemas usando el PlayPosit que resultó para los estudiantes una experiencia nueva y retadora que necesitó de un trabajo de equipo colaborativo y que sin embargo fue insuficiente para poder aprobar, contrastando con las afirmaciones de Arenas (2017). Observamos que, el 19% de los estudiantes con estilo de aprendizaje acomodador necesitan mejorar y coincidimos con los resultados de Camarero, Buey y Herrero (2000), y contrasta con las afirmaciones de Fujioka (2017).

Afirmamos de las observaciones realizadas en la ficha de desempeño que, los estudiantes acomodadores no lograron mayor éxito en la resolución de los problemas que contrasta con las caracterizaciones realizadas por Kolb(1984), Alonso (1991), Tripodoro y De Simone (2015), Borracci y Arribalzaga(2015). El 5% de los estudiantes acomodadores tuvieron éxito en el registro gráfico (Diagramas de Venn) pero no lograron convertir a los registros textuales y viceversa a las preguntas demandantes en este sentido coincidimos con las afirmaciones de Duval (2006) y Font (2001) cuando señalan para nuestros resultados de investigación que, los estudiantes tienen grandes dificultades para entender el problema en registro textual, como por ejemplo la palabra “solamente”, “a lo más dos”, “al menos uno”, de tal manera que los datos los toman de manera global para las áreas que involucran estas palabras, en especial cuando se usó el PlayPosit presentando los problemas contextualizados. Con respecto a los otros estilos de aprendizaje encontramos que, 11 estudiantes asimiladores se ubican en el nivel de excelencia por lo coincidimos con Kolb (1984), Barrera (2013), Acevedo y Rocha (2011) y, Gallego y Nevot (2008). Analizando las observaciones sobre las respuestas que dieron, podemos afirmar que son estudiantes que usaron la conceptualización abstracta y utilizaron los datos de los problemas de manera reflexiva. Se pudo notar que, cuando realizaron la actividad grupal organizaron a sus compañeros en función de una meta y luego en la actividad individual destacaron de manera exitosa la resolución de los problemas contextualizados.

Con respecto a los estudiantes divergentes, el 21% de los estudiantes se ubicaron en el nivel bueno, ellos en el trabajo grupal tuvieron dificultad con su grupo, para organizarse y repartirse las tareas en función al tiempo que daba el PlayPosit en la resolución de un problema por lo que, para el segundo, tercer y cuarto problemas tuvieron que tomar cuenta de los datos en grupo lo que cada ítem les planteaba. Tuvieron éxito sobre todo en el registro gráfico, observando el todo en lugar de las partes, como señalan Kolb (1984), Camarero, Buey y Herero (2000), Gallego y Nevot (2008), Santaolalla (2009), Herrera, Montenegro y Poveda (2012), Borracci y Arribalzaga (2015).

De los resultados de la tabla 5, podemos afirmar que fue una buena experiencia para los estudiantes, porque les resultó nueva, interesante y diferente a lo que estaban acostumbrados. Estuvieron de acuerdo con el feeedback que se les hizo al terminar cada problema. Lo que no estuvieron de acuerdo fue con el tiempo que se les dio para resolver los problemas con el PlayPosit porque estaba editado de tal manera que, al presentar los datos, se cortaba en un lapso de tiempo, lo que ocasionó frustración para algunos grupos de alumnos que no se organizaron como equipo, sino que actuaron de manera individual, por lo que coincidimos con las conclusiones de Arenas (2017) y afirmaciones de Alonso (1991).

Al presentar los cuatro problemas tomamos en cuenta sus estilos de aprendizaje y usamos el PlayPosit, para indagar sobre las habilidades desplegadas por los estudiantes al resolver los problemas, de esta manera consideramos que facilitamos sus aprendizajes, como señalan Lara y otros (2003), Luengo y González (2005), Romero, Salinas y Mortera (2010), Rodríguez, Moreno y Trigos (2016), Morales, García y Campos (2017).

Proponemos esta investigación como referente para futuras investigaciones con el objetivo de lograr competencias de trabajo colaborativo en equipos organizados según sus estilos de aprendizaje para resolver problemas contextualizados de matemáticas con el uso del PlayPosit.

Conclusiones

1. No existe relación entre las variables estilos de aprendizaje y el uso del PlayPosit en las habilidades de indagación, reflexión, resolución e interpretación de la resolución de problemas contextualizados sobre la Teoría de conjuntos.
2. El estilo de aprendizaje divergente es el predominante en la muestra de estudiantes de la carrera profesional de Medicina Humana y el 42% de ellos, necesitan mejorar en sus aprendizajes.
3. Los estudiantes con estilo de aprendizaje acomodador en su mayoría son los que necesitan mejorar en sus aprendizajes.
4. La gran mayoría de los estudiantes se muestran de acuerdo con el uso del PlayPosit, porque les resultó interesante y fue una nueva forma de aprender a resolver problemas.
5. El uso del PlayPosit fomenta el trabajo en equipo colaborativo, y resulta si se toma en cuenta los estilos de aprendizaje, porque genera una sinergia entre ellos al resolver los problemas contextualizados a su carrera profesional.
6. Es importante generar nuevas formas de presentar problemas matemáticos contextualizados que enganchen y motiven a los estudiantes a resolverlos.

Referencias

Acevedo, P. y Rocha, P (2011). *Estilos de aprendizaje, género y rendimiento académico*. España: Revista Estilos de aprendizaje, 8(8) 1-1.

Alonso, C. y Bartolomé, J. (1991). *Análisis y diagnóstico de los estilos de aprendizaje de los universitarios*. España: Universidad Complutense.

Alonso, C. y Gallego, D. (1997). *Motivar para el aprendizaje.* Barcelona: Edebé.

Arenas, C., Tamez, R. y Lozano, A. (2017). *Los estilos de aprendizaje y su relación con el aprendizaje colaborativo en cursos virtuales.* Revista de Estilos de aprendizaje, 10 (20). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey México. Recuperado de http://learningstyles.uvu.edu/ index.php/jls/issue/view/21

Barrera, F & Reyes, A. (2013). *Elementos didácticos de la resolución de problemas: Formación docente en matemáticas.*México: Ed.Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo.

Bitran, C., Zúñiga P., Lafuente G., Montserrat, V. y Mena, B. (2003). *Tipos psicológicos y estilos de aprendizaje de los estudiantes que ingresan a Medicina en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Revista médica de Chile*, 131(9), 1067-1078. Recuperado el 15 de mayo de 2017 de https://dx.doi.org/ 10.4067/S0034-98872003000900015.

Bonilla (1998). *Estilos de Aprendizaje de los estudiantes de la Universidad de Costa Rica.* Costa Rica: Educación: Revista de la Universidad de Costa Rica, 12(1), 17.

Borracci, R.y Arribalzaga, E. (2015). *Estilos de aprendizaje de Kolb en estudiantes de medicina.* Recuperado el 17 de mayo de 2018 http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S00257680201500020000 1&lng=es&tlng=es.

Brown, F. (1980). Principios de la medición en Psicología y Educación. México: Edit. El Manual Moderno.

Camarero, F, Buey, Herero, J (2000). *Estilos y estrategias de aprendizaje en estudiantes universitarios*. Recuperado el 14 de mayo de 2018 de http://www.redalc.org/ articulo.oa? id=72712416.ISSN 0214-9915.

Chamorro, M. (2005). Didáctica de las matemáticas. Educación infantil. Madrid. Pearson. Recuperado el 4 de julio de 2017 de http://revistas.um.es/educatio/article/ viewFile/ 132961/ 12266.

Duval, R. (2006*). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española; Vol 9.1, pp 143-168. Madrid, RSME. Recuperado el 25 de mayo de 2018 de http://dmle.cindoc.csic.es/ pdf/ GACETARSME_ 2006_ 9_1_ 05.pdf.

Escurra L. (1991). *Adaptación del Inventario de Estilos de Aprendizaje de Kolb en estudiantes de Psicología pertenecientes a diferentes universidades de Lima Metropolitana*. Tesis de Licenciatura en Psicología. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Lima. Perú.

Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de las gráficas. El caso de la parábola. Revista de innovación en educación matemática (EMA). 6(2), pp. 180 – 200. Recuperado el 23 de diciembre de 2018 de http://webs.ono.com/ vicencfont/index_ archivos/ %2804%29RD.pdf.

Fujioka,R. (2017). *Investigating the Impact of Video Instruction in a High School Chemistry Class.* Recuperado el 16 de julio de 2018 de http:// hdl. handle.net/10125/45546

Gallego, D. y Nevot, A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas. *Revista Complutense de Educación 19. Recuperado* el 15 de abril de 2018 de http://revistas.ucm.es/index.hp/ RCED /article/viewFile /RCED0808120095A/15564.

Hernández R, Fernández C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación* México: McGraw-Hill.

Herrera, N, Montenegro, W. y Poveda, S. (2012). *Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, (35), 254-287. Recuperado el 14 de abril de 2018 de http://www. redalyc.org/ articulo.oa?id=194224362014.

Kolb, D. (1984). *Experimental Learning: experience as the source of learning development.* New Jersey: Prentice Hall.

Lara & otros (2003) *Estilos de aprendizaje entre los alumnos de los estilos pedagógicos Estatales y No Estatales*. Perú:Tesis en Maestría. Universidad Cesar Vallejo.

Luengo R. y Gonzales, J. (2005). *Relación entre los estilos de aprendizaje, el Rendimiento en matemáticas y la elección de asignaturas optativas en alumnos de enseñanza secundaria obligatoria* (E.S.O): España: Revista Latinoamérica 3, 25-46

Morales, L, García, O & Campos, M (2017). *Estilos de aprendizaje en matemática de las universidades panameñas*. UDELAS. Panamá: ISBN 978-9962-12-471-9

Prado, A. y Lara, L. (2018). *Herramientas TIC para la enseñanza de programación,empleando aula* invertida. Recuperado el 12 de mayo de 2018 de http://sedici. unlp.edu.ar/ bitstream/ handle/10915/69076/Documento_completo. Pdf PDFA.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rodríguez, A, Moreno, J, Trigos, M. (2016) *Los videos tutoriales como herramienta formativa.* INGENIO UFPSO, 10, 37- 42. P-ISSN 2011-642X e-ISS 2389-864X – Edición Especial

Romero,L, Salinas,V, Mortera, F (2010). *Estilos de aprendizaje basados en el modelo de Kolb en la educación virtual.* Recuperado el 23 de abril de 2018 de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=688208441007.

Saldaña, G. (2010) *Estilos de aprendizaje y rendimiento académico en alumnos que cursaron genética clínica en el periodo de primavera 2009 en la facultad de medicina de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla*. Revista Estilos de aprendizaje. 5(5), 42,52.

Salkind, N. (1995). *Métodos de investigación.* México: Prentice Hall.

Sánchez, H. y Reyes, C. (2015). *Metodología y diseño en la investigación científica*. Perú: Primera Edición. Universidad Ricardo Palma.

Santaolalla, E. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Revista Estilos de Aprendizaje.* Recuperado el 06 de febrero de 2018 de www.uned.es/revista estilos de aprendizaje/.

Serrano, R. y Casanova, O. (2017). *Acercar la Flipped Classroom al aula de Música Universitaria mediante el uso de aplicaciones para realizar y gestionar vídeos. Percepción y valoración de los estudiantes*. Recuperado el 15 de junio de 2017 de http://eujournal.org/index.php/esj/article/view/8742/8374

Solis, A. (1988). *Metodología de la Investigación Jurídico Social*. Perú: Segunda edición. Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Thomson, B. and Mascazine, J. (1997). *Attending to Learning Styles in Mathematics and Science Classrooms*. ERIC Digests. Columbus, OH: ERIC. Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education. Recuperado el 24 de mayo del 2018 de http://www.ericdigests.org/2000-1/attending.html.

Tripodoro, V. y De Simone, G. (2015). *Nuevos paradigmas en la educación universitaria: Los estilos de aprendizaje de David Kolb. Medicina* (Buenos Aires), 75(2), 109-112. Recuperado el 12 de abril de 2018 de http://www.scielo.org.ar/ scielo.php? script=sci_arttext&pid=S002576802015000200010 &lng= es& tlng=es.

USO DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA PARA LA ELABORACIÓN DE PROPUESTAS DIDÁCTICAS. EL CASO DE LA FUNCIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA

USE OF RECORDS OF SEMIOTIC REPRESENTATION FOR THE ELABORATION OF DIDACTIC PROPOSALS; THE CASE OF THE LINEAR AND QUADRAPHIC FUNCTION

Matilde Edibeth Fierro Ayala, María del Pilar Esquer Zarate, Julio Cesar Ansaldo Leyva, Julia Xochilt Peralta García
Instituto Tecnológico de Sonora (México)
matilde.fierro@itson.edu.mx, maria.esquer@itson.edu.mx, jansaldo@itson.edu.mx, julia.peralta@itson.edu.mx

Resumen
El objetivo de esta investigación es diseñar una secuencia didáctica para el caso de la función lineal y cuadrática a través de la conversión de registros de representación semiótica, utilizando situaciones en contexto extra-matemático, la propuesta didáctica incluye el uso del software dinámico Geogebra, para facilitar la comprensión de algunos registros. El trabajo se sustenta en los aportes de Duval (1998), a través de los registros de representación semiótica. Los resultados indicaron una mejoría al implementar la propuesta didáctica al transitar de un registro a otro, sin embargo, con las representaciones verbales y tabulares se presentaron dificultades, al ser menos utilizadas en la asignatura. El uso de los diferentes registros de representación y el tránsito entre ellos favoreció al estudiante desenvolverse en la construcción y análisis del objeto bajo estudio.

Palabras clave: registros, función lineal, función cuadrática, geogebra

Abstract
The objective of this research is to design a didactic sequence for the case of the linear and quadratic function through the conversion of semiotic representation registers, using situations in extra-mathematical context, the didactic proposal includes the use of the Geogebra dynamic software, for facilitate the understanding of some records. The work is based on the contributions of Duval (1998), through the records of semiotic representation. The results indicated an improvement when implementing the didactic proposal when moving from one register to another, however, with the verbal and tabular representations, difficulties were presented, since they were less used in the subject. The use of the different registers of representation and the transit between them, favored the student to develop in the construction and analysis of the object under study.

Key words: registers, function, lineal, quadratic, geogebra

Introducción

Hoy en día la matemática es muy necesaria, su correcta comprensión y conexión es fundamental, pudiéndola definir, como una construcción humana que está presente en todas las cosas que nos rodean. Y de igual forma, la matemática educativa se ocupa del saber enseñado y es quien hace posible que la matemática se enseñe y se aprenda, por lo que, en la última década, se ha reconocido por diversos autores, la influencia determinante que sobre ello ejercen las posiciones filosóficas y las teorías epistemológicas relativas al conocimiento matemático (Cantoral y Farfán, 2003).

En la matemática encontramos distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas, lógicas, funcionales que se tornan en lenguajes paralelos al lenguaje natural para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas de barra, etc. Cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente, entendiéndose por tal a la actividad de formación de representaciones realizadas por medio de signos (Oviedo y Kanashiro, 2012).

La evolución de los conocimientos de la problemática en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, para llevar el trabajo en el aula, demandan la adaptación de recursos que se adecúen a las exigencias actuales en la formación de profesionales. Dicha problemática central vinculada con el concepto de función se refiere a los distintos registros de representación (verbal, gráfico, numérico, analítico).

Duval (2004), plantea que una causa importante de los fracasos escolares está ligada a la conversión entre estas representaciones; los alumnos saben en general, trabajar aisladamente con cada una de ellas, sin embargo, no tienen la capacidad de decidir si conviene o no cambiar de registro según la tarea que se les presente.

Existen diversas investigaciones que ponen en evidencia las dificultades que presentan los estudiantes cuando se desarrollan temas de funciones lineales y cuadráticas e indican la importancia de incidir en el uso de diferentes registros de representación cuando se trabaja con dichos contenidos.

Según Prada-Nuñez, Hernández y Ramírez-Leal (2016), se ha observado que los estudiantes, después de estudiar el concepto de función, alcanzan una comprensión que a veces se limita al uso de una regla para comprobar cuándo una relación constituye una función; y en otros casos a la sola evaluación de funciones en el contexto algebraico.

De entre las distintas posibilidades de representación de los conceptos referidos a funciones lineales y cuadráticas, es tradicional que las algebraicas y las gráficas sean de las más usadas en las clases de matemática.

El curso de Fundamentos de Matemáticas impartido a estudiantes de nuevo ingreso a nivel licenciatura del Instituto Tecnológico de Sonora (ITSON), utiliza en su contenido matemático el estudio de la función lineal y cuadrática, donde se observó, que el alumno tiene dificultades para resolver problemas de enunciado verbal que demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso de lenguaje algebraico, es decir, en las que el estudiante debe plantear ecuaciones lineales y cuadráticas y al momento de transitar de un registro de representación a otro. Por lo tanto, bajo estas consideraciones y con base en el contexto desarrollado, se planteó diseñar una secuencia didáctica para el caso de la función lineal y cuadrática a través de la conversión de registros de representación semiótica, utilizando situaciones en contexto extra-matemático.

Marco teórico

El diseño de la propuesta se sustenta en los aportes de Duval (1998) sobre los registros de Representación Semiótica, ya que sirvieron como apoyo al diseño, interpretación y análisis de las actividades didácticas.

Duval (2004) afirma que sólo por medio de las representaciones es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y caracteriza a un sistema semiótico como un sistema de representación, ya que hoy en día se considera que no es posible estudiar los fenómenos relacionados con el conocimiento matemático sin recurrir a la noción de representación, el cual juega un papel muy importante en la actividad matemática.

El concepto de función es de gran trascendencia en el ámbito escolar, ya que en el mundo actual y especialmente en los medios de comunicación la mayor parte de la información sobre los fenómenos de cambio en las diferentes ramas se difunde por medio de tablas y gráficas, que son dos de las formas de expresar la relación funcional (García, 2013).

Carrillo (2013), menciona que la función lineal y cuadrática han sido estudiadas en relación con las dificultades que los estudiantes presentan en los distintos tratamientos a realizar en la estructura de dicho objeto matemático; como es el caso de tener que modelar un problema que esté escrito en lenguaje verbal, transitarlo al lenguaje algebraico o al gráfico y viceversa.

Cuando se hacen matemáticas, inevitablemente se usa algún tipo de representación, ya sea a través del lenguaje natural o mediante los signos y gráficas propios de la ciencia. Un texto o un discurso, una notación convencional, un cierto tipo de gráfica, las figuras geométricas, entre otras, son ejemplos de representaciones que se usan con el fin de que el estudiante desarrolle un significado adecuado para un cierto objeto o concepto matemático; es el uso de las representaciones las que permiten poder acceder a los conocimientos matemáticos, ya que los objetos pertenecientes a los mismos son de naturaleza abstracta (Villaseñor, 2012).

Duval (1998), establece que las representaciones no solamente son necesarias para fines de comunicación, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Las representaciones mentales recubren al conjunto de imágenes y, globalmente, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación, y sobre lo que les está asociado. Las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias compulsiones de significado y de funcionamiento.
Una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica son representaciones semióticas los cuales pertenecen a distintos registros de representación semiótica. El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano se revela como inseparable de la existencia de una diversidad de registros semióticos de representación, se llama *semiosis* a la aprehensión o a la producción, de una representación semiótica, y *noésis* a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la noésis es inseparable de la semiosis.

Duval (2004), afirma que para que las representaciones puedan ser útiles en la actividad matemática, deben pertenecer a sistemas semióticos que sean registros de representación y para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales asociadas a toda representación; la *Formación* que implica la selección de rasgos y datos en el contenido por representar. El *Tratamiento*, es la transformación de una representación en el mismo registro en el cual ha sido formada. Y la *Conversión*, es la transformación de esta representación en otro registro distinto de aquel donde se ha formado, conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial.

En consecuencia, este acercamiento, nos permite una amplia gama de posibilidades para llevar a cabo una investigación en la resolución de problemas a través de la articulación de los diferentes registros de representación con el uso de ambientes dinámicos.

Metodología

El estudio se realizó bajo el enfoque cualitativo con el fin de explorar, descubrir y comprender la concepción que logran los estudiantes al resolver la propuesta de secuencia didáctica diseñada, con el fin de que aprendieran el tema bajo estudio de la función lineal y cuadrática.

El trabajo fue dirigido a estudiantes de Ingeniería, de diferentes edades y sexo indistinto que cursaban la materia de Fundamentos de Matemáticas en el Instituto Tecnológico de Sonora. Para ello, se dispuso de un aula donde cada estudiante tenía una computadora con el software Geogebra instalado.

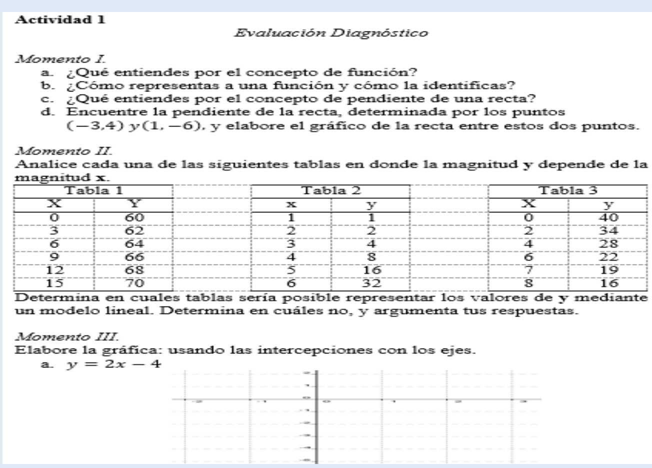
La propuesta constó de cuatro actividades organizadas y jerarquizadas, que posibilitaron el desarrollo de conceptos, habilidades y actitudes.

Los pasos metodológicos que se siguieron para la realización de la propuesta se describen a continuación:

1. *Diseño de la propuesta didáctica.* La secuencia didáctica estuvo integrada de cuatro hojas de trabajo y dos archivos de GeoGebra. En las hojas de trabajo se incluyeron los objetivos, las instrucciones para los estudiantes, las preguntas abiertas, gráficas, tablas y espacios para realizar cálculos. Además, se incluyeron también las indicaciones para el uso del software de geometría dinámica Geogebra.

En la figura 1, se muestra un extracto representativo de las hojas de trabajo utilizados por los estudiantes, en la actividad 1 y 3 se expone los problemas en contexto y en las actividades 2 y 4 un fragmento del archivo de Geogebra utilizado.

Actividad 1
Evaluación diagnóstica



Actividad 1

Evaluación Diagnóstico

Momento I.

a. ¿Qué entiendes por el concepto de función?
b. ¿Cómo representas a una función y cómo la identificas?
c. ¿Qué entiendes por el concepto de pendiente de una recta?
d. Encuentre la pendiente de la recta, determinada por los puntos $(-3,4)$ $y(1,-6)$, y elabore el gráfico de la recta entre estos dos puntos.

Momento II.

Analice cada una de las siguientes tablas en donde la magnitud **y** depende de la magnitud **x**.

Tabla 1		Tabla 2		Tabla 3	
X	Y	x	y	X	y
0	60	1	1	0	40
3	62	2	2	2	34
6	64	3	4	4	28
9	66	4	8	6	22
12	68	5	16	7	19
15	70	6	32	8	16

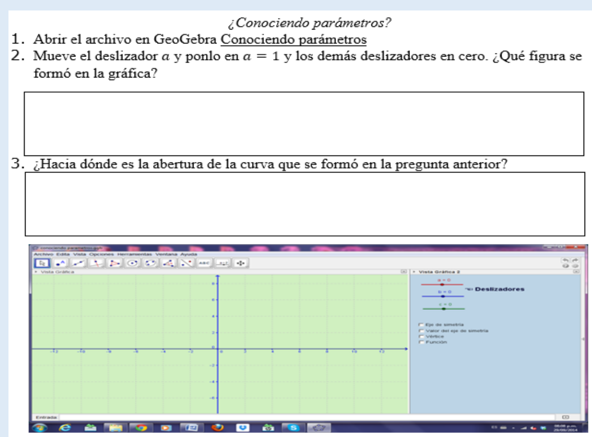
Determina en cuales tablas sería posible representar los valores de y mediante un modelo lineal. Determina en cuáles no, y argumenta tus respuestas.

Momento III.

Elabore la gráfica: usando las intercepciones con los ejes.

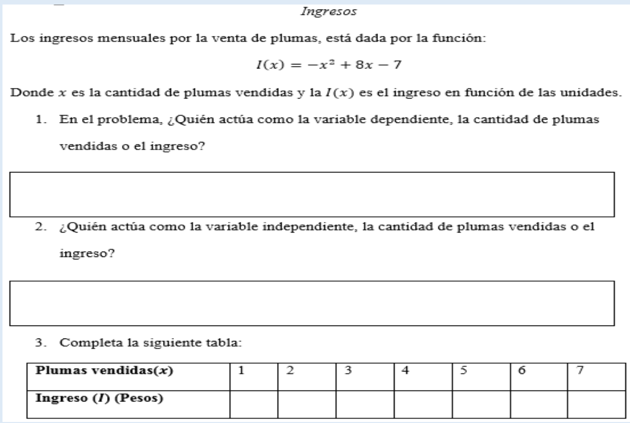
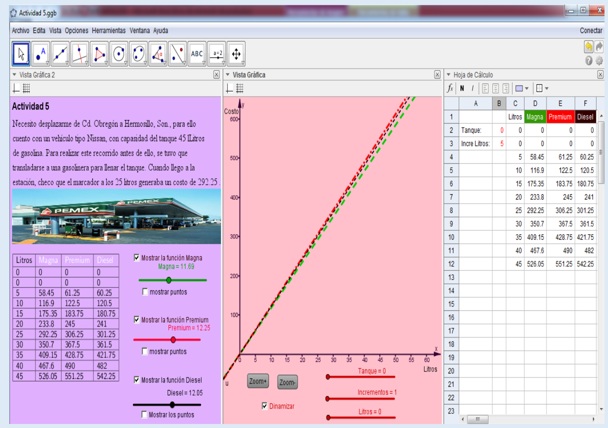
a. $y = 2x - 4$

Actividad 2
Conociendo parámetros



¿Conociendo parámetros?

1. Abrir el archivo en GeoGebra Conociendo parámetros
2. Mueve el deslizador a y ponlo en $a = 1$ y los demás deslizadores en cero. ¿Qué figura se formó en la gráfica?
3. ¿Hacia dónde es la abertura de la curva que se formó en la pregunta anterior?

Actividad 3 Ingresos	Actividad 4 Gasolinazo
	

Ingresos

Los ingresos mensuales por la venta de plumas, está dada por la función:

$$I(x) = -x^2 + 8x - 7$$

Donde x es la cantidad de plumas vendidas y la $I(x)$ es el ingreso en función de las unidades.

1. En el problema, ¿Quién actúa como la variable dependiente, la cantidad de plumas vendidas o el ingreso?

2. ¿Quién actúa como la variable independiente, la cantidad de plumas vendidas o el ingreso?

3. Completa la siguiente tabla:

Plumas vendidas(x)	1	2	3	4	5	6	7
Ingreso (I) (Pesos)							

Figura 1. Extracto representativo de las actividades en la propuesta didáctica (elaboración propia, 2018)

2. *Pilotaje*. La propuesta de secuencia didáctica se aplicó a un grupo de estudiantes que cursaban la materia Fundamentos de Matemáticas, en el Instituto Tecnológico de Sonora. El profesor a cargo tuvo como objetivo identificar errores en el diseño de las actividades para posterior a eso realizar mejoras y modificaciones en el producto final. Además, el profesor fungió como guía en la utilización del software GeoGebra.

3. *Mejoras y/o modificaciones aplicadas después del pilotaje*. En la aplicación de las actividades durante la prueba piloto se identificaron errores en la redacción de las instrucciones y de las preguntas, incluso algunas se remplazaron por otras o se desglosaron, con el fin de mejorar la propuesta de secuencia didáctica.

Resultados

Las actividades 1 y 2, tenían el propósito de familiarizar al estudiante con los temas función lineal y cuadrática, mientras que las actividades tres y cuatro, adentraban al estudiante en el tema, para que resolviera problemas en contexto y así poder cumplir con el objetivo de la propuesta.

Actividad 1, se diseñó una evaluación diagnóstica la cual constó de tres momentos:

El *Momento I:* formado por 4 preguntas, las cuales tuvieron como objetivo conocer e identificar ciertas dificultades que pudieran presentar los alumnos, al momento de recordar algunos conceptos de la función lineal y abordar su propio conocimiento, mediante la identificación de variables, articulación, conversión, entre otras. En la figura 2, se muestra un claro ejemplo de uno de los reactivos que corresponden a este momento, uno de los participantes tuvo la habilidad para obtener el valor de la pendiente de la recta, dados dos de los puntos y aplicando la fórmula para obtener la pendiente $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

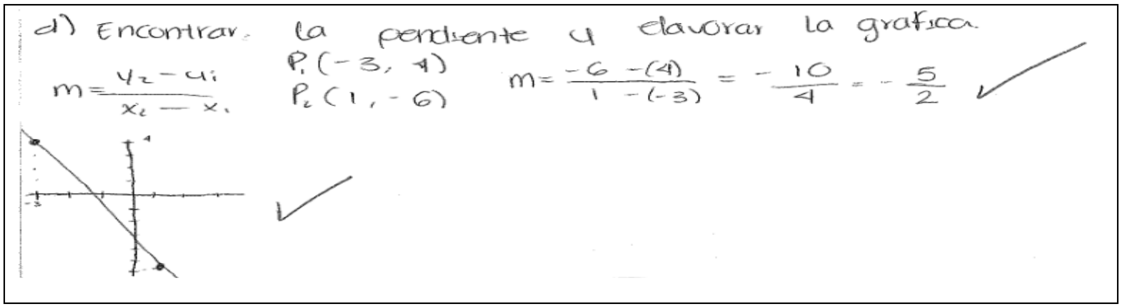
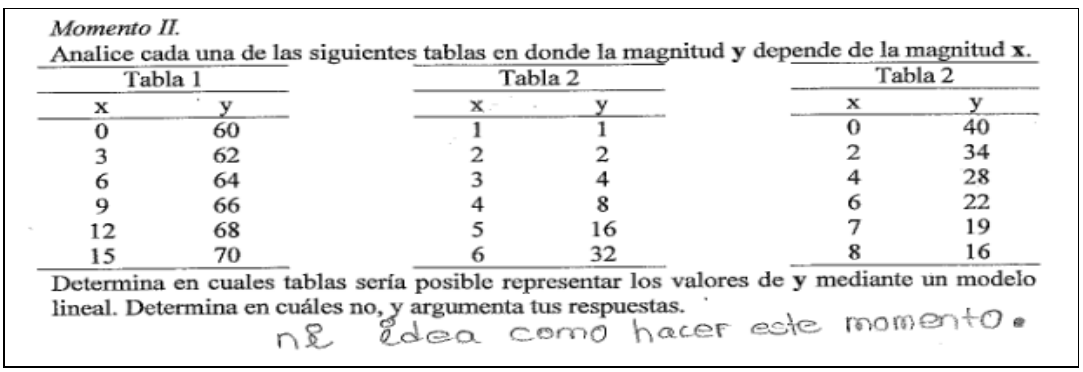


Figura 2. Evaluación diagnóstica para la obtención de la pendiente

El *Momento II* estuvo conformado por el análisis de tres representaciones tabulares, estos registros de representaciones tienen como finalidad el analizar el comportamiento en cada uno de los registros tabulares, así como también, identificar en cuál de los tres registros se contextualiza un modelo lineal. A la mayoría de los participantes se les dificultó responder esta pregunta, no pudiendo determinar en cuales tablas de las tres que se están proporcionando, sería posible representar dónde la magnitud de los valores de "y" dependían de la magnitud "x", mediante un modelo lineal (ver figura 3).



Momento II.

Analice cada una de las siguientes tablas en donde la magnitud **y** depende de la magnitud **x**.

Tabla 1

x	y
0	60
3	62
6	64
9	66
12	68
15	70

Tabla 2

x	y
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	32

Tabla 2

x	y
0	40
2	34
4	28
6	22
7	19
8	16

Determina en cuales tablas sería posible representar los valores de **y** mediante un modelo lineal. Determina en cuáles no, y argumenta tus respuestas.

nE idea como hacer este momento.

Figura 3. Respuesta de uno de los participantes en la puesta en escena, en su Momento II

En el *Momento III* se realizaba una pregunta, la cual tenía como objetivo contextualizar dos de las conversiones, considerando solamente dos registros de representación, bajo la enseñanza previa en un contexto matemático de estudio de la función lineal; en donde algunas de las observaciones mostradas por los participantes durante la puesta en escena, fue que se les dificultó realizar la conversión de un registro de representación algebraico a un tipo de registro de representación grafico o viceversa.

Debido a lo anterior, se consideró necesario dar un cierre a la Actividad I, con la intervención del profesor y todo el grupo, para promover la construcción social como elemento necesario de la aprehensión del conocimiento lineal.

En la *Actividad 2*, se buscaba dar un primer acercamiento al estudiante con la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$. Se utilizó la representación algebraica y por medio de los deslizadores de Geogebra se lograba manipular los valores de *a*, *b* y *c* para visualizar la representación gráfica. Los valores que podían tomar los parámetros para esta actividad se establecieron de -10 a 10. A demás, a los estudiantes se les solicitó identificar el punto máximo o mínimo, la coordenada del vértice, el eje de simetría y el tipo de concavidad.

En la *Actividad 3*, se intentó acercarlos a un contexto extra-matemático, que derivaba del uso de funciones cuadráticas. El objetivo en general de la actividad era transitar con los diferentes registros de representación haciendo conversiones entre los mismos y trabajando con un problema de aplicación.

Se plantea un problema de ingresos y siguiente a eso se presentaron una serie de preguntas guiadas, para que el estudiante desarrollara el problema. En las primeras tres preguntas se les solicitó a los estudiantes que identificaran las variables dependiente e independiente y que completaran la tabla usando la función cuadrática que les proporcionaba el problema, para ello los estudiantes sustituyeron los valores de x (artículos vendidos) en la función para determinar el valor de y (ingresos).

Después de completar la tabla, se indicó a los estudiantes que analizaran la información para determinar el ingreso máximo que tendría la empresa al vender cierto número de artículos.

Posteriormente elaboraron la gráfica con los datos de la tabla. De manera general, se presentaron dos casos al momento de completar la tabla, donde los estudiantes no sustituyeron correctamente en la función, dándoles como resultado diferentes valores en la y por consiguiente en la gráfica no lograron ver la parábola. A continuación, se expone una comparación de un alumno que realizó las operaciones adecuadamente y el que tuvo errores con los signos (ver figura 4):

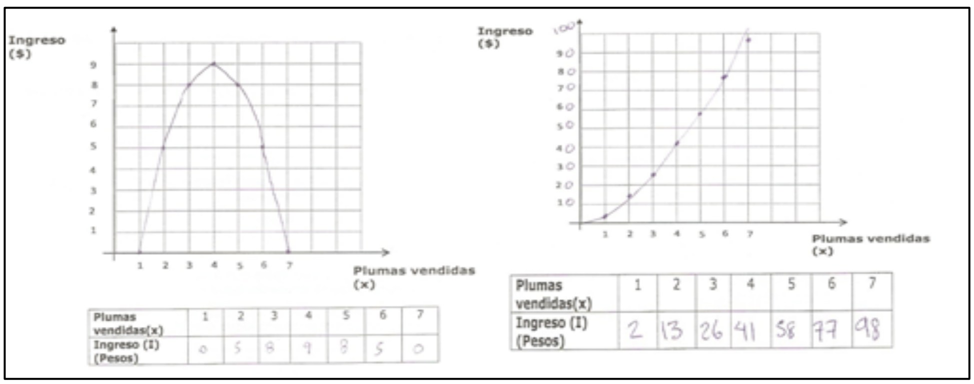
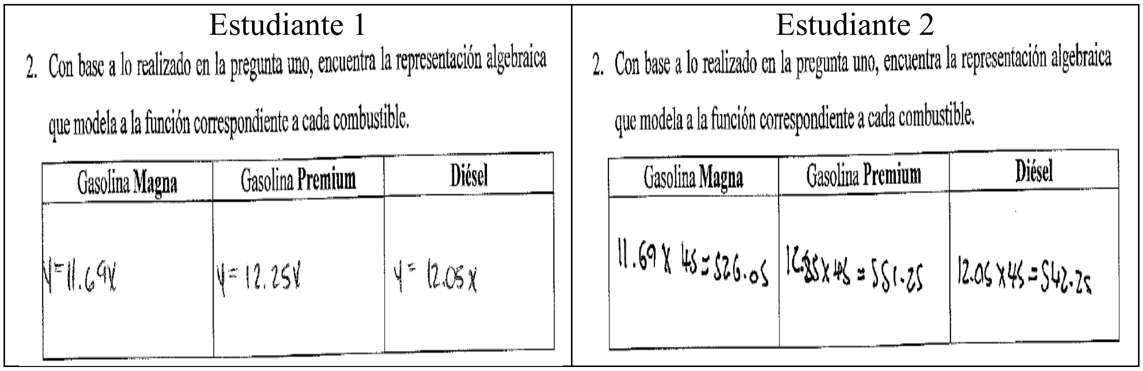


Figura 4. Comparación de resultados en la actividad tres realizada por los estudiantes

La *Actividad 4* ayudó al alumno a reforzar sus conocimientos e interpretar los conceptos matemáticos que integran la línea recta, haciendo la conversión entre los diferentes registros. Otra intención fue la posibilidad de adquirir y construir nuevos conocimientos matemáticos, mediante el uso del software GeoGebra; durante el desarrollo de esta actividad, fue en el reactivo 2 donde los participantes mostraron mayor dificultad para interpretar este registro (ver figura 5).



Estudiante 1

2. Con base a lo realizado en la pregunta uno, encuentra la representación algebraica que modela a la función correspondiente a cada combustible.

Gasolina Magna	Gasolina Premium	Diésel
y=11.69x	y=12.25x	y= 12.05x

Estudiante 2

2. Con base a lo realizado en la pregunta uno, encuentra la representación algebraica que modela a la función correspondiente a cada combustible.

Gasolina Magna	Gasolina Premium	Diésel
11.69 x 45 = 526.05	12.25x45 = 551.25	12.05x45 = 542.25

Figura 5. Respuesta del reactivo 2

En la figura 5, se observa que el estudiante 1 plantea la ecuación solicitada, en contraste con el estudiante 2, el cual no logró a interpretar adecuadamente el enunciado del problema y por tanto no llegó a una respuesta correcta, ejecutando en ese espacio operaciones, más no lo que se le estaba solicitando interpretar. Dicha problemática de estudio para esta actividad fue abordada bajo un contexto extramatemático, presentando como registro de partida la representación verbal y contando para ello con 11 reactivos.

Los resultados de esta puesta en escena dan evidencia de manera general que los participantes presentaron una evolución en el dominio del objeto matemático de estudio *función lineal* y *función cuadrática*, toda vez, que se puede notar como al ir desarrollando esta investigación, los conceptos involucrados emergieron cada vez con mayor precisión. La inclusión de la tecnología favorece la aprehensión de los conceptos matemáticos al visualizar de manera dinámica los diferentes registros de representación.

Conclusiones

La elaboración de la propuesta didáctica ayudó a los estudiantes a modelar y resolver problemas con el uso de funciones cuadráticas y funciones lineales en diferentes contextos. A demás, el uso de los registros de representación favorece al estudiante desenvolverse en la construcción y análisis del objeto bajo estudio.

El interés por llevar a cabo esta investigación tiene su origen en las observaciones directas en el aula, sobre las deficiencias mostradas por los estudiantes, cuando intentan utilizar estas funciones como modelos para la resolución de problemas. Además, dichas deficiencias son recurrentes a pesar de que el concepto de función lineal y cuadrática ha sido ya discutido por los estudiantes en sus estudios pre-universitarios. Por otra parte, es necesario puntualizar que, en los últimos años, se han desarrollado estudios que enfatizan el uso de diferentes registros de representación y de la articulación entre ellos, y dichos estudios usan nuevas tecnologías como parte de los recursos de enseñanza.

Se logró cumplir con el objetivo, obteniendo un resultado favorable en la implementación de cada una de las actividades didácticas, las cuales ayudaron a plantear y resolver problemas con base a estos conceptos matemáticos bajo estudio.

Se observó, además, un gran interés por el grado de interacción y dinamismo que tenía la propuesta didáctica. Por otra parte, se constató una evolución en la comprensión del contenido matemático bajo la implementación de la secuencia con apoyo de los diferentes registros involucrados.

En cuanto a las dificultades que presentaron los estudiantes, se dieron al momento de transitar desde o hacia el registro verbal y tabular, ya que en el curso de Fundamentos de Matemáticas no se estudian este tipo de representaciones. Los utilizados con mayor frecuencia son los registros algebraicos y el gráfico.

El trabajar con diferentes registros de representación en cada una de las actividades le permitió al estudiante desenvolverse en la construcción y análisis del objeto matemático, logrando un mejor entendimiento sobre el tema, con la ayuda de ambientes dinámicos,en un contexto matemático.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 6*(1), 27-40.

Carrillo, F. (2013). *Un estudio de las organizaciones matemáticas del objeto función cuadrática en la enseñanza superior* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* En F. Hitt, (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle: Instituto de educación y pedagogía.

García, J. (2013). *El concepto de función como una integración de los registros de representación* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. Medellín, Colombia. Recuperado de http://www.bdigital.unal.edu.co/9509/1/15447487.2013.pdf

Oviedo, L., Kanashiro, A., Bnzaquen, M., y Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Revista Aula Universitaria,* (13). 29-36 Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/315814323_TEORIA_DE_REGISTROS_DE_REPRESENTACIONES_SEMIOTICA

Prada-Núñez, R., Suárez, C. H., y Ramírez-Leal, P. (2016). Comprensión de la noción de función y la articulación de los registros semióticos que la representan entre estudiantes que ingresan a un programa de Ingeniería. *Revista Científica,2*(25), 188-205. Recuperado de: https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/download/10385/11807

Villaseñor, G. (2012). *Planteamiento de la Propuesta y Elementos Teóricos.* (tesis de maestría no publicada). Universidad de Sonora, México.

ANÁLISIS DE PRAXEOLOGÍAS RELATIVAS AL CÁLCULO PROPOSICIONAL Y AL CÁLCULO DE PREDICADOS QUE SE PROPONEN ESTUDIAR EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN MATEMÁTICA

ANALYSIS OF PRAXEOLOGIES RELATED TO THE PROPOSITIONAL CALCULUS AND THE CALCULUS OF PREDICATES THAT ARE PROPOSED TO STUDY IN MATHEMATICS TEACHER TRAINING

Oscar Abel Cardona Hurtado, Ana Rosa Corica
Universidad del Tolima. Institución Educativa San Francisco, Colombia
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), NIECyT- Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA. (Argentina)
Oach76@hotmail.com, acorica@exa.unicen.edu.ar

Resumen
En este trabajo se reportan resultados parciales de una investigación que corresponde al desarrollo de una tesis en un programa de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias. El estudio se ubica en la problemática de la formación de profesores en matemática en cálculo proposicional y cálculo de predicados. Como referencial teórico se adopta a la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Los resultados preliminares indican que los profesores que forman a estudiantes de profesorado proponen estudiar tareas donde utiliza una sola técnica y no se establecen relaciones entre estas, lo que conduce al estudio de tareas rígidas y aisladas.

Palabras clave: enseñanza, lógica, cálculo, TAD, MPR, praxeología

Abstract
In this work, we report partial results from a research that corresponds to the development of a thesis in a Doctorate program in Science Teaching. The study is focused on the problem of teachers' training in mathematics with respect to propositional calculus, and calculus of predicates. As a theoretical reference, the Anthropological Theory of the Didactic is adopted. Preliminary results evidence that the teachers who train student-teachers propose the study of tasks which are not interrelated, and they use a single technique; what leads to the study of rigid and isolated tasks.

Key words: teaching, logic, calculus, ATD, RPM, praxeology

Introducción

La lógica estudia técnicas para establecer si un razonamiento es o no válido; es una herramienta que le permite al ser humano encontrar solución a problemas simples y complejos (Salazar, Del Castillo, 2017). La comunidad educativa ha tomado conciencia de la importancia de que los estudiantes desarrollen el pensamiento lógico. Este hecho constituye un importante avance si se tiene en cuenta que tradicionalmente se consideraba que la misión principal de las instituciones educativas se limitaba a la enseñanza de contenidos curriculares (Panizza, 2005).

El cálculo proposicional (en adelante CP) y el cálculo de predicados (en adelante CDP) son dos ramas de la lógica matemática que se estudian en Colombia en diversos programas universitarios. También se propone el estudio de nociones básicas de lógica en el nivel secundario. En carreras universitarias, es habitual encontrar temas vinculados a CP y a CDP en los contenidos de algunas asignaturas, no solamente en programas de matemáticas sino también en ámbitos como las ingenierías, las ciencias económicas y la formación de profesores, entre otros. Si bien, resulta de suma importancia en la formación de profesionales el estudio de la lógica matemática, son muy pocas las investigaciones dedicadas a su enseñanza y aprendizaje. En particular, algunos investigadores se han ocupado de estudiar el empleo de herramientas informáticas que sirvan de apoyo a los docentes en la enseñanza de la lógica matemática (Huertas, Mor y Guerrero, 2010).

Este trabajo se ubica en la problemática de la formación de profesores en matemática en lógica matemática. La formación de profesores de matemática es una problemática actual de investigación que ha despertado el interés de diversos investigadores (Artaud, Cirade, Jullien, 2011; Azcárate, 2004; Corica y Otero, 2016; Sierra, Bosch y Gascón, 2012, Shulman, 2006), sin embargo, no se han encontrado investigaciones enfocadas a la formación de profesores en CP y en CDP. El propósito central de la investigación que se encuentra en desarrollo es tomar conocimiento de las prácticas de profesores universitarios que orientan temas vinculados al estudio de CP y al CDP, a estudiantes para profesor de matemáticas en una universidad en Colombia. A partir de este estudio, se procura proponer praxeologías superadoras para la enseñanza de la lógica en la formación de profesores de matemática. En este trabajo, se reportan resultados parciales de la investigación, la cual corresponde al desarrollo de una tesis en un programa de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias.

Marco teórico

En este trabajo se adopta como marco teórico a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD) propuesta por Yves Chevallard (1999). El principio fundamental de esta teoría es que el saber matemático se construye como respuesta al estudio de situaciones problemáticas, emergiendo como el producto de un proceso de estudio. La TAD es una poderosa herramienta para describir la actividad docente (Corica y Otero, 2012), dado que es un enfoque que considera como objeto de estudio e investigación didáctica todo el proceso que va desde la creación y la utilización del saber matemático hasta su *transposición* a las instituciones docentes.

El constructo teórico fundamental de la TAD es la noción de *praxeología* u *organización praxeológica.* Una praxeología surge como una respuesta a un conjunto de cuestiones, y a la vez como medio para realizar tareas problemáticas en una institución determinada. Toda praxeología consta de dos componentes inseparables:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que consta de un conjunto de *tareas* que se materializan en diferentes tipos de problemas, y de un conjunto de *técnicas* que se utilizan para llevar a cabo las *tareas* planteadas.
- El nivel del *logos* o del *saber* en el que se sitúan, en un primer nivel, el discurso que describe, explica y justifica la *técnica*, denominada *tecnología*; y en un segundo nivel, la fundamentación de la *tecnología*, denominada *teoría* y que asume respecto a la *tecnología* el mismo papel descriptivo y justificativo que el de la *tecnología* respecto de la *técnica.*

La TAD ubica la actividad matemática dentro de las actividades humanas y las instituciones sociales. Esta teoría distingue entre dos tipos de *praxeologías* estrechamente relacionadas: las Organizaciones Matemáticas (en adelante OM) y las Organizaciones Didácticas (en adelante OD). Las primeras se refieren a la realidad matemática a estudiar, son construidas por la comunidad matemática. Las segundas, se refieren a la manera en que esto ocurre; tratan del proceso de estudio y construcción del conocimiento desde un punto de vista didáctico. Estos dos aspectos son inseparables, debido a que toda OM es generada por un estudio y a la vez, todo proceso de estudio se realiza a partir de una OM en construcción.

Una OD se sitúa en un espacio determinado por seis momentos de estudio. Estos son fases que le permiten al aprendizaje evolucionar y no deben estar necesariamente secuenciados. El *primer momento*, corresponde al primer encuentro con la organización, y puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro ineludible consiste en encontrar la organización mediante al menos uno de los tipos de tareas. El *segundo momento*, es el de la exploración del tipo de tareas, de la elaboración de una técnica acorde al tipo de tareas. El *tercer momento*, se refiere a la construcción del entorno tecnológico-teórico relativo a la técnica; momento que debe constituirse de manera tal que permita justificar y explicar las técnicas elaboradas. El *cuarto momento* corresponde al trabajo de la técnica, y demanda el desarrollo de la técnica. Esta debe mejorarse volviéndose más eficaz y fiable; de ser necesario debe retocarse la tecnología que se ha elaborado. El *quinto momento* corresponde al de la institucionalización, cuya finalidad es precisar lo que es exactamente la organización matemática, distinguiendo los elementos, que, habiendo estado presentes en su construcción, no le han sido integrados finalmente, y por otra parte, los elementos que componen de manera definitiva a la OM. El *sexto momento* corresponde a la evaluación, relacionado estrechamente con el momento de la institucionalización, se refiere a evaluar la calidad de los componentes de la OM construida.

Con el fin de tener herramientas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo la distinción entre diferentes tipos de praxeologías según el grado de complejidad de sus componentes:

- *Organizaciones Puntuales* (OMP): Se generan en la institución por lo que se considera como un único *tipo de tarea* y se define a partir del bloque práctico-técnico.
- *Organizaciones Locales* (OML): Es el resultado de integrar diversas praxeologías *puntuales*. Cada praxeología *local* se caracteriza por una *tecnología* que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías *puntuales* que la integran.
- *Organizaciones Regionales* (OMR): Se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías *locales* a una teoría matemática en común. Esta integración comporta que el discurso teórico tome el papel central.
- *Organizaciones Globales* (OMG): Surgen al agregar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

Se destaca que las praxeologías sean puntuales, locales, regionales o globales, no son únicas en todas las instituciones, son relativas a ellas pues éstas hacen parte de un currículo determinado y se categorizarán según su estructura (Gascón, 2003).

En los últimos desarrollos de la TAD (Chevallard, 2007, 2013, 2017) se propone introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales donde los saberes no sean monumentos que los profesores presentan a sus estudiantes sino herramientas útiles para resolver problemas. Según Chevallard (2007) se necesita una revolución epistemológica y didáctica, para situar las cuestiones problemáticas en el corazón del estudio de las matemáticas. El modelo dominante de la enseñanza de la matemática está gobernado por lo que se conoce como *monumentalización* del saber (Chevallard, 2004), que se caracteriza por ocultar las cuestiones problemáticas que constituyen la razón de ser de la matemática, donde se anteponen las respuestas a las preguntas. Este fenómeno conlleva a enseñar las obras matemáticas como objetos incuestionables, como si fueran monumentos los cuales a lo sumo pueden ser visitados (Llanos, Otero y Gazzola, 2014).

Método

Se propone un estudio cualitativo, de corte descriptivo e interpretativo (Hernández, Fernández, Baptista, 2014). La propuesta se orienta a comprender la práctica de profesores universitarios que orientan temas vinculados al estudio de CP y al CDP en una Universidad en Colombia. Los grupos en los que se desarrolla la investigación corresponden a la formación de estudiantes para profesor de matemática. El estudio se lleva a cabo en dos grupos diferentes de un mismo programa universitario, en los que se orienta la asignatura denominada *elementos de álgebra*. Los grupos son dirigidos por diferentes docentes, en un grupo se encuentran matriculados 20 estudiantes y en el otro 22 (la edad de los estudiantes oscila entre los 17 y 18 años). El curso tiene un tiempo de duración de 4 meses; semanalmente se realizan dos sesiones de clase, cada una de 120 minutos. El diseño curricular de la asignatura está conformado por 6 unidades; la primera se denomina *nociones de lógica proposicional, donde* se abordan nociones relativas al CP y una introducción al CDP.

Con el propósito de llevar a cabo las fases de la investigación que se describen a continuación, se realizaron observaciones no participantes en los grupos durante el estudio de nociones vinculadas al CP y al CDP, y se recolectó la siguiente información: el plan de estudio del curso, los materiales propuestos por los profesores, las versiones en audio de las clases, los registros realizados por el profesor en el pizarrón, los apuntes de clase tomados por los estudiantes, los exámenes y talleres propuestos por los profesores.

En concordancia con el referencial teórico adoptado, la investigación se desarrolla en cuatro fases. La primera de ellas corresponde a la reconstrucción de un Modelo Praxeológico de Referencia (en adelante MPR) relativo al CP y al CDP. Este modelo constituye una herramienta para analizar las organizaciones matemáticas descritas en las restantes fases de la investigación. Este modelo es construido por el investigador a partir de sus conocimientos sobre el tema, los datos recolectados durante la investigación, consultas realizadas a especialistas y revisión bibliográfica especializada sobre el tema.

En la segunda fase de la investigación se propone reconstruir la Organización Matemática a Enseñar (en adelante OME), con base en el plan de estudio del curso y los materiales propuestos por los docentes para el desarrollo de las clases. El análisis de la OME es contrastado con el MPR.

Dado que no siempre la OME coincide con lo efectivamente enseñado a los estudiantes, para analizar este aspecto, como tercera fase de la investigación, se propone la reconstrucción de la Organización Matemática Efectivamente Enseñada (en adelante OMEE). Para esta reconstrucción se requiere de la información recogida en el proceso de observación no participante en cada grupo, durante el estudio de nociones vinculadas a CP y CDP.

En la cuarta y última fase, a partir de la reconstrucción del MPR, la OME, y la OMEE se propone el diseño de un dispositivo didáctico para un estudio funcional del CP y CDP; es decir, se trata de involucrar a los alumnos en el estudio de situaciones que no se limitan a una presentación desarticulada y carente de sentido de las nociones, sino que buscan recuperar la *razón de ser* de la matemática.

Avances

En primer lugar, se ha avanzado en el desarrollo del MPR. La descripción de este modelo se realiza mediante una red de cuestiones y respuestas que tienen estructura praxeológica, constituyendo una importante herramienta didáctica. Su elaboración, en torno a un ámbito particular, conduce a la formulación de preguntas didácticas como: ¿Cuál es el origen? ¿Para qué se estudia? ¿Qué transformaciones ha sufrido? Preguntas como estas cobran importancia si se pretende avanzar en la modificación de los métodos de enseñanza tradicional. Se destaca que el MPR debe ser considerado como una hipótesis provisional, lo cual implica que es susceptible de ser revisado y modificado constantemente (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda y Parra, 2013; Quijano y Corica, 2017). En particular, para esta investigación el MPR gira en torno al CP y al CDP. El CP es aquella rama de la lógica matemática que trata de las relaciones entre proposiciones y conectivos lógicos. El CPD se construye con base al CP, y cuenta con un lenguaje expresivo que permite superar limitaciones de este último.

El MPR se gesta a partir de la cuestión generatriz Q_0: *¿Cómo establecer la validez de un razonamiento*? Y está constituido por dos bloques: el estudio de las relaciones lógicas entre expresiones del CP y la extensión del estudio del CP al CDP. Los dos bloques están asociados a las preguntas Q_1 y Q_2, que se derivan de Q_0. La cuestión generatriz es amplia y en esta investigación se propone dar respuesta desde dos ramas de la lógica matemática como son el CP y el CDP. Esto no implica que se trate de una cuestión que pueda ser respondida inmediatamente. Se considera un interrogante planteado en sentido fuerte, dado que debe ser estudiado en detalle, para lo cual se requiere abordar diversas OM compuestas por tareas, técnicas, definiciones, propiedades y teoremas que describen, explican y justifican el trabajo realizado.

En la figura 1 se muestra el esquema inicial del MPR propuesto. La pregunta asociada al primer bloque es Q_1: *¿Cómo se relacionan las expresiones lógicas del CP?,* que conduce al estudio del tipo de tareas que componen las OM_1 y OM_2. El tipo de tareas que define a OM_1 es T^1*: Determinar relaciones lógicas entre proposiciones y términos de enlace del CP.* Entiéndase por proposición, un enunciado del cual puede afirmarse que es verdadero o falso pero no las dos a la vez; el tipo de tareas que define a OM_2 es T^2*: Determinar relaciones lógicas entre fórmulas del CP.* Son conocidas como fórmulas aquellas expresiones conformadas por letras que representan variables proposicionales, símbolos que representan conectivos y términos de agrupación útiles para evitar ambigüedades. De Q_0 también se deriva Q_2*: ¿Cómo establecer el valor de verdad de una expresión relativa al CDP?,* que es la cuestión asociada al segundo bloque. Q_2 conduce al estudio del tipo de tareas que compone a OM_3 y OM_4. El tipo de tareas que define a OM_3 es T^3*: Establecer el valor de verdad de una fórmula relativa al CDP;* OM_4 está representada por el tipo de tareas T^4*: Representar simbólicamente una expresión relativa al CDP expresada en lenguaje común.* Cada una de las organizaciones matemáticas OM_1, OM_2, OM_3 y OM_4 está compuesta por una red de organizaciones matemáticas puntuales que la describen. Estas no se indican en este trabajo por la extensión que requiere su presentación.

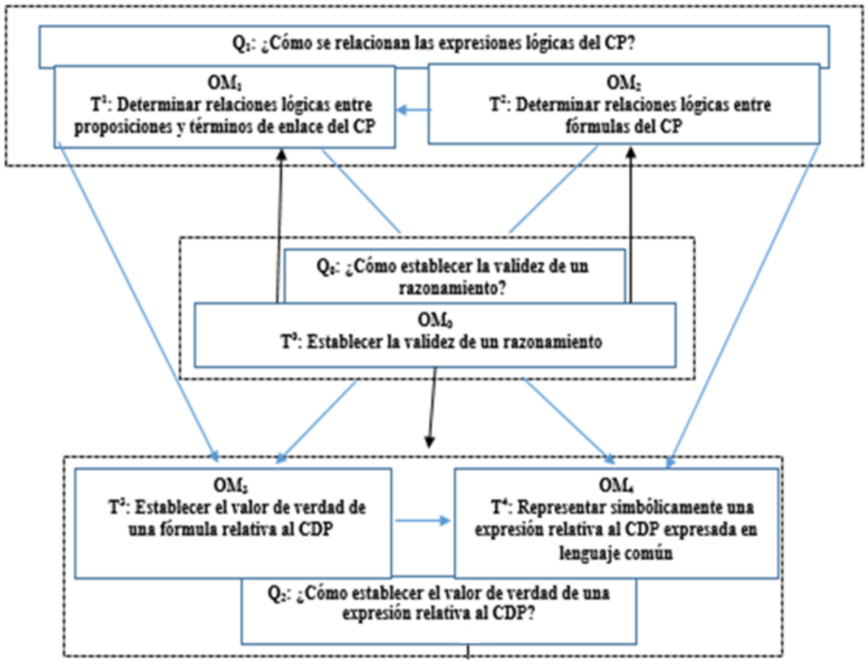


Figura 1. Modelo Praxeológico de Referencia

Otros de los avances de esta investigación lo constituyen la reconstrucción de la OMEE. Para esta reconstrucción se analizaron las clases de los dos cursos, en las que se abordaron nociones relativas a CP y CDP. En particular, se transcribieron todos los audios de cada clase y se los segmentó en episodios. Estos se distinguen como diferentes cuando el discurso gira en torno a una determinada tarea. A su vez, de ser necesario, se los fragmentó en subepisodios y el criterio adoptado para considerar el cambio entre subepisodios fue: cuando se introduce una técnica diferente para abordar un mismo tipo de tarea o se introducen nuevos elementos tecnológicos - teóricos. Con el objetivo de organizar y estudiar los datos obtenidos de cada clase se elaboraron dos tablas.

La primera tabla (Tabla I) permite realizar un análisis en profundidad del proceso de estudio, tal como lo vivieron sus protagonistas. La segunda tabla (Tabla II) es un material con el que se pretende realizar un análisis global del proceso de estudio. La tabla I se conforma de las siguientes categorías:

Episodio	Género de tareas	Tareas	técnicas	Bloque tecnológico	Indicador matemático de completitud de una OML

En la Tabla I se distinguen los *Géneros de tareas* junto a las *tareas* que los componen y que son abordados en el aula. También, en esta tabla se recoge el conjunto de acciones llevadas a cabo en el aula para resolver una cierta tarea (*Técnicas*), los elementos tecnológicos (*Bloque tecnológico*) que aparecieron en la clase en forma explícita y los *indicadores matemáticos de completitud* que permiten establecer el *grado de completitud* de una Organización Matemática Local (OML).

Asimismo, las categorías que componen la tabla se organizan en seis columnas. En la primera de ellas se enumeran los *episodios y los subepisodios*. Los *géneros de tareas* son descritos en la segunda columna. En la tercera columna se indican las *tareas* que componen a los *géneros de tareas,* y *tareas particulares* concernientes a cada *tarea* (identificadas como $T_{c,d}^{a,b}$, donde *a* representa el *episodio*, *b* el *género de tarea*, *c* el *tipo de tarea* y d es una *tarea* *particular*). *E*n la cuarta columna se describen las *técnicas* empleadas para solucionar las *tareas*. Los *elementos tecnológicos (*discursos que describen, explican, justifican las *técnicas* y *tecnologías)* se describen en la quinta columna. En la sexta columna se indican los *indicadores matemáticos de completitud de una OML* que se identifican en el estudio de la tarea respectiva. A continuación, se sintetizan los indicadores, siendo los siete primeros formulados por Fonseca (2004) y el octavo por Lucas (2010):

OML1. Integración de los tipos de tareas y existencia de tareas relativas al cuestionamiento tecnológico.
*OML2***.** Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.
*OML3***.** Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las Técnicas.
*OML4***.** Existencia de tareas y de técnicas "inversas".
*OML5***.** Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas.
*OML6***.** Existencia de tareas matemáticas "abiertas".
*OML7***.** Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica.
*OML8***.** La posibilidad de *perturbar* la situación inicial o modificar la hipótesis del sistema para estudiar casos diferentes permite ampliar y completar el proceso de estudio.

Con la segunda tabla (Tabla II), se pretende realizar un análisis global del proceso de estudio, vinculado con el topos del alumno y el profesor. La tabla está compuesta por las siguientes categorías

<table>
<tr><th rowspan="3">Episodio</th><th rowspan="3">Noción matemática</th><th rowspan="3">Género de tareas</th><th colspan="2">Momento didáctico</th><th colspan="3">Gestos del profesor</th><th colspan="2">Gestos del alumno</th></tr>
<tr><th rowspan="2">MDP</th><th rowspan="2">MDS</th><th colspan="2">GI</th><th rowspan="2">GP</th><th rowspan="2">GA</th><th rowspan="2">GP</th></tr>
<tr><th>ISD</th><th>ISF</th></tr>
</table>

La primera columna, *Episodio* junto a la segunda, *Noción matemática*, y tercera *Género de tareas*, permiten realizar una primera descomposición general del proceso de estudio. En la columna *Noción matemática*, se busca identificar aquellos objetos matemáticos que aparecieron de manera explícita para ser estudiados, tanto en el discurso oral del profesor como de los estudiantes. La cuarta columna, *Momento didáctico,* indica el momento predominante del estudio (MDP) dentro de cada episodio, así como los momentos secundarios (MDS).

En la quinta columna se registran los *Gestos del profesor*. Esta categoría se establece a partir de la idea de que en el desarrollo del proceso didáctico existen ciertas actividades, propias de la práctica docente. Los gestos del profesor pueden ser: *gestos de invitación* (GI) o *gestos de posicionamiento* (GP); los *GI* hacen referencia a estimular a los estudiantes mediante preguntas con el objetivo de que se involucren en el proceso de estudio; el docente puede realizar dos tipos de pregunta: *Invitación en sentido débil* (ISD) o *Invitación en sentido fuerte* (ISF). Los (GP) están relacionados con producir o indicar mediante la escritura, comentarios o preguntas elementos que sirven de *camino* para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión.

En la sexta columna se recogen los *Gestos del alumno*, que emergen como producto de la dinámica del proceso de estudio en el que se encuentran inmersos los estudiantes. Los gestos del estudiante pueden ser: g*estos de aceptación* (GA) relacionados con el número de respuesta de los estudiantes a los gestos de invitación de los profesores; o *gestos de posicionamiento* (GP), que tienen que ver con indicar mediante comentarios, respuestas o formular preguntas portadoras de elementos que sirven de camino para situarse en las maneras de razonar y de hacer que existen en la institución en cuestión.

En este trabajo solamente se describen resultados relacionados con la Tabla I, dado que es en la que más avanzado se encuentra el estudio. A continuación, a modo de ejemplo, se indica uno de los episodios que componen la Tabla I elaborada con la información recogida en uno de los grupos. La tabla completa está compuesta por 25 episodios asociados a los géneros de tareas: *definir, establecer, construir, representar, inferir y demostrar*, de los cuales el más típico es *definir*. En la figura 2 se indica el episodio número 17 que forma parte de la Tabla I. El género de tareas al que corresponde es *definir*.

Episodio	Género de tareas	Tareas	Técnicas	Bloque tecnológico	Indicador matemático de completitud
17	Construir	$T_3^{17,3}$: Construir la tabla de verdad de una fórmula. $T_{3,1}^{17,3}$: Construir la tabla de verdad de la siguiente fórmula: $[(p \wedge q) \rightarrow r)] \rightarrow \sim r$	- Identificar las variables proposicionales, los conectivos y los signos de agrupación que conforman la fórmula. -Asociar a cada una de las n variables proposicionales una columna conformada por 2^n valores de verdad. -Utilizando la tabla de verdad de los conectivos, elaborar la tabla de verdad considerando los signos de agrupación y/o la jerarquía de los conectivos. - Determinar la tabla de verdad de la fórmula.	θ_1 **Definición**: una proposición es una oración o un enunciado de la cual puede afirmarse que es varadera o falsa pero no las dos a la vez. θ_2 **Definición**: una proposición es atómica si no puede ser descompuesta en proposiciones más simples. θ_3 **Definición**: una proposición es molecular si se puede descomponer en proposiciones más simples, y en ella interviene un término de enlace o conectivo lógico *y, o, entonces* o *si y solo si*. **Tabla de verdad** de cada uno de los conectivos: $\wedge : VV \longmapsto V$, $VF \longmapsto F$, $FV \longmapsto F$, $FF \longmapsto F$ $\vee : VV \longmapsto V$, $VF \longmapsto V$, $FV \longmapsto V$, $FF \longmapsto F$ $\rightarrow : VV \longmapsto V$, $VF \longmapsto F$, $FV \longmapsto V$, $FF \longmapsto V$ $\leftrightarrow : VV \longmapsto V$, $VF \longmapsto F$, $FV \longmapsto V$, $FF \longmapsto V$ $\mathrm{p} \longmapsto V$ $\sim\mathrm{p} \longmapsto F$	OML1

Figura 2. Episodio 17 tabla I análisis datos

Se destaca que, al analizar los datos consignados en la Tabla I, tomando como referente los ocho *indicadores matemáticos de completitud de una OML,* se puede establecer que la mayor parte de las tareas propuestas por los docentes son rígidas y no se establecen relaciones entre estas; asimismo, son muy escasas tanto las tareas abiertas como las inversas. También se destaca que los elementos tecnológicos que se utilizaron no han permitido construir nuevas técnicas y nuevas tareas.

■ Conclusiones

Resultados preliminares de este estudio indican que la mayoría de las tareas propuestas por los docentes se caracterizan por ser rígidas y desarticuladas entre sí. Las tareas abiertas y las tareas inversas son prácticamente inexistentes. Asimismo, los elementos tecnológicos utilizados no permitieron construir nuevas técnicas ni nuevas tareas.

Después de analizar la totalidad de los datos, se caracterizará la OMEE, que luego se comparará con el MPR y la OME. Posteriormente, se diseñará un dispositivo didáctico para el estudio de CP y CDP que permita superar las dificultades detectadas, y con el fin de favorecer un estudio funcional de la matemática en la formación de profesores.

Referencias bibliográficas

Artaud, M. ; Cirade, G.; Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. En : BOSCH, M. et al. (Eds.). *Un panorama de la TAD (769-794).* Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Coord.), *Actas del Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). A Coruña: Universidade da Coruña.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. Recherches en didactique des mathématiques.* 19(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Les trois principes structurants des PER*. Recuperado el 09 de noviembre de 2016 de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.* L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, y F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico, 705-746. Recuperado el 09 de noviembre de 2016 de http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2013). *Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana*: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT*, 2(2), 161-182. doi: http: //dx.doi.org/1 0.4471 /redimat.201 3.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, 20 (1), 159–169.

Corica, A., Otero, M. (2012). Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un curso universitario de cálculo. *BOLEMA*. 26(42B), 459-482.

Corica, A.; Otero, M. (2016). Diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática: una propuesta desde la TAD. *Boletim de Educaçáo Matemática*. 30(55), 763-785.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.

Gascón, J., (2003). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*. (I) 44, 25-34.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista. P. (2014). Metodología de la Investigación*.* 6° edición. *Mc Graw-Hill Interamericana Editores*: Ciudad de México.

Huertas, M., Mor, E. y Guerrero, A. (2010). Herramienta de apoyo para el aprendizaje a distancia de la lógica en ingeniería informática. *Revista de educación a distancia.* Número especial, 1 -10.

Llano, V. C., Otero, M, R. & Gazzola, M. P. (2014). Las funciones racionales en el marco de un recorrido de estudio y de investigación: el estudio de las asíntotas usando GeoGebra como soporte. *Congreso Iberoamericano de Ciencia Tecnología, Innovación y Educación* (artículo 1251). Buenos Aires.

Oliveira, C. (2010). *Organizaciones matemáticas locales relativamente completas*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Vigo. España.

Otero, M. R., Fanaro, M. A., Corica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P. & Parra, V. (Ed). (2013). *La Teoría Antropológico de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Editorial DUNKEN.

Quijano, M., Corica, A. (2017). Desarrollo de un modelo praxeológico de referencia en torno a lugares geométricos. REDIMAT, 6(2), 192 - 220.

Salazar, R., Del Castillo, R. (2017). Percepción del estudiantado sobre la asignatura de Lógica Matemática. Caso de estudio, Universidad Central del Ecuador. *Revista publicando.* 4(11), pp. 380-387.

Shulman, L. (2006). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 9(2), 1 -30.

Sierra, T., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). La formación matemática – didáctica del maestro de Educación Infantil: el caso de "cómo enseñar a contar". *Revista de Educación.* 357, 231-256.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ENTRE LO SONORO, LO NUMÉRICO Y LO ALGEBRAICO: UNA EXPLORACIÓN CON GEOGEBRA

AMONG THE SOUND, THE NUMERICAL AND THE ALGEBRAIC: AN EXPLORATION WITH GEOGEBRA

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando, Noelia Londoño Millán, José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila, México
amaranta.jimenez@hotmail.com, noelialondono@uadec.edu.mx, david.zaldivar@uadec.edu.mx

Resumen
El desarrollo del pensamiento algebraico juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas y las representaciones semióticas contribuyen en alto a grado a que este se logre. El objetivo que se persiguió en esta investigación fue relacionar dos áreas del conocimiento (el álgebra y la música), estudiando de manera conjunta las variables algebraicas que están contenidas en una onda sonora. El estudio se realizó con alumnos de dos carreras universitarias, se diseñó una hoja de trabajo y un archivo en el software GeoGebra, para que el alumno pudiera manipular las cantidades físicas involucradas en la onda sinusoidal. Del estudio se pudo identificar que las áreas débiles de los estudiantes de música fueron las algebraicas, mientras que la debilidad de los estudiantes de matemáticas estuvo en identificar la *altura del sonido*

Palabras clave: numérico, algebraico, onda sonora, GeoGebra.

Abstract
The development of algebraic thinking plays a fundamental role in the teaching of mathematics, and semiotic representations contribute to a great extent to achieve it. The aim pursued in this research was to link two areas of knowledge (algebra and music), conjointly studying algebraic variables that are contained in a sound wave. The study was conducted with students of two different majors. It was possible to identify that the weak areas of music students were the algebraic ones, while the weakness of mathematics students was in identifying the height of the sound.

Key words: numerical, algebraic, sound wave, GeoGebra.

Introducción

Cuando de estudiar el cambio se trata, nada mejor que hacer uso de la rama de la matemática denominada algebra, esta se constituye en una parte fundamental del conocimiento que deben tener todos los individuos y cualquier intento por insertar contextos cercanos durante su enseñanza será un buen pretexto para llamar la atención del estudiante.

Una tarea del docente es diseñar actividades que inciten al alumno a reconocer el cambio, analizar situaciones, identificar patrones, simbolizar con el uso de distintos registros de representación, Duval (2000). En ese sentido conviene hacernos la siguiente pregunta: es posible ¿resignificar el concepto de onda sinusoidal y sus variables utilizando la tecnología computacional?

Para el desarrollo del estudio fue preciso considerar por un lado los elementos teóricos que se encuentran presentes en las ondas mecánicas, en particular las ondas sonoras, las variables que intervienen y por otro, los elementos de la matemática educativa que fundamentan la investigación.

Marco teórico musical

Fueron los griegos, en especial los pitagóricos los que comenzaron a hacer física musical al estudiar las longitudes de las cuerdas al vibrar y su relación con la *altura* de las notas que éstas producían. El binomio física-música siempre ha estado apoyado por las matemáticas (De la Herrán, 2007).

Las notas musicales, como cualquier sonido o ruido se propagan en el aire a unos 330 metros por segundo o 1200 km/h aproximadamente (dependiendo de la densidad del aire, la humedad, temperatura entre otros factores) en forma de ondas longitudinales, esto es, ondas alternadas de compresión y expansión. El sonido es una onda mecánica, lo cual quiere decir que necesita un medio para propagarse, ver figura 1.

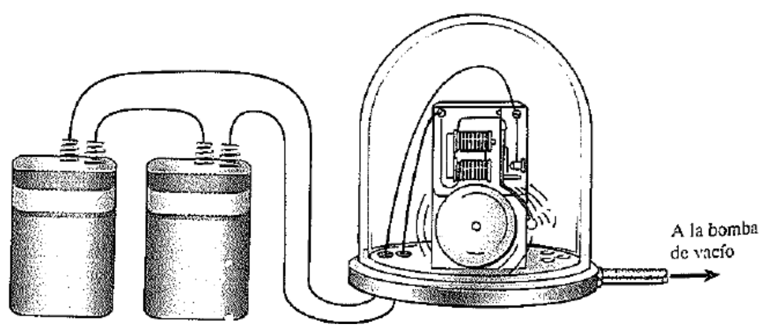


Figura1. En el vacío no se puede escuchar un timbre. Se necesita un medio material para la producción del sonido. Tomado de Tippens (1992).

Las características físicas de las notas musicales son: *frecuencia* o altura (que tan aguda o grave es el sonido); *intensidad* o volumen (se mide en decibeles) y *timbre* o forma de la onda, es esta cualidad la que permite diferenciar entre el sonido de una flauta y la de un violín.

La ecuación de la onda sinusoidal es la siguiente:

$$y(t) = Asen(\omega t + \varphi)$$

En esta ecuación trigonométrica intervienen variables como la amplitud A, la velocidad angular ω y la fase φ. Cuando se estudia esta ecuación no se asocia a ningún contexto particular y menos a la música.

El sonido emite perturbaciones que se identifican como propiedades físicas, pero en lo cotidiano las ondas audibles se relacionan de manera subjetiva con efectos sensoriales, para estar en el mismo canal los físicos han considerado pertinente diferenciarlos como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Relación entre los efectos sensoriales y las propiedades físicas de una onda audible. (Tippens, 1992).

Efectos sensoriales	Propiedad física
Fuerza (volumen)	Intensidad
Tono	Frecuencia
Timbre (calidad)	Forma de la onda

Referentes teóricos de la matemática educativa

Por si mismos los objetos matemáticos son intangibles, por lo cual se hace necesario usar distintas herramientas para acceder a ellos. Desde el punto de vista de Duval (1999) citado por Azcárate y Camacho (2003) al comparar las herramientas con las que cuenta las matemáticas frente a otras áreas como la biología, física etc. exponen:

> Los objetos matemáticos no son objetos reales, como pueden ser los propios de la biología y la física que pueden ser manipulables. De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría (Azcárate y Camacho, 2003, p.44).

En la enseñanza de las matemáticas es frecuente que se privilegie un registro de representación semiótico más que otros, bien sea porque se desconocen los demás, o porque algunos son más accesibles. También sucede que la mayor preocupación en muchos casos es concluir un programa prediseñado, y resulta más fácil, tratar de enseñar únicamente representaciones mentales. Lográndose con esto que se confunda el objeto que se quiere enseñar con su representación.

La relación de la matemática con otras ciencias como la música, puede ser un poderoso recurso pedagógico a la hora de comprender conceptos que generalmente se ven aislados, estas relaciones que emocionan y engrandecen a los docentes y estudiantes, ávidos de nuevas visiones de la matemática (Rodríguez, 2011). Entre más registros de representación se tengan sobre un concepto, este podrá ser asimilado de mejor manera.

En la propuesta que se presenta a continuación tiene como objetivos:

- Que el estudiante reconozca en primer lugar las variables físicas que componen una onda sinusoidal, la amplitud A, la cual está relacionada de manera directa con la intensidad del sonido, y en la parte gráfica está relacionada con el valor de los máximos y los mínimos de la onda.
- También se espera que el estudiante comprenda la relación entre la velocidad angular ω y la frecuencia *f;*
- Hallar la relación de la frecuencia con la altura del sonido, y con en número de crestas que se encuentran en la gráfica.

- También el estudiante deberá encontrar la relación entre el periodo T y la frecuencia f. En relación con la fase φ, él debe elegir un intervalo para el cual los valores la onda se encuentra en fase, y que logre relacionarlos con el número π.
- Así mismo se esperaba que los alumnos lograran descubrir que la fase no está relacionada con el sonido que se escucha.

Metodología

Por lo expuesto anteriormente deja claro que existe una relación directa entre algunos elementos de diferentes áreas del conocimiento como son la música, las matemáticas y la física, y es precisamente lo que perseguimos al diseñar y aplicar la actividad.

Diseño

Para llevar a cabo este proyecto se construyó inicialmente un archivo electrónico interactivo usando el software de GeoGebra®, con elementos de la ecuación sinusoidal, como se muestra en la figura 2. Cada alumno pudo manipular las variables presentes en una onda sinusoidal, como son la amplitud, la fase y la frecuencia, además de poder establecer mediante la visualización numérica las relaciones entre la *frecuencia* y el *periodo*, también la velocidad angular y la frecuencia. Como valor agregado se usó GeoGebra para reproducir sonidos, por lo que cada alumno debía tener audífonos para poder realizar la actividad y esta variable estuvo asociada también a la representación gráfica.

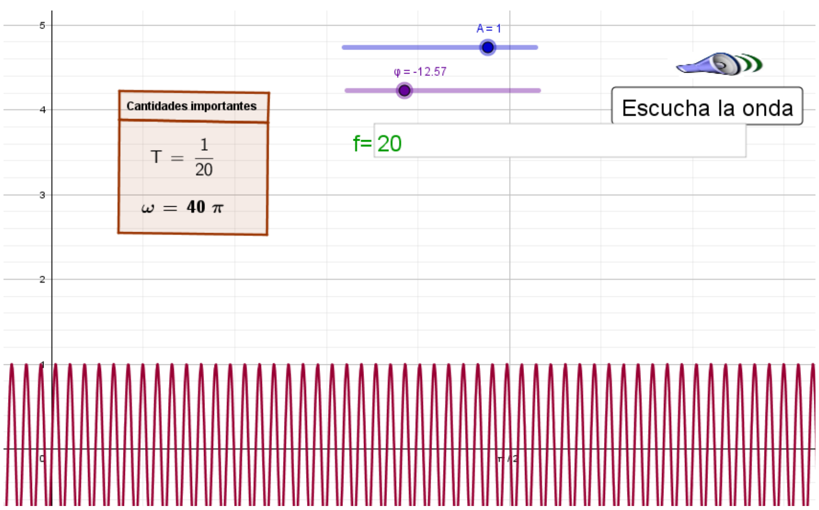
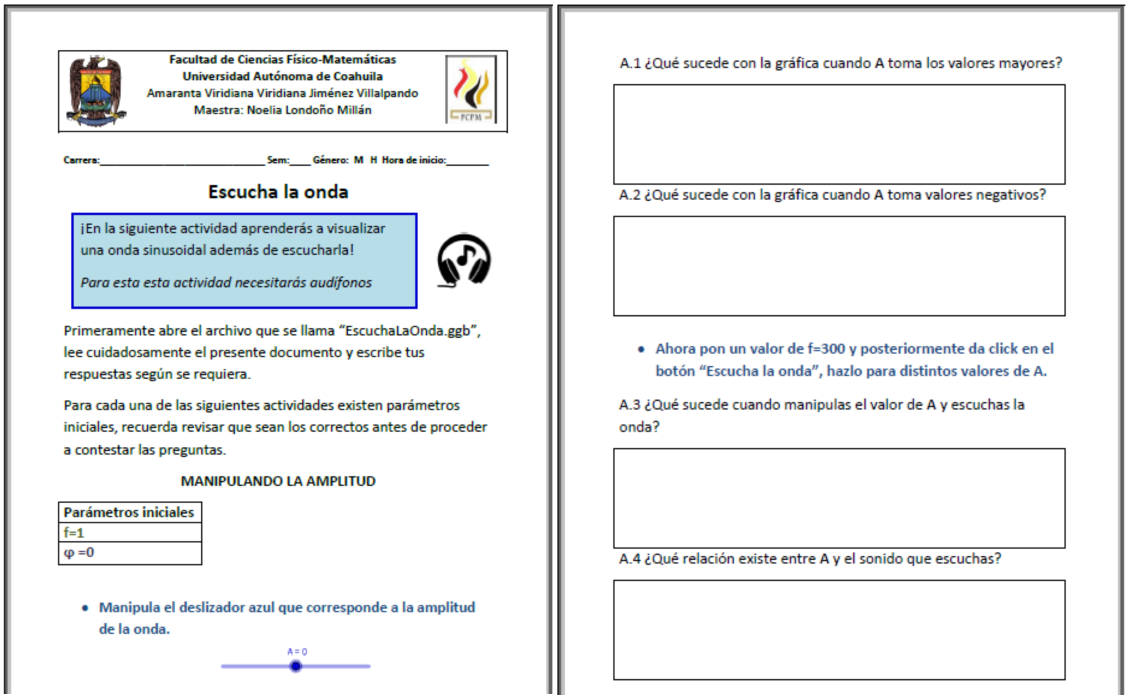


Figura 2. Imagen tomada del archivo dinámico diseñado en GeoGebra

También durante la interacción con el archivo de GeoGebra cada alumno utilizó una *hoja de trabajo* (véase figura 3), con las variables contempladas separadamente. Esta contuvo instrucciones para la manipulación y permitía recabar información respecto a seis variables que se analizan. La hoja de trabajo tiene como propósito también en proporcionar al estudiante una guía en el proceso de manipulación del archivo de GeoGebra, así como recabar las respuestas de los estudiantes.



Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Autónoma de Coahuila
Amaranta Viridiana Viridiana Jiménez Villalpando
Maestra: Noelia Londoño Millán

Carrera:________________________ Sem:____ Género: M H Hora de inicio:_______

Escucha la onda

¡En la siguiente actividad aprenderás a visualizar una onda sinusoidal además de escucharla!

Para esta esta actividad necesitarás audífonos

Primeramente abre el archivo que se llama "EscuchaLaOnda.ggb", lee cuidadosamente el presente documento y escribe tus respuestas según se requiera.

Para cada una de las siguientes actividades existen parámetros iniciales, recuerda revisar que sean los correctos antes de proceder a contestar las preguntas.

MANIPULANDO LA AMPLITUD

Parámetros iniciales
f=1
φ =0

- **Manipula el deslizador azul que corresponde a la amplitud de la onda.**

A = 0

A.1 ¿Qué sucede con la gráfica cuando A toma los valores mayores?

A.2 ¿Qué sucede con la gráfica cuando A toma valores negativos?

- **Ahora pon un valor de f=300 y posteriormente da click en el botón "Escucha la onda", hazlo para distintos valores de A.**

A.3 ¿Qué sucede cuando manipulas el valor de A y escuchas la onda?

A.4 ¿Qué relación existe entre A y el sonido que escuchas?

Figura 3. Fragmentos de la *hoja de trabajo*

En la primera parte los alumnos debían de manipular la amplitud de la onda en el archivo de GeoGebra por medio de un deslizador, con la finalidad de que se dieran cuenta que la amplitud está relacionada con la intensidad del sonido.

En la segunda parte los estudiantes realizan la manipulación de la fase mediante un deslizador y se pretendía que se dieran cuenta que la modificación de la fase no tiene una relación con la producción sonora, sino que tiene una consecuencia de índole visual, ya que desplaza la onda, (esto se puede visualizar en la gráfica).

En la tercera parte se le pidió al estudiante que ingresara distintos valores correspondientes a la frecuencia, esto para que asociara a la frecuencia con la altura del sonido.

Como actividad final complementaria cada alumno debía responder un conjunto de preguntas, las cuales fueron construidas con la finalidad que lograra integrar las variables y el concepto de onda sinusoidal, es decir, que el estudiante diera un significado en términos de cantidades físicas reales a las cantidades que integran la onda sinusoidal.

Población y entorno

En la investigación participaron estudiantes universitarios diferenciados así: 23 estudiantes del primer semestre de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas (LMA), de la Universidad Autónoma de Coahuila, y cinco estudiantes de la licenciatura en Música (LM), de la misma universidad, esto con el fin de observar y comparar cómo es que asocian los parámetros físicos a su correspondiente expresión algebraica. Cabe señalar que los alumnos ya conocían el software GeoGebra por lo que no fue necesario, enseñarlo con anticipación. Los alumnos de la LMA resolvieron la actividad en un laboratorio de cómputo y los alumnos de la LM la resolvieron usando computadoras portátiles.

El tiempo promedio en realizar la actividad fue de 25 minutos, y las edades de los alumnos están entre los 17 y 31 años. El tiempo promedio en realizar la actividad fue de 43 minutos.
Para el análisis, los datos se agruparon en seis categorías (Álvarez-Gayou, 2003). La *hoja de trabajo* fue seccionada en tópicos más generales, conformadas por doce preguntas que se hicieron a cada estudiante. Aunque se tomaron los tiempos en que fueron desarrolladas las actividades, esta variable no se contempló en el análisis, aunque los músicos tardaron casi la mitad del tiempo, las condiciones en el aula no fueron las mismas, ya que a todos los alumnos de matemáticas se les aplicó la actividad a todos a la vez, es decir, en el mismo horario y lugar, mientras que los músicos la realizaron de manera individual.

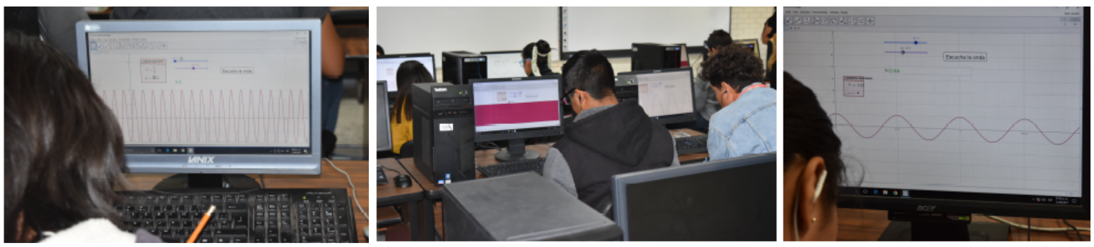


Figura 4. Estudiantes de matemáticas realizando la actividad

Resultados y discusión

En la figura 5 se presentan gráficamente los resultados obtenidos en las dos muestras que participaron en el estudio, categorizados en los seis tópicos estudiados (aparecen a la izquierda de la gráfica).

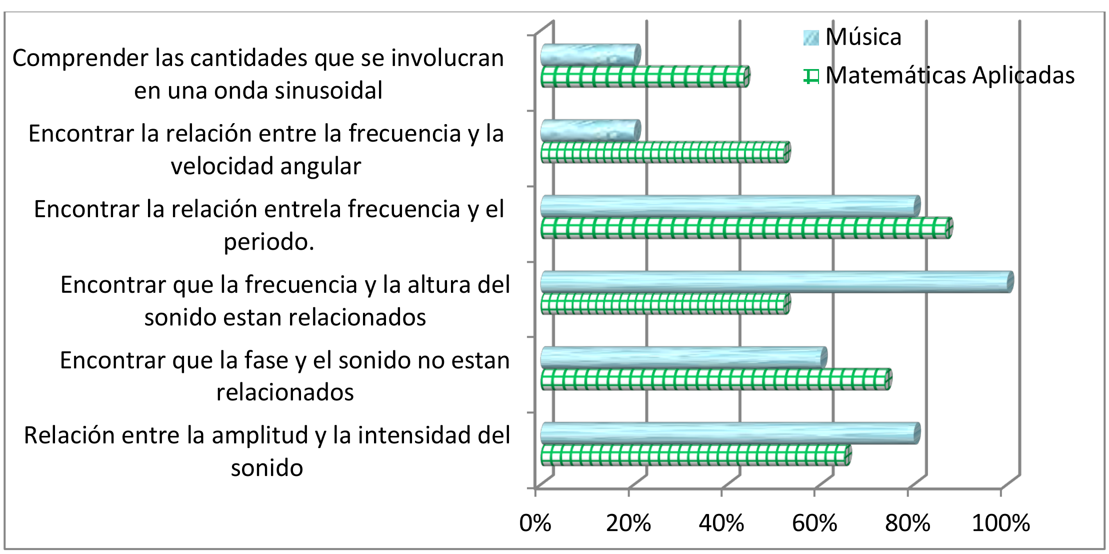


Figura 5. Resultados generales en porcentajes, de alumnos de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas y alumnos de licenciatura en música

En términos generales se puede entresacar lo siguiente:

El 65% de los estudiantes de matemáticas encontró una relación entre la *amplitud* de onda sinusoidal y la *intensidad* del sonido, mientras que el 80% de los estudiantes de música encontró la misma relación, esta diferencia puede deberse a la constante utilización de la intensidad de sonido por parte de los músicos, al interpretar de manera recurrente matices variados.

El 74% de los estudiantes de matemáticas encontró la independencia de la fase respecto al sonido, mientras que el 60% de los estudiantes de música encontró la misma relación, la manipulación de los *registros gráficos*, por parte de los estudiantes de matemáticas salió a relucir.

Un resultado que resalta en esta actividad es que el 100% de los estudiantes de música tenía clara la relación entre la *frecuencia* y la *altura del sonido*, mientras que solo el 52% de los estudiantes de matemáticas encontró la relación. Cabe recalcar que algunos estudiantes de música ya conocían su rango de frecuencias audibles antes de realizar la actividad, lo cual les facilitó el proceso de resolución.

En la penúltima sección, presentamos cuestiones algebraicas, para encontrar la relación entre la frecuencia y el periodo así como la relación entre la velocidad angular y la frecuencia; en el archivo de GeoGebra® se presentaron dos recuadros, uno con el título "Cantidades importantes", y otro identificado con la "f =" en color verde, para que el alumno ingresara el número que quisiera, con la finalidad de que observara y comparara cómo es que se modificaban simultáneamente los valores del periodo y la velocidad angular, invitándolo a que encontrara una relación o fórmula matemática (véase Figura 6).

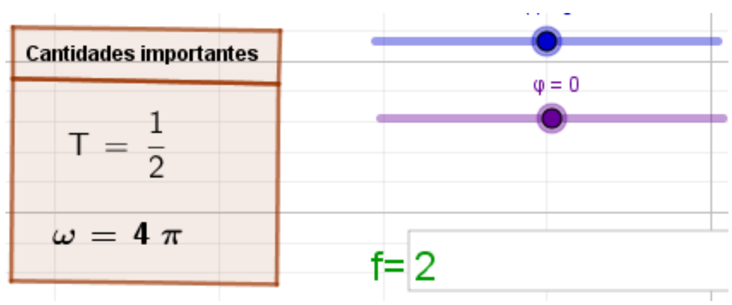


Figura 6. "Cantidades importantes" imagen obtenida del archivo construido con GeoGebra.

En la actividad donde la tarea era encontrar relaciones entre las variables los estudiantes de matemáticas tuvieron una ventaja mayor ya que, el 87% de ellos encontraron la relación $T=1/f$, frente al 80% de los estudiantes de Música. El porcentaje estudiantes que encontraron la relación entre la frecuencia y la velocidad angular, cambió de manera significativa, el 52% de los estudiantes de matemáticas encontraron la relación $\omega = 2\pi f$ mientras que solo el 20% de los estudiantes de Música lo logró. Cabe mencionar que muchos estudiantes asumían que ω era el doble de la frecuencia y se olvidaban por completo de π. Como se muestra en ls figura 7.

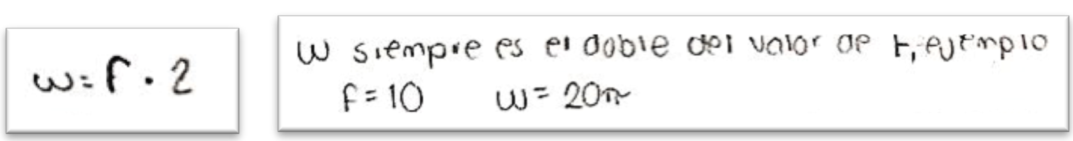


Figura 7. Errores comunes al encontrar la relación entre ω y *f*.
(izquierda, olvido π, derecha, ejemplo bien escrito, pero mal redactada la relación).

El propósito de la última actividad fue introducir la ecuación de la onda sinusoidal de forma completa ($y(t) = Asen(\omega t + \varphi)$) ya que en ella están todos los elementos que el alumno había manipulado en las actividades anteriores y debía escribir un resumen de lo aprendido con la actividad, asociando esos elementos. A algunos estudiantes les asustó ver esa ecuación, sobre todo estudiantes de música, de los cuales solo el 20% pudo hacer el resumen, contra un 44% de estudiantes de Matemáticas.

Fue notoria la falta de comprensión lectora por parte de los estudiantes, los cuales empezaban por tratar de escuchar la onda, sin leer las indicaciones de la hoja de trabajo, pensando en esto y muy a propósito se dieron unas condiciones iniciales que imposibilitaban la audición de la onda.

Algunos estudiantes tenían bien todas las actividades, pero no fueron capaces de realizar un resumen o de asociarle una magnitud física a la ecuación de la onda. Pudimos percibir que las áreas débiles de los estudiantes de música fueron las algebraicas, y las áreas débiles de los estudiantes de matemáticas fueron las relacionadas con la altura del sonido.

Conclusiones

Al comparar los resultados obtenidos entre alumnos de matemáticas y alumnos de música referente respecto a las variables de la onda sonora resaltan que los de música tuvieron mejor desempeño a la hora de obtener la relación entre la *altura del sonido* y la *frecuencia*.
Respecto a la *amplitud* de la onda puede decirse que la mayoría de los participantes en el estudio pudieron establecer su relación con la *intensidad* del sonido.

Coincidieron en las dos carreras en establecer la relación que existe entre la *frecuencia* y el *periodo*, cabe señalar que algunos estudiantes de música ya conocían su rango de frecuencias audibles antes de realizar la actividad, lo cual les dio una ventaja en el desarrollo de la actividad.

Se hallaron dificultades para asociar la *frecuencia* con la *velocidad angular* en ambas carreras al igual que en la integración de las variables con su forma algebraica.

La interacción de los alumnos con los diferentes registros de representación le permitió explorar y relacionar las características físicas y sensoriales de una onda sonora, aunque encontrar de manera completa la ecuación de la onda sinusoidal les significó gran dificultad.
El diseñó de los materiales (hoja de trabajo y archivo electrónico en GeoGebra) y su aplicación posibilitó la interacción de los alumnos con variables musicales, físicas y matemáticas en la misma actividad.

Puede decirse que en general todos los estudiantes participantes en el estudio, independientemente de la carrera pudo relacionar apropiadamente la *frecuencia* y el *periodo*, o la *amplitud* y la *intensidad del sonido*, mientras que se pudo evidenciar las habilidades matemáticas y musicales presentes en los alumnos de las diferentes carreras, particularmente al indagar sobre la relación entre la *frecuencia* y la *altura del sonido*. Así mismo tuvieron dificultad para realizar una síntesis de los conocimientos adquiridos.

A través del desarrollo de la investigación pudo entrelazarse de manera simultánea los registros de representación gráfico, numérico, algebraico con el sonido. Esto representa en sí una oportunidad para estudiar variables de diversos contextos.

El estudio permitió que los alumnos visualizaran el cambio de variables de una onda sonora en diversos registros de representación (algebraico, gráfico, numérico y sonoro). Del estudio se pudo identificar que las áreas débiles de los estudiantes de música fueron las algebraicas, mientras que la debilidad de los estudiantes de matemáticas estuvo en identificar la *altura del sonido*.

Aunque en la literatura no es reconocido como tal, estamos convencidos que el sonido debería formar parte de un nuevo registro de representación. Puesto que cumple las características de *identificable*, *conversión* y *tratamiento*.

Si alguien estuviera interesado en realizar una réplica del mismo estudio, los autores sugerimos hacer un rediseñado, a la *hoja de trabajo*, para mejorar la redacción, más no el contenido. Así mismo pudiera no solo incluir alumnos de música y matemáticas sino explorar tanto los aspectos algebraicos como musicales con alumnos de carreras de física (licenciatura en física, ingeniería física, ciencias físicas, etc.)

Referencias bibliográficas

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Como hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología*. Colección Paidós Educador. México: Paidos.

Azcárate y Camacho, (2003). *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2. Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

De la Herrán, J. (2007). *Física y música*. México: Conaculta dirección de publicaciones y ADN.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Jeans. J. (1976). Matemáticas de la música. *Sigma el mundo de las matemáticas* 6, 214–244. México: Ediciones Grijalbo.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Council.

Rodríguez, M. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números*. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77:35.

Sears, S. (2009). *Física Universitaria*. México: Pearson Education.

Tippens, P. (1992). *Física conceptos y aplicaciones*. D.F.: McGraw- Hill.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA SOBRE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

TEACHING EXPERIENCES ON PROBABILITY AND STATISTICS

Liliana Mabel Tauber, Hugo Alvarado Martínez, Lucía Zapata-Cardona, Jesús E. Pinto Sosa, Armando Albert Huerta
Universidad Nacional del Litoral, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad de Antioquia, Universidad Autónoma de Yucatán, Instituto Tecnológico de Monterrey (Argentina, Chile, Colombia, México) estadisticamatematicafhuc@gmail.com, alvaradomartinez@ucsc.cl, luzapata@ayura.udea.edu.co, psosa@correo.uady.mx, albert@itesm.mx

Resumen
La Red Latinoamericana de Investigación en Educación Estadística (RELIEE) pretende compartir el esfuerzo de docentes, académicos e investigadores sobre formas distintas de abordar la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y Estadística. El artículo busca dar a conocer estas experiencias, los fundamentos teóricos que les subyacen, sus características, así como los resultados, alcances y limitaciones detectados a partir de su implementación. Se comparten propuestas y experiencias de implementación en cuatro países latinoamericanos, lo que permite contar con diferentes alternativas y maneras de enseñar la Probabilidad y Estadística.

Palabras clave: formación de profesores, educación estadística, estadística, probabilidad, currículo

Abstract
The Latin American Research Network on Statistical Education (RELIEE) aims to share the efforts of teachers, scholars and researchers on different ways of approaching the teaching and learning of Probability and Statistics. The paper seeks to make known these experiences, the theoretical foundations that underlie them, their characteristics, as well as the results, scope and constraints detected from their implementation. Proposals and experiences are shared from four Latin American countries, what allows having different alternatives and ways to teach Probability and Statistics.

Key words: teacher education, statistics education, statistics, probability, curriculum

Introducción

Este artículo busca compartir el esfuerzo de docentes, académicos e investigadores sobre formas distintas de abordar la enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad y Estadística. A lo largo de los años, la experiencia en la práctica docente y la investigación en educación estadística dan cuenta que no existe una única manera de abordar la enseñanza. La finalidad de este documento es mostrar estas experiencias, los fundamentos teóricos que las subyacen, sus características, así como los resultados, alcances y limitaciones obtenidos a partir de su implementación.

Específicamente se dan a conocer cinco experiencias o prácticas didácticas que llevan a cabo docentes-investigadores de cuatro países latinoamericanos: Chile, Argentina, Colombia y México, con el deseo que otros docentes conozcan diferentes alternativas o formas para abordar la enseñanza de la Probabilidad y Estadística, cómo es posible implementar determinadas estrategias provenientes de la investigación en educación estadística y por consiguiente, favorecer a la mejora de la práctica docente.

Desarrollo de las intuiciones probabilísticas (*Chile*)

A nivel universitario, las Escuelas de Ingeniería en Chile están presentando nuevos modelos educativos basados en competencias; destacando el rol activo del estudiante, la utilización de recursos informáticos y de plataformas virtuales de aprendizaje en la docencia, la reflexión sobre la retroalimentación oportuna durante el proceso de la evaluación de los resultados de aprendizaje y la preparación del profesorado en metodologías de enseñanza actualizada (Alvarado, Galindo y Retamal, 2018). Sin embargo, un grupo no menor de estudiantes llegan a la universidad sin haber tenido la oportunidad de desarrollar habilidades, análisis crítico y actitudes hacia el azar y las probabilidades que les permitan fortalecer su formación como ciudadanos con sentido probabilístico. En general, los estudiantes de ingeniería no han sido confrontados con una enseñanza de la Probabilidad que valore e integre creativamente las intuiciones probabilísticas (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018).

Por otro lado, se reconoce que los profesores requieren una comprensión profunda de la probabilidad a enseñar en la escuela. Así, también requiere tener presente los posibles problemas contingentes en el aula sobre las dificultades de aprendizaje y errores de los estudiantes en tareas de resolución de problemas de probabilidad. Aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista, siendo casi inexistente la investigación sobre el significado intuitivo de la probabilidad (Alvarado, Estrella, Retamal y Galindo, 2018). El reconocido carácter multifacético de la probabilidad ha llevado a que algunos investigadores aconsejen que, para el aprendizaje de este tema, los sujetos deben tener la oportunidad de variadas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de la probabilidad, a saber, intuitivo, frecuencial, clásico, subjetivo y axiomático (Batanero, Henry y Parzysz, 2005).

Por tal motivo, la experiencia didáctica se centró en explorar ¿cómo los estudiantes de ingeniería asignan valores a situaciones de incertidumbre desde sus intuiciones probabilísticas previo a un curso de estadística? y ¿qué argumentos utilizan respecto a sus intuiciones y heurísticas sobre probabilidad después de un curso de estadística? Se evaluaron las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en 257 estudiantes de ingeniería mediante un cuestionario de ocho ítems cerrados, antes de un curso de estadística; y se analizaron los argumentos y sesgos de razonamiento por medio de un ítem abierto, después de desarrollar la unidad de probabilidad del curso de estadística universitario.

La secuencia de aprendizaje incluía las unidades de probabilidad de sucesos y las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas, la que se realizó durante cinco semanas, integrando los significados de la probabilidad. En las primeras sesiones los estudiantes estimaban en forma escrita situaciones de incertidumbre bajo condiciones y de variabilidad del muestreo, para reconocer y comunicar la propia intuición, y luego comparar el razonamiento probabilístico con sus ideas intuitivas. Las sesiones abarcaban actividades de resolución de problemas de la vida cotidiana y de la ingeniería, abordando en lo posible los significados de la probabilidad (intuitiva, laplaciana, frecuentista, y axiomática), y las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias. La planificación consideró situaciones cotidianas y manipulación de generadores aleatorios típicos, uso de simulación con recursos tecnológicos, cociente de casos favorables y posibles en espacios muestrales equiprobables, teoría de conjuntos y teoría de la medida.

El resultado de la experiencia permitió incorporar prácticas que vinculen lo intuitivo y lo formal en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad de la escuela a la universidad. Es conveniente incluir en la enseñanza los distintos significados de la probabilidad y confrontar algunas de las heurísticas para promover gradual y progresivamente el razonamiento intuitivo hacia el razonamiento axiomático con comprensión, y desarrollar un pensamiento probabilístico útil al ciudadano.

■ Construcción del Sentido Estadístico en estudiantes *(Argentina)*

La enseñanza de la Estadística en carreras no matemáticas genera grandes desafíos a la hora de elaborar una propuesta de enseñanza. Diversos autores proponen ideas para introducir contenidos que sean significativos para los estudiantes de estas carreras (Behar y Grima, 2014). Si bien el desarrollo del *Sentido Estadístico* debería darse de modo progresivo a lo largo de los distintos niveles educativos, en Argentina, los estudiantes llegan a la Universidad con escasa o nula formación en lo que a razonamiento y pensamiento estadístico se refiere (Tauber, Santellán y Cravero, 2017). En particular, la asignatura en la que se desarrolla esta experiencia presenta un contexto especial, pues los alumnos provienen de cinco carreras diferentes asociadas a las Ciencias Sociales, no es requisito institucional la asistencia a clase, con lo cual antes de la implementación de esta propuesta más del 50% de alumnos tenía trayectorias de cursado incompletas o discontinuas y a esto se agrega la autonomía de los alumnos en las lecturas específicas de las Ciencias Sociales pero no con textos estadísticos.

Frente a esta situación el propósito fue desarrollar una propuesta que integre a la Estadística en el campo profesional específico de nuestros estudiantes, enfatizando la comprensión conceptual de las ideas estocásticas fundamentales, incorporando la tecnología en el tratamiento de datos, la interpretación de resultados de investigaciones en el área y potenciando el trabajo colaborativo y la discusión entre pares. Así, desarrollamos una propuesta centrada en tres fases.

En la *primera fase* surge la necesidad de estudiar y comprender conceptos estadísticos implícitos en distintos índices e indicadores sociales. Para ello, la secuencia de actividades consistió en: a) la problematización de la medición de la pobreza, centrada en la lectura de Escudero (2014), lo cual llevó a los estudiantes a conocer las dimensiones estadísticas de este indicador, alcances y limitaciones, b) introducir los conceptos estocásticos necesarios para comprender el significado de este indicador y las variables que lo componen, centrando el análisis conceptual en los datos de la Encuesta Permanente de Hogares (EPH). Así, los alumnos pueden seleccionar diversas variables, con datos reales y cercanos a su entorno (ya que se toman los datos de la provincia en la que ellos viven), fundamentan su elección, realizan diversos análisis estadísticos y redactan informes en los que deben incluir la discusión de resultados y las conclusiones fundamentadas en la evidencia empírica.

En una *segunda fase*, deben relacionar las conclusiones anteriores con dos videos donde Hans Rosling (2007 y 2010) trata el tema de la medición de la pobreza desde un enfoque multidimensional, por lo cual pueden comparar con la propuesta de Escudero (2014). Así, vuelven a revisar los datos disponibles, pero a través de otros indicadores y metodologías y, por lo tanto, pueden ampliar o modificar sus conclusiones.

En la *tercera fase*, se les presenta la comparación de dos grupos de hogares de la EPH, con características diferentes (por ej.: hogares que solicitan créditos y hogares que no), a través de un análisis exploratorio y de una viñeta en la que dos personas debaten en un lenguaje cotidiano sobre la problemática presentada y se les pide que ellos decidan a quien de esas personas apoyarían brindando fundamentos basados en la evidencia y en lo conceptual.

La evaluación continua acompaña a la propuesta didáctica a través de diversos prácticos basados en nuevas bases de datos reales, por ejemplo, sobre el Índice de Desarrollo Humano, el Índice de Felicidad o variables de *Gapminder World* (www.gapminder.org). Esta experiencia que se ha replicado durante cuatro años, ha permitido propiciar el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes, apreciando que muchos de ellos lograron dar sentido a la información estadística y a los conceptos implícitos (Gal, 2004), lo que llevó también a un incremento en el rendimiento (20% de aprobados en 2013 a un 85% en 2017).

■ Investigaciones estadísticas y ciudadanía crítica (*Colombia*)

En el sistema educativo colombiano, la enseñanza de la estadística se ha caracterizado por el marcado énfasis en el dominio de conceptos y procedimientos estadísticos desarticulados de los contextos que poco ayudan a los estudiantes a ver y usar la estadística como una ciencia útil para entender el mundo (Zapata-Cardona, 2014; Zapata-Cardona y Rocha, 2016). Esta tradición en la enseñanza de la estadística está muy lejos de emular la práctica del profesional estadístico que muchos investigadores han recomendado en los últimos desarrollos didácticos que dan fuerte importancia al contexto en el cual se gestan los problemas estadísticos (Lopes y Cox, 2018). Considerar el contexto va en coherencia con la práctica diaria de los estadísticos profesionales quienes parten de situaciones reales, las estudian y las modelan para comprenderlas y para hacer predicciones en escenarios reales.
La propuesta que se desarrolló tiene su fundamento en el principio didáctico de que la enseñanza de la probabilidad y la estadística pueden ser organizadas a partir de perspectivas filosóficas que no solo se centren en la acumulación de *saberes* sino también en la formación de los *seres* (Radford, 2018). El propósito es ir más allá del dominio de conceptos y procedimientos para convertirse en una herramienta de indagación empírica que le permita al estudiante entender críticamente las crisis y conflictos del mundo y participar en la sociedad como un *ciudadano crítico*. Skovsmose (1999) inspirado en las ideas de Giroux plantea que “la escuela debe educar a los estudiantes para ser *ciudadanos críticos,* preparados para correr riesgos, desafiar y creer que sus acciones pueden marcar una diferencia en la sociedad” (p. 26). Coherente con este pensamiento, la *ciudadanía crítica* es entendida como una cualidad del pensamiento que forma ciudadanos conscientes en lo ambiental, social, político y económico y desarrolla disposiciones críticas hacia el mundo en el que viven (Stillman, Brown, Faragher, Geiger y Galbraith, 2013).

Para contribuir a la ciudadanía crítica, se llevó a cabo la estrategia de *investigaciones estadísticas* en el aula (Zapata-Cardona, 2016), las cuales son una apuesta crítica para la enseñanza de la estadística inspiradas en los fundamentos de la educación crítica (Adorno, 1971), que busca el uso de la razón para el desarrollo de la conciencia social de los aprendices para evitar que se cometan injusticias. Parten de una crisis social que sea familiar para el estudiante y con el uso de herramientas estadísticas la estudian experimentalmente para intentar comprenderla y tratar de superarla.

Un ejemplo de investigación estadística (ver otros más en Zapata-Cardona, 2016) consistió en un estudio sobre discriminación en contra de la mujer publicado por Rosen y Jerdee (1974) en el cual con 48 hojas de vida idénticas marcadas 24 para hombres y 24 para mujeres, 21 hombres y 14 mujeres fueron recomendados para ascenso. La pregunta estadística que orientó la discusión fue: ¿hay evidencia estadística para sospechar de discriminación en contra de la mujer o los resultados pueden ser debidos únicamente al azar? Con este escenario se estudiaron los contrastes de hipótesis, pero también la discriminación en contra de la mujer.

En las *investigaciones estadísticas* no solo se atiende la dimensión *objetiva* del saber estadístico sino la dimensión humana —*subjetiva*— de los estudiantes y su participación democrática en la sociedad (Radford, 2018). Las investigaciones estadísticas superan la concepción de la enseñanza como entrega de información y conciben el conocimiento como producto de los intereses y necesidades desplegados en las actividades humanas.

El uso de las investigaciones estadísticas en la enseñanza ha mostrado ser una poderosa herramienta tanto para la formación de conceptos y procedimientos estadísticos como para la formación de la conciencia social de los estudiantes, y han ayudado a los estudiantes a conectar el conocimiento escolar con el conocimiento por fuera de la escuela.

■ Incorporación de ideas tempranas de Inferencia Estadística *(México)*

A continuación, se presenta otra experiencia sobre la enseñanza de la Probabilidad y Estadística, esta vez en México, a nivel universitario basada en la incorporación de ideas tempranas de inferencia estadística paralelamente al desarrollo del curso. Desde la perspectiva cognitiva, hace casi dos décadas, distintas voces dan cuenta de las dificultades de estudiantes en inferencia estadística por su complejidad y reducidos tiempos didácticos en que es abordada (Vallecillos, 1999; Alvarado, Galindo y Retamal, 2013; Albert y Ruiz, 2014).

El marco teórico de la propuesta descansa en las ideas de Aliaga y Gunderson (2006) de la Universidad de Michigan y busca mejorar los procesos de razonamiento inferencial no sólo al inicio del curso sino a lo largo de todo su desarrollo. El punto de partida es una explicación sistémica del fenómeno didáctico (Cantoral, Farfán, Lezama y Sierra, 2006), donde se consideró que éste no puede comprenderse de manera aislada sino en la interacción de tres aproximaciones al objeto didáctico, que articulados entre sí permiten problematizar sobre los elementos que intervienen en el aprendizaje de la Inferencia estadística:

a) La *aproximación epistemológica disciplinar* permitió observar que en la inferencia estadística intervienen una gran cantidad de conceptos de probabilidad, muestreo aleatorio y de estadística propiamente, pero también en una complejidad lógica- interpretativa de los resultados, debida a su singular característica de estar vinculada a fenómenos aleatorios y situaciones bajo incertidumbre y de toma de decisiones.
b) Desde la perspectiva *epistemológico-histórica* se constató que la presencia de distintas tradiciones, clásica, frecuentista y bayesiana, no siempre son conciliables en sus planteamientos e interpretaciones.
c) Por último, desde una *aproximación didáctica* se pudo observar que en los programas de estudio y los libros de texto (ver Montgomery y Runger, 2012, entre otros) se hace una secuencia temática compartamentalizada en módulos poco vinculados entre sí entre los cuales Inferencia estadística es tratada hasta después de los temas de estadística descriptiva, probabilidad y distribuciones de probabilidad.

En ese sentido, la experiencia didáctica buscó identificar los distintos momentos didácticos de un curso de Estadística y de hallar espacios propicios para el desarrollo de ideas tempranas de inferencia estadística. La estrategia consistió en desarrollar ideas germinales de estadística inferencial, paralelamente al desarrollo de un curso universitario introductorio a estadística, en cuatro momentos: Estadística descriptiva, Probabilidad, Distribuciones y Distribuciones del muestreo. En *Estadística descriptiva* convino introducir los conceptos de toma de decisiones, hipótesis nula y alternativa, errores tipo I y tipo II, así como intervalos con percentiles y desviaciones estándar alrededor de la media, así como abrir la discusión al problema de cuándo se tiene un resultado significativo y un dato atípico. En *Probabilidad*, con el Teorema de Bayes, se introdujo la idea de medición del error tipo I y error tipo II con problemas vinculados a pruebas de detección de cáncer. En *Distribuciones de probabilidad* se propuso plantear las hipótesis nula y alternativa simbólicamente y con la negación en sus tres posibilidades (mayor, menor o diferente) así como utilizar las distribuciones (en particular, la binomial), para discutir el resultado que aporta la evidencia muestral a favor de alguna hipótesis. Finalmente, en *Distribuciones muestrales* se plantearon situaciones de toma de decisiones confrontando el valor p con un nivel de significación establecido α, así como con el número de desviaciones estándar distante de la media, con relación a un valor crítico hallado a partir de α.

Durante dos años, con al menos 80 alumnos por semestre, se implementaron actividades de aprendizaje y se actualizaron bajo la perspectiva de aprendizaje activo. Se logró un curso funcional e institucionalizado capaz de desarrollar el razonamiento estadístico inferencial desde sus inicios, con un índice promedio de rendimiento escolar global detectado del 10% superior al enfoque tradicional de dejar la inferencia estadística al final del curso. Aún se diseñan métricas que permitan precisar las diferencias en cuando al razonamiento inferencial. La experiencia permitió contar con más tiempo didáctico para la asimilación y razonamiento en torno a la complejidad del razonamiento estadístico inferencial.

■ Estadística con proyectos *(México)*

Otra experiencia en México fue a través de un programa de actualización con profesores de Probabilidad y Estadística de secundaria, bachillerato y universidad, la cual tuvo como propósitos que los docentes identifiquen y caractericen, de acuerdo con cada contexto, las diferentes formas de utilizar la Estadística con proyectos (*EstPro*) en la escuela, así como diseñar una propuesta para desarrollarla e implementarla con sus estudiantes.

El sustento teórico y conceptual de *EstPro* recae en los estudios de Wild y Pfannkuch (1999), Burgess (2008), las recomendaciones emitidas en la *Guía para la evaluación y la enseñanza de la educación Estadística* (GAISE por sus siglas en inglés) por Franklin, et al (2007), así como las orientaciones del *Proyecto Internacional sobre Alfabetización Estadística* (ISLP, por sus siglas en inglés, disponible en: https://iase-web.org/islp/). El énfasis de la estrategia es lograr una transición entre el paradigma del tratamiento de la información al paradigma del desarrollo del pensamiento estocástico, lo que llevará al profesor a confrontar sus creencias, concepciones y conocimientos sobre la estadística, su aprendizaje y enseñanza. Los fundamentos de la investigación, así como la caracterización de los tipos de proyectos pueden verse en Flores y Pinto (2017).

De 2016 a 2017, se implementaron cuatro talleres de actualización con un total de 82 profesores en ejercicio, los cuales se llevaron a cabo en cuatro países: México, Chile, Perú y Colombia. Se trata de ciclos de talleres, cuyos itinerarios de aprendizajes tuvieron como características: a) problematización a partir situaciones reales de enseñanza y aprendizaje, b) trabajo colaborativo, c) revisión de experiencias e informes, y d) reflexión sobre la práctica docente. Se buscaba que en los talleres los docentes se sientan, perciban y trabajen como *comunidades de práctica* y en todo momento pongan el *conocimiento en uso* de la estadística.

Como parte de las actividades de los talleres fue el diseño e implementación de una secuencia didáctica con base en la *EstPro*, denominada "Proyecto: enseñar estadística en la escuela", donde los profesores se pusieron en el rol de estudiantes para revolver seis preguntas que implicaba recogida de datos, organización, representación, interpretación y discusión de los resultados. La finalidad fue que tengan una vivencia personal de un ejemplo de *EstPro*, y al mismo tiempo, analizar y profundizar sobre el conocimiento en uso que tienen, así como el desarrollo del pensamiento estadístico.

Uno de los resultados relevantes de la estrategia fue el reconocimiento de la necesidad de desarrollar en los profesores el pensamiento estadístico, que implica una comprensión de por qué y cómo se llevan a cabo las investigaciones estadísticas. Chance (2002) afirma que eso implica: a) reconocer y comprender todo el proceso de investigación (desde la presentación de preguntas hasta la recolección de datos, elegir análisis, suposiciones, etc.), b) comprender cómo se usan los modelos para simular fenómenos aleatorios, c) comprender cómo se producen los datos para estimar las probabilidades, d) reconocer cómo y cuándo, y por qué las herramientas inferenciales existentes pueden ser utilizadas, y e) ser capaces de comprender y utilizar el contexto de un problema para planificar y evaluar investigaciones y sacar conclusiones.

La experiencia de la implementación de los talleres nos da evidencia de que para enseñar estadística es esencial que los propios profesores de matemáticas vivencien y experimenten ellos mismo cómo desarrollar el pensamiento estadístico. Cobra sentido lo que Wild y Pfannkuch (1999) identifican como elementos centrales del pensamiento estadístico: a) reconocimiento de la necesidad de los datos, b) transnumeración, c) percepción de la variación, d) razonamiento con modelos estadísticos, y e) integrar la estadística con el contexto.

Conclusión

Se puede apreciar, que las cinco experiencias de enseñanza se fundamentan en marcos teóricos de la investigación en educación estadística, y buscan que tanto estudiantes como profesores desarrollen su pensamiento estocástico en contextos reales, con significado intrínseco en su vida personal, como ciudadano y profesional. Una preocupación compartida en generar un cambio de paradigma tanto en el aprendizaje como en la enseñanza de la Probabilidad y Estadística (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Fundamentos y propósitos de las experiencias de enseñanza sobre Probabilidad y Estadística*

Nombre	Dirigido a	Fundamento teórico	Propósito
Desarrollo de las intuiciones probabilísticas *(Chile)*	Estudiantes de secundaria, universitarios, profesores de matemática en ejercicio	• Conocimiento profesional para la enseñanza de la probabilidad • Significados de la probabilidad en la enseñanza • Ideas fundamentales de probabilidad • Razonamiento probabilístico	Evaluar las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad en distintos niveles educativos y analizar los argumentos y sesgos de razonamiento.
Construcción del sentido estadístico *(Argentina)*	Estudiantes universitarios	• Sentido estadístico • Cultura estadística • Razonamiento y pensamiento estadístico	• Caracterizar el problema de la medición estadística en las Ciencias Sociales. • Favorecer la comprensión conceptual y contextual de los contenidos estocásticos en las Ciencias Sociales.
Investigaciones estadísticas y ciudadanía crítica *(Colombia)*	Estudiantes de estadística Profesores en formación inicial y continua	• Educación crítica • Educación matemática crítica • Investigaciones estadísticas	Desarrollar el conocimiento estadístico y la ciudadanía crítica de los participantes mediante el estudio empírico de crisis sociales
Incorporación de ideas tempranas de inferencia	Estudiantes de los primeros semestres universitarios	• Razonamiento estadístico • Enfoque sistémico	Ofrecer un curso con mayor énfasis al razonamiento estadístico inferencial

estadística *(México)*		• Probabilidad y Estadística	
Estadística con proyectos *(México)*	Estudiantes de estadística Profesores en formación inicial y continua	• Pensamiento estocástico • Alfabetización estadística • Investigaciones estadísticas	Identificar y caracterizar, de acuerdo con cada contexto, las diferentes formas de utilizar la Estadística a través de proyectos en la escuela

Como puede apreciarse en la Tabla 2, el tratamiento de la Probabilidad y la Estadística, a través de estas experiencias, están centradas en datos reales con un enfoque social, enfatizando en el razonamiento y en el pensamiento estadístico y, poniendo en evidencia la influencia de las propias creencias e intuiciones en el aprendizaje.

Son diversas los beneficios, aportaciones e implicaciones que tienen estas experiencias: desarrollo de las intuiciones probabilísticas, competencias para abordar situaciones bajo incertidumbre, desarrollo del razonamiento intuitivo y axiomático, diseño de propuestas innovadores (ej. programas, proyectos, formas de evaluar, materiales), elaboración de investigaciones estadísticas, desarrollo de la conciencia social, interés por los problemas del entorno y motivación hacia el aprendizaje, entre otras.

Tabla 2. *Características, resultados e implicaciones de las experiencias de enseñanza sobre Probabilidad y Estadística*

Nombre	Características	Resultados	Implicaciones
Desarrollo de las intuiciones probabilísticas *(Chile)*	• Énfasis en el significado intuitivo de la probabilidad • Necesidad de confrontar las creencias cotidianas intuitivas con los conceptos probabilísticos	• Alta variación en la asignación de la intuición probabilística • Caracterizar los argumentos que utilizan los estudiantes respecto a sus intuiciones y heurísticas sobre probabilidad	Necesidad de confrontar a los estudiantes con algunas de las heurísticas para promover gradual y progresivamente el razonamiento intuitivo hacia el razonamiento axiomático con comprensión
Construcción del sentido estadístico *(Argentina)*	• Problemas, datos y contextos reales • Énfasis en el razonamiento • Aprendizaje activo y colaborativo • Análisis exploratorio de datos (AED) centrado en las TIC	• Mayor motivación de los estudiantes • Aprendizajes reflexivos centrados en la información y su influencia en las decisiones políticas y sociales	• Diseño de una propuesta de enseñanza centrada en indicadores sociales. • Evaluación continua de los aprendizajes centrada en el trabajo basado en proyectos • Necesidad de nuevos materiales que apoyen la trayectoria didáctica
Investigaciones estadísticas y ciudadanía crítica *(Colombia)*	• Situaciones críticas del mundo • Estudio de la estadística en contextos reales • AED	• Manejo profundo de herramientas estadísticas para el análisis exploratorio y la inferencia	Diseño de investigaciones estadísticas que permitan el desarrollo del conocimiento estadístico y de la conciencia social.

	• Estadística inferencial	• Desarrollo de la conciencia social de los participantes	
Incorporación de ideas tempranas de inferencia estadística *(México)*	• Nueva organización de contenidos del curso • Aprendizaje activo • Uso de tecnología	• Mejores aprendizajes de Estadística inferencial • Desarrollo de un curso más integrado • Mayor motivación de los estudiantes	• Estudiantes más competentes para abordar situaciones bajo incertidumbre • Necesitad de nuevos libros de texto con este enfoque • Nueva investigación para mejorar el proceso
Estadística con proyectos *(México)*	• Problemas, datos y contextos reales • Énfasis en el razonamiento • Aprendizaje inductivo y activo • Uso de las TIC • AED	• Centrado en el pensamiento estocástico • Vivenciar el aprendizaje • Cambio en el paradigma y concepciones en la enseñanza	• Revisión de planes y programas de estudio • Necesidad de fortalecer la investigación sobre la práctica del profesor • Caracterizar los tipos de proyectos en estadística

Todas las propuestas pueden adaptarse al contexto escolar, del profesor y de los estudiantes y tienen como características ser flexibles, integrales, con metodologías activas, con especial énfasis en el análisis exploratorio de datos centrado en las TIC, con base en problemas, datos y contextos reales.

Con base en los resultados de investigación y de la experiencia en la implementación de las estrategias didácticas expuestas en este artículo, algunos de los proyectos a futuro son: a) seguir mejorando las propuestas realizadas, puliendo sus limitaciones con el firme objetivo de promover aprendizajes a largo plazo e integrados de los conceptos estocásticos con situaciones reales del entorno propio de los estudiantes, b) elaborar materiales (ej. libros, cuadernos de trabajo, guías) que sirvan de referente para estas nuevas prácticas y experiencias docentes, con un enfoque sistémico en el que no sólo se presenten contenidos sino que aborden problemas multidimensionales en los que la Estadística permite aportar evidencias para obtener conclusiones bien fundamentadas, c) revisar y actualizar los programas y los planes de estudio para brindar un marco institucional que apoye a estas experiencias, y d) realizar más investigaciones sobre la práctica docente que permita comprender más sobre el conocimiento en uso de la Probabilidad y Estadística, así sobre cómo desarrolla su pensamiento estocástico.

Referencias bibliográficas

Adorno, T. W. (1971). *Erziehung zur Mündigkeit*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Albert, J. A. y Ruiz, B. (2014). Dificultades en estudiantes universitarios del estadístico como variable aleatoria en la distribución del muestreo de medias. *27 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. CLAME: Buenos Aires, Argentina.

Aliaga, M., y Gunderson, B. (2006). *Interactive statistics*. 3rd Ed. New Jersey: Prentice Hall.

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: Implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(2), 131-156.

Alvarado, H., Galindo, M. y Retamal, L. (2018). Evaluación del aprendizaje de la estadística orientada a proyectos en estudiantes de ingeniería. *Revista Educación Matemática*, *30*(3), 151-183.

Alvarado, H., Galindo, M. y Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 75-91.

Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En Graham A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). NY: Springer.

Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: aprendizaje a largo plazo. Algunas reflexiones. En: *Actas de II Jornadas en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*.

Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics throught investigations. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education.* Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Monterrey: ICMI y IASE.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J., y Sierra, G. M. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 83-102.

Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction and assessment. *Journal of Statistics Education, 10*(3). Recuperado el 5 de abril de 2018 de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/chance.html.

Escudero, W. (2014). *Qué es (y qué no es) la Estadística. Usos y abusos de una disciplina clave en la vida de los países y las personas*. 1ª edición. Colección Ciencia que ladra. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores Argentina.

Flores, A. y Pinto, J. (2017). Características de la enseñanza de la Estadística por proyectos. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 263-271),* Vol. 30. CLAME.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y otros. (2007). Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Gal, I. (2004). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. In D. BenZvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking (pp. 47–78)*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Lopes, C., y Cox, D. (2018). The impact of culturally responsive teaching on statistical and probabilistic learning of elementary children. En A. Leavy, M. Meletiou-Mavrotheris, & E. Paparistodemou (Eds.), *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking* (pp. 75–107). Springer Nature Singapure. https://doi.org/10.1007/978-981-13-1044-7_5.

Montgomery, D. y Runger G. (2012). Probabilidad y Estadística (2 ed.). México: Limusa Wiley.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 3–25). New York: Springer.

Rosen B. y Jerdee, T. (1974). Influence of sex role stereotypes on personal decisions, *Applied Psychology, 59*, 9 - 14.

Rosling, H. (marzo, 2007). *Hans Rosling revela nuevas ideas sobre la pobreza*. TED Ideas worth spreading. Recuperado el 16 de agosto de 2018 de: https://www.ted.com/talks/hans_rosling_reveals_new_insights_on_poverty?language=es#t-51199

Rosling, H. (noviembre, 2010). *200 años, 200 países, 4 minutos*. The Joy f Stat. BBC Four. Recuperado el 20 de octubre de 2017 de: https://www.youtube.com/watch?v=6TxP2QRAFMA

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica.* (P. Valero, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente (Trabajo original publicado en 1994).

Stillman, G., Brown, J., Faragher, R., Geiger, V., y Galbraith, P. (2013). The role of textbooks in developing a socio-critical perspective on mathematical modeling in secondary classrooms. En G. A. Stillman (Ed.), *Teaching mathematical modelling: Connection to research and practice. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 361–371). Dordrecht: Springer Science + Bussiness. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_30.

Tauber, L.; Santellán, S. y Cravero, M. (2017). La evaluación de conceptos estadísticos en carreras de Ciencias Sociales. En B. Iaffei y K. Temperini (Eds.), *Actas de VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática, pp. 359-367.* Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute*, 201-204.

Wild, C., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review, 67*(3), 223–265.

Zapata-Cardona, L. (2014). Alcance de las tareas propuestas por los profesores de estadística. *Uni-pluri/versidad, 14*(1), 53–62.

Zapata-Cardona, L. (2016). ¿Estamos promoviendo el pensamiento estadístico en la enseñanza? *Encuentro Colombiano de Educación Estocástica*. Bogotá, Colombia.

Zapata-Cardona, L., y Rocha, P. (2016). Teachers' questions in the statistics class. En D. Ben-Zvi, & K. Makar (Eds.). *The Teaching and Learning of Statistics.* Springer, Cham. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0_32

EL POTENCIAL PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA QUE TIENEN LOS TEMPLOS EN COSTA RICA: PREMISAS DE UNA INDAGACIÓN DESDE LA PERSPECTIVA ETNOMATEMÁTICA

THE POTENTIAL OF CHURCHES FOR GEOMETRY TEACHING IN COSTA RICA: PREMISES OF AN ENQUIRY FROM THE ETHNOMATEMATICAL PERSPECTIVE

Natalia Quesada López, Rosaura Chavarría Ramírez, Gerald Benavides Guido, María Elena Gavarrete Villaverde

Universidad Nacional. (Costa Rica)

natyql16@gmail.com, rchavarria07@hotmail.com, gebegui1209@gmail.com, marielgavarrete@gmail.com

Resumen

Este documento describe las reflexiones de los investigadores acerca del potencial que tienen los templos en Costa Rica para generar una acción pedagógica que contribuya a mejorar la enseñanza de la geometría. La investigación se desarrolla en la Universidad Nacional de Costa Rica y se enmarca en el Programa Internacional de Etnomatemática. Las reflexiones que se exponen generan las premisas indagatorias donde los investigadores manifiestan sus percepciones sobre la relación que tienen las características arquitectónicas de los templos y la Geometría Tridimensional, el Movimiento de las formas geométricas, la Geometría analítica y la Geometría Sintética; estas reflexiones surgen a partir de una prueba piloto.

Palabras clave: etnomatemáticas; secundaria; cualitativa; templos

Abstract

This document describes the reflections of researchers about the potential of temples in Costa Rica to generate a pedagogical action that contributes to improve the teaching of geometry. The research is carried out at the National University of Costa Rica and is part of the Ethnomathematics Program. The reflections generate investigative premises where the researchers express their perceptions about the relationship between the architectural characteristics of the temples and the Three-dimensional Geometry, the Movement of the geometric forms, the Analytical Geometry and the Synthetic Geometry; these reflections arise from a pilot test.

Key words: Ethno-mathematics; high school; qualitative; churches

Introducción: Contexto del trabajo

En la mayor parte de los pueblos en Costa Rica, siempre se va a encontrar una escuela, una pulpería, una cantina, una plaza de deportes y al menos un templo católico, razón por la cual estos lugares son característicos para la región y para la cultura costarricense. Rodríguez (2008), señala razones para considerar importante los templos para los costarricenses, algunas de ellas son: que, a pesar de la preferencia religiosa, en general las personas consideran los templos como símbolos de la comunidad; que los templos generan sentido de identidad, sentimiento de pertenencia para el pueblo y; además que son un punto de referencia para dar direcciones, lo cual es algo representativo del país.

Por otro lado, en Costa Rica los programas de matemáticas vigentes propuestos por el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012), buscan vincular la enseñanza de las matemáticas y el entorno real, físico, social y cultural de los estudiantes, a través de un enfoque basado en la resolución de problemas asociados a situaciones reales. Para lo cual, propone cinco ejes disciplinares: la resolución de problemas como estrategia metodológica principal, la contextualización activa como un componente pedagógico especial, el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales, la potenciación de actitudes y creencias positivas en torno a las matemáticas y el uso de la historia de las Matemáticas.

El MEP (2012), menciona que la modelización es un elemento esencial de la contextualización, por lo que los investigadores determinaron que modelizar los elementos de los templos de Costa Rica, desde la perspectiva etnomatemática y llevarlo al aula, puede involucrar al estudiante en el proceso de aprendizaje, además, permitiéndole construir y/o utilizar modelos para relacionarlos con el propio contexto y de esta manera lograr despertar su interés y participación en las clases de matemática.

Para la enseñanza de la geometría, dicho programa establece mantener relación con los entornos espaciales; razón por la cual se propuso en la Universidad Nacional un trabajo final de graduación centrado en el potencial didáctico matemático de los Templos de Costa Rica, dado que son uno de los elementos más representativos de cada región del país, y constituyen el más valioso resultado del esfuerzo comunal (Rodríguez, 2008).

En el marco de la investigación que se está llevando a cabo, se pretende responder a la pregunta general *¿cómo se puede desarrollar un análisis etnomatemático de templos de Costa Rica para el diseño de una propuesta didáctica que enriquezca la enseñanza de la Geometría en educación secundaria?*, no obstante, antes de llegar a esta pregunta surgieron otras preguntas generadoras, tales como: ¿cuál o cuáles son los tipos de geometría que pueden identificarse en los elementos arquitectónicos de los Templos? y, ¿qué elementos de un templo puede estudiarse para enseñar geometría?.

Para responder a estas interrogantes en el desarrollo de la investigación se tiene previsto realizar una consulta a docentes de secundaria en ejercicio, mediante un cuestionario previamente elaborado, una entrevista a personas representativas de los pueblos que conozcan sobre los templos y, además, los investigadores realizarán una observación a los templos en estudio con una guía de observación previamente elaborada.

El propósito de este reporte de investigación fue socializar las percepciones iniciales de los investigadores acerca de las relaciones identificadas por ellos mismos entre las características arquitectónicas de los Templos y los conocimientos geométricos descritos por el programa de estudios del MEP, en el marco de la Trigésimo Segunda Reunión de Matemática Educativa (RELME32).

Estas reflexiones se realizaron antes de la elaboración y aplicación de los instrumentos para la recolección de la información para establecer las premisas de investigación, mediante una prueba piloto (de observación) para determinar si existía potencial arquitectónico en los templos.

Fundamentos teóricos y metodológicos

El trabajo se enmarca en el Programa Internacional de Etnomatemática; y posee como principales referentes teóricos a Ubiratán D'Ambrosio y Alan Bishop; así como la referencia metodológica está guiada a partir de los trabajos desarrollados por Milton Rosa y Daniel Orey.

D'Ambrosio (citado en Blanco, 2008) menciona que, la Etnomatemática es una forma de hacer Educación Matemática, en la cual lo que se pretende es traer la cultura al aula, y hacer Matemática usando el entorno, permitiendo al estudiante aprender matemática con sus propias experiencias e intereses.

Bishop (1988) afirma que es posible remodelar el currículo educativo incorporando seis actividades universales que están relacionadas con el entorno y que se desarrollan en todos los grupos culturales, estas actividades son contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar; las cuales pueden motivar a los docentes a la innovación pedagógica.

Una forma de modelar en el ámbito de la etnomatemática, es mediante la Etnomodelización, que según Rosa y Orey (2010) es una herramienta para la acción pedagógica, ya que enlaza los aspectos culturales de las matemáticas con sus aspectos académicos, de esta manera las matemáticas se involucran como una expresión de la cultura y se relaciona con el pensamiento matemático, con el fin de que formen parte de la realidad de los estudiantes. Además, aluden a que en el currículo de estudio es necesario el modelado ya que estimula a los estudiantes a conectar situaciones reales del entorno con las matemáticas estudiadas.

Hernández y Villalba (2001) brindan una visión de la geometría como un punto de encuentro en una matemática teórica y una matemática como fuente de modelos. Y es que la geometría ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural de los individuos, por su contribución en el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Delgado y Méndez (2009), mencionan que la tendencia en los trabajos que consultaron es la utilización de modelos matemáticos y la conexión de los problemas con las situaciones cotidianas y otras disciplinas. Sin embargo, a nivel de educación primaria y secundaria, usualmente los contenidos de geometría son presentados al estudiantado de manera tradicional, enfatizado en la memorización de fórmulas para calcular áreas y volúmenes, así como definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas. Abrate, Delgado y Pochulu (2006) señalan que algunos docentes les dan prioridad a otras áreas matemáticas y van desplazando los contenidos de geometría hacia el final del curso, lo que les implica, en variados casos, la exclusión de estos temas o su atención de manera superficial, lo que provoca que sea considera como una disciplina difícil y poco útil para la mayoría de los estudiantes.

Según Gamboa y Ballestero (2010) la geometría se presenta a los estudiantes como un conjunto de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejado de su realidad y donde los ejemplos y ejercicios no poseen ninguna relación con su contexto, consecuentemente, la geometría se percibe como poco importante, ya que no es aplicable a la vida cotidiana, cuando la realidad es otra. En este sentido, se busca traer la cultura al aula por medio de los templos, y aprovechar los elementos arquitectónicos y estéticos que estos poseen para estudiar algunos elementos de la geometría, permitiéndole al estudiante aprender matemática con sus propias experiencias a través de elementos de su propio entorno.

Por otra parte, los programas de matemáticas vigentes en Costa Rica (MEP, 2012), desean darle protagonismo al sentido espacial a partir de relaciones y objetos del entorno mediante la identificación, visualización y manipulación de las formas en el espacio, es por eso que se promueve como eje curricular la contextualización activa para el abordaje en el aula de los diferentes tipos de geometría que se estudian:

- *Geometría Tridimensional*: que estudia las figuras, cuerpos y sólidos; para su abordaje se puede hacer uso de su representación, clasificación, traslación, el uso de colores, texturas, sonidos y demás. Se enfoca en el reconocimiento de figuras planas en su composición, clasificación, caracterización, propiedades y en el sentido espacial.
- *Geometría analítica*: que estudia las figuras geométricas mediante técnicas básicas del análisis matemático y del álgebra en un determinado sistema de coordenadas con ejemplos de situaciones de la vida real. Se abarca la simetría axial, transformaciones en el plano (homotecias, traslaciones y rotaciones), entre otras.
- *El Movimiento de las formas geométricas*: que estudia el movimiento de propiedades como las posiciones relativas y transformaciones de puntos y formas, es decir estudia el movimiento de puntos y entidades geométricas, y con ello construir nuevas formas como por ejemplos las curvas, y además visualizar las usuales de otra manera.
- *Geometría Sintética*: que es la que se estudia sin coordenadas, mediante el reconocimiento de figuras y propiedades geométricas, además del reconocimiento de figuras y dando un énfasis a los aspectos lógicos y deductivos.

El trabajo que está en desarrollo se enmarca dentro del paradigma cualitativo de investigación y dentro del enfoque etnográfico, donde se ha generado una secuencia descriptiva del proceso de planeación, que comprende a las premisas de investigación, tal como se presenta en la figura 1.

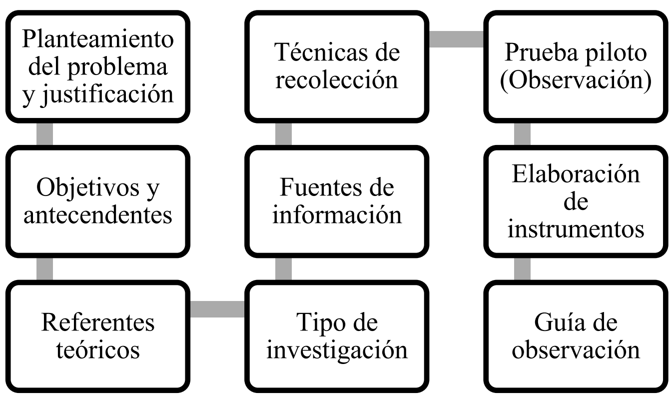


Figura 1: Descripción secuencial del planteamiento de las premisas de investigación

La experimentación inicial de los investigadores en los primeros sondeos del trabajo de campo abarcó entrevistas informales a miembros representativos de las comunidades, observaciones y visitas a las comunidades donde existen Templos que son Patrimonio Arquitectónico Nacional, y cada una de estas actividades nutrió la construcción inicial de las premisas para la investigación. Posteriormente, se desarrolló el diseño de una *prueba piloto,* con la cual se pretende generar un conglomerado de categorías prefijadas que permitan identificar (a partir de la observación) el potencial que poseen las características arquitectónicas de los templos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

La prueba piloto tuvo como fundamento las premisas iniciales y se materializó en un instrumento de observación, que tuvo objetivo identificar los elementos geométricos presentes en la arquitectura de los templos, respecto a categorías prefijadas (partes del templo) y los conocimientos planteados por el MEP en el plan de estudios. El diseño del instrumento de observación contempla datos como el nombre del observador, el nombre del templo y, el objetivo de la observación. Además, contiene una lista de características físicas (observables) que constituyen las categorías prefijadas; éstas son divididas en dos partes: características arquitectónicas interiores y características arquitectónicas exteriores de los templos, tal como se visualiza seguidamente en la Figura 2.

Interiores:

1. Nártex
2. Nave central
3. Naves laterales
4. Transepto
5. Crucero
6. Coro
7. Ábside
8. Púlpito
9. Capitel
10. Columna
11. Pisos hidráulicos
12. Cielo raso

Exteriores:

13. Torres
14. Rosetón
15. Pórtico
16. Contrafuertes
17. Vitrales
18. Fachada
19. Ventanas
20. Puertas
21. Techo

Figura 2: Categorías de la guía de observación
***Nota*:** Elaboración propia

Asimismo, el diseño del instrumento de observación conllevó a la construcción de cinco tablas, donde cada de ellas representa a un nivel educativo referidos a educación secundaria (sétimo año, octavo año, noveno año, décimo año y undécimo año); la primera columna corresponde a los conocimientos del programa de estudios, y las demás columnas corresponden a la numeración de las categorías prefijadas. En la Figura 3 se puede observar la tabla referente a noveno año.

Noveno año

Conocimientos	**Partes del templo**																				
Triángulos	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Teorema de Pitágoras																					
Trigonometría	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Radianes																					
Razones trigonométricas																					
Ángulos de elevación y depresión																					
Ley de senos																					
Geometría del espacio	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Pirámide recta																					
Prisma recto																					
Áreas																					

NOTAS INTERPRETATIVAS:

Figura 3: Ejemplo del instrumento de observación para geometría de noveno año
***Nota*:** Elaboración propia

En esta observación inicial, se consideró delimitar la aplicación del instrumento al Templo Católico del Cantón de San Rafael de Heredia, el cual posee la declaratoria de la UNESCO de patrimonio arquitectónico, lo cual generó definir con mayor precisión las premisas de la investigación, como se describe en el siguiente apartado.

Descripción de las premisas de investigación

A partir de los aspectos considerados en la figura 1, que abarca las indagaciones iniciales de campo y la fundamentación teórica, los investigadores han generado una premisa principal de investigación que es *hay geometría en los Templos*, y posteriormente, se han desarrollado otras premisas vinculadas a los diferentes ejes temáticos de la geometría y que se enuncian a continuación:

Premisa 1: En los vitrales se puede observar elementos de la geometría plana, por su composición cartesiana, además si tienen forma circular, se puede estudiar la geometría analítica y las figuras curvilíneas. También se pueden estudiar transformaciones geométricas en el plano como homotecias, rotaciones, reflexiones y traslaciones mediante las figuras que se observan en la estructura.

***Figura 4*:** Rosetón de la Iglesia de San Rafael, Heredia
Nota: Colección gráfica de los investigadores

Premisa 2: La geometría tridimensional puede ser estudiada a través de las columnas, muros y paredes ya sean del interior del templo o del exterior, en ellos se puede identificar poliedros elementales y cuerpos sólidos.

***Figura 5*:** Interior de la Iglesia de San Rafael, Heredia
Nota: Colección gráfica de los investigadores

Premisa 3: Los movimientos geométricos pueden estudiarse por medio de las transformaciones geométricas e isométricas haciendo uso de los mosaicos, los teselados de los suelos y los vitrales.

***Figura 6*: Pisos hidráulicos de la Iglesia de San Rafael, Heredia**
Nota: Colección gráfica de los investigadores

Premisa 4: La geometría sintética puede estudiarse puede ser estudiada por medio de las distancias, áreas, volúmenes, rectas, puntos de intersección, ángulos y demás de las diversas figuras de los Templos.

***Figura 7*: Costado de la entrada de la Iglesia de San Rafael, Heredia**
Nota: Colección gráfica de los investigadores

Tal como se ha indicado en cada una de las premisas descritas, este instrumento de observación muestra todo lo que se puede trabajar en el templo que tiene potencial geométrico según lo observado por los investigadores como se muestra en la figura en concordancia con las habilidades y contenidos determinados por el Ministerio de Educación de Costa Rica. Es decir, las premisas orientaron el diseño del instrumento de observación y permitieron a los investigadores tener una idea de las fuentes a consultar, para utilizarlo en la enseñanza de la geometría. Por lo tanto, desde la idiosincrasia de esta investigación, las premisas conducen a las conjeturas o hipótesis cualitativas, sobre la cual se sostiene una estructura de categorías bien definidas, que sirven tanto para la recolección de la información, como para el análisis interpretativo de los resultados.

El proceso descrito para generar las premisas, a partir de observaciones iniciales y los primeros sondeos de trabajo de campo con personas externas, ha permitido identificar posibles habilidades del plan de estudios que se pueden abordar haciendo uso de elementos del templo, tal como se ejemplifica a continuación.

En los vitrales se podría desarrollar habilidades como las siguientes:

- Identificar relaciones entre los conceptos básicos de la geometría (puntos, rectas, segmentos, rayos, ángulos).
- Utilizar nociones básicas de geometría analítica.
- Representar puntos y figuras geométricas en un plano con un sistema de ejes cartesianos,
- Representar gráficamente una circunferencia dada, su centro y su radio.

Por otra parte, las columnas, muros y paredes tienen como potencial didáctico las siguientes habilidades:

- Visualizar y aplicar características y propiedades de figuras geométricas tridimensionales.
- Identificar las caras laterales, las bases y la altura de un prisma recto.

También, algunas habilidades que se pueden trabajar utilizando los pisos hidráulicos como medio para enseñar geometría son las siguientes:

- Reconocer puntos, ángulos y lados homólogos de un polígono y el polígono que resulta al aplicar una homotecia.
- Resolver problemas relacionados con la simetría axial.
- Identificar figuras semejantes en diferentes contextos.
- Aplicar el concepto de traslación, homotecia, reflexión y rotación para determinar qué figuras se obtienen a partir de figuras dadas.

Reflexiones

Como resultado de todo el planteamiento metodológico explicado anteriormente, en conjunto con los fundamentos teóricos, la guía de observación muestra que se puede trabajar en el templo, que tiene potencial geométrico según lo observado por los investigadores en concordancia con las habilidades y contenidos determinados por el Ministerio de Educación de Costa Rica.

Las reflexiones de los investigadores para generar las premisas sobre el potencial de los templos para la enseñanza de la geometría, conllevó a discusiones y consensos que han permitido delimitar la investigación y conocer el presupuesto de categorías prefijadas para el desarrollo de instrumentos para la recolección y el análisis de los datos, en concordancia con métodos de investigación basados en la etnomatemática.

Por otra parte, la revisión de los templos (observaciones a los templos como prueba piloto) ha generado en el equipo de investigadores valoraciones de la riqueza del Patrimonio Arquitectónico costarricense y una motivación por preservarlo a través de actividades para las clases de matemática. Sin embargo, conllevó además a la necesidad de delimitar la investigación, al decidir utilizar únicamente tres templos con declaratoria patrimonial por la UNESCO, así como también a elegir una lista de habilidades específicas y conocimientos propuestos en los programas de estudios para tres niveles educativos de la Educación Secundaria.

Referencias bibliográficas

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 39*(1), 1-9. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Bishop, A. (1988). Aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 6* (2), 121-125.

Blanco, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 1*(1). 21-25. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=274020252004

Delgado, J. y Méndez, C. (2009). Una mirada a la enseñanza de la resolución de problemas: estado actual y perspectivas. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 499-508). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/4761/1/DelgadoUnamiradaAlme2009.pdf

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, 14*(2). 125-142. Recuperado de https://www.redalyc.org/articulo.oa

Hernández, V. & Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la Enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original. Recuperado de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice* (pp. 121-139). London: RoutledgeFalmer. Recuperado de http://core.ac.uk/download/pdf/33307.pdf

MEP (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Costa Rica: Autor.

Rodríguez, C. (2008). Templos de Costa Rica: Cartago. San José, Costa Rica: MAYA & PZ.

Rosa, M., & Orey, D. (2010). Etnomodeling as a Pedagogical Tool for the Ethnomathematics Program [El etnomodelamiento como una herramienta pedagógica para el Programa de Etnomatemáticas]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 3*(2). 14-23. Recuperado de http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/25/385

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA ENSEÑAR EL CONCEPTO DE RAZÓN DE MANERA GRADUAL

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR A GRADUAL TEACH OF RATIO CONCEPT

Paola Donoso Riquelme, Natalia Reyes Vergara
Universidad de Magallanes, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. (Chile)
paola.donoso@umag.cl, natalia.reyes2015@umce.cl

Resumen
El presente trabajo, es el resultado de una experiencia de aprendizaje, desarrollada por ocho estudiantes de la carrera de Licenciatura y Pedagogía en Educación Básica, en el curso de Pensamiento Variacional y Proporcional. Experiencia cuyo objetivo fue, identificar elementos matemáticos que influyen en la comprensión y adquisición del concepto de razón, con los cuales elaborar una propuesta metodológica que permita detectar los errores y aciertos, que manifiestan los escolares al resolver problemas de razones y proporciones. Corresponde a una investigación cualitativa, y el método de recolección de datos fue el enfoque de grupo. El resultado obtenido, corresponde a la creación de cinco niveles de dificultad, de menor a mayor grado, presentado en forma de escalera, donde cada nivel especifica el contenido matemático requerido para aprender el concepto de razón. Se concluye, que esta experiencia permitió a los futuros docentes, vivenciar de manera significativa que el concepto de razón es complejo de aprender, y por lo mimo, de enseñar.

Palabras clave: razón, enfoque de grupo, didáctica

Abstract
The present paper is the result of a learning experience, developed by eight students of the Bachelor and Pedagogy in Basic Education, in the class of Variational and Proportional Thinking. Experience whose objective was to identify mathematical elements that influence the understanding and acquisition of the concept of ratio, with which they elaborate a methodological proposal that allows to detect mistakes and right guess, that schoolchildren manifest when solving problems of ratios and proportions. It corresponds to qualitative research, and the method of data collection was the focus group. The result obtained, corresponds to the creation of five levels of difficulty, presented in the form of a staircase, where each level specifies the mathematical content required to learn the concept of ratio. It is concluded that this experience allowed to future teachers, to experience in a significant way that the concept of ratio is complex to learn, and for the same reason, to teach.

Key words: ratio, focus group, didactics

Introducción

El objetivo de la investigación es elaborar una propuesta didáctica que facilite la enseñanza y aprendizaje del concepto de razón en escolares de educación básica. El contenido de Razón y Proporción se encuentra presente en la mayoría de los planes y programas de estudio del mundo. Principalmente se enseña en los últimos años de educación primaria, ya que, requiere de conocimientos previos como: fracciones, números decimales, y porcentajes. Sin estos conocimientos, el concepto de razón será difícil de adquirir, y así lograr desarrollar el pensamiento proporcional en los escolares (Lobato, Ellis, Charles, y Zbiek, 2010).

La Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), de Chile, otorga la carrera de Licenciatura en Educación, Pedagogía en Educación General Básica, mención en matemáticas, y uno de los cursos de la mención, es Pensamiento Variacional y Proporcional, siendo Razones y Proporciones uno de sus núcleos temáticos. Para dar cumplimiento a lo establecido por el programa del curso, se ejecutó la experiencia didáctica que se presenta a continuación. Ambas autoras de este escrito participaron en esta experiencia, una siendo la profesora y la otra una de las estudiantes.

Planteamiento del problema

La Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, de Chile, imparte la totalidad de las carreras de pedagogía, una de ellas corresponde a Pedagogía en Educación General Básica, la cual prepara a profesionales para desempeñarse en el sistema escolar chileno, enseñando en los niveles de 1° a 8° de Educación Básica. Esta carrera, otorga menciones que permite al futuro docente especializarse en una disciplina o área determinada, una de ellas corresponde a la mención de matemáticas. El currículo de la mención de matemática está organizado de tal manera que el módulo de *"Pensamiento Variacional y Proporcional"*, se dicta en el cuarto semestre de la mención, previo a ello, los estudiantes han cursado: *Pensamiento y lenguaje matemático y su enseñanza*; *Pensamiento numérico I* y *II*, donde se enseñan números naturales, números enteros, racionales y su enseñanza. De acuerdo al programa curricular de la mención de matemáticas, los futuros profesores que cursan cuarto semestre deben poseer todos los contenidos matemáticos y su enseñanza, los necesarios para desarrollar en los escolares el pensamiento variacional y proporcional, objetivo del curso: *"Pensamiento Variacional y Proporcional".*

Pues bien, en la práctica, los futuros docentes llegan a cuarto semestre de la mención de matemáticas, fortalecidos en su conocimiento de la materia, que involucra sistema de números naturales, enteros y racionales; pero con deficiencias en su conocimiento pedagógico. En otras palabras, resuelven toda clase de ejercicios y problemas matemáticos, pero no saben explicar cómo lo hicieron, y como resultado, no saben enseñarlo.

El problema radica en que existe un desequilibrio entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico, transformándose en un obstáculo al querer desarrollar el pensamiento variacional y proporcional, ya que, los futuros profesores no comprenden que resolver ejercicios y problemas matemáticos de manera mecánica y memorística, no es una manifestación de los procesos del razonamiento matemático, en este caso del pensamiento proporcional. Por ello, es que, en cuarto semestre de la mención de matemáticas, los futuros profesores deben lograr un equilibrio entre el conocimiento matemático y pedagógico, y desde ahí, comprender la importancia de la educación matemática en el desarrollo del pensamiento, tarea que ellos deberán realizar con sus futuros aprendices de matemáticas.

El presente trabajo, pretende dar respuesta a parte del problema. Para lo cual, se ha seleccionado el concepto de razón, como conocimiento del contenido matemático específico, y a través de la participación en clases del curso *"Pensamiento Variacional y Proporcional"*, pretende que los estudiantes de pedagogía, identifiquen aspectos pedagógicos que les permitan enseñar este concepto, y como resultado propongan una estrategia didáctica, que les sirva tanto para enseñar razones, como para identificar los errores y/o dificultades que puedan manifestar sus futuros aprendices.

Marco teórico

Desde los años ochenta, que existen los términos: conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido, y conocimiento curricular. Shulman (1986), introduce estos términos, evidenciando que los profesores para enseñar cualquier disciplina deben saber: qué enseñar, cómo enseñar, y cuando enseñar, cada uno de ellos, responde a los conocimientos pedagógico, del contenido, y curricular. En el campo de las matemáticas, diversos autores han contribuido a precisar el contenido específico de esta disciplina (Ball, 1990; Ball, Hill, y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Krauss, Brunner, Kunter, Baumert, Blum, Neubrand y Jordan, 2008; Ma, 1999). Destaca el trabajo de Ma (1999), quien concluyó que enseñar matemáticas en educación básica, requiere una comprensión profunda de esas matemáticas, refiriéndose al conocimiento esencialmente matemático.

Razón, proporción y proporcionalidad, son objetos de conocimiento matemático necesarios e indispensables para desarrollar el pensamiento proporcional, es por esto, que se encuentran presentes en la mayoría de los currículos de los países del mundo, todos ellos presentan similitudes en la organización de los temas y en la forma de enseñarlos (Adjiage y Pluvinage, 2007; Martin, Mullis y Foy, 2008; Obando, Vasco, y Arboleda, 2014; Ponte y Marques, 2007; TIMSS, 2009). En Chile, por ejemplo (Ministerio de Educación de Chile, 2013), el concepto de razón se comienza a enseñar en Quinto de Educación Básica (Educación Primaria en otros países), escolares entre 10 y 11 años.

El pensamiento proporcional, o también denominado razonamiento proporcional, es el más abstracto según los estudios de Piaget e Inhelder (1997), equivocadamente muchos profesores se sienten satisfechos, al ver que sus estudiantes aplican la regla de tres para resolver problemas de razones y proporciones, creyendo de esta manera que sus alumnos han desarrollado el pensamiento proporcional. Está comprobado que el uso de la regla de tres no es una manifestación del pensamiento proporcional (Andonegui, 2006; Cramer, Post, y Currier, 1993; Mochón 2012; Rivas 2012), inclusive muchas veces los estudiantes aplican la regla de tres para resolver problemas que no corresponden a proporciones, dejando en evidencia el desconocimiento matemático que involucra la regla de tres.

Este trabajo, evidencia la variedad de aspectos matemáticos involucrados en la adquisición y comprensión del concepto de razón, necesarios para el desarrollo del pensamiento proporcional, dejando fuera la regla de tres.

El concepto de razón involucra conocimientos de fracciones, prerrequisitos para la comprensión de las razones y proporciones, posee un lenguaje específico, que se confunde con el utilizado en fracciones, argumento que confirma la relevancia de ser enseñado (Andonegui, 2006; Block, 2008; Ramírez y Block, 2009). Además de las fracciones, está vinculado a los conocimientos de porcentajes y números decimales. Estos cuatro elementos - razones, fracciones, porcentajes y números decimales - debiesen ser enseñados de manera conjunta, con el propósito de que los escolares puedan reconocer la relación que existe entre unos y otros, y así, dar paso al aprendizaje de los números racionales. Todos ellos, se utilizan en situaciones de relación parte-todo relativas a la multiplicación y a la división, siendo fundamentales y requisitos para el desarrollo del razonamiento proporcional (Mamede, 2010; Mamede y Nunes, 2008).

Existen serias dificultades en la enseñanza de los números racionales, ya que, el escolar debe aprender nuevos símbolos, nuevas formas de operar con ellos, nuevas propiedades, donde algunas de las reglas matemáticas aprendidas anteriormente no se aplican, al nuevo conjunto numérico. Por ejemplo, sumar fracciones es muy diferente a sumar números naturales. Por tanto, la adquisición de los números racionales requiere nuevos procesos cognitivos, de los cuales el profesor debe estar consciente. Diferentes investigaciones (Adjiage y Pluvinage, 2007; García y Serrano, 1999; Lesh, Post, y Behr, 1988; Martin et al.,2008; Vergnaud, 1988, 1994) informan que los alumnos no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar, lo que dificulta el desarrollo del pensamiento proporcional.

Otros estudios (Buforn y Fernández, 2014; Fernández y Llinares, 2012; Valdemoros, 2010), confirman que el esquema operativo de la proporcionalidad, exige el conocimiento de igualdad de dos razones y una estrategia compensatoria entre sus términos, lo cual es difícil y no se adquiere hasta la etapa de las operaciones formales, inclusive algunos adultos no llegan a adquirirlo, por ello, es que un porcentaje alto de estudiantes para maestros se encuentran en un nivel de razonamiento pre-proporcional centrado en las relaciones cualitativas o únicamente centrado en los significados de los números racionales, o en reglas algorítmicas como la regla de tres, sin tener adquirido las formas de razonar con estos significados, y sin comprender la forma en la que el razonamiento proporcional se desarrolla.

En síntesis, el concepto de razón es un conocimiento específico de las matemáticas, que se encuentra presente en el desarrollo del pensamiento proporcional. Y como hemos evidenciado, posee características que lo hacen difícil de aprender, y por ello, es difícil de enseñar. Las razones y proporciones, es un tema que genera serias dificultades en los escolares, producto de ello es el resultado de esta investigación.

Método

Corresponde a una investigación cualitativa, donde el método de recolección de datos es el enfoque de grupo. La muestra la componen ocho estudiantes que cursan la asignatura *“Pensamiento Variacional y Proporcional”* de la carrera de Licenciatura en Educación, Pedagogía en Educación General Básica, de la mención de matemática, de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (UMCE), en Chile.

La investigación se desarrolló en cinco sesiones, cada sesión corresponde a cinco clases del curso *“Pensamiento Variacional y Proporcional”*, lo que permitió que los alumnos se sintieran en un ambiente cómodo y conocido.

La primera sesión consistió en identificar los conocimientos, correctos o errados, que poseían los futuros profesores sobre razones y proporciones. Se aplicó una prueba de lápiz y papel, donde los estudiantes debían responder: *¿Qué es una razón?, ¿Para qué sirve?, Identificar los elementos de una razón, Escribir la razón 3:5 con palabras*. Identificar la correspondencia entre fracciones y números decimales. Y, resolver tres problemas de razones y proporciones de dificultad baja, media y alta, respectivamente. Luego, se discutieron las respuestas, lo que provocó que los estudiantes reconocieran sus fallos y aciertos. Llegando a la conclusión, de que podían resolver los problemas sin mayor dificultad (conocimiento del contenido matemático), pero no pudieron responder las preguntas; reconocieron no saber qué es una razón, y para qué sirve. A su vez, manifestaron no saber qué relación tienen los números fraccionarios y decimales con las razones y proporciones. Como resultado de esta sesión, los estudiantes admitieron no comprender el concepto de razón, y por ello, tampoco saber enseñarlo.

La segunda y tercera sesión, se destinó a discutir sobre los contenidos matemáticos de fracciones, porcentajes, números decimales; y evidenciar la implicancia que tienen dentro de las razones y proporciones, al igual que, se examinaron artículos científicos que tratan sobre el Razonamiento Proporcional y su desarrollo.

La cuarta sesión, consistió en expresar todo lo que sabían sobre razones, y en conjunto elaborar una definición matemática y formal de razón. Además, plantearon y resolvieron problemas de razones, los cuales fueron clasificados en bajo, medio y alto, según el grado de dificultad en su resolución.

La quinta y última sesión identificaron elementos matemáticos, que le otorgan mayor o menor grado de dificultad a los problemas de Razones, con lo cual crearon cinco niveles. Cada nivel, otorga información específica sobre aspectos matemáticos aprendidos por el escolar, determinando el grado de conocimiento logrado. Información que permite al profesor decidir avanzar, retroceder, o modificar sus prácticas en la enseñanza de razones.

Resultados

Producto de esta experiencia, los futuros profesores aprendieron que, para resolver problemas matemáticos, los escolares deben desarrollar habilidades de pensamiento, como:

a) *Interpretar datos.* Saber que se está preguntando, para saber que responder.
b) *Inferir.* Saber extraer información que aparece oculta, necesaria para resolver el problema.
c) *Identificar distractores.* Reconocer elementos distractores que aparecen en el problema, y saber que no se utilizan al momento de resolverlo.

El análisis de los problemas creados por los futuros profesores, aportaron un listado de elementos, que se deben considerar al momento de plantear problemas matemáticos. Ellos son:

a) Contexto significativo para el escolar.
b) Lenguaje utilizado, debe estar redactado correctamente.
c) Ámbito numérico, ámbito conocido para el escolar que lo resuelve.
d) Posible de resolver, que tenga una o más soluciones.
e) Los números que aparecen en el problema deben ser posibles de representar en la vida real (ejemplo: *1,8 casas*, no es real).
f) Grado de dificultad matemática, corresponde al conocimiento matemático que se requiere para resolverlo.

Específicamente para resolver problemas matemáticos de razón, se proponen cinco niveles de dificultad, los cuales han sido representados con la figura de una escalera (Figura 1). Los niveles han sido denominados como:

1° Nivel. Leer y escribir una razón
2° Nivel. Simplificar
3° Nivel. Identificar los elementos de la razón, y operar con ellos
4° Nivel. Calcular la constante K
5° Nivel. Multiplicar los elementos de la razón por su valor unitario

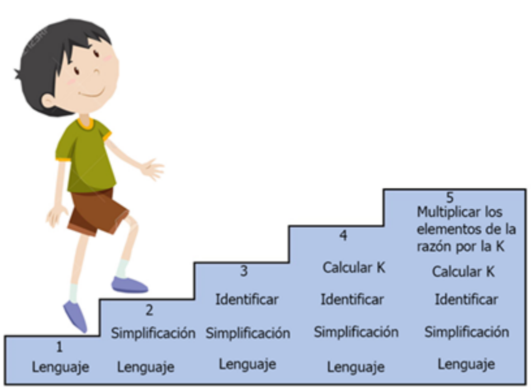


***Figura 1**. Escalera con niveles de dificultad en la enseñanza del concepto de razón.*

Como resultado final de la experiencia, surge una propuesta metodológica que permite al profesor, identificar aspectos matemáticos que involucran el concepto de razón, en la resolución de problemas. Niveles que deben ser considerados en la enseñanza de este concepto. Cada nivel involucra conocimientos que se deben adquirir en orden creciente de dificultad. En la Tabla 1 se registran los niveles, su descripción y un ejemplo de problema por nivel (problemas creados por los participantes de este estudio).

Tabla 1. *Niveles de dificultad en los problemas de razón.*

Nivel	Descripción del nivel	Ejemplo de problema
Nivel 1	Leer y escribir una razón.	Marta tiene 3 sándwich para repartir entre 2 niños ¿Cuál es la razón entre sándwich y niños?
Nivel 2	Simplificar una o más razones.	Javier tiene 9 autos y Pedro tiene 3. ¿En qué razón están los autos de Javier y Pedro?
Nivel 3	Identificar los elementos de la razón, y operar con ellos.	Sofía y Pepa tienen 56 lápices y están en la razón 3:4. Si Sofía tiene 24 lápices ¿Cuántos lápices tiene Pepa?
Nivel 4	Calcular la constante K.	Un florista preparara coronas de flores con rosas, tulipanes y orquídeas. Si debe preparar una corona con 60 flores en donde las rosas, las orquídeas y tulipanes se encuentren en la razón 7:2:3 respectivamente. ¿Cuánta será la cantidad de cada tipo de flor que llevará la corona?
Nivel 5	Multiplicar los elementos de la razón por su valor unitario	

Conclusiones

A partir del marco teórico, se puede concluir que enseñar matemáticas en Educación Básica, requiere de una compresión y conocimiento profundo de las matemáticas, por parte de los docentes. El pensamiento proporcional, está inmerso en la mayoría de los currículos de los países del mundo, en Chile el concepto de razón se comienza a enseñar desde quinto año de educación básica a la edad de los 10 a 11 años. El concepto de razón posee un lenguaje específico que se puede confundir con el lenguaje utilizado en las fracciones, además la razón está involucrada directamente en los conocimientos de porcentajes, números decimales y fracciones. A su vez, desde el inicio de la enseñanza de las razones es conocido el uso y abuso de la regla de tres, sin embargo, esta regla no puede evidenciar, y no constituye el desarrollo del pensamiento proporcional, debido a que este se puede aplicar en cualquier contexto matemático, donde no necesariamente se requiere de un conocimiento cercano al uso de la regla, dejando de lado el significado y el uso que tiene. Finalmente, podemos concluir que las dificultades que se presentan en los números racionales están relacionadas directamente con que los escolares deben aprender nuevos símbolos, nueva forma de operar con ellos, nuevas propiedades, lo que exige nuevos procesos cognitivos, de los cuales el profesor debe estar consciente. Asimismo, los estudiantes no llegan alcanzar los niveles apropiados del aprendizaje de esta temática durante el ciclo escolar, lo que dificulta el desarrollo del pensamiento proporcional.

La actividad de plantear problemas, y luego analizarlos en conjunto, permitió que los futuros profesores, tomasen conciencia de la importancia del contexto y lenguaje utilizado en los problemas creados, aspectos que nunca antes habían considerado. Como resultado, aprendieron a ser críticos de los problemas presentados en los libros de textos escolares, los cuales, muchas veces no corresponden al contexto real de los escolares, convirtiéndose en un obstáculo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, más que en un elemento facilitador, ya que, el escolar puede poseer el conocimiento matemático para resolverlo, pero desconoce el lenguaje y contexto utilizado, transformándose en una dificultad que le impide aplicar su conocimiento matemático de manera correcta.

Además, los estudiantes que participaron en este estudio desconocían los aspectos matemáticos que tienen en común: fracciones, porcentajes, razones y números decimales; ignorando su importancia en el desarrollo del pensamiento proporcional. Una vez aprendido, confirmaron que el pensamiento proporcional, no se reduce a la regla de tres, pues, requiere de un lenguaje matemático específico, involucra reglas, símbolos, operaciones, representaciones y significados.

El reconocer aspectos específicos de dificultad en el planteamiento de problemas, sumado a los conocimientos matemáticos que involucran el concepto de razón, les permitió a los estudiantes, proponer cinco niveles de dificultad en problemas de razones. Lo que dio como resultado la propuesta didáctica presentada en este trabajo.

Por último, se pretende que esta propuesta se convierta en una herramienta para los profesores, con la cual se pueda detectar en qué nivel se encuentra el escolar y qué dificultades manifiesta, y una vez identificados poder superarlos. Aunque los niveles aquí expuestos abarcan exclusivamente el concepto de razón, pueden ser utilizados para otros contenidos matemáticos, considerando aquellos aspectos matemáticos específicos que involucra el concepto que se desea enseñar.

La proyección de este trabajo es lograr establecer niveles de dificultad que sean posibles de identificar en la enseñanza de cualquier contenido matemático, tomando elementos que sean de carácter general y estén presentes en la didáctica de las matemáticas, como sucede con el uso del lenguaje matemático, elemento que se ubica en el primer nivel de nuestra escalera.

Referencias bibliográficas

Adjiage, R. y Pluvinage, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion.
Educational Studies in Mathematics, 65(2), 149-175.

Andonegui, M. (2006). *Cuaderno N°11 Razones y proporciones*. Caracas: Federación Internacional fe y alegría.

Ball, D. (1990). The Mathematical Understandings that Prospective Teachers Bring to Teacher Education. *The Elementary School Journal, 90(4)*, pp. 449-466.

Ball, D., Hill, H. y Bass H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide*? American Educator, 29(1)*, 14-17 20-22, 43, 46.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(5)*, 389-407.

Block, D (2008). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria, en R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano*, México, Díaz de Santos de México, Clame, pp. 495-512.

Buforn, Á. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(48),* 21-41.

Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications: Middle grades mathematics. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York, NY: MacMillan Publishing Company.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 2012, 30(1)*, 129–142.

García, G. y Serrano, C. (1999*). La comprensión de la proporcionalidad: una perspectiva social y cultural*. Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M. y Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology, 100(3),* pp. 716-725. doi: 10.1037/0022- 0663.100.3.716

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Lobato, J., Ellis, A., Charles, R. y Zbiek, R. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. In R. M. Zbiek (Series Ed.), *Essential understandings*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.Mamede, E. (2010). Early years mathematics – the case of fractions. In V. Durand- Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the sixth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2607-2616). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Mamede, E. y Nunes, T. (2008). Building on children's informal knowledge in the teaching of fractions. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and 30th North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 345- 352). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Martin, M., Mullis, I. y Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 International mathematics report: Findings form IEA's trends in international mathematics and science study et the fourth and eight grades*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Ministerio de Educación de Chile. (2013). *Matemática. Programa de estudio quinto año básico*. Recuperado de https://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18980_programa.pdf

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24* (1), 133-157.

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17 (1)*, pp. 59-81.

Piaget, J. y Inhelder, B. (1997). Psicología del niño (Vol. 369). Ediciones Morata.

Ponte, J. y Marques, S. (2007*). Proportion in school mathematics textbooks: a comparative study*. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the fifth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 2443-2452). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Ramírez, M. y Block, D. (2009). La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares. *Educación matemática*, 21(1), 63-90

Rivas, M. (2012). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de educación primaria* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, pp. 4-14.

TIMSS. (2009). *TIMSS 2007 user guide for the international database*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades didácticas en la enseñanza de razón y proporción: estudio de caso. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*, pp. 423-440.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Gershon y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). New York, NY: State University of New York Press.

ECUACIONES DIFERENCIALES Y TEORÍA APOS. UN ESTUDIO DE LOS SISTEMAS MASA RESORTE

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APOS THEORY; A STUDY OF THE MASS SPRING SYSTEMS

Luis Alberto Jaimes, Efrén Ricardo Baquero, Margarita Mónica Rey
Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito (Colombia)
luis.jaimes@escuelaing.edu.co, efren.baquero@escuelaing.edu.co, margarita.rey@escuelaing.edu.co

Resumen
Este trabajo propone un modelo hipotético de construcciones mentales y mecanismos de construcción, para comprender el objeto matemático *ecuación diferencial lineal de segundo orden, que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado*. Se toma como marco teórico y metodológico la propuesta de la teoría APOS, que implica la elaboración de una descomposición genética direccionada en tres etapas; análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y recolección y análisis de datos. Lo anterior desde tres enfoques diferentes como son los elementos de la matemática formal, la experiencia como docentes del curso de ecuaciones diferenciales y el componente didáctico. Finalmente, cabe mencionar que este trabajo se desarrolló con la participación de estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito durante el año 2017.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, APOS, masa resorte

Abstract
This work proposes a hypothetical model of mental constructions and construction mechanisms, to understand the mathematical object differential linear equation of second order, which models a spring mass system with free motion damped. The proposal of APOS theory is taken as a theoretical and methodological framework, which involves the elaboration of a genetic decomposition addressed in three stages; theoretical analysis, design and implementation of teaching and data collection and analysis, all of which is viewed from three different approaches such as the elements of formal mathematics, teaching experience in the course of differential equations, and the didactic component. Finally, it is worth mentioning that this work was developed with the participation of differential equations course students at Julio Garavito Colombian School of Engineering, during the year 2017.

Key words: Differential Equations, APOS, Spring Mass

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un componente fundamental de formación, en los programas de ingeniería, economía o aquellos relacionados con las ciencias exactas. Su importancia radica en la diversidad de fenómenos físicos o sociales que pueden ser modelados matemáticamente, para describir su comportamiento. El trabajo que se presenta corresponde a un proyecto de investigación desarrollado por el grupo GIMATH (Grupo de investigación en Matemáticas de la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito), en la línea de investigación en enseñanza de las matemáticas. Lo anterior, en busca de herramientas que fortalezcan las prácticas educativas de los docentes, y la comprensión de conceptos matemáticos en los estudiantes de institución.

De otra parte, la elección de nuestro objeto de estudio (ecuación diferencial de segundo orden que modela un sistema de masa resorte con movimiento libre amortiguado EDSMR) se encuentra relacionada con su aplicabilidad de dichos sistemas en campos de la ingeniería, como por ejemplo la biomédica; para estudiar la otosclerosis (Fragoso et al., 2014), y en la mecánica para modelar el sistema de suspensión de un vehículo (Aly & Salem, 2013). Adicionalmente, es conveniente resaltar que este trabajo se desarrolla sobre la comprensión de un modelo matemático, y no la construcción de un modelo (modelización matemática), lo anterior dando continuidad a la postura tomada en investigaciones realizadas sobre otros modelos en ecuaciones diferenciales; como los problemas de mezclas (Chaves y Jaimes, 2014) y la ecuación logística (Vargas, Chaves, Jaimes y Monserrat, 2017).

Así mismo, en educación matemática la modelación es utilizada para dotar de significado a los objetos abstractos, y en ocasiones utilizada por los docentes para mostrar que puede explicar o predecir diferentes fenómenos reales (Villa-Ochoa, Quintero, Arboleda, Castaño y Ocampo, 2009). En ese sentido, dentro de este trabajo también se proponen unas actividades que lleven al estudiante a plantear una expresión algebraica (Ecuación Diferencial) para describir un problema dado, partiendo de un modelo establecido y validado, e interiorizando cada uno de los elementos que lo componen, tal que comprenderlos lleve a comprender el modelo. Por ejemplo, en el caso de los sistemas masa resorte con movimiento libre amortiguado, la ecuación diferencial $\boldsymbol{mx'' + \beta x' + kx = 0}$; donde $\boldsymbol{x}$ representa la posición de un objeto de masa $\boldsymbol{m}$ en un tiempo $\boldsymbol{t}$, acoplado a un resorte de constante de elasticidad $\boldsymbol{k}$, sometido a una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea $\boldsymbol{\beta x'}$, requiere la comprensión de cada uno de los elementos que la conforman: ley de Hooke, ley de Stokes, segunda ley de Newton, y conocimiento de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, sin embargo, elementos como límite, periodo de una función, e incluso la experiencia del individuo con fuerzas de resistencia (por ejemplo, sacar la mano por la ventana de un vehículo en movimiento) también son necesarios para la comprensión del modelo.

Finalmente, para el desarrollo de esta investigación se utilizó una herramienta de la teoría APOS (la cual se describe más adelante en este documento), llamada descomposición genética de un concepto, que identificó las construcciones mentales y mecanismos de construcción de los estudiantes para la comprensión de un concepto u objeto matemático.

Marco teórico

En este trabajo se utiliza frecuentemente la palabra modelo matemático, para la cual se adoptó la definición propuesta por Villa (2007, p. 67), refiriéndose a este como “un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación”, es decir, esto es lo que realizan los estudiantes cuando utilizan la EDSMR para solucionar un problema de masa resorte. Además, cabe señalar la importancia de diferenciar el uso del modelo, con su proceso de obtención, dado que en este trabajo el modelo que corresponde a la EDSMR ya se encuentra dado, por el contrario, lo que se busca es la comprensión de esta ecuación diferencial considerando cada uno de sus elementos.

El trabajo se desarrolló desde el enfoque conocido como Teoría APOS, la cual define la descomposición genética de un concepto como "un modelo hipotético de construcciones mentales y mecanismos necesarios para comprender un concepto matemático específico" (Arnon, et al, 2014, p. 27). Las construcciones mentales, a las que se refiere la Teoría APOS, son todas aquellas transformaciones que realizan los estudiantes para resolver una tarea y que les permiten obtener significado de ellas (Bermúdez, 2011), como son las *acciones, procesos, objetos y esquemas* sobre un determinado concepto matemático, así mismo, para desarrollar y realizar las construcciones mentales se tienen seis clases de abstracción; los mecanismos de construcción, que hacen referencia a procesos mentales como la interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización.

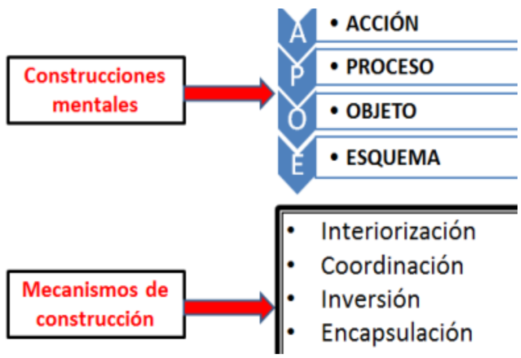


Figura 7. Elementos principales de la teoría APOS

A continuación, se presenta una breve descripción de los elementos que aporta la teoría en relación a la comprensión de conceptos u objetos matemáticos, partiendo de las construcciones mentales y finalizando con la herramienta de la descomposición genética.

Una *acción* es cualquier actividad mental o física que transforma un objeto físico o mental, por ende, tienden a ser algorítmicas y de forma externa (Clark et al., 1997). Una acción es *interiorizada* por la repetición y el reflejo de la misma, no se produce por alguna influencia externa, y en consecuencia se vuelve en una construcción interna llamada *proceso*.

Un individuo posee una concepción *proceso* del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. Sin embargo, un proceso también puede generarse por la *coordinación* o *reversión* de dos o más procesos; estos mecanismos permiten establecer relaciones entre los procesos para determinar un nuevo proceso, ya sea realizando nuevas transformaciones o deshaciendo las secuencias de dichas transformaciones. Según Meel (2003, p. 245) "cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como encapsulado para convertirse en un objeto", esto es, una vez encapsulado el proceso, el *objeto* existe en la mente del individuo. Finalmente, según Dubinsky (1991), un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema viene dada por la capacidad del individuo de determinar si se puede utilizar en el tratamiento de una situación matemática particular. Los esquemas son entonces construcciones mentales que contienen la descripción, organización y ejemplificación de las estructuras mentales que un individuo ha construido en relación a un concepto matemático.

Un tercer elemento fundamental de la teoría APOE, es el que establece el vínculo entre las construcciones mentales y los mecanismos de construcción y se llama *descomposición genética*. Las descomposiciones genéticas pueden verse como una ruta estructurada de cómo se construyen los conceptos matemáticos en la mente de un individuo. Para Asiala et al (1996, p. 7), la descomposición genética de un concepto se define como el "conjunto de estructuras mentales que pueden describir cómo se desarrolla el concepto en la mente del alumno", otra idea sobre el significado de la descomposición genética es "la descomposición genética representa una vía posible en que un estudiante pueda lograr el desarrollo de una comprensión conceptual, así como una guía para el desarrollo de una actividad constructiva. En específico, la descomposición genética proporciona al maestro una trayectoria general que puede llevar al estudiante a construir una comprensión adecuada" (Meel, 2003, p. 268).
Es importante aclarar que no puede hablarse de una única descomposición genética de un concepto, ya que ésta depende de la formulación que han hecho los investigadores, y por tanto puede haber varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto (Trigueros, 2005, p.8).

La descomposición genética que se plantea con respecto a un concepto matemático en principio es preliminar, es decir es una descomposición que no ha sido validada y que ha sido diseñada basada en el análisis teórico de un concepto. Luego de desarrollar determinadas estrategias de enseñanza y aprendizaje, y realizar el análisis de los datos recogidos a través de algunos de los instrumentos de recolección que sugiere la teoría APOE en su marco metodológico, estos son: entrevistas, observaciones en clase, revisión de los libros de texto, juegos de computador, estudios epistemológicos e históricos, exámenes, (Arnon, et al, 2014, p.95), la descomposición genética es refinada, la cual debe incluir las construcciones mentales y los mecanismos de construcción que un estudiante realiza para aprender el concepto en cuestión.

Metodología

La metodología utilizada para desarrollar este trabajo se rige bajo el marco de la teoría APOS, y es direccionada en tres etapas, desde tres enfoques diferentes. El primer enfoque está relacionado con los elementos de la matemática formal, que estuvo liderado por el investigador con formación en matemática. El segundo enfoque, se relaciona con la experiencia como docentes de ecuaciones diferenciales, liderado por la directora del curso. El tercer enfoque, implica el componente didáctico; relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, liderado por el investigador con formación en educación matemática.

En la primera etapa se elaboró un análisis teórico, que parte desde la formalidad del objeto, la experiencia como docentes del curso y el componente didáctico en su enseñanza y aprendizaje. Inicialmente se realizaron reuniones, en las que cada uno de los investigadores proponía elementos a considerar desde cada enfoque liderado, estas reuniones permitían confirmar, replantear o descartar dichos elementos del análisis teórico. Adicionalmente, se programaron seminarios de teoría APOS para que los investigadores ampliaran su conocimiento de la teoría y generaran un espacio de discusión en el que se relacionaran los elementos de la teoría con el objeto de estudio analizado desde los diferentes enfoques; trabajo que dio unicidad a la hora de presentar los análisis realizados entre los investigadores.

La segunda etapa, correspondió al diseño e implementación de enseñanza, para lo cual se elaboró un taller sobre los sistemas masa resorte que consideraba los elementos encontrados en el análisis de la primera etapa. El taller se elaboró durante el primer semestre del año 2017, con dos objetivos, el primero, mejorar la comprensión de los estudiantes en relación a la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado (EDSMR). El segundo objetivo, utilizarlo como instrumento de recolección de información en la siguiente etapa del ciclo de investigación.

Finalmente, la tercera etapa que corresponde a la recolección y análisis de datos, que se desarrolló con dos grupos de estudiantes del curso de ecuaciones diferenciales, el primero durante el periodo intersemestral del año 2017 (2017-i), y el segundo con los estudiantes del segundo semestre del año 2017 (2017-II). La aplicación del instrumento al primer grupo permitió identificar y categorizar algunos niveles de comprensión o construcciones mentales de los estudiantes acerca de la ecuación diferencial que es objeto de estudio. Además, permitió identificar algunos ítems del taller que debían ser ajustados, y adicionar otros elementos que no se consideraron inicialmente. Al aplicar el taller al segundo grupo, se validó la categorización obtenida en el periodo intersemestral y se identificaron nuevas categorías.

Al finalizar la tercera etapa, se realizó nuevamente un análisis que describe las construcciones mentales y mecanismos de construcción que un estudiante desarrolla para comprender la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado, y se presenta como la descomposición genética de este objeto.

Resultados

Uno de los resultados obtenidos consiste en la propuesta de un taller que busca la identificación de algunas construcciones mentales de los estudiantes sobre el objeto de estudio (EDSMR), así como la interiorización de acciones, y la coordinación de procesos, para que sea encapsulado. A continuación, se comparten algunos puntos del taller y una breve descripción de lo que se espera en cada punto.

El primer punto que se planteó fue un enunciado de un sistema masa resorte en el que no se pedía hallar la función que describía el movimiento o plantear la ecuación diferencial, por el contrario, las preguntas fueron orientas a la forma como interpretaban cada elemento de ecuación implícito en el enunciado. El problema y una de las preguntas fue el siguiente:

masa de 160 libras de peso se sujeta a un resorte y lo estira 8 pies. Se sustituye la masa por una de 128 s de peso. El sistema se encuentra en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento de 16 veces la cidad instantanea.

¿Qué diferencia hay entre una masa que tiene un peso de 160 Libras y una masa de 5 Slugs?

Figura 8. Pregunta 1

En este caso la pregunta que se observa en la figura 2 busca identificar la forma como el estudiante pasa de una unidad de medida a otra en relación con las diferentes características del mismo objeto, por ejemplo, la masa de 5 Slugs tiene un peso de 160 libras, solo que se están dando características diferentes del mismo objeto. Para llegar e esa conclusión el estudiante debe tener claro que el peso es una fuerza y que se obtiene multiplicando la masa del objeto por la gravedad a la que está sometido.

Las preguntas 2,3 y 4 del punto 1, se plantean con el propósito de identificar las relaciones que establece el estudiante entre el tránsito del lenguaje natural al algebraico. Por ejemplo, se identificó que independiente de la información dada, generalmente los estudiantes buscan la forma de reemplazar los datos de la descripción problema en la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales, sin detenerse a reflexionar si en la información dada efectivamente se proporciona esta información. En la Figura 3 la última pregunta pide que se expresen las condiciones iniciales del sistema; aunque estas no se dieron en su descripción, algunos estudiantes las asociaron con otro tipo de información dada en la descripción dada del problema.

sirve esa información ?

- ¿Para usted qué significado tiene la expresión *"se encuentra en un medio que ofrece una fuerza de amo tiguamiento de 16 veces la velocidad instantanea."*?

- ¿Cuales son las condiciones iniciales del problema? Justifique su respuesta.

Figura 9. Punto 1, preguntas 2, 3 y 4.

El siguiente punto del taller se planteó en relación a la identificación de características propias de la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado. El ejercicio consistió en dar 6 posibles soluciones de tres ecuaciones diferenciales diferentes, dentro de las cuales el estudiante debía descartar aquellas que no serían solución de la ecuación diferencial y las que no se ajustan a un sistema masa resorte.
Por ejemplo, si las raíces de la ecuación característica son imaginarias, estas deben darse como pares conjugados, así mismo, si la ecuación corresponde a un sistema masa resorte, por ser todos sus coeficientes positivos las raíces deben ser negativas en su parte real.

Para revisar la capacidad de pasar del registro algebraico al lenguaje natural, se dio una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes positivos y se pidió que describiera o enunciara un problema de masa resorte que se ajustara a esta ecuación diferencial. Después de haber planteado el problema, se dieron unas condiciones iniciales para que fuesen interpretadas y agregadas en la redacción del problema (Figura 4).

Dada la ecuación diferencial $3x'' + 10x' + 5x = 0$.

- Describa un sistema masa-resorte que pueda ser modelado por dicha ecuación.

- Si a la ecuación $3x'' + 10x' + 5x = 0$, agregamos una de las siguientes condiciones, ¿Qué reda agregaría al problema para incluir cada caso? No olvide indicar las unidades de medida.:

$x(0) = -1$, $x'(0) = 2$	
$x(0) = 0$, $x'(0) = -1$	

Figura 10. Punto 3

Otro ítem del taller, estuvo relacionado con el uso del discriminante de la ecuación característica y su relación con cada tipo de movimiento, por ejemplo, si el discriminante es mayor que cero entonces las raíces son reales diferentes y las soluciones son de la forma $x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$, lo cual está relacionado con un movimiento sobreamortiguado.

De otra parte, para realizar el análisis de los resultados en esta propuesta, se partió de tres elementos que se consideran componentes fundamentales de la ecuación diferencial, el primero de ellos está asociado con la comprensión de las leyes de la naturaleza implícitas en la ecuación diferencial, como la ley de Hooke, ley de Stokes y la segunda ley de Newton. El segundo componente está relacionado con la comprensión de las condiciones iniciales del problema; la forma de interpretar la descripción del modelo, unificación de unidades y la representación gráfica de la ecuación diferencial. El tercer componente comprende todo lo relacionado con la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden; ecuación característica, relación entre el discriminante y tipo de movimiento, hasta llegar al planteamiento de la solución.

En relación a las leyes de la naturaleza implícitas en la ecuación diferencial, la comprensión de la EDSMR implica la comprensión de la ley de Hooke, ley de Stokes y segunda ley de Newton, que respectivamente dan significado a los coeficientes k, β y m, de la ecuación diferencial $\boldsymbol{mx'' + \beta x' + kx = 0}$**.**

En lo que corresponde a estas leyes el estudiante posee un nivel de concepción proceso cuando identifica y comprende las variables y constantes implícitas en la descripción de la ecuación diferencial. Estos procesos, en algunas ocasiones son el resultado de la interiorización de acciones, en este caso, relacionadas con los coeficientes de la ecuación diferencial. Ejemplos de estas acciones son:

- Hallar la masa del objeto cuando en la descripción del problema se refieren a su peso. En ese caso, el estudiante parte de la igualdad $W = mg$ (donde W es el peso del objeto, m la masa y g la fuerza de gravedad a la que se encuentra sometido), y despeja la masa. Dependiendo de las unidades de fuerza en las que se da el peso, el estudiante debe elegir uno u otro valor para la gravedad, por ejemplo: si las unidades de peso están dadas en Newtons, generalmente se trabaja con una gravedad de $9.8\frac{m}{seg^2}$, pero si las unidades se dan en libras Fuerza, entonces se debe trabajar con una gravedad cercana a los $32\,\frac{pie}{seg^2}$.
- Cuando se indica la elongación de un resorte, es suficiente con plantear la igualdad $F = ks$, donde F es la fuerza de recuperación del resorte k es la contante de proporcionalidad o constante del resorte y s la elongación, de esta forma, como la fuerza que hace estirar el resorte es el peso de la masa, se despeja k y se obtiene la constante a reemplazar en la ecuación diferencial.

La repetición de acciones y reflexión sobre las mismas pueden ser interiorizadas en procesos que el estudiante ejecuta. Un ejemplo de procesos relacionados con la comprensión de las leyes de la naturaleza implícitas en la ecuación diferencial son los siguientes:

- Reconoce el significado de la expresión mx'' en la ecuación diferencial según lo expuesto por la segunda ley de Newton.

- En enunciados en los que inicialmente se sujeta una masa que genera una elongación inicial del resorte y posteriormente esta es reemplazada por otra, el estudiante clasifica la información necesaria para obtener la constante del resorte, por ejemplo, en el texto de Zill y Cullen (2008) se encuentra el siguiente enunciado: “Después de sujetar una masa de 10 libras de peso a un resorte de 5 pies, el resorte mide 7 pies. Esta masa se separa y reemplaza por otra que pesa 8 libras…”, durante la recolección de información los investigadores encontraron que algunos estudiantes no comprendían para que se daba la primera parte del enunciado si finalmente el sistema se analizaba con otra masa. Así mismo, algunos estudiantes que si extraían la información del primer enunciado realizaban la identificación de los demás coeficientes con la masa inicial sin considerar que al realizar el reemplazo el coeficiente m corresponde a la masa final.

El segundo componente, que corresponde a la comprensión de las condiciones iniciales del sistema, cuando se hallan las raíces de la ecuación característica, se plantea la solución general del sistema de acuerdo a la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, pero son las condiciones iniciales del sistema las que proporcionan las constantes de la solución particular, la cual describe el movimiento del objeto suspendido al resorte. Es posible que un estudiante plantee la solución particular del sistema, mediante una serie de algoritmos, pero esto no garantiza su comprensión. En relación con lo anterior, se presentan algunos ejemplos de acciones en la comprensión de las condiciones iniciales:

- Relacionar las expresiones similares a “Se libera desde un punto ubicado (a) unidades por encima de la posición de equilibrio” o “Se libera desde un punto ubicado (a) unidades por debajo de la posición de equilibrio” con la condición sobre $x(0)$.
- Relacionar las expresiones similares a “se libera a una velocidad ascendente” o “se libera a una velocidad descendente” con la condición sobre $x'(0)$.
- Realizar una representación gráfica del sistema estableciendo un eje horizontal o vertical (dependiendo si la masa está suspendida de un resorte o sobre un plano horizontal) ubicando el cero en el punto de equilibrio y los valores positivos y negativos a derecha e izquierda o abajo y arriba.

Además, un estudiante que ha interiorizado las acciones asociadas a las condiciones iniciales del sistema puede ejecutar procesos como los que se presentan a modo de ejemplo:

- Traspasa del lenguaje natural (descripción del problema) al algebraico comprendiendo el significado de las expresiones en el sistema.
- Puede trabajar en sistemas de referencia diferentes (ubicar los valores positivos por arriba o por debajo de la posición de equilibrio) sin que esto altere su interpretación de los elementos de la ecuación diferencial o de la función solución.
- Identifica cuando es necesario unificar las unidades de medida, considerando cuales variables o constantes son relevantes en las magnitudes del sistema.

Finalmente, en el tercer componente, la solución de la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte movimiento libre amortiguado, se rige bajo la teoría de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, de tal forma que encontrar las raíces de la ecuación es un proceso algorítmico relacionado con las raíces de la ecuación auxiliar (polinomio de grado 2), de la misma forma, escribir la solución dependiendo de si las soluciones son reales diferentes, reales repetidas o imaginarias es solo un proceso de asociación con la forma de escribir la función solución. En relación con lo anterior, se describen algunos ejemplos de las acciones relacionadas con la comprensión de la ecuación diferencial:

- Plantear la ecuación característica de la ecuación diferencial, y resolverla mediante los conocimientos de solución de ecuaciones de segundo grado.
- Relacionar el discriminante de la ecuación característica con los tipos de movimiento (sobreamortiguado, subamortiguado y críticamente amortiguado).
- Relacionar el tipo raíces de la ecuación característica con el tipo de solución de la ecuación diferencial.

La interiorización de acciones como las presentadas anteriormente están dirigidas a crear el proceso de:
- Comprensión de la relación entre la función solución y el tipo de movimiento que describe.

Finalmente, la coordinación de los procesos presentados anteriormente en cada uno de los tres componentes, convergen en la compresión de la ecuación diferencial que modela un sistema masa resorte con movimiento libre amortiguado.

Conclusiones

La comprensión de las leyes físicas implícitas en la ecuación diferencial (Ley Hooke, Ley Stokes y segunda ley de Newton) es fundamental en dos momentos para comprender el sistema; al plantear la ecuación diferencial y al plantear su solución. Por ejemplo, desconocer la naturaleza de las funciones que describen este fenómeno puede llevar a que funciones planteadas como si las raíces de la ecuación característica fueran positivas en su parte Real, sean consideradas en la solución del sistema, lo que contradice el comportamiento de este fenómeno, dado la que la amplitud de las oscilaciones tiende a cero (0) cuanto $t \to \infty$, en lugar de crecer indefinidamente.

Solucionar de forma correcta un problema de aquellos que aparecen con frecuencia en algunos libros de texto, no garantiza la comprensión del objeto matemático; fue suficiente con cambiar un ejercicio propuesto en lenguaje natural que se resolvía pasando al registro algebraico, por una expresión algebraica que se podía asociar a un sistema masa resorte, para evidenciar que algunos estudiantes que tuvieron éxito en el primer registro no lograron mayor avance cuando estos se invirtieron.

La identificación de ciertas dificultades de los estudiantes, observadas por los docentes durante la clase, no es suficiente para identificar el nivel de comprensión de un concepto u objeto matemático, por el contrario, es necesario diseñar instrumentos de recolección de información con el objetivo de identificar las diferentes formas de comprenderlo.

El refinamiento de la hipótesis planteada en la descomposición genética preliminar no solo enriquece la identificación de las construcciones mentales y los mecanismos de construcción, también favorece la elaboración de actividades que pueden utilizarse como estrategia de enseñanza para el objeto de estudio.

La descomposición genética presentada en este trabajo proporciona construcciones mentales y mecanismos de construcción, según el trabajo realizado por los investigadores y la población correspondiente a los estudiantes de la escuela colombiana de ingeniería. Sin embargo, es necesario recordar que está no es única y que pueden plantearse otras descomposiciones genéticas que consideren otros elementos, construcciones mentales y mecanismos de construcción diferentes a los encontradas.

Referencias bibliográficas

Aly, A. A., & Salem, F. A. (2013). Vehicle suspension systems control: a review. *International journal of control, automation and systems*, 2(2), 46-54.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer New York.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1 – 32.

Bermúdez, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida, el caso de un alumno universitario*. (Tesis Doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Clark, J., Cordero, F., Com-ill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal for Mathematical Behavior*, 16(4), 345 - 364.

Chaves, R. y Jaimes, L. (2014). *Descomposición genética de la ecuación diferencial lineal de primer orden que modela un problema de mezclas*. Tesis de Maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking*. In Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer Netherlands.

Fragoso, L. B., Magalhães, M. D. C., Las Casas, E. B. D., Santos, J. N., Rabelo, A. T. V., & Oliveira, R. C. (2014). A mass-spring model of the auditory system in otosclerosis. *Revista Brasileira de Engenharia Biomédica*, 30(3), 281-288.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(3), 221 - 271.

Trigueros, M. (2005). La Noción de Esquema en la Investigación en Matemática Educativa a Nivel Superior. *Educación matemática*, 17, (1), 5-31.

Vargas, H. Chaves, R. Jaimes, L. y Monserrat, F. (2017). Informe final de investigación (sin publicar). *Características propias de la ecuación logística y su comprensión en estudiantes universitarios*. Universidad colegio mayor de Cundinamarca. Bogotá-Colombia.

Villa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicos*, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A., Quintero, C. A. B., Arboleda, M. D. J. B., Castaño, J. A. O., & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 159-180.

Zill, D. & Cullen, M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1. Ecuaciones diferenciales Tercera Edición, Editorial McGraw-Hill.

TAWA PUKLLAY - LA ARITMÉTICA INCA DE RECONOCIMIENTO DE FORMAS Y MOVIMIENTOS OPERABLE EN PARALELO Y QUE NO REQUIERE CÁLCULOS NUMÉRICOS MENTALES

TAWA PUKLLAY - THE INCA ARITHMETIC BASED ON SHAPES AND MOTIONS AND PARALLEL PROCEDURES WHICH DOES NOT NEED NUMERIC MENTAL CALCULATIONS

Carlos G. Saldívar Olazo, Alvaro J. Saldívar Olazo, Diego Goycochea Olazo

Asociación Yupanki (Perú)

dhavitprem@gmail.com, yachay@yupanainka.com, jikra_prem@hotmail.com

Resumen

El objetivo es demostrar la realización de operaciones aritméticas sin cálculos numéricos mentales, mediante el reconocimiento de patrones y movimientos del método Tawa Pukllay, con elementos monovalor o multivalor en la *Yupana* o calculador Inca. Antecedentes: Desde los primeros años del siglo XX se realizan los primeros intentos de decodificación de la Yupana, desde entonces se tienen cerca de 15 métodos propuestos, todos ellos de alguna manera basados en la lógica indo-arábiga, lo cual no coincide con las crónicas en las que se describe un tipo de lógica distinta (Prem, 2018). Resultados: Se ha logrado sistematizar un conjunto de movimientos optimizados que permiten desarrollar las operaciones aritméticas desde una óptica lúdica, estratégica, de simplificación y máxima optimización, que permite además una computación natural en paralelo. Conclusiones: Es posible realizar las operaciones aritméticas basadas en una lógica de reconocimiento de patrones y movimientos, en paralelo y sin cálculo mental numérico de la forma tradicional o indo-arábiga.

Palabras clave: tawa pukllay, yupana y quipu, matemática inca, computación paralela, ábaco

Abstract

The objective is to demonstrate the performance of arithmetic operations without mental numerical calculations, through the recognition of patterns and movements of the Tawa Pukllay method, with monovalent or multivalue elements in the *Yupana* or Inca calculator. Antecedents: From the first years of the XX century the first attempts for decoding the Yupana appeared, since then, there are about 15 proposed methods, all of them somehow based on the Indo-Arabic logic, which does not coincide with the chronicles in which a different type of logic is described (Prem, 2018). Results: It has been possible to systematize a set of optimized movements that allow the performance of arithmetic operations from a playful, strategic, simplification logic and optimization perspective, which also allows natural parallel computing. Conclusions: It is possible to perform arithmetic operations based on a logic of recognition of patterns and movements, in parallel, and without using numerical mental calculation as the traditional or Indo-Arabic form does.

Key words: tawa pukllay, yupana and quipu, Inca mathematics, parallel computing, abacus

Introducción

Yupana es el nombre con el que se conoce a una estructura que utilizaban los incas en tableros para realizar sus cálculos mediante piedrecitas u otros materiales como granos de maíz y frejoles (Radicati, 1990, p. 219), existen relatos de que incluso eran dibujados en la tierra; la yupana trabajaba en conjunto con el quipu, que es un sistema donde luego se registraban los datos (Pereyra, 1990, p. 235) mediante el uso de nudos hechos en cuerdas de algodón o fibra animal. Aunque este nombre es un neologismo, describe perfectamente su funcionamiento, pues en idioma quechua, etimológicamente viene de la raíz “yupay” (contar) y el sufijo “-na” (lo que sirve para), es decir yupana significa “lo que sirve para contar” o simplemente *calculadora* (Prem, 2016, p. 15). Existen varios tipos de herramientas encontradas a los que se les ha denominado yupana, no obstante, el estudio actual está referido al modelo de yupana dibujado por Guaman Poma de Ayala.

Fig 1. “Curaca Condorchaua” por Guaman Poma de Ayala

“Desde inicios del Siglo XX se realizaron los primeros estudios de investigación sobre el posible manejo de la yupana, surgiendo diversas propuestas de decodificación y manejo de la misma. Así, se tienen por lo menos una quincena de dichas hipótesis de diferentes autores y de las más variadas formas de interpretación.” (Prem, 2018, p.13). Todas las hipótesis sobre el posible manejo de la yupana inca difieren entre unas y otras, principalmente en los siguientes aspectos:

a. Uso de la yupana en forma vertical u horizontal
b. La disposición de puntos en los casilleros del dibujo y sus posibles valores asignados.
c. El uso de dichos puntos como elementos de posicionamiento de fichas y/o siendo tomados solamente valores referenciales
d. El algoritmo para cada tipo de operación

Respecto a estos puntos, el presente estudio propone: a) uso de la yupana en posición vertical, manteniendo el sentido en el que se encuentra el dibujo original, b) y c) se toma los puntos como indicadores de los valores referenciales de cada casillero donde se encuentran y no como punto posicionales d) se proponen cuatro algoritmos, uno por cada operación aritmética básica, todos basados en 5 movimientos básicos, sus respectivos movimientos inversos y movimientos avanzados - que son abstracciones de los movimientos básicos para operar mayores cantidades de fichas ahorrando el número de movimientos - y sin necesidad de emplear cálculo numérico mental del tipo tradicional o indo-arábigo.

Marco teórico

Dada la variedad de propuestas para el uso de la yupana que emplean la lógica y procedimiento indo-arábigos y tomando en cuenta el relato del cronista José de Acosta que describe un tipo desconocido de operación, el presente estudio se centra en una hipótesis que considera una percepción diferente al momento de realizar las operaciones, encontrándose coincidencias con dicho relato “…tomarán estos indios sus granos y pondrán uno aquí, tres acullá, ocho no sé dónde; pasarán un grano de aquí trocarán tres de acullá y en efecto, ellos salen con su cuenta hecha puntualísimamente y sin errar un tilde y mucho mejor se saben ellos poner en cuenta y razón de lo que cabe a cada uno de pagar o dar que sabremos nosotros dárselo por pluma y tinta averiguado…” (Acosta, 1592, p. 190)

No obstante, y debido a que un estudio de esta naturaleza requiere otros tipos de validación desde la perspectiva de las ciencias sociales, el punto focal del presente estudio es la demostración de un nuevo método y sus posibilidades de aplicación matemática.

El sistema numérico en el que se basa el presente estudio es la base diez, debido a su clara presencia en la lingüística quechua y aimara. Así también, el punto de partida de este método al que llamo "Tawa Pukllay"[1], es la escritura propuesta por Hugo Pereyra Sánchez quien menciona "los modelos que hemos analizado tienen en común la concepción decimal que se expresa por las posiciones de las filas. Esta concordancia está plenamente justificada porque existen numerosos testimonios acerca del conocimiento y uso de la numeración decimal en la civilización inca. Entre dichos testimonios hay uno particularmente preciso, referente a los quipus, pero que resulta totalmente concordante con la decimalidad y el valor posicional según un eje vertical, el cual pertenece a Garcilaso" (Pereyra, 1990, p. 246) "En lo más alto de los hilos ponían el número mayor, que era el decena de millar, y más abajo el millar, y así hasta la unidad." (Garcilaso, 1959, p. 307).

Considerando la correlación entre la yupana como medio de cálculo y el quipu como medio de registro de resultados de cantidades calculadas, se asume una escritura y lectura en igual sentido, esto es de arriba hacia abajo, considerando cada fila como una potencia del diez, empezando en la fila diez mil "hunu", continuando hacia abajo con la de los mil "waranqa", luego la fila de centenas "pachaq", las decenas "chunka" y las unidades "-yoq/-niyoq"

El presente estudio propone que las cuatro operaciones, que corresponden al desarrollo de esquemas lúdicos, provienen del "yupay" o arte-ciencia del contar; donde la suma "yapay" es el contar agrupando; la resta "t'aqay" es el contar separando uno o más grupos, por lo que se puede realizar restas de varios minuendos y varios sustraendos de una sola vez y sin necesidad de agrupar u operarlos parcialmente; la multiplicación "miray" es el contar por grupos sin necesidad de recurrir a memorizar tablas de multiplicar y la división "rakiy" es el proceso de contar repartiendo por grupos y de manera equitativa, que se realiza sin necesidad de tanteos ni memoria de tablas de factores.

Metodología

Se empleó el estudio de documentos y la experimentación empírica, mediante pruebas de operación en el tablero empleando distintos tipos de escritura e ingeniería reversa.

Valores de las fichas en la yupana y escritura de números

Los valores asignados a la yupana siguen el esquema de la siguiente matriz:

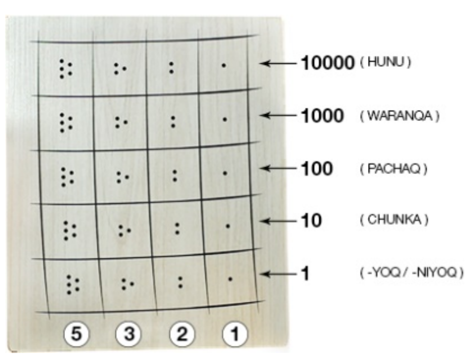


Fig. 2.0 Estructura de valores de la yupana

Definimos dicha matriz formada por las filas F_{10000}, F_{1000}, F_{100}, F_{10}, F_1 y las columnas C_5, C_3, C_2, C_1. Cuando una semilla está en un casillero del tipo (F_i, C_j), toma el valor **i** x **j**.
Siendo la simplificación un aspecto clave en el presente método, la escritura se realiza con la menor cantidad de semillas por cada fila y un máximo de una semilla por cada casillero:

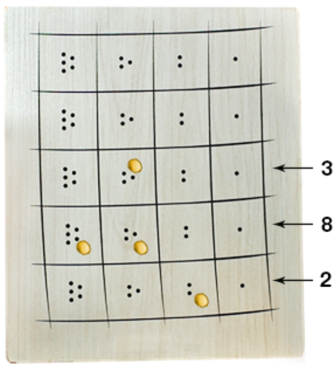


Fig. 3.0
Escritura del número 382

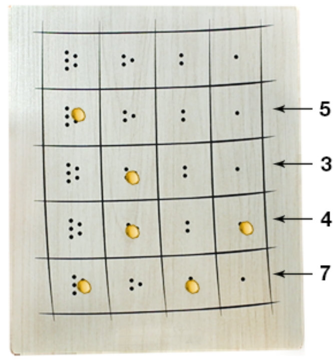


Fig. 4.0
Escritura del número 5347

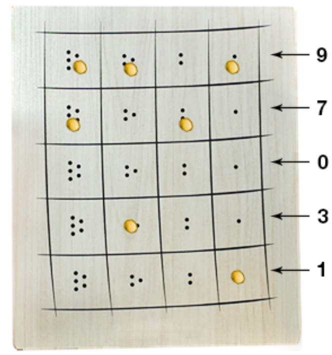
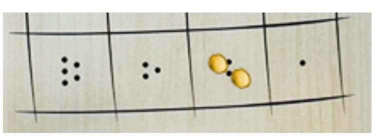


Fig. 5.0
Escritura del número 97031

Deducción de los movimientos básicos

Al escribir más de un número en la yupana puede que las semillas que representan dichos números coincidan en uno o más casilleros. Tomando en cuenta que sólo puede haber una semilla por cada casillero, usualmente procederíamos a sumar los valores de las semillas coincidentes y representarlas en su forma simple u optimizada, es decir una semilla por cada casilla. Al realizar este tipo de simplificaciones veremos que los movimientos son repetitivos, patrones fácilmente reconocibles que, al ser cambiados en el proceso mental por frases nemotécnicas en vez de operaciones numéricas, facilitan y agilizan la simplificación:



$\longrightarrow$

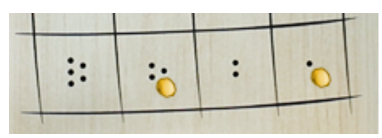


Fig. 6.0
Dos semillas de valor 2

Fig. 7.0
Representación del valor total 4

ISKAY (2 en quechua) Reemplazamos la frase “2 más 2 es igual a 4” por la frase “abrir corto” que implica abrir las semillas a los casilleros inmediatos de derecha e izquierda, tomando las semillas una con la mano derecha y otra con la izquierda y ejecutando el movimiento al mismo tiempo.

KIMSA (3 en quechua) “Abrir largo”, “hasta las casillas de los extremos”

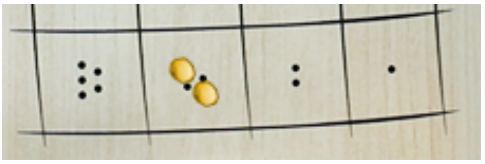


Fig. 8.0
Dos semillas de valor 3

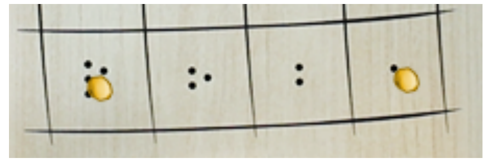


Fig. 9.0
Representación del valor total 6

PISQA (5 en quechua) “Una semilla nace en la siguiente fila y la otra sale” ó “Paqarina”

Fig. 10.0
Dos semillas de valor 5

Fig. 11.0
Representación del valor total 10

KIKIN (“los equivalentes”) “2 en 1 = 1 en 2”; “3 en 1 = 1 en 3”; “5 en 1 = 1 en 5”
Esta casilla permite esas tres opciones dependiendo de la cantidad de semillas que tenga:

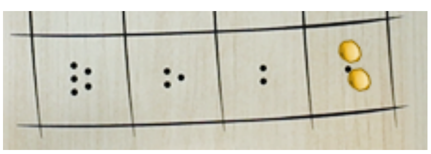


Fig. 12.0
Dos semillas de valor 1

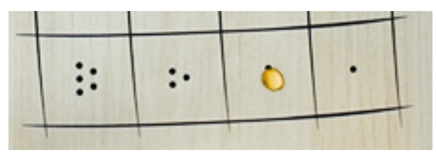


Fig. 13.0
Una semilla de valor 2

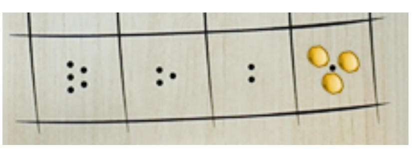


Fig. 14.0
Tres semillas de valor 1

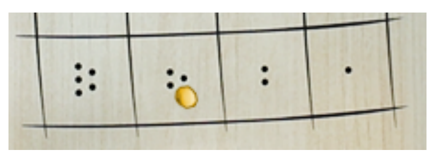


Fig. 15.0
una semilla de valor 3

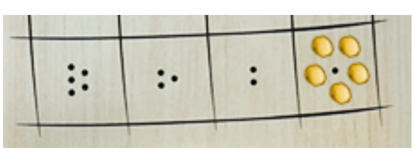


Fig. 16.0
Cinco semillas de valor 1

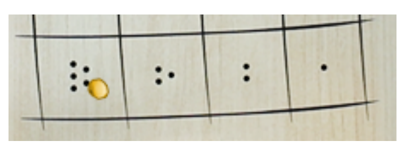


Fig. 17.0
Una semilla de valor 5

Ejecutando esos cuatro movimientos se garantiza obtener como resultado una semilla como máximo por cada casillero, sin embargo, no basta para hacer legible la respuesta final de una operación con varios dígitos ni para optimizar al máximo el número de semillas por cada fila, por lo que necesitamos un movimiento de simplificación final al que llamamos Pichana (barrido o escoba en quechua), el cual verifica que no queden simultáneamente en la misma fila una semilla en el casillero 1 y una semilla en el casillero 2, ni tampoco una semilla en el casillero 2 y otra en el casillero 3. En caso se encuentren dichas posiciones "la semilla de la derecha salta por encima de la otra y se retira la que no saltó", así:

Pichana (1 y 2):

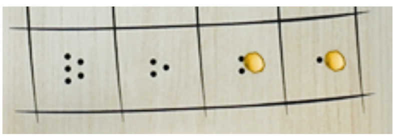


Fig. 18.0
Semillas en 1 y 2 en simultaneo

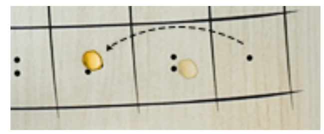


Fig. 19.0
Movimiento Pichana (1,2)

Pichana (2 y 3):

Fig. 20.0
Semillas en 2 y 3 en simultaneo

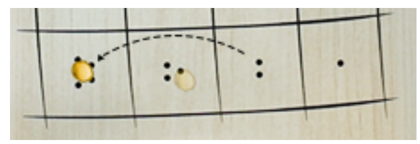


Fig. 21.0
Movimiento Pichana (2,3)

Deducción de los movimientos invertidos o movimientos de extensión

Al ser todos los movimientos antes vistos reemplazos del mismo valor por formas más simplificadas, podemos utilizar los mismos movimientos de manera inversa, esto es partiendo del estado final y regresando a la posición que los generó. Estos movimientos inversos, también conocidos como movimientos de extensión son útiles para operaciones como el t'aqay (resta) y el rakiy (división).

Yapay ó suma en paralelo

Para sumar 1782 + 2512 colocamos ambas cantidades en el tablero, reconocemos los movimientos a realizar y los ejecutamos hasta que no quede ningún movimiento pendiente:

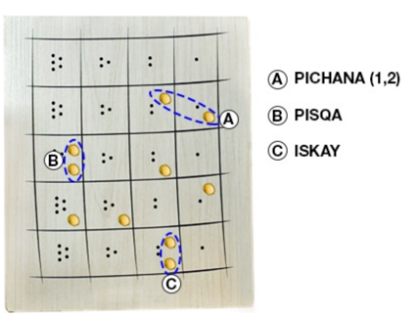


Fig. 22.0
Sumandos y estrategia

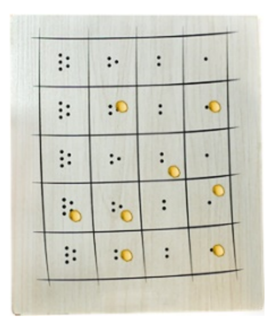


Fig. 23.0
Respuesta optimizada 4294

T'aqay o resta en paralelo que permite varios minuendos y varios sustraendos

Consideremos una cosecha de maíces de dos lugares A=480 y B=538, de los cuales se repartirá a tres destinos X=150, Y=223, Z=35. Para averiguar la cantidad restante, escribimos los minuendos con el mismo color de semilla y los sustraendos con otro color. Dos semillas de color distinto en una casilla se anulan. Usar movimientos inversos.

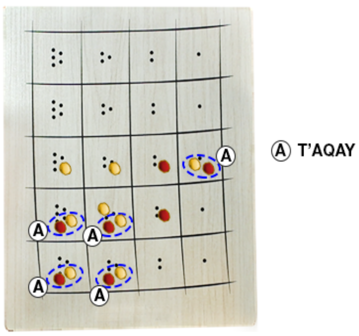


Fig. 24.0
Minuendos y sustraendos

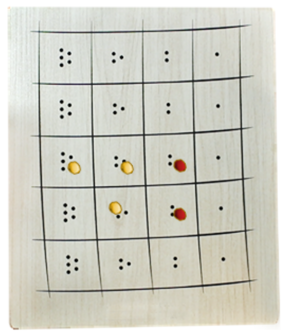


Fig. 25.0
Simplificación parcial

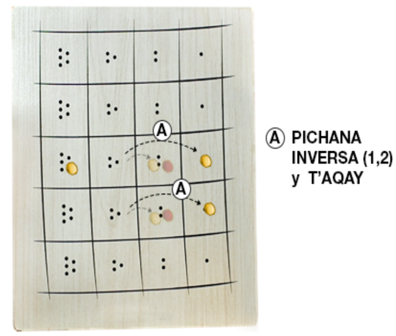


Fig. 26.0
Respuesta optimizada 610

Miray o multiplicación en paralelo a través de sumas y/o restas, sin necesidad de tablas

La multiplicación es una secuencia de sumas consecutivas. Para dos factores M y N, se tiene que M x N es igual a la suma de N veces M o la suma de M veces N. Así si se considera 24 x 3, ante ambas posibilidades, será más sencillo sumar 3 veces el número 24:

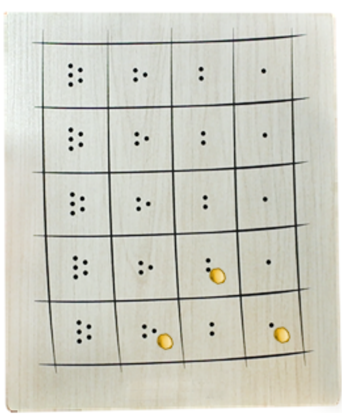


Fig. 27.0
Una vez el 24

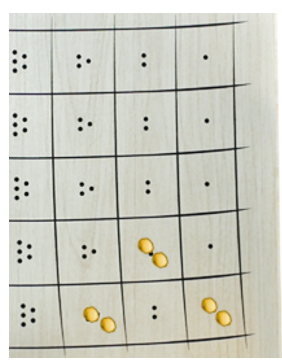


Fig. 28.0
Dos veces el 24

Fig. 29.0
Tres veces el 24

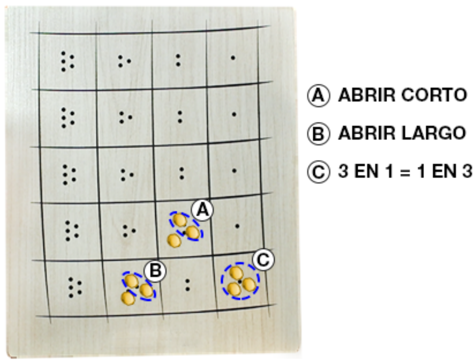


Fig. 30.0
Movimientos básicos en paralelo

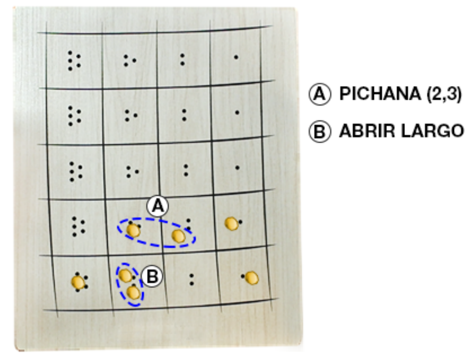


Fig. 31.0
Movimientos básicos en paralelo

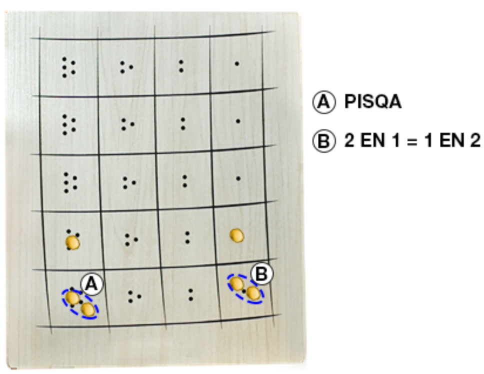


Fig. 32.0
Movimientos básicos en paralelo

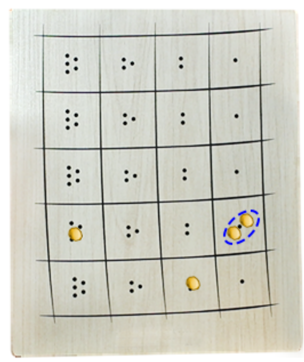


Fig. 33.0
Simplificación 2 en 1=1 en 2

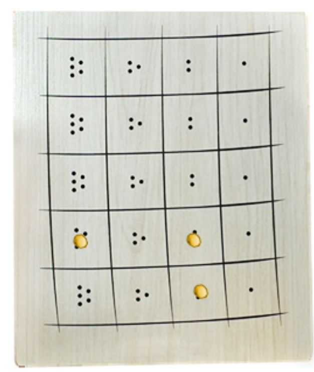


Fig. 34.0
Respuesta Optimizada=72

Si tuviera que darse muchas semillas, es factible recurrir al uso de restas: "9 x 5" es 9 veces 5, podemos dar 10 semillas al 5, colocando una semilla en el casillero de la fila inmediata superior y restándole una unidad con semilla de otro color.
Rakiy o división en paralelo sin tanteos ni necesidad de tablas

El Rakiy es un conteo de las veces que está contenido el divisor en el dividendo, lo cual puede ser determinado realizando una serie de restas continuas. Se deben hacer coincidir todas las semillas del divisor en los mismos casilleros con las semillas del dividendo, cada vez que esto se realiza, se toma nota aparte del *Rakiy* encontrado y se retiran del tablero las semillas del dividendo que acaban de ser restadas en grupo, se repite este procedimiento hasta que no queden semillas del dividendo o hasta que el valor que representan sea menor que el valor del divisor. El cociente será el número total de *Rakiy* encontrados y el residuo será el valor indicado por las semillas del dividendo que ya no pueden ser más distribuidas. Cuando hay residuo, las semillas de dicho residuo pueden ser subidas hacia la casilla inmediata superior - lo que equivale a multiplicarlas por diez - permitiendo continuar la operación para el cálculo de decimales. Consideremos 14 / 4:

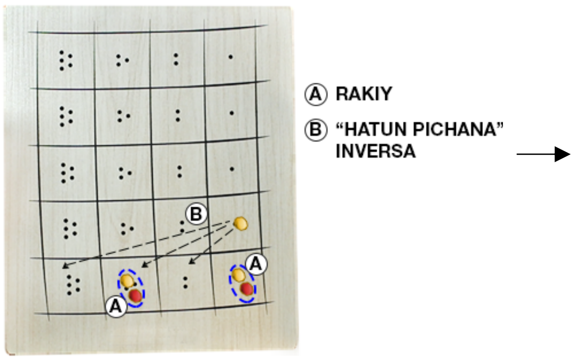


Fig. 35.0
Rakiy=1

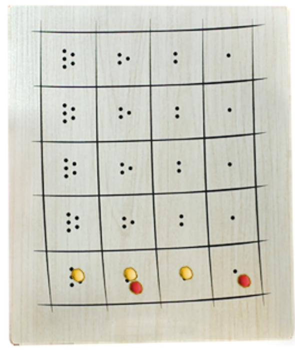


Fig. 36.0
1 en 2=2 en 1

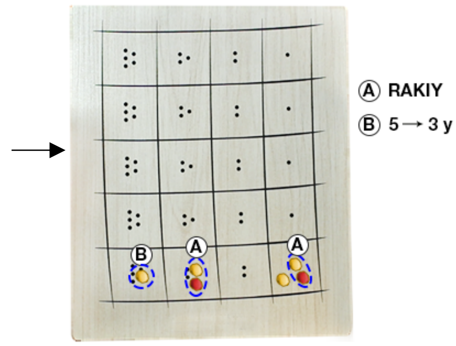


Fig. 37.0
Rakiy=2

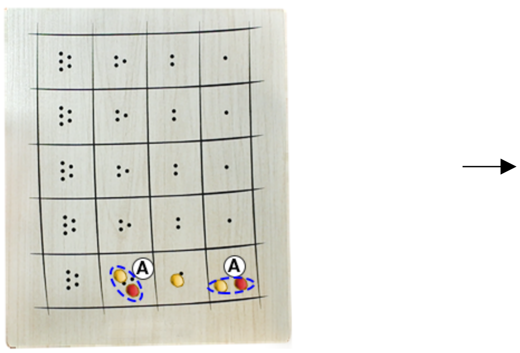


Fig. 38.0
Rakiy = 3

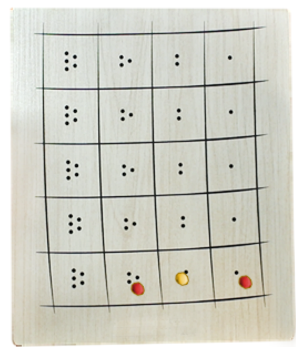


Fig. 39.0
Respuesta =3 con residuo 2

Resultados

Todos los planteamientos aritméticos que se operan con este método producen resultados exactos y dependiendo del grado de habilidad de quien realice las operaciones, con mucha mayor rapidez que en la forma tradicional indo-arábiga.

Al utilizar otro tipo de procesos mentales más intuitivos y que no requieren mayor uso de memoria ni cálculo numérico, se convierte en una herramienta de aprendizaje lúdico y concreto de la aritmética, con alto atractivo para personas de todas las edades y facilitando a personas con dificultad de aprendizaje. Actualmente están en estudio las implicancias cognitivas en poblaciones de educación regular y poblaciones con dificultad de aprendizaje.
Debido al uso de términos quechua y aimara, el requerimiento de uso de las dos manos al operar y el empleo de movimientos afines a algunas otras prácticas cotidianas andinas, *Tawa Pukllay* presenta un alto atractivo en estudiantes de zonas rurales, quienes la elijen con amplia preferencia entre otras herramientas de aprendizaje aritmético.

Las operaciones aritméticas pueden ser realizadas de manera paralela, esto es, aplicando movimientos de simplificación en varias casillas a la vez, lo que abre la posibilidad de tener varias personas realizando una misma operación en un mismo tablero, que llevado a términos de computación electrónica significa la posibilidad de una computación natural paralela.

Conclusiones

El presente estudio muestra que es posible operar la yupana o calculador inca mediante el reconocimiento de formas y movimientos, sin necesidad de cálculos numéricos mentales. Además de realizar las cuatro operaciones aritméticas básicas, obteniendo la respuesta de la forma óptima respecto al número de fichas a utilizar, cuando se realiza la multiplicación como sumas continuas y la división como repartición sin tanteos basados solamente en la memoria, el estudiante comprende el procedimiento real de cada operación.

Es posible realizar movimientos avanzados que son una abstracción y composición de dos o más movimientos básicos y que permiten realizar las simplificaciones con mayor rapidez al mismo tiempo que evidencian una mayor posibilidad de creación de estrategias.

Las operaciones no siguen un orden estricto, ni tampoco es necesario llevar la cuenta de acarreos, lo que permite múltiples formas de simplificación y hasta realizar más de un movimiento en simultáneo, evidenciándose como método aritmético de cómputo paralelo.

Referencias bibliográficas

Acosta, J (1592) *Historia Natural y Moral de las Indias.* Sevilla, España.

Ansión, J. (1990). *Quipu y Yupana – Colección de escritos.* Lima, Perú: CONCYTEC.

Burns, W. (2010). *El Mundo de los Amautas*. Lima, Perú: Universidad Alas Peruanas.

Chirinos, A. (2010). *Quipus del Tahuantinsuyo. Curacas, Incas y su saber matemático en el siglo XVI.* Lima, Perú: Editorial Comentarios.

De Pasquale, N. (2001). *Quipus.it* Recuperado de http://www.quipus.it/

Freejutube (anónimo) (2013). *Evolving backwards*. Recuperado de https://www.youtube.com/channel/UCYVIoptXU43ZJ4jqDwktYdA

Hernández, C. (2008). *Yupana Dinámica*. Recuperado de https://es.slideshare.net/carloshdez/yupana-dinamica-491759

Moscovich, V. (2010). *El Khipu y la Yupana*. Lima, Perú.

Pereyra, H. (1990). *Quipu y Yupana – Colección de escritos*. Lima, Perú: CONCYTEC

Prem, D. (2016). *Yupana Inka – Decodificando la Matemática Inka.* Lima, Perú.

Prem, D. (2018) *Hatun Yupana Qellqa*. Lima, Perú

Radicati, C. (1990). *Quipu y Yupana – Colección de escritos*. Lima, Perú: CONCYTEC

Ríos, J. (2013). *Pensamiento pedagógico Las matemáticas ancestrales y la yupana. Revista Tarea*, (pp.41-47) Recuperado: http://tarea.org.pe/images/Tarea82_41_Jesus_Rios.pdf

Rivas, R. (2013). *Tablero lúdico Yupana Kipu-ayuda*. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=ZRf0QcKdDWk

Santo Tomás, D. (1560) *Lexicon.* Recuperado de http://www.archive.org

Urton, Gary (1997). *The Social Life of Numbers.* USA, University of Texas Press

Wassén, H. (1990). *Quipu y Yupana*. Lima, Perú: CONCYTEC

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

NIVELES DE COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA MEDIANTE VISUALIZACIÓN MATEMÁTICA EN GEOGEBRA

LEVELS OF UNDERSTANDING OF THE TRIGONOMETRIC IDENTITY CONCEPT THROUGH MATHEMATICAL VISUALIZATION IN GEOGEBRA

Alejandra Adame Esparza, Mónica del Rocío Torres Ibarra, Elvira Borjón Robles, Fernando Hitt Espinosa
Universidad Autónoma de Aguascalientes. Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
Université du Québec à Montréal Canadá).
alex280_80@yahoo.com.mx, mtorres@matematicas.reduaz.mx,
borjonrojo@hotmail.com, hitt.fernando@uqam.ca

Resumen
El presente trabajo presenta los resultados de una investigación donde se concibió e implementó una secuencia didáctica que contribuyera a la construcción y comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en estudiantes de segundo semestre del nivel Medio Superior. Tomando como principal herramienta la visualización matemática, basada en la creación de redes de representación, se induce al estudiante en tratamiento, tránsito y conversión entre diversas representaciones del concepto. En esta labor el software GeoGebra es de gran ayuda ya que brinda las herramientas necesarias para el logro de nuestros objetivos. Con base en los resultados obtenidos, se realiza un análisis que permite identificar los niveles de comprensión del concepto en cada estudiante; dicho logró está determinado por el número y la fuerza de las conexiones que se presentan entre las distintas representaciones.

Palabras clave: visualización matemática, niveles de comprensión, representaciones

Abstract
This work presents the results of a research where a didactic sequence, which contributes to the construction and understanding of the concept of Trigonometric Identity in High school second-grade students, was conceived and implemented. Taking mathematical visualization as the main tool, based on the creation of representation networks, the student is induced to work in this environment, about transit and conversion between different representations of the concept. In this work GeoGebra software is of great help as it provides the necessary tools to get our objectives. Based on the results obtained, an analysis is carried out to identify the levels of understanding of the concept in each student; this achievement is determined by the number and the strength of the connections that appear between the different representations.

Key words: Mathematical visualization, levels of understanding, representations

Introducción

Una de las problemáticas que actualmente vive la Trigonometría es la preponderancia de fórmulas y la ausencia de sentido geométrico, que, al no mostrar relación alguna, resulta ser un factor que imposibilita al estudiante la construcción y por ende comprensión de algunos conceptos de la matemática. En particular, la falta de articulación entre diferentes registros de representación del concepto de Identidad Trigonométrica dificulta la comprensión del mismo más allá de su manejo algebraico.

La labor docente fue la que hizo que nos interesáramos por este concepto ya que de manera empírica se ha observado que en el Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes existe una tendencia hacia la reprobación de la unidad de aprendizaje que comprende este tópico matemático. El reto fue crear nuevos materiales que permitieran enseñar este tema de una manera diferente, donde se buscara una verdadera comprensión por parte de los estudiantes.

Marco teórico

Históricamente, la visualización ha jugado un papel muy importante en la comprensión de las matemáticas, por ejemplo, en 1945, Jacques Hadamard realizó una investigación entre algunos matemáticos a fin de determinar sus métodos de trabajo. La conclusión a la que llegó fue sorprendente: casi todos ellos, salvo contadas excepciones, dijeron no atacar los problemas en términos verbales o algebraicos, sino con base en una vaga imaginación visual (Torres, 2004, p. 20).

Así, en los inicios de la matemática, específicamente en la época de los pitagóricos, la visualización era sumamente importante, el descubrimiento estaba ligado a los procesos de visualización. Es con Euclides en donde se transforma la matemática visual a una matemática lógico-deductiva, la figura deja de ser un elemento central y empieza a jugar un papel secundario. La necesidad de una matemática lógico-deductiva era imperativa para librar a la matemática de contradicciones.

Es así como se consideró que un acercamiento didáctico en el aula, debería tomar en cuenta tanto el razonamiento lógico-deductivo (formal) como un acercamiento visual; ya que como menciona Hitt (32003) “la visualización matemática de un problema juega un papel importante, y tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del problema” (Hitt, 2003, p. 3).
En este sentido, Duval establece que, “dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación” (Hitt, 2003, p.214). La comprensión de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación. En otras palabras, la aprehensión de un concepto sólo se logrará si existen actividades de conversión de una representación a otra y viceversa propiciando con esto la construcción de los conceptos matemáticos.

Por su parte Hitt (1998) reafirma esta idea al mencionar que comprender un concepto implica una articulación coherente de las diferentes representaciones que intervienen durante la resolución de problemas, es decir, un concepto matemático visto en sus diferentes representaciones proporcionará información específica, dando solidez al concepto en cuestión.

Para poder contar con un instrumento de medición en el quehacer de la visualización, se toma como base a Hiebert y Carpenter (1992, citado en Hitt, 2003), quienes indican que comprender se definirá en términos de cómo se representa y se estructura la información. Una idea matemática, un procedimiento o un hecho se comprenderán perfectamente si está vinculado a redes de representaciones existentes con conexiones más fuertes y numerosas. En este sentido, el propio Hitt (1998) describe 5 niveles que tienen que ver con la comprensión de los conceptos y que están basados en el tipo de representaciones que los estudiantes dominan y emplean, así como en la interacción entre las mismas:

Nivel 1: Reconocimiento de los elementos de un sistema semiótico.
Nivel 2: Transformaciones internas a un sistema semiótico.
Nivel 3: Conversiones de una representación de un sistema semiótico a otro.
Nivel 4: Coordinación de representaciones entre diferentes sistemas.
Nivel 5: Producción de representaciones semióticas en la resolución de un problema.

Con todos estos argumentos, nos propusimos el objetivo analizar el nivel de comprensión del concepto de identidad trigonométrica en los estudiantes del nivel medio superior; mediante una serie de actividades que involucraran la manipulación de las identidades trigonométricas en sus diferentes representaciones, que permitan al estudiante crear conexiones entre dichas representaciones.

Metodología

La metodología que se utilizó en la presente investigación fue la Ingeniería Didáctica la cual se caracteriza "por un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (Artigue, 1995, p.36). Estructurada en cuatro fases: un análisis preliminar, la concepción y análisis a priori de la secuencia didáctica, la experimentación y el análisis a posteriori y validación.

Para llevar a cabo el análisis preliminar, se consideraron tres dimensiones, en las cuales se buscaba conocer la consolidación del concepto de identidad trigonométrica a través de la historia (epistemológica); los errores mostrados por los estudiantes en el estudio de este concepto (cognitiva); la propuesta de trabajo expuesta en libros de texto y programas de estudio (didáctica).

Tomando como referencia los resultados del análisis preliminar, se diseñó, probó y concibió, con ayuda del software GeoGebra, una secuencia de seis actividades que consideraran diversas representaciones del concepto de identidad trigonométrica (Adame, 2017), con la finalidad de propiciar el tratamiento, tránsito y conversión entre ellas y así lograr la construcción y comprensión de este tópico. A continuación, se describen los objetivos principales de las actividades.

Actividad 1: El objetivo fue que los estudiantes dedujeran de manera intuitiva las identidades trigonométricas básicas, así como que comprendieran el hecho de que dos expresiones trigonométricas que producen el mismo gráfico (ver figura 1), son equivalentes.
En esta sección el estudiante identifica y manipula dos tipos de representaciones: la algebraica y la gráfica; propiciando con ello el tránsito entre dichas representaciones.

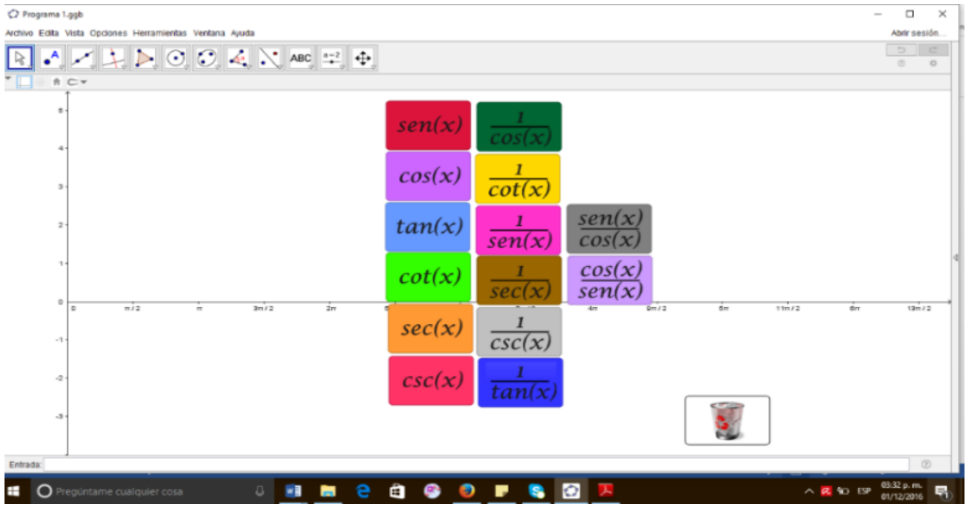


Figura 1. Entorno en Geogebra de la actividad 1

Actividad 2: El objetivo fue que, mediante la manipulación del círculo trigonométrico y la representación tabular, los estudiantes dedujeran la equivalencia entre expresiones trigonométricas encontrando valores numéricos para distintos ángulos sugeridos.
Actividad 3: En esta actividad los estudiantes deducen la Identidad Trigonométrica $sen^2x + \ cos^2x = 1$ y comprenden su significado mediante la manipulación de la representación figura y la tabular (ver figura 2).

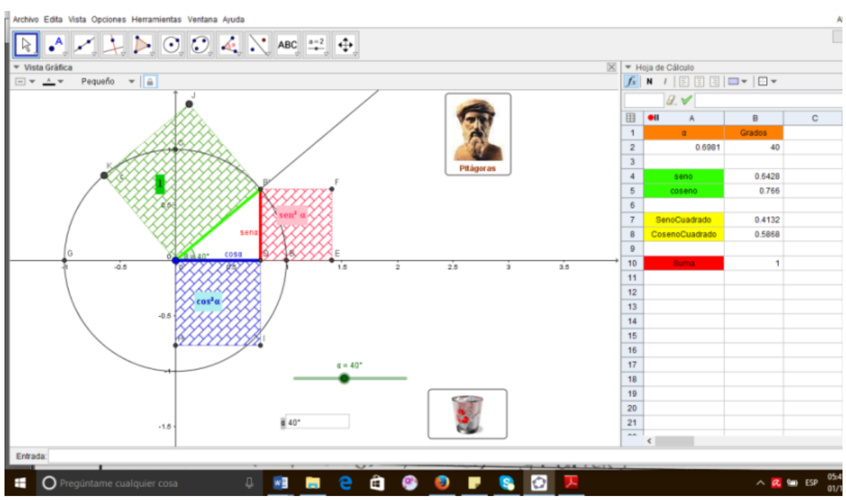


Figura 2. Entorno en Geogebra de la actividad 3

Actividad 4: El objetivo fue mostrar al estudiante que existen expresiones trigonométricas en apariencia similares, pero que no son identidades trigonométricas; se les mostró una supuesta equivalencia entre expresiones trigonométricas y se le cuestionó de qué manera se podría saber si la expresión era verdadera. En esta actividad de indujo a que el estudiante transitara entre la representación gráfica y la tabular y expresara el concepto de identidad con sus propias deducciones.

Actividad 5: El objetivo fue mostrar al estudiante que, valores de cualquier ángulo en expresiones trigonométricas equivalentes, hacen verdadera la identidad (ver figura 3). Se mostró una equivalencia entre expresiones trigonométricas y mediante el trazo de gráficas y evaluaciones en diversos ángulos en una representación tabular, fueron descubriendo que realmente se trataba de una identidad.

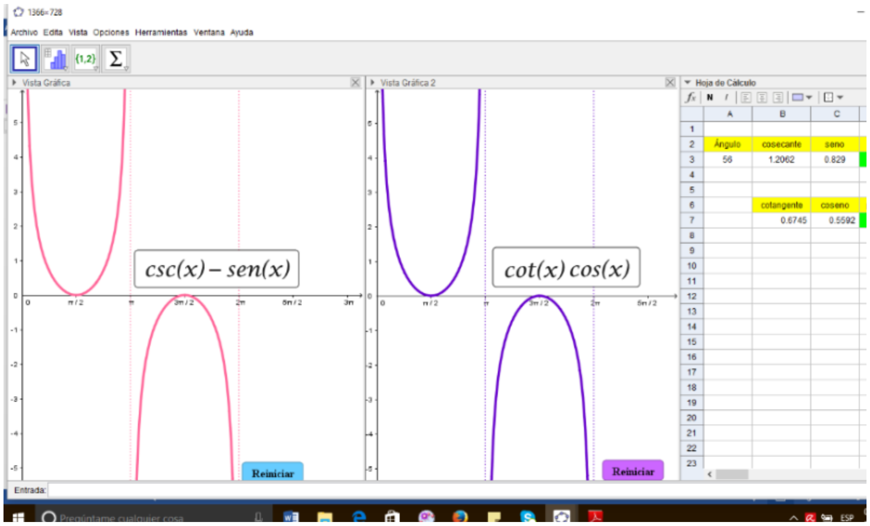


Figura 3. Entorno en Geogebra de la actividad 5

Actividad 6. En esta actividad se buscó introducir un método para comprobar una equivalencia de manera algorítmico-formal, sin necesidad de obtener valores para casos particulares. Se mostraron los gráficos de ambos lados de la equivalencia y el estudiante iba realizando modificaciones en las expresiones, encontrando que existen cambios que perjudican las gráficas iniciales y otros cambios que mantienen las gráficas intactas.

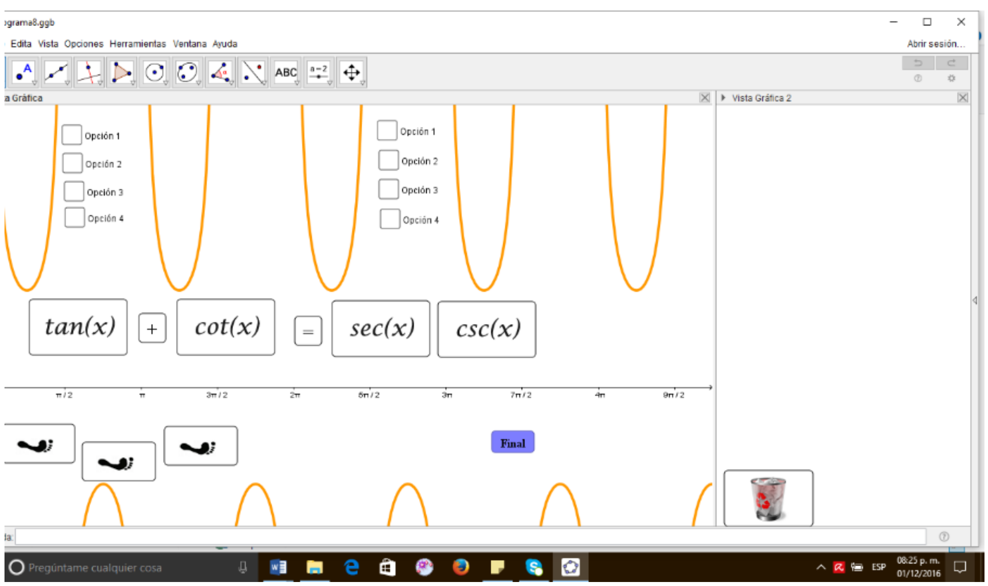


Figura 4. Entorno en Geogebra de la actividad 6

Posterior al diseño y elaboración de las actividades, estas fueron piloteadas, logrando con ello cronometrar tiempos de aplicación y verificar la comprensión de las instrucciones; obteniendo con ello un análisis a priori con las respuestas esperadas para la puesta en marcha.

Experimentación

Una vez realizadas las modificaciones pertinentes, la aplicación se llevó a cabo en el Centro de Educación Media de la Universidad Autónoma de Aguascalientes con un grupo mixto de 51 estudiantes de segundo semestre, 33 mujeres y 18 hombres, cuyas edades oscilaban entre los 15 y 16 años (ver figura 5), al cual se le dio seguimiento durante todo el semestre.

Figura 5. Grupo de estudiantes con el que se realizó el estudio

La aplicación se llevó a cabo en el aula habitual de clases; los estudiantes formaron equipos de entre cuatro y cinco personas. Contaban con una computadora portátil por equipo la cual ya contaban con los respectivos programas instalados, además cada estudiante contaba con las actividades impresas en papel.

En todo momento se contó con la guía de la profesora del curso (investigadora), quien coordinó los tiempos previstos y dio retroalimentaciones pertinentes y oportunas. La propuesta se manejó como actividades guiadas en las que los estudiantes interactuaban con los programas, dando un espacio para la reflexión y otro más para la retroalimentación. En total se aplicaron seis actividades en un lapso de 7 días, en sesiones de aproximadamente 50 minutos.

Análisis de resultados

Esta etapa se realizó dentro de una estancia de investigación a la Universidad de Quebec, Canadá, donde, se analizaron los niveles de comprensión propuestos por Hitt (1998) para hacer una clasificación de los estudiantes con base a las conexiones que presentaron. Para los objetivos de esta investigación, consideramos solamente 4 de esos niveles ya que el quinto nivel referente del uso de los diversos registros para la solución de problemas no fue contemplado en las actividades:

Así, nuestra clasificación se estructuró de la siguiente manera:

- Nivel 1: En este nivel clasificamos a los estudiantes que tienen ideas imprecisas acerca de un concepto. Presentan una mezcla incoherente de diferentes representaciones del concepto.
- Nivel 2: En este nivel clasificamos a los estudiantes que realizan tratamientos (transformaciones) dentro de un mismo registro de representación.
- Nivel 3: En este nivel clasificamos a los estudiantes que realizaron de manera satisfactoria tareas de tránsito (conversión) de un registro de representación a otro.
- Nivel 4: En este nivel clasificamos a los estudiantes que articularon diferentes registros de representación, es decir, los estudiantes que manipulen el tránsito entre registros de ida y vuelta.

Para lograr esta clasificación, se formaron redes de representaciones cuyo número y fuerza nos determinaron el grado de comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en cada uno de los estudiantes. Para ello, se procedió a hacer una revisión de las respuestas de los estudiantes, implementando una codificación acorde a las acciones (tratamientos, tránsitos, conversiones y articulaciones) desarrolladas por los estudiantes, como se presenta en la siguiente figura:

E_1	0	1	0
E_2	1	1	0
E_3	0	1	0
E_4	0	1	1
E_5	0	0	0
E_6	1	1	0
E_7	1	1	1
E_8	0	1	1
E_9	0	1	1
E_10	1	1	0

Distinguimos las acciones de los estudiantes utilizando la siguiente notación para la constitución de los niveles de comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica:

- Reconocimiento de los elementos de un registro de representación: se manejó el registro verbal (R_V), el registro algebraico (R_A), el registro gráfico (R_G), el registro tabular (R_T), y el registro figural (R_F).
- Tratamiento interno dentro de un mismo registro: $T_{V\uparrow}$, $T_{A\uparrow}$, $T_{G\uparrow}$, $T_{T\uparrow}$, $T_{F\uparrow}$
- Tránsito de un registro de representación a otro: $C_{V\rightarrow A}$,$C_{A\rightarrow G}$ etc.
- Coordinación entre registros, cuando existe tránsito de ida y regreso: $C_{V\leftrightarrow A}$, $C_{A\leftrightarrow G}$, $C_{V\leftrightarrow G}$

Según la concepción de la actividad, la figura 7 muestra cómo sería la red de un estudiante que haya realizado todos los tratamientos, tránsitos, conversiones y articulaciones esperadas en la realización de la actividad, es decir, un visualizador nivel 4.

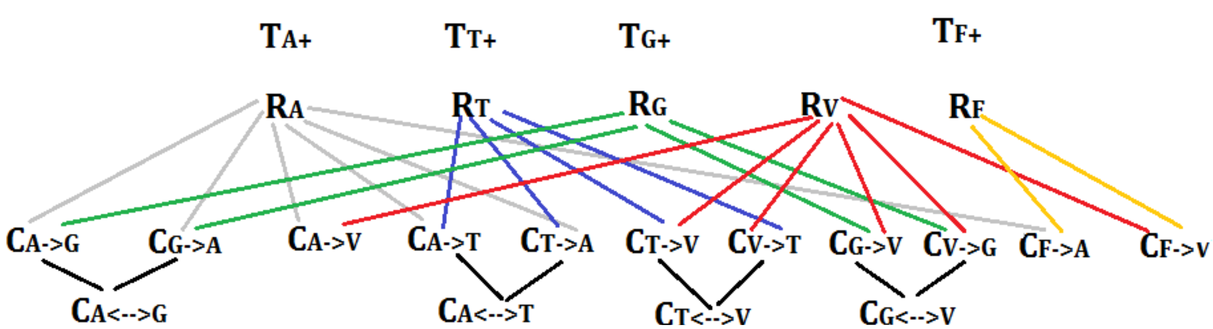


Figura 7. Red de representaciones completa o esperada de las actividades.

En contraste, a continuación, se muestra la red de representaciones de uno de los estudiantes que se clasificó en el nivel 4.

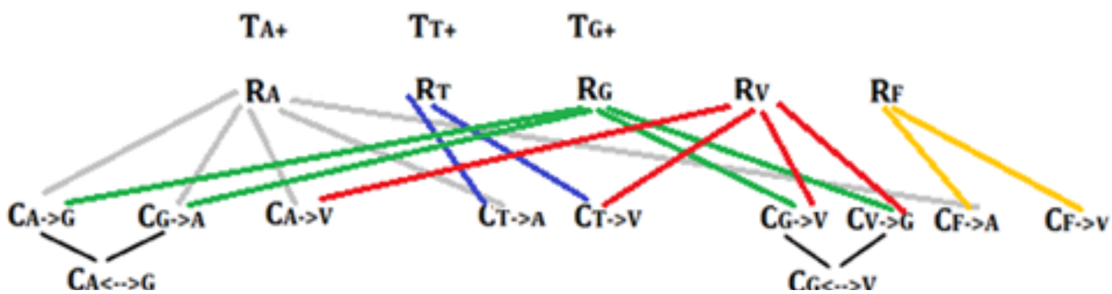


Figura 8. Red de representación del estudiante 34.

Se puede apreciar que, aunque el estudiante recae en el nivel 4, su red de representación ya carece de ciertos elementos en comparación con la red esperada.

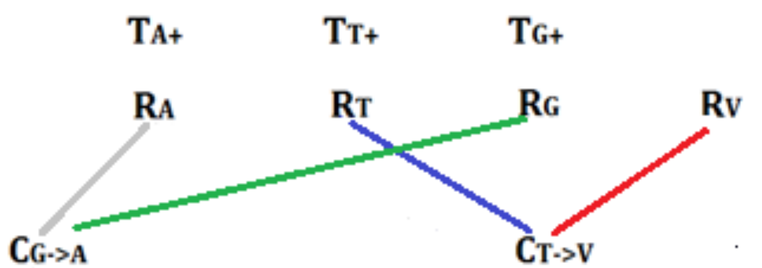


Figura 9. Red de representación del estudiante 42.

Se aprecia que este estudiante está en el nivel 3 puesto que realiza dos tránsitos entre registro diferentes, sin embargo, su red carece de muchas conexiones.

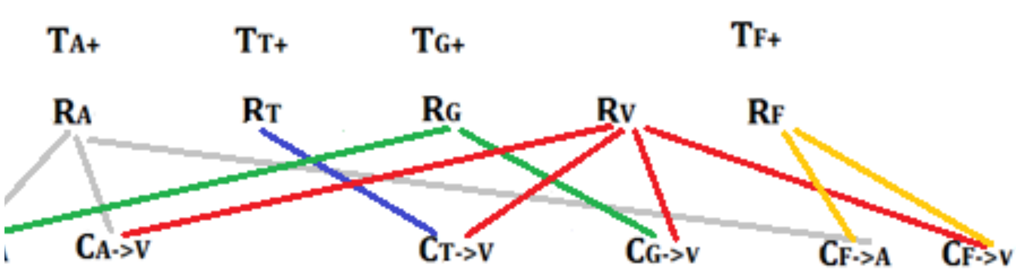


Figura 10. Red de representación del estudiante 10.

Este es otro ejemplo de un estudiante que está categorizado en el nivel 3, sin embargo, a diferencia del pasado, este estudiante tiene más conexiones debido a que realiza más tránsito entre registros de representación.
Se puede apreciar que el número de conexiones del estudiante 34 es mucho mayor que la de los otros dos estudiantes, mostrando que este estudiante es más competente que los otros en el dominio de conocimiento relativo al concepto de Identidad Trigonométrica.

Después de analizar todas las redes que generaron los estudiantes, se procedió a asignarlos el nivel de comprensión, con lo que se obtuvo que los 51 fueran capaces de realizar al menos 2 de los tránsitos por lo que fueron categorizados en el nivel 3 de comprensión. Se logró que 5 estudiantes realizaran tares de articulación entre registros, categorizándolos en el nivel 4 de comprensión.

Los 5 estudiantes que entraron en el nivel 4 de nuestra categoría fueron capaces de transformar (transitar), generar, comunicar y reflexionar sobre toda la información que se les presentó, lo que para nosotros los hace visualizadores en potencia. Ya que la visualización tiene que ver con comprender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión, podemos decir que todos los estudiantes cumplieron con el objetivo de visualizar matemáticamente hablando.

Conclusiones

En una época en donde todo cambia a pasos agigantados, es importante reflexionar sobre las formas de enseñanza en las aulas. En este sentido la tecnología puede tomar un papel relevante al momento de ser utilizada en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje, proponiendo alternativas didácticas que la incluyan.

Los resultados arrojados en este estudio dan muestra de que la visualización matemática, concebida a través de un diseño cuidadoso de actividades en el que intervienen tanto la interrelación de diversas representaciones de los objetos matemáticos como las herramientas tecnológicas, son un medio que permiten a los estudiantes desprender el objeto de sus representaciones, al tiempo que al crear redes entre estas últimas van logrando un mayor nivel de comprensión de los objetos trabajados.

La utilización de una herramienta tecnológica fue crucial para este estudio, pues favoreció de sobremanera la actitud de los estudiantes hacia el tema; además de que la representación de los objetos no habría sido posible de otro modo; aún más, la implementación de la metodología elegida, en la que se realizan diversos análisis preliminares como base principal para la concepción de la secuencia, nos permitió considerar aspectos en los que los estudiantes pudieran externar las imágenes mentales que en ellos se generan al momento de manipular el objeto en sus diferentes representaciones, creando con ello redes de representación lo suficientemente sólidas para dar muestra de la comprensión del objeto mismo.

Referencias bibliográficas

Adame, A. (2017). *Una propuesta de Enseñanza para la Construcción y Comprensión del concepto de Identidad Trigonométrica en el Nivel Medio Superior*. Tesis sin publicar, Universidad Autónoma de Zacatecas, Zacatecas, México.

Artigue, M., Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Recuperado de: http://core.ac.uk/download/pdf/12341268.pdf

Hitt, F. (1998). Difficulties in the Articulation of Diferent Representations Liked to the Concept of Function. JMB, *Journal of Mathematical Behavior.* Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Hitt, F. (2003). Que signifie être compétent dans une théorie des représentations des concepts mathématiques? Universidad Francisco de Paula Santander, Colombia.

Torres, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en matemáticas. *Miscelánea Matemática 40*, 1-27.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

EL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO COMO HERRAMIENTA PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA EXPRESIÓN ANALÍTICA DE LA RECTA Y SUS PROPIEDADES

THE GEOMETRIC THINKING AS A TOOL FOR CONSTRUCTING THE ANALYTICAL EXPRESSION OF THE STRAIGHT LINE AND ITS PROPERTIES

Ana Cecilia Otero Rodríguez, Jorge Ruperto Vargas Castro, María Mercedes Chacara Montes
Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Exactas y naturales, Universidad de Sonora (México)
anaoteroro@gmail.com, rvargas@mat.uson.mx , meche@mat.uson.mx.

Resumen
Esta investigación busca evaluar los efectos de dar un tratamiento alternativo a la enseñanza del concepto de línea recta y sus expresiones analíticas en bachillerato, utilizando la teoría de Van Hiele. Esta inquietud surge al observar la privilegiación del uso de herramientas algebraicas sobre el aspecto geométrico, provocando dificultades al aprendizaje de la geometría analítica; por lo que se propone una estrategia didáctica en la que se propicien los medios para que el estudiante reflexione y desarrolle su razonamiento geométrico, para que logre así apropiarse del objeto con una percepción que le permita manipularlo y comprenderlo, y no solo utilizar la geometría como un "dibujo" de representación de sus expresiones analíticas.

Palabras clave: línea recta, pensamiento geométrico, razonamiento geométrico, Van Hiele

Abstract
This research seeks to evaluate the effects of giving an alternative approach to the teaching of the concept of straight line and its analytical expressions in high school, using Van Hiele's theory. This concern arises when observing the privilege of using algebraic tools on the geometrical aspect, what hinders the learning of the analytical geometry. So, we propose a didactic strategy which provides the student with the aids to reflect and develop his geometric reasoning , so that he be able to get at the object with a perception that allows him to manipulate and understand it, and not only use geometry as a "drawing" of representation of their analytical expressions.

Key words: straight line, geometric thinking, geometric reasoning, Van Hiele

Introducción

Ante la preocupación por reconocer el trasfondo del tratamiento que se le da al tema de la recta en el nivel medio superior; así como las repercusiones que puede marcar el enfoque bajo el cual se guía el aprendizaje, nos hemos propuesto la realización de este proyecto de investigación, en el cual intentamos destacar la diferencia entre la construcción del objeto matemático(tanto en sus representaciones geométricas como analíticas) y la simple mecanización de algoritmos y fórmulas establecidas, ya que según nuestra hipótesis esta última acción por sí misma no permite desarrollar en el estudiante una comprensión del objeto y lo limita tanto para la manipulación de dicho objeto como para el aprendizaje de tópicos posteriores.

Esta investigación parte del hecho de la observación sistemática acerca de las dificultades de aprendizaje que de estos conceptos han presentado los estudiantes del nivel medio superior, para abordar el tema de la recta y sus expresiones analíticas de una manera más adecuada para su comprensión, destacando la importancia de propiciar los medios que lleven al alumno a reflexionar y desarrollar su razonamiento geométrico, para que pueda apropiarse del objeto matemático como un objeto de naturaleza geométrica, como punto de partida para propiciar la comprensión y manejo de sus representaciones analíticas; y que no solo use la geometría como "dibujo" de dichas representaciones.

Problemática

La recta es un tema con múltiples aplicaciones en diversas ramas del saber y forma parte del plan de estudio desde el nivel básico, es en sexto grado de primaria bajo el eje "número, álgebra y variación", donde aparece por primera vez este objeto matemático, y se le sigue dando continuidad en primer y segundo grado de secundaria, bajo el nombre de su correspondiente "ecuación lineal" (SEP, 2017, págs. 321-323).

Para adentrarnos en la problemática, es necesario hacer una distinción entre la forma en la que se percibe a la recta dentro de dos áreas de la matemática: La geometría sintética y la geometría analítica. Con relación a la enseñanza de la Geometría desde estos dos enfoques, Mora, Gutiérrez, & Herrera (2013) hacen referencia a una afirmación de un artículo de Gascón (2001b); en el que explican que : "Por un lado está la geometría sintética, propia del modelo euclidiano basada en una axiomática explícita y por otro lado una geometría analítica del modelo cartesiano cuya práctica se sustenta en técnicas del álgebra lineal y dejando implícita la axiomatización".

Aunque la Geometría Sintética está implícita en la Geometría Analítica, en muchos de los libros de texto, los ejercicios y las propias clases están comúnmente basadas en una utilización mecánica de reglas, fórmulas, etc. dados al alumno como una serie de pasos mecánicos a seguir, con los cuales se pretende que el estudiante domine un lenguaje algebraico abstracto sin darle la oportunidad de previamente descubrir propiedades y hacer razonamientos en los objetos geométricos en sí, para a partir de ellos establecer sus expresiones analíticas. Dicho de otra manera, como encontramos en un grupo de discusión: "Se supone que la geometría analítica presenta los modelos algebraicos para las situaciones geométricas. Pero, tan pronto como los estudiantes son introducidos a estos métodos nuevos, son empujados repentinamente a un mundo de cálculos y símbolos en los que se rompen las ligas entre las situaciones geométricas y sus modelos algebraicos y con frecuencia son omitidas las interpretaciones geométricas de los cálculos numéricos". (PMME-UNISON, 2001)

Es aquí donde radica el problema a estudiar, pues, con el paso de los años, en la escuela se ha minimizado la importancia de la geometría sintética, que va estrechamente relacionada con el uso del pensamiento geométrico.

Marco conceptual

Debido a la necesidad de mejorar la calidad educativa en México, se implementó la Reforma Integral de Educación Media Superior (RIEMS), que busca mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje mediante un enfoque basado en competencias.

En el artículo segundo del acuerdo número 442 se establece el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB), donde se reconoce al Marco Curricular Común (MCC) con base en competencias, como uno de los ejes de la RIEMS (SEP, 2008). Bajo este contexto es que en 2017 se diseñó el Módulo de Aprendizaje de Matemáticas 3 (Geometría Analítica) (Morales, Cárdenas, Conde, Palafox, & Amavisca, 2017) que actualmente se utiliza como libro de texto para los estudiantes del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (Cobach-Son), institución en la que se realiza este estudio; cuyo eje articulador del aprendizaje es: "Lugares geométricos y sistemas de referencia. Del pensamiento geométrico al analítico" (SEP, 2017). Este libro aborda el tema de la recta en sus secuencias didácticas 2.1 Pendiente y Angulo de inclinación, 2.2 Definición y distintas formas de la recta y 2.3 Rectas Paralelas y Perpendiculares.

Atendiendo a las competencias disciplinares mencionadas en el artículo 444 (SEP, 2008), a continuación, se muestran los siguientes puntos, que ilustran lo que el alumno ha de desarrollar durante las 3 secuencias didácticas antes mencionadas:

- Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Las cuales son citadas por el módulo de matemáticas 3.

Dentro de toda esta panorámica que engloba la RIEMS y su concreción en el COBACH, lo que abordaremos será el tema matemático de la línea recta atendiendo las dificultades antes mencionadas, así como sus expresiones analíticas. Un punto clave para este estudio es definir a lo que llamamos pensamiento geométrico y razonamiento geométrico.

Por pensamiento geométrico entenderemos a aquel en donde "se evidencia la importancia de la visualización de relaciones entre objetos geométricos y posterior modelación de éstas, así como la elaboración y comparación de algunos procedimientos propios de la geometría y de otros, que posibilitan la transición de una representación concreta de objetos geométricos a un análisis de propiedades de estos." (Jaime, Sánchez Robayo, & Fonseca González, 2008).

Por razonamiento geométrico entenderemos a aquella red que permite la adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos mediante la geometría, y que después posibilita al estudiante para que a través de los espacios logre explicar, conjeturar y/o justificar alguna propiedad. (Samper, Leguizamón , & Camargo, 2001)

Cuando hablamos de un enfoque tradicional, nos referimos a la praxis habitual dominante en la que prevalece un enfoque formalista, es decir: "que la actividad matemática se restringe a la manipulación de símbolos carentes de todo significado intuitivo por medio de reglas de transformación explícita y formal" (Serna, 2013)

Justificación

Para evidenciar la situación arriba mencionada, encontramos que algunos de los textos clásicos más importantes y reconocidos en geometría analítica como el de Lehmann, están delegando el tratamiento gráfico al lector (Mendoza, Ojeda, & Chavez, 2013), minimizando la importancia del uso del tratamiento geométrico dentro del mismo texto. En particular en este libro, en algunas de sus secciones podemos observar el tratamiento marcadamente algebraico y abstracto, a veces un tanto desligado de las ideas geométricas que prevalecen en el problema a resolver (Lehmann, 2004, págs. 106-108).

Por otro lado, en nuestro país existen algunas pruebas estandarizadas que se aplican a nivel nacional y que pretenden medir los niveles de logro alcanzados por los estudiantes, en primera instancia tenemos la prueba **planea** que se aplica en el nivel medio superior. Según las resultas revisadas de la sep en el año 2017 (SEP, pág. 7), esta prueba deja en evidencia el poco dominio que poseen los alumnos sobre el tema de la recta, pues más del 95% son incapaces de hacer deducciones y/o interpretar sus diferentes representaciones.

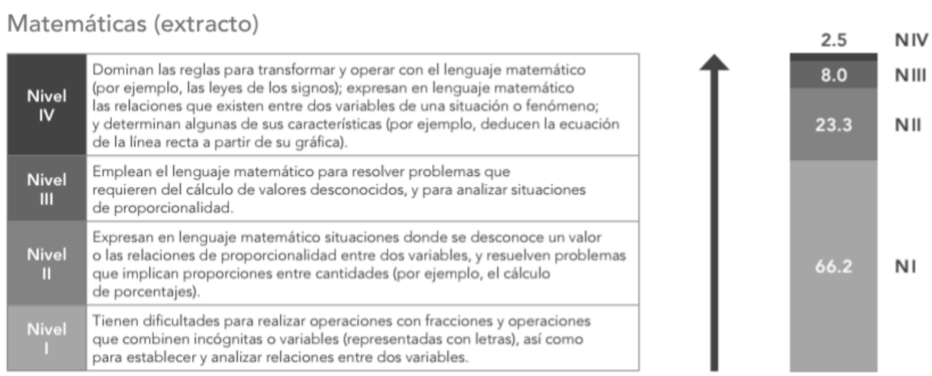


Imagen 1, Nivel de logro. Fuente: Planea (2017, pág. 7)

Aunado esto, tenemos los resultados del exhcoba (examen de admisión para la Universidad de Sonora), en este caso se analizaron los exámenes tipos 3 (división de ciencias biológicas y de la salud), y 4 (división de ingenierías, y ciencias exactas y naturales); correspondientes a los años 2015, 2016 y 2017, de los alumnos provenientes del colegio de bachilleres del estado de sonora. Se tomaron en cuenta únicamente los aciertos de conocimientos básicos de matemáticas y con base en estos resultados podemos observar que, aunque se supone que la educación que reciben en el nivel medio superior los debería de capacitar para su educación futura, existen estudiantes que no obtienen siquiera la mitad de las respuestas correctas, o son incapaces de tener un solo acierto, lo que evidencia las dificultades de las que hemos venido hablando.

Adicionalmente, la coordinación institucional de tutorías de la división de ciencias exactas y naturales de la misma universidad, nos proporcionó algunos datos específicos referentes a la situación que se refleja con respecto a los resultados semestrales de los estudiantes inscritos en las licenciaturas pertenecientes a esta división.

Según la información proporcionada, la materia de geometría analítica es la de más alto índice de reprobación en toda la división de ciencias exactas y naturales, según los reportes correspondientes a los años 2015-2016.

Esto deja claro que el problema que empezó en el nivel básico sigue teniendo consecuencias tangibles en el nivel superior; y de ahí que nos concentramos en esta área de las matemáticas, en particular en el objeto matemático protagonista de esta investigación: la recta.

Según nuestra hipótesis esto lo atribuimos al deficiente manejo del pensamiento geométrico, que consideramos debe ser previo al manejo de las expresiones analíticas, para poder así generar una verdadera comprensión del objeto, y con ello una mejor manipulación.

CLAVE	MATERIA	Alumnos Inscritos	Alumnos Aprobados	Alumnos Reprobados	Índice de Reprobación %	Índice de Aprobación %	Licenciatura en...
				SEMESTRE 2015-1			
6886	Geometría Analítica (23)	5	0	5	100	0	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	Geometría Analítica (23)	9	2	7	77.77	22.23	FÍSICA
8149	Geom. Analítica Descriptiva	14	3	11	78.57	21.43	GEOLOGÍA
6886	Geometría Analítica (23)	10	6	4	40	60	MATEMÁTICAS
	Totales	38	11	27	**74.09**	25.92	
				SEMESTRE 2015-2			
8149	Geometría Analítica Descriptiva	75	61	14	18.66	81.34	GEOLOGÍA
6886	Geometría Analítica	29	13	16	55.17	44.83	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	Geometría Analítica	31	18	13	41.93	58.07	FÍSICA
6886	Geometría Analítica (08)	19	8	11	57.89	42.11	MATEMÁTICAS
	Totales	154	100	54	**43.41**	56.59	
				SEMESTRE 2016-1			
6886	Geometría Analítica (23)	6	1	5	83.33	16.67	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	Geometría Analítica (23)	3	2	1	33.33	66.67	FÍSICA
6886	Geometría Analítica (23)	6	3	3	50	50	MATEMÁTICAS
	Totales	15	6	9	**55.55**	44.45	
				SEMESTRE 2016-2			
6886	GEOMETRÍA ANALÍTICA 13	36	23	13	36.11	63.88	CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
6886	GEOMETRÍA ANALÍTICA 14	39	30	9	23.08	76.92	FÍSICA
6886	GEOMETRÍA ANALÍTICA 15	20	8	12	60	40	FÍSICA
8149	GEOMETRÍA ANALÍTICA DESCRIPTIVA 01	36	35	1	2.78	97.22	GEOLOGÍA
8149	GEOMETRÍA ANALÍTICA DESCRIPTIVA 02	33	32	1	3.03	96.96	GEOLOGÍA
6886	GEOMETRÍA ANALÍTICA 12	33	16	17	51.52	48.48	MATEMÁTICAS
	Totales	197	144	19	**29.42**	70.58	

Imagen 2: Concentrado de resultados semestrales de los alumnos de la División de Ciencia Exactas y Naturales de la UniSon.

Ante la problemática planteada, en nuestro proyecto se aborda el análisis de dos propuestas para la enseñanza del concepto de recta, una que parte de privilegiar el pensamiento geométrico para construir y manipular más adecuadamente su tratamiento analítico y por otro lado el tratamiento que tradicionalmente se le ha dado, en el que se hace énfasis en el manejo algebraico muchas veces desligado de las ideas geométricas que lo motivaron, lo cual nos lleva a plantear la pregunta de investigación a la que buscamos responder.

■ Pregunta de investigación

¿Qué diferencias se pueden detectar en el aprendizaje significativo del concepto de recta, en un curso de geometría analítica de bachillerato, al contrastar un diseño en el que prevalece el pensamiento geométrico contra el enfoque tradicional?

Objetivo

El objetivo general de esta investigación es determinar si el uso de un enfoque en el que predomina el pensamiento geométrico en la enseñanza de la geometría analítica facilita la comprensión del concepto de recta y sus respectivas expresiones analíticas, en estudiantes de tercer semestre de bachillerato. Para lograrlo nos hemos planteado una hipótesis.

Hipótesis

Los estudiantes que participan en la construcción del significado del concepto de recta y sus respectivas expresiones analíticas, bajo un enfoque en el que prevalece el pensamiento geométrico, logran una mejor comprensión con respecto a los que participan bajo el enfoque tradicional.

Marco teórico

El modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

El marco teórico que asumiremos será el modelo de van hiele, diseñado para propiciar el desarrollo del pensamiento geométrico. Este modelo data del año 1957 de los trabajos doctorales presentados por los esposos Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geoldof, en la universidad de Utrecht (Holanda), dirigidos por su director de tesis prof. Dr. H. Freudenthal (Hiele, 1957, pág. 1) presentaron un modelo de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Está formado por dos partes: la primera es descriptiva, pues identifica los tipos de razonamientos por los que el estudiante va pasando a lo largo de su formación matemática, desde que inician su aprendizaje hasta que logran alcanzar su grado máximo de desarrollo; estos son llamados *"niveles de razonamiento geométrico*". La segunda se enfoca en darle al profesor las "directrices" o pautas sobre cómo organizar las actividades, materiales y clases (entre otras cosas) para ayudar al estudiante a alcanzar el siguiente nivel de desarrollo, a estas directrices se les conoce como *"fases de aprendizaje"*. (Gutierrez , A.; Jaime, A.;, 1990).

Niveles de razonamiento geométrico: para ordenar los niveles de razonamientos por los que van atravesando los estudiantes, los Van Hiele los ordenaron de manera secuencial.

Nivel 1 reconocimiento o visualización.
Nivel 2 análisis.
Nivel 3 deducción informal u orden.
Nivel 4 deducción.
Nivel 5 rigor.

Fases de aprendizaje: los van hiele también organizaron una serie de fases que pretenden guiar al docente en el diseño y la organización de las experiencias de aprendizaje que irán llevando al estudiante a evolucionar de un nivel al siguiente. A continuación, una breve explicación de cada una de ellas, de acuerdo con los mismos autores (Vargas & Gamboa A., 2013, págs. 83-85).

Fase 1: información. El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo campo de trabajo y su nivel de razonamiento en cuanto a este.
Fase 2: orientación dirigida. Se guía a los alumnos mediante actividades y problemas, con el fin de que estos descubran y aprendan las diversas relaciones o componentes básicos de la red de conocimientos por formar.

Fase 3: explicitación. Los alumnos deben intentar expresar en palabras o por escrito los resultados que han obtenido, intercambiar sus experiencias y discutir sobre ellas con el profesor y los demás estudiantes, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y afiancen el lenguaje técnico que corresponde al tema objeto de estudio.
Fase 4: orientación libre. En esta fase se debe producir la consolidación del aprendizaje realizado en las fases anteriores. Los estudiantes deberán utilizar los conocimientos adquiridos para resolver actividades y problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos.
Fase 5: integración. Los estudiantes establecen una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente.

Propiedades de los niveles: por último, para comprender este modelo es necesario analizar las siguientes características, que son propias de los niveles antes mencionados.

- *Recursividad*: los elementos que se vieron en el nivel n, aun cuando no sea de manera consiente, se hacen explícitos en el nivel n+1.
- *Secuencialidad*: no es posible brincarse alguno de los niveles, es decir, es necesario pasar de manera ordenada cada uno de ellos (n1, n2, n3, n4 y n5).
- *Especificidad del lenguaje*: para cada nivel existe un lenguaje que le corresponde.
- *Continuidad*: el tránsito entre cada nivel se produce de una manera pausada y continua, por lo que en ocasiones puede llevar varios años el atravesar por los niveles 3 y 4.
- *Localidad*: un mismo estudiante puede manejar distintos niveles dependiendo del área de la geometría en la que se le evalué.

Metodología

El estudio es *exploratorio de tipo cualitativo*, se pretende realizar *una investigación cuasi-experimental*, en la que entrarán en juego dos grupos de nivel bachillerato, ambos serán elegidos bajo los mismos criterios y les serán aplicados un instrumento diagnóstico inicial y un instrumento de evaluación final, que nos permitirán evaluar el contraste entre los enfoques de enseñanza con que serán tratados. Para ello se observará y valorará la *experiencia en aula* de dos grupos del tercer semestre de preparatoria mientras aborden el tema de la recta; el primer grupo recibirá un tratamiento alternativo en el que prevalezca un enfoque de enseñanza basado en el pensamiento geométrico, y lo llamaremos *grupo piloto;* mientras que el segundo recibirá un tratamiento de enseñanza tradicional y será utilizado como *grupo de control*.

Para lograr todo esto, nos hemos fijado *tareas específicas* que irán guiando el proceso de la investigación, que a continuación serán mencionadas:

<table>
<tr><th>#</th><th>Grupo piloto</th><th>Grupo de control</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Seleccionar a dos grupos, estableciendo algunos criterios que nos permitan hacer un acercamiento de la equivalencia de los mismos; entre ellos: que pertenezcan al mismo plantel educativo, que pertenezcan al mismo turno, que tengan un promedio general suficientemente cercano, entre otros posibles.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Diseñar e implementar un instrumento diagnóstico que nos permita situar el nivel inicial de los estudiantes de ambos grupos.</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">Seleccionar casos específicos, en ambos grupos, con los que se trabajara el estudio a detalle de la investigación. Serán seleccionados aquellos estudiantes que al menos hayan satisfecho el nivel 1 del modelo de razonamiento de van hiele.</td></tr>
</table>

4	Presentar materiales adecuados para trabajar los contenidos referentes a la recta, bajo un enfoque en el que prevalezca el pensamiento geométrico, para trabajar con el grupo piloto.
5	Definir el protocolo de observación.
6	Crear el instrumento de evaluación que nos permita determinar el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico alcanzado en los estudiantes seleccionados, con respecto a la recta, en ambos grupos.
7	Implementar de manera preliminar el instrumento de evaluación, en ambos grupos.
8	Realizar adecuaciones al instrumento de evaluación, si se considera pertinente a partir de la implementación preliminar.
9	Implementa el instrumento de evaluación, posiblemente modificado, en ambos grupos.
10	Analizar la información obtenida.
11	Conclusiones y comentarios finales.
12	Elaborar la escritura final del documento.

Tabla 1: tareas metodológicas para la implementación y desarrollo de la investigación. Fuente: propia.

Parte importante de nuestra metodología es plasmar de manera muy clara los objetivos que queremos alcanzar en cada nivel por lo que hay que definir el trabajo en cada una de sus fases, para lograrlo presentamos unas tablas que serán la guía de las actividades y los instrumentos necesarios para la realización de esta investigación. Se tomó como referencia el trabajo de (Vargas & Gamboa A., 2013) para reconocer de manera general lo que va exigiendo cada nivel, después se adecuo a nuestro tema particular y se estipulo que es lo que se pretende desarrollar en cada una de sus fases correspondientes.
A continuación, se presenta el nivel 1 con sus respectivas fases:

Nivel 1: RECONOCIMIENTO		
Según (Vargas & Gamboa A.).	APLICADO A LA LINEA RECTA	FASES
El individuo reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, no diferencia partes ni componentes de la figura. Puede, sin embargo, producir una copia de cada figura particular o reconocerla. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son	El estudiante es capaz de: - Reconocer visualmente lo que es una recta y lo que no lo es. - Identificar el objeto (“la recta”) mediante el tacto. Haciendo uso de objetos manipulables o propios de su entorno. - Trazar rectas valiéndose de	**1. Información.** El profesor deberá informarse sobre los conocimientos previos sobre la circunferencia y la recta. En especial los elementos asociados a ella, como punto, segmento y dirección. **2. Orientación dirigida.** El profesor diseñará: a) actividades orientadas a que el alumno reconozca, a través de ellas, de manera visual, un segmento de recta en contraste con otras figuras planas, de tal forma que en otro momento le permita reproducirla utilizando otros recursos manipulables. b) actividades encaminadas a que logren identificar por medio de los sentidos un segmento de recta, un plano y un punto. **3. Explicitación.** Los estudiantes comentan entre sí lo observado.

principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.	instrumentos geométricos concretos. - Reconocer por medio de los sentidos un segmento y un punto.	**4. Orientación libre.** El profesor pide ejemplos de planos, segmentos y puntos en su entorno directo y propicia que el estudiante descubra cualidades de un segmento de recta; por ejemplo, al colocar una regla a lo largo de la escalinata y observar si los filos de los escalones. **5. Integración** El profesor induce a que el estudiante resuma lo que ha observado acerca de planos, segmentos de recta y puntos.

Tabla 2: nivel 1: reconocimiento. Fuente: propia.

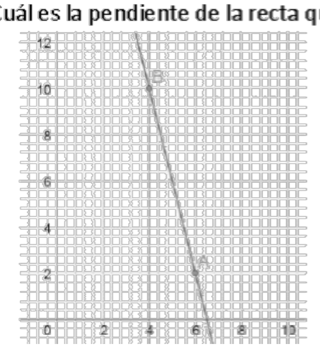
Resultados

Se diseñó un cuestionario tipo examen, en el que los reactivos tienen la intención de problematizar al estudiante y de ubicarlo en los 3 primeros niveles de Van Hiele.
Por ejemplo:
Si tomamos *el reactivo numero 10:*

10. ¿Cuantas rectas pasan?:
   a) Por un punto dado
   b) Por dos puntos dados
   c) Paralelas a una recta dada
   d) Paralelas a una recta dada y por un punto dado.

Al estudiante se le está pidiendo que diga para cada caso cuantas posibles rectas se corresponden, es decir, se le está pidiendo lo expresado en la tabla de nivel 3 cuando dice: *El estudiante es capaz de identificar las condiciones necesarias y suficientes para determinar de forma única una recta;*
Si tomamos *el reactivo numero 3:*

3. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B?



a) m= $\frac{1}{4}$
b) m= $-\frac{1}{4}$
c) m= 4
d) m= -4

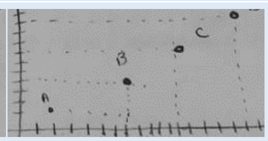
Vemos que se le está pidiendo al estudiante que ubique las coordenadas de los dos puntos marcados y que a partir de ellos logre deducir la pendiente de la recta en cuestión, como esto hace alusión a una propiedad especifica de la recta, el hecho de que la resuelva de manera correcta lo situaría en el nivel 2 de razonamiento, porque se corresponde con que: *Es capaz de percibir propiedades de la recta (como la dirección o inclinación).*

Si tomamos el reactivo no. 5

5. Si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares y sabemos que la pendiente de L_1 es $m_1 = \frac{5}{3}$, entonces la pendiente de L_2 es:
   a) $m_2 = -\frac{5}{3}$ b) $m_2 = \frac{3}{5}$ c) $m_2 = -\frac{3}{5}$ d) $m_2 = \frac{5}{3}$

En este caso se le está pidiendo al estudiante que Identifique la relación que hay entre las pendientes de rectas perpendiculares, de tal manera que al conocer la pendiente de una de ellas logre calcular la de la otra en cuestión. Como vemos entran en juegos más términos y con ello mayor complejidad pues ahora no sólo se trata de una propiedad específica sino de una interrelación que está conectando a ambas, por lo que si logra hacerlo bien se situaría en el nivel 3 de razonamiento, en las tablas se corresponde con lo siguiente: *El estudiante logra entender que algunas propiedades de la recta se deducen de otras vistas previamente.*

De la misma manera que fue diseñado el instrumento diagnóstico, se diseñó un instrumento de evaluación que se aplicó al finalizar el tema en ambos grupos. A continuación, se muestran dos de los reactivos con las respuestas de 2 casos estudiados de ambos grupos:

	Grupo piloto	Grupo de control
	Reactivo 2: ¿Cuáles son las condiciones para determinar una recta única	
Caso 1	Punto y pendiente	Que pase sobre 2 puntos
Caso 2	Punto y ~~Pendientes~~ Punto y Punto	1. Coordenada
	Reactivo 6: escribe las coordenadas de 3 puntos que correspondan a la recta que pasa por el punto A(2,1), y tiene una pendiente $m = \frac{2}{5}$	
Caso 1	B(7,3) C(12,5) D(17,7)	$5(y-1)=2(x-2)$ $5y-5=2x-4$ $\boxed{-2x+5y-1=0}$
Caso 2	A(2,1) B (7,4) C (12,7) D (17,10) 	$A(2,1)$ y tiene una pendiente $m = \frac{2}{5}$: $y-1=\frac{2}{5}(x-2)$ $5(y-1)=2(x-2)$ $5y-5=2x-4$ $-2x+5y-1=0$

El reactivo mostrado corresponde con el nivel 2 según nuestras tablas; el reactivo 6 corresponde al nivel 3. Como podemos observar en los casos específicos que aquí se muestran, la diferencia en el avance del pensamiento geométrico es evidente. En el reactivo 2 en el grupo de control vemos que no tienen clara la idea geométrica de la recta, en cambio en el grupo piloto, podemos observar como logran dar de manera más natural las condiciones para que una recta sea única.

En cuanto al reactivo 6 en el grupo de control los estudiantes se limitaron a querer encontrar la fórmula de la recta en cuestión, lo que nos muestra que no solo siguen de manera mecánica los pasos que aprendieron; en contraste, en el grupo piloto en este reactivo podemos observar cómo o no necesitan realizar operaciones algebraicas, es decir lo hacen mental por medio dela razón de avance, o muestran con la gráfica dicha razón de avance, y aun cuando pudieran equivocarse en las operaciones, nos da indicios de un cambio de pensamiento y una mejor comprensión del objeto matemático estudiado.
Por lo antes mencionado, aunque continuamos con el análisis de resultados, podemos decir que hasta este punto nuestra hipótesis parece ser verdadera.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2006). Tratamientos como dibujo y como figura de la gráfica en tareas de. *Matemática educativa, treinta años: una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*, 215-236.

Camargo, Á. P. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. *Actas del VII CIBEM*, 1841-1849.

desconocido. (s.f.). Capıtulo 7 Sistemas de ecuaciones lineales. Recuperado el 14 de mayo de 2018, de http://sauce.pntic.mec.es/~jpeo0002/Archivos/PDF/T07.pdf

Gascón, J. (2001b). Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. *Seminario de Matemáticas Fundamentales (28).Universidad Nacional de Educación a Distancia.*

Gutierrez , A.; Jaime, A.;. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. En L. S. , & M. Sanchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (págs. 295-384). Sevilla:Alfar. Obtenido de <www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>.

Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en.* Universidad Real de Utrecht.

Jaime, A. G. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática (colección "Ciencias de la Educación" n° 4)*, 295-384.

Jaime, O. J., Sánchez Robayo, B. J., & Fonseca González, J. (2008). Desarrollo del pensamiento geométrico: algunas actividades de matemática recreativa. *Encuentro Colombiano de Matematica Educativa*. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/940/1/1Taller.pdf

Lehmann, C. H. (2004). *Geometría Analítica.* México: limusa.

Linares, A. R. (2008). Desarrollo Cognitivo: Las Teorías. *Master en Paidopsiquiatría.*

Mendoza, F., Ojeda, A. M., & Chavez, H. (2013). Enseñanza y comprensión de la recta como lugar geómetrico en el Bachillerato Tecnológico. *ALME*, 845-854.

Mora, M., Gutiérrez, F., & Herrera, F. (6-8 de noviembre de 2013). Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el. *Congreso de educación matemática de América Central y El Caribe*.

Morales, E., Cárdenas, L., Conde, M., Palafox, M., & Amavisca, R. (2017). *Matemáticas 3.* Hermosillo, Sonora, Mexico: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

PMME-UNISON. (2001). Perspectivas para la enseñanza de la geometría en el siglo XXI. Documento de discusión para un estudio ICMI. Obtenido de http://www.euclides.org/menu/articles/article2.htm

Samper, C., Leguizamón , C., & Camargo, L. (2001). Razonamiento en geometría. *EMA*, 141-158.

SEP. (2008). Acuerdo número 442 por el que se establece el Sistema Nacional de Bachillerato en un marco de Diversidad. *Diario Oficial de la federación*, 2-4. Obtenido de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/10905/1/images/Acuerdo_ numero_442_establece_SNB.pdf

SEP. (2008). Acuerdo número 444 por el que se establecen las competencias que constituyen el marco curricular común del Sistema Nacional de Bachillerato. *Diario oficial de la federación.*

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México.

SEP. (2017). *Nuevo Currículo de la Educación Media Superior.* Obtenido de http://www.sems.gob.mx/es_mx/sems/campos_disciplinares

SEP. (2017). *Planea Resultados nacionales 2017 Educación Media Superior.* Obtenido de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/ResultadosNacionalesPlaneaMS2017.PDF

Serna, L. R. (2013). Corrientes de Pensamiento Matemático del siglo XX. *Revista científica "general José María Córdova"*, 284-288. Obtenido de http://www.scielo.org.co/pdf/ recig/v11n12/v11n12a15.pdf

Vargas, G. V., & Gamboa A., R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia 27* (1)*,* 74-94. Obtenido de www.revistas.una.ac.cr/uniciencia

ESTIMACIÓN Y PREDICCIÓN DEL PRECIO DE LA GASOLINA EN MÉXICO A PARTIR DEL MODELO DE AJUSTE DE PRECIOS DE EVANS

ESTIMATION AND PREDICTION OF GASOLINE PRICE IN MEXICO FROM EVANS PRICE ADJUSTMENT MODEL

Carlos Daniel Prado Pérez
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (México)
cprado@itesm.mx

Resumen
Éste es un trabajo que suma a la propuesta matemática que se alinea a la visión del Modelo Educativo del Tecnológico de Monterrey. Forma parte de un conjunto de situaciones que se han preparado para cubrir gran parte de la formación matemática de los alumnos, probados con éxito en el Campus Estado de México. Todos éstos tienen la misma filosofía: proponer problemáticas de índole real de cuyas respuestas pudiese haber una valoración por parte de algún sector de la sociedad. El presente problema se inspiró por la controversia entre especialistas económicos quienes dirimían la posibilidad, a principios de 2018, de que la gasolina Magna en México pudiera llegar a un precio promedio de 20 pesos. La situación se propuso a principios de 2018, a fin de que los alumnos del segundo semestre de matemáticas, bajo el análisis del modelo de ajuste de precios de Evans, generaran una predicción fundamentada sobre la cuestión de si la gasolina Magna llegaría a 20 pesos al finalizar este año.

Palabras clave: competencias, predicción, precio, reto

Abstract
This work adds to mathematical proposition, which is aligned to the vision of the educational model at Tecnologico de Monterrey. It is a part of a set of situations that have been prepared to cover the mathematical training of students, these have been tested successfully at Campus State of Mexico. All these challenges have the same philosophy: propose situations of real context whose answers could be interesting by any sector of society. The controversy among economic specialists inspired the present challenge; at the beginning of 2018, they were deciding the possibility that Magna gasoline could reach an average price of 20 pesos in Mexico. This situation was proposed to the students of the second semester of mathematics at the beginning of 2018, in order to analyze the problem under the model of Evans price adjustment. They had to generate a prediction based on the question of whether gasoline Magna would reach 20 pesos at the end of this year.

Key words: Competencies, prediction, price, challenge

Introducción

Un elemento sustancial del modelo educativo del Tecnológico de Monterrey, es el que se refiere a RETO. Un reto es una actividad, tarea o situación que implica al estudiante un estímulo y un desafío. En la realidad y en la práctica, el contexto de este enfoque pedagógico parece razonable cuando un RETO se ubica en el segundo o tercer tercio de alguna carrera profesional, más aún si éste está vinculado con algún socio formador (empresa o gobierno, por ejemplo, que acompaña el proceso de ejecución del RETO). Sin embargo, para el primer tercio, en particular, en lo que toca a la formación matemática del tronco básico donde se trabaja con alumnos de primer ingreso con la consecuente inmadurez cognitiva y personal, la respuesta no siempre parece tan natural.

En lo académico, es consenso que todo estudiante universitario deba desarrollar una buena competencia matemática; ahora bien, ¿cómo hacerlo?, ¿cómo ante el enfoque de lo que un RETO entraña? Este trabajo reporta una posible respuesta y constituye una experiencia educativa más que conforma parte de una red amplia de situaciones de índole real. El objetivo de este tipo de actividades, es contribuir en el área matemática dentro del modelo educativo ya referido. Ahora bien, con el trasfondo de una situación real generada en México a partir de 2017 con la llamada “liberación de precios de los combustibles”, este trabajo es ejemplo de una situación didáctica que recurre a la aplicación de un modelo matemático, llamado: modelo de ajuste de precios de Evans, éste establece que “el precio de un bien cambia en el tiempo proporcionalmente con la escasez del mismo”.

Marco teórico

Este trabajo fue propuesto a estudiantes del segundo semestre de las licenciaturas en ingeniería, y gira en torno a un modelo matemático de ajuste (o predicción) de precios de Evans que permite estimar-pronosticar, a corto plazo, el precio de un bien si se conocen con cierta antelación: precio, demanda y oferta. La situación-problema que se propone aquí y que fue trabajada por los alumnos en el semestre enero-mayo de 2018, encuadra bien en el contexto del nuevo Modelo Educativo TEC 21. Al mismo tiempo, en el contexto de la matemática educativa pertenece a la llamada Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (Brousseau, 2000).

El reto se planteó bajo el contexto de una situación real que se vive en México a partir de enero de 2017, a saber, el gobierno federal tomó la decisión de liberar los precios de los combustibles: gasolinas Magna, Premium, Diésel y gas LP dejando que los precios se regulen por la oferta, la demanda, los precios internacionales y el tipo de cambio. Bajo estas nuevas circunstancias, la Secretaría de Hacienda, otrora organismo único regulador de precios de estos combustibles, quedaría paulatinamente al margen de estas determinaciones salvo por el hecho de amortiguar, a través de ciertos estímulos en determinadas regiones del País (como en la frontera norte con Estados Unidos), las fluctuaciones abruptas que pudieran tener los precios de estos combustibles. Esta liberación de precios se vive ya a plenitud en 2018 con las implicaciones que, particularmente sobre la inflación nacional, ha tenido esta disposición. En efecto, la inflación en México en el año 2017 llegó a su punto máximo en los últimos 17 años llegando a una tasa del 6.77 % explicada en buena medida, de acuerdo con los especialistas, al aumento de precios de los combustibles (Migueles, 2018).

Para obtener una predicción sobre los precios de la gasolina (Magna fue el caso más representativo de estudio) a lo largo de 2018, se propuso a los alumnos un modelo matemático basado sobre dos pilares: el modelo de ajuste de precios de Evans, que se traduce en una ecuación diferencial de primer orden, y el ajuste por regresión lineal de la oferta y demanda utilizando la información generada por la Paraestatal PEMEX, hasta hace dos años, la única distribuidora de todo tipo de combustibles en México. Este RETO (al igual que otros del mismo tipo) se rige por los siguientes principios:

a) Exigen la interacción entre los alumnos y un contexto real.
b) Requieren de trabajo en equipo para que por la comunicación entre alumnos se desarrolle el lenguaje propio de la disciplina como parte del aprendizaje.
c) La validación de los procesos y de la solución mediante la presentación oral de las ideas discutidas, si es posible ante un grupo de expertos. Caso contrario, contrastando con opiniones de los especialistas sobre el tema que comprenda el reto.
d) De ser pertinente, la incorporación de aspectos de índole social como la ética y/o la ciudadanía, o alguna problemática socioeconómica como la presente.
e) Finalmente, en el conjunto de retos propuestos para la formación profesional, se ha añadido un elemento más: el uso de la tecnología.

Cabe decir que el planteamiento y solución de un problema como éste tiene sentido en el contexto de una educación basada en competencias en la que la planeación general de toda una institución esté al tanto de la administración de un proceso complejo que va más allá de la cátedra tradicional. Las intenciones educativas detrás de este tipo de situaciones están vinculadas, entre otras cosas, con posibilitar a los alumnos a que aprendan a través de experiencias concretas, vinculadas a su realidad inmediata y actualizadas en materia educativa. En la misma línea de ideas se dota a los alumnos con las competencias que requieren en su formación profesional y que la industria o diferentes organismos les exigen al momento de su inserción en los puestos de trabajo profesional.

El presente trabajo tuvo una duración de 5 semanas entre la asignación y la solución entregada. Los estudiantes tuvieron que precisar el modelo matemático de Evans a partir de su descripción teórica (Draper y Klingman, 1967). Obtener información de PEMEX (Petróleos Mexicanos, 2018) sobre la oferta y demanda del combustible elegido y a partir de esta información, por regresión lineal, determinar sendas expresiones para la oferta y la demanda en términos del precio a lo largo del año 2017, año en el que inició la transición al nuevo modelo económico de precios de los combustibles en México. Cabe decir que este modelo hubiese podido ser resuelto directamente a partir de los datos hallados utilizando métodos numéricos o, se hubiese podido aplicar de manera más adecuada un ajuste de regresión no lineal (lo que hubiese mejorado la predicción); sin embargo, los alumnos que trabajaron en el reto no contaban con los conocimientos y/o habilidades suficientes como para abordar una solución que incorporara más allá de lo que aquí se presenta.

Metodología

Como se ha indicado, dado el contexto de liberación de precio de los combustibles y ante el alza notoria de su precio a partir de enero de 2017, se especuló por parte de los especialistas que el precio de la gasolina Magna llegara a 20 pesos, a finales del 2018. El modelo de ajuste de precios de Evans se apoya en el principio de que la tasa de variación en el precio de un bien es proporcional a la escasez, definida como la diferencia entre la demanda y la oferta. Por lo tanto, este principio se traduce en la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dp}{dt} = k(D(p) - O(p))$$

Donde p es el precio del bien, en este caso, del litro de gasolina Magna, t es el tiempo, $D(p)$ y $O(p)$, demanda y oferta respectivamente, ambas dependientes, como es sabido, del precio p del bien; k es la constante de proporcionalidad. Resolver la ecuación diferencial no es difícil en principio, pues recurriendo a separación de variables, ésta puede ser escrita en la forma:

$$\frac{dp}{D(p) - O(p)} = kdt$$

Si se conocen sendas expresiones para la demanda y oferta (en función del precio del bien), lo que seguiría es realizar un proceso de integración y hacer el cálculo de los parámetros de ajuste (k, y la constante de integración). El punto es que estas referidas expresiones para $D(p); O(p)$, deberían obtenerse de datos reales confiables, preferentemente de una fuente gubernamental. La fuente a la que los equipos recurrieron fue el anuario de PEMEX (Indicadores Petroleros, 2018). Obtener información no fue tan simple como parecía a simple vista. La siguiente tabla contiene información sobre el precio por litro y la demanda, en barriles diarios y en litros diarios.

Mes	Precio por litro (en pesos)	Ventas de gasolina Magna en litros	Venta de gasolina Magna en barriles
Enero	15.99	95646.75968	601.6
Febrero	15.99	101036.4292	635.5
Marzo	15.87	104565.9472	657.7
Abril	16.50	101131.8215	636.1
Mayo	16.42	106457.8961	669.6
Junio	16.22	107634.4021	677.0
Julio	16.25	104152.5802	655.1
Agosto	16.43	108063.6678	679.7
Septiembre	16.63	105631.1621	664.4
Octubre	16.71	104025.3904	654.3
Noviembre	16.76	107904.6805	678.7

Tabla 1: Demanda contra precio. Gasolina Magna (Indicadores Petroleros, 2018)

La información sobre oferta no se publica de manera directa. En primer lugar, se debe obtener como la suma entre producción interna e importación. Además, PEMEX ofrece información sobre oferta considerando ambas gasolinas: Magna y Premium. Fue necesario buscar información en la Comisión Reguladora de Energía (Precios de gasolinas y diésel, 2017) para determinar qué porcentaje correspondía a gasolina Magna dentro de la oferta total de gasolinas. La gasolina Magna representa el 81.5% del total.

Mes	Precio por litro (en pesos)	Oferta total de gasolinas (miles de barriles diarios)	Oferta de gasolina Magna (en miles de barriles diarios)	Oferta de gasolina Magna (en litros) 81.5% del total de la oferta
Enero	15.99	861.3	701.9595	111602.6456
Febrero	15.99	838	682.97	108583.5563
Marzo	15.87	839.3	684.0295	108752.0033
Abril	16.50	767.3	625.3495	99422.62856
Mayo	16.42	837.5	682.5625	108518.769
Junio	16.22	813.1	662.6765	105357.1475
Julio	16.25	834.5	680.1175	108130.045

Agosto	16.43	843.4	687.371	109283.2594
Septiembre	16.63	788.9	642.9535	102221.441
Octubre	16.71	774.6	631.299	100368.5235
Noviembre	16.76	823.1	670.8265	106652.894

Tabla 2: Oferta contra precio. Gasolina Magna (Precios de gasolinas y diésel, 2017)

Una vez que se contó con la información anterior, fue fácil elaborar sendos gráficos que permitieron obtener una idea más clara del tipo de función que ajustaría los datos para la demanda y para la oferta. Estos gráficos aparecen en las siguientes Figuras 1 y 2.

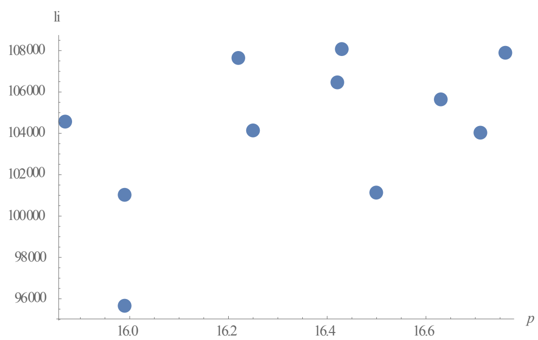


Figura 1. Demanda contra precio

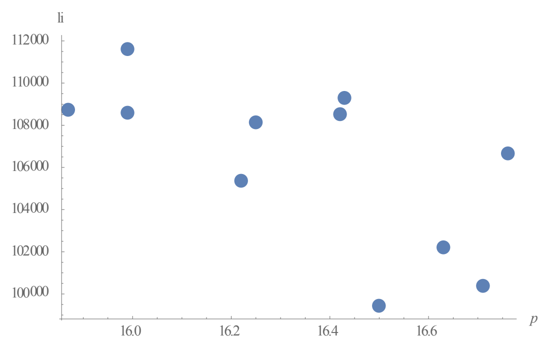


Figura 2. Oferta contra precio

Como puede apreciarse la variabilidad de los datos es considerable. De aquí que un ajuste de tipo lineal parece por mucho un mal ajuste. No obstante, como se ha indicado, dado el nivel de competencia matemática de los participantes de este reto, se propuso un ajuste de tipo lineal. Las gráficas de estos ajustes (lineales), colocadas sobre las anteriores gráficas de puntos acentúan lo que se ha indicado.

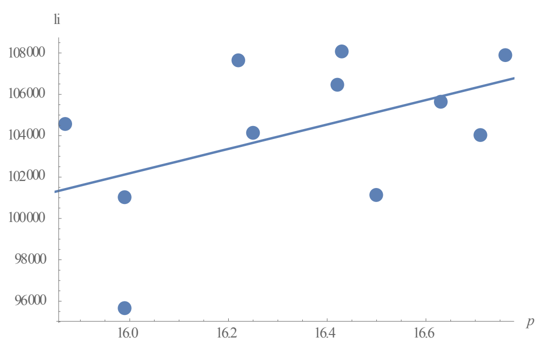


Figura 3. Ajuste. Demanda contra precio

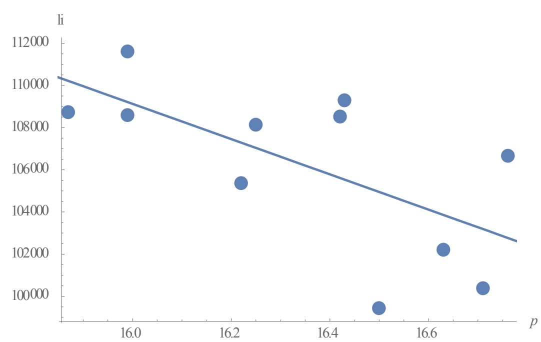


Figura 2. Ajuste. Oferta contra precio

Este RETO fue buena razón para utilizar tecnología. Aunque se motivó y se dio un breve taller sobre el software Mathematica, la mayoría prefirió utilizar Excel. Como quiera que sea, y bajo las limitaciones que ya se han señalado, se encontró que las fórmulas de ajuste lineal para las funciones de demanda y oferta son, respectivamente:

$$D(p) = 7739.925 + 5902.606\, p$$
$$O(p) = 242920.34 - 8361.967\, p$$

En consecuencia, la escasez es:

$$D(p) - O(p) = -235180.415 + 14264.573\,p$$

El reto se asignó para que fuera trabajado por cinco semanas. Los alumnos tardaron aproximadamente dos semanas en hallar y comprender el tipo de información que requerían. Más tarde, su trabajo se concentró en la solución e interpretación de resultados. A la par, se fueron desarrollando los conocimientos teóricos que los alumnos requerían para resolver el RETO. La solución que mostraron conlleva las siguientes ideas:

Al colocar la escasez en la ecuación diferencial de variables separables, se determina:

$$\frac{dp}{-235180.415 + 14264.573\,p} = kdt$$

Por lo tanto, al integrar, se obtiene:

$$0.0000701037429061869 7\ln(-235180.415 + 14264.5736\,p) = kt + C$$

Para hallar las constantes k y C, se consideró (arbitrariamente) que $t = 0$ correspondiera al mes de diciembre de 2017 (mes en el que no se reportó información en el anuario de PEMEX). De esta forma, por ejemplo, $t = 1$ significaría enero de 2018. Se tomaron los últimos dos datos históricos, correspondientes a octubre y noviembre de 2017. Para la variable t, esto significaría: $t = -2$ y $t = -1$, respectivamente. Para estos tiempos, el precio de la gasolina fue de: 16.71 y 16.76, respectivamente. Con estos valores, se obtuvo:

$$k = 0.0000141835661577942 26, C = 0.0005937417625861285$$

Al sustituir estos valores y despejar la función de precio, se halló que:

$$p(t) = 16.487 + 0.334187e^{0.211629t}$$

Resultados

En las conclusiones se indicarán las asociadas a la didáctica utilizada, sus pros y contras. En el presente apartado se insistirá aún en los resultados que sobre el precio promedio de la gasolina Magna se logró pronosticar (lamentablemente, la realidad ha superado el pronóstico). Se presenta en la siguiente tabla un comparativo entre pronóstico y realidad:

Mes	Pronóstico (pesos/litro)	Real (pesos/litro)
Enero	16.90	16.90
Febrero	17.00	17.48
Marzo	17.12	17.54
Abril	17.27	18.26
Mayo	17.45	18.40

Junio	17.68	18.50
Julio	17.96	¿?
Agosto	18.30	¿?
Septiembre	18.73	¿?
Octubre	19.26	¿?
Noviembre	19.92	¿?
Diciembre	20.72	¿?

Tabla 3. Pronóstico versus costo registrado para la gasolina Magna, 2018

Con todo y que el pronóstico se ha mantenido por debajo de los precios reales, se aprecia inmediatamente una conclusión: en efecto, la gasolina Magna llegará a 20 pesos, aproximadamente en el último tercio del año (si la tendencia sigue como hasta ahora y la política no interviene en este asunto económico).

Conclusiones

Grosso modo pueden señalarse algunas virtudes de este tipo de didáctica. Tal vez lo más sobresaliente radique en la combinación de conocimientos y habilidades de pensamiento para resolver la situación propuesta, así como el uso de la tecnología, la motivación y el nivel de significancia que logra una aplicación de la matemática como ésta. Fue complicado desarrollar aspectos propios del curso y a la par dar los elementos básicos del software. Bastante se dejó a los estudiantes para auto aprendizaje, pero los menos avisados tuvieron dificultades para conjugar teoría, software y aplicación. Del análisis de esta situación y de los resultados obtenidos en este trabajo, tal vez una de las conclusiones más importantes sea que los alumnos lograron comprender el valor de esta herramienta a la que llamamos ecuación diferencial, un instrumento natural para investigar en muchos campos de la ciencia y la ingeniería. Los resultados obtenidos en la predicción se contrastaron con los valores reales del precio de la gasolina. La valoración positiva que se hizo hacia este reto por parte de los alumnos proviene del comparativo contra la realidad, un comparativo que generó a lo largo del resto del semestre una experiencia muy gratificante para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las Matemáticas. *Educación Matemática 12 (1)*, 5-38.

Draper, J., y Klingman, J. (1967). *Mathematical Analysis with Business and Economic Applications*. New York: Harper & Row.

Indicadores Petroleros. (sf). Recuperado el 29 de enero de 2018 de http://www.pemex.com/ri/Publicaciones/Indicadores%20Petroleros/eprocescrudo_esp.pdf

Migueles, R. (2018). *México despidió el 2017 con la inflación más alta en 17 años*. Recuperado el 09 de enero de 2018 de http://www.eluniversal.com.mx/cartera/ economia/mexico-despidio-el-2017-con-la-inflacion-mas-alta-en-17-anos.

Precios de gasolinas y diésel. (sf). Recuperado el 01 de enero de 2017 de https://www.gob.mx/cre/articulos/precios-vigentes-de-gasolinas-y-diesel?idiom=es

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

RAZONAMIENTO INFERENCIAL INFORMAL: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA SU PROMOCIÓN EN ESTUDIANTES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

INFORMAL INFERENTIAL REASONING: A DIDACTIC PROPOSAL FOR ITS PROMOTION IN STUDENTS OF UPPER MIDDLE LEVEL

Yolanda Pérez, Enrique Hugues
Universidad de Sonora. (México)
yolanda_perez_r@hotmail.com, ehugues@mat.uson.mx

Resumen
El presente trabajo aborda una propuesta de instrucción encaminada a incidir en el Razonamiento Inferencial Informal (RII) en estudiantes de Nivel Medio Superior como orientación para desarrollar el sentido estadístico, sustentada en directrices curriculares vigentes en el sistema escolar mexicano y en un marco conceptual que considera tanto reflexiones como investigaciones realizadas en educación estadística. Se reporta la implementación de una de las actividades, se describe análisis y algunas conclusiones de esta experiencia.

Palabras clave: razonamiento inferencial informal, sentido estadístico

Abstract
The present work deals with a proposal of instruction aimed at influencing the Informal Inferential Reasoning (IIR) in students of Upper Middle Level as guidance to develop the statistical sense, supported by current curricular guidelines in the Mexican school system and in a conceptual framework that considers both reflections and research carried out in statistical education. The implementation of one of the activities is reported, and its analysis and some conclusions of this experience are described.

Key words: informal inferential reasoning, statistical sense

Introducción

La educación en México ha experimentado varios cambios en los últimos años, esto ha dado lugar a ciertos logros, por ejemplo, en cuanto a su cobertura, sin embargo, no se ha garantizado la calidad educativa (INEE, 2012). La Estadística es una disciplina cuyo uso y aplicación en los campos empresarial, político, profesional y de investigación le imprime una alta valoración social, lo que se ha venido reflejando en una mayor inserción curricular y en el surgimiento de necesidades que la calidad de su enseñanza requiere. No se trata sólo de una preocupación por desarrollar esfuerzos que lleven a superar las dificultades de enseñanza y aprendizaje que la disciplina presenta, se trata de atender las necesidades de interpretar y comprender información estadística que tales ámbitos generan cotidianamente, lo que, particularmente, hace indispensable que las personas cuenten con al menos una formación estadística básica, pues en algún momento de sus vidas se verán obligadas a usar los conocimientos y habilidades que la constituyen (Arteaga, Batanero, Cañadas y Contreras, 2011). Más aún, esto ha hecho surgir la necesidad de contar con ciudadanos con cultura estadística (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008), formación que no siempre es adquirida, y que requiere de alternativas para alcanzarla, lo que se percibe fuertemente en el caso de México, donde se promueve una reforma educativa que aún no termina por concretarse en dicho renglón.

Bajo los señalamientos expresados, la educación estadística constituye un campo que requiere de recursos didácticos para promover una formación estadística con sentido e impulsar nuevos propósitos educativos, representado un reto tanto para el profesorado como para las instancias que debieran preocuparse por el quehacer escolar. En concordancia con lo anterior, se describen de manera general, algunos elementos que encierran una problemática de interés detectada en el área de la Estadística:

- Primero, la forma como se brinda su enseñanza suele enfatizar la actividad matemática, en lugar de la actividad estadística y sin consideración alguna a la importancia del contexto (Holmes, 2002); dificultando los resultados deseados, exponiendo falta de materiales didácticos que apoyen el trabajo docente en esta disciplina y ciertas dificultades de aprendizaje en los estudiantes.

- Segundo, la pertinencia del tipo de actividades que se promueven como parte de la educación estadística en la escuela y su relación con las competencias a desarrollar no puede ser valorada favorablemente, existiendo algún distanciamiento de lo establecido en programas oficiales, toda vez que la mayoría de las actividades promueven prácticas como calcular, responder y mínimamente prácticas como argumentar, decidir e inferir que implican un tipo de razonamiento crucial.

El conjunto de señalamientos anteriores subraya la necesidad de plantear cuestionamientos como los siguientes: ¿De qué apoyos será necesario dotar al docente para que promueva en sus alumnos el sentido estadístico? y ¿Cómo promover el RII en los estudiantes?

Bajo la consideración de que se requiere preparar personas con cierta formación estadística, en este trabajo se ha establecido como objetivo desarrollar una propuesta didáctica para estudiantes del Nivel Medio Superior (NMS) centrada en promover el Razonamiento Inferencial Informal (RII) como alternativa para desarrollar su sentido y formación estadística. En este trabajo se concibe el RII como forma de razonamiento que pone en juego elementos y argumentos estadísticos al realizar inferencias, aun sin hacer uso de técnicas propias de la Estadística inferencial. Bajo esta perspectiva, para los estudiantes que continúen sus estudios a nivel universitario, el RII constituirá un medio de transición hacia la comprensión de las ideas de la inferencia estadística y para las personas que ingresen de inmediato al ámbito laboral, complementará su formación estadística proporcionándole sentido a ideas, conceptos y técnicas estudiadas de la Estadística, en información que se les presente a futuro.

Marco conceptual y metodología de diseño

Conceptos básicos

Entre los elementos conceptuales de este trabajo, se destacan los siguientes: Sentido Estadístico, Razonamiento Inferencial Informal, Inferencia Informal, Niveles de Lectura de Curcio (1989), Los tipos de tareas y los tipos de componentes propuestos por Zieffler, Garfield, DelMas, y Reading (2008), que por la razón de ser menos conocida y por su importancia en el presente trabajo, solo se resumen estos últimos (ver tabla 1) que juegan un papel central en el diseño de nuestra propuesta didáctica y en el análisis de su implementación.

Metodología para el diseño de actividades

El proceso metodológico previsto para el diseño de la propuesta didáctica va desde la selección de casos de estudios, pasando por el diseño de actividades didácticas y su implementación, hasta la extracción de conclusiones y recomendaciones, siguiendo, entre otras ideas, las tareas y los componentes propuestos por Zieffler et al (2008), conforme se esquematiza en la figura 1.

Tabla 1. Descripción de cómo se integran las tres componentes de RII a cada uno de los tipos de tareas.
Fuente: A framework to support research on informal inferential reasoning by Zieffler et al (2008). Pág.52.

	Tipo de Componente del RII		
Tipo de Tarea	C1 Hacer juicios o predicciones	C2 Usar o integrar conocimiento previo	C3 Articular argumentos basados en evidencia
T1 Estimar y dibujar la gráfica de una población	Predecir características de una población (como p, μ o σ) haciendo estimaciones simples de ellos o dibujar la gráfica de su distribución, a partir de información muestral o de su representación gráfica.	Utilizar conocimiento y lenguaje, intuitivo o previamente aprendido, para comentar predicciones realizadas de las características de la población (p.e. de la idea de forma de su distribución, agregar palabras como sesgado) a partir de información muestral.	Articular argumentos basados en evidencia muestral, para apoyar estimaciones de características de la población y/o su gráfica, lo que puede requerir una explicación de cómo se realizaron dichas estimaciones y/o la gráfica.
T2 Comparar dos muestras de datos	Juzgar si hay diferencia entre dos poblaciones; con base a similitudes o diferencias entre muestras de datos.	Utilizar conocimiento y lenguaje, intuitivo o previamente aprendido, para comentar la comparación de dos muestras de datos.	Articular argumentos sobre por qué se determinó si existe o no una diferencia entre dos poblaciones.
T3 Juzgar entre dos modelos en competencia	Juzgar si una muestra de datos proporciona más apoyo para un modelo o afirmación, que a otro modelo o afirmación contendiente.	Utilizar conocimiento y lenguaje, intuitivo o previamente aprendido, para juzgar entre dos modelos o afirmaciones competidores (p.e. la variabilidad de muestreo, la variación casual).	Requiere articular argumentos de por qué se eligió un modelo o afirmación sobre otro modelo o afirmación contendiente.

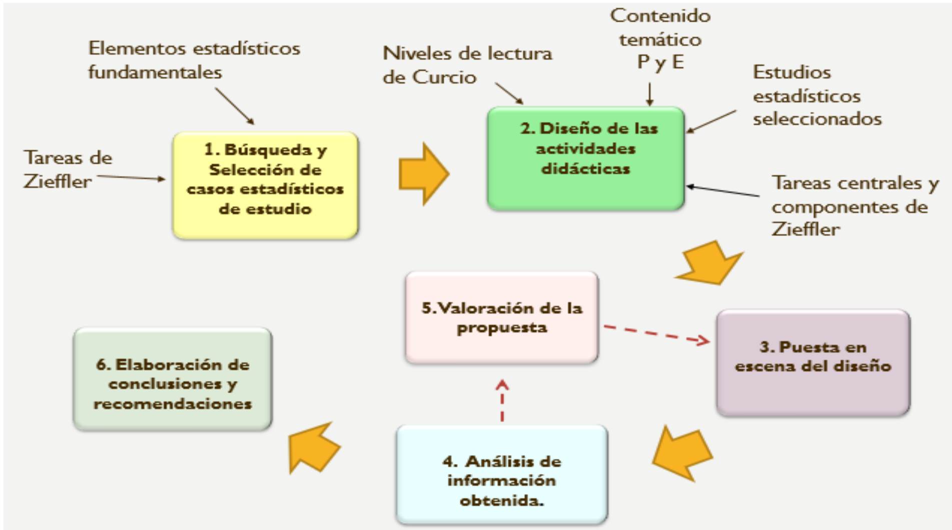


Figura 1. Aspectos metodológicos y pautas de acción en el diseño de actividades didácticas para promover el Razonamiento Inferencial Informal

Propuesta de intervención didáctica e implementación

Descripción general de la propuesta didáctica

La propuesta didáctica está compuesta por tres actividades formuladas a partir de casos estadísticos de estudio seleccionados. Estas se estructuran siguiendo la integración de tareas y componentes presentados, considerando además las competencias que propone la RIEMS. Se implementan con estudiantes del NMS y se desarrollan individualmente. Los contextos usados corresponden a estudios estadísticos reales elaborados por organismos como: la Asociación Mexicana de Internet y el Instituto Nacional de Estadística y Geografía e Informática, los cuales fueron seleccionados por corresponder a cada una de las distintas tareas, se complementan con preguntas o cuestionamientos correspondiendo a los distintos componentes, buscando así promover la emergencia del RII en los estudiantes y favorecer el desarrollo de las competencias previstas. Cabe mencionar que esta investigación aún se encuentra en curso y sólo se tienen resultados procesados de la primera actividad didáctica, de la cual se reporta su análisis.

Puesta en escena de la primera actividad didáctica

Se realizó en dos momentos, primero dentro de un pilotaje de cuyo análisis se obtuvo una versión mejorada de la actividad didáctica uno, versión que fue puesta en escena en un segundo momento. Esta última, fue llevada a cabo con 51 estudiantes que cursaban la materia de Probabilidad y Estadística de instituciones educativas privadas de nivel medio superior incorporadas a la Universidad de Sonora.

La actividad se presenta en hojas de trabajo, medio que se utiliza para recabar información, que se organiza y clasifica con base a niveles de respuestas. La actividad, presenta cuestionamientos (C0), cuya finalidad es promover el uso de conocimiento estadístico informal o formal que poseen los estudiantes y que habrán de utilizar en cuestionamientos posteriores, sus respuestas son clasificadas con los niveles de lectura: L0 “No hubo respuesta o no comprendió la lectura”, L1 “leer los datos”, L2 “leer entre datos”; L3 “leer más allá de los datos” y L4 “leer detrás de los datos”. Por su parte, hay cuestionamientos vinculados a componentes de razonamiento inferencial (C1, C2 o C3), cuya finalidad es promover el RII, siendo estas respuestas esencialmente inferencias informales. Estas últimas dan lugar a lo que llamamos la respuesta básica esperada (RBE) o de categoría 4, respuesta congruente tanto con el propósito del cuestionamiento como a las características que, conforme al diseño, estructuran el cuestionamiento (la tarea y el componente involucrado) que nos servirá de base para la clasificación de respuestas de los estudiantes, considerando tres principios claves que Makar y Rubin (2009) mencionan como esenciales para la inferencia estadística informal. Así los niveles de respuesta utilizados son: Categoría 5: Respuesta que complementa la RBE, reflexionando además la situación en contexto; Categoría 4: RBE; Categoría 3: Respuesta próxima a la RBE, pero con algún elemento faltante; Categoría 2: Respuesta imprecisa o con varios elementos faltantes para ser RBE; Categoría 1: Respuesta nada aceptable, que no refleja comprensión de la situación; Categoría 0: Sin respuesta.

El analizar las respuestas de los estudiantes con base a las categorías de respuesta descritos, nos permite explorar el RII promovido en los estudiantes. Así mismo nos permite evaluar el uso de algunos elementos estadísticos, competencias y el razonamiento al realizar inferencias hacia la población estudiada.

Análisis de información

El análisis que aquí se presenta se centra en la implementación final de la actividad 1: “Usos y Hábitos de los internautas en México 2017”, que tiene su base en Tarea 1, con cuestionamientos de componente C0, C1, C2 y C3.

Atendiendo a lo anterior, se analizan los primeros cuestionamientos vinculados al componente C0, partiendo de la categorización de respuestas a la actividad 1, lo que se resume en la tabla siguiente.

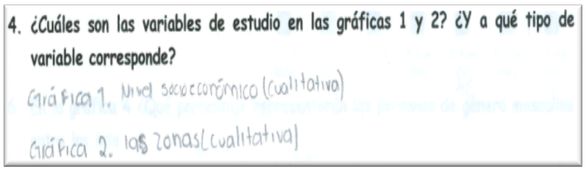
Tabla 2. Categorización de las respuestas a cuestionamientos vinculados al componente **C0** de la actividad 1 (Se ha sombreado el nivel de lectura que implica la pregunta según el diseño) *

T1XC0	NIVEL				
CUESTIONAMIENTO	L0	L1	L2	L3	L4
1	13.7%	86.3%			
2A	15.7%	84.3%			
2B	23.5%	68.6%	7.8%		
3A	9.8%	90.2%			
3B	60.8%	19.6%			19.6%
4A	13.7%	86.3%			
4B	9.8%	19.6%	70.6%		

* Los cuestionamientos 2, 3 y 4 tienen dos preguntas que aquí aparecen por separado como A y B, respectivamente.

Los cuestionamientos acerca de esta componente se refieren a la identificación de algunos elementos estadísticos que son significativos para la descripción de datos que provienen de un estudio. La información mostrada en la tabla 2 resume los resultados en las respuestas dadas por los estudiantes, siendo cinco los cuestionamientos dirigidos a una lectura literal de la información, es decir, L1 “leer los datos”, por ejemplo, el cuestionamiento 1 tiene respuestas favorables del 86.3%. Como se observa de la tabla, se presentaron mayores dificultades en cuestionamiento 3B nivel L4 “leer detrás de los datos”, sólo el 19.6% de las respuestas de los estudiantes fueron favorables. En términos generales, se observa que los estudiantes cuentan con conocimientos estadísticos previos (68.6% o más) salvo en pregunta 3B que se relaciona con un tipo de inferencia por lo que resulta más compleja y eso es lo que explica el bajo desempeño obtenido en ella.

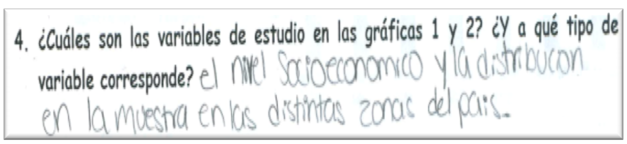
Ilustrando respuestas en componente C0 y su clasificación, en el cuestionamiento 4, solicitando identificar variables en gráficas y decidir cuál es su tipo, requiriendo realmente dos respuestas, un ejemplo en donde la respuesta se clasificó como adecuada, sería:


4. ¿Cuáles son las variables de estudio en las gráficas 1 y 2? ¿Y a qué tipo de variable corresponde?
Gráfica 1. Nivel socioeconómico (cualitativo)
Gráfica 2. las zonas (cualitativa)

La respuesta muestra cómo es que el estudiante logra identificar adecuadamente las variables estudiadas en el caso estadístico, lo que se clasifica como nivel L1. También muestra cómo identifica correctamente el tipo de variable involucrada, observando los valores de los datos en gráfica, lo que se clasifica como nivel L2.

Figura 2. Respuesta de estudiante en la actividad 1

En cuanto a las respuestas donde se logró parcialmente la lectura pretendida, un ejemplo se muestra en figura 3.


4. ¿Cuáles son las variables de estudio en las gráficas 1 y 2? ¿Y a qué tipo de variable corresponde? el nivel Socioeconomico y la distribucion en la muestra en los distintas zonas del país.

En esta respuesta se percibe que el estudiante no realiza una lectura adecuada para responder correctamente a la segunda pregunta, no comprende la pregunta o tiene dificultades con sus conocimientos previos de los tipos de variables.

Figura 3. Respuesta de estudiante en la actividad 1, categoría L1 y L0

Se puede decir que cuestionamientos como los analizados ayudan a introducir al estudiante al contexto del caso estadístico seleccionado, pero, además, permiten obtener información acerca de las habilidades de lectura de datos de los estudiantes, así como habilidades para usar conocimientos estadísticos en la situación que son preliminares en cuestionamientos asociados a otras componentes. En general los estudiantes presentaron un buen desempeño usando conocimientos referentes a los conceptos de población, muestra, variables cualitativas y cuantitativas, etc. Al parecer, sólo hay que reforzar los conocimientos sobre tipos de muestreo y cuando se utilizan, lo que se puede hacer mediante alguna estrategia adicional como un mapa mental, taller reflexivo, informe de lectura, etc., o dar tiempo a la maduración que se espera lograr más adelante al ampliar su experiencia en el tópico.

En cuestionamientos enfocados a desarrollar el RII en los estudiantes, empezamos con la categorización de respuestas a preguntas vinculadas a la tarea T1XC1: Predecir características de una población o dibujar la gráfica de su distribución, a partir de información de una muestra o de su representación gráfica. Categorización que se resume en la tabla siguiente.

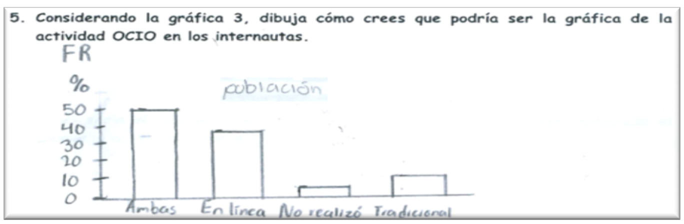
Tabla 3. Categorización de las respuestas a cuestionamientos vinculados a la tarea T1XC1

T1XC1	CATEGORÍAS					
CUESTIONAMIENTO	0	1	2	3	4	5
5	2.0%	5.9%	5.9%	3.9%	82.4%	0%
6	0.0%	7.8%	0.0%	0.0%	92.2%	0%
8	3.9%	88.2%	3.9%	0.0%	3.9%	0%
13	11.8%	11.8%	17.6%	7.8%	51.0%	0%
	4.4%	28.4%	6.9%	2.9%	57.4%	0.0%

Respecto a la tarea T1XC1 o el RII que se pretende promover con los cuestionamientos contemplados, esta tabla muestra diferencias principalmente entre los dos primeros cuestionamientos y los dos últimos. Si se agrupan categorías 3 y 4, dado que la categoría 3 es una respuesta aceptable muy cercana a la RBE, en los dos primeros cuestionamientos el desempeño de los estudiantes es bastante bueno, más del 86.3% dieron respuestas favorables. Con referencia a los dos últimos cuestionamientos, los porcentajes son más bajos. Para el cuestionamiento 13 un poco más de la mitad de las respuestas son aceptables (58.8%), la diferencia existente entre respuestas radica principalmente en el gráfico usado, pues fueron utilizados el gráfico de barras y el gráfico circular, siendo este último, donde se presentaron problemas en la construcción del gráfico ya que se descuidaron aspectos de proporciones. Se hace mención especial del cuestionamiento 8, por su bajo porcentaje de respuestas básica esperada (3.9%) debido principalmente a la variable y tópico analizado, pues emergieron conocimientos informales personales, dejando de lado la relación existente entre muestra-población, dando lugar a un desempeño general bastante bajo.

A continuación, se ilustran algunas respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas planteadas vinculadas a la tarea T1XC1.

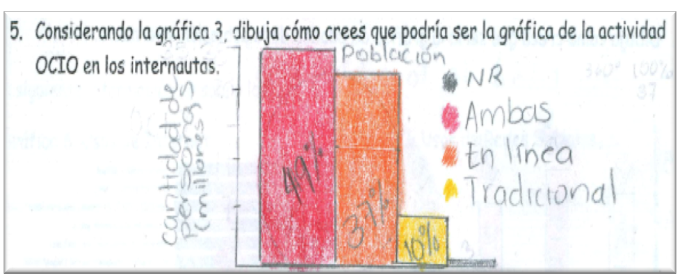
Respuestas de la pregunta 5, que pide al estudiante dibujar con base en la representación gráfica de la muestra cómo cree que podría ser la gráfica de la actividad OCIO en los internautas, esto es, una representación gráfica de la distribución poblacional. Ilustrando la categorización de respuestas en la categoría 4, se muestra la siguiente figura:



En esta respuesta el estudiante realiza una predicción hacia la población, haciendo uso de la relación muestra-población, donde a partir de información analizada en la gráfica de la muestra hace una estimación hacia la población, y además decide la mejor forma de representarlo.

Figura 4. Respuesta de estudiante en la actividad 1, componente 1, categoría 4

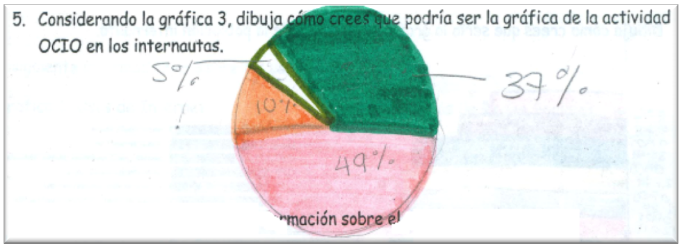
En cuanto a un tipo de respuesta categoría 3, se presenta la siguiente:



En este tipo de respuesta se observa que el estudiante pone en uso conocimientos como relación muestra-población, frecuencia relativa porcentual y elementos de la gráfica de barras. Realiza una predicción hacia la población y la representa en un gráfico de barras, sin embargo, el criterio “no realizo” no presenta su frecuencia relativa porcentual en el gráfico.

Figura 5. Respuesta de estudiante en la actividad 1, componente 1, categoría 3

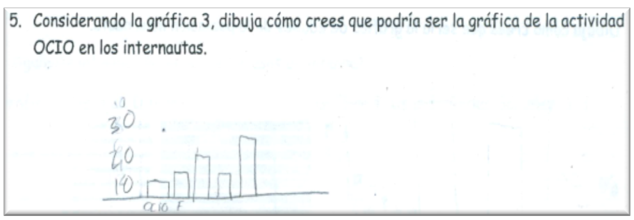
Una respuesta de categoría 2 se presenta en la figura 6:



En este tipo de respuesta se observa que el estudiante deja inconclusa su grafica pues faltan elementos como las etiquetas de los porcentajes señalados en el gráfico, y no hace referencia a la población, por lo tanto, su predicción no queda clara. No obstante, los valores mostrados en la gráfica dibujada corresponden con la gráfica de la muestra dada en el estudio.

Figura 6. Respuesta de estudiante en la actividad 1, componente 1, categoría 2

Y finalmente se tiene una respuesta de categoría 1:



En este tipo de respuesta el estudiante no hace uso de la gráfica muestral o no atiende la distribución mostrada. Su predicción tiene cinco barras cuando cuatro bastan, no utiliza una escala adecuada ni explicita la frecuencia de cada barra. Además, la gráfica no incluye referencias en barras, su etiqueta o valor. Todo esto hace ver que no está en condiciones de inferir hacia la población.

Figura 7. Respuesta de estudiante en la actividad 1, componente 1, categoría 1

En cuanto a cuestionamientos vinculados a la tarea T1XC2: Utilizar conocimiento y lenguaje, intuitivo o previamente aprendido, para comentar predicciones realizadas de las características de la población (p.e. de la idea de forma de su distribución o agregar palabras como sesgado) a partir de información muestral o de su representación gráfica. Su categorización se resume en la tabla siguiente.

Tabla 4. Categorización de respuestas a cuestionamientos vinculadas a la tarea T1XC2

T1XC2	CATEGORÍAS					
CUESTIONAMIENTO	0	1	2	3	4	5
7	0.0%	7.8%	17.6%	31.4%	43.1%	0%
10	0.0%	37.3%	21.6%	13.7%	27.5%	0%
11	0.0%	19.6%	13.7%	11.8%	54.9%	0%
12	0.0%	0.0%	3.9%	2.0%	94.1%	0%
15	2.0%	39.2%	5.9%	9.8%	43.1%	0%
	0.4%	**20.8%**	**12.5%**	**13.7%**	**52.5%**	**0%**

Pasando a los detalles presentados en la tabla 4 y agrupando también categorías tres y cuatro de respuestas aceptables, en cierta medida, se tiene que el 66.2% de respuestas mostraron que los estudiantes lograron predecir y comentar las características de una población haciendo uso de sus conocimientos. Además, agrupando categorías cero y uno, el 21.2% de respuestas de los estudiantes no lograron inferir y comentar característica alguna de la población. Estos resultados muestran que los estudiantes siguen presentando dificultades para predecir y además para explicar las características de una población, pero se puede decir que se logra desarrollar el RII en lo referente a la tarea T1XC2 en una proporción bastante aceptable. Analizando a detalle, el cuestionamiento 10 resultó el de mayor complejidad, dando lugar a un desempeño general bajo. En este cuestionamiento fue utilizado el mismo gráfico del cuestionamiento 8, señalado como el de mayor dificultad en cuestionamientos de componente C1, cuyos motivos ya fueron expuestos y que continuaron reflejándose en él C2. Por cuestiones de espacio no se ha comentado e ilustrado las categorizaciones correspondientes a la tarea T1XC2.

Además, para la tarea T1XC3: Articular argumentos basados en evidencia muestral, para apoyar estimaciones de características de la población y/o su gráfica, lo que puede requerir una explicación de cómo se realizaron dichas estimaciones y/o la gráfica, sólo se mostrarán los resultados de la categorización de respuestas a cuestionamientos correspondientes, lo que se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 5. Categorización de las respuestas a cuestionamientos vinculadas a la tarea T1XC3

T1XC3	CATEGORÍAS					
CUESTIONAMIENTO	0	1	2	3	4	5
9	7.8%	9.8%	31.4%	21.6%	29.4%	0.0%
14	5.9%	66.7%	5.9%	9.8%	11.8%	0.0%
16	5.9%	43.1%	23.5%	25.5%	2.0%	0.0%
17	5.9%	25.5%	60.8%	2.0%	5.9%	0.0%
18	5.9%	80.4%	7.8%	3.9%	2.0%	0.0%
	6.3%	**45.1%**	**25.9%**	**12.5%**	**10.2%**	**0.0%**

De tal manera que tanto en C1 como en C2 se logró promover el RII previsto hasta un punto favorable, en el caso del componente C3 los resultados son más preocupantes y muestran que es necesario hacer esfuerzos adicionales que aseguren el desempeño previsto de los estudiantes del NMS y logren así argumentar sus inferencias con base a información extraída de datos de una muestra.

Conclusiones y recomendaciones

Limitándonos a la primera actividad de la propuesta didáctica pues aún es una investigación en curso, las principales conclusiones correspondientes a los resultados y su análisis serían:

- Respecto al componente C0, los desempeños de los estudiantes resultaron muy favorables, respondiendo la mayoría de los estudiantes lo pretendido. En general los estudiantes en su conjunto lograron las practicas solicitadas con un buen desempeño toda vez que más del 68.6% en promedio de las respuestas alcanzaron el nivel de lectura conforme a diseño
- En cuanto al componente C1, donde se solicita realizar predicciones acerca de una población, podemos decir que el razonamiento promovido se logró con el 86.3% (suma categoría 3 y 4). Cabe decir que las mayores limitaciones se presentaron en el cuestionamiento 8, el cual requería establecer la relación muestra-población, y realizar una inferencia basada en información proporcionada y no en creencias personales. En general, el razonamiento logrado por los estudiantes en esta componente fue bastante aceptable.
- En componente C2, se observa que se tuvieron respuestas básicas esperadas en menor proporción a los presentados en componentes previamente comentados; esto refleja que la componente C2 presenta una mayor complejidad cognitiva. Sin embargo, los resultados de la actividad didáctica en la promoción del RII fueron considerables al mantenerse la proporción de respuestas aceptables en 66.2%, en este caso en la

generación de inferencia haciendo uso de sus conocimientos previos. En general podemos decir que la promoción que la actividad hace del RII es significativa en este tipo de componente.

- En el caso del RII involucrado en componente C3, argumentar inferencias con evidencia muestral, fue el que mayor dificultad presentó a los estudiantes pues solo el 22.7% (categoría 3 y 4) logró respuestas favorables. Las principales deficiencias en la actuación de los estudiantes se relacionan con creencias de índole personal sin considerar la información objetiva proporcionada por la actividad.
- No existieron respuestas categoría 5 en ninguno de los cuestionamientos C1, C2 y C3, que no es extraño considerando por una parte que la formación estadística es mínima (quizá el último tema del curso Matemáticas 2) y que los profesores del curso Probabilidad y Estadística no tienen mayores indicaciones acerca de promover el RII.

- Con referencia a la propuesta didáctica diseñada, adicionalmente podemos observar:

- La actividad diseñada se inserta de manera adecuada en el nuevo modelo educativo, pues contempla las competencias, los contenidos curriculares y el uso de contextos reales, dejando en claro la aplicación de esta ciencia en la vida cotidiana y profesional.
- Toda propuesta es susceptible de ser mejorada, y esta podría mejorarse en su estructura, pues se observó que es recomendable llevar al estudiante al análisis de cada una de las variables analizadas del caso en estudio guiándolo de forma consecutiva a desarrollar cada uno de los componentes de Zieffler et al. Otra posible mejora es incorporar en cada contexto las tres tareas centrales de Zieffler, et al.
- Esta actividad fue implementada como parte del curso Probabilidad y Estadística en el NMS, pero sin que, para el resto del curso, los docentes se hubiesen propuesto promover el RII, en el entendido de que las inferencias no están explícitamente contempladas en el programa de la asignatura, al menos en el modelo educativo aún vigente, no así en el nuevo modelo educativo. Para lograr resultados más eficientes en el desarrollo del RII sobre todo con el componente 3 (C3) con la propuesta diseñada, se recomienda que el curso sea planeado y desarrollado con el propósito de promover la inferencia y fortalecer la argumentación estadística en los estudiantes, recomendando poner mayor énfasis en desarrollar la competencia “Argumenta la solución obtenida de un problema…mediante el lenguaje verbal, matemático…” pues está relacionada mayormente con el componente 3 cuyo desempeño en la actividad fue bastante bajo.
- Además, es necesario realizar orientaciones didácticas detalladas para que el profesor esté en buenas condiciones para la implementación de actividades como la aquí comentada para que sea factible alcanzar los objetivos para las que fueron diseñadas. Pues como menciona Suárez y Ruiz (2016) el aprendizaje será más significativo en la medida que se elaboren documentos sobre los lineamientos para la interacción de los participantes y la intervención del profesor, tanto como una guía de discusión como para concretar el tema y su evaluación.
- En nuestra experiencia al diseñar esta propuesta, es necesario contar con una actividad integradora como un proyecto estadístico escolar, la que favorecería especialmente a los estudiantes ya que permite dotar de sentido a los diversos objetos estadísticos e involucra a los estudiantes en el ciclo de investigación y modos propios de razonamiento estadístico, desarrollando un espíritu crítico e iniciativa personal como lo señala Batanero (2013).

Referencias bibliográficas

Arteaga, P. Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Volumen 76, marzo 2011, pp. 55-67. Recuperado de: http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Articulos_02.pdf (2011).

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. Y Roa, R. (2013) *El sentido estadístico y su desarrollo*. (Universidad de Granada), recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/255723415_El_sentido_estadistico y_su_desarrollo.

Curcio, F. R. (1989): *Developing graph comprehension*. Reston, VA: N.C.T.M.

Holmes, P. (2002). *Some lessons to be learnt from curriculum developments in statistics.* En B. Phillips (Ed.), Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics. Ciudad del Cabo: IASE. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/251241392_some_lessons_to_be_learned_ From_curriculum_developments_in_statistics

INEE. (2012). *La educación en México: Estado actual y consideraciones sobre su evaluación*. 21 de noviembre de 2008, de INEE. Recuperado de:
http://www.senado.gob.mx/comisiones/educacion/reu/docs/presentación/211112.pdf.

Makar, K y Rubin A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105, Recuperado de:
http://iase-web.org/documents/serj/serj8(1)_makar_rubin.pdf

Ridgway, J., Nicholson, J. y McCusker, S. (2008). Mapping new statistical Literacies and Iliteracies. International Conference on Mathematics Education, Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematics Education, Monterrey, México. Citado en Arteaga, et al. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales.

Suarez, L. y Ruiz, B. (26 de junio). Historia de la actividad matemática: herramienta ampliada desde la resolución de problemas. *Opción*, Año 32, No. Especial 10 (2016): 840 - 860 ISSN 1012-1587.

Zieffler, A., Garfield, J. y DelMas, R. (2008). A Framework to support research on informal inferential reasoning. Statistics *Education Research Journal*, 7(2), 40-58, Recuperado de:
http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

MÁQUINAS MANIPULABLES GENERADORAS DE EVENTOS INESPERADOS: ESTUDIANDO SU CAMBIO Y VARIACIÓN

MANIPULATIVE TOOLS WHICH GENERATE UNEXPECTED EVENTS WHEN STUDYING THEIR CHANGE AND VARIATION

Jesús Enrique Hernández Zavaleta, Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN. (México)
jesus.hernandez@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
Este escrito tiene como primer objetivo mostrar la fundamentación teórica de un instrumento exploratorio cuya base proviene del análisis histórico/espistemológico de la génesis del caos determinista desde una perspectiva socioepistemológica. El taller impartido en RELME 32 consistió en la puesta en escena del instrumento mencionado, un segundo objetivo se centra en las actuaciones de los asistentes, centrando la atención en *las prácticas* que se presentan en las interacciones entre un manipulativo físico y sus gráficas de posición y velocidad. Durante la sesión los participantes interactuaron físicamente con un péndulo doble articulado vivenciando exploraciones que promovieron la construcción de hipótesis predictivas y formas de pensar en los movimientos erráticos o no predecibles desde una visión determinista.

Palabras clave: máquinas manipulables, determinismo, caos, sociepistemología

Abstract
The first aim of this paper is to show the theoretical foundation of an exploratory tool based on the historical/epistemological analysis of the genesis of the deterministic chaos from a socioepistemological perspective. The workshop in the 32nd RELME consisted in putting into practice the already mentioned tool. The second objective focuses on the participants' actions, enlightening *the practices* that take place in the interactions between a physical manipulative and its graphs of position and speed. Throughout the workshop, the participants physically interacted with an articulated double pendulum, experiencing explorations that promoted the construction of predictive hypotheses and ways of thinking about erratic or unpredictable movements from a deterministic view.
Key words: manipulatives tools, determinism, chaos, socioepistemology

Introducción

Asumimos que las *máquinas manipulables o manipulativos físicos* son modelos vinculados con ciertos conceptos matemáticos y que en su interacción promueven la emergencia de prácticas predictivas. Con base en el estudio histórico – epistemológico realizado por Hernández Zavaleta & Cantoral Uriza (2018) sobre la génesis del Caos determinista se ha elegido una máquina que produce *eventos inesperados*: el péndulo doble articulado. Uno de los objetivos es proponer a este manipulable como una forma de contribuir en la construcción y modificación de hipótesis sobre el cambio y su variación en escenarios promotores de usos con finalidad predictiva.

Este taller forma parte de una investigación en curso (Hernández Zavaleta, 2017) que pretende caracterizar las acciones y sus formas de evolución en actividades y prácticas, con base en el *modelo de anidación de prácticas* de la Sociepistemología (Cantoral, 2016). Como hipótesis de investigación tenemos que la matemática del cambio y la variación ante fenómenos de inestabilidad dinámica configura una práctica que exige de formas de pensamiento diversas; por un lado, del pensamiento predictivo que sigue una tradición newtoniana y por otro aquel fruto del enfrentamiento con *eventos inesperados* ambos relacionados por los usos que acompañan a *pequeñas variaciones.*

El objetivo del taller fue que los participantes interactuaran con el mecanismo manipulable, físicamente, para elaborar argumentos sobre la explicación y predicción de sus estados, haciendo énfasis en el uso de *la pequeña variación* ante la aparición de *eventos inesperados*.
En este caso *la pequeña variación* se refiere a hacer cantidades, entre las variables o en su comparación, lo suficientemente pequeñas que permitan construir argumentos predictivos mediante estados subsecuentes de un fenómeno aparentemente aleatorio. Por otro lado, *los eventos inesperados* los entendemos como aquellos estados de transición entre comportamientos estables o predecibles a aquellos de inestabilidad o cuasi-estabilidad que imposibilitan la predicción. Para poder abordar el trabajo con pequeñas variaciones, se recurrirá al *cambio de naturaleza del problema*; por ejemplo, el tipo de movimiento que realiza un péndulo doble articulado depende de la longitud del segundo brazo y de sus condiciones de inicio.

Descripción del péndulo doble articulado

La máquina manipulable que se utilizó durante el taller es una base de 46 cm de altura que sostiene una barra de aluminio de 25 cm de longitud (Figura 1A) que se mueve de izquierda a derecha tomando como pivote el rodamiento en la parte superior haciendo las veces de un péndulo simple. En la parte inferior se encuentra un perno con cuerda que permite sostener una segunda barra y permitiendo el movimiento articulado del péndulo doble (Figura 1 B y C), en la parte trasera de la base se sostiene otra barra con las mismas propiedades que la descrita, de esta forma el manipulable permite comparar dos péndulos que comienzan en la misma posición (ver Figura 1 D).

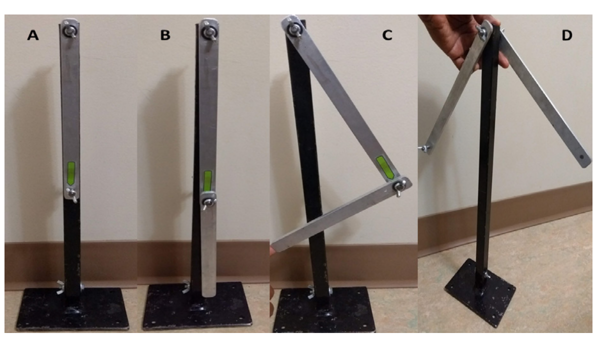


Figura 1. *A) péndulo simple, B) péndulo doble en reposo, C) articulación del péndulo doble*

El perno en la parte inferior de la primera barra permite intercambiar la segunda barra por otras de diferentes longitudes, estas barras tienen longitud de 3, 6, 9, 12, 15, 18 y 20 cm; la medida de tres centímetros se eligió debido a que era la más corta que podía sostener el tipo de rodamiento utilizado y la barra de 20cm es la más larga que puede girar sin que otros elementos en la estructura la obstaculicen. En la
Figura *2* se muestran las barras de izquierda a derecha en orden descendente.

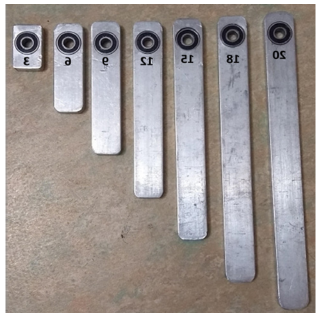


Figura 2. *Barras intercambiables del péndulo doble*

Posicionamiento teórico

La discusión sobre las *máquinas manipulables* o simplemente manipulativos para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas ha sido tratada desde diferentes perspectivas; por ejemplo, Fisher, Samuels y Wangberg (2017) reportan una experiencia exitosa del uso de manipulativos físicos para la enseñanza/aprendizaje del cálculo de varias variables particularmente en el concepto de la derivada parcial. Por otro lado, Thomas y Martin (2017) argumentan que un manipulativo virtual bien diseñando ayuda a los estudiantes de cálculo a la comprensión de la convergencia de la serie de Taylor. Otras investigaciones (Moyer & Westenskow, 2013; Sengupta, Krishnan, Wright, & Ghassoul, 2015) relacionan el uso de manipulativos físicos y virtuales con las materias relacionadas con STEM (siglas en inglés de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) haciendo evidente un uso relevante en la conformación de conceptos y objetivos de las ciencias y las ingenierías.

Los posicionamientos mencionados, en general, pretenden realizar una transferencia del objeto matemático al objeto físico o viceversa centrándose en el estudio de uno de ellos y verificar su relación con el otro. Desde la perspectiva socioepistemológica asumimos la existencia de una relación simbiótica y transversal entre los manipulativos físicos y los objetos matemáticos; en la cual nuestro interés se centra en las interacciones entre ellos y particularmente en las formas emergentes de usos de la variación con intención predictiva.

Aspectos teóricos del diseño

Desde una aproximación socioepistemológica en el trabajo de Hernández Zavaleta y Cantoral Uriza (2018) se reportan tres *prácticas* en la *búsqueda del carácter estable del cambio* en situaciones de aparición de *un evento inesperado*. En la Figura 3 se muestra en la parte superior, de izquierda a derecha, la propuesta de H. Poincaré sobre el teorema de recurrencia para averiguar aspectos de estabilidad en las soluciones, E. Lorenz se encuentra con la sensibilidad a las condiciones iniciales y R. May propone elaborar un espacio de parámetros para identificar los tipos de comportamientos de la ecuación logística; en la parte baja, en el mismo orden, las prácticas que se hacen evidentes son: la búsqueda de lo circular o lo que se repite, la comparación de soluciones en el tiempo y la clasificación de comportamientos, en su conjunto forman parte de una forma de actuar ante lo errático (*la aparición de eventos inesperados)*.

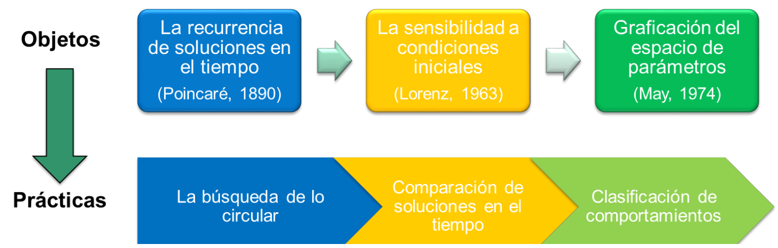


Figura 3. *Paso de los objetos a las prácticas en la búsqueda del carácter estable del cambio ante eventos inesperados.*

De manera puntual, *Buscar lo circular* se refiere a la búsqueda de periodicidades que se reflejan en trayectorias cerradas o comportamientos repetitivos y, su interpretación y representación está sujeta a la práctica de referencia en la que se localiza (Barrow-Green, 1997; Poincaré, 1892). *Comparar estados en el tiempo:* se refiere a la comparación puntual y global de dos comportamientos que comienzan con condiciones iniciales cercanas (del orden de milésimas) (Lorenz, 1963; May, 1974). Por último, *clasificar comportamientos* se refiere a la configuración de *códigos y argumentos* que permitan dar cuenta de la diversidad de comportamientos que existen en un sistema dinámico al cambiar su naturaleza mediante sus parámetros (May, 1976; Hale & Kocak, 1991).

El diseño está basado en el desarrollo intencional de las prácticas mostradas en la parte inferior de la Figura 3, la decisión de utilizar el péndulo doble articulado se debió a que una de las formas de acción que Poincaré mostró en el estudio del Problema de los Tres Cuerpos fue trabajar con péndulos forzados; situación que refleja su intención de buscar soluciones periódicas en una simplificación del problema que puede controlar. Por otro lado, nos basamos en un ciclo que vislumbramos en los trabajos de E. Lorenz y R. May para modelar el clima y el crecimiento poblacional respectivamente.

El ciclo propuesto se plasma en la Figura 4: una vez que tienen el objeto matemático o físico a estudiar (sistema dinámico), se procede a la *modificación de la naturaleza del problema* que se refiere a comenzar a modificar los parámetros del sistema que inciden la dinámica general, esto propicia la aparición de comportamientos que no son predecibles para ciertos valores de los parámetros; en este caso se promueve la emergencia de formas argumentativas sobre la predicción del cambio y se recurre a la selección adecuada de condiciones iniciales que vuelve a reiniciar el ciclo. En el caso de los eventos históricos estudiados las gráficas eran utilizadas como formas válidas de argumentación.

Figura 4. *Ciclo de estudio de un sistema dinámico*

Estructura del taller

Durante el taller se analizaron los movimientos de una máquina manipulable: el péndulo doble articulado, de forma perceptual y sin sistemas de referencia predefinidos se les solicitó la creación de hipótesis utilizando figuras y gráficas como formas argumentativas. El taller se estructuró en cuatro exploraciones (ver Figura 5): durante la exploración uno se solicitó el reconocimiento de la máquina manipulable de forma libre con el objetivo de propiciar la práctica de la búsqueda de lo circular, las exploraciones dos y tres se orientaron a la construcción de argumentos sobre la comparación de soluciones en el tiempo, el momento tres guío la *comparación de comportamientos en el tiempo*, en la exploración cuatro se pidió a los participantes *cambiar la naturaleza del sistema* mediante el cambio de longitud de la barra inferior para dar argumentos sobre los diferentes tipos de comportamiento que provoca el cambio de tamaño incidiendo en la *clasificación de comportamientos,* finalmente en el momento cinco se construyó una discusión sobre los comportamientos en la aparición de *eventos inesperados*.

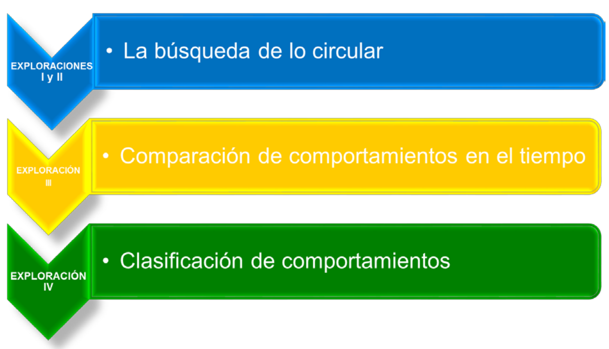


Figura 5. *Estructura del taller*

Exploración I: la configuración inicial del péndulo es con la barra inferior de 20 cm una de las principales características de este movimiento es que es caótico, es decir, no se pueden hacer predicciones sobre su posición y velocidad en un tiempo determinado. Se les pide a los participantes que observen y describan con sus palabras el movimiento una pregunta orientadora es ¿qué les llama la atención de este movimiento? Posteriormente se les invita a trabajar en equipo con la máquina manipulable y a intercambiar el tamaño del brazo inferior.

Exploración II: esta exploración se divide en dos partes, antes de comenzar se les pide colocar una barra inferior de 20cm y marcarla en su parte más baja; en la primera hoja de trabajo aparece el siguiente enunciado: Describan el movimiento de la barra inferior primero haciendo dibujos (trazos o diagramas), después expliquen por escrito sus dibujos y discutan sobre las variables que se ponen en juego en su forma de moverse. Compartan con sus compañer@s de equipo. Pueden manipular la máquina las veces que sea necesario. En la segunda hoja de trabajo se les pide que sigan trabajado con la barra inferior de 20cm y que Describan el movimiento de la barra superior primero con dibujos (trazos, diagramas y graficas), después expliquen por escrito sus dibujos y compartan con sus compañer@s de equipo. Pueden manipular la máquina las veces que sea necesario.

Exploración III: El objetivo de esta exploración es diferenciar comportamientos predecibles de los que no los son, se les pide llenar la Tabla 1 (faltan renglones en la tabla) comparando el movimiento de los dos péndulos (por lo menos 4 veces dejándolos caer siempre desde la misma posición y con los brazos doblados) prueben con diferentes tamaños de barra y digan si tienen la misma posición en el segundo solicitado ¿En todos los intentos mantienen la misma posición en el tiempo solicitado? Marquen con una / si la mantienen y con una **X** si no la mantienen. Tomando en cuenta los datos recabados hagan una descripción breve del comportamiento de las barras en cada tiempo solicitado.

Tiempo en segundos / **Barra en cm**	**5**		**10**		**20**	
Sin barra	**1. 2.**	**3. 4.**	**1. 2.**	**3. 4.**	**1. 2.**	**3. 4.**
Descripción						
3	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.
Descripción						
….	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.
Descripción						
20	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.	1. 2.	3. 4.

Tabla 1. *Comparación de comportamientos en 5, 10 y 20 segundos*

Exploración IV: la intención de esta exploración es que ayudados por las discusiones y los datos obtenidos en las exploraciones anteriores comiencen a clasificar tipos de comportamientos elaborando bosquejos de la gráfica de posición/tiempo de la barra superior. El enunciado que aparece en la hoja de trabajo es: Elaboren una gráfica (posición angular vs tiempo) del comportamiento de la barra superior en la que se muestre todo el tiempo que dura el movimiento hasta detenerse (una gráfica por cada tamaño de barra). Tomen en cuenta los datos obtenidos en el inciso anterior ¿Cómo ayuda comparar entre una y otra gráfica a dar argumentos sobre la posición de la barra superior en un tiempo determinado?

Actuación de un participante

El taller se llevo acabo en dos sesiones de 90 minutos, el perfil de formación inicial de los participantes era de profesores de nivel básico, estudiantes de maestría y doctores Matemática Educativa. La dinámica interna de los participantes permitió indagar sobre las primeras dos exploraciones, sin embargo, es importante decir que hemos comenzado a observar que las prácticas propuestas aparecen de un modo entrelazado en las formas de interacción de los participantes con las diferentes exploraciones que se les solicitan.

A continuación, se presenta la actuación de un participante [P1] del taller después de haber concluido con las primeras dos exploraciones, este episodio se retomó de la plenaria en la que compartían sus producciones individuales después de haberlas discutido con su equipo.

[1P1]P1: Bueno yo vi tres casos, yo veía que se parte de una idea que la barra inferior de 20 cm hay que marcarla en parte más baja, me imagine la parte más baja de la barrita, entonces me imagine si estaba estirada, si estaba en medio con la otra o si estaba en punto intermedio [simula la máquina con una pluma y su dedo].

E: ¿los puntos son desde donde la tirabas?

[2P1]P1: sí, entonces, trate de dibujar más o menos lo que hace la maquinita [muestra su hoja de trabajo (ver Figura 5) y la señala] con los tres casos, uno estirado, uno a medias y el otro desde abajo. Trataba de ver la parte más baja antes de que se estabilizaran … mientras más alta era más oscilatorio el movimiento, estaba en la parte alta era más oscilatorio [mueve su pluma de arriba abajo], si lo dejabas doblado, era… mmm.. menos inestable esta trayectoria, si se movía muy loca,

[3P1]P1: Te lo muestro acá, caso 1 [pone el péndulo arriba con el brazo estirado], caso 2 pone el péndulo arriba con el brazo doblado, caso 3 péndulo abajo con la barra inferior un poco levantada. Porque en el fondo lo que yo entendí de la pregunta es que era ver, esa distancia, la distancia más baja de la barra en esta yo me la imaginé con la pregunta, ósea yo trataba de ver cuándo se estabilizaba acá [señala la barra de soporte del péndulo].

- Si yo lo hacía acá [caso 1] la oscilación se vuelve loca, muy loca,
- Si lo hacía acá [caso 2] también se vuelve loca, pero en menor grado que la otra

En este [caso1] incluso a veces la vuelta completa y en esta [caso 2] no da el loop.

- y en esta [caso 3] es mucho más tranquilo es más fácil en este caso predecir. O sea, algo tiene que ver con la distancia …

E: ¿con la distancia desde donde la tiras?

[4P1] P1: claro

En [1P1] habla de tres casos y los dibuja como se muestra en la Figura 6, marcados con los números en círculo, cada dibujo es acompañado de su respetiva "figura de ondas"; las configuraciones que P1 plantea corresponden a diferentes condiciones de inicio y cada una de estas afecta el comportamiento del péndulo articulado con la barra de 20cm en la parte baja, luego en [2P1] establece una hipótesis sobre estas configuraciones: *mientras más alta era más oscilatorio el movimiento, estaba en la parte alta era más oscilatorio* para concluir que si lo dejaba doblado su trayectoria era menos inestable, en [3P1] de nuevo recurre a la estabilidad como argumento y confirma que es lo que buscaba al cambiar las condiciones, entonces específica haciendo que en el caso 1 *se vuelve loca*, en el caso 2 también se vuelve loca pero en menor grado que en el primero y dice que el caso 3 es mucho más tranquilo y es más fácil predecir.

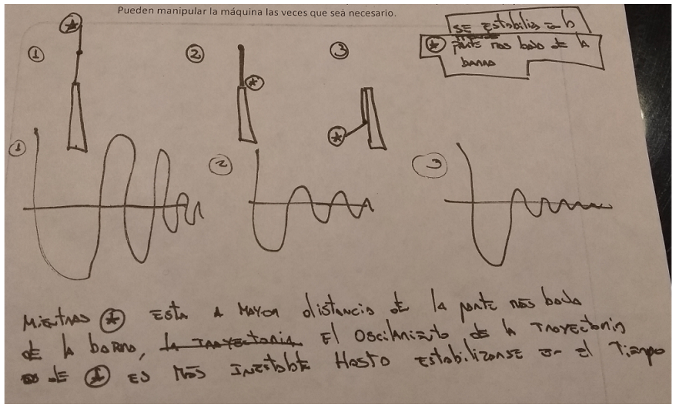


Figura 6. *Producciones de P1 después de las primeras dos exploraciones*

Como primera aproximación al análisis se puede decir que P1 establece la búsqueda de la estabilidad como una forma de orientar sus acciones, este tipo de actuaciones están relacionadas con el desarrollo de la práctica de la *búsqueda de lo circular* propia de una forma de pensar determinista, continuando en esta línea de argumentación recurre a la selección adecuada de condiciones de inicio que le permitan hacer predicciones sobre la posición del péndulo en un tiempo determinado llegando a concluir que el caso 3 es mucho más tranquilo y por lo tanto predecible; las explicaciones que da en el caso 1 y 2 son particularmente interesantes debido a que establece que un movimiento es más “loco” que el otro y lo confirma en su producción escrita recurriendo a formas figurativas que le permiten argumentar sobre el tipo de comportamiento al que se refería, es decir, en la Figura 6 se puede ver en el dibujo a la izquierda una figura de ondas de arriba abajo un tanto desproporcionadas en su amplitud y frecuencia, mientras que las otras tienden a tener un comportamiento con más proporción entre cada onda, esto nos da indicio de *la práctica de clasificación de comportamientos.*

Reflexiones finales

Una de nuestras hipótesis de investigación considera que el desarrollo intencional de las prácticas esta permeado por los episodios históricos que fueron problematizados, desde esta perspectiva, el instrumento exploratorio promueve la confrontación del paradigma determinista, en el que la predicción es total, contra el paradigma del caos en el que la predicción es limitada o nula; uno de los primeros argumentos que aparece en las personas que tratan con nuestro instrumento es que el movimiento del péndulo doble está regido por ecuaciones que explican y predicen su posición y velocidad para todo tiempo y la idea de utilizar métodos de probabilidad o estadística aparece al avanzar en la interacción y en la secuencia de preguntas.

Al analizar la actuación de P1 se evidenció la *búsqueda del carácter estable del cambio* al proponer diferentes condiciones de inicio y buscar aquellas que le permitiera predecir o que fueran mejor comportadas (estables). Las prácticas que se pusieron en juego son la *búsqueda de lo circular* expresada en la necesidad de encontrar periodicidades que le dan estabilidad al sistema y la *clasificación de comportamientos* como una práctica que permite discernir lo que puedo predecir de lo que no. Por otro lado, en P1 no se lograron observar indicios del uso de la *pequeña variación* ni de la práctica de *comparación de soluciones en el tiempo;* suponemos, para que ambas aparezcan se debe explotar la idea de repetir el experimento con las mismas condiciones de inicio, se espera lograr su aparición cuando se pongan en juego las exploraciones III y IV del instrumento.

Para finalizar, es importante hacer énfasis que el análisis del episodio mostrado es una aproximación al método y a la metodología que nos permitirá la construcción de categorías de análisis precisas que permitan, por un lado, evidenciar una transición entre *acciones, actividades y prácticas socialmente compartidas* de acuerdo con el modelo de anidación de prácticas de la sociepistemología y por otro el rastreo de construcción de hipótesis predictivas que hacen uso de la *pequeña variación*.

Referencias

Barrow-Green, J. (1997). *Poincaré and the three body problem.* USA: American Mathematical Society.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.). México: Gedisa.

Fisher, B., Samuels, J., & Wangberg, A. (2017). Instrumental Genesis and Generalization in Multivariable Calculus. *20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1219-1224). San Diego, California: SIGMAA.

Hale, J., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations.* New York: Springer.

Hernández Zavaleta, J. E. (2017). *Prácticas emergentes ante el enfrentamiento con dinámicas erráticas. Un estudio del pensamiento y lenguaje variacional* . México: Memoria Predoctoral, Departamento de Matemática Educativa CINVESTAV IPN.

Hernández Zavaleta, J. E., & Cantoral Uriza, R. (2018). Caracterización de prácticas asociadas con la predicción en el enfrentamiento con lo errático: un estudio sociepistemológico. . *Transformaciones [On line]*, 177-189.

Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*(20), 130-141. Retrieved diciembre 13, 2017, from https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469(1963)020%3C0130:DNF%3E2.0.CO;2

May, R. (1974). Biological populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos. *Science, new series, 186*(4164), 645-647. Retrieved diciembre 13, 2017, from https://www.researchgate.net/profile/Robert_May5/publication/18754203_Biological_Populations_with_Nonoverlapping_Generations_Stable_Points_Stable_Cycles_and_Chaos/links/541814990cf2218008bf23d5.pdf

May, R. (1976). Simple Mathematics Models with very complicated Dynamics. *Nature*(261), 459-467. Retrieved diciembre 13, 2017, from http://www.math.miami.edu/~hk/csc210/week2/May_Nature_76.pdf

Moyer, P. S., & Westenskow, A. (2013). Effects of Virtual Manipulatives on Student Achievement and Mathematics Learning. *International Journal of Virtual and Personal Learning Environments*, 35-50.

Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Paris : Gauthier - Villars et fils, de l'école polytechnique .

Sengupta, P., Krishnan, G., Wright, M., & Ghassoul, C. (2015). Mathematical Machines and Integrated Stem: An Intersubjective Constructionist Approach. (S. Zvacek, Ed.) *CSEDU 2014*, 272–288.

Thomas, M., & Martin, J. (2017). Virtual Manipulatives, Vertical Number Lines, and Taylor Series Convergence:. *20th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 963-071). San Diego, California: SIGMAA.

LA ENSEÑANZA DE LAS GEOMETRÍAS EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN MATEMÁTICA: DECONSTRUCCIÓN DEL SABER, PRÁCTICAS ÁULICAS Y TIC

GEOMETRY TEACHING IN MATHEMATICS TEACHER TRAINING; KNOWLEDGE DECONSTRUCTION, CLASSROOM PRACTICES AND INFORMATION-COMMUNICATION TECHNOLOGIES

Daniela Emmanuele
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (FCEIA) – Universidad Nacional de Rosario (UNR) (Argentina)
emmanueledaniela@gmail.com; emman@fceia.unr.edu.ar

Resumen
En este trabajo, enmarcado dentro del Proyecto de Investigación ING 548, se indaga cómo se desarrolla el proceso de construcción/deconstrucción del saber geométrico; en qué medida este proceso favorece la articulación de los distintos tipos de pensamiento; y la relación existente entre las propuestas pedagógicas, las prácticas áulicas y el uso de las TIC. Para ello, hemos realizado observaciones de clases, entrevistas y encuestas tanto a docentes (secundarios y universitarios) como a alumnos de las materias *Geometría III* de la carrera de Profesorado en Matemática perteneciente a nuestra institución; y *Tópicos de Geometría*del Instituto de Educación Superior N° 28 “Olga Cossettini” de Rosario.

Palabras clave: geometrías, deconstrucción, prácticas áulicas

Abstract
This work, framed within the Research Project ING 548, presents a study on how the process of geometric knowledge construction / deconstruction is developed; to what extent this process favours the connection of different types of thinking; and the relationship between pedagogical proposals, classroom practices and the use of ICT. So, we have made observations of classes, interviews and surveys to both teachers (secondary and university ones) and students of the Geometry III subjects in the mathematics training teacher degree of our institution; and of the Topics of Geometry of the Institute of Higher Education No. 28 "Olga Cossettini" of Rosario.

Key words: geometry, deconstruction, classroom practices

Introducción

El informe de avance que se presenta a continuación corresponde a una investigación en curso, no concluida, al momento de su comunicación.

Planteo del problema – Relevancia y pertinencia del tema: En la disciplina Matemática, las Geometrías son consideradas como la rama más fértil para describir, modelizar, comprender el espacio físico (más allá de cuál sea el espacio físico considerado) e interpretar la realidad de este. A pesar de ello, las distintas geometrías (Euclidiana, Afín, Proyectiva, Diferencial, entre otras), en general, han estado ausentes – a excepción de la geometría euclidiana plana - dentro del currículo del Profesorado en Matemática. Incluso, la Geometría Euclidiana, se dicta siguiendo programas que difieren tanto en sus contenidos como en las actividades áulicas propuestas, de acuerdo con los distintos Institutos Superiores de Profesorado (ISP) o Universidades donde los profesores se forman. Creemos que esta falta de uniformidad ha incidido seriamente en la manera en que se desarrolla el proceso de deconstrucción del saber en los futuros docentes y en los docentes formadores, afectando y modificando las prácticas áulicas consideradas provechosas para la transmisión significativa de las geometrías. Convencidas de que las geometrías permiten abordar y nutrir diversas temáticas, especialmente en los primeros años de la escuela secundaria y en los primeros años de la mayoría de las carreras universitarias relacionadas con la matemática (ingenierías, arquitectura, biología, economía, agrimensura), decidimos indagar respecto a la enseñanza de las geometrías en la etapa de *formación inicial de docentes*.

Coincidimos con la idea ampliamente aceptada de que no es posible aprehender un objeto geométrico sin que el mismo se haya podido manipular ya sea, desde lo concreto, o bien, desde el plano de las representaciones mentales, para lo cual deben existir actividades áulicas en las prácticas de enseñanza que favorezcan estos procesos de representación. Pero, además, si pretendemos que dichas actividades resulten plenamente significativas (en el sentido de que se conviertan en una instancia donde se problematice el conocimiento), el conocer las motivaciones históricas que dieron origen a los distintos conceptos geométricos, sus aplicaciones y sus relaciones con vastas áreas de la Matemática favorecería tal propósito; en particular, conocer las profundas relaciones que tienen las Geometrías con el Álgebra y el Cálculo. Es decir, consideramos provechoso que se articulen las TIC (que no sólo mediatizan las representaciones, sino que impulsan la construcción mental de las mismas) con aquellas prácticas áulicas tendientes a la recuperación del sentido histórico y social que tales temas geométricos portan.

El problema es que, a diferencia de la situación de amplia aceptación y mediano uso de las TIC que encontramos en las escuelas secundarias, en los ámbitos de los profesorados, ya sean terciarios o universitarios, las TIC no terminan de instalarse como parte del bagaje de instrumentos didácticos de los que disponen los profesores para la enseñanza en general, pero particularmente, para la enseñanza de las geometrías. "[…] los usos de los nuevos medios digitales con sentido pedagógico, […], son aun esporádicos y dependen, más que de una acción institucional coordinada, de la voluntad y formación de cada docente, al interior de cada una de sus materias. (Montero, 2014)

Preguntas de Investigación: Con el fin de lograr que los futuros docentes sean capaces de transmitir significativamente los contenidos geométricos, en su futura práctica áulica (en la escuela secundaria o en carreras universitarias, y más aún en el Profesorado en Matemática), es fundamental que ellos, como alumnos de profesorado, hayan sido partícipes de una clase configurada como una comunidad de producción (Sessa, 2011); es decir, una clase donde hayan tenido la posibilidad de construir, deconstruir y reconstruir el conocimiento que fundamenta y organiza la acción sobre los objetos de la matemática, dotándolos de significado. Pero entonces nos interrogamos por qué tipo de relaciones es posible establecer entre el uso de las TIC, los procesos de deconstrucción/construcción del conocimiento y la transmisión significativa de las geometrías.

Más precisamente, las preguntas que guían esta investigación están planteadas en torno a:

- ¿Qué características tiene el proceso de deconstrucción del saber geométrico en relación a la transmisión significativa de las geometrías?

- ¿En qué medida el proceso de deconstrucción favorece la articulación de los distintos tipos de pensamiento?
- ¿Cuál es la relación existente entre las propuestas pedagógicas, las prácticas áulicas y el uso de las TIC?

Marco teórico

Nuestro marco teórico de referencia se asienta fundamentalmente en la Socioepistemología, que nos brinda los conceptos de problematización del conocimiento, discurso matemático escolar (dME), deconstrucción del conocimiento y empoderamiento docente (Reyes-Gasperini, D.; Cantoral, R.; 2014); y particularmente, para este estudio, incorporamos el concepto de dispositivo analizador de Loureau (Loureau, 1977).

A partir de investigaciones previas y tomando como referencias: i) la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2016; Cabrera y Cantoral, 2013); ii) la teoría foucaultiana respecto a la producción de objetos y sujetos discursivos (Foucault, 1992), y iii) las teorías del análisis institucional (Loureau, 1977; Guattari, Ardoino y otros, 1981), entendemos por *deconstrucción* al proceso por el cual el profesor desacopla sus propios saberes para ofrecer un espacio de construcción de conocimientos a sus alumnos. Tal proceso supone analizar los distintos saberes que se poseen (disciplinares, institucionales, pedagógicos, didácticos, etc), esto es descomponer esos saberes en unidades simples, para favorecer en los alumnos la síntesis, la articulación y la elaboración de estos. Estudiando cómo se lleva a cabo dicho proceso, y a partir de algunas experiencias, propusimos establecer como elementos constitutivos elementales de dicho proceso, el reconocimiento de estrategias didácticas, núcleos de articulación temática, distintos casos de uso, y especialmente, el conocimiento tanto del origen histórico de los conceptos y su evolución, así como del campo de aplicación de estos. (Emmanuele, Rodil y Vernazza, 2018). En este caso, nos dedicamos a entender este proceso particularmente en la construcción de lo geométrico, pero focalizando, por otro lado, su articulación con lo algebraico y lo analítico.

El dispositivo analizador, concepto tomado del Análisis Institucional, es un concepto clave para la comprensión de lo que ocurre en una clase de Matemática donde los procesos de deconstrucción y construcción se despliegan. El juego de interacciones que se dan, lo que allí acontece, echa luz sobre: i) las características del proceso de deconstrucción que realiza el docente; ii) las particularidades del proceso de construcción que realizan los alumnos y, iii) a través de ellos, cómo se retroalimenta el profesor para transitar un nuevo proceso de construcción junto a sus alumnos y los aprendizajes logrados, sea cual fuere el grado de adquisición de estos. Es decir, permite analizar y entender cómo evoluciona el proceso de empoderamiento docente al calor de los aprendizajes mutuos.

El dispositivo analizador puede revelar, por ejemplo, las contradicciones del grupo, sus ocultamientos, las contradicciones de las instituciones, el vacilamiento de los alumnos (futuros docentes) que no saben cómo apropiarse de los conocimientos y el vacilamiento del profesor, que no sabe cómo ofrecer adecuadamente sus saberes, cómo ponerlos a disposición para que sus alumnos se los apropien. Se trata entonces de un dispositivo que permite pesquisar los puntos de tensión tanto del proceso de deconstrucción que ha de llevar a cabo el docente como los puntos de tensión en el proceso de construcción del conocimiento que deben llevar a cabo los alumnos. Mediante este dispositivo, podemos comprender mejor e intervenir de modo de cooperar con un buen desarrollo de ambos procesos y fundamentalmente de favorecer su articulación, realizando mediaciones oportunas. El dispositivo analizador funciona como un potente instrumento que visibiliza diferentes dimensiones (histórica, institucional, pedagógica, didáctica, cognitiva, social, epistemológica) y distintas perspectivas (individual, colectiva o grupal). Desde un enfoque socioanalítico, creemos que el analizador permitiría un rediseño adecuado del dME (con fuerza instituyente en el contexto áulico e institucional) al poner en evidencia las significaciones instituidas en torno a los conceptos, en nuestro caso, geométricos, así como también en torno al uso instituido de las TIC y las prácticas áulicas que se generan a raíz de ellas.

De modo tal que nuestra investigación se ubica en la denominada aproximación socioepistemológica, que, por definición de sus autores, procede de "[…] un singular cruce entre la Matemática, las Ciencias Sociales y las

Humanidades. De la primera, retoma su dimensión cultural y de las otras, el dominio privilegiado de las *prácticas* y la *construcción de significados compartidos*" (Cantoral, 2016, p 29). Por lo que prestamos atención simultáneamente a cuatro dimensiones (permanentemente imbrincadas) en la construcción de conocimiento matemático: la social y cultural, la epistemológica, la cognitiva y la didáctica. Las nociones de las que nos servimos (dME, deconstrucción, empoderamiento, descentración de los objetos, entre otras) constituyen potentes unidades de análisis para explorar, describir y comprender el origen social del conocimiento y su transmisión. Resultan sustanciales, las nociones de resignificación y las de prácticas sociales, dado que éstas son generadoras de conocimiento y posibilitan construir distintos escenarios y situaciones para la apropiación progresiva de los saberes y su puesta en acto.

Metodología

Nuestra investigación es de carácter exploratorio-descriptivo puesto que queremos inspeccionar, investigar y describir qué características tienen los procesos de construcción/deconstrucción de los saberes geométricos. Además, intentamos analizar en qué medida estos procesos favorecen la articulación de los distintos tipos de pensamiento y cuál es la relación existente entre las propuestas pedagógicas, las prácticas áulicas y el uso de las TIC. Hemos adoptado una perspectiva cualitativa ya que focalizamos nuestra atención en lo que los sujetos hacen (lo que los sujetos dicen que hacen y lo que observamos que hacen) dentro de las instituciones seleccionadas para este estudio (Rodriguez Gil, Gil Flores y García, 1996); no obstante, nos valemos de un instrumento propio del método cuantitativo: la encuesta (que nos permitirá recoger y tabular datos relativos tanto al proceso de deconstrucción de lo geométrico).

Nos ocupamos de estudiar de manera subjetiva, particularidades dentro del tema elegido, extrayendo conclusiones permanentemente atravesadas por el contexto. El diseño seleccionado es de tipo transeccional exploratorio, es decir, se recolectaron datos en un solo momento, en un tiempo único, con el fin de explorar todo lo concerniente a nuestras preguntas de investigación (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Lucio, 2008).

Para alcanzar nuestro propósito, decidimos recolectar datos mediante las siguientes técnicas:

1) observaciones de clases de asignaturas relacionadas con las geometrías (específicamente observamos clases de *Geometría III*, materia cuatrimestral, correspondiente al segundo cuatrimestre del cuarto año del Profesorado en Matemática de la FCEIA, y de *Tópicos de Geometría,* materia anual, correspondiente al tercer año del Profesorado de Tercer Ciclo de la Educación General Básica y de la Educación Polimodal en Matemática del Instituto de Educación Superior N° 28 "Olga Cossettini" (IES N°28);
2) encuestas a alumnos de las materias observadas;
3) entrevistas a las docentes cuyas clases fueron observadas; y
4) encuestas a docentes (secundarios y universitarios).

La recolección de datos se llevó a cabo durante el segundo cuatrimestre del año 2017, en la FCEIA y en el IES N° 28, pero también participaron actores de otros institutos superiores de profesorado (ISP N° 21, ISP N° 3). Dado que los procesos de construcción/deconstrucción de lo geométrico involucran tanto a docentes como a alumnos, y lo mismo ocurre con el proceso de articulación de los distintos tipos de pensamiento, se trabajó en primera instancia, con los alumnos que se encontraban cursando durante ese período del 2017, los últimos años de la carrera de Profesorado en Matemática de las instituciones mencionadas. En segunda instancia se trabajó con los docentes de las asignaturas relativas a las geometrías (en algunos casos coincidieron con los docentes cuyas clases fueron observadas). Por último, se administraron encuestas a docentes de Matemática en ejercicio profesional en escuelas secundarias y/o en universidades. Dado que el informe corresponde a una investigación en proceso, aún no se han analizado y correlacionado los datos recogidos en su totalidad; está pendiente la triangulación metodológica que se ha planteado dentro del diseño con el fin de contrastar los elementos obtenidos, analizar cuán consistentes son al compararlos y ponerlos en oposición, en definitiva, de significarlos y validarlos.

Las observaciones de clase, concebidas como un dispositivo analizador que nos permitirá establecer pautas para una propuesta de rediseño del dME, fueron consensuadas con las profesoras dictantes y fueron llevadas a cabo por integrantes de nuestro equipo de investigación. Se diseñaron tomando en cuenta los indicadores a pesquisar, esto es, el tipo de uso de las TIC que se hace en el aula (inductivo de definiciones y propiedades, instrumental y mecánico, exploratorio, otros), las prácticas áulicas generales que las acompañan (en particular, si estimulan la articulación de los distintos tipos de pensamiento) y los elementos constitutivos específicos del proceso de deconstrucción de los saberes geométricos presentes en las propuestas didácticas realizadas. En relación a la propuesta de enseñanza se atendió a la creatividad, coherencia y la construcción del conocimiento y su sentido; respecto a los recursos utilizados se atendió a la pertinencia y creatividad; en cuanto al enfoque epistemológico se atendió al dominio del tema, la preparación científica y el tipo de marco histórico-epistemológico subyacente; también se registraron cuestiones referidas a las habilidades para favorecer la participación de todos los alumnos y a los aspectos lingüísticos en cuanto al uso de vocabulario específico.

Las encuestas (de carácter anónimo y voluntario) se diseñaron atendiendo a su finalidad, esto es, como un recurso para poder detectar ciertos elementos relativos a los procesos de deconstrucción/construcción, en particular, las concepciones epistemológicas respecto de lo geométrico y la dimensión sociocultural de dicho conocimiento. Se entregó la encuesta en papel y se esperó a que el docente/alumno la complete y la entregue en mano. Copiamos aquí la encuesta para alumnos.

■ Encuesta sobre geometrías para alumnos del Profesorado en Matemática

1) Explique con sus palabras en qué consiste/n la/s geometría/s.
2) ¿Cómo se clasifican las geometrías de acuerdo a la metodología de trabajo o el enfoque que se le dé para su tratamiento? Explique brevemente en qué consiste cada categoría de trabajo.
3) ¿Conoce la historia de la/s geometría/s? Comente brevemente qué conoce acerca de su historia. ¿Puede mencionar algunos referentes o autores que propiciaron el desarrollo de las geometrías? Si su respuesta es afirmativa, trate de mencionar los autores contextualizándolos en tiempo y espacio geográfico.
4) ¿Conoce las aplicaciones de las geometrías? Si su respuesta es afirmativa, indique si se trata de una aplicación intramatemática o extramatemática.
5) ¿Considera necesario el estudio de las geometrías en la escuela secundaria? ¿Por qué?
6) ¿Considera necesario el estudio de las geometrías en el Profesorado en Matemática? ¿Por qué?
7) En sus clases, como alumno de las materias Geometría I y/o Geometría II (o Geometría Euclidiana y/o Álgebra y Geometría Analítica), ¿usaban software? ¿Cuál? En caso afirmativo, ¿para qué se lo usaba?:
    - Inducción de definiciones
    - Inducción de propiedades geométricas
    - Ejercitación práctica
    - Construcción de figuras
    - Comprobación de propiedades
    - Transformación de figuras
    - Otras (aclarar): ____
8) Si no lo hicieron en las clases de geometría, ¿dónde usaban software? ¿En qué otra materia? ¿Cuál software usaron? ¿A qué propósito servían esas clases?

La que corresponde a los docentes en ejercicio profesional en el nivel secundario y superior es similar, con pequeñas variantes, y se agregan dos preguntas:

9) Ahora como docente de secundaria, ¿usa software en sus clases? ¿Por qué sí o por qué no? Y, como docente universitario, ¿usa algún software en su materia? ¿Por qué sí o por qué no? Comente.
10) En cualquiera de las dos situaciones anteriores, con el uso del software, ¿cuál es la finalidad que persigue? Detalle.

Análisis e interpretación de los datos obtenidos

En todo momento del análisis, a partir de los instrumentos utilizados, intentamos: identificar el tipo de uso de las TIC que se hace en el salón de clases, caracterizar las prácticas áulicas que las acompañan, detectar los elementos específicos del proceso de deconstrucción de los saberes geométricos presentes en las propuestas didácticas profesorales, y discernir en qué medida estimulan la articulación de los distintos tipos de pensamiento en los alumnos.

Encontramos que:

En cuanto al uso de las TIC:

Los profesores de Matemática parecen restringir el uso de los softwares en sus prácticas docentes, a una actividad menor, de ejercitación, y no de generación de conceptos y de captación de propiedades. Cuando se indaga a los profesores secundarios y/o universitarios acerca de si usan software en sus clases de geometría, por ejemplo, la docente M responde: "*Como docente de secundaria uso software sólo en 1er año, por comodidad, las aulas cuentan con proyector y hay una netbook por alumno. En cambio, en las otras escuelas hay que ir al aula de informática y los alumnos deben compartir las computadoras. Como docente universitario no uso, no había pensado usar software también en este nivel, puede ser por falta de conocimiento sobre qué software usar y cómo usarlo o tal vez porque como alumna universitaria fueron muy pocas las veces que usamos*". Y cuando se les consulta a los alumnos de profesorado en qué materias (relacionadas a las geometrías u otras) han usado software y con qué finalidad, un gran porcentaje responde como el alumno P: "*No usé software prácticamente en ninguna de las materias, salvo en Cálculo y en Taller de Docencia*".

Respecto a las prácticas áulicas:

a) hallamos que la mayoría de ellas se sustentan en concepciones ontoepistémicas que - en general - obstaculizan los procesos bajo estudio; nos referimos al hecho de que tanto docentes como alumnos no están familiarizados con el plural "las geometrías". Prevalece la geometría euclidiana como modelo único posible para "la" (no "una") geometría. Además, predomina una visión estática de las geometrías, asociadas al estudio de las figuras, los cuerpos y sus propiedades, y al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. Raras veces los encuestados (tanto docentes como alumnos) manifiestan una visión dinámica de las geometrías relacionándolas con movimientos o transformaciones y sus invariantes. A la consigna explique con sus palabras en qué consiste/n la/s geometría/s, por ejemplo, el docente C responde: "*La geometría es una rama de la matemática que estudia las propiedades de los elementos que constituyen el plano y el espacio*"; y el alumno J responde: "*La geometría es una parte de la matemática que se encarga de estudiar las figuras geométricas, sus propiedades, etc, tanto en el plano como en el espacio. Surgen los conocimientos de recta, plano, punto, polígonos, etc*".

b) los docentes -en su mayoría- realizan una presentación teórica, mediatizada por algún problema considerado motivador, que en general, no colabora con la articulación de los distintos tipos de pensamiento que se deberían propiciar. Por ejemplo, a partir de las observaciones de clase, registramos que el docente H introduce su clase con una presentación teórica del tema que va a desarrollar, formula definiciones y propiedades, continúa con la presentación de ejemplos y por último propone ejercicios cuya resolución se realiza con lápiz y papel, no aprovechando los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución. A partir de las entrevistas, obtuvimos que algunos docentes, según manifiestan, primero indagan sobre los conocimientos previos y los repasan para, a partir de esa etapa diagnóstica y recordatoria, introducir nuevas fórmulas. Sólo algunos declaran utilizar videos educativos o algún software. Casi ninguno expresa realizar una contextualización histórica; observamos una única situación donde un docente utilizó un dato histórico acerca de lo que estaba enseñando pero resultó más bien un comentario de tipo anecdótico, no una contextualización que permitiera poner en evidencia las contracciones inherentes a la construcción histórica y social de la temática en cuestión. Es decir no se tomó como variable didáctica contemplada realmente en la propuesta de enseñanza, sino que fue sólo un relato de una historia que no se aprovechó más que a título de anécdota o efemérides.

En cuanto a los elementos que caracterizan a los procesos de deconstrucción y construcción bajo estudio encontramos que:

a) en general, los alumnos (y también algunos docentes) no distinguen los distintos enfoques metodológicos mediante los cuales se pueden enseñar las geometrías, esto es, no disciernen con claridad el enfoque sintético del analítico, confundiéndolos muchas veces con las diversas clasificaciones posibles de las geometrías según el grupo de invariantes que involucre. Por ejemplo, cuando se les consulta al respecto, oponen "geometría analítica" con "geometría euclidiana". Cuando se les pregunta por cómo se clasifican las geometrías de acuerdo a la metodología de trabajo o el enfoque que se le dé para su tratamiento, por ejemplo, el docente J responde: "*Geometría euclidiana: trabaja las transformaciones rígidas, rotaciones, simetrías y traslaciones en el plano y el espacio, trabaja con los axiomas de Euclides; y Geometría Analítica: trabaja en encontrar fórmulas que describan curvas en el plano o en el espacio*"; "y el alumno B contesta: "*Existen varios tipos de "geometría", pero los más conocidos son la geometría euclidiana, la geometría analítica y las no euclidianas*".

b) En su mayoría, desconocen autores y referentes históricos de los conocimientos geométricos; pero en los casos en que pueden reconocerlos, no pueden contextualizarlos en tiempo y lugar, desconociendo el contexto en el que los saberes se engendraron y los conflictos epistemológicos que debieron, en algunos casos, sortear. Cuando se les hace la pregunta: *¿Conoce la historia de la/las geometría/s? Comente brevemente qué conoce acerca de su historia. ¿Puede mencionar algunos referentes o autores que propiciaron el desarrollo de las geometrías? Si su respuesta es afirmativa, trate de mencionar los autores contextualizándolos en tiempo y espacio geográfico*, por ejemplo el docente M responde: "*Conozco algo de la historia de la geometría euclidiana, formada por axiomas y postulados, y el surgimiento de las geometrías no euclidianas a partir de contradecir o tratar de demostrar el 5to postulado de Euclides, que dice que por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela a ella. Como referentes recuerdo a Euclides, Lovachevsky y Bolyai, pero no sabría especificar las épocas con exactitud, Euclides antes de cristo y los otros dos siglo XVIII*"; el docente A contesta: "*No conozco la historia de las geometrías. En el profesorado, estudié sobre la historia de las matemáticas (incluía algo sobre Geometría), pero, honestamente, no recuerdo, no me resultó un aprendizaje significativo. Los autores que conozco asociados al desarrollo de la Geometría tienen que ver con aportes específicos. Euclides, porque su obra representa la base de la geometría. Era Griego y vivió varios siglos A.C (no recuerdo con precisión). Gauss, Pitágoras (griego), Thales, Descartes*"; y el alumno CH contesta: "*No recuerdo con exactitud la historia de la/las geometría/s en su comienzo, pero sí recuerdo algunos referentes en la geometría como Pitágoras y Thales de Mileto*".

c) En cuanto al valor histórico-social que portan las geometrías tanto docentes como alumnos asignan un alto valor de utilidad a lo geométrico pero no pueden manifestar aplicaciones concretas de las geometrías, sólo en algunos casos se plantearon aplicaciones intra-matemáticas y extra-matemáticas. En general, no reconocen a raíz de qué tipo de demandas sociales o para resolver qué tipo de problemas es que se generaron ciertos conocimientos geométricos; es decir, se desconoce el origen y la evolución de los conceptos geométricos así como su aplicación concreta. Por ejemplo, cuando se les pregunta acerca de las aplicaciones de las geometrías, la docente C contesta: "*En trabajos de arquitectos, agrimensores, supongo que aplican conocimientos de geometría pero exactamente no sé cuáles. Al usar un teodolito, utilizan proporciones geométricas. Para el trazado de mapas, para la astronomía también, pero no sé exactamente qué conceptos utilizan en qué. En dibujo técnico, para dibujar en perspectiva.*"; y el alumno V dice: "*La geometría tiene muchísimas aplicaciones, algunas que podría mencionar son en la ingeniería, en la arquitectura, la investigación matemática, etc*".

En cuanto a la articulación de los distintos tipos de pensamiento no encontramos propuestas que tiendan a ello, más bien encapsulan los conocimientos en un solo tipo.

Discusión de los resultados

Los resultados a los que arribamos luego del análisis anterior se resumen en los siguientes puntos:

- El uso que se hace de las TIC en el salón de clases de profesorado es, en general y salvo pocas excepciones, instrumental y mecánico, consistente en mera ejercitación práctica.
- Se desconocen las distintas geometrías, así como se observan dificultades para discriminar entre distintos enfoques para el tratamiento de una misma geometría.
- Predomina una concepción estática de la geometría relacionada al estudio de figuras planas.
- Prácticamente, excepto en una situación, no hemos podido observar la práctica áulica de servirse de las TIC para que a partir de la exploración (y no mediante la presentación teórica del tema) se puedan construir conocimientos geométricos.
- La práctica áulica más frecuentemente observada e informada por los docentes resultó ser la presentación teórica mediatizada por la introducción de un problema motivador pero no encontramos situaciones donde la introducción de un tema geométrico se realice desde la presentación de actividades de exploración mediante el uso de las TIC o la presentación de un problema abierto, contextualizado históricamente y epistemológicamente situado, a partir del cual y por articulación de los distintos tipos de pensamiento se pudiera construir nuevos conceptos.
- El conocimiento acerca de los procesos históricos en los cuales tuvieron lugar la generación y/o evolución de un concepto geométrico, en general, se desconocen.
- El conocimiento de las aplicaciones concretas es bastante limitado, más aún cuando de aplicaciones extramatemáticas se trata.

Este último ítem sea quizás la razón por la cual no pudimos detectar con claridad el grado de articulación de los distintos tipos de pensamiento. Las clases observadas no fueron concluyentes al respecto. Éste es un punto de debilidad de la investigación que intentaremos fortalecerlo mediante nuevas estrategias de recolección de datos.

Compartimos la apreciación de Scholz y Montiel (2017) cuando expresan que:

> […] al confrontar (dialectizar) el análisis de los procesos de construcción geométrica con el análisis del discurso Matemático Escolar (dME) (reportado por: Montiel y Jácome, 2014; Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015), se pone en evidencia la riqueza en el lenguaje y en el pensamiento que se pierde cuando el dME norma la construcción de significados tanto para el que enseña como para el que aprende. (Scholz Marbán, A.; Montiel Espinosa, G., 2017, p. 1024).

Reflexiones finales

Sabemos que son muchos los factores que sabotean el buen uso de las TIC en el nivel superior (de las entrevistas surgió, entre otros motivos, lo extenso del currículo planteado para los tiempos destinados a su enseñanza, el no contar con computadoras en el mismo aula de trabajo o no saber cómo aplicarlas en nivel superior) pero aún así insistimos en su incorporación y en la preparación de los alumnos de profesorado y de los docentes para su uso, desde una sólida interrelación entre el aspecto técnico, el aspecto disciplinar y el aspecto didáctico. Creemos que una transmisión efectiva de las geometrías sólo se logrará con la articulación de tres factores esenciales: inserción de las TIC para la construcción de conocimiento en el aula, incorporación de las prácticas de referencia que permitan una contextualización histórico-epistemológica del conocimiento a transmitir que le dé sentido, y de la integración de las aplicaciones concretas no sólo intra sino fundamentalmente extra-matemáticas que brinden recursos a los docentes a cargo de su futura transmisión. Sostenemos que, problematizar el conocimiento relativo a las geometrías requiere la apelación a un enfoque histórico que trascienda lo anecdótico y que recupere los procesos de luchas académicas, históricas, sociales y políticas en que las geometrías se desarrollaron.

> Estamos frente a saberes que perdieron su sentido, su significación en la historia de los hombres y que el alumno no puede percibir en su capacidad emancipadora, por eso […] hay que enseñar no solo los saberes, sino la historia de esos saberes; porque al entender que esos saberes fueron cruciales en la historia, que constituyeron un gran desafío que permitió liberarse de creencias arcaicas y que fueron la manera de librarse del control de los que eran tiranos y omnipotentes, se puede entender la interacción de todos los elementos de nuestro complejo mundo. (Meirieu, P.; 2013, p.8)

A partir de los resultados parciales obtenidos se están diseñando experiencias de aula con docentes del profesorado que incorporen la articulación de los tres factores mencionados más arriba para contribuir al rediseño del discurso geométrico escolar.

Referencias bibliográficas

Cabrera Chim, L.; Cantoral, R. (2013). La deconstrucción del conocimiento matemático: un medio para el análisis del desarrollo profesional del profesor. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1595-1603. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2016) *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. México: Gedisa, 2° edición.

Emmanuele, D.; Rodil, F.; Vernazza, C. (2018) Concepciones Ontoepistemológicas y Proceso de Deconstrucción del Saber Matemático en la Formación de Profesores de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 31* (Número 2) 1077-1084.

Foucault, M. (1992). *El orden del discurso*. Barcelona: Tusquets.

Guattari, F.; Ardoino, J. y otros (1981) *La intervención institucional*. México: Folios.

- Hernández Sampieri, R.; Fernández Collado, C.; Lucio, B. (2008). *Metodología de la Investigación*. México: Mc Graw Hill.

Loureau, R. (1977) *El análisis institucional: para un cambio de las instituciones.* Madrid: Campo Abierta.

Meirieu, P. (2013) La opción de educar y la responsabilidad pedagógica. Conferencia organizada por el Ministerio de Educación de la República Argentina. Buenos Aires, 30 de octubre de 2013.

Montero, J. (2015) Todo empezó con un click. Una clase de Matemática con software de geometría dinámica. EN: Experiencias de enseñanza con TIC en la formación docente. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. E-Book disponible en https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Experiencias_de_ensenianza_con_TIC_en_la_Formacion__Docente_Final_4.pdf

Reyes Gasperini, D.; Cantoral, R. (2014) Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 360-382*.

Rodriguez, G.; Gil Flores, J. y García Jímenez, E. (1996). *Metodología de la Investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.

Schols Marbán, A.; Montiel Espinosa, G. (2017) Problematización de la Geometría en la génesis histórica de la Trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30,* 1018-1026.

Sessa, C. et. al. (2011) La formación en las carreras de profesorado en Matemática. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. E-book disponible en http://cedoc.infd.edu.ar/upload/04_1._La_formacion_en_las_carreras_de_profesorado_ de_Matematica_1.pdf

FORMACIÓN CIUDADANA Y MATEMÁTICA EDUCATIVA: UNA MIRADA AL CIUDADANO EN LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA

CITIZEN TRAINING AND EDUCATIONAL MATHEMATICS: A LOOK AT THE CITIZEN IN THE SOCIO-EPISTEMOLOGICAL THEORY

Iván Pérez-Vera, Daniela Reyes-Gasperini, Ángela Silva-Salse
Universidad Academia de Humanismo Cristiano (Chile), Cinvestav-IPN (México), Universidad SEK (Chile)
ivanestebanperez@gmail.com, dreyes@cinvestav.mx, angelasilvasalse@gmail.com

Resumen
Este artículo se presenta en el marco del desarrollo de una investigación doctoral denominada "formación ciudadana desde una visión Socioepistemológica de la matemática educativa", la cual busca generar una articulación entre la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) y la formación ciudadana. Se discuten elementos que describen la problemática que impulsa la articulación. Se exponen elementos de la formación ciudadana, así como de la TSME. Como resultado específico, en este artículo se presenta una revisión bibliográfica que busca analizar el tratamiento a los conceptos de ciudadano y ciudadanía que se han realizado en la producción científica en el marco de la TSME.

Palabras clave: formación ciudadana, socioepistemología, matemática educativa

Abstract
This paper is presented within the framework of a doctoral research development entitled "Citizen Training from a Socio-epistemological Perspective of Educational Mathematics", which seeks to generate a connection between the socio-epistemological theory of the mathematics education (STME) and citizen training. We discuss some elements which describe the problem that foster the interplay. Some citizen training elements, as well as the STME elements are also exposed. As a specific result, this paper presents a bibliographic review, which is intended to analyze the approach of citizen and citizenship concepts that have been defined in the scientific research within the framework of the STME.

Key words: citizen training, socio-epistemology, educational mathematics

Introducción

Los antecedentes que sustentan nuestra problemática se articulan desde tres eventos centrales: (1) el tratamiento de la matemática escolar en Chile y la mirada platónica del Currículum; (2) la ausencia de la matemática en las propuestas oficiales curriculares de formación ciudadana en Chile; y (3) el rol de la escuela en los procesos de formación ciudadana.

Sobre matemática escolar y la propuesta curricular, en el caso de Chile, el actual Currículum nacional de Matemática, así como los estándares para la formación de profesores de Matemática (Felmer, Varas y Martínez, 2010), de nivel básico y medio, son generados por la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile (FCFM), cuya propuesta de enseñanza a nivel escolar presenta una clara tendencia a la enseñanza de un objeto preexistente, es decir, el tratamiento escolar de la matemática, se reduce a una visión platónica del objeto en el sentido propuesto por Cantoral (2013).

En el sentido de Platón (Chacón y Covarrubias, 2012), la matemática vive en un plano más allá de nosotros, es eterna y previa al hombre, transita por el mundo de las ideas y solo se puede acceder a este conocimiento por medio de la razón. El rol del sujeto se establece como una relación unidireccional, el conocimiento ha de llenar a quienes están carentes de él, pero no todos pueden acceder a un nivel o cantidad similar de conocimiento, los individuos logran acceder a este saber preestablecido en mayor o menor medida dependiendo de la preparación y formación que alcancen a tener, suele aparecer el sentido de iluminación, haciendo referencia a quien logra sumergirse de forma profunda en este mundo de las ideas. Lo anterior, en el paradigma platónico de la Ciencia, solo se considera a los individuos como entes que interactúan con el saber, no que lo generan. Sin embargo, desde Kuhn (1970) se plantea la ciencia como producto de la interacción social, de su emerger como una respuesta a la actividad humana, es decir, la ciencia, la matemática, no son eternas, no son previas a la humanidad, son producto de su interacción como ser social. La ciencia viene a dar soluciones a problemáticas del hombre, por tanto, la ciencia se manifiesta como una actividad humana, no divinizada. La ciencia no es producto de la iluminación, es producto del hombre en cuanto este es hombre y se desenvuelve socialmente. En Reyes-Gasperini (2016) se caracteriza la matemática escolar como una visión platónica de la enseñanza, identificando los posibles usos del objeto como una etapa posterior al proceso de aprendizaje. Surge como propuesta la Re-Significación del objeto desde el uso, es decir, desde la práctica social como normativa de la actividad humana.

El rol de la escuela en los procesos de formación ciudadana

Señala Peña (2015) que, en las condiciones contemporáneas no hay otra institución que -como la escuela- permita proveer a todos los niños y niñas de una misma experiencia cognitiva y desarrollar en ellos el sentido de participar en una tarea común que es indispensable para la vida democrática. Complementando lo anterior, Mardones (2015) nos señala que en las últimas décadas se ha observado a nivel mundial un cambio de referentes de la socialización política escolar desde el paradigma de la educación cívica a la educación ciudadana, esto último incorpora desarrollo de habilidades, valores y se concibe como una experiencia escolar integral.

Sobre la Ciudadanía Democrática, señalan Cox y García (2015) que los requerimientos a la experiencia educativa en este plano se han elevado y complejizado en forma radical, la respuesta a este nuevo nivel de exigencias desafía a toda la experiencia escolar, por tanto, a la totalidad del Currículum. Sobre la educación, vista como un todo, señala Magendzo (2016) que esta debe hacer de los estudiantes sujetos–ciudadanos empoderados para una ciudadanía activa, interlocutantes con la diversidad social, cultural y política que se nos impone en un mundo global que queremos y debemos "domesticar". La ciudadanía y el desarrollo democrático tienen como uno de sus factores clave a la educación. La Formación Ciudadana abarca a la comunidad escolar en su conjunto, lo que implica la necesidad de incluirla en el proyecto educativo de los establecimientos educacionales, la cultura escolar y los aprendizajes de las diversas asignaturas y módulos de las especialidades TP. Tradicionalmente, se le asigna la responsabilidad de su desarrollo a los/as docentes que imparten la asignatura de Historia, Geografía y Ciencias Sociales. No obstante, la efectividad de su tratamiento involucra una acción conjunta de los equipos de cada establecimiento educacional. Por ejemplo, existen distintos espacios curriculares que distintos/as docentes y directivos pueden abordar en el marco de la Formación Ciudadana (MINEDUC, 2013).

La ausencia de la matemática en las propuestas oficiales curriculares de formación ciudadana en Chile

Desde el plan de Formación Ciudadana impulsado por el Ministerio de educación de Chile, en particular, el documento "Orientaciones técnicas y guiones didácticos para fortalecer la formación ciudadana" (MINEDUC, 2013) se presenta como referente del plan a la asignatura de Historia, Geografía y Ciencias Sociales, presentando como una de las competencias transversales a la Resolución de Problemas, la que se propone y entiende de la siguiente forma:

> La resolución de problemas se construye a partir de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas y ayudan a razonar en vez de actuar de modo mecánico, siendo importante invitar a los/as estudiantes a buscar regularidades, así como desarrollar y explicar la noción de estrategia, comparar diversas formas de abordar problemas, justificar y demostrar las proposiciones matemáticas. (MINEDUC, 2013)

Entendemos el tratamiento propuesto para la resolución de problemas y la matemática en las "Orientaciones técnicas y guiones didácticos para fortalecer la formación ciudadana" (MINEDUC, 2013), como un tratamiento al objeto y su posterior uso aplicado, desconectando al objeto de su naturaleza propia, transformándolo en una herramienta instrumental. Observamos que en los procesos de formación ciudadana la escuela desempeña un rol fundamental, sin embargo, existe, a nivel local, una desconexión entre formación ciudadana y la enseñanza y aprendizaje de las Ciencias en general.

Ante lo anterior, consideramos que la matemática escolar debiera ser capaz de desarrollar las habilidades ciudadanas, sin embargo, al revisar los antecedentes expuestos, nos damos cuenta de que esto no está sucediendo.

Antecedentes teóricos y marco referencial

Nuevas necesidades de la formación ciudadana. El contexto social y político de Chile ha dejado en evidencia la necesidad de una transformación al entendimiento de las implicaciones del "Ser Ciudadano", en particular los movimientos estudiantiles de la década pasada han evidenciado una forma distinta de la concepción juvenil de lo que se debe incorporar a los procesos de formación ciudadana. Martínez, Silva, Morandé y Canales (2010) caracterizan la formación ciudadana juvenil, en un contexto inmediatamente posterior a las revoluciones estudiantiles antes señaladas. Esta caracterización se enmarca en tres puntos principales:

1. La pertenencia a un grupo, sociedad o a un país. Los jóvenes refieren prejuicio y discriminación hacia ellos, su imagen y su cultura, situación potenciada por los medios de comunicación que difunden aspectos negativos de las movilizaciones que efectúan, sin valorar la contribución positiva de su acción.

2. Los derechos económicos y sociales. Los derechos económicos y sociales, como la equidad de oportunidades en el acceso a educación, salud, vivienda, justicia, seguridad ciudadana, recreación, entre otros, que signifiquen verdaderamente libertad de elegir y respeto a los derechos sociales. Opinar, disentir, tomar decisiones y participar en el logro de metas comunes.

3. Los jóvenes adscriben a una ciudadanía activa que valora la responsabilidad de informarse, la deliberación de los ciudadanos y la participación en la toma de decisiones, con voz en asuntos políticos y poder de influencia a diferentes niveles del agregado social.

Para mirar al ciudadano y como la matemática escolar ha de potenciar su proceso formativo como tal, nos situamos desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) y desde la construcción social del conocimiento que se propone y entorno al cual se articula (Cantoral, 2013). Cuatro son las dimensiones que caracterizan la TSME: epistemológica, didáctica, cognitiva y social, esta última cuyo énfasis está puesto en el valor de uso.

Reyes-Gasperini (2016) señala desde la TSME una descentralización del objeto (matemática escolar) para pasar a un foco en las prácticas (saber matemático escolar), específicamente se propone pasar de una construcción del conocimiento matemático mediante una evolución conceptual, sustentada en una epistemología de ideas, a una construcción del conocimiento matemático mediante una evolución pragmática que anteceda y acompañe a la anterior, sustentada en una epistemología de prácticas (valor de uso). Las prácticas, entendidas desde Cantoral (2013), se articulan en un proceso de anidación, transitando desde la práctica social, las prácticas de referencia, las prácticas, hasta llegar a las actividades y acciones que desarrollan los individuos. Centramos nuestro foco en las prácticas de referencia y la triada que lo acompaña: el contexto en el que se desarrolla, el uso y al sujeto en su rol de usuario (Cantoral, 2013).

Metodología y algunos ejemplos

Como se señaló anteriormente, este escrito presenta una revisión bibliográfica que busca de forma exploratoria analizar el tratamiento de los conceptos de ciudadano y ciudadanía que se han realizado en la producción científica en el marco de la TSME. La revisión de la bibliografía se organizó con base en artículos de las bases de datos de la World Of Science (ISI y SCielo), la plataforma del Ministerio de Educación de Brasil (Sucupira) y Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal (Latindex). En esta etapa el primer criterio de inclusión de los artículos fue la declaración de la TSME en el título o bien en el enfoque teórico. Un segundo criterio de inclusión fue la búsqueda por académicos líderes de la corriente, todos a partir del año 2000. En esta etapa se encontraron un total de cincuenta y nueve artículos comprendidos entre los años 2000 y 2018.

Sobre los cincuenta y nueve artículos incluidos se realizó una búsqueda de texto con base en los conceptos de "Ciudadano" y "Ciudadanía", utilizando el software NVivo, búsqueda que arrojó la presencia de los conceptos en once artículos, con un conteo total de los conceptos de veintiún veces, destacando que la primera aparición de los conceptos "Ciudadano" y "Ciudadanía" en la producción científica en el marco de la TSME es en el año 2010, en el artículo del Dr. Ricardo Cantoral (2010) denominado "Tendencias de la investigación en Matemática Educativa: Del estudio centrado en el objeto a las prácticas".

Los siguientes cuadros presentan un resumen de los artículos contenedores de los conceptos de "Ciudadano" y "Ciudadanía", agrupados con base en el tipo de indexación o base de dato desde la que fue extraído.

Tabla 2- *Artículos en el marco de la TSME con tratamiento al Ciudadano o Ciudadanía - Indexación WoS*

Año	Autores	*Título Artículo*	Revista	Lugar	Indexación
2012	Francisco Cordero, Hector Silva-Crocci	*Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar*	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	México	WoS
2015	Ricardo Cantoral, Gisela Montiel, Daniela Reyes-Gasperini	*El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: El caso Latinoamérica*	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	México	WoS

Tabla 2- *Artículos en el marco de la TSME con tratamiento al Ciudadano o Ciudadanía - Indexación Sucupira*

Año	Autores	*Título Artículo*	Revista	Lugar	Indexación
2010	Ricardo Cantoral	*Tendencias de la investigación en Matemática Educativa: Del estudio centrado en el objeto a las practicas*	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	México	B2-Sucupira
2014	Ricardo Cantoral, Daniela Reyes	*Socioepistemología y matemáticas: del aula extendida a la sociedad del conocimiento. "todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar"*	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	México	B2-Sucupira
2014	Karla Gómez, Héctor Silva-Crocci, Francisco Cordero, Daniela Soto	*Exclusión, opacidad y adherencia. tres fenómenos del discurso matemático escolar*	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	México	B2-Sucupira
2015	Héctor Silva-Crocci, Daniela Soto Soto, Karla Gómez Osalde, Francisco Cordero Osorio	*La construcción social del conocimiento matemático y el discurso matemático escolar, aproximaciones a un programa permanente de formación del docente*	Acta Latinoamericana de Matemática Educativa	México	B2-Sucupira

Tabla 3- *Artículos En el marco de la TSME con tratamiento al Ciudadano o Ciudadanía - Indexación SCielo*

Año	Autores	*Título Artículo*	Revista	Lugar	Indexación
2012	Isabel Tuyub, Ricardo Cantoral	*Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la Obtención de Genes en una Práctica Toxicológica*	Boletim de Educação Matemática	Brasil	Scielo

2014	Daniela Reyes-Gasperini, Ricardo Cantoral	*Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático*	Boletim de Educação Matemática	Brasil	Scielo

Tabla 4- *Artículos En el marco de la TSME con tratamiento al Ciudadano o Ciudadanía - Indexación Latindex*

Año	Autores	*Título Artículo*	Revista	Lugar	Indexación
2014	Francisco Cordero, Claudia Méndez, Teresa Parra, Rosario Pérez	*Atención a la Diversidad. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica*	Revista Latinoamericana de Etnomatemática	Colombia	Latindex
2014	Ricardo Cantoral, Daniela Reyes-Gasperini, Gisela Montiel	*Socioepistemología, Matemáticas y Realidad*	Revista Latinoamericana de Etnomatemática	Colombia	Latindex
2016	Daniela Reyes-Gasperini, Ricardo Cantoral	*Empoderamiento docente: la práctica docente más allá de la didáctica… ¿qué papel juega el saber en una transformación educativa?*	Revista de la Escuela de Ciencias de la Educación	Argentina	Latindex

Resultados y análisis de resultados

Con base en los once artículos contenedores de los conceptos “Ciudadano” y “Ciudadanía” se realiza un primer análisis de carácter heurístico con el fin de caracterizar de forma visual el contexto en el que se desarrollan las ideas en torno a los conceptos de “Ciudadano” y “Ciudadanía”. El estudio consistió en un análisis de frecuencia textual sobre los once artículos, cuyos criterios fueron las cincuenta palabras con mayor presencia, extensión mayor a cuatro caracteres para generar la eliminación de los artículos propios y otros conectores. Con los resultados del análisis de frecuencia textual, se realiza la marca de nube, que presenta las palabras en distintos tamaños de fuente, de manera que las de mayor frecuencia aparecen en fuentes más grandes, que en este caso fueron: Matemáticas, conocimiento, matemático, educativas, prácticas, investigación y construcción.

Ilustración 1- Creación propia, frecuencia textual con uso del software NVivo

Las nociones de ciudadano y ciudadanía presentes en los escritos de la TSME se pueden establecer dentro de tres grandes categorías generales: cuando se usa ciudadano como alguien que se encuentra fuera del aula, o sea, en oposición a la escuela; el ciudadano como sinónimo de estudiante y, finalmente, cuando no se define el lugar desde donde se posiciona el ciudadano. Una siguiente categoría es cómo se establece la relación entre la ciudadanía y la Matemática Educativa. Estos tratamientos se presentan en la siguiente tabla, que resume y clasifica el uso de los conceptos (ver tabla 5).

Tabla 5- Los conceptos de Ciudadano y Ciudadanía – Relación estudiante y escuela

Párrafo donde se presentan los conceptos de Ciudadano o Ciudadanía (Estudiante y Ciudadano - Ciudadanía y Escuela)	**Tipo de tratamiento a los conceptos de ciudadano / Ciudadanía**
"que los estudiantes, en tanto ciudadanos, disfruten y participen de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas". (Cantoral, Reyes-Gasperini, y Montiel, 2014)	Concepto de ciudadano como estudiante de aula, desde esta óptica se usa como sinónimo.
"(…) no muestra el nivel de comprensión en matemáticas de las y los alumnos o de los ciudadanos (…) (Cantoral, 2010).	Concepto de ciudadano como estudiante de aula, desde esta óptica se usa como sinónimo.
"Nosotros, en cambio, partimos del reconocimiento del docente como intelectual profesional que se ocupa de la formación académica, ética y ciudadana de la juventud" (Cantoral y Reyes, 2014)	Entiende la ciudadanía en la escuela como un lugar en la formación, de la cual el docente debe ser parte activa
"¿Cómo lograr que disfruten y entiendan a las matemáticas la mayoría de los estudiantes de una clase? Y ¿cómo hacerlo al nivel de la ciudadanía?" (Cantoral, 2010; Cantoral, Reyes-Gasperini, y Montiel, 2014)	Entendimiento del ciudadano externo a la escuela
"Esta sección trata sobre el saber matemático de la proporcionalidad, el cual juega un rol formativo y transversal en la construcción del pensamiento matemático de los estudiantes y de los ciudadanos en un sentido amplio" (Cantoral y Reyes, 2014)	Entendimiento del ciudadano externo a la escuela

"(…) en definitiva el episodio de aprendizaje del estudiante en el aula tendrá que ampliarse al cotidiano del ciudadano en la institución y en la sociedad como un referente educativo" (Silva-Crocci, Soto, Gómez, y Cordero, 2015)	El ciudadano como una ampliación del estudiante, que va más allá de la sala de clases y se mueve en el cotidiano.

De forma mayoritaria se emplea el concepto de ciudadano sin especificar si se encuentra dentro o fuera de la escuela, esto se puede plantear de forma general, en torno a la ciudadanía crítica, la vida cotidiana y la ciudadanía en torno a la idea de ciudad (ver tabla 6).

Tabla 6- Los conceptos de Ciudadano y Ciudadanía – Tratamiento general a los conceptos.

Párrafo donde se presentan los conceptos de Ciudadano o Ciudadanía de forma general, dentro o fuera de la escuela	**Tipo de tratamiento a los conceptos de ciudadano / Ciudadanía**
"(…) Matemática Educativa como una disciplina académica que busca democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre los ciudadanos (…)" (Cantoral, 2010)	Tratamiento general, sin especificar si se trata dentro o fuera de la escuela
(…) con la expectativa de que este conocimiento transforme la vida de los ciudadanos" (Cordero Osorio y Silva-Crocci, 2012)	Tratamiento general, sin especificar si se trata dentro o fuera de la escuela
"Respecto de las Matemáticas, siempre se ha considerado que una cierta familiaridad con ellas resulta benéfica para todo ciudadano, en algunos casos se ha asumido que las Matemáticas escolares son incluso indispensables para la formación intelectual de todos los individuos" (Cantoral, Montiel, y Reyes-Gasperini, 2015)	Tratamiento general, sin especificar si se trata dentro o fuera de la escuela
"Los fenómenos de Exclusión y Opacidad inhiben esas prácticas y usos de tal suerte que a los ciudadanos no les deja otra opción que adherirse a la epistemología dominante del dME" (Gómez, Silva, Cordero, y Soto, 2014)	Tratamiento general, sin especificar si se trata dentro o fuera de la escuela
"Esa categoría de conocimiento matemático caracterizará la matemática funcional del ciudadano" (Silva-Crocci et al., 2015)	Tratamiento general, sin especificar si se trata dentro o fuera de la escuela

Se presenta además la idea de que la matemática escolar desde una visión Socioepistemológica debe contribuir a una ciudadanía crítica, dejando abiertos los entendimientos en torno a ello. Otra arista es la de relacionar la ciudadanía con la idea de vida cotidiana, o bien, desde la idea de ciudad como espacio de ciudadanía. La otra idea que tiene fuerza en esta construcción de la ciudadanía es la idea de democratización del aprendizaje y la relación con la Matemática Educativa (ver tabla 7).

Tabla 7- Los conceptos de Ciudadano y Ciudadanía – Ciudadanía crítica, La vida cotidiana, la ciudad como espacio de ciudadanía y democratización del aprendizaje.

Párrafo donde se presentan los conceptos de Ciudadano o Ciudadanía, la ciudadanía crítica, la vida cotidiana, la ciudad como espacio de ciudadanía y la democratización del aprendizaje	**Tipo de tratamiento a los conceptos de ciudadano / Ciudadanía**
"Todo como punto de partida para lograr una compresión efectiva de las Matemáticas y alcanzar una mayor independencia intelectual, esto coadyuva a la formación de una ciudadanía crítica." (Cantoral et al., 2015)	Contribución a la ciudadanía crítica
"Los procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela no logran que la matemática se torne funcional para la vida cotidiana de los ciudadanos" (Tuyub-Sánchez & Cantoral, 2012)	Ciudadanía y la vida cotidiana
"Los ciudadanos como un general no especificado, pero que se desarrollan en una vida cotidiana Bajo una mirada de la CSCM, la función principal de la Matemática Escolar (ME) es socializar ciudadanos plenos para su vida. Esto quiere decir que la ME se encargaría de socializar ciudadanos para vivir adecuadamente en su vida cotidiana, al mismo tiempo que el ciudadano debería encontrar reciprocidad y sustento del conocimiento de su vida cotidiana con la ME" (Silva-Crocci et al., 2015)	Ciudadanía y la vida cotidiana
"Pero también amplía los escenarios: la escuela, el trabajo y la ciudad; y no solo el aula (de matemáticas) o bien estos escenarios deberán entrar al aula para ampliarla" (Cordero, Méndez, Parra, & Pérez, 2014)	La ciudad como espacio de ciudadanía
"Quizá por eso no hay estudios que cuestionen el uso del conocimiento matemático en las niñas y los niños, en las y los jóvenes universitarios o en las profesiones o en las ciudades como un marco de referencia educativo" (Cordero et al., 2014)	La ciudad como espacio de ciudadanía
" (…) Matemática Educativa como una disciplina académica que busca democratizar el aprendizaje de las matemáticas entre los ciudadanos." (Cantoral, 2010).	Ciudadanía y democratización del aprendizaje

Existen unas ideas que subyacen la democratización del aprendizaje, que tienen que ver con el disfrute y el entendimiento del objeto de estudio, las que se presentan en la tabla 8.

Tabla 8- Los conceptos de Ciudadano y Ciudadanía – Ideas que subyacen la democratización del aprendizaje.

Párrafo donde se presentan los conceptos de Ciudadano o Ciudadanía - Ideas que subyacen la democratización del aprendizaje.	**Tipo de tratamiento a los conceptos de ciudadano / Ciudadanía**
"¿Cómo lograr que disfruten y entiendan a las matemáticas la mayoría de los estudiantes de una clase? (Cantoral, 2010).	El disfrute de la Matemática Escolar en el contexto de la democratización del aprendizaje
Digámoslo en un sentido metafórico: el problema mayor en el ámbito educativo no es de la aprehensión individual de objetos abstractos, sino el de la democratización del aprendizaje, es decir, que los estudiantes, en tanto, ciudadanos, disfruten y participen de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas. (Cantoral et al., 2014)	El disfrute de la Matemática Escolar en el contexto de la democratización del aprendizaje

La TSME busca de partida democratizar el aprendizaje de las matemáticas y se pregunta, como preguntamos anteriormente, ¿cómo lograr que disfruten y entiendan las matemáticas la mayoría de los estudiantes de una clase?, (Cantoral & Reyes, 2014)	El disfrute de la Matemática Escolar en el contexto de la democratización del aprendizaje

Conclusiones

El empleo de los conceptos de ciudadano y ciudadanía presentes en los escritos de la TSME es variable. Con base en el estudio, relativo al concepto de ciudadano, se proponen tres categorías generales: cuando se usa ciudadano como alguien que se encuentra fuera del aula, o sea, en oposición a la escuela; el ciudadano como sinónimo de estudiante y, finalmente, cuando no se define el lugar desde donde se posiciona el ciudadano. Relativo al uso del concepto de ciudadanía proponen dos categorías: La ciudadanía como actividad formativa de la escuela y en segundo lugar la ciudadanía como actividad critica cuyo fin es la liberación intelectual.

Se ha incorporado el concepto de ciudadano en la producción científica en el marco de la TSME como un elemento relevante, sin embargo, se hace necesario profundizar en las ideas de ciudadano y ciudadanía que dialogan con la teoría para lograr un acercamiento mayor.
Al realizar este estudio, se observa de forma implícito que los conceptos tanto de ciudadano como de ciudadanía expuestos en la TSME se relacionan con la idea crítica de los mismos, llegando a establecer al saber matemático escolar como una base relevante para la construcción de la democracia.

Si pensamos en la construcción de la educación para la liberación, que tiene en uno de sus sustentos la alfabetización, podemos extrapolar que la construcción de una verdadera educación liberadora democrática en la actualidad requiere incorporar aspectos relevantes a la matemática escolar como los que se proponen desde la visión de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2010). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.). Editorial Gedisa SA, Barcelona*.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(1), 5–17.

Cantoral, R., y Reyes, D. (2014). Socioepistemología y matemáticas: del aula extendida a la sociedad del conocimiento." Todo lo que siempre quisiste saber y nunca te animaste a preguntar".

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, *7*(3), 91–116.

Chacón Ángel, P., y Covarrubias Villa, F. (2012). El sustrato platónico de las teorías pedagógicas. *Tiempo de educar*, *13*(25).

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T., & Pérez, R. (2014). Atención a la Diversidad: La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 71–90.

Cordero Osorio, F., y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(3), 295–318.

Cox, C., y García, C. (2015). Objetivos y contenidos de la formación ciudadana en Chile 1996–2013: tres curriculos comparados. *C. Cox y JC Castillo, Aprendizaje de la ciudadanía. Contenidos, experiencias y resultados. Santiago: Ediciones UC*, 283–319.

Felmer, Varas, y Martínez. (2010). Estándares de matemáticas para la formación inicial de profesores de enseñanza media (Informe Final). Universidad de Chile.

Gómez, K., Silva, H., Cordero, F., & Soto, D. (2014). Exclusión, opacidad y adherencia. Tres fenómenos del discurso matemático escolar.

Kuhn, T. S. (1970). Book and film reviews: Revolutionary View of the History of Science: The Structure of Scientific Revolutions. *The Physics Teacher*, *8*(2), 96–98.

Magendzo, A. (2016). Incorporando la perspectiva controversial en el currículum disciplinario. *Revista iberoamericana de educación superior*, *7*(19), 118–130.

Mardones, R. (2015). El paradigma de la educación ciudadana en Chile: una política pública inconclusa. *Aprendizaje de la Ciudadanía. Contextos, Experiencias y Resultados*, 145–173.

Martínez, M. L., Silva, C., Morandé, M., y Canales, L. (2010). Los jóvenes ciudadanos: reflexiones para una política de formación ciudadana juvenil. Última década, 18(32), 105-118.

MINEDUC, M. de E. de C. (2013). Orientaciones técnicas y guiones didácticos para fortalecer la formación ciudadana.

Peña, C. (2015). Escuela y vida cívica. *Aprendizaje de la ciudadanía. Contextos, experiencias y resultados*, 25–50.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa*. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/306394854_Empoderamiento_docente_desde_una_vision_socioepistemologica_una_alternativa_para_la_transformacion_y_la_mejora_educativa

Silva-Crocci, H., Soto, D., Gómez, K., y Cordero, F. (2015). La construcción social del conocimiento matemático y el discurso matemático escolar, aproximaciones a un programa permanente de formación del docente.

Tuyub-Sánchez, I., y Cantoral, R. (2012). Construcción social del conocimiento matemático durante la obtención de genes en una práctica toxicológica. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42 A).

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 3 / ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

MATEMÁTICAS Y GÉNERO: UN ESTUDIO DEL RAZONAMIENTO ESPACIAL

MATHEMATICS AND GENDER: A STUDY OF SPATIAL REASONING

Verónica Ortiz Rojas, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
veronica.ortiz@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Se reporta una revisión bibliográfica preliminar como avance de una investigación sobre el razonamiento espacial en matemáticas, el proyecto se encuentra enmarcado en los estudios con perspectiva de género. De la revisión preliminar se ha identificado que las actividades de visualización dentro de la actividad matemática están dirigidas a la acción de *predecir*. En matemática educativa no se tiene definido un marco de referencia específico para el razonamiento espacial dada la actividad matemática, es decir, interpretar las actividades espaciales presentes en el desarrollo y construcción del conocimiento matemático aún no es evidente, por ello se recurre a la teoría socioepistemológica de la matemática educativa para que desde su problematización del saber se puedan identificar usos y significados alrededor de este razonamiento.

Palabras clave: socioepistemología, razonamiento espacial, género

Abstract
A preliminary bibliographic review is reported as an advance of a research on spatial reasoning in mathematics, the project is framed in studies with a gender perspective. From the preliminary review it has been identified that the visualization activities within the mathematical activity are directed to the action of predicting. In educational mathematics is not defined a specific frame of reference for spatial reasoning given the mathematical activity, ie, interpret the spatial activities present in the development and construction of mathematical knowledge is not yet evident, so it is resorted to the socioepistemological theory of educational mathematics so that from its problematization of knowledge, uses and meanings can be identified around this reasoning.

Key words: socioepistemology, spatial reasoning, gender

Introducción

Anteriormente el área de psicología educativa buscaba patrones diferenciados de comportamiento para mujeres y hombres, se realizaron estudios de corte académico con la intención de mejorar el aprendizaje en matemáticas, particularmente, lo que encontraron fueron disparidades en el rendimiento de pruebas sobre el razonamiento cuantitativo, lo cual llevó a numerosos estudios en los que la *atención visual* fue elemento de investigación. Una de las conclusiones dados estos resultados y otros resultados de corte biológico, el tamaño del hemisferio izquierdo relacionado con la capacidad espacial, en mujeres y hombres, suponía que las mujeres tenían menor habilidad espacial y que por ello presentaban dificultades para desempeñarse en el área de matemáticas.

Dentro de los estudios con perspectiva de género se ha discutido sobre la capacidad cognitiva de hombres y mujeres para las disciplinas de matemáticas y ciencias, y la pregunta que ha dirigido este tipo de investigaciones gira entorno a las capacidades cognitivas en hombres y mujeres ¿son iguales? o sobre su rendimiento en pruebas estandarizadas ¿quién es más talentoso, la mujer o el hombre?

Se presenta el avance de un proyecto de investigación que tiene por objetivo caracterizar las *concepciones* presentes, sus relaciones o procesos que acompañan la construcción del conocimiento matemático en lo que denominamos *habilidades espaciales,* en estudiantes de ingreso a nivel superior en matemáticas con perspectiva de género, bajo la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME).

Metodología

La metodología que emplearemos para el desarrollo de este proyecto de investigación responde a la TSME puesto que reconoce que el conocimiento matemático está íntimamente relacionado con prácticas sociales, las cuales suponen necesario reconocer la relación entre estos contextos sociales y la matemática.

Para ello, nuestra investigación estará centrada en la *problematización del saber* que, de forma sistémica, busca analizar el conocimiento matemático desde sus dimensiones cognitiva, epistemológica, didáctica y social, esto al estudiar propiamente la naturaleza del saber matemático (Reyes-Gasperini, 2016). De tal modo que podamos caracterizar a partir de marcos de referencia los usos y significados que se desprenden alrededor de la noción de razonamiento espacial en matemáticas con el objetivo de construir modelos que puedan ser llevados a escenarios didácticos.
El análisis reconocerá en la perspectiva de genero un elemento transversal al componente sociocultural, la TSME está fuertemente relacionada dada su postura sobre la construcción del conocimiento matemático, que más social que los estudios de género.

Marco referencial

El nivel académico que se reporta en las aulas de matemáticas para mujeres y hombres en conjunto con el discurso matemático escolar ha favorecido a los estudiantes varones, podemos reconocer que en libros de texto se siguen promoviendo, a través de ilustraciones, estereotipos de género en los cuales la mujer sigue ocupando un lugar secundario. Es en las aulas donde se construye una identidad génerica como un parteaguas sobre la elección profesional pero los espacios para mujeres y hombres se encuentran sumamente acotados dados los estereotipos de género que se hacen presentes en la interacción con el medio social.

Actualmente las propuestas sobre equidad e igualdad de participación para mujeres forman parte de las reivindicaciones sociales que corresponde al ámbito social, en el sector educativo estas reivindicaciones son de carácter escolar y desde la matemática educativa se estudia la naturaleza del discurso matemático escolar, es decir,

¿qué tipo de interacciones se promueven en el aula? desde la perspectiva de género nos interesa reconocer la forma en que las mujeres construyen su conocimiento matemático. Para ello retomamos la premisa que resultó de investigaciones de corte psicológico y biológico en donde se asume la mujer presenta dificultades respecto a las actividades espaciales, lo cual repercute en su participación en áreas de matemáticas y ciencias. Suponemos que escolarmente la reivindicación de la mujer en el aula responde al ámbito STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) con el propósito de que la mujer pueda incursionar en estas áreas de trabajo y se pueda rescatar mucho talento femenino que ya ha pasado varios *filtros* a través de su vida académica.

Spelke (2005) plantea un escenario en el cual propone analizar el pensamiento matemático maduro, sus fundamentos e interacciones, con el fin de entender qué sucede en las aulas antes de que los intereses y las diferentes fuerzas sociales comiencen a influir en las actividades académicas de hombres y mujeres.

Analizar el pensamiento matemático es una tarea interminable, más aún analizarlo particularmente para hombres y mujeres, pero estudios han señalado que la existencia de diferencias académicas (aunque sea mínimas) se deriva principalmente de la estrategia de solución de problemas. Spelke (2005) plantea que el uso diferenciado de estrategias de solución por sexo se puede enmarcar en tres líneas de acción para su estudio, el primero de ellos es de suma importancia pues enfatiza sobre la idea en la cual mujeres y hombres están predispuestos desde su nacimiento para aprender diferentes cosas dada la interacción diferenciada que se da con el medio social para cada uno, enfatizando que los hombres dirigen su aprendizaje a las relaciones mecánicas de los objetos, mientras que las mujeres están sujetas a un aprendizaje sobre las relaciones personales, sociales y emocionales:

> “One claim asserts that males and females are predisposed from birth to learn about different things: Male infants learn about objects and their mechanical relationships, whereas female infants learn about people, emotions, and personal relationships” (p.950).

Así mismo Spelke (2005) considera que uno de los resultados más importantes de las investigaciones realizadas fue caracterizar a las tareas escolares, particularmente aquellas que se relacionaban con la comparación visual, se encontró que aquellas tareas donde se presentaban dos objetos en diferentes orientaciones resultaban en: una mayor interacción para los hombres al formar una imagen de un objeto y darle vueltas en la mente para alinearlo con el otro (es decir, la rotación mental) , mientras que las mujeres resultaron ser más propensas a comparar características de los objetos.

Actualmente, caracterizar al razonamiento espacial busca detectar elementos necesarios para la elaboración de proyectos de intervención educativa con los cuales se busca atender de manera transversal el aprendizaje de matemáticas, esto suponiendo que el medio con el cual nos hemos desarrollado desde el nacimiento reconoce a la espacialidad como un conocimiento a priori. En este sentido Newcombe (2013) afirma que los estudiantes con una gran capacidad de reconocimiento espacial aprenden mejor de las visualizaciones que los estudiantes con menor reconocimiento espacial, una premisa de Newcombe que surge de estas consideraciones es que la capacidad espacial predice el interés y éxito en estudiantes para las disciplinas STEM.

La revisión bibliográfica permitió reconocer distintas facetas del significado que se le atribuye, bajo diferentes supuestos teóricos, al concepto de “razonamiento espacial”. Mulligan, J. (2015) contempla resultados de investigaciones multidisciplinares, con los cuales advierte que actividades espaciales tempranas en estudiantes permiten el desarrollo de habilidades espaciales y de manera subsecuente repercuten en el desarrollo de la capacidad espacial en particular en la enseñanza de la geometría.

Consideramos que en realidad estas actividades espaciales plantean la descripción de lo que se entiende por espacio físico, atendiendo únicamente a la descripción (en su nivel más básico) de disposiciones de objetos o elementos que se encuentran en un espacio determinado, para dar una caracterización al respecto. En este mismo sentido Thom y McGarvey (como se citó en Mulligan, J., 2015) consideran que el espacio gráfico (trazos, dibujos y esquemas) debe ser estudiado en los niños, puesto que podría reconocerse cómo en la actividad dinámica surgen ideas geométricas: "Adopt an embodied cognitive view of the study of children's drawings, and how the physical process of drawing allows geometric understandings to emerge" (p.512).

Ya mencionamos que no existe una única definición para referirse al razonamiento espacial, más bien se encontraron términos que aluden a su interpretación. La revisión bibliográfica nos permitió elaborar una descripción de lo que se ha entendido por este concepto como se muestra en la tabla número 1

Sentido espacial	**Orientación espacial**	**Relacionado con las disposiciones de objetos y superficies, con la finalidad de hablar sobre el cambio de posición.**
	Habilidad espacial	Realizar transformaciones y mantener cambios a un objeto original, rotación mental, perspectiva, etc.
Pensamiento espacial		Conocimiento general del espacio, que se subdivide.
Visualización		Aptitud para manipular objetos mentalmente (el objeto es lo que es manipulado).
Capacidad espacial		Como una cualidad que puede mejorarse mediante entrenamiento específico.

Tabla 1. Concepciones teóricas para el razonamiento espacial

Coincidimos con la definición que hace Mulligan (2015) respecto del razonamiento espacial como "la capacidad de reconocer y manipular (mentalmente) las propiedades espaciales de los objetos, así como las relaciones espaciales entre ellos" (p. 513). Consideramos que si bien esta definición explica la relación cognitiva que establece el sujeto en su interacción con el objeto, falta estudiar las ideas en torno a situaciones de espacialidad en matemáticas.

Arrieta (2003) plantea como una necesidad de la investigación en matemática educativa el establecimiento de marcos de referencia adecuados para "estudiar la relación entre la capacidad espacial y el estudio de las matemáticas…pero se constata un déficit de instrucción en contenidos matemáticos asociados a la capacidad espacial que conviene compensar" (p. 59)

Un resultado determinante en términos de analizar con perspectiva de género es que en el conocimiento matemático específico, los hombres tienden a desempeñarse mejor en tareas que requieren altos niveles de razonamiento espacial según lo reportan los resultados de las pruebas estandarizadas que miden a través de ítems *niveles* del razonamiento espacial. Sin embargo, hallazgos recientes han demostrado que los programas de intervención didáctica pueden cerrar la brecha tanto para las variables de género como para las socioeconómicas cuando se introducen actividades espaciales explícitas en la instrucción (Newcombe & Frick, 2010).
Lowrie y Jorgensen (2017) señalan que los diseños didácticos que buscan el desarrollo del razonamiento espacial se deben apoyar de imágenes visuales y de la gráfica como un medio para interpretar representaciones, de manera similar caracterizan qué elementos serán considerados para cada uno de los grupos, esto claro en Matemática Educativa. Algunas investigaciones que ya han elaborado marcos de referencia para el diseño de materiales de intervención didáctica son:

Uttal et al. (Como se citó en Lowrie & Jorgensen, 2017) proponen una tipología de habilidades espaciales en la cual se clasifica en términos de información intrínseca y extrínseca, y en tareas estáticas y dinámicas (como se muestra en la figura 1). El reconocer las partes de un objeto y las relaciones que guardan se considera como información intrínseca, por su parte la información extrínseca se refiere a la relación de los objetos en un grupo. El carácter de estático y dinámico está relacionado con la presencia o no de movimiento. Este tipo de marco de referencia utiliza el carácter descriptivo de situaciones reales en donde lo espacial es señalado a través del cambio de posición de un objeto.

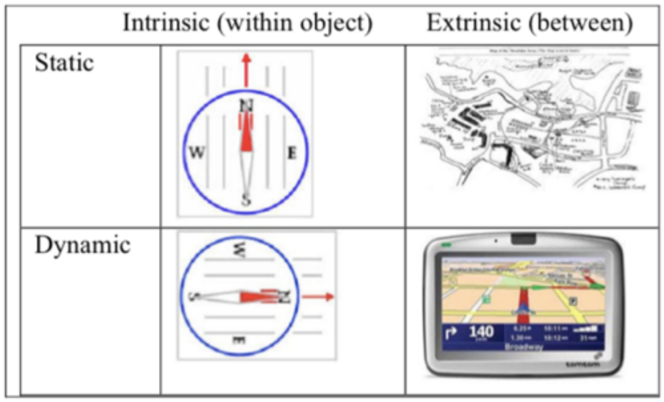
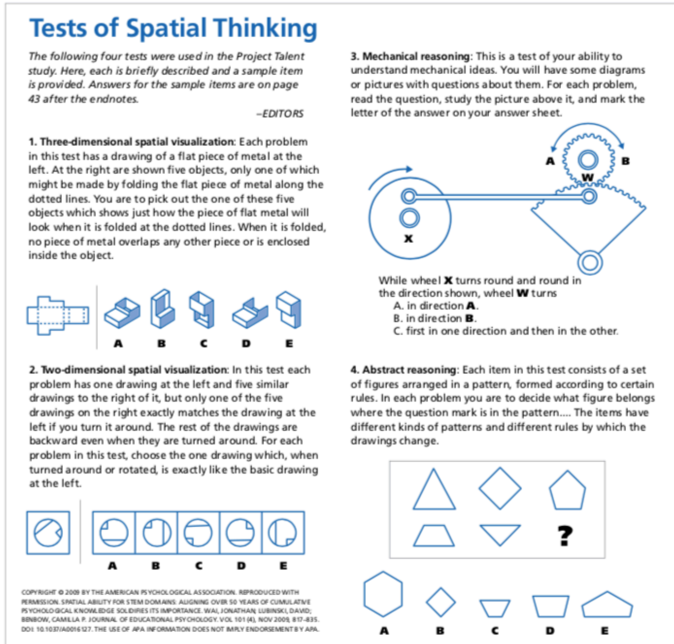


Figura 1. Una representación de la tipología de habilidades espaciales de Uttal et al. (2013), recuperado de Lowrie y Jorgensen (2017).

Por su parte Mulligan et. al. (2018) reconocen que es a través de tareas de organización espacial, reconocimiento de patrones de repetición y cambio, capacidad de generalización a partir de interacción ambiental que se atiende al desarrollo del razonamiento espacial. Proponían analizar a través de softwares como PATMaths y PASA los datos obtenidos, con la intensión de elaborar instrumentos para medir y describir la capacidad general de los estudiantes, el rendimiento matemático, así como la conciencia de patrón y estructura que tenían.

Por otra parte, se encuentran las investigaciones que hacen análisis de los ejercicios planteados en pruebas estandarizadas que miden este tipo de razonamiento. Newcombe (2010) presenta una clasificación (figura 2) del tipo de ejercicios espaciales que se emplean en dichas pruebas, afirmando que estos ejercicios no contemplan todas las habilidades que se emplean o son consideradas como parte del razonamiento espacial.



Tests of Spatial Thinking

The following four tests were used in the Project Talent study. Here, each is briefly described and a sample item is provided. Answers for the sample items are on page 43 after the endnotes.

–EDITORS

1. Three-dimensional spatial visualization: Each problem in this test has a drawing of a flat piece of metal at the left. At the right are shown five objects, only one of which might be made by folding the flat piece of metal along the dotted lines. You are to pick out the one of these five objects which shows just how the piece of flat metal will look when it is folded at the dotted lines. When it is folded, no piece of metal overlaps any other piece or is enclosed inside the object.

A B C D E

2. Two-dimensional spatial visualization: In this test each problem has one drawing at the left and five similar drawings to the right of it, but only one of the five drawings on the right exactly matches the drawing at the left if you turn it around. The rest of the drawings are backward even when they are turned around. For each problem in this test, choose the one drawing which, when turned around or rotated, is exactly like the basic drawing at the left.

A B C D E

3. Mechanical reasoning: This is a test of your ability to understand mechanical ideas. You will have some diagrams or pictures with questions about them. For each problem, read the question, study the picture above it, and mark the letter of the answer on your answer sheet.

A W B X

While wheel **X** turns round and round in the direction shown, wheel **W** turns
- A. in direction **A**.
- B. in direction **B**.
- C. first in one direction and then in the other.

4. Abstract reasoning: Each item in this test consists of a set of figures arranged in a pattern, formed according to certain rules. In each problem you are to decide what figure belongs where the question mark is in the pattern.... The items have different kinds of patterns and different rules by which the drawings change.

?

A B C D E

Figura 2. Tests of Spatial Thinking, recuperado de Newcombe, Nora. (2010).

Pareciera que este tipo de razonamiento es percibido como una habilidad que se relaciona directamente con la idea de analizar rotaciones y simetrías a través de ejercicios espaciales que valoran únicamente la manipulación de objetos. Pruebas estandarizadas, reconocen la importancia del razonamiento espacial para las carreras relacionadas con las ciencias, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés). Ante estas declaraciones y la realidad de los exámenes de admisión al nivel superior que contempla un apartado sobre razonamiento espacial surge la necesidad de actividades matemáticas alternativas que incorporen elementos para estudiantes con mayor riesgo de abandono en matemáticas. Por ello la necesidad de estudiar las concepciones de lo espacial en la actividad matemática.

Las consideraciones planteadas anteriormente y la revisión bibliográfica preliminar nos conducen a plantear las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo las habilidades espaciales *inciden* en el desarrollo de habilidades del pensamiento matemático?
- ¿Cuáles son las *acciones asociadas* a la naturaleza del razonamiento espacial?

Resultados

La revisión bibliográfica nos permitió, desde otros campos disciplinares, entender al razonamiento espacial visto cómo una aplicación a través de la visualización de procesos, anticipación ante otros elementos de interacción, y cómo un medio para visualizar a partir de otros elementos. Por lo anterior, hemos reconocido hasta este momento de la investigación que la visualización está relacionada escolarmente (pruebas o test) con actividades y ejercicios que tienen como fin la *predicción* de posiciones o movimientos.

Se pudo identificar de la revisión bibliográfica que el razonamiento espacial es concebido en cuatro categorías principalmente: sentido espacial, pensamiento espacial, visualización y capacidad espacial; reconocemos que el razonamiento espacial requiere de un *lenguaje* que pueda articularse con el aprendizaje espacial en matemáticas. Consideramos que son tres los elementos necesarios para adquirir un lenguaje espacial, estos son: tener conciencia del espacio en sí mismo, leer y hacer representación de información espacial en gráficos, e interpretar gráficos para la toma de decisión.

Conclusiones

Las posturas sobre *cómo interpretar* a las habilidades espaciales en matemáticas son un tema de discusión puesto que el marco de referencia con el cual poder analizarlo es aún incierto, contemplamos investigaciones que emplean los llamados *test de razonamiento espacial* para dar una interpretación al respecto, pero este tipo de resultados favorecen el carácter ponderado que se refleja en el contexto educativo únicamente como un factor de *medida*. Las investigaciones en matemática educativa requieren de marcos de referencia adecuados con los cuales estas interpretaciones puedan darse, sobre las investigaciones con relación al razonamiento espacial y al género se tienen: las que analizan las diferencias (cuantitativamente) por sexo, las que contemplan diferenciados rendimientos en matemáticas dado el razonamiento espacial (test), y en las que analizan las diferencias culturales para relacionarlas con el razonamiento espacial (sobre las interacciones dinámicas y estáticas). Encontramos que hablar de habilidades espaciales es relacionar directamente actividades como la rotación y búsqueda de patrones de comportamiento que nos ayuden a predecir estados futuros de objetos, o bien de movimientos.

En matemáticas el lenguaje simbólico proporciona otro medio para desarrollar una habilidad en el aprendizaje matemático, visto como una red conceptual interconectada que articula el papel del razonamiento espacial, y que en particular se relaciona, con el sentido de la ubicación y la agrupación de objetos (patrones).

Referencias bibliográficas

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación matemática*, *15*(3), 57-76.

Lowrie, T. & Jorgensen, Robyn. (2017). Equity and spatial reasoning: reducing the mathematical achievement gap in gender and social disadvantage. *Mathematics Education Research Group of Australasia* 30, 65-75.

Mulligan. Joanne. (2015). Looking within and beyond the geometry curriculum: connecting spatial reasoning to mathematics learning. *ZDM Mathematics Education* 47, 511-517.

Mulligan, J., Woolcott, G., Mitchelmore, M. & Davis, B. (2018). Connecting mathematics learning through spatial reasoning. *Mathematics Education Research Group of Australasia* 30, 77-87.

Newcombe, N. (2010). Picture This. Increasing Math and Science Learning by Improving Spatial Thinking. *American Educator*, 29-43.

Newcombe, N. (2013). Seeing Relationships. Using Spatial Thinking to Teach Science, Mathematics, and Social Studies. *American Educator*, 26-40.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*, Barcelona, España: Gedisa.

Spelke, E. (2005). Sex Differences in Intrinsic Aptitude for Mathematics and Science? A Critical Review. *American Psychologist,* 60(9), 950-958.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ERRORES EN TORNO A LA COMPRENSIÓN DE LA DEFINICIÓN DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

ERRORS IN THE UNDERSTANDING OF THE DEFINITION OF FINITE LIMIT OF A REAL FUNCTION OF A REAL VARIABLE

Cristina La Plata, Uldarico Malaspina
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)
claplata@upc.edu.pe, umalasp@pucp.edu.pe

Resumen
En el presente trabajo de investigación analizamos los errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, mediante un estudio con una muestra de alumnos de un primer curso universitario de Cálculo. La metodología empleada en nuestro trabajo fue mixta, es decir, cuantitativa y cualitativa. Luego de aplicar un test exploratorio para obtener la información necesaria, en la muestra, y proceder con los análisis cuantitativo y cualitativo correspondientes – usando el enfoque ontosemiótico para estos últimos – podemos afirmar que existen errores conceptuales, simbólicos y gráficos en la comprensión de los alumnos sobre la definición del límite finito de función real de variable real.

Palabras clave: error; comprensión; límite finito

Abstract
In this paper we analyze the errors in the understanding of the definition of finite limit of a real function of a real variable through a study with a sample of students taking their first Calculus class at the university. We used a mixed method research, quantitative and qualitative. After making an exploratory study in order to get the necessary information in the sample and proceeding to the corresponding quantitative and qualitative analyses – using the onto-semiotic approach for the latter – we can state that there are conceptual, symbolic and graphic errors in the students' understanding of the definition of finite limit of a real function of a real variable.

Key words: error; understanding; finite limit

Introducción

Consideramos que el concepto de límite finito de una función real de variable real es uno de los más complejos e importantes de las Matemáticas. Creemos pertinente y necesario investigar sobre la comprensión de este concepto al tener en cuenta que su incomprensión origina dificultades en el entendimiento de otros contenidos matemáticos que luego se desarrollan tanto en el primer como en los posteriores cursos de Cálculo, tales como continuidad, derivada, integral, sucesiones y series, por citar algunos. En el presente trabajo nos centramos específicamente en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real.

Antecedentes

Existen diversas investigaciones relacionadas al concepto de límite, realizadas bajo diferentes enfoques teóricos y comentaremos las que consideramos se relacionan de alguna manera con los aspectos que abordaremos en nuestra investigación. Así tenemos que según Tall y Vinner (1981), la imagen que algunos alumnos tienen del concepto de límite es la de proceso dinámico, esto es, cuando x se aproxima hacia a provoca que $f(x)$ se aproxime al límite, pero sin alcanzarlo. Sin embargo, esta imagen entra en conflicto con la definición formal del límite, puesto que prevalece sobre ésta y la gran mayoría de intentos por parte de los alumnos de expresar mediante la definición formal los límites de la forma $\lim_{x\to a} f(x) = c$, son incorrectos. Es pertinente tener en cuenta la perspectiva general de Brousseau (1983, citado por Blázquez y Ortega, 2001) al considerar que un conocimiento se produce cuando se supera un obstáculo. Obstáculo que en sí es un conocimiento que funciona bien al interior de un determinado campo pero no dentro de otros, donde es falso y origina errores. Estos errores persisten, se relacionan entre sí y son difíciles de erradicar. Por ello, plantea la necesidad de promover la interacción del alumno con situaciones problemáticas que desestabilicen sus concepciones para superar el obstáculo que provoca dichos errores.

En cuanto a límites, Sierpinska (1987) considera que hay obstáculos relacionados a cuatro nociones que parecen ser la fuente principal de los obstáculos epistemológicos sobre límites:

- *Conocimiento científico*. La Matemática es un juego formal sobre símbolos. Probar teoremas es su principal objetivo.
- *Infinito.* El infinito no existe. El infinito existe sólo potencialmente.
- *Función.* La función es reducida al conjunto de sus valores. Es reducida a su expresión analítica, la cual siempre existe.
- *Número real*. Carencia de un concepto uniforme de número real.

Además, de acuerdo con Rico (1992, citado en Blázquez, 2000), la reflexión actual sobre errores se centra en el papel del error como parte importante de los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que los errores son productos de concepciones inadecuadas o procedimientos incorrectos.

Por otro lado, Blázquez y Ortega (2001), refieren que el uso de varios sistemas de registros de representación favorece a una mejor comprensión, y con ello a un aprendizaje más rico del concepto de límite de una función real. Sin embargo, advierten que los alumnos pueden presentar en primera instancia cierto rechazo por trabajar en varios registros, prefiriendo trabajar en uno solo, que comúnmente es el registro algebraico, debido quizás a un abuso del propio docente en el uso de tal registro en su enseñanza.

Otro estudio interesante es el de Fernández, J. (2010) quien considera el tema de límites como parte de una unidad didáctica, en la cual enumera once dificultades previsibles para los alumnos en la comprensión de tal concepto. En particular, en lo referente a límite finito de una función real de variable real, puntualiza:

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.

- Dificultades para reconocer los límites laterales.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario.

Por otra parte, Amílcar, O. (2013) propone el diseño de una secuencia didáctica acerca del límite finito de una función real en un punto, sobre la base de la igualdad de los respectivos límites laterales, sin descuidar el tratamiento aritmético-algebraico. El autor, para elaborar su secuencia didáctica, indica que es importante plantearse interrogantes sobre cada uno de los seis tipos de objetos primarios, en la perspectiva del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS).

Otra investigación interesante es la de Molfino y Buendía (2010), que buscan explicar cómo el concepto de límite de una función real se constituyó en un cuerpo de saber validado y aceptado social y culturalmente. Esto las llevó a explorar acerca del desarrollo socio-histórico-cultural al interior de la comunidad matemática. Además establecen como definición formal actualmente consensuada por la comunidad matemática, la definición dada por Weierstrass expresada en términos de ε y δ. Definición que tomaremos para nuestro trabajo de investigación y explicitaremos en el marco teórico.

Marco teórico

Para el marco teórico se hizo una revisión de tres aspectos fundamentales, que abordaremos posteriormente, a lo largo de nuestro análisis de datos y en base a los cuales formularemos nuestras conclusiones: comprensión, error y configuración (epistémica y cognitiva) desde la perspectiva del EOS.

El modelo de comprensión de Sierpinska

Según Sierpinska (1990, citado por Blázquez, 2000), la comprensión es un acto que está inmerso en un proceso de interpretación y que se desarrolla en forma dinámica entre conjeturas cada vez más elaboradas. Además señala que la comprensión trae consigo un nuevo conocimiento, por ello se puede clasificar la comprensión en función del conocimiento que se produce. Así, la investigadora propone cuatro categorías de actos de comprensión de un objeto matemático:

- Identificación: Identificación de objetos que pertenecen a la denotación del (o un) concepto o identificación de un término como poseedor de un estatus científico. Este acto consiste en una percepción repentina de algo que es como la "figura" en los experimentos gestálticos (reconocimieto visual d figuras globales en lugar de una mera colección de elementos más simples y no relacionados).
- Discriminación: Diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que antes se confundían.
- Generalización: Consiste en notar que existen condiciones no esenciales o con la posibilidad de extender el alcance de algunas aplicaciones.
- Síntesis: Consiste en establecer relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente.

Finalmente, Sierpinska señala que la comprensión y los obstáculos son caras de una misma moneda. Puesto que la comprensión busca nuevas formas de conocimiento y los obstáculos reflejan lo erróneo.

Acerca del error

Según Godino, Batanero y Font (2003), todas las teorías sobre la enseñanza- aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en su proceso de aprendizaje, determinar las causas de estos errores y teniendo en cuenta esta información organizar el proceso de enseñanza. De acuerdo con estos autores, en la presente investigación trabajamos con el enfoque que ellos precisan; “se habla de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática” (p.69)

Aspectos del enfoque onto-semiótico de la cognición matemática (EOS)

Según Godino y Batanero (1994, citado por Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009), el EOS centra su atención en la noción de *sistema de prácticas*, entendiéndose como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por una persona o compartida en el seno de una institución con la finalidad de resolver problemas matemáticos, comunicarle a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas. Los supuestos tomados de esta teoría encontrados en Godino et al (2009), para nuestro trabajo de investigación son: sistema de prácticas, objetos matemáticos primarios y configuraciones epistémicas y cognitivas.

Sistema de prácticas

Los sistemas de prácticas son considerados en el EOS como una de las posibles maneras de entender “el significado del objeto matemático” y estos son siempre relativos a un contexto o marco institucional (o a una persona individual), además de encontrarse ligados a la solución de cierta clase de situaciones – problemas.

Objetos matemáticos primarios

Para analizar de forma más profunda una actividad matemática es necesario introducir una tipología de objetos matemáticos. El EOS propone las siguientes categorías o tipos de objetos matemáticos primarios, basándose en las diversas funciones desempeñadas por estos objetos en el trabajo matemático:

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- *Situaciones–problema* (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, …)
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos, ...)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...)

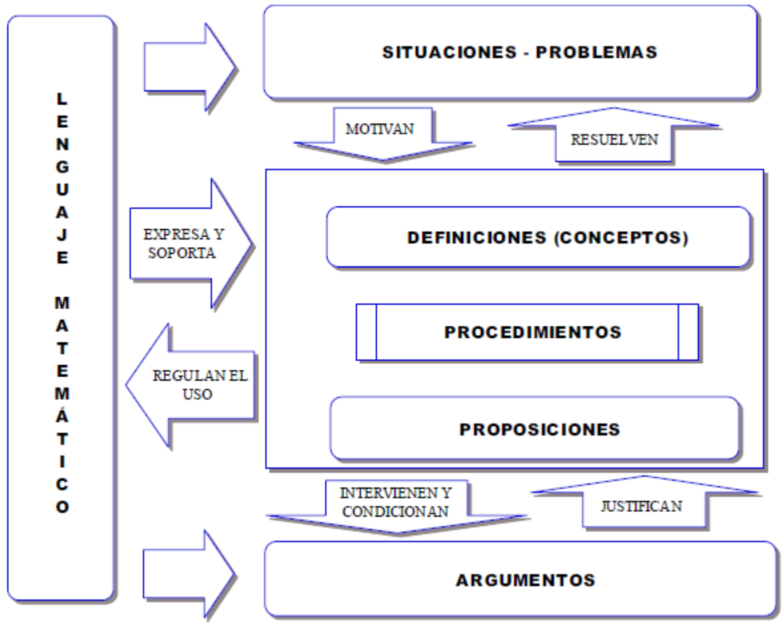


Figura 7. Configuración de objetos primarios.

Malaspina (2008), explicita que las situaciones-problema son el origen o razón de ser de la actividad, el lenguaje representa las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, y con los argumentos se justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Configuraciones epistémicas y cognitivas.

Los objetos primarios se encuentran relacionados entre sí formando *configuraciones*, la cuales son definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Por otro lado, también encontramos que Rojas (2012) menciona que en la realización de toda *práctica matemática,* los sujetos emplean sus conocimientos básicos y en ella activan un conjunto de relaciones entre diferentes tipos de objetos primarios: situaciones-problema, lenguaje, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos; es decir, las prácticas matemáticas personales activan una red de objetos intervinientes y emergentes, es decir, la *configuración cognitiva* puesta en juego.

Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para poder describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional. La constitución de estos objetos y relaciones, configuraciones, tanto en su faceta personal como institucional tiene lugar, mediante los procesos matemáticos, a lo largo del tiempo.
Definición formal de límite

Como se mencionó en los antecedentes, haremos referencia al trabajo de Molfino y Buendía (2010) quienes realizan un estudio del concepto de límite a lo largo de la historia de las matemáticas. Esto, con la finalidad de establecer la definición formal de límite de una función real de variable real que se tomará en este trabajo de investigación.

Molfino y Buendía (2010), refieren que el concepto de límite evolucionó a lo largo de varias etapas hasta llegar a la configuración que hoy conocemos. Así, la definición formal, actualmente consensuada en la comunidad matemática y expresada en términos de ε y δ, se refiere a la definición dada por Weierstrass, que se formula de la siguiente manera: *Si a es un punto de acumulación del dominio de una función f, real de variable real, y b es un número real,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ si y sólo si } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; tal\; que$$
$$si\; x \in Domf \wedge 0 < |x - a| < \delta \; entonces \; |f(x) - b| < \varepsilon$$

Adicionalmente a la definición formal del límite finito de una función real de variable real hemos abordado otros aspectos teóricos, implícitamente en algunas de los ítems del test exploratorio, como límites laterales, teorema de existencia de límite y teorema de unicidad de límite que se hicieron explícitas posteriormente en las argumentaciones de las configuraciones epistémicas y en algunas configuraciones cognitivas.

Objetivos

Con el propósito de analizar los errores de los alumnos en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, nos planteamos los siguientes objetivos:
Objetivo general:

Analizar algunos errores al comprender la definición de límite finito de una función real de variable real, en una muestra de alumnos de un primer curso de Cálculo.

Objetivos específicos:

- Diseñar problemas cuyas soluciones permitan detectar errores en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real, mediante el planteamiento de preguntas en diversos registros de representación.
- Tipificar los errores encontrados en las respuestas dadas a los problemas diseñados.
- Analizar mediante configuraciones epistémicas y cognitivas algunos de los tipos de errores encontrados.

Metodología

La metodología empleada en nuestro trabajo fue mixta, es decir, cuantitativa y cualitativa; más específicamente, del tipo explicativo secuencial. Por ello, se diseñó un test exploratorio con ítems planteados en diversos tipos de representación (algebraico, gráfico y simbólico) que se aplicó a los alumnos de la muestra y fue puesto a consideración de la profesora del curso. Luego de recolectar los datos mediante la aplicación del test exploratorio, examinamos las diversas respuestas dadas por los alumnos para cada ítem del test, surgiendo la necesidad de establecer una tipificación de dichas respuestas, incluyendo la caracterización de los errores como conceptuales, simbólicos y gráficos. Para validar esta tipificación de respuestas se recurrió a la triangulación de las mismas con expertos en el tema. Habiendo establecido la tipificación de respuestas, establecimos lo que denominamos *interrelaciones*. Una interrelación consiste en contrastar las respuestas de los alumnos a ítems en los que se les plantea el análisis de situaciones parecidas, relacionadas con límites, utilizando diferentes representaciones.

A modo de ejemplo, en la Figura 2 están los ítems del test exploratorio cuyas respuestas analizamos. Sus interrelaciones, denominadas Interrelación 2, las mostramos en la Figura 3. En la Figura 4 mostramos la distribución de tipos de interrelación de respuestas para los ítems considerados.

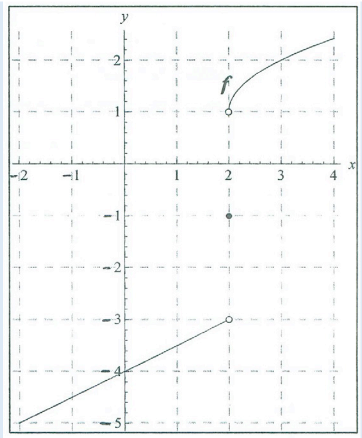
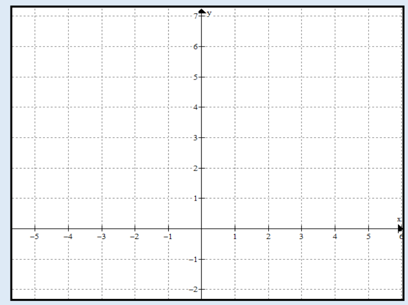
Ítems 1.1, 1.2 y 1.3 Dada la gráfica de la función *f*, determine los límites que se indican. Si fuera pertinente, escriba *no existe.*			Ítem 4 Grafique una función f que cumpla: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ no\ existe\ \wedge\ f(2)=3$
1.1	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=$		
1.2	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=$		
1.3	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$		

Figura 2. Ítems considerados del test exploratorio en la interrelación 2
Fuente: La Plata, C (2014, p. 23)

Tipo de interrelación	**Descripción de la interrelación**
Interrelación correcta	Los alumnos determinaron correctamente tanto los límites laterales como el límite de la función cuando x tiende a 2, a partir del gráfico dado para la función. Por otro lado, graficaron correctamente una función tal que el límite no existe cuando x tiende a 2 y el valor de la función en 2 si existe.
Interrelación coherente	Los alumnos determinaron en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), a partir del gráfico dado para la función, que al ser diferentes los límites laterales (aunque no sean los correctos), el límite de la función no existe. Esta misma idea se mantiene cuando los alumnos grafican una función para la cual no existe el límite cuando *x* tiende a 2 y debe cumplirse que $f(2)=3$ (ítem 4)
Interrelación incoherente tipo 1	Los alumnos determinaron en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), a partir del gráfico dado para la función que al ser diferentes los límites laterales, el límite de la función no existe. Sin embargo, esta comprensión no se manifiesta cuando deben graficar una función para la cual no exista el límite de la función cuando *x* tiende a 2 y que $f(2)=3$ (ítem 4). Graficaron una función que no cumple una o ninguna de las condiciones requeridas.
Interrelación incoherente tipo 2	Los alumnos erróneamente determinan la existencia del límite en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3); sin embargo, graficaron correctamente la función requerida en el ítem 4.
Interrelación por error con énfasis conceptual	Los alumnos reiteraron su error, esto es, tanto en la primera parte (ítems 1.1, 1.2 y 1.3), al no determinar la inexistencia del límite de la función, como al graficar una función que no cumple una o ninguna de las condiciones requeridas en el ítem 4.
Interrelación inexistente	En este caso consideramos todas las situaciones en las que por lo menos, un ítem de los analizados no fue respondido.

Figura 3. Descripción de la clasificación para la interrelación 2
Fuente: La Plata, C (2014, p. 28)

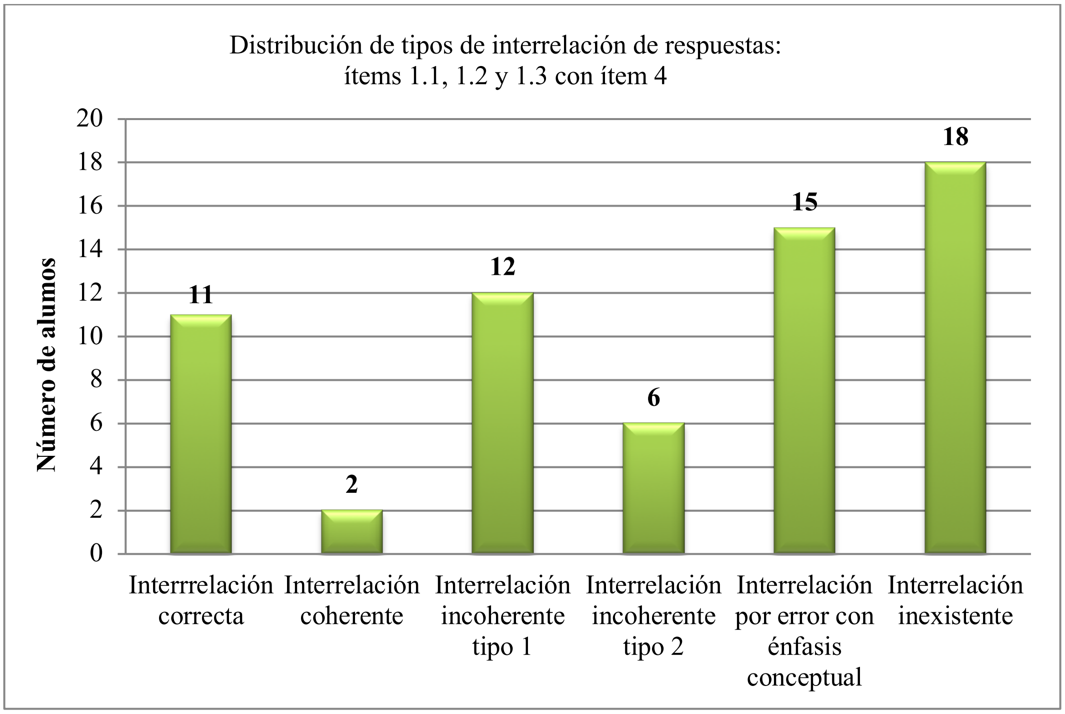


Figura 4. Tipos de interrelación 2
Fuente: La Plata, C (2014, p. 29)

Basados en nuestro resultado cuantitativo (figura 4), podemos concluir que un gran número de alumnos (28%) no realizó el gráfico requerido en el ítem 4 o no determino algunos o todos los límites requeridos en los ítems 1.1, 1.2 y 1.3, por lo cual no se pudo establecer una interrelación (interrelación inexistente). Otro resultado a destacar, es que una gran cantidad de alumnos (23,4%) evidenció no poder concluir la inexistencia del límite finito de una función real de variable real tanto a partir del análisis intuitivo de los límites laterales en base al gráfico dado para la función (ítems 1.1, 1.2 y 1.3) ni trazar un gráfico que cumplía con las condiciones requeridas (ítem 4). También consideramos importante mencionar que un 19% de los alumnos determinaron la inexistencia del límite (ítems 1.1, 1.2 y 1.3); sin embargo, no trazaron un gráfico que cumpla con las condiciones requeridas en el ítem 4 (a pesar que, en esencia, eran las mismas condiciones que tenía el gráfico de la función que analizaron en los ítems 1.1, 1.2 y 1.3. Esto es, en términos del enfoque sobre la comprensión que hace Sierpinska, podríamos decir que un buen número de alumnos tiene una comprensión de la no existencia del límite finito de una función real de variable real, solo en el nivel de *identificación.* De igual manera, llama nuestra atención que sea solo el 17% de alumnos que muestran una comprensión clara de la no existencia del límite finito de una función real de variable real.

Luego de trabajar cuantitativamente con los datos obtenidos, consideramos importante realizar un análisis más profundo sobre las respuestas al test exploratorio. Para ello elaboramos una configuración epistémica (CE) de la solución al test exploratorio hecha por la profesora del curso; configuraciones cognitivas (CC) de cada una de las soluciones hechas por tres alumnos (tomados al azar y a los cuales entrevistamos); y finalmente, comparamos la CE con cada CC para comprender las dificultades presentes en la comprensión del concepto del límite real de variable real.

Consideraciones finales

El análisis cualitativo y cuantitativo hecho mediante las cinco interrelaciones entre las respuestas de los estudiantes – como se muestra en la interrelación 2 (Figuras 2, 3 y 4) – nos permiten afirmar que los alumnos no tienen una comprensión clara, a nivel de generalización o síntesis – según la categorización de comprensión de Sierpinska, A. (1990, citado por Blázquez, 2000) – sobre el límite finito de una función real de variable real.

Otra muestra de esta comprensión restringida del concepto de límite de una función real de variable real es la obtención correcta por el 89% de alumnos, de un límite mediante recursos algebraicos (ítem 3) y por otra parte se evidencian errores en las respuestas a otros ítems del test exploratorio cuando tienen que hacer análisis en el registro gráfico o simbólico.

Las comparaciones entre configuraciones epistémicas y cognitivas de las soluciones nos permiten afirmar, que en la comprensión de los alumnos sobre la definición del límite finito de función real de variable real destacan tres tipos de errores: conceptuales, simbólicos y gráficos. Esta tipificación se hizo para cada ítem del test, según las respuestas dadas, recurriendo a triangulación con expertos.

Las respuestas a algunos ítems del test exploratorio evidencian también que algunos conceptos previos vinculados a la definición de límite finito de una función real de variable real, no son comprendidos en el nivel de *síntesis*, categoría de comprensión dada por Sierpinska, con la consiguiente deficiencia en la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. Específicamente nos referimos a los conceptos de función (dominio, regla de correspondencia y gráfico) y número real. Lo dicho está en la línea de análisis propuesto por Sierpinska, A. (1987), que considera las nociones de función y número real como fuente de obstáculos epistemológicos sobre el concepto de límite.

Referencias

Amílcar, O. (2013). El diseño de una secuencia didáctica sobre límite Un proceso de toma de decisiones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 63, 77-88.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis de doctorado en Didáctica de las Ciencias -Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valladolid. España.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 4(3), pp. 219-256.

Fernández, J. (2010). *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de funciones.* Trabajo de fin de Máster. Recuperado el 18 de julio de 2013 de http://www.ugr.es/~lrico/MasterSec_files/Fernandez%20Plaza%20TFM.pdf

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des mathématiques*, 22(2.3), 237-284.

Godino, J.,Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperado el 18 de julio de 2013 de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. Comunicación en el XIII Simposio de la SEIEM, Santander, 2009. Recuperado el 18 de julio de 2013 de http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXIII/DidMatDisCientifica/Godino_Font_Wilhelmi_Lurduy_R.pdf

Malaspina, U. (2008). *Intuición y rigor en la resolución de problemas de optimización. Un análisis desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Tesis de doctorado no publicada, Pontificia

Universidad Católica del Perú.

Molfino, V., Buendía, G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de su institucionalización. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*. 5(1) 27-41.

La Plata, C. (2014). Errores en torno a la comprensión de la definición de límite finito de una función real de variable real. Tesis de maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Rojas Garzón, P. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*. Tesis de doctorado Interinstitucional en Educación. Universidad distrital Francisco José de Caldas, Bogotá Colombia.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics* 18, 371 – 397.

Tall, S. & Vinner, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

GLOCALIZACIÓN Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA: SOBRE EL DINAMISMO DE LOS ENCUENTROS ENTRE LAS CULTURAS

GLOCALIZATION AND MATHEMATICS EDUCATION: DYNAMISM OF THE ENCOUNTERS BETWEEN CULTURES

Milton Rosa
Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil
milton.rosa@ufop.edu.br

Resumen
Este artículo teórico ofrece una visión de las Etnomatemáticas que incluye la glocalización y su importancia en la educación matemática. Al reflexionar sobre la metáfora de las jaulas epistemológicas, sobre los tres tipos de visiones culturales del conocimiento matemático, que son el émico, el ético y el dialógico, y también sobre los tres indicadores descriptivos de las culturas, que son los artefactos, los mentefactos y los sociofactos, se abordan aspectos importantes de este programa de investigación que conlleva el desarrollo de enfoques innovadores para el crecimiento de una sociedad dinámica y glocalizada en su búsqueda de la paz.

Palabras clave: culturas, dinamismo, educación, etnomatemáticas, glocalización

Abstract
This theoretical article offers a vision in Ethnomathematics that includes glocalization and its importance in mathematics education. By reflecting on the metaphor of epistemological cages, on the three types of cultural views of mathematical knowledge, which are emic, etic, and dialogical, and on the three descriptive indicators of cultures, which are the artifacts, mentifacts, and sociofacts, important aspects of this research program are addressed that leads to the development of innovative approaches for the development of a dynamic and glocalized society in its search for peace.

Keywords: cultures, dynamism, education, ethnomathematics, glocalization

Consideraciones Iniciales

Las Etnomatemáticas ofrecen una visión más amplia del conocimiento matemático, pues abarcan las ideas, nociones, procedimientos, procesos, métodos y prácticas arraigadas en entornos culturales distintos. Para Rosa y Orey (2017a), este aspecto conduce a una mayor evidencia de los procesos cognitivos, capacidades de aprendizaje y actitudes, que los métodos de enseñanza directos que ocurren en las aulas.

Mediante la reflexión sobre las dimensiones sociales, culturales y políticas de las matemáticas, tenemos la posibilidad del desarrollo de enfoques educacionales innovadores dirigidos a una *sociedad dinámica y glocalizada* (Rosa y Orey, 2017b). Siendo así, es importante promover un enfoque sociocultural en el currículo de las matemáticas con el fin de luchar contra la descontextualización curricular que resulta de una visión monocultural de la sociedad.

Este enfoque tiene el reto de *trascender* el *etnocentrismo* y enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con *respeto y equidad* en clase. En este sentido, el empoderamiento de los estudiantes en las áreas intelectual, social, emocional y política, impacta en su realidad y sus contextos socioculturales e históricos, ya que les permite transmitir conocimientos, impartir habilidades académicas y cambiar las actitudes hacia la *instrucción de las matemáticas y su encuentro con la paz*.

En ese sentido, D'Ambrosio (2017) argumenta que cuestiones que afectan a la sociedad contemporánea, como, por ejemplo, la seguridad nacional, la seguridad personal, la economía, los trastornos sociales y ambientales, las relaciones entre naciones, las relaciones entre clases sociales, el estado de bienestar, la preservación de los recursos naturales y culturales pueden ser sintetizados como Paz en sus cuatro dimensiones: Paz Interior, Paz Social, Paz Ambiental y Paz Militar. Estas cuatro dimensiones están íntimamente relacionadas.

Es reconocido que la Matemática es la ciencia más universal, sin embargo, es importante entender cómo estos dos universales pueden ser conciliados. Por ejemplo, D'Ambrosio (2017) afirma que la Historia de las Matemáticas nos muestra que las violaciones a la Paz y los progresos de la Matemática se han beneficiado mutuamente de una fuerte asociación a lo largo de la evolución de la especie humana.

La propuesta pedagógica del Programa Etnomatemáticas orientado hacia la Paz es hacer de las matemáticas algo vivo, que trabaje con situaciones reales, en el tiempo y en el espacio, por medio de análisis, cuestionamientos y críticas sobre los fenómenos presentes en nuestro día a día. De acuerdo con este contexto, es en la propia comunidad donde la escuela, en su trabajo pedagógico, puede encontrar el contenido de los elementos didácticos que son necesarios para el desarrollo del currículo matemático.

Así, la sala de clase puede ser vista como una posibilidad de estudio inspirado en prácticas pedagógicas que son desarrolladas con una perspectiva etnomatemática para la acción pedagógica (D'Ambrosio, 2000).

Por consiguiente, como las Etnomatemáticas crean un puente entre la matemática académica y las ideas, procedimientos y prácticas que son elaboradas por miembros pertenecientes a diferentes grupos culturales, es necesario discutir sobre la responsabilidad de los educadores e investigadores, y también sobre el concepto de jaulas epistemológicas, para reorientar los instrumentos intelectuales de las Matemáticas hacia la búsqueda de la Paz mundial.

Metáfora de las Jaulas Epistemológicas

El concepto de jaulas epistemológicas es utilizado por D'Ambrosio (2011) que compara a los especialistas, investigadores y educadores con pájaros que viven en jaulas. Los pájaros solo ven y sienten lo que las rejas permiten, solo se alimentan de lo que encuentran en la jaula, solo vuelan en el espacio de la jaula, solo se comunican en un lenguaje que conocen; procrean y se reproducen en la jaula. Pero no saben de qué color está pintada por fuera.

Muchos expertos, investigadores y educadores tienen comportamiento similar al de los pájaros en una jaula, pues son motivados por sus pares, por trabajos anteriores; discuten entre sí usando una jerga propia de la disciplina; orientan a sus discípulos para abordar temas que les son familiares y en sus conversaciones se ocupan de asuntos específicos de la disciplina. No entienden lo que hacen sus colegas de otros departamentos, que están en otras jaulas.

Salir de la jaula no es fácil, pues las jaulas ofrecen varios beneficios, como el reconocimiento por los pares, garantizando empleo y promociones. Pero el precio por estos beneficios es alto: las rejas les impiden salir y volver libremente. Con esto no hay posibilidad de ver y conocer la realidad natural y social, de inspirarse por lo nuevo para la creatividad.

De forma similar, las matemáticas, que dependen de responder verdadero o falso, no encuentran en su sistema respuestas a una cuestión por ella formulada en este mismo sistema. Así, se encuentra *enjaulada* en su sistema y la respuesta sólo puede ser buscada saliendo de la jaula. Las disciplinas también son conocimientos enjaulados en su propia fundamentación, en sus criterios de verdad y de rigor, en sus métodos específicos para lidiar con cuestiones bien definidas y con un código lingüístico propio, inaccesible a los excluidos.

Consecuentemente, las jaulas ofrecen una forma engañosa de seguridad, pues propician una restricción epistemológica de acuerdo con reglas y normas. Lo mismo ocurre con los conocimientos matemáticos que están enjaulados. Esta es la metáfora de las *Jaulas Epistemológicas* (D'Ambrosio, 2011). La figura 1 muestra un ejemplo de jaulas epistemológicas.

Figura 1: Jaulas epistemológicas
Fuente: Google jaulas, dibujos

La mayoría de las veces, estamos prisioneros en nuestras propias epistemologías, en nuestras propias jaulas y no podemos ver otras epistemologías y visiones del mundo, o perspectivas, o cosmologías, pues nos es muy cómodo y confortable. Sin embargo, no debemos tener miedo de las jaulas epistemológicas, pues existen y siempre existirán como resultado de organizar nuestro pensamiento, como cuando organizamos nuestros armarios y cajoneras para las camisas y, también, nuestras bibliotecas (D'Ambrosio, comunicación personal, 9 de Julio de 2018).

Entonces, es importante resaltar que D'Ambrosio (2011) afirma que el gran peligro de estas jaulas está en las puertas, que deben quedar siempre abiertas para que los pájaros puedan entrar y salir libremente y contactar con otros pájaros que tengan otros tipos de visiones culturales sobre el conocimiento matemático.

En ese contexto, existe la necesidad de que los alumnos tengan contacto con los aspectos culturales de las matemáticas por medio de actividades didácticos y pedagógicos que ofrezcan condiciones para que conozcan las contribuciones de otras culturas para el desarrollo de las matemáticas. Por ejemplo, Rosa y Orey (2005) sostienen que este programa ha surgido para confrontar los tabús de que las matemáticas son un campo de estudio acultural y universal.

Tipos de visiones culturales del conocimiento matemático

De acuerdo con Rosa y Orey (2010) hay tres tipos de visiones culturales del conocimiento matemático: el émico, el ético y el dialógico.

Conocimiento matemático émico

El conocimiento matemático ético está relacionado con las cuentas, descripciones y análisis expresados en términos de las categorías y esquemas conceptuales que son considerados significativos y apropiados por los miembros de grupos culturales distintos. Estos constructos están de acuerdo con las percepciones e interpretaciones consideradas apropiadas por tales culturas desde dentro. La figura 2 muestra un ejemplo de conocimiento matemático émico.

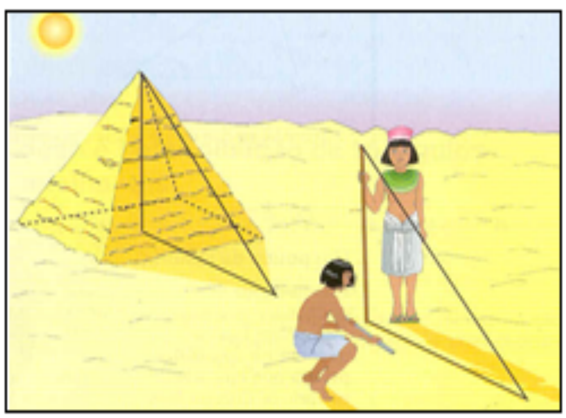


Figura 2: Conocimiento matemático émico
Fuente: Rosa y Orey (2017a)

La validación de este conocimiento trae consigo una cuestión de consenso de la población local que debe estar de acuerdo con que sus constructos coincidan con las percepciones compartidas que retratan las características de su cultura. El conocimiento matemático émico se orienta de nosotros hacia nosotros con la perspectiva de los nativos, que es una visión desde dentro, interior y local.

Conocimiento matemático ético

El conocimiento matemático ético está relacionado con las cuentas, las descripciones y las análisis de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas expresadas en términos de las categorías que se consideran significativas y apropiadas por la comunidad de observadores externos. La figura 3 muestra un ejemplo de conocimiento matemático ético.

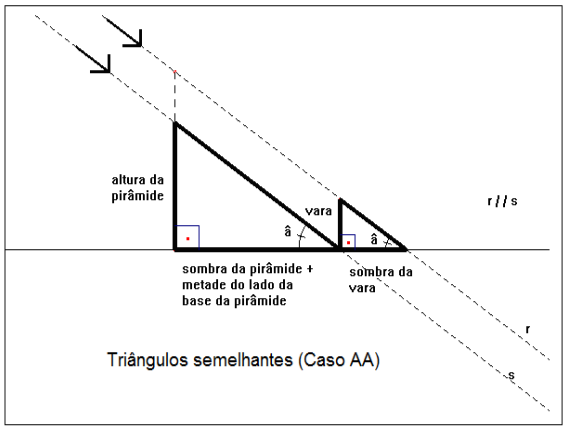


Figura 3: Conocimiento matemático ético
Fuente: Rosa y Orey (2017a)

Los constructos éticos deben ser precisos, lógicos, completos, replicables e independientes de observadores externos. La validación del conocimiento ético es una cuestión de análisis lógico y empírico; en particular, de que la construcción cumple con los estándares de integralidad y consistencia lógica. El conocimiento ético se orienta de ellos (investigadores y educadores) hacia nosotros con una perspectiva de los observadores externos, que es una visión desde fuera, exterior y global.

Conocimiento matemático dialógico

Este conocimiento presenta un dinamismo cultural entre los conocimientos matemáticos émico y ético, que está representado por los encuentros entre dos o más culturas diversas en las aulas.

Los constructos dialógicos incluyen el reconocimiento de otras epistemologías y de la naturaleza holística e integrada del conocimiento matemático de los miembros de diversos grupos que se encuentran en contextos culturales distintos. El conocimiento matemático local de estos miembros, que se combina con el sistema de conocimiento matemático occidental, resulta en una perspectiva dialógica en la Educación Matemática.

Sofisticadas ideas y prácticas matemáticas que incluyen principios geométricos en trabajo artesanal, conceptos arquitectónicos y prácticas, son encontradas en actividades y artefactos de muchas culturas locales y globales y pueden ser traducidas por sistemas de conocimientos matemáticos diferentes.

En esta dirección, el conocimiento dialógico está relacionado con una postura émica-ética y glocal, desde una visión pluricultural, por medio del dinamismo cultural entre grupos culturales distintos.

Ejemplo dialógico: el tipi sioux – estados unidos - una base trípode

Esta base parece estar perfectamente adaptada para el duro ambiente en el que se utiliza en las praderas de Estados Unidos. Tiene la ventaja de proporcionar una estructura estable. Resiste los vientos y el clima extremadamente variable que impera en esta región (Orey, 2000). La figura 4 muestra uno ejemplo de la matematización del conocimiento matemático dialógico.

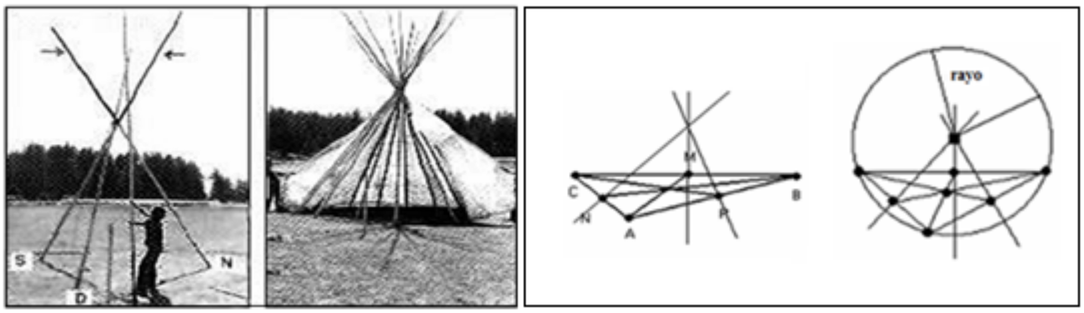


Figura 4: Conocimiento matemático dialógico
Fuente: Orey (2000)

En una perspectiva etnomatemática, los habitantes determinaban el centro de la base circular del Tipi usando la matematización del triángulo existente formado por el trípode. En otro ejemplo, el centro del Tipi tiene un poder y santidad definidos, sin embargo, es algo más que solo necesidad o estética, pues pasa a ser la selección del centro de la casa Sioux por medio de este artefacto cultural que también está relacionado con los mentefactos y sociofactos desarrollados por los miembros de este grupo cultural.

La perspectiva émica-ética en el currículo de matemáticas

La perspectiva ética juega un papel importante en la investigación en las etnomatemáticas, sin embargo, la perspectiva émica debe tenerse en cuenta, también, en el desarrollo de este proceso. En este contexto, hay una necesidad de actos de traducción entre las perspectivas émica y ética (Eglash et al, 2006). Así, el conocimiento matemático de los miembros de grupos culturales distintos, que se combina con el sistema de conocimiento matemático occidental, resulta en una perspectiva émica-ética en Educación Matemática (Rosa y Orey, 2017b).

Las ideas y procedimientos matemáticos son éticos si pueden ser comparados entre culturas que utilizan definiciones y métricas comunes. El énfasis del análisis interno es émico si las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas son exclusivas de un subconjunto de culturas que tienen sus raíces en las diversas formas en que las actividades se llevan a cabo en un entorno cultural específico (Rosa y Orey, 2010).

Los organizadores de currículo han hecho caso omiso de las perspectivas émicas en las actividades curriculares escolares, siendo esta una de las principales razones del fracaso de muchos sistemas educativos. Una perspectiva émica-ética incluye el reconocimiento de otras epistemologías y de la naturaleza holística e integrada del conocimiento matemático de los miembros de grupos culturales distintos (Rosa y Orey, 2015).

En ese contexto, Rosa y Orey (2003) argumentan que la utilización de las Etnomatemáticas que están presentes en el día a día de los miembros de los grupos culturales distintos tiene por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento de su conocimiento matemático, pues se propone el fortalecimiento de la identidad cultural de los individuos como seres autónomos y capaces.

Indicadores descriptivos culturales

De acuerdo con Huxley (1955), biólogo inglés y primer director de la UNESCO, acuñó el concepto de mentefactos para expresar los sistemas abstractos de creencias, valores e ideas que se manejan en las culturas. De acuerdo con él, consideramos que hay tres indicadores descriptivos que son componentes esenciales de todas las culturas: artefactos, mentefactos y sociofactos, elementos que forman parte del patrimonio cultural y que se han organizado históricamente por la humanidad.

Artefactos

Los artefactos son objetos culturales que proporcionan las herramientas materiales necesarias para el desarrollo de vestimentas, abrigos, defensas y transportes. Consecuentemente, estos artefactos auxilian a los miembros de grupos culturales distintos en la resolución de los problemas diarios, con la utilización de técnicas y estrategias matemáticas. Para D'Ambrosio (2001), los *artefactos* son considerados como herramientas, aparatos e *instrumentos de observación*.

Los artefactos son confeccionados con el empleo del conocimiento matemático local a través del uso de materiales distintos desarrollados en contextos diversos (Rosa y Orey, 2017a). De este modo, los artefactos son mercancías culturales que incluyen la tecnología material desarrollada por los miembros de un grupo cultural que satisfacen sus necesidades básicas de alimento, cobijo, transporte y similares.

De acuerdo con D'Ambrosio (2001), los artefactos también están relacionados con las manifestaciones técnicas y materiales de una determinada cultura, como, por ejemplo, los sistemas de tratamiento de la tierra, las herramientas utilizadas y la organización de la producción agrícola.

Mentefactos

Los mentefactos son las ideas, los valores y creencias compartidos de generación en generación como, por ejemplo, la religión, la lengua, las leyes y los puntos de vista. Estos indicadores son los elementos centrales y más duraderos de las culturas, pues incluyen lo mítico, los mitos, las tradiciones artísticas y el folclore (Huxley, 1955). El lenguaje matemático y científico, los conocimientos desarrollados y difundidos por los miembros de grupos culturales distintos también son considerados mentefactos.

Para Rosa y Orey (2017b), los mentefactos se relacionan con las nociones de género, valores, ideales, cultura, libertad, creencias, democracia, religión, colectivismo, individualismo, derechos y deberes sociales; y también informan a los miembros de grupos culturales distintos para que se organicen de acuerdo con su propio sistema de explicaciones científicas y matemáticas, creencias y tradiciones, pues se relacionan con la capacidad humana de pensar y formular ideas, y conforman los ideales y las imágenes por los que se miden otros aspectos culturales.

De acuerdo con D'Ambrosio (2001), los mentefactos son los sistemas de conocimiento que se expresan en formas diversas de comunicación que componen la base del proceso de socialización de esos miembros. Los conceptos y las teorías que componen los *mentefactos* se denominan *instrumentos de análisis*.

Sociofactos

Los sociofactos son las estructuras y organizaciones de una determinada cultura que influencian el comportamiento social y el desarrollo de *saberes* y *haceres* científicos y matemáticos de sus miembros y que incluyen aspectos de las culturas que se relacionan con vínculos entre individuos y grupos (Rosa y Orey, 2017b). Así, estas estructuras son consideradas como las interacciones entre las personas, la estructura de las instituciones, las normas sociales, las instituciones gubernamentales, la estructura de la educación y las instituciones políticas.

Siendo así, para Huxley (1955), los sociofactos incluyen la convivencia en las familias, en los gobiernos, en los sistemas educativos, en las organizaciones deportivas, en los grupos religiosos y en cualquier otra agrupación destinada a desarrollar actividades socioculturales específicas, pues son los aspectos relacionados con la organización social, con los vínculos entre los individuos y los grupos sociales como, por ejemplo, las estructuras familiares, los parentescos, los comportamientos reproductivos y sexuales.

Para D'Ambrosio (2001), los sociofactos incluyen sistemas políticos y educativos porque son los patrones esperados y aceptados por las relaciones interpersonales que están relacionadas con los aspectos económico, político, militar y religioso.

Perspectiva de las etnomatemáticas

Las políticas educativas reclaman que en el trabajo pedagógico sean incluidos los artefactos, mentefactos y sociofactos de las culturas de los estudiantes para enriquecer la diversidad en el currículo de matemáticas. Por lo tanto, la *enseñanza de las matemáticas* comienza a ser una actividad *subversiva*, pero *responsable e insubordinada*, *¡creativa!*

Es importante buscar enfoques metodológicos alternativos, mientras las prácticas matemáticas occidentales sean aceptadas a nivel mundial, para registrar formas históricas de ideas y procedimientos matemáticos que se dan en diferentes contextos culturales.

Un enfoque pedagógico alternativo es el de las Etnomatemáticas, que agrega la perspectiva cultural a conceptos matemáticos (Rosa y Orey, 2003). Estos conceptos están relacionados con la medición, el cálculo, los juegos, la adivinación, la navegación, la astronomía, la modelación y en una amplia variedad de otros procedimientos matemáticos, así como como en artefactos culturales.

Este enfoque pedagógico que conecta esta diversidad de comprensión de las matemáticas está mejor representado por un proceso de traducción y elaboración de los problemas y preguntas tomados de los fenómenos diarios. Por lo tanto, con el fin de entender el desarrollo de las Etnomatemáticas como un programa, del pasado al futuro, es necesario discutir sus perspectivas actuales y futuras para analizar sus metas, objetivos y supuestos con respecto a la promoción de la ética, del respeto, de la solidaridad y de la cooperación entre las culturas.
Por ejemplo, de acuerdo con Orey y Rosa (2015), es esencial mostrar que las Etnomatemáticas incluyen ideas, perspectivas y prácticas matemáticas de individuos en diferentes culturas y que estas ideas son manifestadas y transmitidas de diversos modos.

Así, el desarrollo de las Etnomatemáticas debe ser documentado como parte del estudio del progreso científico de las ideas y las prácticas matemáticas efectuadas por los miembros de grupos culturales distintos.

Las Etnomatemáticas ofrecen a los educadores un marco importante para transformar las matemáticas en un conocimiento más activo para contribuir en la realización de una sociedad más humana y justa. El objetivo principal de las Etnomatemáticas es desarrollar una herramienta poderosa para ayudar a las personas a crear una sociedad definida por la dignidad para todos y donde iniquidad, arrogancia, violencia e intolerancia no tengan lugar.

Es necesario ampliar la discusión de las posibilidades pedagógicas para poder incluir una perspectiva cultural de las matemáticas que respete la diversidad social de los miembros de distintos grupos culturales distintos. Un enfoque que garantice el desarrollo de la comprensión de las diferentes maneras de hacer las matemáticas mediante diálogo y respeto mutuos entre los enfoques locales y globales a través de la glocalización.

En este contexto, es necesario mostrar a los estudiantes que pertenecen a culturas con baja representación social la contribución que dan al desarrollo del pensamiento matemático. Enseñar a los estudiantes que pertenecen a culturas mayoritarias diferentes grupos culturales, promoviéndoles el respeto por la diversidad y contribuyendo a la *educación glocal* (Rosa y Orey, 2017a). Por ejemplo, la *glocalización* enriquece las temáticas novedosas para los estudiantes y les muestra como las aplicaciones matemáticas pueden encontrarse en muchas áreas de la ciencia, de los negocios, de la vida cotidiana y en las diversas prácticas culturales.
En ese sentido, Rosa y Orey (2017b) afirman que la glocalización (*global* + *local*) es un abordaje dialógico que considera la interacción entre los conocimientos matemáticos *locales* (desde dentro/émicos/*insiders*) y globales (desde fuera/éticos/*outsiders*). Este enfoque también está relacionado con la aceleración e intensificación de la interacción e integración entre los miembros de grupos culturales distintos que componen la sociedad.

El trabajo pedagógico así orientado permite un análisis más amplio del contexto escolar, pues las prácticas pedagógicas trascienden el espacio físico y pasan a acoger los *saberes* y *haceres* presentes en todo el contexto sociocultural de los alumnos (Rosa y Orey, 2003). Esta perspectiva proporciona el equilibrio necesario al currículo escolar, pues al insertar estos componentes en el currículo matemático, concebimos las Etnomatemáticas como un programa que está basado en un paradigma que busca la humanización de las matemáticas por medio de un abordaje filosófico y contextualizado del currículo.

Por ejemplo, Rosa y Orey (2017a) sostienen que su aplicación nos brinda la oportunidad de examinar los sistemas de conocimientos locales y globales para tener una idea de las formas de las matemáticas utilizadas en diversos contextos y grupos culturales por medio de una *relación dialógica simétrica y con alteridad*.

Consideraciones finales

Con el crecimiento de las poblaciones étnicas e idiomas diversos de los estudiantes en las escuelas, los planes de estudio deben reflejar el aprendizaje intrínseco, social y cultural de los estudiantes, y los profesores deben estar apoyados en su preparación para hacer frente a tales diferencias.

Las Etnomatemáticas se basan en las experiencias y prácticas socioculturales de los estudiantes, sus comunidades y la sociedad en general, usándolos no sólo como vehículos para hacer el aprendizaje matemático más significativo y útil, sino también, para proporcionar a los estudiantes las percepciones de que el conocimiento matemático está incrustado en diversos ambientes.

Este enfoque lleva a una buena comprensión de los aspectos matemáticos de la cultura y un propósito claro de la actividad pedagógica, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas distintas tienen un papel vital en el desarrollo de la humanidad.

También se debe favorecer un cambio en la percepción actual de las conexiones entre las culturas y las matemáticas, con la finalidad de subrayar la importancia de dirigir investigaciones etnomatemáticas. Desde esta perspectiva, se ofrece una mejor comprensión de las visiones matemáticas de la cultura, como la émica, la ética y la dialógica, así como se favorece la actividad pedagógica con el uso de los artefactos, mentefactos y sociofactos, ilustrando cómo las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas tienen un papel vital en el desarrollo de la humanidad.

Por consiguiente, es necesario ampliar la discusión de las posibilidades para la inclusión de las perspectivas etnomatemáticas que respeten y den voz a la diversidad social y cultural de los miembros de grupos culturales distintos y, de este modo, desarrollar una comprensión de sus diferencias a través del diálogo y el respeto, en busca de la paz.

Referencias

D'Ambrosio, U. (2000). Etnomatemática e modelagem. In: Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1*. São Paulo, SP: FE-USP.

D'Ambrosio, U. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte, MG: Autêntica, 2001.

D'Ambrosio, U. (2011). A Transdisciplinaridade como uma resposta à sustentabilidade. *Revista Terceiro Incluído*, *1*(1), 1-13.

D'Ambrosio, U. (2017). Ethnomathematics and the pursuit of peace and social justice. *ETD- Educação Temática Digital, 19*(3), 653-666.

Eglash, R. et al. (2006). Culturally situated designed tools: ethnocomputing from field site to classroom. *American Anthropologist, 108*(2), 347-362.

Huxley, J. S. (1955). Evolution, cultural and biological. Guest Editorial. In W. L. Thomas Jr. (Ed.), *Yearbook of Anthropology* (pp. 2–25). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Orey, D. C. (2000). The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone. In: Selin, H. (Ed.). *Mathematics across culture*: the history of non-western mathematics (pp. 239-252). Dordrecht,The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! *BOLEMA*, *16*(20), 1-16.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2005). Las raíces históricas del programa etnomatemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa 8(*3), 363-377.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2010). *Ethnomodeling*: an ethnomathematical holistic tool. *Academic Exchange Quarterly*, *14*, 191-195.

Rosa, M., y Orey, D. C. (2015). Evidence of creative insubordination in the research of pedagogical action of ethnomathematics program. In Beatriz Silva D'Ambrosio y Celi Espansandin Lopes (Orgs.). *Creative insubordination in Brazilian mathematics education research* (pp. 131-146). Raleigh, NC: Lulu Press.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2017a). *Influências etnomatemáticas em salas de aula*: caminhando para a ação pedagógica. Curitiba, PR: Editora Appris.

Rosa, M. y Orey, D. C. (2017b). *Etnomodelagem*: a arte de traduzir práticas matemáticas locais. São Paulo, SP; Editora Livraria da Física.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

ANÁLISIS DE UNA CLASE FILMADA

AN ANALYSIS OF A VIDEOTAPED CLASS

Cecilia Barranguet, Daniela Pagés, Verónica Scorza
Consejo de Formación en Educación (Uruguay)
newcec@gmail.com, danielapages@gmail.com, verosco@gmail.com

Resumen

realizamos un taller en el que presentamos una clase filmada en un curso de matemática en el último año de enseñanza media superior (bachillerato). en esa clase se trabajó con una tarea de final abierto (zaslavsky, 1995, 2008). en el taller analizamos la clase utilizando el marco desarrollado por karsenty & arcavi (2017). procuramos privilegiar, en el análisis, el estudio de la tarea y de las interacciones que se dieron en el aula (yackel, 2004).

Palabras clave: desarrollo profesional docente, filmación de clases, matemática educativa

Abstract

We conducted a workshop in which we presented a videotaped lesson in a mathematics course in the last-year of high school (baccalaureate). In that class, the students worked with an open-ended task (Zaslavsky, 1995, 2008). In the workshop, we analyzed the class by using the framework developed by Karsenty & Arcavi (2017). We aimed to focus the analysis on the study of the task and the interactions that took place in the classroom (Yackel, 2004).

Key words: teacher professional development, videotape lessons, mathematics education

Introducción

El uso de grabaciones en video para el análisis de clases ha sido recomendado por varios autores (Maher, 2008; Arcavi & Karsenty, 2017) como una valiosa herramienta en la formación de futuros profesores y la formación continua de profesores en servicio. En cualquier caso, se puede considerar como una forma de desarrollo profesional en la medida que, ver lo que otro docente hace, provoca la reflexión sobre las propias prácticas de enseñanza. Siguiendo esta perspectiva, en este taller propusimos el análisis de una clase filmada en un curso de matemática en el último año de enseñanza media superior (bachillerato, con estudiantes entre 16 y 17 años) en la que se trabajó con una tarea de final abierto (Zaslavsky, 1995, 2008). Este análisis se realizó utilizando el marco desarrollado por Arcavi & Karsenty (2017). Procuramos privilegiar, en ese análisis, el estudio de la tarea, las ideas matemáticas y metamatemáticas que esta moviliza y las interacciones que se dieron en el aula (Yackel, 2004).

Marco referencial

Arcavi (2015) y Arcavi & Karsenty (2017) presentan el Proyecto VIDEO-LM (Viewing, Inquiring, Discussing Environments for Learning Mathematics), que se centra en el docente y el perfeccionamiento continuo de su práctica, con el objetivo de mejorar las habilidades de análisis y reflexión, así como el conocimiento matemático y pedagógico-matemático del profesor. El proyecto persigue estos objetivos, en lugar de centrarse en recomendar prácticas óptimas.

El marco diseñado por los autores se basa en el estudio de clases japonés, por un lado, y el análisis y explicación de las decisiones tomadas por el docente en clase (Schoenfeld, 2010, referido en Arcavi, 2015) por otro.

Los autores de este trabajo describen las dimensiones establecidos por Schoenfeld (2010, citado por Arcavi, 2015), a partir de las cuales se pueden explicar las distintas decisiones que un docente toma en la clase. Estas dimensiones son: los conocimientos, los objetivos y las creencias del profesor. A partir de esto y de acuerdo con los principios del estudio de clases, diseñaron un marco para analizar clases videograbadas, como forma de propiciar el desarrollo profesional docente. Este consta de las siguientes componentes: las ideas matemáticas y metamatemáticas; los objetivos; los ejercicios, tareas y problemas; las interacciones; los dilemas y la toma de decisiones; y las creencias y valores, todas estas llamadas *lentes* por los autores.

La lente *ideas matemáticas* incluye los conceptos, procedimientos e ideas relacionados con el tema de la clase, y las *ideas metamatemáticas* se refieren a los métodos del pensamiento matemático y las formas de validar de la disciplina. Analizar bajo esta lente implica reflexionar sobre todos los aspectos conceptuales vinculados al tema que se desea enseñar.

Mirar la clase con la lente *objetivos* consiste en atribuir al docente que dio la clase filmada, objetivos (generales o específicos) de ciertas acciones, decisiones, elecciones que realiza en la clase. No interesan los objetivos reales del profesor (que, además, en general, no pueden conocerse), sino lo que se puede inferir de lo que se observa. No se trata tampoco de acertar, sino más bien de explorar el espacio posible de razones que pudo tener el docente para tal o cual acción, elección o decisión en la clase.

Los objetivos, de acuerdo con Arcavi (2015), se materializan a través de las tareas y actividades que el docente lleva a la clase. La lente *tarea* se ejercita mirando cómo la actividad propuesta cobra vida en la clase, cómo la resuelven los estudiantes, cómo el docente trata las reacciones de los alumnos. La tarea en acción puede alejarse de lo planeado por el profesor, y una misma tarea en dos clases distintas puede desarrollarse de diferente forma. En el ejercicio del uso de esta lente se puede realizar un análisis a priori de la tarea, antes de ver la clase, como también un análisis a posteriori, luego de ver qué ocurrió efectivamente en la clase.

En la lente *interacciones* se trata, por una parte, de analizar cómo interactúa el docente con sus alumnos: qué preguntas hace, cuáles no hace, qué respuestas da, qué intervenciones de sus alumnos toma y cuáles ignora, qué diálogos promueve, qué responsabilidades da a sus estudiantes y cuáles no (explicar a otros, hacer preguntas, justificar, entre otras posibles); si hace preguntas luego de presentar la tarea, o luego de hacerla; si escucha o ignora las dificultades presentadas por los alumnos; si espera a que los estudiantes se expresen o les completa las frases; si repite sus frases haciendo correcciones o reformulando lo que dice el alumno, o toma lo que el estudiante dice de forma literal. Por otra parte, también es posible analizar las interacciones de los alumnos entre sí, en caso de que puedan apreciarse.

Muchas veces las interacciones del profesor con los estudiantes, o de los estudiantes entre ellos, pueden llevar al docente a tener un *dilema* sobre su propia intervención o la forma de continuar en la clase. También pueden desencadenarse dilemas por sucesos imprevistos: una pregunta inesperada, un malentendido, una solución alternativa a un problema, no anticipada por el profesor. El docente se enfrenta al dilema de si tomarlo en consideración o no. Arcavi (2015) define *dilema* como "una situación en la que no hay una solución inmediata, y en la que se requiere sopesar opciones y sus consiguientes ventajas y desventajas (o costos o beneficios)" (p. 392).

El ejercicio de esta lente no consiste en decidir cuál es la mejor opción, sino explorar posibles dilemas en ciertos momentos de la clase, y las decisiones que se podrían tomar en relación con ellos, como forma de reflexión. También es importante analizar posibles costos y beneficios de las distintas alternativas posibles. No se trata tampoco de juzgar la decisión que tomó el docente en la clase que observamos, incluso es probable que lo que eventualmente podemos detectar como dilema, no lo haya sido para ese docente en ese momento.

> La lente *creencias y valores* tiene que ver con responder a las siguientes preguntas:
> ¿Cuál es la visión del docente acerca de la naturaleza de la disciplina (matemáticas)? ¿Cómo percibe el docente su rol en la clase? ¿Cuál es su perspectiva acerca de la enseñanza de las matemáticas? ¿Qué piensa el docente acerca del rol del alumno durante el proceso de aprendizaje? (Arcavi, 2015, p. 392)

El ejercicio de esta lente consiste en inferir valores y concepciones del docente a cargo de la clase filmada, y fundamentarlas con acciones (o no acciones) del profesor, así como en mensajes implícitos que el docente puede transmitir a los estudiantes.

El análisis de clases sobre la base de una *lente* supone entonces concentrarse en una dimensión particular y aislarla para poder profundizar en este. Por lo tanto, se pueden desarrollar tantos análisis diferentes como lentes se decidan usar. Además, el análisis realizado por un grupo de personas puede tener o no coincidencias con el que haga otro grupo.

Arcavi & Karsenty consideran que las *lentes* constituyen un lenguaje que los docentes pueden usar para la reflexión sobre los procesos que se dan en la clase y las decisiones que se toman. En palabras de los autores:

> Estos marcos teóricos [el *Conocimiento Matemático para enseñar*, Ball et al., 2008, y *Enseñar en contexto*, Schoenfeld, 2010] nos condujeron a sugerir que los docentes pueden y deberían involucrarse activamente en una productiva y profunda reflexión y análisis de sus propios (y de otros) objetivos, recursos y orientaciones y de su conocimiento matemático para enseñar. La reflexión y el análisis no solo incluyen mirar para atrás *per se*, sino también, perseguir y aprovechar oportunidades de aprender de ese examen para retornar a la práctica profesional con nuevas herramientas, conocimientos y horizontes. (Arcavi & Karsenty, 2017, p. 435, traducción nuestra).

Metodología de trabajo

El taller se planificó con el objetivo de compartir y analizar una clase en la que se trabajó con una tarea de final abierto (Zaslavsky, 1995, 2008) que fue implementada y filmada en un curso de matemática del último año de enseñanza media superior (bachillerato). Para el análisis y reflexión con los participantes del taller, se presentaron algunos conceptos abordados y estudiados por el proyecto VIDEO-LM (Karsenty & Arcavi, 2017), se recorrieron todas las lentes profundizando en su caracterización y dando ejemplos de cómo se pueden usar, pero nos enfocamos en tres de las lentes: la tarea que se propuso a los estudiantes, las ideas matemáticas y metamatemáticas que esta moviliza y las interacciones que se dieron en el desarrollo de la clase.

Concretamente, el taller se desarrolló en dos sesiones. En la primera sesión se presentó la tarea que se propuso en la clase y se invitó a los participantes a anticipar las posibles respuestas que darán los estudiantes.

La tarea propuesta es una tarea de final abierto del tipo *contrastar y comparar* (Zaslavsky, 2008) y su consigna es la siguiente:

Escribe la mayor cantidad de similitudes y diferencias que encuentres entre las funciones f y g dadas por sus expresiones analíticas y sus gráficas.

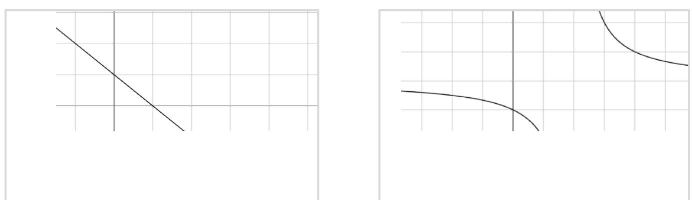


Figura 1. Tarea propuesta. (Elaboración propia)

La figura 2 muestra una fotografía de la pizarra en la que se registraron las respuestas dadas por los participantes del taller:

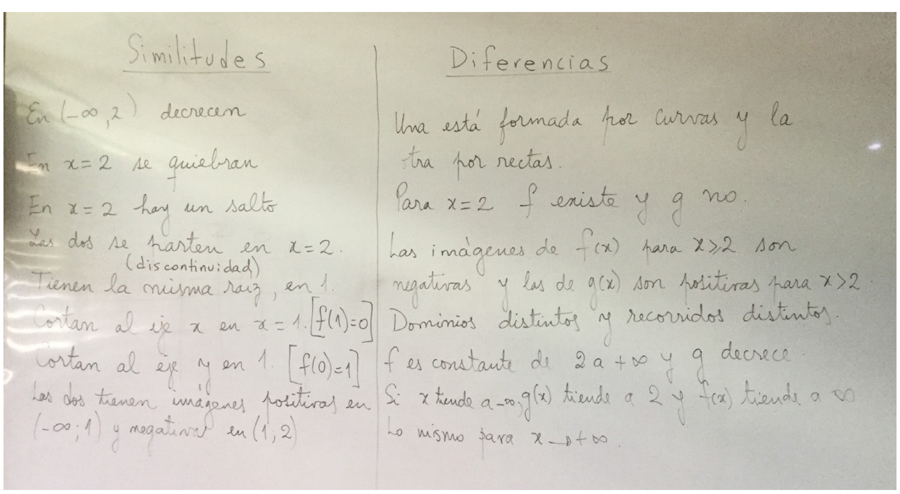


Figura 2. Respuestas de los participantes a la tarea propuesta. (Elaboración propia)

Luego, se miró la primera parte del video (10 minutos aproximadamente) y se comparó lo sucedido en la clase con lo anticipado por los participantes del taller. De esa comparación surgieron algunas diferencias. Por ejemplo, los participantes del taller no hicieron referencia al dominio y al recorrido de cada función, y en la clase los alumnos sí lo dijeron; tampoco apareció el concepto de asíntota en el taller el cual sí surgió en la clase filmada.

Como cierre de esta primera sesión se presentó el marco teórico para el análisis del video (Arcavi & Karsenty, 2017). Además, se presentó una breve reseña del tipo de tarea (de final abierto) que se propuso en la clase filmada y se dieron algunas sugerencias para su diseño.

En la segunda sesión del taller se presentó el resto de la clase filmada (20 minutos aproximadamente) y se propuso a los participantes hacer un análisis crítico de esta, desde la perspectiva del marco teórico presentado. Para ello los participantes se dividieron en equipos, a cada uno de los cuales se le asignó una de las seis lentes del marco de referencia. Los participantes debían concentrarse en la lente elegida, pero si lo deseaban, también podían hacer observaciones respecto a otra lente. Finalmente se hizo una puesta en común de las observaciones de los participantes.

En la puesta en común se pusieron en evidencia las distintas concepciones de los asistentes en relación con algunas cuestiones de la práctica docente. Por ejemplo, hubo una discusión en torno al momento y en qué medida debían institucionalizarse los conceptos que iban apareciendo en la resolución de la tarea, si era importante dar una definición para cada uno de ellos, o si esto pudiera dejarse para instancias posteriores. Algunos participantes sostenían que era oportuno hacerlo en esa misma clase, en tanto otros consideraban que no era pertinente, ya que las ideas en torno a los conceptos se iban consolidando y acordando a medida que los estudiantes fundamentaban y discutían sus respuestas. Esta cuestión se ligó a la de los objetivos de la clase, lo que derivó en una rica discusión en torno a estos. Como señalan Arcavi & Karsenti (2017), en estos talleres se ponen de manifiesto distintos objetivos para una clase, que los participantes atribuyen al docente a cargo de la clase filmada, y de ese modo dejan ver qué objetivos perseguirían ellos en una clase como esta. Lo mismo se da en relación con las demás lentes.

Durante el taller, muchos participantes reflexionaron sobre lo novedoso que les resultó la tarea, por ser de final abierto, y mostraron su asombro al ver las discusiones y algunas de las dificultades que mostraban los estudiantes al intentar resolverlas. Dificultades que muchos de los participantes del taller no eran conscientes que podrían surgir en el nivel de estudio en el que se implementó el problema. De todos modos, reconocieron las virtudes de que estas cuestiones se manifestaran, pues esto implica un mayor acercamiento a las interpretaciones que dan los estudiantes sobre ciertos asuntos que a veces, los docentes, entendemos deberían ser dominadas por los estudiantes.

Reflexiones finales

Consideramos que el taller permite acercarse a las experiencias de otros docentes, con el objetivo de compartir, reflexionar y transformar diferentes perspectivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En las diferentes ocasiones en que este taller ha sido implementado resultó una experiencia de mucho intercambio y reflexión sobre las prácticas docentes.

El taller sirve además para difundir el marco conceptual que promueve la reflexión sobre la práctica a partir del análisis de una clase cualquiera, y el enfoque en determinadas dimensiones (establecidas por cada lente del marco conceptual), lo que permite un abordaje concreto y situado en la experiencia personal.

En este taller nos focalizamos en la tarea propuesta, de final abierto (Zaslavsky, 1995, 2008), así como en las interacciones del docente con los estudiantes, de estos con los saberes matemáticos en juego, y de los estudiantes entre sí. De todos modos, es usual presentar el marco en su totalidad, y discutir las diferentes dimensiones de la clase (a través de las lentes), tomando especial consideración de las intervenciones de los participantes.

Al hacer foco en la lente de las interacciones se puede solicitar que se observe qué tipos de interacciones se privilegian en la clase: docente-alumno, alumno-alumno, u otras; y si se ponen de manifiesto normas socio-matemáticas (Yackel, 2004). Por ejemplo, una cuestión que puede observarse en esta clase es el lenguaje empleado por los estudiantes, que parecen tener aceptada la norma de fundamentar todas las respuestas que dan.

En lo que respecta a la tarea, al trabajar con una tarea de final abierto en el sentido de Zaslavsky (1995) y en particular con una del tipo *contrastar y comparar* (Zaslavsky, 2008) se movilizan ideas y técnicas matemáticas que están disponibles en los estudiantes, pero para las que no hay una indicación explícita en la consigna. Es decir, los alumnos recurren a un procedimiento porque lo necesitan para establecer una similitud o una diferencia y no porque en la tarea se indique que hay que hacerlo. Además, la tarea se presta para realizar forzosamente cambios de registro de representación semiótica para poder justificar las afirmaciones que se realicen (en particular, lo que se visualice en un gráfico puede no ser un argumento suficiente, como, por ejemplo, afirmar que la raíz de una función es 1, simplemente por mirar su gráfico).

El intercambio vivido durante el taller en la Relme 32, si bien breve, permitió conocer, confrontar y debatir preocupaciones y miradas comunes -y no tanto- que generamos a través de nuestra experiencia como docentes, como investigadores y como alumnos, a lo largo de nuestra historia.

A la vez, los participantes constataron la certeza de no haber anticipado algunas producciones o preguntas que se hicieron los estudiantes durante el video, así como la posibilidad de reflexionar acerca del análisis compartido por los participantes, sobre la tarea planteada, el modo en que la docente gestiona la clase y el efecto de esto sobre la emergencia de las ideas de los estudiantes acerca de los conceptos a los que aluden durante la clase filmada. Todo esto permitió un enriquecimiento de las observaciones realizadas inicialmente en los equipos, producto de la discusión colectiva.

La riqueza del taller radicó en el interés que mostraron los participantes; el intercambio de opiniones entre los diferentes colegas; la evidencia de confrontación de *creencias* de los diversos participantes acerca de la enseñanza de la matemática; la alusión al modelo normativo de enseñanza (Charnay, 1994) en contraste con la clase que se presentó en el video; la posibilidad de "confrontar" nuestras ideas y creencias con las de otros colegas, siempre con la intención de mejorar las prácticas de enseñanza.

Por último, queremos resaltar que encontramos en este taller una fortaleza manifestada en cada una de las instancias en las que tuvimos la oportunidad de implementarlo, debido a que los intercambios con colegas permiten debatir e intercambiar concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y en función de ello, comenzar a generar nuevas preguntas e insumos para reflexionar y comprender las complejidades de nuestras prácticas de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2015, mayo). *Promoviendo conversaciones entre docentes acerca de clases filmadas de Matemáticas*. Conferencia plenaria presentada en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado de: http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/1513.

Arcavi, A. & Karsenty, R. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: a framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20,* 433-455. DOI 10.1007/s10857-017-9379-x.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Charnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas. En I. Saiz, M. Parra (comps) *Didáctica de Matemáticas,* Paidós. Buenos Aires.

Maher, C.A. (2008). Video recordings as Pedagogical Tools in Mathematics. En D. Tirosh, & T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education. The International Handbook of Mathematics Teachers Education.* Vol. 2. pp. 65-83.

Yackel, E. (2004). Theoretical perspectives for analyzing explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education 8*(1). Recuperado de: http://mathnet.or.kr/mathnet/kms_tex/981581.pdf.

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional development. *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 15-20.

Zaslavsky, O. (2008). *Attention to similarities and differences: a fundamental principle for task design and implementation in mathematics education.* Recuperado de http://tsg.icme11.org/document/get/290.

CÓMO DESARROLLAR LA COMPETENCIA MATEMÁTICA A PARTIR DEL ANÁLISIS DE TAREAS GENERADAS EN EL AULA

HOW TO DEVELOP MATHEMATICAL COMPETENCE FROM THE ANALYSIS OF TASKS GENERATED IN THE CLASSROOM

Olimpia Castro Mora, Percy Merino Rosario
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes. Ministerio de Educación (Perú)
ocastro@minedu.gob.pe, pmerino@minedu.gob.pe

Resumen
En este trabajo precisamos situaciones que ejemplifican cómo se va desarrollando la competencia matemática en los estudiantes a través de tareas constituidas por tres dimensiones como es el contenido, la capacidad y el contexto, al resolver situaciones problemáticas de distinta complejidad. Esta propuesta surge de las evidencias encontradas en los resultados de la Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) de Perú, lo que nos lleva a presentar ejemplos de tareas que permite reflexionar sobre el aprendizaje de los estudiantes y sus dificultades. Con estos ejemplos se realiza el análisis de tareas detallando el contenido didáctico y matemático con la finalidad que los docentes puedan proponer actividades que les permita organizar las nociones y las relaciones de los temas matemáticos a enseñar y tener mayores recursos para atender a las dificultades que se vienen presentando.

Palabras clave: competencia matemática, análisis de tareas, capacidades, conocimientos matemáticos

Abstract
In this work, we show situations that exemplify how the mathematical competence develops in students through tasks that include three dimensions such as content, capacity and context when they are solving problems of different complexity. This proposal arises from the evidence found in the results of the Peruvian Census Student Assessment (also known as ECE for its acronym in Spanish). These results lead us to present examples of tasks that allow the reflection on students' learning and its difficulties. Through these examples, we analyze the tasks, detailing the didactic and mathematical contents in order to enable teachers to propose activities that allow them to organize the notions and the relationships of the mathematical topics to be taught and also to have more resources to pay attention to the difficulties that have been taking place when performing a task

Key words: mathematical competence, task analysis, abilities, mathematical knowledge

Introducción

La Evaluación Censal de Estudiantes (ECE) realizada en Perú, tiene como finalidad medir el nivel de desarrollo de la competencia matemática que van alcanzando los estudiantes de los grados evaluados, mediante situaciones propuestas en diversos contextos, las cuales llevan al estudiante a poner en uso los conocimientos y capacidades matemáticas que van adquiriendo en los años de escolaridad. A partir de los resultados de la ECE aplicada en el año 2015 y 2016 a 2° y 4° de primaria y 2° de secundaria, se evidencia que pocos estudiantes alcanzan los aprendizajes esperados de Matemática al finalizar los diferentes ciclos de la escolaridad. En primaria aproximadamente 30% de los estudiantes y en secundaria alrededor de 12% de los estudiantes alcanzan el nivel satisfactorio, es decir, que aprenden lo esperado según el currículum nacional.

Con los resultados obtenidos en la ECE, se busca fomentar la reflexión y el diálogo docente sobre los logros y las dificultades que tienen en Matemática los estudiantes de los grados evaluados. El principal objetivo es que el docente pueda diseñar estrategias pedagógicas que afiancen los aprendizajes alcanzados y puedan atender a las dificultades presentadas (Ministerio de Educación [MINEDU], 2017a). Para esto, utilizamos algunas de las tareas propuestas en la ECE (preguntas liberadas) con el propósito de brindarle al docente orientaciones didácticas que le permita realizar un análisis de estas tareas y así tener claridad no solo de los contenidos matemáticos que espera que sus estudiantes aprendan sino también de la manera cómo desarrollan este aprendizaje.

Marco teórico

La ECE busca recoger información de cómo van desarrollando los estudiantes la competencia matemática a lo largo de la escolaridad. MINEDU (2016a) define la competencia matemática como “un saber actuar deliberado y reflexivo que selecciona y moviliza una diversidad de habilidades, conocimientos matemáticos, destrezas, actitudes y emociones, en la formulación y resolución de problemas en una variedad de contextos” (p.41). De ahí que las tareas presentadas en la ECE permiten poner en juego los conceptos aprendidos de matemática tanto de una manera formal como de una manera flexible e intuitiva, basada en el razonamiento y aplicación de diversas estrategias.

Por otro lado, más allá de ser una evaluación, la ECE moviliza un conjunto de acciones que impulsan el desarrollo de la competencia matemática desde el aula. Siendo así, es importante que el docente preste especial atención al análisis didáctico de las tareas matemáticas que propone a sus estudiantes. Como señala Gómez (2005, citado en Rico, Lupiañez y Molina, 2013), el análisis didáctico de estas tareas permite dar una revisión y reflexión profunda a aspectos específicos las matemáticas con la finalidad de enriquecer la actividad docente en el proceso de la planificación, de llevar a cabo la práctica y de evaluar las unidades didácticas.

Desde este escenario, ¿qué se entiende por análisis didáctico? Gómez (2005), utiliza la expresión “análisis didáctico” para referirse a la conceptualización de las actividades que el profesor de matemáticas debería realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar las unidades didácticas que desarrollará en clase. En ese sentido, el análisis didáctico se convierte en una herramienta que permite profundizar sobre los múltiples significados de un concepto matemático y seleccionar aquellos que se quieren priorizar en el aprendizaje del estudiante.

Lupiañez y Rico (2009) definen cuatro tipos de análisis sobre la enseñanza de la matemática, con los que es posible profundizar un concepto matemático para constituirlo como objeto de enseñanza. Estos son el análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y el de actuación.

En el análisis de contenido, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un contenido matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la enseñanza.

En el análisis cognitivo, el contenido deja de ser el foco de atención y este se orienta en el aprendizaje del estudiante. Según, M. J. González, P. Gómez, J. L. Lupiáñez (2010), en este análisis se realiza una descripción de las expectativas del aprendizaje, es decir, se determina cuál es la competencia que se quiere enfatizar, se selecciona los objetivos de aprendizaje que se pretenden desarrollar y se identifica qué capacidades de los estudiantes se ponen en juego. Asimismo, se determina las limitaciones del aprendizaje de un contenido matemático, al identificar qué dificultades y errores van a surgir en este proceso y finalmente, se organiza la selección de tareas que propondrá al estudiante como oportunidades de aprendizaje, tareas que se distancien de lo rutinario y que sean integradoras de diversas capacidades y competencias.

En el análisis de instrucción, el docente selecciona, diseña y secuencia las tareas que empleará en la enseñanza para lograr las expectativas de aprendizaje que ha definido anteriormente. También analiza los diferentes materiales y recursos que podrá emplear en sus clases y delimita los criterios y los instrumentos de evaluación.

En el análisis de actuación, luego de implementar la unidad didáctica, el docente obtiene información acerca de la medida en que se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas, la funcionalidad de las tareas empleadas o la bondad de las herramientas de evaluación puestas en juego. Esta información es útil de cara a la próxima implementación de la unidad diseñada o al inicio de la planificación del tema siguiente.

Desde esta perspectiva, en este trabajo nos centramos solo en el análisis cognitivo de algunas de las tareas propuestas en la ECE ya que las características de este análisis le dan sustento a la necesidad de atender y comprender su modelo de evaluación y el reconocimiento de los logros y dificultades de los estudiantes evaluados. Todo esto, desde un marco en el que la ECE no es el fin del aprendizaje en la Educación Básica Regular sino una herramienta que busca movilizar acciones para una mejora de sus aprendizajes.

Metodología

Este trabajo es la propuesta de un taller dirigido a docentes donde se precisa cómo se desarrolla la competencia matemática a partir de la intervención de tres aspectos: capacidad, contenidos y contextos. La capacidad se refiere a las habilidades puestas en juego por el estudiante frente a cierto tipo de tareas, como interpretar, representar, modelar, evaluar, conjeturar, entre otras. Estas se relacionan con los conocimientos y experiencias que son necesarias para poder resolver una determinada tarea (Lupiañez y Rico, 2008). Por otro lado, este concepto de competencia matemática está alineado con lo estipulado en el currículo nacional de Perú y también al modelo de evaluación que rige la ECE.

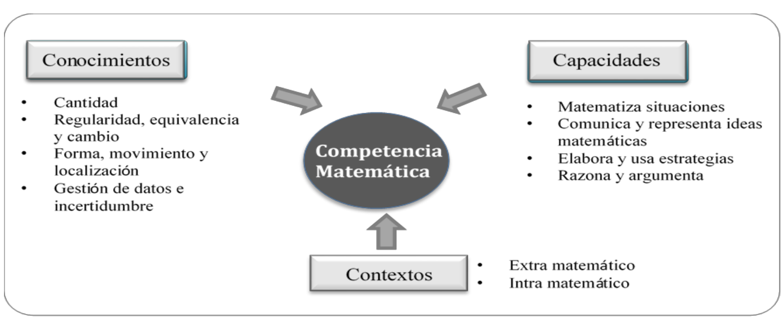


Figura 1. Modelo de Evaluación de la Competencia Matemática en la ECE
Fuente: Adaptado de MINEDU (2017b)

Al comunicar los logros y las dificultades en el aprendizaje de la matemática, evidenciados por la ECE, se realiza la práctica del análisis cognitivo de tareas para identificar cómo está elaborado y cuál es la propuesta de cada tarea presentada de acuerdo a los lineamientos de la competencia matemática arriba mencionados. De esta manera, en la expectativa de aprendizaje se precisa los conocimientos matemáticos que se quieren evaluar, así como el indicador u objetivo propuesto y las capacidades que intervienen para la resolución de la tarea propuesta, que están en relación directa con el contexto planteado. Al realizar la presentación detallada de la tarea propuesta que involucra los conceptos y la variedad de estrategias que ponen en juego los estudiantes para su resolución, se pone en evidencia las oportunidades a las que se enfrentan, ya que se aprecian sus logros de aprendizaje, pero también los posibles errores que podrían cometer y las causas que los originan (dificultades). En esta última parte, se reflexiona sobre la manera cómo puede ser atendido, desde las aulas, tanto el proceso de aprendizaje como el de retroalimentación ante el error, lo que fortalece sus oportunidades en el proceso de aprender.

Para presentar la forma en que se realiza el análisis cognitivo de estas tareas, se desarrollan algunos ejemplos basados en tareas aplicadas en las evaluaciones censales, donde se precisa para cada uno la siguiente estructura:

Información general de la tarea compuesta por el contenido, la capacidad y el contexto en que se desarrolla, así como el indicador de aprendizaje que permite al docente comprender mejor la intención a evaluar. (Expectativas de aprendizaje en el análisis cognitivo).

Presentación de los resultados de la tarea en la evaluación censal mostrando la tasa de respuesta correcta entre las alternativas, así como de aquellos distractores que destacaron por su alto porcentaje. Aquí se podría evidenciar las oportunidades de aprendizaje a las que se han enfrentado los estudiantes, pero también las posibles dificultades manifestadas a través de su error.

Reflexión desde los resultados para analizar las oportunidades de aprendizaje que podrían tener los estudiantes, a partir de las situaciones planteadas y las sugerencias de cómo se podría abordar la comprensión de una noción matemática. Con esto, el docente podrá atender a las necesidades y potencialidades del aprendizaje de sus estudiantes e identificar en qué radica el error cometido para poder advertir dificultades que suelen presentarse en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Análisis de las tareas propuestas en la ECE

En el análisis de tareas se muestran ejemplos de situaciones de los tres grados evaluados en la ECE, 2°, 4° de primaria y 2° de secundaria y se ha considerado que estos aborden distintos contenidos en las diferentes competencias según el currículo nacional peruano.
En la Figura 2 se muestra el primer ejemplo de una tarea propuesta en una prueba modelo aplicada a los estudiantes de segundo grado de primaria. De acuerdo MINEDU (2015), esta tarea cumple con las siguientes características:

Competencia: Cantidad. Contenido: Comparación de números. Capacidad: Razona y argumenta. Contexto: Extra-matemático. Indicador: Identifica números mayores o menores que un referente.

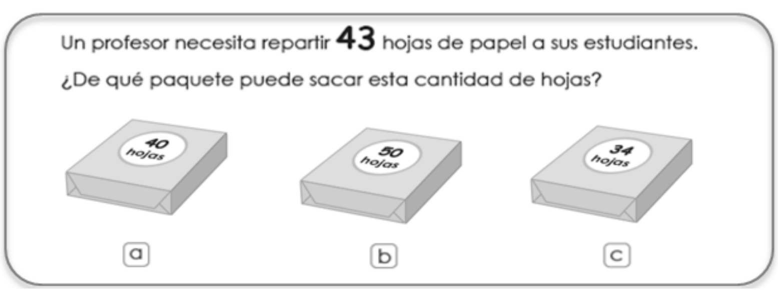


Figura 2. Tarea aplicada a 2° de primaria
Fuente: MINEDU (2015, p.6)

En esta tarea de comparación de cantidades, cuya respuesta es la alternativa *b,* solo hubo un 30% de acierto. La mayor frecuencia de respuesta está en la alternativa *a*, por ser la cantidad más cercana a 43 y, en menor porcentaje se marcó la alternativa *c*, que es una cantidad que contiene los dígitos en mención.

Estas respuestas permiten reflexionar al docente que hay tareas de comparación de números que tienen un referente y se basa en la inclusión jerárquica (Kamii, 2003), es decir, donde el estudiante identifique que en 40 hojas no se puede encontrar 43 hojas, pero en 50 hojas sí, tareas que son complejas para el estudiante. Sobre todo, si se contrasta con tareas donde la comparación de cantidades es solo relación de orden, es decir, indicar cuál de los números es mayor o es menor respecto a un referente. Según MINEDU (2015), en estas tareas de relación de orden se tiene un 80% de acierto, lo que indica que en tareas donde interviene la noción de número y la inclusión jerárquica de manera abstracta, constituye un grado de dificultad mayor para el estudiante.

Frente a estas evidencias, qué actividades debemos considerar en nuestras clases para advertir errores como estos, para que los conceptos que van desarrollando los estudiantes sean comprendidos, aplicados y razonados al ponerlo en juego en situaciones nuevas. Es necesario atender a las etapas de construcción del número entre ellos la conservación de la cantidad, la inclusión jerárquica y la comparación de cantidades que impliquen evaluar situaciones para decidir si elegir al mayor o menor número según las condiciones dadas. Los estudiantes que marcaron la alternativa c, tienen dificultades en la comprensión de la cantidad, descomposición del número, el valor posicional, aspectos que deben ser retroalimentados como parte de la comprensión del sistema de numeración decimal.

En la Figura 3 se muestra un ejemplo de una tarea de la ECE aplicada a los estudiantes de cuarto grado de primaria. De acuerdo MINEDU (2018), esta tarea ubicada en el bloque 1 posición 14 cumple con las siguientes características:

Competencia: Cantidad. Contenido: Significados multiplicativos. Capacidad: Matematiza. Contexto: Extra-matemático. Indicador: Resuelve situaciones que implican interpretar el sentido del residuo en una división.

Para pintar su casa, Fernando decide comprar pintura que solo se vende en baldes de 5 litros. Si necesita 37 litros de pintura, ¿cuántos baldes de pintura tiene que comprar?

a 5 baldes de pintura.
b 7 baldes de pintura.
c 8 baldes de pintura.
d 37 baldes de pintura.

Figura 3: Tarea aplicada a 4° de primaria
Fuente: MINEDU (2017b, p.25)

En esta tarea, menos del 30% de los estudiantes respondieron adecuadamente 8 baldes, por el contrario, mayor frecuencia de respuesta tuvo la alternativa *b*, y en menor frecuencia se observó la alternativa *d*. A qué se debe que los estudiantes marquen la alternativa *b* o la alternativa *d.* Al analizar las posibles estrategias que pudo haber utilizado el estudiante para resolver esta tarea, podemos identificar también las posibles dificultades que enfrenta el estudiante.

Estas tareas pueden ser resueltas aplicando una diversidad de estrategias todas basadas en el modelo multiplicativo, ya sean gráficas, simbólicas o numéricas. Estas pueden expresar significado de *veces repetidas*, es decir, 5 litros varias veces hasta que alcance 37 litros como mínimo como también el significado de reparto, donde se busca cuántos grupos de 5 litros se puede formar con 37 litros y en todo ello lo que es de vital importancia es la interpretación del excedente, que son los 2 litros de pintura que, según la situación, esta debe ser tomada en cuenta para que alcance, y en ambos casos lleva a considerar 8 baldes para que alcancen los 37 litros necesarios. Sin embargo, usualmente en clases se llamar a este excedente como “lo que sobra” interpretando el estudiante que no se debe tomar en cuenta, por lo tanto alineado con esto marca la alternativa *b*.

Frente a estas evidencias, qué actividades debemos tomar en cuenta en nuestras clases para advertir errores como estos, Es necesario partir de situaciones que le den significado a lo que se está trabajando y no centrarse solo en los nombres de los elementos de la operación y su procedimiento mecánico. Se requiere de situaciones que permitan darle una fuerza de interpretación y toma de decisiones para este residuo, lo que centra la dificultad en esta tarea ya que el estudiante suele replicar lo que en reiteradas oportunidades ha realizado de manera automática que el residuo es lo que sobra de la operación y por lo tanto, no se toma en cuenta. Procedimiento que resulta por lo general de la aplicación de algoritmos descontextualizados.

Por otro lado, se observa que hay estudiantes que marcan como respuesta el dato del problema que se refiere a cuánta pintura necesita en total sin atender a las unidades si son litros o baldes, en este caso la alternativa *d*. Estas evidencias nos indican la importancia de construir las nociones matemáticas, entre ellas los significados de las operaciones partiendo de situaciones contextualizadas, razonadas y que lleven a toma de decisiones y no solo a la aplicación de rutinas algorítmicas, es decir, dándole el sentido fenomenológico a los contenidos (Rico, 2016).

En la Figura 4 se muestra un segundo ejemplo de una tarea aplicada en la ECE a los estudiantes de segundo grado de secundaria. De acuerdo MINEDU (2017a), esta tarea cumple con las siguientes características:

Competencia: Forma, movimiento y localización. Contenido: Área de figuras planas. Capacidad: Elabora y usa estrategias. Contexto: Intramatemático. Indicador: Resuelve situaciones que pide calcular el área de un polígono.

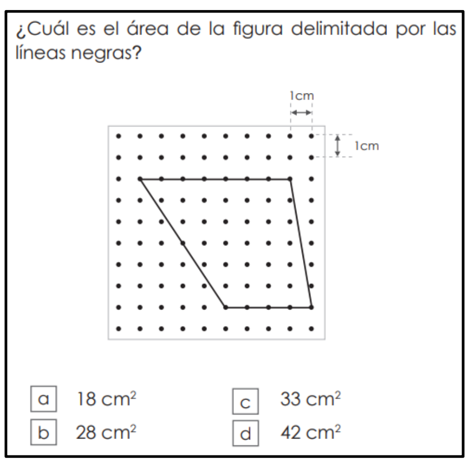


Figura 4: Segundo ejemplo de tarea aplicada a 2° de secundaria
Fuente: MINEDU (2017a, p.26)

Los estudiantes que lograron responder correctamente esta tarea han podido utilizar diversas estrategias en su resolución dado que el formato gráfico daba mucha información para identificar los datos que eran necesarios para su planteamiento. MINEDU (2017a) propone las estrategias que se muestran en la Figura 5. En la primera estrategia, se calcula el área realizando la descomposición de la figura en otros polígonos más sencillos como son triángulos y rectángulos, lo que implica finalmente sumar áreas. La segunda estrategia consiste en componer una gran figura, como es el rectángulo de 6×8 para luego quitarle los triángulos que no corresponden a la figura original, siendo en este caso, la resta de áreas. La tercera estrategia, consiste en identificar los elementos de la figura, relacionar los lados que son paralelos y clasificarlo como trapecio a pesar de estar en una posición poco usual, y de esta manera calcular su área usando su fórmula.

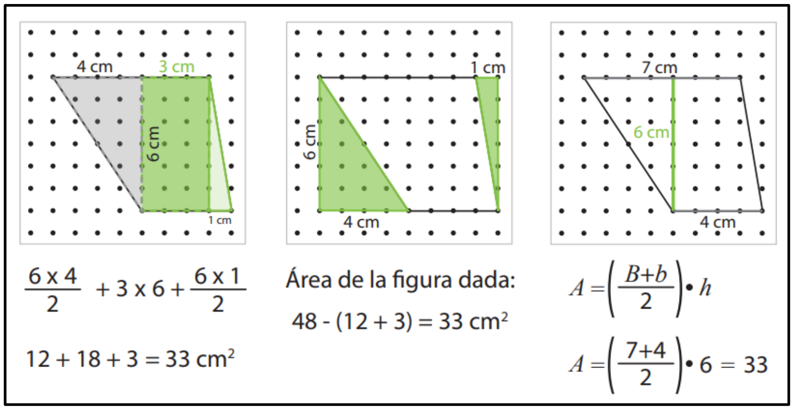


Figura 5: Estrategias de solución para el segundo ejemplo de tarea aplicada a 2° de secundaria.
Fuente: MINEDU (2017a, p.27)

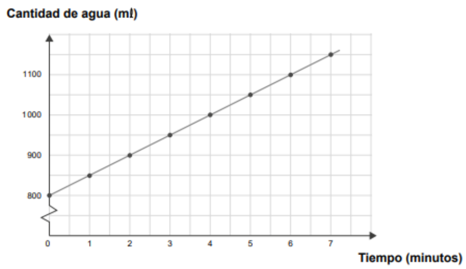
Sin embargo, pese a tener oportunidad de usar variadas estrategias, solo el 25% de los estudiantes evaluados lograron responder con acierto la alternativa c. ¿Por qué los estudiantes eligen la alternativa *a*? Minedu (2017a) concluye en base a las evidencias recogidas que los estudiantes que marcaron la alternativa *a* confunden la noción de área con la de perímetro. Por lo tanto, este grupo de estudiantes requiere de actividades que afiancen la noción de área desde actividades concretas que ayuden a formar el concepto de área, así como también lo correspondiente a la medida de longitud. Por otro lado, tenemos el grupo de estudiantes que todo lo que es tarea de área de un polígono lo asocian de manera automática con la fórmula de largo por ancho, siendo la alternativa *b* la que implica la multiplicación de las dos longitudes encontradas. También en la alternativa d se refleja esta asociación al multiplicar la base mayor por la altura.

Estas reflexiones nos confirman que el aprendizaje mecánico, el manejo de fórmulas sin sentido hace que el estudiante no comprenda lo que hace y lo lleve a que olvide fórmulas, confunda elementos, pero lo más serio es que esta rigidez no les permite utilizar nuevos o diferentes procedimientos a pesar de tener diferentes elementos dados en el formato gráfico, donde basta con el concepto para poder construir su respuesta. Esto nos advierte que construir las nociones, explorar los elementos y consolidar los conceptos permite aprendizajes flexibles, confianza en sus intentos y seguridad en el uso de diversas estrategias en la solución de situaciones.

En la Figura 6 se muestra un tercer ejemplo de una tarea aplicada en la ECE a los estudiantes de segundo grado de secundaria. De acuerdo MINEDU (2016b), esta tarea cumple con las siguientes características:

Competencia: Regularidad, equivalencias y cambio. Contenido: Funciones lineales y afines. Capacidad: Razona y argumenta. Contexto: Extramatemático. Indicador: Argumenta su decisión sobre supuestos que han sido generados a partir de la información de una situación realista que involucra funciones lineales.

La siguiente gráfica nos muestra la relación entre el tiempo que permanece abierto un caño y la cantidad de agua que se va almacenando en un depósito. Observa:



A partir de esta información, Santiago dice:

"Si a los 4 minutos el depósito ya contiene 1 000 ml de agua, entonces a los 8 minutos, el depósito tendrá 2 000 ml de agua"

¿Estás de acuerdo con Santiago? Sí ☐ No ☐

Explica tu respuesta.

Figura 6: Tercer ejemplo de tarea aplicada a 2° de secundaria
Fuente: MINEDU (2016b, p.7)

En estas tareas de respuesta abierta es una gran oportunidad para evaluar el razonamiento y la argumentación a través de la justificación de sus afirmaciones. En este caso en particular, el estudiante debe explicar y dar ejemplos que contradigan la afirmación propuesta por Santiago. Cabe reconocer que estas habilidades son las más complejas y su tasa de acierto lo señala. Solo el 24 % de los estudiantes logró resolver adecuadamente esta pregunta.

Sin embargo, algunos de ellos argumentan el cambio a partir de la interpretación de una regularidad numérica, es decir, identifican que la cantidad de agua almacenada aumenta a 50 ml por minuto, o a 100 ml cada 2 minutos, o también a 200 ml cada 4 minutos, por ello, a los 8 minutos la cantidad de agua almacenada es de 1 200 ml y no de 2 000 ml. Por otro lado, pueden también argumentan el cambio a partir de una generalización algebraica señalando que la cantidad de agua (y) y el tiempo transcurrido (x) se relacionan con la expresión $y = 800 + 50x$ o una equivalente. Algunos estudiantes hacen referencia a esta relación a través de la pendiente de la recta, ya que ella define la razón de cambio de la cantidad de agua al transcurrir el tiempo.

Está también la posibilidad de argumentar el cambio a partir de sus nociones de proporcionalidad al probar que no necesariamente al duplicarse el tiempo se duplica la cantidad de agua del depósito. Es decir, cuestionan el razonamiento de Santiago ya que lo propuesto no cumple con las características de una función lineal proporcional. Por ejemplo: indican que no se cumple porque, si fuera así, la gráfica debería pasar por el origen. De la misma manera, pudieron argumentar el cambio a partir de la interpretación de la gráfica, analizando la correspondencia entre las dos variables (minutos y cantidad de agua), identifican la regularidad de cambio entre estas dos variables, y ubican, predicen o estiman la cantidad de agua que podría haber al cabo de 8 minutos.

Un 66,0 % de los estudiantes se equivocó al resolver esta pregunta, presentando las siguientes dificultades: el 28,0 % de los estudiantes manifestó su acuerdo con el razonamiento de Santiago y argumentaron con las ideas de proporcionalidad mencionadas en el problema. Utilizaron estrategias como la duplicación de cantidades, la aplicación de una regla de tres simple, etc., para probar que Santiago tenía razón. El 16,0 % de los estudiantes expresó su desacuerdo con Santiago, empleando argumentos imprecisos o errados. Y el 22,0 % de los estudiantes manifestó su desacuerdo con el razonamiento de Santiago, pero no argumenta, tal vez porque carece de herramientas para ello (dificultades en la comprensión de la situación, en interpretar la gráfica o sus elementos, en identificar la regularidad, en establecer la relación entre las variables, etc.)

El análisis de esta tarea nos lleva a la evidencia que por lo general el estudiante calcula valores, representa gráficamente situaciones, pero es poco frecuente en clase tomar postura y justificar su pensamiento a partir de la interpretación de representaciones de funciones lineales o afines. En este aspecto hay mucho que desarrollar en habilidades argumentativas que permita al estudiante integrar sus conocimientos con las capacidades puestas de manifiesto en diversos contextos.

Reflexiones

A partir de la experiencia compartida en este artículo, podríamos decir que el análisis de tareas matemáticas en el aula (desde lo cognitivo), sería un aspecto que impulsaría el desarrollo de la competencia matemática, porque:

- Involucra trabajar sobre los diversos significados que tiene un concepto matemático y las habilidades que se quieren desarrollar de acuerdo con lo esperado en el grado o ciclo escolar del estudiante.
- Permite proponer situaciones que fomenten el desarrollo de las diferentes capacidades y de distinta complejidad, brindando oportunidades de aprendizaje oportunas y adecuadas a la realidad de cada estudiante.
- Permite atender a las necesidades y potencialidades de aprendizaje que tienen los estudiantes.
- Ayuda al docente a organizar la gestión de labor de enseñanza, y anticiparse a los posibles errores que podrían tener los estudiantes y a las dificultades que las originan.
- Permite reflexionar sobre el error del estudiante y atender de mejor manera el proceso de retroalimentación.

Referencias bibliográficas

González, M. J., Gómez, P., & Lupiáñez, J. L. (2010). *Análisis cognitivo*. Apuntes de MAD. Bogotá: Universidad de los Andes.

Kamii, C. (2003). *El niño reinventa la aritmética Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: A Machado Libros S.A.

Lupiáñez, J. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), 35-48.

Ministerio de Educación (2015). *Demostrando lo que hemos aprendido 2.° grado de primaria. Parte 1* Lima, Perú: Autor

Ministerio de Educación (2016a). *Marco de fundamentación de las pruebas de la evaluación censal de estudiantes*. Lima, Perú: Autor.

Ministerio de Educación (2016b). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática? 2.° grado de secundaria*. Lima, Perú: Autor.

Ministerio de Educación (2017a). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática? 2.° grado de secundaria*. Lima, Perú: Autor.

Ministerio de Educación. (2017b). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?2.° y 4.° grado de primaria.* Lima, Perú: Autor.

Ministerio de educación (2018). *Reporte técnico de la evaluación censal de estudiantes (ECE 2016) 2.° grado y 4.° grado de primaria (EBR, EIB), 2.° grado de secundaria*. Lima, Perú: Autor.

Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Editorial Comares S. L.

Rico, L., Moreno, A. y Del Río, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria.* Madrid: Ediciones Pirámide.

APRENDIENDO A PLANTEAR NUEVOS PROBLEMAS. UNA EXPERIENCIA CON GEOGEBRA

LEARNING TO POSE NEW PROBLEMS. AN EXPERIENCE WITH GEOGEBRA

Miguel Cruz Ramírez
Universidad de Holguín (Cuba)
cruzramirezmiguel@gmail.com

Resumen
En el presente trabajo se sigue un enfoque cualitativo y heurístico, dirigido a describir el proceso de planteo de problemas como parte del pensamiento matemático. Se toma como base un modelo teórico compuesto por seis etapas cognitivas que favorecen la formulación de nuevos problemas: selección, clasificación, asociación, búsqueda, verbalización, y transformación (proceso SCABV+T). A partir de aquí, se describe una experiencia en la formación de estudiantes para profesor, los cuales logran plantear varios problemas a partir de un problema geométrico dado. El principio heurístico de movilidad se relaciona directamente con las transformaciones del objeto geométrico, y para ello el proceso cognitivo se dinamiza con ayuda del software GeoGebra. La experiencia revela que el seguimiento de etapas cognitivas, en un ambiente de geometría dinámica mediado por la reflexión heurística, favorece el planteo de nuevos problemas. Todo ello se revierte en el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos.

Palabras clave: resolución de problemas, pensamiento matemático, geogebra, estrategias heurísticas

Abstract
In the present work a qualitative and heuristic approach is followed, aimed at describing the process of problem posing as part of mathematical thinking. It is based on a theoretical model, composed of six cognitive stages that encourage the formulation of new problems: election, classification, association, search, verbalization, and transformation (ECASV+T process). From here, an experience in the formation of prospective teachers is described, which is focused to pose several questions from a given geometrical problem. The heuristic principle of mobility is unswervingly related to the transformations of the geometric object and, in connectedness, the cognitive process is dynamized with the help of GeoGebra software. Experience shows that the monitoring of cognitive stages, in an environment of dynamic geometry mediated by heuristic reflection, favors the formulation of new problems. All this allow the development of students' mathematical thinking.

Key words: problem solving, mathematical thinking, geogebra, heuristic strategies

Introducción

El planteo de nuevos problemas constituye parte indisoluble de la historia de las matemáticas. Como ejemplo de ello, es célebre el enunciado de 23 problemas compilados por Hilbert, los cuales influyeron notablemente en el desarrollo de las matemáticas durante el siglo XX. Por este motivo Halmos expresó en el epílogo de un sugestivo artículo su convencimiento de que "[…] los problemas son el corazón de las matemáticas" (Halmos, 1982, p. 524). Muchos ejemplos dan testimonio acerca del vínculo estrecho que existe entre los componentes de las matemáticas y ciertos problemas asociados. Por ejemplo, Hamilton introdujo el concepto de cuaternión en su afán por resolver el problema de extender los números complejos a un número mayor de dimensiones (Hamilton, 1844). El teorema de Fermat-Wiles está vinculado al problema de probar la inexistencia de soluciones enteras de la ecuación de Fermat para grado superior al segundo, inamovible por el término de tres siglos (Wiles, 1995). El método de las sumas trigonométricas de Vinográdov fue desarrollado para resolver problemas clásicos formulados por Waring y Goldbach en forma de conjeturas (Vinográdov, 1947). Asimismo, el origen de la teoría de Galois estuvo motivado por el problema de encontrar una fórmula para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior al cuarto (obra póstuma publicada por Liouville, 1846).

De modo similar a la importancia que se le concede a la resolución de problemas, muchos currículos y personalidades destacadas de la enseñanza de las matemáticas han propugnado el planteo de problemas en el contexto escolar. Polya, por ejemplo, señala que:

La experiencia de un alumno en matemáticas será incompleta mientras no tenga ocasión de resolver problemas que *él mismo haya inventado*. Enseñando a los alumnos el modo de derivar un nuevo problema de un problema ya resuelto, el profesor logrará suscitar la curiosidad de sus alumnos (Polya, 1981, p. 173; las itálicas en el original).

Halmos incluso sugiere que, "[…] del mismo modo que no se debe dar al estudiante todas las respuestas, tampoco se debe formularles todas las preguntas" (Halmos, 1982, p. 524). Seguidamente reflexiona que, incluso en el nivel de investigación, no se debe dar el problema definitivo de tesis a un candidato, ya que la identificación de nuevos problemas será parte de su futuro cuando el tutor no lo estará supervisando. En esencia, identificar problemas también constituye parte de las competencias investigativas.

En el caso de los currículos, los influyentes *Principles and Standards for School Mathematics* señalan que:

[…] una meta mayor de la Matemática de la escuela media consiste en equipar a los estudiantes con conocimientos y herramientas que les permitan formular, abordar y resolver problemas más allá de aquellos que han estudiado. […] Ellos deben tener oportunidades para formular y refinar problemas, pues los que ocurren en el ambiente real no llegan puramente diseñados (NCTM, p. 335).

Razones como estas dan crédito suficiente a la necesidad de abordar el planteo de problemas desde una perspectiva científica, lo cual viene adquiriendo un interés cada vez más creciente en Latinoamérica (*vid*. Espinoza, Segovia, y Lupiáñez, 2018; Salazar, 2018). Corresponde a la educación matemática un importante papel, en el sentido de sistematizar buenas prácticas y también de ahondar en las bases teóricas que sirven de fundamento a la enseñanza y el aprendizaje del planteo de problemas en el contexto escolar. En el presente trabajo se presenta una experiencia de clase, basada en la aplicación del software dinámico GeoGebra, con lo cual se favorece el planteo de nuevos problemas y, consecuentemente, el desarrollo del pensamiento y de la creatividad. Los fundamentos que sirven de plataforma teórica se presentan a continuación.

Marco teórico

Si bien las investigaciones asociadas al planteo de problemas matemáticos no son tan numerosas como otros campos de la educación matemática, tampoco puede decirse que son demasiado escasas. Tres argumentos pueden resultar ilustrativos. Primero: la existencia de obras clásicas como el libro *The Art of Problem Posing* (Brown y Walter, 2005), publicado por primera vez en 1983 y con más de mil citaciones en *Google Scholar*. Si bien no constituye un informe de investigación, sí marca un espíritu renovador en el quehacer didáctico, algo similar al legado del *How to Solve It* de Polya en el campo de la resolución de problemas. Esta obra sistematiza una importante perspectiva para el planteo de nuevos problemas, consistente en aceptar/poner en duda (*Accepting*/*Challenging*), provista de una poderosa herramienta: la estrategia ¿qué-si-no? (*what-if-not?*). Se trata de una expresión didáctica donde confluyen numerosas fuentes tales como la visión falibilista de las matemáticas, la puesta en duda del racionalismo cartesiano, la educación matemática crítica, el equilibrio/desequilibrio piagetiano, entre disímiles aspectos filosóficos, psicológicos, y didácticos.

Un segundo argumento proviene del desarrollo de investigaciones avanzadas, muchas de ellas basadas en diseños experimentales y también en enfoques cualitativos y mixtos. Por ejemplo, Silver dirigió un experimento clásico (*vid*. Silver, Mamona-Downs, Leung, y Kenney, 1996), consistente en presentar a 58 profesores de educación media y a 28 estudiantes para profesor, una situación relacionada con un juego de billar, donde la mesa es un tablero de dimensión $m \times n$. En un esquema discreto, los sujetos son invitados a reflexionar acerca de nuevos problemas que podrían ocurrir modificando las dimensiones del tablero. Seguidamente, se pide que cada individuo resuelva uno de los problemas propuestos para que así, nuevamente, imagine otros problemas más. Incluso investigaciones recientes han utilizado modificaciones de esta situación (*cf*. Kontorovich, Koichu, Leikin, y Berman, 2012; Daher y Anabousy, 2018). En realidad, poco se ha avanzado con relación al diseño de tareas y situaciones que resulten útiles para evaluar el planteo de nuevos problemas.

Un tercer argumento consiste en la existencia de compilaciones, lo cual demuestra cierto grado de actividad científica, con la formación y desarrollo de colegios invisibles encabezados por líderes científicos. Entre las compilaciones más recientes se encuentran *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (Singer, Ellerton, y Cai, 2015) con 26 artículos redactados por 52 autores de 16 países. Otro ejemplo se titula *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (Felmer, Pehkonen, y Kilpatrick, 2016), obra que reafirma una tesis defendida por muchos investigadores, consistente en que existe un vínculo estrecho entre los procesos de planteo y resolución de problemas (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1998; Xie y Masingila, 2017).

Los estudios realizados convergen o divergen es aspectos diversos. Por ejemplo, si bien se reconoce el vínculo entre planteo y resolución de problemas, poco se sabe acerca de la naturaleza y el modo en que esto tiene lugar (Nápoles y Cruz, 2000). He aquí un ejemplo descrito en una investigación anterior. A un estudiante se le pregunta por qué escoge un triángulo de entre un grupo de objetos matemáticos para formular un nuevo problema, ante lo cual responde que —“[…] en las figuras geométricas es donde más problemas se pueden encontrar” (Cruz, 2002, p. 88). Esta preconcepción muchas veces escapa de los instrumentos de evaluación y se arraiga desfavorablemente en el estudiante. Sirve este ejemplo de evidencia acerca de la manifestación de creencias y concepciones en el planteo de problemas, de modo similar a numerosos fenómenos descritos en el campo de la resolución de problemas.

Otro asunto complejo reside en la precisión de qué es lo que realmente se entiende por “planteo de problemas”. Para comenzar, existen varias terminologías en lengua inglesa: *problem posing* (Brown y Walter, 2005), *problem construction* (Bernardo, 2001), *problem creation* (Engel, 1987), *problem formulating* (Kilpatrick, 1987), *problem generation* (Kapur, 2017), *problem finding* (Dillon, 1982), entre otras. Algunas diferencias pueden explicarse desde la psicología, conforme a una observación de Dillon (1982) quien distingue el reconocimiento, el descubrimiento y la invención, en un sentido creciente de los niveles de complejidad, y que pasan por la percepción de lo evidente, lo implícito y lo incipiente, respectivamente. Para el campo de la educación matemática, Silver (1994) sugiere que el planteo de problemas comprende tanto la formulación de nuevos problemas como la re-formulación de problemas dados. Además, señala que ello puede ocurrir antes, durante, o al final de la solución de un problema. Esta concepción se ajusta al enfoque seguido por Polya (1981) y ha sido asumido por numerosos autores, ya que mira más allá del resultado y lo conceptualiza bajo un enfoque proceso-producto. Es decir, plantear problemas no consiste en hacer preguntas, sino que estas son el resultado de un proceso cognitivo complejo.

Sobre la base de las reflexiones anteriores, el planteo de problemas comprende etapas que es necesario investigar. Ya esta problemática fue advertida tempranamente por Dillon (1982), quien relaciona dichas etapas con niveles de desarrollo por intermedio de los procesos de reconocimiento/descubrimiento/invención. Recientemente, un estudio similar se ha erigido con base en cierta taxonomía, abordada bajo un riguroso enfoque experimental. Las etapas también responden a niveles de complejidad en el planteo de problemas, comenzando por los de comprensión, luego de traducción, seguido de los de edición, y concluyendo con los de selección que resultan los de mayor complejidad (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, y Sriraman, 2005). Otro camino alternativo consiste en la identificación de fases por las cuales transcurre el proceso de planteo. Brown y Walter reconocen cinco: escoger un punto de partida, listar atributos, ¿qué-si-no?, realizar preguntas, y analizar el problema (Brown y Walter, 2005, p. 64). Siguiendo esta idea, en Cruz (2002) se incorporan otras etapas y relaciones que luego se enriquecen a partir de varios estudios empíricos (*cf*. Cruz y Álvarez, 2002; Cruz, 2006; Cruz, García, Rojas, y Sigarreta, 2016).

La Figura 1 muestra un modelo mental del proceso de planteo de problemas en un sentido no trivial, o sea, bajo el supuesto de una actividad intencionada y reflexiva. La transformación no solo explica la estrategia ¿qué-si-no?, sino que también contiene otras formas de contradicción como el ¿qué-si-más? de Kaput (en comunicación personal a Kilpatrick, 1987). De forma sintética, el proceso se denominará SCABV+T y sus etapas y relaciones esenciales se abordan en Cruz *et al*. (2016).

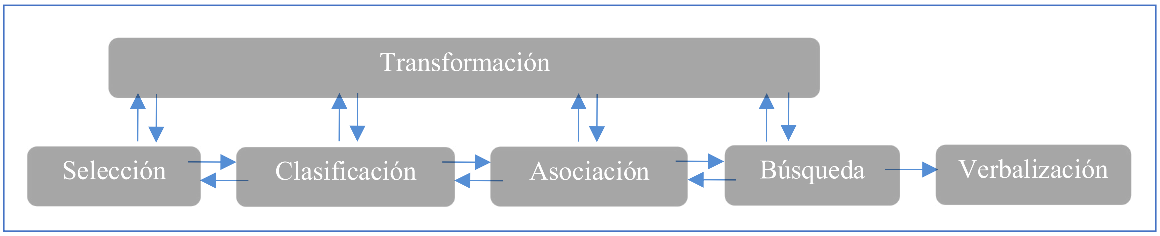


Figura 1. Un modelo del proceso cognitivo de planteo de problemas (SCABV+T)

En la literatura han sido descritas numerosas estrategias heurísticas asociadas al planteo de problemas, las cuales pueden ser explicadas con la ayuda del proceso SCABV+T. En efecto, la reformulación, la generalización, la variación de condiciones dadas (Polya, 1981; Sharygin, 1991), son formas específicas de realización del ¿qué-si-no? Por su parte, formar el producto cartesiano entre dos conceptos (Kilpatrick, 1987) se enmarca principalmente en la etapa de selección. Asimismo, la descomposición y recomposición (Polya, 1981) se originan de la dinámica asociación/búsqueda. Otros procesos tales como el empleo de analogías (Polya, 1981), encadenamiento (formular un problema que se reduzca a otro ya resuelto; Silver *et al*., 1996), la anidación ("problemas matrioska"; Sharygin, 1991), responden a subprocesos todavía más complejos dentro del esquema cognitivo SCABV+T.
Otro aspecto importante que ha ganado espacio en el campo del planteo de problemas consiste en el uso de tecnologías (Abramovich, 2014; Daher y Anabousy, 2018). En particular, los paquetes de geometría dinámica resultan útiles para potenciar el desarrollo de procesos cognitivos complejos, tales como la imaginación y el establecimiento de conjeturas (Christou, Mousoulides, Pittalis, y Pitta-Pantazi, 2005; Contreras, 2013; Lavy, y Shriki, 2010). La posibilidad de transformar el objeto matemático, en el proceso SCABV+T, se entrelaza directamente con el principio de movilidad bajo el uso de geometría dinámica. Por tanto, la implementación de paquetes como GeoGebra constituye una oportunidad para favorecer el planteo de nuevos problemas.

Metodología

Con el objetivo de profundizar en el planteo de nuevos problemas, se sigue un camino predominantemente cualitativo, basado en la argumentación y apoyado en evidencias empíricas. El modelo subyacente consiste en el proceso cognitivo SCABV+T antes referido, mientras que su ejemplificación se adapta de sesiones de planteo de nuevos problemas. Estas sesiones han sido desarrolladas con estudiantes del primer año de la carrera de Licenciatura en Educación de la especialidad Matemática, en la Universidad de Holguín (Cuba).

El planteo de problemas gira en torno al intento infructuoso de extender el teorema de las tres mediatrices de un triángulo a un cuadrilátero. Todo el análisis se realiza utilizando GeoGebra, en sesiones de análisis y discusión con pequeños grupos (de tres o cuatro estudiantes). Un estudio similar para el planteo de problemas, pero relacionado con la extensión del teorema de las tres bisectrices, ha sido desarrollado por Christou, Mousoulides, Pittalis, y Pitta-Pantazi (2005, pp. 136-140).

Resultados

La situación inicial tiene lugar justo al concluir la demostración del teorema de las tres mediatrices de un triángulo *ABC*, las cuales concurren en el circuncentro *O*. La estrategia ¿qué-si-no? resulta de la interacción entre las etapas selección/transformación. La idea original que se discute con los estudiantes consiste en buscar nuevos puntos de partida e indagar qué propiedades se conservan y qué nuevas relaciones tienen lugar. La Figura 2 muestra dos de las ideas discutidas: ¿Qué pasaría si en lugar del triángulo *ABC* se trata de un cuadrilátero convexo *ABCD*? ¿Qué pasaría si el triángulo *ABC* no es plano sino esférico?

El teorema se cumple en el segundo caso. El primer caso se adopta como punto de partida (*selección*). La etapa siguiente consiste en la *clasificación* de componentes del objeto, como el caso de los puntos de intercepción que son seis, sin excluir posibles coincidencias ni posicionamiento en el infinito como puntos impropios. Durante la etapa de *asociación*, a estos objetos se le hacen corresponder conceptos tales como lugar geométrico, alineación, concurrencia, vértices de otro cuadrilátero, entre otros. Seguidamente comienza la etapa de *búsqueda* de posibles relaciones y propiedades. Se trata del momento más complejo, donde se requiere el despliegue de un profundo razonamiento e imaginación.

Con ayuda de GeoGebra, el estudiante logra en un tiempo razonable formular algunas conjeturas. Por ejemplo: "[…] parece ser que los cuatro puntos no impropios son concurrentes cuando el cuadrilátero es un rectángulo". Sin embargo, en general, la concurrencia tiene lugar cuando el cuadrilátero seleccionado es cíclico. Es importante destacar el elevado valor heurístico de la movilidad, pues de la misma forma que sugiere una hipótesis falsa también se apronta a rechazarla, luego de examinar varias posibilidades antes de comenzar una eventual demostración de la posible propiedad descubierta.

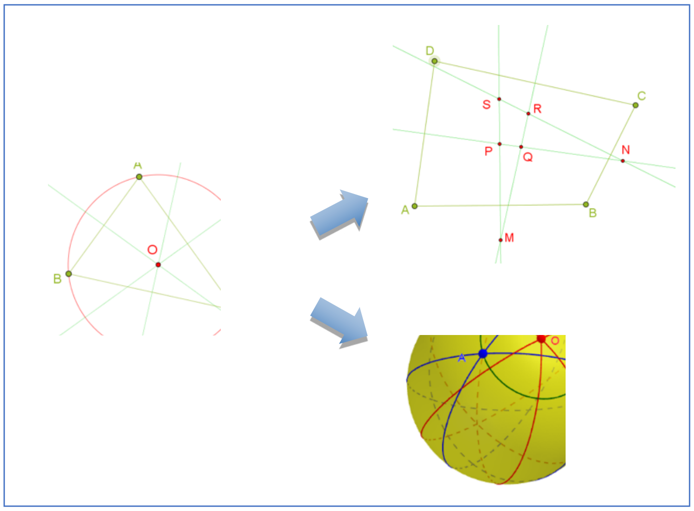


Figura 2. Dos intentos de extensión del teorema de las tres mediatrices de un triángulo

El planteo concluye con la etapa de *verbalización*. Con ello se sintetiza el proceso reflexivo en una forma rigurosa de comunicación matemática. Durante el proceso de búsqueda, la conjetura relacionada con la concurrencia de cuatro puntos puede conducir al siguiente enunciado de manera directa: ¿Bajo qué condiciones los puntos son concurrentes? (P, Q, R y S en la Figura 2). Sin embargo, cuando la búsqueda se apoya de procesos cognitivos más complejos, la reflexión puede conducir a un enunciado de orden superior en su nivel de complejidad y elaboración: Probar (o refutar) que los puntos son concurrentes sí y solo sí el cuadrilátero es cíclico.

Por este camino de razonamiento pueden salir a colación otros problemas, los cuales fueron identificados por los estudiantes: ¿Cuándo SQ es bisectriz del ángulo MSN? ¿Cuándo las rectas PR y MN son paralelas? ¿Cuándo el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo? ¿Cuáles puntos del conjunto $\{P, Q, R, S, M, N\}$ pueden estar alineados? ¿Bajo qué condiciones el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico? Esta última pregunta se vincula estrechamente al antiparalelismo de dos pares de rectas que se cortan: PS y QR que se cortan en M, respecto a QP y RS que se cortan en N.

Para dar continuidad a la sesión de planteo de problemas, el profesor realiza la siguiente pregunta heurística: —*¿Se podrán encontrar nuevos elementos en la figura? No necesariamente deben estar representados*. Con esta pregunta se trata de dirigir la atención hacia las amplias posibilidades de transformar el objeto, no solo al inicio sino también en las etapas subsiguientes del proceso. —*Observen que, en general, se obtiene un nuevo cuadrilátero. ¿Qué nuevos problemas se pueden encontrar?* Aquí se trata de concentrar los esfuerzos en el cuadrilátero $PQRS$. Durante el debate, uno de los estudiantes realizó la siguiente observación: —*¡Podemos repetir la idea del problema sobre el nuevo cuadrilátero!* En efecto, arribar a esta idea era uno de los objetivos de la conversación heurística, con el fin de aprovechar varios resultados asociados a la sucesión de cuadriláteros que se pueden obtener.

Un aspecto importante consiste en la naturaleza de la transformación señalada por el estudiante. La idea es un ejemplo genuino del ¿qué-si-más? de Kaput. Nuevamente, el razonamiento puede discurrir por las etapas de clasificación/asociación/búsqueda hasta llegar al planteo de nuevos problemas. Por ejemplo, realizando varias construcciones con GeoGebra, de modo que a cada nuevo cuadrilátero se le asocie otro más por intermedio de las mediatrices, el estudiante puede arribar a las siguientes conjeturas, las cuales son efectivamente válidas cuando el cuadrilátero original no es cíclico (*vid.* Radko y Tsukerman, 2012; Shephard, 1995):

- Los ángulos correspondientes de dos cuadriláteros consecutivos son suplementarios.
- El cuadrilátero original, el tercero, el quinto, y así sucesivamente todos los de índice impar en dicha sucesión son semejantes. Lo mismo ocurre con los de índice par.
- Cada sucesión anterior forma una especie de “espiral de cuadriláteros semejantes”, las cuales convergen en el mismo punto.
- El ángulo de rotación para cada espiral de semejanza es π cuando el cuadrilátero original es convexo, y 0 cuando es cóncavo.

La Figura 3 describe algunos de los caminos de razonamiento, conforme al proceso cognitivo SCABV+T. La saeta en rojo discontinuo ilustra la implementación de la estrategia ¿qué-si-más? en el marco de la transformación.

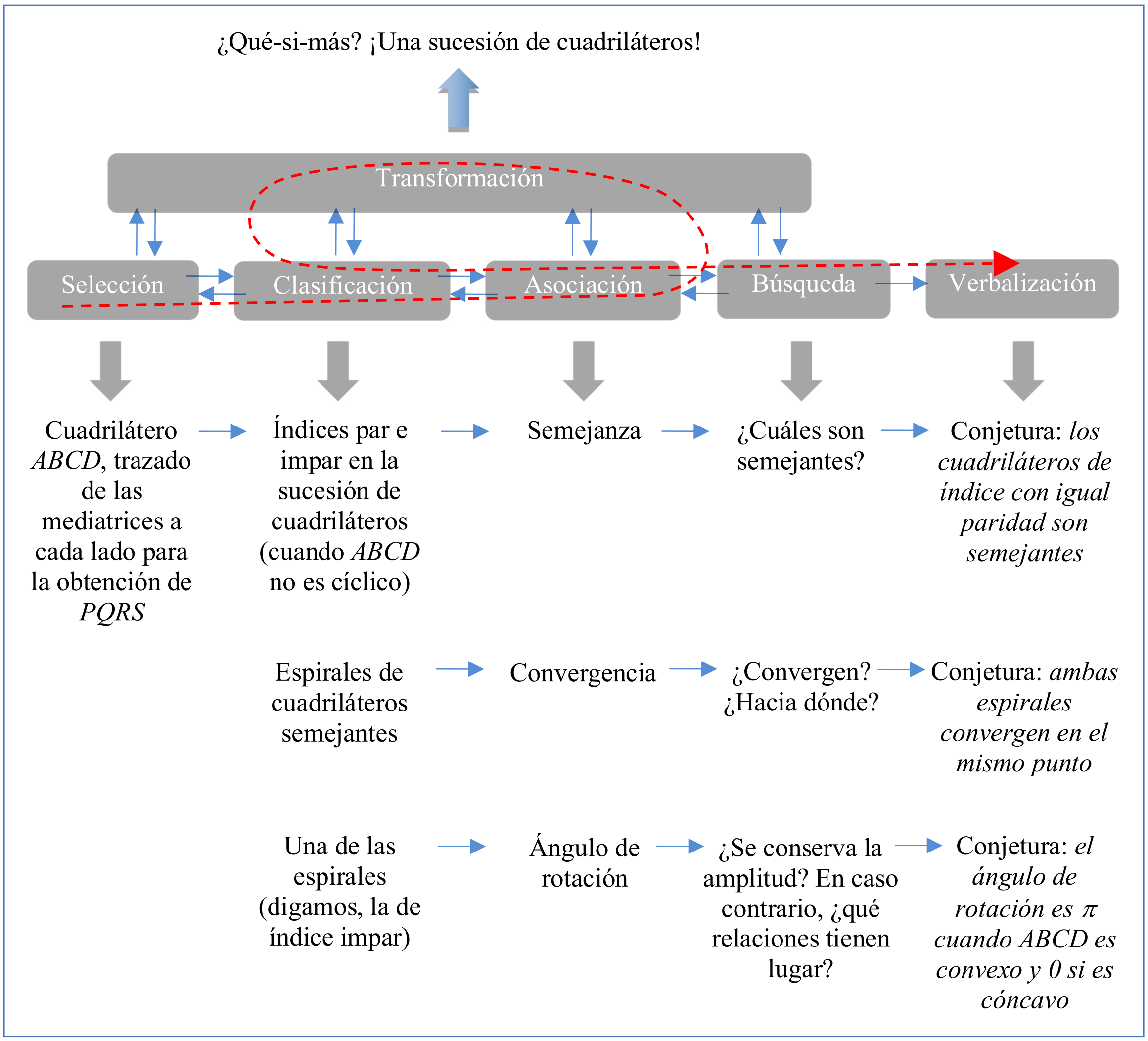


Figura 3. Nuevas conjeturas tras la implementación de la estrategia ¿qué-si-más?

Es importante resaltar la presencia de ciclos dentro del proceso cognitivo SCABV+T. Ya este hecho fue señalado por Brown y Walter (2005) y ha sido poco tratado en la literatura relacionada con el planteo de problemas. Aunque se trata de algo intuitivamente natural en el proceso de razonamiento matemático, las conexiones entre etapas no son completamente evidentes. En la experiencia didáctica aquí descrita, pueden observarse dos tipos de ciclos. En primer lugar, ciclos lineales (de tipo I) como la interacción entre las etapas de asociación/búsqueda. Ello ocurre cuando las propiedades o conceptos asociados a un componente, identificado dentro del objeto, no suscita alguna conjetura relevante para el individuo. En segundo lugar, ciclos no lineales (de tipo II) como el señalado en la Figura 3, donde la etapa de transformación enriquece el proceso de forma significativa. Las evidencias sugieren que el uso de GeoGebra contribuye a la activación de complejos mecanismos cognitivos asociados a ambos tipos de ciclos, con base en la movilidad de los objetos geométricos. Sin embargo, queda mucho por hacer en los órdenes teórico y empírico, a fin de comprender mejor la forma en que tales ciclos tienen lugar.

Conclusiones

El planteo de problemas constituye un campo emergente de la educación matemática, estrechamente ligado a los estudios sobre resolución de problemas. El presente trabajo ilustra una experiencia didáctica, en sesiones de análisis y discusión con pequeños grupos de estudiantes que se forman como futuros profesores de matemáticas. En el estudio se explora el razonamiento con base en el proceso cognitivo SCABV+T, mostrando su pertinencia por un camino predominantemente cualitativo. Con el ejemplo tratado, puede ejemplificarse la forma en que se interrelacionan las etapas, la existencia de ciclos de sendos niveles de complejidad, así como las relaciones estrechas con varias estrategias heurísticas descritas por otros autores.

El uso de GeoGebra no significa una condición necesaria para el planteo de nuevos problemas, sino un crédito favorable acerca de sus potencialidades para el desarrollo del pensamiento. Los recursos de movilidad permiten que este software de geometría dinámica se convierta en un catalizador de pensamiento creativo. Con economía de tiempo, son cuantiosas las ventajas que este paquete brinda para favorecer el planteo de nuevos problemas, principalmente por la intuición de conjeturas. En varias ocasiones, las conjeturas pueden descartarse moviendo elementos del objeto geométrico, o bien reafirmarse incluso para casos más generales (como ocurre con ciertas propiedades cuando el cuadrilátero descrito es no convexo).

Referencias bibliográficas

Abramovich, S. (2014). Revisiting mathematical problem solving and posing in the digital era: toward pedagogically sound uses of modern technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(7), 1034-1052. doi: 10.1080/0020739X.2014.902134

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. doi: 10.1080/01443410020043841

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The Art of Problem Posing*. New Jersey: Erlbaum.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralbatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 37(3), 149-158. doi: 10.1007/s11858-005-0004-6

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Mathematics Enthusiast*, 2(2), 125-143. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol2/iss2/6

Contreras, J. N. (2013). Fostering mathematical creativity through problem posing and modeling using dynamic geometry: Viviani's problem in the classroom. *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, 4(2), 66-72. http://journals.tc-library.org/index.php/matheducation/article/view/946/591

Cruz, M. (2002). *Estrategia Metacognitiva en la Formulación de Problemas para la Enseñanza de la Matemática*. Tesis doctoral no publicada. Holguín: Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero".

Cruz, M., & Álvarez, S. (2002). La formulación de problemas para la enseñanza de la Matemática. *Épsilon*, 52, 17-28.

Cruz, M. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. CIMT, University of Plymouth, United Kingdom. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, 17(2), 84-90. http://www.accefyn.org.co/rec

Daher, W., & Anabousy, A. (2018). Creativity of pre-service teachers in problem posing. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(7), 2929-2945. doi: 10.29333/ejmste/90994

Dillon, J. T. (1982). Problem finding and solving. *The Journal of Creative Behavior*, 16(2), 97-111. doi: 10.1002/j.2162-6057.1982.tb00326.x

Engel, A. (1987). The creation of mathematical Olympiad problems. *World Federation of National Mathematics Competition Newsletter*, 5, 18-28. www.wfnm.org/journal.html

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(1), 83-106. doi: 10.2307/749719

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2018). Variables de estudio para caracterizar las producciones de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1132-1138. http://clame.org.mx/uploads/actas/ALME31_No.2.pdf

Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (2016, Eds.). *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives*. Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3

Halmos, P. R. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524. doi: 10.2307/2321415

Hamilton, W. R. (1844). On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 29(192), 113-122. doi: 10.1080/14786444608645590

Kapur, M. (2017). Examining the preparatory effects of problem generation and solution generation on learning from instruction. *Instructional Science*, 46(1), 133-153. doi: 10.1007/s11251-017-9435-z

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R., & Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 149-161. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.11.002

Lavy, I., & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(1), 11-24. doi: 10.1016/j.jmathb.2009.12.002

Liouville, J. (1846). Œuvres mathématiques d'Évarist Galois. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 11, 381-384.

Nápoles, J. E., & Cruz, M. (2000). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. *Función Continua*, 8, 21-42.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1981). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. México: Trillas.

Radko, O., & Tsukerman, E. (2012). The perpendicular bisector construction, the isoptic point, and the Simson line of a quadrilateral. *Forum Geometricorum*, 12, 161-189. http://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201214.pdf

Salazar, L. (2018). Invención de problemas en un contexto de competitividad y cooperación: una experiencia con sumas de series. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(1), 215-222. http://clame.org.mx/uploads/actas/ALME31_No.1.pdf

Sharygin, I. (1991). ¿De dónde vienen los problemas? (en ruso; partes 1 y 2). *Quantum*, http://kvant.mccme.ru/1991/08/otkuda_berutsya_zadachi.htm

Shephard, G. C. (1995). The perpendicular bisector construction. *Geometriae Dedicata*, 56(1), 75-84. doi: 10.1007/BF01263614

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28. http://www.jstor.org/stable/40248099

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 293-309. doi: 10.2307/749366

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (2015, Eds.). *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3

Vinográdov, I. M. (1947). El método de las sumas trigonométricas en la teoría de los números (en ruso). *Trudy Math. Inst. Steklov*, 23, 3-109.

Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem. *Annals of Mathematics*, 141(3), 443-551. doi: 10.2307/2118559

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: a case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 101-118. doi: 10.1007/s10649-017-9760-9

PRINCIPIOS QUE CONSIDERAN LOS CATEDRÁTICOS AL ELABORAR PROBLEMAS MATEMÁTICOS

PRINCIPLES CONSIDERED BY PROFESSORS WHEN DEVELOPING MATHEMATICAL PROBLEMS

Roger Ivan Soto Quiroz
Universidad César Vallejo (Perú)
roger.soto@hotmail.com

Resumen
La presente investigación pretende describir los principios que consideran los docentes de una universidad al momento de elaborar problemas matemáticos. Esta es una investigación de enfoque cuantitativo, de nivel descriptivo, con diseño no experimental, de corte transversal, empleando la técnica de la encuesta y como instrumento el cuestionario, participaron en la investigación 60 docentes de matemática básica. Entre las conclusiones arribadas se tiene: (1) La mayoría de docentes tiene una tendencia a crear un nuevo problema teniendo como referencia un problema ya conocido, mientras que, un grupo pequeño elabora problemas tomando como guía una situación problemática dada, pero en general, los docentes no tienen el hábito de elaborar nuevos problemas, porque consideran que es más sencillo para ellos guiarse de un problema o situación ya conocida. (2) Un gran grupo de docentes le dedican poco tiempo a elaborar un problema. (3) La mayoría de docentes consideran que los problemas que elaboran toman en cuenta el interés y motivación de los estudiantes.

Palabras clave: principio docente, creatividad, problema matemático

Abstract
This investigation attempts to describe the principles that the professors of a university take into account when posing mathematical problems. This is a quantitative, descriptive research with a non-experimental, cross-sectional design, which used the survey technique and the questionnaire as a tool; including a sample of sixty teachers of basic mathematics in the study. Among the conclusions reached are: (1) Most teachers have a tendency to create a new problem having as reference a known one, while a small group elaborates problems taking as a guide a given problem situation, but in general, teachers are not in the habit of developing new problems, because they find it easier to go by a problem or situation already known. (2) A large group of teachers devote little time to elaborate a problem. (3) The majority of teachers consider that the problems they create take into account their students' interest and motivation.

Key words: teaching principle, creativity, mathematical problem

Introducción

Los docentes de matemática tienen como una de sus tareas principales la elaboración de problemas matemáticos, y para elaborarlos pueden emplear diversos principios, estos problemas pueden ser copia fiel de problemas que ya aparecen en los libros, pueden cambiar algunos datos o elementos del problema, o pueden crear problemas nuevos sobre casos reales (Malaspina, 2013), de la vida cotidiana, referente a la Carrera Profesional de los estudiantes, problemas únicos, propios, auténticos, originales, de tal manera que el problema elaborado por el docente sea de interés, motivación y utilidad para el estudiante, y que su resolución implique el desarrollo de diversas habilidades matemáticas por parte de los estudiantes universitarios, como la interpretación de textos, representación, cálculo de operaciones matemáticas, análisis, toma de decisiones, pensamiento crítico, argumentación, entre otros. El objetivo de la presente investigación es describir los principios que utilizan los docentes universitarios cuando elaboran problemas matemáticos.

Marco teórico

Se ha establecido evaluar cinco principios matemáticos que consideran los docentes al momento de elaborar problemas:

1) Principio de "creatividad del problema matemático", que tiene que ver con la originalidad, autenticidad, algo nuevo, propio, que caracteriza al problema. Así como refiere Alonso (2004) al sostener que la creatividad busca elaborar un producto original y de contexto. Existen diversas investigaciones que indican que es posible desarrollar la creatividad matemática en los docentes (Ayllón, Gómez & Ballesta, 2016; Malaspina, 2013; Campos, 2015). Asimismo, la teoría de la creatividad propone distintos niveles en las que se manifiesta: innovador, inventivo, productivo, expresivo, emergente (Torrance, 1998), en este estudio sería la creatividad del docente en el nivel inventivo. Por otro lado, Betancourt (2007) señala la importancia del aspecto psico-social para el desarrollo de la creatividad, por ello, la atmósfera en la que está inmerso el docente que puede ser favorable o no, motivador u hostil, creativo e innovador o rígido y tradicional, puede permitir el fomento o bloqueo de la creatividad de los docentes.

2) Principio de "estrategias utilizadas en la elaboración del problema", esto tiene que ver con el nivel de investigación que emplea el docente al momento de consultar las diversas fuentes de información, la organización en cuanto al tiempo empleado, nivel de manejo informático, búsqueda de noticias de actualidad o inventar casos creíbles. La estrategia del estudio de casos matemáticos consiste en identificar un problema real, simplificarlo, motivar a los estudiantes a que resuelvan el problema y que tomen decisiones; los docentes orientan a los estudiantes a que solucionen el problema, perfeccionen sus aptitudes, fortalezcan sus hábitos de estudio, amplíen sus conocimientos y como consecuencia de todo el proceso su aprendizaje sea eficaz (Sena, 2015).

3) Principio de "Contextualización del problema", que tiene que ver con la elaboración de problemas reales, de la vida cotidiana, de la carrera profesional de los estudiantes. Así como refieren Acosta y Morales (2013) al sustentar que, el problema matemático es contextualizado cuando está relacionado con la vida real. Del mismo modo, Elisondo, Donolo y Rinaudo (2009) sugieren que los docentes universitarios deben proponer actividades basadas en una situación concreta de resolución de problemas específicos.

4) Principio de "significatividad del problema para el estudiante", que tiene que ver con que, si el problema despierta el interés y curiosidad de los estudiantes, si toma en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes, si el problema es de utilidad práctica para ellos, o si el problema toma en cuenta sus intereses profesionales como su Carrera Profesional o personales como las redes sociales, en conclusión, que sea significativo para el estudiante. Este tercer principio se sustenta en el aprendizaje significativo, sosteniendo que, la esencia del proceso de enseñanza-aprendizaje es construir significados, es decir, relacionar la nueva información que el estudiante intenta aprender (conocimiento nuevo) con la información relevante que ya existe en su estructura cognitiva (conocimientos

previos); por ello, para el estudiante este aprendizaje debe tener significado, sentido, despertar su interés, ser aplicativo a su vida diaria, como consecuencia, no se olvidará de lo que aprendió (Alcaraz, 2002; Guerrero, 2014; Roig, 2009). Además, es importante tomar en cuenta "las características propias e idiosincrásicas de los alumnos si realmente queremos conseguir un aprendizaje significativo. En este sentido, se necesita contar con la motivación, las expectativas, necesidades e intereses del alumnado" (Roig, 2009, p.90). Los estudiantes motivados en aprender matemática disfrutan cuando realizan sus tareas, comprenden y buscan el conocimiento (Mueller, Yankelewitz y Muher, 2011).

5) Principio de "desarrollo de habilidades del razonamiento cuantitativo", Vergara, Fontalvo, Muñoz y Valbuena (2015) sustentan que, las habilidades matemáticas del razonamiento cuantitativo son: interpretación, representación, cálculo, análisis, comunicación y argumentación; para Zarzar (2015), el razonamiento cuantitativo está relacionado con habilidades de comparación, comprensión y obtención de conclusiones sobre cantidades; mientras que, para Rojas (2014), el razonamiento cuantitativo implica interpretar, representar, operar con cantidades y modelar situaciones de la vida diaria. La teoría de las competencias en educación sustentan que una competencia involucra tres componentes que son fundamentales en la formación de la persona humana y ellos son: conocimientos, habilidades y actitudes. En la educación universitaria se requiere de docentes que desarrollen competencias para ellos mismos y para sus estudiantes, por ejemplo, al momento de crear problemas matemáticos de contexto real, que se tomen su tiempo en la elaboración para que el problema sea auténtico, propio, original, de tal manera que cause motivación plena de los estudiantes al momento de resolverlos, puesto que, son acordes al contexto de su vida cotidiana o de su especialidad de estudio. Al respecto, De la Torre y Violant (2002) señalan que, el docente universitario es un profesional competente en la especialidad que enseña, que innova, crea, con dominio didáctico, capaz de que los estudiantes se motiven y logren aprender.

El propósito del estudio fue describir los principios que utilizan los catedráticos de una universidad de Lima Norte al elaborar problemas matemáticos, en la asignatura de matemática, del primer ciclo de estudios, en el año 2018.

La justificación teórica se fundamenta en la teoría del aprendizaje significativo, señalando que los problemas que elaboran los docentes de matemática deben ser significativos para los estudiantes, es decir que llame su atención, los motive, interese, que lo que aprendan les sirva para su vida cotidiana o carrera profesional. Asimismo, la teoría de las competencias en educación, sosteniendo que los problemas ayudan a descubrir conocimientos, desarrollar habilidades del razonamiento cuantitativo y fomentan valores morales a través del pensamiento crítico. También se considera la teoría de la creatividad y la teoría de la motivación que involucra tanto al docente como al estudiante.

La justificación práctica se sostiene en que, con los resultados de esta investigación se conocerán los principios de los docentes al momento de elaborar problemas matemáticos y el coordinador del curso con las autoridades de la universidad analizará si estos principios ayudan al logro de las competencias de la signatura de matemática.

Metodología

Es una investigación de enfoque cuantitativo, de nivel descriptivo, con diseño no experimental, corte transversal y método deductivo. La población estuvo conformada por 60 docentes de matemática básica. Se construyó como instrumento el cuestionario sobre principios para elaborar problemas matemáticos y fue respondido por los docentes universitarios. El instrumento fue sometido a validación de contenido por cinco expertos en el tema matemático, con un resultado de aplicabilidad. Para la confiabilidad se determinó el coeficiente de Alfa de Cronbach con resultado de 0,894 que se interpreta como una consistencia muy buena (García, 2012). Asimismo, para las cinco dimensiones: principio de "creatividad del problema" fue 0,825; principio de "Estrategias utilizadas para elaborar el problema" fue 0,837; principio de "contextualización del problema" fue 0,851; principio de "significatividad del problema para el estudiante" fue 0,836; principio de "desarrollo de habilidades de razonamiento cuantitativo" fue 0,861, interpretándose como una consistencia muy buena para todas las dimensiones. El cuestionario consta de 17 ítems, 3 ítems referentes al principio de creatividad, 5 de estrategias, 4 de contextualización, 3 de significatividad y 2 de razonamiento cuantitativo.

El principio de "creatividad del problema" tiene por finalidad descubrir si los docentes crean nuevos problemas a partir de un problema conocido o a partir de una situación dada, además, de averiguar si los problemas que elaboran son totalmente nuevos.

El principio de "Estrategias utilizadas para elaborar el problema" buscan encontrar información sobre el tiempo que emplean los docentes en elaborar el problema y que consideramos debe estar asociado con el tipo de problema que elabora. También, permite conocer sobre las fuentes de información que emplean para construir el problema, si el problema es sometido a evaluación de otros docentes, o si el problema se basa en la metodología de caso.

El principio de "contextualización del problema" pretende descubrir si los problemas son relacionados con la carrera profesional o no, si son problemas reales o no, si el problema es un tema de actualidad o no, y la temática que más utiliza en sus problemas.

El principio de "significatividad del problema para el estudiante" tiene relación con el interés, motivación y utilidad de los problemas para el estudiante.

El principio de "desarrollo de habilidades de razonamiento cuantitativo" tiene por objetivo descubrir las habilidades que más desarrollan los estudiantes cuando resuelven problemas elaborados por los docentes.

Se realizó el siguiente procedimiento de investigación:
Paso 1: Se revisó la literatura referente al tema investigado y se establecieron cinco principios.
Paso 2: Se construyó el cuestionario para la recolección de datos, se aplicó la validez y confiabilidad antes de aplicar el cuestionario a los docentes.
Paso 3: Se seleccionó la muestra.
Paso 4: Se procedió a aplicar el cuestionario a los docentes, en los ambientes de la universidad. Respondieron 17 ítems cerrados con una duración de 15 minutos como máximo.
Paso 5: Se presentaron los resultados descriptivos del estudio utilizando tablas y figuras. Paso 6: Se hizo la discusión de resultados contrastando con las investigaciones y con la teoría existente.
Paso 7: Se redactó las conclusiones.

Resultados

Los resultados referentes al primer principio sobre la "creatividad del problema matemático" indican que el 60% de docentes casi siempre crea un nuevo problema a partir de un problema conocido; el 40% casi siempre crea un nuevo problema a partir de una situación dada; el 53% a veces los problemas matemáticos que elaboran son totalmente nuevos.

Los resultados referentes al segundo principio sobre las "estrategias utilizadas en la elaboración del problema" señalan que el 53% de docentes, en promedio, demora menos de 30 minutos en elaborar un problema matemático; el 67% considera que los libros son su fuente de información más utilizada para elaborar problemas matemáticos; el 17% casi siempre para elaborar sus problemas matemáticos utiliza la metodología del caso; el 67% casi siempre utiliza el internet para elaborar sus problemas matemáticos; el 40% casi siempre el problema que elabora es sometido al juicio y apreciación de los demás docentes del Área de matemática al que pertenece.

Los resultados referentes al tercer principio relacionado con la "contextualización del problema" muestran que el 47% casi siempre los problemas que elaboran están relacionados con la Carrera Profesional de los estudiantes; el

73% normalmente los problemas que elaboran son reales y relacionados a la vida cotidiana; el 25% siempre cuando elabora un problema trata que sea un tema de actualidad; el 33% frecuentemente los problemas que elaboran están relacionados con temas de economía.

Los resultados referentes al cuarto principio que tiene que ver con la "significatividad del problema para el estudiante" revelan que para el 60% casi siempre los problemas matemáticos que elaboran, tratan que se adecúen a las motivaciones e intereses de los estudiantes; el 40% a veces los problemas que elaboran están relacionados con las redes sociales que utilizan los estudiantes; el 27% está de acuerdo con que un problema matemático sirve solo para mostrar su utilidad práctica en la vida cotidiana; el 47% está de acuerdo que sirve para llamar la atención de los estudiantes; el 67% está completamente de acuerdo que sirve como medio para enseñar y aprender matemática; el 40% está completamente de acuerdo que sirve para descubrir nuevas habilidades; el 47% está en desacuerdo que sirve únicamente para aplicar propiedades, fórmulas y realizar cálculos; el 67% está completamente de acuerdo que sirve como medio para desarrollar el pensamiento crítico y los valores morales. Mato y De la Torre (2010) sustentan que los docentes influyen en la formación de actitudes (negativas o positivas) hacia la matemática y también en la motivación hacia su estudio.

Los resultados referentes al quinto principio sobre el "desarrollo de habilidades del razonamiento cuantitativo" indican que para el 47% de docentes, los problemas que elaboran los diseñan para que el estudiante desarrolle las habilidades de interpretación, representación, cálculo, análisis y comunicación/argumentación; en cuanto a la prioridad de los problemas matemáticos elaborados por catedráticos que los estudiantes deberían resolver con mayor frecuencia, de mayor a menor, son: problema D con un 67%, problema C con un 47%, problema B con un 27%, problema A con un 40%.

La discusión de los resultados obtenidos en esta investigación se compara con otras investigaciones y se sustentan con los autores del marco teórico. Sobre el primer principio "creatividad del problema" es efectuado a través de dos formas: 1) Crear un nuevo problema a partir de un problema conocido (el 60% lo hace casi siempre). 2) Crear un nuevo problema a partir de una situación dada (el 40% lo hace casi siempre). Estas dos formas de creatividad tienen el sustento de Malaspina (2013), además de Campos (2015) y Alonso (2004) cuando argumentan que los problemas deben ser originales. Cambiar datos a un problema conocido es más sencillo y no demora tanto tiempo como crear un problema a partir de una situación contextual.

Los resultados del segundo principio "estrategias utilizadas en la elaboración del problema" indican que el 53% emplea menos de 30 minutos en elaborar un problema matemático, esto tiene relación con el resultado anterior que indica que la mayoría tiende a crear un nuevo problema a partir de un problema conocido. Para crear una situación problemática real o un problema caso se invierte mucho tiempo, puesto que hay que buscar bastante información, realizar ajustes y a veces adaptaciones académicas. Sobre la estrategia de búsqueda de información, el 67% emplea los libros e internet como su fuente principal; el 17% utiliza la metodología del caso; el 40% considera que el problema debe pasar por la apreciación de otros docentes. El problema caso parte de un problema real (Sena, 2015).

Los resultados del tercer principio referente a la "contextualización del problema" indican que para el 47% los problemas están contextualizados a la carrera profesional de los estudiantes, esto es importante puesto que el estudiante le encontrará aplicación de la matemática en situaciones relacionadas con su carrera. Por ejemplo, los que estudian contabilidad verán ejemplos como que "Hay que pagar una multa de 8% de la UIT (Unidad Impositiva tributaria) por manejar usando el celular", aportes del 18% por IGV (Impuesto general a las Ventas) cuando se compran productos o servicios, o los de ingeniería industrial cuando se les proponga problemas como "Existe el 5% de merma en la producción de textiles", los que estudian administración, marketing, economía, cuando se les proponga problemas relacionados a ofertas como "El segundo producto con 70% de descuento", promociones como "3x2 + 10% de descuento adicional" y descuentos sucesivos como "50% de descuento + 20% adicional", entre otros. Acosta y Morales (2013) argumentan que los problemas son contextualizados cuando se relacionan con la vida real. El 73% de docentes elaboran problemas reales y en relación con la vida cotidiana, mientras que el 25%

busca que el problema sea de actualidad y el 33% relaciona los problemas con la economía. Por ejemplo cuando los docentes proponen un problema sobre las elecciones presidenciales, es de la vida cotidiana y es noticia de actualidad, o cuando proponen problemas sobre variaciones porcentuales de los precios, de las exportaciones de productos, estos son temas de economía. Al respecto, Elisondo, Donolo y Rinaudo (2009) sustentan que los problemas deben ser situaciones concretas de resolución.

Los resultados del cuarto principio referente a la “significatividad del problema para el estudiante” indican que para el 60% los problemas que elaboran buscan despertar la motivación e interés del estudiante. De los resultados del segundo y tercer criterio que indican que los problemas son contextualizados, de la vida diaria, de su carrera profesional, entonces todo esto trae como consecuencia que los estudiantes se sientan motivados e interesados en resolver los problemas. El 40% propone problemas sobre redes sociales con la finalidad de motivar a los estudiantes. Al respecto, Alcaraz (2002); Guerrero (2014); Roig (2009) sustentan que los problemas deben desarrollar en el estudiante el aprendizaje significativo, lo que aprende debe tener significado, ser útil, ser de aplicación, provocar interés y motivación. Casis, Rico y Castro (2017) encontró como resultado de su investigación que, entre las tres categorías actitudinales (Motivación, autoconfianza y ansiedad), la motivación del estudiante hacia la matemática tiene más orientación positiva. Asimismo, Almonacid, Gutiérrez y Pullo (2017) encontraron que existe una falta de motivación e interés en la resolución de problemas matemáticos, con un 33.3% de estudiantes que tienen motivación mala. Otro resultado encontrado es que para el 67% los problemas sirven como medio para enseñar y aprender matemática, entendiéndose que los problemas el docente los utiliza como un recurso didáctico y los estudiantes como un medio para aprender matemática; el 67% considera que el problema sirve como medio para desarrollar el pensamiento crítico y los valores morales. Por ejemplo, el problema de elecciones presidenciales ayuda a desarrollar el pensamiento crítico con el tema de manipulación de datos en las encuestas, el problema de las multas por manejar en estado de ebriedad o usando el celular cuando se maneja, desarrollan en los estudiantes los valores como la responsabilidad. Roig (2009) sustenta que es importante contar con la motivación, las expectativas, necesidades e intereses del estudiante.

Los resultados del quinto principio referente al “desarrollo de habilidades del razonamiento cuantitativo” señalan que para el 47% los problemas que elaboran desarrollan cinco habilidades del razonamiento cuantitativo: la interpretación, representación, cálculo, análisis y comunicación-argumentación (Vergara, Fontalvo, Muñoz y Valbuena, 2015). El problema D es el que consideran que tiene mayor prioridad (67%), luego el problema C (47%), problema B y problema A. El problema D “Caso de estudio: Compra de departamento a través del crédito Mivivienda” es un problema real, con documentos reales emitidos por la misma constructora y banco se elaboró el problema; este problema desarrolla las cinco habilidades del razonamiento cuantitativo, integra temas de porcentajes, ecuación de primer grado, lectura e interpretación de tablas, toma de decisiones, entre otros. Los otros problemas A-B-C solo desarrollan las habilidades de interpretación, representación y cálculo. Zarzar (2015) sustenta el desarrollo de la comparación, comprensión y obtención de conclusiones sobre cantidades; Rojas (2014), sustenta el desarrollo de las habilidades como interpretar, representar, operar con cantidades y modelar situaciones de la vida diaria.

Conclusiones

La mayoría de docentes tiene una tendencia a crear un nuevo problema guiándose de un problema ya conocido, mientras que, un grupo pequeño elabora problemas tomando como referencia una situación problemática dada, pero en general, los docentes no tienen el hábito de elaborar problemas nuevos, dado que, es más fácil guiarse de un problema o situación ya conocida.

Gran parte de los docentes invierten poco tiempo en elaborar un problema (menos de 30 minutos), porque solo se guían de problemas ya conocidos, solamente le cambian datos a problemas que existen en los libros o en internet, mientras que elaborar problemas contextuales totalmente nuevos, originales, de actualidad o relacionado con su carrera profesional les demandaría mayor inversión de tiempo (3 horas, un día o más). Por ello que, la mayoría emplea los libros y el internet para elaborar sus problemas y estos generalmente no son sometidos a evaluación del coordinador u otro docente de matemática.

La mayoría de docentes consideran que los problemas que elaboran toman en cuenta el interés y motivación de los estudiantes, los docentes crean problemas que llamen su atención, que sean de utilidad práctica, que desarrollen sus habilidades matemáticas, promueven el pensamiento crítico, el razonamiento matemático, en suma que el aprendizaje del estudiante a través de la resolución de problemas sea significativo.

Referencias bibliográficas

Acosta, R. y Morales, A. (2013). Solución de problemas en un ambiente computacional fragmentado y en un ambiente computacional integrado. *Revista de Educación*, *361*, 330-357. doi:https://doi.org/10.4438/1988-592X-RE-2011-361-147

Alcaraz, F. (2002). *Didáctica y currículo: un enfoque constructivista*. España: Universidad de Castilla-La Mancha. Recuperado de https://books.google.com.pe/books?isbn=8484271609

Almonacid, M., Gutiérrez, L. y Pullo, N. (2017). *La motivación y el aprendizaje en el área de matemática* (Tesis de licenciatura). Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, Lima, Perú.

Alonso, J. (2004). *La educación en valores en la institución escolar: planeación-programación.* México: Plaza y Valdez.

Ayllón, M., Gómez, I. y Ballesta, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones, 4* (1), 169-218. Centro de Magisterio La Inmaculada, Granada, España. Universidad de Granada, Granada, España. doi: https://doi.org/10.20511/pyr2016.v4n1.89.

Betancourt, J. (2007). Condiciones necesarias para propiciar atmósferas creativas. *Revista PsicologiaCientifica.com*, *9*(20). Recuperado de http://www.psicologiacientifica.com/atmosferas-creativas-propiciar

Campos, A. (2015). *Implementación de un programa de creatividad matemática a través de resolución de problemas en educación primaria* (Tesis de pregrado). Universidad de Valladolid, España.

Casis, M., Rico, N. y Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA*, *11*(3), 181-203.

De la Torre, S. y Violant, V. (2002). Estrategias creativas en la enseñanza universitaria. *Creatividad y sociedad, 3,* 21-38. Recuperado de http://www.ub.edu/sentipensar/pdf/saturnino/estrategias_creativas_universitaria.pdf

Elisondo, R., Donolo, D. y Rinaudo, M. (2009). Ocasiones para la creatividad en contextos de educación superior. *Revista de Docencia Universitaria*. Recuperado de http://www.um.es/ead/Red_U/4/elisondo.pdf.

García, J. (2012). *Las universidades del siglo XXI. Un estudio comparativo en América Latina.* Lima: San Marcos.

Guerrero, M. (2014). *Metodologías activas y aprendizaje por descubrimiento. Las TIC y la Educación*. Marpadal Interactive Media S.L. Recuperado de https://books.google.com.pe/books?isbn=841587815X

Malaspina, U. (2013). La enseñanza de las matemáticas y el estímulo a la creatividad. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *63*, 41-49. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4370859

Mato, M. y De la Torre, E. (2010). Evaluación de las actitudes hacia las matemáticas y el rendimiento académico. *PNA*, *5*(1), 197-208.

Mueller, M., Yankelewitz, D. y Maher, C. (2011). Sense making as motivation in doing mathematics: Results from two studies. *The Mathematics Educator*, *20*(2), 33-43.

Roig, V. (2009). *Nuevas tecnologías de enseñanza-aprendizaje en la universidad*. España: Ediciones Universidad de Salamanca.

Rojas, C. (2014). *Razonamiento cuantitativo*. Barranquilla, Colombia: Universidad del Norte.

Sena. (2015). *Manual de estrategias de enseñanza aprendizaje.* Servicio Nacional de Aprendizaje, Medellín, Colombia. Recuperado de http://www.cepefsena.org/documentos/METODOLOGIAS%20ACTIVAS.pdf

Torrance, P. (1998). *Educación y capacidad creativa.* Madrid, España: Morova.

Vergara, J., Fontalvo, J., Muñoz, A. y Valbuena, S. (2015). Estrategia didáctica para el fortalecimiento del razonamiento cuantitativo mediante el uso de las TIC. *Matua*, *Revista del Programa de matemáticas*, *2* (2), 71-80. Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia.

Zarzar, C. (2015). *Métodos y pensamiento crítico 1*. México: Grupo Editorial Patria.

Anexo 1: Problema D.

Caso de estudio: Compra de departamento a través del crédito Mivivienda

Noboru es un psicólogo de 26 años, soltero, organizado, acostumbrado al ahorro, tiene un trabajo estable en una empresa donde trabaja 3 años y gana S/ 3500 mensuales según su boleta de pago. Noboru ha decidido comprarse un departamento en el "Condominio Los Girasoles" que construye la constructora VIVA G y M (Grupo Graña y Montero), además, quiere beneficiarse con los bonos que brinda el gobierno, por ello, presentó todos los documentos para acceder a un crédito Mivivienda y está esperando la respuesta de la "Financiera Efectiva" sobre su calificación. Los detalles económicos del departamento se muestran en la tabla 1.

Tabla 1. *Detalles económicos del departamento*

Detalles económicos del inmueble	Valor (en soles)
Valor del inmueble (V)	S/88565
Cuota inicial (CI)	…………
Bono del Buen Pagador (BBP)	…………
Bono de Vivienda Saludable (BVS)	…………
Monto del préstamo (M)	…………

Nota: La CI es equivalente al 10% del valor del inmueble. El BBP es otorgado por el fondo Mivivienda. El BVS o bono verde es ofrecido por el fondo Mivivienda, que promueve el cuidado del medioambiente en las construcciones inmobiliarias, llega hasta el 4% del valor del crédito hipotecario (monto del préstamo) utilizado para costear un inmueble. El BVS es de grado 2.

Tabla 2. Grado y valor del BVS

Grado	Financiamiento	Valor BVS (Como % del financiamiento)
Grado 1	Hasta S/140 mil	4%
	Más de S/140 mil	3%
Grado 2	Todos los que cumplan	4%

Nota: BVS significa Bono de Vivienda Saludable o también llamado bono verde.

Tabla 3. *Valor de vivienda y su correspondiente BBP*

Valor de vivienda	Bono del Buen Pagador (BBP)
Desde S/56700 hasta S/81000	S/17000
Mayor a S/81000 hasta S/121500	S/14000
Mayor a S/121500 hasta S/202500	S/12500
Mayor a S/202500 hasta S/300000	S/6000
Mayor a S/300000	No aplica. Sin subsidio.

Nota: Estos valores corresponden al nuevo esquema Mivivienda a partir del 24 de junio del 2017.

Noboru está contento, dado que “Financiera Efectiva” lo calificó positivamente y le otorgará el préstamo. Ayúdale a Noboru a encontrar el valor del monto del préstamo.

Según el perfil de Noboru, ¿qué decisión crees que tomará sobre la elección del plazo del crédito? Justifique su respuesta numéricamente.

Tabla 4. *Valor de la cuota mensual y plazo del crédito*

Cuota	Plazo del crédito
S/862,60	10 años
S/708	15 años
S/640	20 años

Nota: La cuota de pago siempre será la misma ya que la tasa de interés es fija y en soles.

Escriba una conclusión y justifíquela.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

EL CONOCIMIENTO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA SOBRE LAS DEMOSTRACIONES EN PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

MATHEMATICAL PRACTICE KNOWLEDGE ON DEMONSTRATIONS IN MATHEMATICS TEACHERS IN INITIAL TRAINING

Christian Alfaro Carvajal, Pablo Flores Martínez, Gabriela Valverde Soto
Universidad Nacional (Costa Rica), Universidad de Granada (España), Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
cristian.alfaro.carvajal@una.cr, pflores@ugr.es, gabriela.valverde@ucr.ac.cr

Resumen
El trabajo tiene como objetivo caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración. Es una investigación en curso que consta de una fase teórica y tres fases empíricas. En la fase teórica, se desea precisar el significado de las demostraciones matemáticas mediante el análisis conceptual y en las fases empíricas, caracterizar el conocimiento sobre los aspectos lógicos, sintácticos y matemáticos de las demostraciones y determinar cuáles son las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas mencionados. Se espera aportar al conocimiento de la práctica matemática de la demostración y brindar insumos para la formación inicial de profesores de matemáticas.

Palabras clave: formación de profesores, demostración matemática, MTSK

Abstract
This work is aimed at characterizing the knowledge of mathematics teachers in initial training with respect to the mathematical practice of demonstration at the National University of Costa Rica. It is an ongoing research that consists of a theoretical phase and three empirical phases. In the theoretical phase, we want to specify the meaning of mathematical demonstrations through conceptual analysis; and in empirical phases, to characterize knowledge about the logical and syntactic aspects of the demonstrations; to characterize knowledge about the mathematical aspects of the demonstrations; and to determine which characteristics of the mathematical arguments are the most convincing ones to the aforementioned mathematics teachers. It is expected to contribute to the knowledge of the mathematical practice of the demonstration and provide inputs for the initial training of mathematics teachers

Key words: teacher training, mathematical demonstration, MTSK

Introducción

La demostración es un tema relevante dentro de la Educación Matemática. Para Hanna y De Villiers (2011) existen seis grandes temas para comprender la enseñanza de las demostraciones: *(1) el desarrollo cognitivo de la demostración, (2) la argumentación, (3) software de geometría dinámica y experimentación, (4) la demostración en el currículo (5) la naturaleza de la demostración en el aula* y *(6) la demostración en el nivel terciario o universitario.* En el caso de la demostración en el currículo se considera relevante la investigación sobre el conocimiento que los maestros y profesores requieren para enseñar demostraciones de manera efectiva.

Existen dos posiciones claramente diferenciadas sobre la enseñanza de las demostraciones en la educación secundaria: como un contenido específico o como un estándar de proceso. En países como Francia, Alemania y Japón la demostración es considerada en sus programas de estudios como un contenido explícito de enseñanza, de este modo, el programa establece lo que se debe aprender y los libros de texto tienen capítulos dedicados a la enseñanza de la demostración. En otros países como Italia y los Estados Unidos la demostración es tomada en cuenta en sus programas de estudio de una forma implícita e informal, particularmente en los Estados Unidos es vista como un proceso que debe integrarse mediante el contenido matemático específico (Cabassut et al., 2011).

Según la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) los programas de estudio de todos los niveles educativos deben favorecer en los estudiantes los procesos de razonamiento y demostración como elementos fundamentales de las matemáticas, para ello, deben promoverse actividades tales como formular e investigar conjeturas, desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones en donde se escojan y utilicen diferentes métodos de demostración y tipos de razonamientos.

Para el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012), en el programa de matemática de la educación secundaria la demostración forma parte del proceso denominado *razonar y argumentar*. La palabra proceso hace referencia a actividades cognitivas que una persona puede realizar en las diferentes áreas matemáticas consideradas en dicho programa: *números, geometría, medidas, relaciones y álgebra y; estadística y probabilidad*. El proceso de razonar y argumentar corresponde a actividades mentales que involucran la deducción, la inducción, la comparación analítica, la generalización, las justificaciones, los ejemplos, contraejemplos y la demostración. La argumentación se debe promover paulatinamente, primero de forma verbal, luego de forma escrita y posteriormente de manera simbólica. De igual manera, se deben introducir de manera gradual las diferentes formas de razonamiento hasta lograr procesos más formales y el uso de la deducción.

El profesor de matemática debe promover que los estudiantes se familiaricen con el sentido de la demostración matemática, para ello, debe realizar demostraciones de algunos teoremas y solicitar a los estudiantes que realicen demostraciones sobre algunos resultados matemáticos. La demostración es considerada como una fase formal de la argumentación y tiene un papel relevante en la formulación de conjeturas. Una vez que los estudiantes han formulado una conjetura se deben trabajar tres etapas: en la primera se debe hacer la verificación en casos particulares, en una segunda etapa los estudiantes deben proponer un argumento que justifique la validez de la conjetura y finalmente, en una tercera etapa deben realizar la demostración (MEP, 2012).

Independientemente de la forma en la que se aborden las demostraciones matemáticas en un currículo de la educación secundaria, como contenido o como proceso, los docentes deben tener un conocimiento profundo sobre el contenido de las mismas, es decir, deben poseer un conocimiento específico sobre qué es una demostración matemática y el por qué una demostración matemática es válida (Cabassut et al., 2011; Lin et al., 2011).

Realizar demostraciones a sus estudiantes y promover que ellos las hagan es una tarea altamente demandante para el profesor de matemáticas que exige un sólido conocimiento del contenido sobre las demostraciones matemáticas, pero también pueden tener influencia en su práctica profesional las concepciones que tenga sobre las mismas (Knuth, 2002).

Esta investigación tiene como principal objetivo caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la práctica matemática de la demostración. Para esta caracterización se utilizará el subdominio denominado *conocimiento de la práctica matemática* que forma parte del modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)*. Este subdominio corresponde al conocimiento que tiene el profesor sobre lo que significa demostrar, justificar, definir, deducir e inducir. Incluye el conocimiento del fundamento lógico de cada una de las prácticas anteriores y el del uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo. En este subdominio se hace referencia a las formas de producción y del funcionamiento de las Matemáticas (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2013).

Específicamente en la práctica matemática de la demostración en los profesores de matemática en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica interesa indagar sobre tres elementos fundamentales: *(1) el conocimiento sobre la validez lógica de la demostración matemática, (2) el conocimiento sobre la validez matemática de las demostraciones y (3) las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas.* Los dos primeros elementos están asociados al conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática y el tercero a la convicción.

Con respecto a la naturaleza de la demostración matemática algunas investigaciones han evidenciado que los profesores de matemáticas identifican de manera correcta un argumento válido, pero también aceptan argumentos inválidos como demostraciones. Por otra parte, los criterios utilizados por los profesores para evaluar un argumento difieren mucho entre sí, no obstante, existen algunos elementos comunes como los esquemas simbólicos o rituales, la forma del argumento, las manipulaciones algebraicas utilizadas, entre otros. Además, los profesores encuentran que un argumento es convincente por factores tales como el uso de ejemplos concretos, la referencia visual y no necesariamente su validez lógico-matemática (Cabassut et al., 2011).

Marco teórico

El análisis conceptual

De acuerdo con Rico (2001) una problemática en los procesos de investigación surge en el planteamiento de un marco teórico mal definido en el cual se presenten términos o conceptos de manera errónea y con poca precisión. La multiplicidad de significados de los conceptos centrales propuestos en un marco teórico puede suponer una dificultad si no se hace una precisión de los mismos. Es por esto que "el análisis conceptual ofrece un método que permite al investigador convertir los conceptos en piezas teóricas precisas para el estudio que quiere llevar a cabo" (Rico, 2001, p.185). Se define el análisis conceptual como "un método para trabajar y profundizar los conceptos, una técnica de escrutinio para conseguir precisión y domino en su uso" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 8).

Modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK)

El MTSK es un modelo teórico que permite caracterizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y un instrumento metodológico para analizar las diferentes prácticas del profesor de matemáticas mediante sus categorías. Se consideran dos grupos fundamentales de conocimiento o dominios: *(1) el conocimiento matemático* que hace referencia al conocimiento que posee el profesor sobre las matemáticas como una disciplina científica, pero en un contexto escolar y *(2) el conocimiento didáctico del contenido* que refiere sobre los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza – aprendizaje (Aguilar et al, 2014).

Knowledge of practices of mathematics (KPM): el conocimiento de la práctica matemática

Este subdominio forma parte del conocimiento matemático y hace referencia a las formas de tratar con las matemáticas. Se considera relevante el conocimiento sobre la definición, la demostración y la argumentación que muestren la comprensión de lo que es una definición y qué elementos la constituyen o cuándo se ha realizado una demostración o cuándo una línea de razonamiento es válida. En este subdominio se encuentran las siguientes categorías: demostrar, definir, ejemplificar y usar heurísticos (Carreño et al., 2013; Flores-Medrano, 2015).

El conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones

En esta categoría se incluyen las ideas de argumentación, justificación y validación debido a la similitud que tienen en cuanto a su carácter de convencimiento, aunque diferentes en cuanto al uso de los criterios de verdad. Se considera importante el conocimiento sobre la naturaleza de las demostraciones, los esquemas de demostración y las funciones atribuidas (Flores-Medrano, 2015).

Para caracterizar el conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones, en esta investigación se considerarán tres categorías principales que se han construido con base en trabajos anteriores sobre la demostración en profesores de matemáticas: *(1) el conocimiento sobre la naturaleza de las demostraciones matemáticas*, *(2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración matemática* y *(3) la convicción* (Flores-Medrano, 2015; Knuth, 2002).

A continuación, se detallan cada una de las categorías mencionadas anteriormente.

(1) El conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática: es el conocimiento sobre lo que constituye una demostración matemática. Se consideran las siguientes subcategorías:

> *(a) el concepto de demostración matemática* que refiere al conocimiento del profesor de matemática sobre lo que es una demostración matemática y lo que significa demostrar algo en las matemáticas (Flores-Medrano, 2015).
>
> *(b) la validez lógica* que refiere al conocimiento del profesor sobre cómo proceder en demostraciones de afirmaciones matemáticas que involucran de forma implícita o explícita las conectivas lógicas *(y, o, si-entonces, no)* y los cuantificadores existencial y universal. Además, se considera el uso correcto de las reglas de inferencia, de las equivalencias lógicas y de los métodos de demostración matemática (Durand, Boero, Douek, Epp y Tanguay, 2011).
>
> *(c) la validez matemática* que refiere al conocimiento del profesor sobre la condicionalidad y la generalidad de los teoremas en la teoría matemática en la que se insertan, además del uso consciente de las definiciones de dicha teoría lo que le permite evaluar la demostración de los teoremas en función de los axiomas, de otros teoremas y de las definiciones pertinentes de la teoría matemática empleada en dicha demostración. Es el conocimiento que le permite poder evaluar la generalidad de una demostración en función de los elementos de la teoría matemática empleada y de este modo determinar la validez en general del teorema demostrado en dicha teoría (Cabassut et al., 2011).

(2) El conocimiento sobre las funciones de la demostración matemática: es el conocimiento sobre cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas. Se consideran las siguientes subcategorías propuestas por De Villiers (1993*):*

> *(a) la verificación:* la demostración se considera como la máxima autoridad para asegurar la validez de una afirmación matemática. Se considera que detrás de cada teorema hay una secuencia de transformaciones lógicas para obtener la conclusión a partir de las hipótesis asumidas. Sin embargo, una demostración lógico-formal no es un garante de convicción.

(b) la explicación: la demostración brinda las razones por las que una afirmación matemática es verdadera. Esta función es importante para comprender las razones que hacen verdadero a un resultado evidente de manera intuitiva o por evidencia cuasi-empírica.

(c) la sistematización: la demostración permite organizar varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, definiciones y teoremas lo que favorece la identificación de inconsistencias, verifica y simplifica teorías matemáticas y brinda una visión global sobre una temática que favorece sus aplicaciones en diferentes campos.

*(d) el descubrimiento***:** la demostración es un método de exploración, análisis, descubrimiento e inventiva, que permite descubrir nuevos resultados los cuales serían difíciles de determinar de forma intuitiva o con procesos cuasi-empíricos. Un ejemplo de esta función es el descubrimiento de las geometrías no euclidianas al modificar el postulado de las paralelas.

(e) la comunicación: la demostración permite divulgar los resultados a los diferentes miembros de la comunidad científica: matemáticos, profesores, alumnos, entre otros. Debido a la complejidad del conocimiento matemático, se deben generar procesos de negociación subjetiva de significados de los temas involucrados de manera que las argumentaciones sean aceptables. Esta función comunicativa expone las demostraciones a la sanción pública que permite refinar, simplificar, modificar y hasta refutar los resultados presentados.

(3) La convicción: se refiere a las razones por las que los profesores de matemáticas encuentran convincente a un argumento matemático. Un argumento para validar una afirmación puede asumir varias formas diferentes y ser convincente, aunque no necesariamente sea una demostración (De Villiers, 1993; Hanna, 2002). Se consideran las siguientes categorías basadas en los trabajos de Knuth (2002) y Harel y Sowder (1998):

(a) el uso de elementos concretos en el argumento: el argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual.

(b) la familiaridad del argumento: el argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de matemáticas con el argumento.

(c) el nivel de detalles en el argumento: el argumento es convincente debido a que justifica con mucho detalle cada paso realizado en él.

(d) la forma ritual del argumento: el argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo. De esta manera, se juzga el valor del argumento en función del uso de notaciones matemáticas simbólicas, aunque lo expresado no tenga validez lógica o matemática.

(e) el nivel explicativo del argumento: el argumento es convincente porque explica por qué la afirmación que se está demostrando es verdadera. Es decir, muestra las matemáticas subyacentes que explican la validez del resultado.

(f) la validez del argumento: la convicción se basa en la validez matemática y la validez lógica del argumento. En el argumento se utilizan correctamente las reglas de inferencia, las equivalencias lógicas, los métodos de demostración y la teoría matemática correspondiente.

Marco metodológico

La investigación consta de una fase teórica y tres fases empíricas que se detallan a continuación:

(1) La fase 0: consiste en un estudio teórico para precisar el significado de la demostración matemática. Para dicho estudio se emplea el análisis conceptual como metodología de investigación. Específicamente se quiere profundizar sobre el concepto, su origen y desarrollo histórico, los tipos de demostración, las funciones atribuidas, los diferentes esquemas de las demostraciones matemáticas, además de realizar un estudio sobre diferentes demostraciones de dos resultados clásicos en matemáticas: la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y la suma de los ángulos internos de un triángulo en la geometría euclidiana que servirán de insumos para el planteamiento de argumentos en las fases empíricas 2 y 3. Para ello se propone hacer una revisión bibliográfica en diccionarios, libros de texto, investigaciones previas y el Programa de Estudios de Matemática de la educación secundaria costarricense.

(2) La fase 1: consiste en un estudio empírico para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la subcategoría denominada *validez lógica* la cual forma parte de la primera categoría del conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones llamada *el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática.* Para dicho estudio se aplicarán dos cuestionarios, uno sobre las formas de proceder en la demostración de proposiciones matemáticas en función de su estructura lógica y sintáctica y otro para la evaluación de argumentos matemáticos en donde lo central son los elementos lógicos de la demostración.

(3) La fase 2: es un estudio empírico para caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre la subcategoría denominada *validez matemática* la cual forma parte de la primera categoría del conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones llamada *el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática.* Para ello, se aplicará un cuestionario para que los sujetos evalúen argumentos correctos desde el punto de vista lógico, en donde lo central sea el análisis de la demostración en función del uso de los axiomas, teoremas o definiciones del área matemática en la que se inserta.

(4) La fase 3: es un estudio empírico para determinar cuáles son las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica. Este estudio está fundamentado en la tercera categoría del conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones llamada *la convicción***.** En esta fase se aplicará un cuestionario en donde se presenten argumentos matemáticos para que sean evaluados por los sujetos de investigación y determinen cuáles les convencen más y porqué razones.

Para la *fase 0* la técnica para la recolección de la información es la revisión bibliográfica o de literatura. De acuerdo con Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista (2014) esta revisión "implica detectar, consultar y obtener la bibliografía (referencias) y otros materiales que sean útiles para los propósitos del estudio, de donde se tiene que extraer y recopilar la información relevante y necesaria para enmarcar nuestro problema de investigación" (p.61).

Para el análisis de la información de las fases empíricas se hará uso del análisis de contenido. Los propósitos de este análisis incluyen la codificación de preguntas abiertas en encuestas, cuestionarios, la revelación del enfoque de asuntos individuales, grupales, institucionales y sociales, y la descripción de patrones y tendencias en el contenido comunicativo. Este análisis implica codificación, categorización (creación de categorías significativas en las que se pueden ubicar las unidades de análisis - palabras, frases, oraciones), comparación (categorías y creación de vínculos entre ellas) y conclusión - extraer conclusiones teóricas de las unidades de análisis (Cohen, Manion, y Morrison, 2007).

Las respuestas de los profesores de matemáticas en formación inicial se codificarán en códigos externos, los cuáles son generados a priori por los investigadores y que corresponden a las categorías indicadas en el marco teórico sobre la práctica matemática de las demostraciones. Posteriormente, mediante un enfoque más inductivo se generan códigos internos a medida que se examinan los datos y se observe la necesidad de nuevos códigos para categorías emergentes.

Resultados

En esta investigación se ha realizado el análisis conceptual de la demostración matemática, para ello, se hizo una revisión y sistematización del concepto de demostración, su origen y desarrollo histórico, los tipos de demostración, las funciones atribuidas, los esquemas de demostración y diferentes demostraciones sobre la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y sobre el teorema de la suma de los ángulos internos del triángulo en la geometría euclidiana. Se han precisado con mayor claridad las categorías y subcategorías de lo que en esta investigación se ha denominado *el conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones.* Se están elaborando los cuestionarios de las fases empíricas los cuales serán aplicados a los sujetos de investigación en el periodo de setiembre-noviembre de 2018 y marzo-junio de 2019.

Conclusiones

Se considera importante caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre la práctica matemática de la demostración para determinar si dicho conocimiento y las concepciones sobre la demostración matemática están en concordancia con las exigencias del currículo nacional e internacional de matemáticas de la educación secundaria. De esta manera, esta investigación pretende aportar al conocimiento de la práctica matemática sobre la demostración y a la vez brindar insumos para el abordaje de la demostración en la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. En este sentido Knuth (2002) sugiere que los profesores de matemática en formación inicial deben experimentar la demostración matemática en sus cursos de formación como una herramienta significativa para el estudio y el aprendizaje de las matemáticas, las experiencias a las que sea expuesto en su formación inicial pueden aportar favorablemente al desarrollo de su conocimiento profesional en esta área.

Referencias bibliográficas

Aguilar, A., Carmona, E., Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero, D., Zakaryan, D. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Miguel_Montes/publication/267392675_Un_marco_teorico_para_el_Conocimiento_especializado_del_Profesor_de_Matematicas/links/544e6bd40cf29473161bde8f.pdf

Cabassut, R.; Conner, A.; İşçimen, F. A.; Furinghetti, F.; Jahnke, H. N. y Morselli, F. (2011). Conceptions of proof– In research and teaching. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Dordrecht: Springer. Doi: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á., & Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. *Proceedings of the CERME, Turkey, 8*, 2976-2984.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). Research Methods in Education (sixth edition). London: Routledge.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2011). Examining the role of logic in teaching proof. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

Flores-Medrano, E. (2015). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En Carrillo, J., Contreras, L y Montes, M (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* 2, (pp. 30-34). Huelva, España.

Hanna, G., & De Villiers, M. (2011). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Dordrecht: Springer. Recuperado de https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-94-007-2129-6

Hanna, G. (2002). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer. Doi https://doi. org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Recuperado de http://math.ucsd.edu/~harel/publications/Downloadable/Students'%20Proof%20Schemes.pdf

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6.a edición). México: McGRAW-HILL.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/pdf/4149959.pdf?refreqid=excelsior%3A3130897e8847df8383552edfbe28c44e&seq=1#page_scan_tab_contents

Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D., y Stylianides, G. (2011). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 327-346). Dordrecht: Springer. Doi https:// doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_14

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica: autor Recuperado de https://mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Thales.

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática.* España: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes. uniandes.edu.co/523/1/RicoL01-2593.PDF

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.1-22). Granada: Comares, S. L.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PERCEPCIONES SOBRE EL NIVEL DE DESARROLLO DE LA COMPETENCIA INVESTIGATIVA EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

PERCEPTIONS ON THE LEVEL OF DEVELOPMENT OF THE INVESTIGATIVE COMPETENCE IN THE INITIAL TRAINING OF TEACHERS

Alberto Jesús Iriarte Pupo, Samuel González-Arizmendi
Universidad de Sucre, Universidad de Córdoba (Colombia)
albertoiriarte4@yahoo.es, sarismendiarache@yahoo.es

Resumen
En este artículo se darán a conocer los resultados de una investigación, cuya pretensión fue describir las percepciones que tenían sobre el nivel de desarrollo de la competencia investigativa, los estudiantes de sexto semestre (2016-1) de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre - Colombia. El tipo de investigación fue descriptivo, con un diseño transversal. Entre los resultados obtenidos, se evidencia que los estudiantes perciben tener fortalezas en las dimensiones: formulación de propuestas investigativas e identificación del problema susceptible a investigar. Por otro lado, los estudiantes afirman que presentan mayores debilidades al momento de realizar el análisis, interpretación y socialización de los resultados obtenidos, así como para utilizar pertinentemente las diferentes metodologías de investigación. Como conclusión se resalta que el trabajo realizado en las diferentes Prácticas Pedagógicas Investigativas (PPI), aporta al desarrollo de la competencia investigativa de manera notable.

Palabras clave: formación inicial, investigación formativa, competencia

Abstract
This article shows the results of an investigation which is intended to describe the perceptions that the six-semester students (2016-1) of the Degree in Mathematics had, about the level of development of the research competence, at the University of Sucre in Colombia. It was a descriptive- type research, with a cross-sectional design. Among the results obtained, it is evident that students perceive having strengths in the dimensions: formulation of research proposals and identification of the problem susceptible to investigation. On the other hand, the students affirm that they present major weaknesses when making the analysis, interpretation and socialization of the obtained results; as well as to use properly the different research methodologies. To sum up, it is highlighted that the work carried out in the different Pedagogical Investigative Practices, (PIP), contributes to the development of the investigative competence in a remarkable way.

Key words: initial training, formative research, competence

Introducción

Las discusiones sobre formación inicial de docentes se han convertido en un tema recurrente en las últimas cinco décadas (Amankwah, Oti-Agyen y Kwame, 2017; Martínez, Martínez, Soler y Prada, 2015; Zabalza, 2013). De igual manera, los problemas que subyacen en la formación inicial, tales como la precaria investigación formativa, la confusión conceptual del saber pedagógico, y la poca aplicabilidad de las competencias del saber hacer y del ser, han sido estudiados ampliamente (Parra, 2007; Sayago, 2002; Shukshina, Gorshenina, Buyanova, y Neyasova, 2016).

Este interés por conocer tales problemáticas que se presentan durante este proceso de formación, permite generar diferentes tensiones planteadas al respecto, tanto a nivel internacional, como nacional y regional, en donde se destacan, entre otras, las propuestas presentadas por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura – UNESCO (1998, 2004, 2006), como son: implementar la formación de investigación formativa por medio de la investigación de aula, por parte de los formadores de nuevos docentes, con la idea que estos se familiaricen con tales procesos.

Por su parte, las políticas de formación de maestros expresadas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en Colombia, apuntan a que los futuros educadores, adquieran "a su vez una formación en investigación educativa para la realización de lecturas analíticas y propositivas sobre la realidad, las mismas que lo movilizan a la configuración de propuestas educativas pertinentes a las condiciones contextuales colombianas" (MEN, 2013, p. 74). Así también, en las pruebas para *ingreso* a la carrera magisterial y de *evaluación anual de desempeño*, que deben presentar los docentes y directivos docentes del sector oficial colombiano, se establecen criterios que evalúan lo referente a la competencia investigativa (MEN, 2008).

Ahora bien, en el contexto de la Universidad de Sucre, se ha venido implementando, desde el año 2007, en la Licenciatura en Matemática, una línea de formación denominada Práctica Pedagógica Investigativa (PPI), en la que se articulan los presupuestos de la investigación formativa, con las competencias a desarrollar en la práctica docente. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos por desarrollar las competencias pertinentes al campo de la investigación educativa, en los futuros maestros, persisten diferentes problemas.

Entre los problemas encontrados, se destacan: presencia de dificultades de redacción en los diferentes semestres; falta de claridad sobre la utilización de normas para presentar trabajos escritos; dificultad para plantear problemas de investigación; dificultad para plantear objetivos investigativos; problemas con el planteamiento de los diseños metodológicos, que sean coherentes con los objetivos planteados; problemas de coherencia y pertinencia, en el planteamiento de los referentes teóricos y conceptuales. Por otra parte, lo anterior presupone una escisión entre la teoría y la práctica investigativa, así como la desarticulación entre la práctica pedagógica y la práctica investigativa (Cura, 2010; Ortiz y Suárez, 2009; Saker, 2014).

De acuerdo a lo anterior, la presente investigación estuvo orientada, a *describir las percepciones que tienen los estudiantes de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre acerca del nivel de desarrollo de la competencia investigativa*. Los hallazgos de este estudio pueden contribuir significativamente a mejorar los procesos de formación, a partir de la identificación de algunos vacíos percibidos por ellos como actores principales del proceso de aprendizaje.

Para lograr el objetivo planteado, se realizó una investigación de tipo descriptivo, de corte transversal. La muestra estuvo conformada por treinta estudiantes que estaban cursando el VI semestre en el año 2016. Para indagar sobre la percepción, se utilizó un cuestionario que constó de una serie de afirmaciones tipo escala de Likert. Asimismo, se realizó una entrevista no estructurada a cinco de los participantes, para complementar el análisis.

Marco referencial: Percepción y desarrollo de la competencia investigativa

En cuanto al constructo *percepción*, se encuentra que la noción sobre la palabra, se deriva de la locución latina *perceptio*, la cual describe tanto la acción como el efecto de percibir, es decir de tener la capacidad para recibir mediante los sentidos tanto imágenes, como impresiones o sensaciones externas, que permiten conocer y comprender el mundo circundante (Barahona y Medina, 2015).

Según los teóricos de la Gestal, el proceso perceptivo, es fundamental para la actividad mental, suponen a su vez que otras habilidades cognitivas y metacognitivas como el aprendizaje, la memoria, el pensamiento, entre otras, dependen de un buen funcionamiento del proceso de organización perceptual (Oviedo, 2004). Así también, Barahona y Medina (2015, citando a Merleau-Ponty), comentan que para el autor "el mundo de la percepción es aquel que nos revelan nuestros sentidos y la vida que hacemos, a primera vista parece ser el mejor que conocemos, ya que no se necesitan ni instrumentos, ni cálculos para acceder a él" (p. 83). Lo cual es acertado y pertinente, para la investigación actual.

A su vez, en el presente estudio, se entiende por investigación formativa aquella que busca formar a los estudiantes en procesos investigativos, con el fin de ir adquiriendo una cultura, que les permita llevar a cabo actividades investigativas donde se incorpore la lógica y se apliquen disimiles métodos de investigación, sin que ello conlleve a desarrollar proyectos completos o el hallazgo de nuevos conocimientos (Restrepo, 2008).

Por tanto, simular los procesos de investigación articulados con la práctica pedagógica, a partir de la formulación de los problemas reales inmersos en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar, para ser estudiados, analizados, comprendidos y resueltos de manera metódica y sistemática, tal y como se haría en el proceso científico, permitirá desarrollar diferentes competencias docentes, en particular la investigativa. A su vez, accediendo a confrontar y afrontar de manera pertinente los problemas que se les presenten, en su ulterior quehacer profesional. Desde esta perspectiva Freire (2006) apunta lo siguiente:

> No hay enseñanza sin investigación ni investigación sin enseñanza. Esos quehaceres se encuentran cada uno en el cuerpo del otro. Mientras enseño continúo buscando, indagando. Enseño porque busco, porque indagué, porque indago y me indago. Investigo para comprobar, comprobando intervengo, interviniendo educo y me educo. Investigo para conocer lo que aún no conozco y comunicar o anunciar la novedad.
>
> Hoy se habla, con insistencia, del profesor investigador. En mi opinión lo que hay de investigador en el profesor no es una calidad o una forma de ser o de actuar que se agregue a la de enseñar. La indagación, la búsqueda, la investigación, forman parte de la naturaleza de la práctica docente. Lo que se necesita es que el profesor, en su formación permanente, se perciba y se asuma, por ser profesor, como investigador. (p. 30)

Para el pensador latinoamericano, la investigación en el docente debe ser inherente, entendiéndola como un elemento constitutivo de su naturaleza. A su vez Artigue (2011), citando a Kilpatrik, comenta que en el campo de la educación, cada generación de docentes debe realizar sus indagaciones con el fin de aportar de manera pertinente, las respuestas o soluciones de los problemas históricos-contextuales que en ella se vislumbren. Por ende, el llamado a que las nuevas generaciones de maestros consoliden competencias investigativas, que le permitan transformar su práctica, en atención a los requerimientos culturales y sociales del contexto, es preponderante.

Es de resaltar que uno de los intereses que presenta la investigación en educación matemática, tiene que ver con lo referente a las prácticas de formación del profesorado y sus consecuencias (Artigue, 2011; Llinares, Krainer y Brown, 2014). De esta manera Artigue (2011) argumenta que "los conocimientos adquiridos en este campo, a su vez, han impactado substancialmente nuestra visión de las relaciones entre investigación y práctica" (p. 4).

En relación con la definición del término competencia, Posada (2008) afirma que este es diverso y pluridimensional, en el cual se interrelacionan creencias, valores, actitudes, aptitudes, conocimientos, potencialidades, habilidades, entre otras, que permiten al ser humano aprender y desempeñarse en diferentes escenarios y contextos. De esta forma, la competencia investigativa se alcanza a comprender como: la unificación dinámica del saber y el saber hacer con los recursos intelectuales, motivacionales, actitudinales, valorativos de los individuos, en función de un comportamiento investigativo exitoso. Esta competencia, alcanza a desarrollarse a través de un proceso curricular, desde donde se busque conectar la institucionalidad escolar con la vida cotidiana, lo teórico y lo práctico, la formación inicial y el ejercicio profesional, por lo cual, la investigación se considera el eje transversal de todos ellos (Delgado, 2012).

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, se determina que, en el presente estudio, la competencia investigativa es una de las diferentes competencias que debe desarrollar un docente en formación. De ahí que, la noción de competencia investigativa, este íntimamente ligada al concepto de investigación formativa (Restrepo, 2008). Así también, que el desarrollo de la competencia investigativa le permitirá al futuro profesional de la educación "la construcción del conocimiento científico acerca del proceso pedagógico en general y del proceso de enseñanza-aprendizaje en particular, con el propósito de solucionar eficientemente los problemas en el contexto de la comunidad educativa escolar" (Cabrera, 2006, p. 7).

Metodología

El enfoque de la investigación es cuantitativo. La metodología utilizada para el desarrollo del estudio es de tipo descriptivo, debido a que se busca caracterizar las propiedades y las particularidades de las percepciones que poseen los estudiantes de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre, sobre el nivel de desarrollo de la competencia investigativa. Es decir, únicamente se pretende medir y recoger información de manera independiente sobre las dimensiones que conforman dicha competencia (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). El diseño es de tipo transversal descriptivo, estos "tienen como objetivo indagar la incidencia de las modalidades o niveles de una o más variables en una población" (Hernández et al, 2014, p. 155), recolectando información en un tiempo único.
Los participantes del presente estudio fueron estudiantes de la Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre, que cursaban en el año 2016 el VI semestre de la carrera (Tabla 1). Quienes, además, ya han visto por cuatro semestres la asignatura de Práctica Pedagógica Investigativa (PPI) y que estuvieron trabajando la PPI V, en el semestre cursado en el momento que se realizó esta investigación. Cabe decir que, la muestra escogida fue intencional.

Tabla 1. Datos demográficos.

Tabla de contingencia género * edad			
Género	Edad		Total:
	17 – 19	20 – 22	
Femenino	7	5	12
Masculino	7	11	18
Total:	14	16	30

Fuente: Iriarte y González-Arizmendi (2016).

Para indagar sobre la percepción, se utilizó un cuestionario que consta de una serie de afirmaciones tipo escala de Likert, con cinco opciones de respuestas que van de 1 (Nunca-ninguno) a 5 (Siempre); con este se pretendió obtener información en cuanto a la percepción que tienen los docentes en formación, sobre el nivel de desarrollo de su competencia investigativa. Asimismo, se realizó una entrevista no estructurada a cinco de los participantes, para complementar el análisis.

El instrumento de recolección de datos, se denominó cuestionario de *Indagación de la Competencia Investigativa en Docentes en Formación* (ICIDF). El cual consta de 21 ítems, relacionados con cuatro dimensiones: identificación del problema susceptible a investigar; formulación de propuestas investigativas; utilización de metodologías pertinentes; y realización de análisis, interpretación y socialización de resultados. Dichas dimensiones, se relacionan de manera directa con lo expresado por Ayala (citado por Paz, Estrada, Chinchilla y Valladares, 2016) y por Oropeza, Mena y Soto (2014).

Ahora bien, con el fin de validar el contenido, se envió el cuestionario inicial a tres expertos (Licenciados en Matemática con Maestría en Educación), quienes dieron recomendaciones de forma sobre cada ítem evaluado. Además, la fiabilidad se constató mediante el estadístico Alfa de Cronbach, que dio como resultado 0.871, mostrando de esta manera, la confiabilidad del instrumento utilizado. El proceso de análisis de los datos se realizó utilizando el software especializado SPSS versión 21.

Resultados

Los resultados se presentan para cada una de las dimensiones evaluadas, y se examinan desde las percepciones de los estudiantes, en atención a los puntajes medios obtenidos. Se inicia dicho examen, con el resultado más alto, finalizando con el más bajo. El análisis de cada dimensión, de acuerdo a los promedios, permite detectar qué desempeños obtienen puntuaciones más altas y cuáles las más bajas, posibilitando de esta manera, intervenir en el proceso de formación, en aquellos que dicen los estudiantes, que presentan debilidades relativas al desarrollo de la competencia investigativa.

Dimensión formulación de propuestas investigativas

De acuerdo al análisis que se muestra en la Tabla 2, los estudiantes perciben que tienen fortalezas en cuanto a los desempeños siguientes: trabajar en equipo; comprender el significado, la importancia y las implicaciones de la investigación educativa en la práctica pedagógica; lee, analiza e interpreta investigaciones sobre temas afines a su investigación.

Ahora bien, entre los desempeños menos valorados se encuentran: dominar la teoría de la investigación en matemática educativa y planificar el sistema de tareas investigativas que permitan conducir adecuadamente el proceso de la investigación. Es posible que lo antes expuesto, se deba a la complejidad existente en cuanto a los disimiles procesos investigativos que son preponderantes en esta sociedad globalizada (Artigue, 2011).

Tabla 2. Promedio simple de la dimensión formulación de propuestas investigativas.

ÍTEM	DESEMPEÑO	MEDIA	DESV
5	Determina acertadamente el o los objetivos de investigación.	3,60	,724
11	Comprende el significado, la importancia y las implicaciones de la investigación educativa en la práctica pedagógica	4,03	,850
14	Posibilita el trabajo en Equipo	4,20	,805
19	Domina la teoría de la investigación educativa.	3,27	,583

20	Planifica el sistema de tareas investigativas que permitan conducir adecuadamente el proceso de la investigación	3,37	,809
21	Lee, analiza e interpreta investigaciones sobre temas afines a su investigación	4,03	,809
	MEDIA DE LA DIMENSIÓN TOTAL	3,78	

Fuente: Iriarte y González-Arizmendi (2018).

Dimensión identificación del problema susceptible a investigar

De acuerdo al análisis que se muestra en la Tabla 3, los estudiantes perciben que tienen fortalezas en cuanto al siguiente desempeño: buscar investigaciones que le sirvan de antecedentes investigativos respecto a la propuesta realizada. Es decir, manejan procesos de gestión del conocimiento: identificar, seleccionar, filtrar, organizar, almacenar, crear, compartir y usar el conocimiento. Es de anotar que la desviación típica obtenida en cuanto a este ítem, es la más alta del conjunto evaluado (0,9). Lo que se interpreta, como una heterogeneidad en la respuesta de los estudiantes.

Por otro lado, se encuentran entre las puntuaciones más bajas los siguientes desempeños: reconocer contextos de aprendizaje que le posibiliten construir sentido y favorecer diferentes formas de interacción con el conocimiento matemático; y lo referente a caracterizar y diagnosticar la muestra investigativa. Es importante aclarar que los estudiantes deben aprender a leer los diferentes contextos educativos, en atención a que esta actividad, “permite una comprensión de lo que sucede y una reconstrucción histórica destinada a arrojar claridad sobre ese presente” (Cusel, Pechin y Alzamora, 2007, p. 1). Lo cual, es sumamente significativo al momento de realizar una investigación.

Tabla 3. Promedio simple de la dimensión identificación del problema susceptible a investigar.

ÍTEM	DESEMPEÑO	MEDIA	DESV
4	Determina de manera eficiente problemas susceptibles a investigar de la realidad escolar.	3,67	,844
10	Busca investigaciones anteriores que le sirvan de antecedentes investigativos respecto a la propuesta realizada.	4,13	,900
12	Interpreta, analiza, describe contextos y reflexiona acerca de situaciones problémicas propias de la matemática escolar.	3,67	,802
13	Reconoce contextos de aprendizaje que le posibiliten construir sentido y favorecer diferentes formas de interacción con el conocimiento matemático.	3,40	,675
17	Caracteriza y diagnóstica la muestra investigativa.	3,63	,718
	MEDIA DE LA DIMENSIÓN TOTAL	3,70	

Fuente: Iriarte y González-Arizmendi (2018).

Dimensión realización de análisis, interpretación y socialización de resultados

De acuerdo a lo antes planteado, y en atención a las respuestas dadas por los estudiantes (Tabla 4), estos perciben que tienen fortalezas en la aplicación de los instrumentos, procesamiento e interpretación de los datos obtenidos.

Sin embargo, en cuanto a esta dimensión en particular, los estudiantes expresan que tienen dificultades a la hora de elaborar el informe investigativo. Dichas dificultades se corroboran en la revisión de los informes de investigación, en donde prevalecen problemas de redacción, tales como: falta de coherencia inter y entre párrafos; falta de cohesión global o por capítulos del informe; problemas de redundancia. En este caso, se debe prestar atención a la dinámica institucional de promoción de las habilidades de escritura.

Tabla 4. Promedio simple de la dimensión realización de análisis, interpretación y socialización de resultados.

ÍTEM	DESEMPEÑO	MEDIA	DESV
2	Respeta la propiedad intelectual	3,73	,785
3	Sabe elaborar informes precisos que permitan divulgar los resultados de la investigación.	3,40	,563
9	Sabe elaborar el informe investigativo con coherencia y claridad	3,33	,758
15	Comprende el lenguaje investigativo o el que utiliza la misma ciencia para comunicarse y posibilitar la apropiación y transmisión de conocimientos	3,30	,651
18	Sabe aplicar los instrumentos, procesa e interpreta la información que arrojan.	4,23	,728
	MEDIA DE LA DIMENSIÓN TOTAL	3,60	

Fuente: Iriarte y González-Arizmendi (2018).

Dimensión utilización de metodologías pertinentes

La percepción que tienen los estudiantes después de ver cuatro PPI, es que aún tienen dificultades marcadas a la hora de seleccionar el método adecuado al proceso de investigación (Tabla 5). Así también, dicen tener problemas al momento de elaborar una propuesta de intervención, que les permita solucionar (o aproximarse a una solución posible) el problema didáctico o pedagógico encontrado. En este sentido se corrobora lo planteado por Cura (2010), quien enfatizó sobre la escisión profunda, existente entre los aspectos teóricos trabajados en la formación inicial de maestros, y la práctica pedagógica e investigativa realizada por los mismos.

Tabla 5. Promedio simple de la dimensión utilización de metodologías pertinentes.

ÍTEM	DESEMPEÑO	MEDIA	DESV
1	Sabe realizar el proceso deductivo o inductivo necesario para analizar las vías de solución a los problemas y/o para acercarse a respuestas anticipadas.	3,37	,556
6	Selecciona los métodos de investigación adecuados al diseño teórico planteado y teniendo en cuenta el carácter social de la investigación que se realiza.	3,27	,640
7	Sabe aplicar los métodos de investigación seleccionados.	3,50	,731

8	Elabora correctamente los instrumentos que concretizan los métodos empíricos.	3,53	,776
16	Elabora una propuesta metodológica para solucionar el problema científico detectado.	3,20	,610
	MEDIA DE LA DIMENSIÓN TOTAL	3,37	

Fuente: Iriarte y González-Arizmendi (2018).

Conclusiones

La competencia investigativa en los docentes en formación es considerada en la actualidad una competencia fundamental, debido a los cambios profundos que se han generado en la sociedad y por ende en la educación (Aular, Marcano y Moronta, 2009; Cabrera, 2006; Canaca, 2011; Murillo y Perines, 2017). En el presente trabajo se sigue apostando a la tesis del docente investigador (Artigue, 2011; Restrepo, 2008), o del docente transformativo (Giroux, 1997). Lo que implica, defender que el docente, puede realizar ejercicios investigativos (desde la investigación formativa), que le permitan la transformación de su práctica.

Por lo tanto, esta disertación, coadyuva a demostrar que es posible formar desde el pregrado (formación inicial), la competencia investigativa. Si bien, en el presente estudio, solo se indagó sobre la percepción que tienen los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Sucre, sobre el nivel de desarrollo de dicha competencia, es claro que esta fotografía, permite saber cuáles son los desempeños, que expresan los estudiantes, tener mayores fortalezas y debilidades. De acuerdo con ello, también se analizó, el aporte brindado por la estrategia adoptada por la Universidad de Sucre, desarrollada por medio de las diferentes prácticas pedagógicas investigativas (PPI), en lo correspondiente a formar docentes investigadores o transformativos.

La identificación de la percepción que tenían los estudiantes, en cuanto al nivel de desempeño en las diferentes dimensiones de la competencia investigativa, fue evaluada por medio del instrumento denominado *Indagación de la Competencia Investigativa en Docentes en Formación* (ICIDF). Las dimensiones valoradas fueron cuatro, las cuales responden a dos modelos teóricos planteadas por Ayala (citado por Paz, Estrada, Chinchilla y Valladares, 2016) y por Oropeza et al (2014).

De acuerdo con el análisis de los resultados, los estudiantes expresan tener mayores fortalezas en la dimensión *formulación de propuestas investigativas*, y mayores debilidades en la dimensión *utilización de metodologías pertinentes*. En este aspecto, la discusión se da con respecto a lo expuesto por Cura (2010) y Ortiz y Suárez (2009), quienes expresan que en la formación inicial de docentes, sigue existiendo una desarticulación entre los aspectos teóricos con la ejecución de la práctica, tanto pedagógica como investigativa. En este sentido, los resultados del presente estudio, dan cuenta de posibles desarrollos de la competencia investigativa, en atención a los ejercicios teórico-prácticos realizados por los estudiantes, en el proceso curricular y didáctico llevado a cabo en las diferentes PPI.

Es necesario seguir abordando este tipo de investigaciones, por medio de otros enfoques metodológicos, que profundicen sobre aspectos complementarios, tales como: observación de la práctica pedagógica; entrevistas a docentes en formación; entrevistas a profesores y directivos de la Universidad, sobre el alcance de las diferentes prácticas pedagógicas investigativas, entre otros.

De lo anterior, y atendiendo a los resultados del presente estudio, se dilucida que la estrategia llevada a cabo por la Universidad de Sucre, permite disminuir la escisión entre la teoría y la práctica. En este aspecto, es fundamental la labor de los docentes formadores, quienes deben comprender y apropiarse de los lineamientos trazados por la Universidad, para de esta forma apoyar, por medio de la aplicación de estrategias didácticas adecuadas, el desarrollo de la competencia investigativa. Es claro entonces, que se deben seguir implementado estrategias diferenciales y pertinentes, que posibiliten reforzar el ejercicio llevado a cabo, en el proceso de formación investigativa.

Por otro lado, se necesita que los docentes orienten y acompañen a los estudiantes en el desarrollo de la competencia de escritura, la cual es base para mejorar la dimensión *realización de análisis, interpretación y socialización de resultados*. Hay que entender que este proceso, no solo es de los profesores que orientan talleres o asignaturas vinculadas con las competencias lingüísticas, sino de todos aquellos que hacen parte de la formación de los futuros docentes, a lo largo de la carrera.

Las percepciones de los estudiantes apuntan a la importancia y preponderancia, asumidas en cuanto al desarrollo de la competencia investigativa. Este tipo de competencia, que se considera actualmente como transversal en la formación inicial de maestros, permite que los docentes en formación, desarrollen habilidades en pro de transformar su práctica pedagógica cuando el contexto así lo requiera.

Ahora bien, se puede concluir además, que el análisis de las percepciones que tienen sobre el nivel de desarrollo de la competencia investigativa, los estudiantes de Licenciatura en Matemática de la Universidad de Sucre, otorga una visión general, y brinda la posibilidad de seguir insistiendo en la articulación entre la teoría y la práctica, tanto pedagógica, como investigativa.

Dicha articulación, a su vez, se conjuga con las diferentes estrategias didácticas, que ponen en marcha los formadores de docentes, en los eventos de clases. Estas estrategias, articuladas con la apuesta de la Universidad de Sucre de formar un docente investigador, por medio de la transversalización de la práctica pedagógica investigativa (PPI), han dado como resultado un progreso sostenido de los diferentes desempeños vinculados a la competencia investigativa.

Referencias bibliográficas

Amankwah, F. Oti-Agyen, Ph. y Kwame, F. (2017). Perception of Pre-Service Teachers' Towards the Teaching Practice Programme in College of Technology Education, University of Education, Winneba. *Journal of Education and Practice*. 8(4), 13-20.

Artigue, M. (2011). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (11), 43-59.

Aular, J., Marcano, N. y Moronta, M. (2009). Competencias investigativas del docente de educación básica. *Laurus,* 15(30), 138-165. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/761/76120651007.pdf.

Barahona, J. y Medina, E. (2015). Percepción de los docentes y estudiantes hacia el proceso enseñanza-aprendizaje de la investigación en la Facultad de Ingeniería, Ciudad Universitaria, 2014. *Revista Portal de Ciencias*, 8, 77-91.

Cabrera, E. (2006). *La competencia investigativa del Profesor General Integral de Secundaria Básica en su formación inicial*. Ciego de Ávila. Cuba. Monografías.com. Recatado de http://www.monografias.com/trabajos38/competenciainvestigativa/competencia-investigativa2.shtml

Canaca, G. (2011). *Competencias investigativas en la formación del pedagogo y su uso en el ejercicio profesional* (tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional Autónoma de Honduras, Ciudad Universitaria, Tegucigalpa, M.D.C

Cura, O. (2010). *La articulación entre teoría y práctica en la formació*

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

LA CONTEXTUALIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA DEL CUADRADO DE BINOMIO: UN ESTUDIO DE CASO CON PROFESORES CHILENOS

CONTEXTUALIZATION IN THE TEACHING OF THE SQUARE OF A BINOMIAL: A CASE STUDY WITH CHILEAN TEACHERS

Carlos Andrés Ledezma Araya, Manuel Cuevas León
Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
carlos.ledezma.a@mail.pucv.cl, mcuevasleon@gmail.com

Resumen
El objetivo de este trabajo fue estudiar la contextualización, por parte de los profesores, en la enseñanza del cuadrado de binomio, para el cual se realizó una revisión bibliográfica sobre el tema estudiado, y se analizó el tratamiento de dicha identidad notable en los textos escolares de primer año de educación media (14 a 15 años). Enmarcado en la metodología del estudio intrínseco de casos, se diseñó un cuestionario aplicado a 14 profesores de matemática de la Región de Valparaíso (Chile), cuyo análisis evidenció una escasez de contextualizaciones en la enseñanza del cuadrado de binomio en su praxis educativa.

Palabras clave: contextualización, cuadrado de binomio

Abstract
The aim of this work was to study the contextualization in the teaching of the square of a binomial, by mathematics teachers. To carry out this study, we made a bibliographical review on the topic, and analysed the treatment of this notable identity in the textbooks of first year of secondary education (14 to 15 years old). Framed in the methodology of the intrinsic case study, a questionnaire was designed and applied to 14 mathematics teachers from the Region of Valparaíso (Chile). Its analysis evidenced a lack of contextualization in the teaching of the square of a binomial in its educational praxis.

Key words: contextualization, square of a binomial

Introducción

Las identidades notables son productos que, por cumplir con ciertas reglas, no requieren más que de una expresión algebraica predefinida para su resolución. De acuerdo con el currículo educativo chileno vigente, su estudio se inicia en el nivel primer año medio (14 a 15 años), donde el objetivo de aprendizaje del eje Álgebra y Funciones propone "desarrollar los productos notables de manera pictórica y simbólica […] aplicándolos a situaciones concretas" (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2016, p. 119), iniciando con el cuadrado de binomio.

Sin embargo, Núñez y Font (1995) plantean que tanto los elevados niveles de abstracción como de generalización de los conceptos matemáticos, contribuyen como posibles razones que dificultan el aprendizaje en la asignatura, a lo que López, Moreno y Souza (2011) complementan con la idea de que los exámenes tienden a enfocarse hacia desarrollos y procedimientos en vez de contextualizaciones claras y significativas que motiven el aprendizaje del estudiante. Sustentado en lo anterior, y en nuestra práctica educativa cotidiana, es que en este estudio nos interesamos por abordar el tema de la contextualización en la enseñanza de un determinado objeto matemático, planteando como problemática de este estudio que la contextualización, por parte de los profesores, en la enseñanza del cuadrado de binomio a sus estudiantes, puede ser escasa o dificultosa en su praxis.

Para esta investigación se ha propuesto como objetivo estudiar la contextualización, por parte de los profesores, en la enseñanza del cuadrado de binomio, buscando dar respuesta a la pregunta ¿cómo contextualizan los profesores el cuadrado de binomio para su enseñanza en primer año de educación media (14 a 15 años)?

Indagación bibliográfica

Para este estudio se realizó una revisión de la literatura especializada, considerando, por una parte, investigaciones sobre ciertas dificultades asociadas al aprendizaje de los productos notables; y por otra, aquéllas que abordan la importancia de la contextualización en la enseñanza de los objetos matemáticos.

Una de las posibles causas que explican las dificultades y errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra guarda relación con lo que declaran Herscovics y Linchevski (1994), sobre el ritmo y el enfoque formalista con el que son enseñados los contenidos dentro de la asignatura, los que –a su vez– descuidan la conexión con los constructos pre-algebraicos desarrollados por los estudiantes durante su educación primaria, provocando lo que los autores denominan como "una 'brecha' cognitiva […] entre aritmética y álgebra" (p. 63).

En su estudio sobre dificultades de los productos notables, Méndez (2008) plantea que "los alumnos tienen sus propias concepciones acerca de su funcionamiento y ponen en obra modelos de acción espontáneos y persistentes cuando resuelven estos ejercicios" (p. 59), identificando los siguientes casos de resolución errónea para el cuadrado de binomio.

Tabla 1. *Errores en la resolución del cuadrado de binomio*

Acción del estudiante	Resolución
Elevar a 2 la parte literal	$(5x-4)^2=(5x)^2-(4)^2=5x^2-16$
Elevar a 2 sólo los números	$(5x-4)^2=(5x)^2-(4)^2=25x-16$

Fuente. Adaptado desde Méndez (2008).

Al respecto, la autora explica este fenómeno relacionándolo con la lectura que el alumno realiza en el registro algebraico de dichos ejercicios, obstaculizando el modelo de acción pertinente que debiese poner en juego (Méndez, 2008). Estas dificultades y errores repercuten no sólo en el aprendizaje de los estudiantes, sino que además en que la matemática se considere como una asignatura que no entusiasma, siendo rechazada por tildarse de difícil o carente de un posterior uso en la vida (Ruiz, 2008).

Por su parte, en un análisis efectuado a los textos de estudio utilizados en el sistema educativo chileno, se evidenció que el tratamiento de los productos notables no se aleja de las representaciones algebraica y geométrica en su enseñanza, desde que son introducidos como contenido hasta que son trabajados en ejercicios.

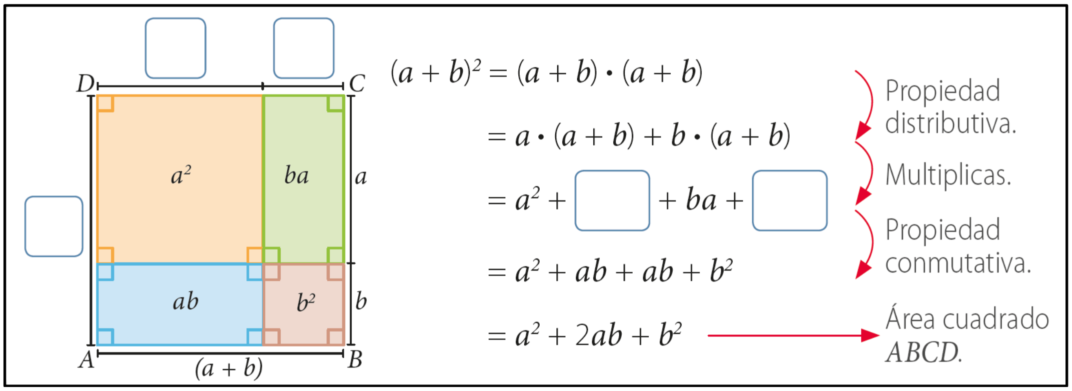


Figura 1. Introducción del cuadrado de binomio en un texto de estudio chileno. Extraído desde Galasso, Maldonado y Marambio (2016, p. 74).

Considerando que los textos de estudio son recursos utilizados en el aula de forma regular, representan a su vez un soporte para la praxis de los profesores, para quienes la búsqueda y elección de problemas adecuados a las tendencias actuales, lineamientos curriculares y enfoques didácticos, pasa a ser un gran desafío (Aparisi y Pochulu, 2013).

Una manera muy utilizada para acercar y vincular el contenido matemático a la realidad ha sido a través de los métodos de enseñanza-aprendizaje que aborden la resolución de problemas de la vida, y de este modo, ayuden a eliminar el rechazo a la matemática, llevándola a la práctica en aplicaciones con otras áreas de estudio, fortaleciéndose así el vínculo interdisciplinar (Ruiz, 2008). En respaldo a lo anterior, es que el trabajo matemático contextualizado en realidades concretas permite conseguir tanto la significatividad y funcionalidad de los contenidos aprendidos, como el desarrollo de procesos mentales como la abstracción y la generalización (Núñez y Font, 1995).

En atención a la descontextualización de la enseñanza de la matemática, han surgido propuestas de clases que abordan dicha problemática desde el plano de la didáctica. Por una parte, Cuevas (2017) diseñó una secuencia para abordar la variable aleatoria y su correspondiente función probabilidad, considerando como referente principal a la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 2002), en la que los estudiantes construyeron y aplicaron el concepto a partir de la resolución de problemas del contexto cotidiano. Por otra parte, está el trabajo de Ledezma (2017), en el que, utilizando la estrategia de modelación y el proceso de modelización matemática, se representaron situaciones cotidianas utilizando la función exponencial, tanto para fenómenos de crecimiento como de decrecimiento, considerando como referentes el ciclo de modelización propuesto por Blomhøj y Højgaard (Blomhøj y Højgaard, 2003; Blomhøj, 2004) y elementos de la Teoría APOE (Dubinsky, 1991).

De este modo, determinamos para nuestro estudio como contextualización a la ubicación de una situación de enseñanza –en este caso, a la introducción del objeto matemático cuadrado de binomio– en un contexto de aprendizaje relacionado al mundo real, como las estrategias de aplicación o modelación.

Metodología

Simons (2014) define al estudio de caso como “una exploración en profundidad desde múltiples perspectivas de la complejidad y unicidad de un proyecto, política, institución o sistema en un contexto de ‘la vida real’ en particular” (p. 457). Este trabajo, de corte cualitativo y paradigma interpretativo, se enmarca en la metodología del estudio intrínseco de casos, entendido como aquél “que es estudiado para aprender sobre un caso particular” (Stake, 1995, en Simons, 2014, p. 459).

Para el diseño de este estudio, se consideraron los elementos metodológicos propuestos por Simons (2014), que son explicitados en la tabla 2.

Tabla 2. *Descripción del diseño del estudio*

Etapas	Acciones
Conceptualización del tema	Se realizó la identificación y planteamiento de una problemática en lo que respecta a la contextualización en la enseñanza de los conceptos matemáticos, lo que implicó una revisión en la literatura que la respaldase.
Constitución del caso	Esta etapa implicó la delimitación del foco del estudio en la enseñanza de las identidades notables, específicamente del cuadrado de binomio, debido a que es la primera que se enseña formalmente a los estudiantes en el nivel primer año medio (14 a 15 años). Lo anterior, implicó una revisión curricular y de los textos de estudio del curso objetivo, determinando como unidad de análisis a los profesores de matemática que ejercen docencia en dicho nivel educativo.
Planteamiento de interrogantes	Para dar respuesta a las interrogantes que nos planteamos, se diseñó un cuestionario –validado por expertos y prueba piloto– en que los sujetos participantes del estudio explicasen y ejemplificasen la forma en que contextualizan a sus estudiantes la enseñanza del cuadrado de binomio.

En este estudio participaron 14 profesores de matemática que imparten docencia en enseñanza secundaria en establecimientos –tanto de dependencia municipal como particular subvencionada– de la Región de Valparaíso (Chile), a quienes se les aplicó un cuestionario, el que se muestra en la figura 2.

IMA INSTITUTO DE MATEMÁTICAS — PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

CUESTIONARIO

Con el objetivo de recopilar información para un proyecto de investigación del programa Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, solicitamos a usted responder (en forma anónima) estas preguntas, basándose en su práctica.

a) En el tratamiento de los productos notables, ¿acostumbra a contextualizar su enseñanza? Argumente su respuesta.

b) ¿Cómo contextualizaría la expresión $(a+b)^2$? Ejemplifique.

La información recogida será empleada exclusivamente con fines investigativos. Agradecemos su colaboración que nos será de gran utilidad.

Figura 2. Cuestionario aplicado a los sujetos informantes. Elaboración propia.

A su vez, cada pregunta del cuestionario diseñado tiene una utilidad específica dentro del análisis de los resultados del estudio:

- Pregunta a): permite entender si la contextualización es una estrategia recurrente en la enseñanza de los productos notables por parte de los profesores, y fue utilizada para complementar la discusión de resultados obtenidos de este estudio.
- Pregunta b): permite conocer la forma en que los profesores contextualizan el cuadrado de binomio en una situación del mundo real o aplicación práctica para su enseñanza, y fue utilizada para la categorización de los resultados de este estudio.

Cabe destacar que la selección de los sujetos informantes fue por conveniencia (Battaglia, 2008, en Hernández, Fernández y Baptista, 2014), debido a la vinculación laboral de los investigadores con los profesores, a quienes se les envió el cuestionario vía correo electrónico, con un plazo de respuesta no mayor a 24 horas.
Para el levantamiento de categorías de análisis, se consideró un criterio binario sobre la contextualización que realizan los sujetos informantes en la enseñanza del cuadrado de binomio: sí/no, además de subcategorías de acuerdo con un análisis apriorístico de potenciales respuestas esperadas, como se muestra en la tabla 3.

Tabla 3. *Categorías de análisis para el estudio*

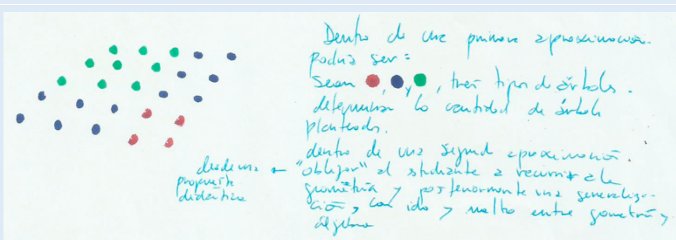
Categorías	Descriptores	Subcategorías
No contextualiza (cód. C_1)	No contextualiza el cuadrado de binomio en una situación del mundo real, o recurre a su representación algebraica y/o geométrica	Representación algebraica (cód. $C_{1.1}$)
		Representación geométrica (cód. $C_{1.2}$)
		Sin representación/no sabe (cód. $C_{1.3}$)
Sí contextualiza (cód. C_2)	Contextualiza el cuadrado de binomio en una situación del mundo real o aplicación práctica	Situación del mundo real (cód. $C_{2.1}$)
		Aplicación práctica (cód. $C_{2.2}$)

Para el análisis de los resultados, se clasificaron las respuestas de la segunda pregunta del cuestionario aplicado, de acuerdo con las categorías y subcategorías propuestas, identificando a los sujetos como P_1, P_2, P_3, …, P_{14}. Por otra parte, las respuestas de la primera pregunta del cuestionario son consideradas para complementar la discusión de resultados.
Este trabajo fue desarrollado como parte del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, donde se validó el estudio por expertos de didáctica.

Análisis de resultados

Con base en los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario a los 14 profesores, la tabla 4 muestra algunas evidencias representativas de las categorías y sub-categorías de análisis propuestas para este estudio, con la respectiva descripción que justifica su clasificación.

Tabla 4. *Evidencias de las categorías y subcategorías de análisis*

Respuesta del profesor	Descripción
Para enseñar esto en primero medio parto por el cálculo de figuras planas por descomposición, para llegar a la representación geométrica de cada uno de los productos notables, y luego darle sentido a la expresión correspondiente a su representante.	La respuesta del sujeto P_{12} evidencia las subcategorías $C_{1.1}$ y $C_{1.2}$. Este tipo de respuestas fue el más recurrente, en que se refieren a las representaciones algebraica y geométrica del cuadrado de binomio como únicos recursos para su enseñanza.
Podríamos trabajar con algún mosaico al pegar cerámicas e ir comparando las áreas de cada una, de forma que nos quede un puzle y siga ese patrón en una superficie, de esa forma podríamos establecer el desarrollo y el criterio para el desarrollo de un cuadrado de binomio, y luego en general para hacer la igualdad entre la expresión y su desarrollo.	La respuesta del sujeto P_3 evidencia las subcategorías $C_{1.1}$ y $C_{1.2}$. Si bien plantea una actividad con material concreto, ésta no se sitúa en una situación del mundo real.
La expresión se contextualiza luego de abordar el marco inicial de la clase que es más concreto, dando la amplitud de observaciones posibles a través de la resolución de cuadrados, que es una estrategia común en los textos de apoyo.	La respuesta del sujeto P_2 evidencia la subcategoría $C_{1.3}$. Se considera como tal debido a su ambigüedad y por no especificar una contextualización concreta ni su representación en otro registro.
	La respuesta del sujeto P_6 evidencia la subcategoría $C_{2.1}$. Ésta fue la única que colocó al cuadrado de binomio en una situación contextualizada, que si bien es un ejemplo sencillo, da luces de una intención de contextualización efectiva.

Transcripción: Dentro de una primera aproximación, podría ser: sean ✳, ✳ y ✳ tres tipos de árboles, determinar la cantidad de árboles plantados. Dentro de una segunda aproximación, "obligar" (desde una propuesta didáctica) al estudiante a recurrir a la geometría y posteriormente una generalización, con ida y vuelta entre geometría y álgebra.	
Se puede contextualizar con el cálculo de números al cuadrado difíciles de conocer de manera rápida, realizando una separación en una suma de números adecuados que permitan una mayor facilidad para calcular, ya sea por medio de una suma como de una resta. [Ejemplifica con $34^2 = (30 + 4)^2$ y su desarrollo]	La respuesta del sujeto P_{13} evidencia la subcategoría $C_{2.2}$. Ésta fue la única que consideró al cuadrado de binomio como una estrategia aplicable al cálculo mental.

Nota. Debido a que los cuestionarios fueron recibidos vía correo electrónico, las evidencias presentadas corresponden a las respuestas escritas de los sujetos participantes y, en sólo un caso, a la digitalización de un cuestionario impreso.

Para sintetizar los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario, la tabla 5 muestra una clasificación de los sujetos informantes de acuerdo con las categorías y subcategorías en las que se evidencian sus respuestas.

Tabla 5*. Síntesis de los resultados del estudio*

Categorías	Sub-categorías	Sujetos informantes
C_1	$C_{1.1}$	P_1, P_3, P_4, P_5, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{14}
	$C_{1.2}$	P_1, P_3, P_4, P_5, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{14}
	$C_{1.3}$	P_2
C_2	$C_{2.1}$	P_6
	$C_{2.2}$	P_{13}

La evidencia recopilada reveló que, entre las respuestas más comunes, los docentes intentaron contextualizar el cuadrado de binomio, siendo que en realidad sólo los convirtieron a otro registro de representación semiótica, es decir, desde la expresión algebraica $((a + b)^2)$ a la representación geométrica (cálculo de área de figuras cuadradas). Ello nos sugiere una confusión, por parte de los sujetos participantes, sobre lo que implica contextualizar, o una falta de conocimiento sobre situaciones concretas donde se puede aplicar el cuadrado de binomio.

Cabe destacar que hubo docentes que, con respecto a la primera pregunta del cuestionario, reconocieron abiertamente que no contextualizan los contenidos. Por ejemplo:

P_1 : no lo hago usualmente, casi siempre lo trato de manera algebraica nada más, principalmente porque la práctica es vista con problemas geométricos más que cotidianos.

P_6 : si bien comprendo el trabajo geométrico asociado, me parece forzado, por lo poco habitual al estudiante. En específico, me parece que al estudiante no se le contextualiza. Nunca salgo realmente de lo algebraico.

P_7 : no acostumbro a hacerlo. Una vez lo hice y el UTP [Jefe de Unidad Técnico-Pedagógica] me dijo que era 'muy complejo', que mejor les entregara la fórmula a los estudiantes.

La respuesta de P_1 guarda relación con lo planteado por López et al. (2011), sobre esta tendencia de los exámenes a mecanizar los procedimientos algebraicos, subentendiéndose que la práctica no-algebraica, en este caso del cuadrado de binomio, correspondería sólo a la aplicación del algoritmo en su representación geométrica.
Si bien el sujeto P_6 fue el único que ejemplificó una contextualización efectiva, también asumió que no es parte de su praxis regular. Aunque parezca contradictorio, este caso reafirma la idea de Herscovics y Linchevski (1994), donde el ritmo y formalismo de la enseñanza algebraica, pareciese ser una limitante para llevar a cabo estrategias que salgan de lo tradicionalmente conocido como metodología de enseñanza de esta área.

Por otra parte, no deja de llamar la atención lo declarado por el sujeto P_7, al afirmar que el administrativo curricular lo haya limitado en su intención de contextualizar los contenidos para su enseñanza. Ello resulta contraproducente, si la literatura citada en este estudio enfatiza en los beneficios que trae esta práctica para el aprendizaje de los estudiantes, además que las directrices curriculares nacionales también lo declaran en sus documentos. Nuevamente, se pone de relieve otra idea de Herscovics y Linchevski (1994), quienes plantean que pareciese ser que, tanto algunos textos de estudio como ciertos profesores, no toman en consideración la amplia gama de dificultades que se producen en el aprendizaje del álgebra, limitándose sólo a los formalismos de enseñanza y descuidando los conocimientos pre-algebraicos que aportó la aritmética en la educación primaria.

Conclusiones

En esta investigación se estudió la contextualización, por parte de los profesores, en la enseñanza del cuadrado de binomio, cuyos resultados evidenciaron una escasez de contextualizaciones en su praxis, además de vislumbrar una confusión –por parte de los sujetos– en lo que implica contextualizar un objeto matemático y representarlo en otro registro semiótico. Si bien Duval (2004) plantea la importancia de la representación de los objetos matemáticos utilizando una multiplicidad de registros semióticos, la contextualización posibilita un tránsito entre lo matemático y lo real, a través de estrategias como las de aplicación y modelación.

Con base en lo anterior nos cuestionamos, por una parte, la importancia que se le da a este tema en el tratamiento de los contenidos matemáticos, en una disyuntiva entre el peso que cobra el aprendizaje del algoritmo por sobre la contextualización de un conocimiento matemático abstracto en situaciones cotidianas. Por otra, sobre los tiempos disponibles que plantea el currículo para abordar determinados contenidos, y el material pedagógico con el que se cuenta como soporte para los profesores, esto último avalado por el análisis efectuado a los textos escolares del nivel primer año medio (14 a 15 años), el que evidenció un enfoque mayormente algebraico-geométrico, por sobre las aplicaciones prácticas o de modelación para la enseñanza del cuadrado de binomio.

Estas reflexiones y cuestionamientos son puntos cruciales para desarrollar futuras investigaciones sobre el tema, tanto para diseñar propuestas didácticas que atañan la subsanación de estas problemáticas de enseñanza, como para la indagación en el tratamiento de otros objetos matemáticos.

Referencias

Aparisi, L. y Pochulu, M. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1387-1397. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling: A Theory for Practice. En B. Clarke et al. (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Gotemburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education.

Blomhøj, M. y Højgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 22*(3), 123-139. doi:10.1093/teamat/22.3.123

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Trads.). doi:10.1007/0-306-47211-2

Cuevas, M. (2017). *Variable Aleatoria: una secuencia didáctica, bajo la mirada de la Teoría de Situaciones Didácticas*. Tesis de magíster no publicada, Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Dubinsky, E. (1991). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). doi:10.1007/0-306-47203-1_7

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano: Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Merlín I.D.

Galasso, B., Maldonado, L. y Marambio, V. (2016). *Texto del Estudiante Matemática 1º Medio*. Providencia, Chile: Santillana del Pacífico.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª ed.). México: McGraw Hill Education.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78. doi:10.1007/bf01284528

Ledezma, C. (2017). *Estudio de la Modelación con Función Exponencial para Estudiantes de Segundo Año Medio, según el Modelo de Blomhøj y Højgaard*. Tesis de magíster no publicada, Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

López, A., Moreno, B. y Souza, M. (2011). Cultura matemática vs. contextualización matemática en educación media superior. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 115-121. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Méndez, T. (2008). Dificultades en la práctica de productos notables y factorización. *Revista del Instituto de Matemática y Física, 11*(15). Obtenido desde http://matesup.cl/portal/revista/2008/8.pdf

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Bases Curriculares 7° básico a 2° medio*. Santiago, Chile: Autor.

Núñez, J. M. y Font, V. (1995). Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica. *Revista de Educación,* (306), 293-314. Recuperado desde https://www.mecd.gob.es/dctm/revista-de-educacion/articulosre306/re3060900494.pdf?documentId=0901e72b81272a9b

Ruiz, J. M. (2008) Problemas actuales de la enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 47*(3), 1-8. Recuperado desde https://rieoei.org/RIE/article/view/2348

Simons, H. (2014). Case Study Research: In-Depth Understanding in Context. En P. Leavy (Ed.), *The Oxford Handbook of Qualitative Research* (pp. 455-470). doi:10.1093/oxfordhb/9780199811755.013.005

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

UM OLHAR PARA O CONHECIMENTO COMUM E ESPECIALIZADO DE UMA PROFESSORA ACERCA DA DIVISÃO POR PARTES E DA DIVISÃO POR QUOTAS

A LOOK AT A TEACHER'S COMMON AND SPECIALIZED KNOWLEDGE REGARDING DIVISION BY PARTS AND BY QUOTAS

Diná Correia, Angélica Garcia Silva, Eurivalda Santana
Universidade Anhanguera de São Paulo Universidade Estadual de Santa Cruz. (Brasil)
dina.uesc@gmail.com, angelicafontoura@gmail.com, eurivalda@hotmail.com

Resumo
Este artigo tem o propósito de analisar o conhecimento comum e o especializado de uma professora dos anos iniciais em relação aos significados da divisão. A coleta de informações desta pesquisa, de natureza qualitativa, se deu em dois momentos: em entrevista concedida dois anos após sua participação em um grupo de estudos constituído na própria escola em que lecionava e na análise da elaboração de situações durante um curso de formação continuada que ocorria concomitantemente com os estudos do grupo. Teoricamente a investigação fundamentou-se em Vergnaud (2009) e Ball, Thames e Phelps (2008). Verificou-se que a professora reconheceu a diferença entre as duas classes de situações – partição e quota –, mas não as nomeou. Ademais, embora apresentasse uma resolução correta, utilizando-se dos esquemas: algoritmo da divisão e/ou esquema de razão entre as quantidades das grandezas, não apresentou argumentos para justificar essas escolhas.

Palavras-chave: divisão por partes e por quota, conhecimento profissional docente, grupo de estudos

Abstract
This paper is aimed at presenting the analysis of a teacher's specialized knowledge on division at the early years of elementary school, after two years of her concomitant participation in a study group, and in a centralized development process. This type of knowledge was made explicit when she solved two situations involving division. This research is based on theoreticians such as Vergnaud (1983, 2009) for the analysis of concepts involving division and its types - part and quota -; and Ball, Thames and Phelps (2008) regarding specialized knowledge and its teaching. With respect to its methodology, this is a qualitative research that uses data collected in a semi-structured interview in which the teacher analyzes and answers questions about the two division situations, justifying her choices. She also collected data while participating in both training processes: the elaboration of situations and the study group sessions involved the topic. It was possible to identify her perception regarding the difference between the two types of situation - part and quota - without naming them. Moreover, although she presented a correct solution using two schemes: algorithm of division and/or scheme of quantity ratio, she did not present arguments to justify such choices.

Key words: part- and -quota division, specialized content knowledge, study group

Introdução

Neste trabalho, analisamos a resolução e as justificativas dadas por uma professora dos anos iniciais para duas situações de divisão, envolvendo suas classes – partição e quota. O objetivo deste estudo é investigar os conhecimentos comum e especializado do conteúdo divisão entre números naturais, evidenciados por essa docente, decorridos dois anos após sua participação em um processo formativo no interior de um grupo de estudos e, concomitantemente, em uma formação continuada mais ampla, no âmbito do Observatório de Educação.

Para realizar esta pesquisa propusemos a seguinte questão: "Quais conhecimentos são explicitados por uma professora dos anos iniciais do ensino fundamental, quando resolve, analisa e comenta duas classes de situações de divisão, dois anos após sua participação em processos formativos na própria escola?". Em busca de respostas à questão proposta, apoiamo-nos em teóricos que tratam das estruturas multiplicativas, como Vergnaud (1983, 2009), e os que abordam os conhecimentos comum e especializado deste ensino, como Ball, Thames e Phelps (2008).

Para apresentar esta investigação, exporemos, nesta ordem, a relevância desta pesquisa, por meio da apresentação e da análise de investigações na área; a fundamentação teórica que norteou a pesquisa; os procedimentos utilizados; a análise e a discussão dos dados coletados; e, finalmente, nossas considerações finais.

Relevância e fundamentação teórica

Para justificar a temática escolhida para esta investigação, procuramos, em resultados de pesquisas na área, indícios de dificuldades dos alunos para compreender as ideias que envolvem a divisão. Campos (2007), por exemplo, apresenta uma análise da produção de erros de 45 estudantes de 4.ª, 5.ª e 7.ª séries do ensino fundamental na aprendizagem da divisão e conclui que o significado de divisão por quotas não era muito conhecido pelos alunos investigados. Observa que grande parte deles encontrou dificuldades para compreender as relações entre os termos da divisão (dividendo, divisor, quociente e resto). A autora também procurou relacionar os resultados encontrados com os saberes dos professores desses estudantes e observou que esses profissionais também apresentavam lacunas no conhecimento a respeito do conceito dessa operação, uma vez que não souberam diferenciar as diferentes categorias de situações.

Além disso, vários estudos nos mostram ser fundamental que os professores tenham esse conhecimento. Pesquisas como as de Borba e Silva (2016, p.80), por exemplo, chamam a atenção para a necessidade de o professor dos anos iniciais propor uma variedade de situações, em diferentes níveis de dificuldade, de forma que, em seu modo de resolução, deem significado à operação de divisão, e garantam que seus alunos compreendam esse conteúdo.

Todavia, parece que essa diversidade não vem ocorrendo como o esperado. Merlini, Magina e Santos (2013), por exemplo, observam que os professores que ensinam matemática não elaboram e não trabalham, na maioria das vezes, com as duas classes de situações de divisão – partição e quota – e somente utilizam em suas aulas a ideia de partilha. Os autores relatam que professores dos anos iniciais em um estado brasileiro elaboraram seis situações envolvendo a multiplicação e/ou a divisão. Resultaram desse trabalho 64 situações criadas e validadas pelos autores sob ponto de vista conceitual e didático, 48 das quais (75%) solicitavam, para a sua resolução, a operação de multiplicação e 16 (25%), a operação de divisão, porém todas as situações elaboradas eram da classe partição.

Da mesma forma, Correia (2016), na fase inicial da sua pesquisa, ao analisar situações do campo multiplicativo elaboradas pelos professores, identificou que, de um total de 19, sete delas sugeriam a ideia da multiplicação; e todas as 12 restantes, que aplicavam a divisão, envolviam a ideia de partição. Analisando essas duas investigações, notamos que nelas os professores não elaboraram situações que envolviam a classe de divisão por quota. Desse modo, neste trabalho, o tratamento dado às duas situações propostas está em reconhecera operação divisão com números naturais e, além disso, verificar se a professora identifica essas duas diferentes classes desta operação, como as resolve e quais justificativas apresenta, ao analisar suas respostas. Nesse contexto, consideramos relevante investigar os conhecimentos dessa professora que participou de estudos em grupo sobre a divisão e, concomitantemente, também integrou um curso de formação que refletiu sobre as estruturas multiplicativas. Para analisar os dados coletados, nos apoiamos em teorias que discutem o conhecimento profissional docente e estudos sobre as estruturas multiplicativas, os quais serão descritos a seguir.

O Marco teórico utilizado nesta investigação

Fundamentados em Ball, Thames e Phelps (2008), consideramos que, para o professor dos anos iniciais do ensino fundamental desenvolver o ensino das estruturas multiplicativas, seria muito importante que ele tivesse adquirido uma base de conhecimentos necessários para o ensino dessas estruturas, e é nesse contexto Ball e colaboradores discutem o conhecimento comum e o conhecimento especializado desse conteúdo. Do ponto de vista dos autores, o conhecimento comum do conteúdo diz respeito ao conhecimento matemático utilizado em outros contextos, além daqueles do ensino. No âmbito da divisão entre Números Naturais, refere-se tanto a determinar respostas corretas para esta operação como a resolver de forma acertada situações que envolvam a ideia de divisão. Nesse contexto, esse é considerado um conhecimento necessário ao professor de matemática, mas não é somente dele.

O conhecimento especializado do conteúdo, segundo Ball, Thames e Phelps (2008), é o conhecimento matemático utilizado somente para o ensino e é necessário ao professor para que desempenhe bem sua prática de ensinar. Quanto à divisão, o conhecimento especializado para o seu ensino consiste em saber reconhecer suas classes – partição e quota – para a resolução de situações diversas. Tal conhecimento possivelmente promove a compreensão de seus alunos a respeito não só das diferentes formas de resolver esta operação, utilizando-se unicamente das regras operatórias – o algoritmo –, mas também das diferentes ideias que envolvem essa operação.

Para discutir os diversos significados da divisão, buscamos apoio também na Teoria dos Campos Conceituais, em específico a respeito do campo conceitual multiplicativo (Vergnaud, 1983, 2009). A seguir descreveremos os pressupostos dos estudos que servirão como marco teórico desta investigação.

Resolução de situações como forma de ressignificar o conhecimento da divisão

Uma das categorias de relações multiplicativas definidas por Vergnaud (2009, p.239) é o Isomorfismo de Medidas, como uma relação quaternária entre quatro quantidades: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras, medidas de outro tipo; e ainda comporta uma multiplicação ou uma divisão. O autor considera a divisão como a mais complexa das quatro operações, porque implica, ao mesmo tempo, a subtração, a multiplicação e a busca por tateio ou enquadramento dos algarismos do quociente, referindo-se às regras operatórias propriamente ditas, ou seja, o uso do algoritmo para obtenção do resultado; e sugere a resolução de situações como uma alternativa viável para a ressignificação deste conhecimento. Trata a divisão com a ideia da razão entre quantidades de mesma grandeza (divisão por partes- situação A) e entre grandezas distintas (divisão por quotas- situação B), descritas na Figura 1 e expostas a seguir:

Figura 1: Exemplo de situações envolvendo as duas classes de divisão

Situação A: Paguei R$ 12,00 por 3 garrafas de vinho. Quanto custa cada garrafa? Situação B: Pedro tem R$ 12,00 e quer comprar pacotes de bala a R$ 4,00 o pacote. Quantos pacotes ele pode comprar?

Fonte: Vergnaud (2009, p.239-240)

Segundo Vergnaud (2009), as duas situações, ao serem representadas em forma de esquemas (quadro de correspondência entre duas espécies de quantidades), mostram a relação existente entre as quatro quantidades (situação A: garrafas e reais e situação B: pacotes e reais), em que uma delas representa a quantidade que se busca, como mostram as Figuras 2 e 3, a seguir:

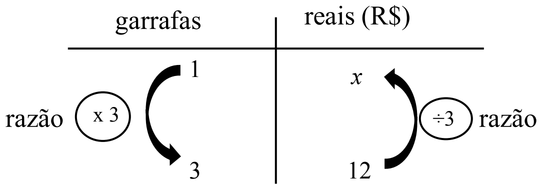


Figura 2: Situação A- esquema de representação

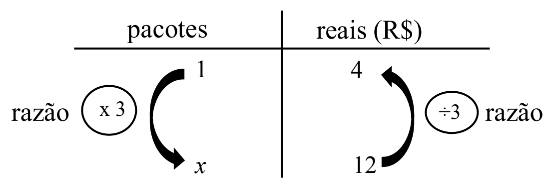


Figura 3: Situação B-esquema de representação

Fonte: Vergnaud (2009, p.240)

A operação que permite resolver tais situações é, em ambas, uma divisão, porém, segundo Vergnaud (2009, p.242), esse fato não coloca em jogo as mesmas noções, ou seja, na situação A, da Figura 2, é preciso encontrar o valor unitário, quando o valor correspondente a certa quantidade é conhecido (divide-se R$ 12,00 por 3, para encontrar x reais - divisão por partes); e, na situação B, da Figura 3, tem-se o valor unitário e uma quantidade dada, e deseja-se determinar quantas quotas se podem obter com essa quantidade (divide-se R$ 12,00 por 4 para obter x pacotes – divisão por quotas). O operador ÷3 que representa a relação vertical de baixo para cima é um operador sem dimensão (escalar) e inverso ao operador x3 (vezes 3). Compreender as similitudes e as diferenças entre os dois tipos de situações possibilita ao professor analisar as estratégias utilizadas por seus estudantes para sua resolução e justificar corretamente, do ponto de vista matemático, as escolhas utilizadas por eles.

Procedimentos metodológicos

Este trabalho apresenta um caráter qualitativo baseado em Garnica (2004 p. 86), que discute que uma das suas características é a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, e o objetivo da pesquisa será comprová-la ou refutá-la. O procedimento de análise foi norteado por Bardin (2016), sobretudo, quanto ao que o autor denomina de *Tratamento dos resultados, as inferências e a interpretação*: buscamos dar significados, em profundidade, às afirmações da professora que permitissem compreender nosso objeto de estudo.

Os dados da pesquisa envolvidos neste trabalho foram coletados a partir da participação da professora, a qual chamaremos de forma fictícia de Alice, em dois processos formativos na sua própria escola: quando da elaboração de situações em um dos encontros da formação mais ampla e nas sessões de estudos em grupo envolvendo a operação de divisão.

Dois anos após o término dessa participação, foi realizada com a docente uma entrevista semiestruturada, durante a qual foram propostas a ela as seguintes ações: 1) resolução de duas situações; 2) apresentação de justificativas para a escolha feita para sua(s) resolução(ões); 3) descrição das semelhanças e das diferenças entre as classes envolvidas nas situações propostas.

As duas situações apresentadas para a professora foram as seguintes:

> *Situação (A)*: A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente entre seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?
> *Situação (B):* Em uma caixa de chicletes vêm 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

As situações sugeriam a operação de divisão, em suas duas classes: por partes (situação A) e por quotas (situação B).

Após a resolução das situações A e B, os registros das respostas orais gravadas em áudio e transcritas na íntegra foram analisados, à luz das abordagens teóricas indicadas. Utilizamos também dados coletados nos instrumentos diagnósticos dos processos formativos descritos a seguir. A professora Alice, licenciada em Pedagogia, tinha 40 de idade no ato da investigação e possuía, 18 anos de docência, principalmente nos anos iniciais do ensino fundamental.

A professora e o conhecimento da divisão explicitado durante os dois contextos de formação

Reiteramos que a professora Alice havia participado há dois anos de um processo formativo em um grupo de estudos na própria escola e, de forma concomitante, de uma formação mais ampla no âmbito do Observatório da Educação. Nos dois contextos, o tema estudado foi a teoria do campo conceitual multiplicativo, de Vergnaud (1983, 2009), a partir de diversas atividades práticas vivenciadas, dentre elas, a elaboração de situações com este foco e a sua resolução pelos estudantes de suas turmas dos 5.^{os} anos iniciais do ensino fundamental.

A docente elaborou, no início e no final da formação continuada mais ampla, oito situações envolvendo a multiplicação ou a divisão, ou ambas. No início dessa formação, a professora abordou a categoria Isomorfismo de Medidas em cinco das oito situações criadas por ela. Delas, duas envolviam propostas de multiplicação; outras duas, a divisão por partes; e uma, a forma mista (multiplicação e divisão). No final e depois de participar de alguns encontros formativos do grupo de estudos, a participante elaborou outras oito situações. Três delas apresentavam a mesma abordagem das que foram elaboradas inicialmente, sendo duas com operação de multiplicação e uma, com a operação de divisão por partes. Todavia, notamos que as outras cinco situações por ela elaboradas apresentaram mais variedades das categorias definidas por Vergnaud (1983, 2009), porém nenhuma delas envolvia a ideia de divisão por quota.

Além da análise dessas situações, procuramos, em textos produzidos e em transcrições de depoimentos da professora Alice durante as sessões de estudos, evidências de sua percepção do ocorrido e conhecimentos adquiridos nos processos formativos. Investigamos indícios da compreensão da operação de divisão e suas classes. Buscamos identificar o seu entendimento nas diversas situações que ela apresentou ao grupo de estudos para análise dos esquemas de resolução utilizados por seus alunos. Nos depoimentos a seguir, apresentamos algumas reflexões da professora Alice nesse contexto.

(1) Em uma das primeiras sessões de estudos, que abordou o tema da divisão, por meio da qual a professora questionou que tipo de divisão a situação apresentava, observamos que a docente não tinha certeza da categoria envolvida, ao questionar: *"Esse tipo de divisão é uma divisão* por *partes, não é?"*.
(2) Ao relatar sua prática e discutir sobre o tema com suas turmas, a professora mostrou dar importância para o fato de o professor discutir abertamente as estratégias equivocadas com seus alunos. Segundo seu relato: *"Eu aproveitei e disse a eles que os erros são necessários para que aprendamos também com eles. Já se tornou rotina, a socialização dos 'erros' com minhas turmas"*.
(3) Notamos o repertório da professora ampliado, sobretudo ao discutir esquemas de estudantes, quando resolviam situações de divisão. Selecionamos alguns dos seus depoimentos:
    3a) Divisão por quota. Ele já deu o todo e já especificou o quanto desse todo; O raciocínio que ele teve de quota valeu, porém ele não colocou os valores de cada um, não prestou atenção ao enunciado, nas grandezas;

> *3b) Ele fez a partição, porque ele botou 5 e 5 e foi pegando, puxando. Desenhou as 30 figurinhas. Ele não agrupou;*
> *3c) Esse daí já é quota. Ele agrupou. Botou os tracinhos e fez os agrupamentos de 5 em 5. Ele separou as figurinhas e contou quantos grupos ele conseguiu formar com aquela quantidade;*
> *3d) A criança, quando sabe mais ou menos a noção da leitura, ela lê e vê ali duas grandezas e ali ela vai saber que vai ter que agrupar. Ela sempre pega o maior, coloca na quantidade e vai. Ele deu a resposta em grupo, ele não deu a resposta em amigos. Ele contou os grupos. Os grupos representam cada amigo.*

(4) Ao avaliar as sessões do grupo de estudo, no final de suas ações formativas, a professora externou-se positivamente com este depoimento: *"Lembro também da gente classificando as situações de acordo com a classe, se era por partes ou por quota"*.

Discussão e Análise desses primeiros resultados

A partir dos depoimentos registrados, percebemos um percurso organizado na ampliação do conhecimento especializado da divisão pela professora, como participante dos dois processos formativos já descritos anteriormente. O depoimento 1 mostra seu questionamento acerca dos tipos de classe e apresenta indícios da dificuldade desse entendimento. No depoimento 2, mostra esse conhecimento sendo discutido com seus alunos, utilizando os "erros" detectados, ao analisar seus esquemas, quando resolvem situações de divisão. Nos depoimentos 3 (a, b, c, d,), a professora apresenta indícios de ampliação do conhecimento especializado do conteúdo divisão, ao declarar: *"Ele já deu o todo e já especificou o quanto desse todo"* ou *"Ele fez a partição"* ou *"Esse daí já é quota"* ou *"ela* (a criança) *lê e vê ali duas grandezas e ali ela vai saber que vai ter que agrupar"*. Percebemos, portanto, que com a sua participação nos dois contextos formativos, a professora demonstra uma ampliação da compreensão do conceito da divisão e suas classes e da resolução de situações como forma de aprimorar seu ensino.

Entrevista com a professora após o término de sua participação nos contextos formativos;discussão e análise dos depoimentos coletados (descritos e orais)

Tendo em mente esse contexto em que, dois anos após o término dos dois processos formativos, a professora Alice resolveu duas situações (A e B) que apresentaram as duas classes de divisão (descritas a seguir), compusemos a Figura 4 e a Figura 5 com as respostas registradas no instrumento diagnóstico

A) A professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente entre seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?
B) Em uma caixa de chicletes vêm 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?

***Figura 4**:* Resposta da professora à situação A

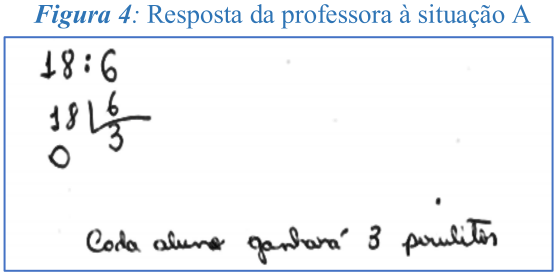
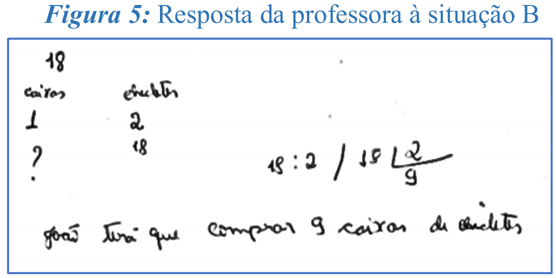


Figura 5: Resposta da professora à situação B



Fonte: Dados da pesquisa

Notamos que a professora Alice resolveu corretamente as duas situações. Nesse contexto, consideramos que ela tinha o conhecimento comum do conteúdo, como discutem Ball, Thames e Phelps (2008). Quanto aos esquemas de resolução, a professora utilizou-se apenas do algoritmo na situação A e, na situação B, a solução foi acrescida com o esquema da razão entre as quantidades das grandezas sugerido por Vergnaud (2009). A seguir perceberemos que a participante conseguiu apresentar algumas justificativas para suas escolhas matemáticas, porém outras não foram justificadas.

> *A operação a ser usada é a mesma nas duas. Aqui (*apontando a situação A) *é porque ela já tem o todo* (a quantidade de pirulitos) *e vai distribuir em partes e aqui (*referindo-se à situação B*), ela tem uma parte, pra buscar o todo, sabe a quantidade de unidades, que vem em cada caixa, quantas partes ela vai ter que juntar, para chegar nesse todo* (depoimento da professora)

Neste depoimento notamos que a professora reconhecia a operação de divisão para resolução das duas situações (A e B) e a ideia que envolvia a situação A. Quando ela analisou a situação B e disse: *"ela tem uma parte, pra buscar o todo"*, notamos que queria se referir à quota que se relacionaria com o total, pois ela continua: *"sabe a quantidade de unidades, que vem em cada caixa, quantas partes vai ter que juntar para chegar nesse todo"*. Assim, do nosso ponto de vista, acreditamos que a professora Alice reconheceu a diferença entre as duas situações, mas não as nomeou, e seus argumentos foram apoiados na ideia da divisão como quantidades constituídas a partir da relação parte-todo.

Considerações finais

Consideramos serem estas as categorias de conhecimento essenciais para o ensino da divisão entre números naturais: resolver corretamente as situações; distinguir suas duas classes e reconhecer a estrutura dessas situações; e detectar o procedimento que levará o aluno a sua resolução.

Diante das constatações feitas neste estudo, concluímos que a participação da professora no processo formativo em um grupo de estudos e em uma formação continuada mais ampla, favoreceu a ela o reconhecimento das duas classes da divisão. A partir das discussões coletivas nas sessões de estudos, percebemos o desenvolvimento tanto do seu *conhecimento comum* como do *especializado do conteúdo*, defendido por Ball, Thames e Phelps (2008), e consideramos ser isso um aspecto importante na prática docente. Todavia, as experiências vivenciadas pela professora Alice não favoreceram a elaboração de argumentação para justificar matematicamente suas próprias resoluções às situações a ela propostas. Consideramos que tal fato, de certa forma, poderia comprometer sua ação pedagógica, especialmente quando fosse realizar a análise e a avaliação, do ponto de vista matemático, das estratégias e das soluções distintas, identificando as linhas de raciocínio que seriam corretas ou não ou que funcionariam sempre ou não. Mesmo considerando tais limitações, acreditamos que a professora Alice ampliou, sobretudo, seu conhecimento especializado sobre o ensino da divisão e que isso, possivelmente, contribuiu para o aprimoramento do ensino da temática. Mas a constatação de limitações neste estudo sugere que a formação continuada não pode se esgotar em apenas um processo formativo no interior do grupo de estudos ou em uma participação em uma formação mais ampla, em um período curto.

Os resultados desta pesquisa também indicam a necessidade de haver processos formativos constantes, especialmente focados em articular a teoria e a prática docente, que venham a proporcionar ao professor experiências contínuas de compartilhamento em grupo, oportunizando sempre o seu protagonismo.

Referências bibliográficas

Ball, D. y Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education 59*, 389-407.

Bardin, L. (2016) *Análise de Conteúdo*. São Paulo (SP). Edições 70,

Borba,R.E.S.R. y Silva, J.A. (2016). Dize-me o que conheces, e eu te direi o que e como podes ensinar. En: Martins, E., Lautert, S. (org). *Diálogos sobre o ensino, aprendizagem e a formação de professores: contribuições da Psicologia da Educação Matemática* (74-97), Rio de Janeiro: Autografia (Ed)

Campos, E. G. J. de. (2007) As dificuldades na aprendizagem da divisão: análise da produção de erros de alunos do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores. *Dissertação (Mestrado*). Universidade Católica Dom Bosco – UCDB, Campo Grande (MS).

Correia. D.S. (2016). Estruturas Multiplicativas: um olhar sobre conhecimentos do conteúdo e do ensino e do conhecimento curricular de professoras participantes de um grupo de estudo. *Ata do XX EBRAPEM-Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Curitiba (PR)

Garnica, A. V. M. (2004) História Oral e Educação Matemática. In: Borba, M. de C.; Araújo, J. de L. *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. pp. 77-98. Belo Horizonte. Autêntica.

Merlini, V. L. y Magina, S. y Santos, A. (2013*). Estrutura Multiplicativa: Um estudo comparativo entre o que a professora elabora e o desempenho dos estudantes.* Ata do VII Congresso Ibero-americano de Educação Matemática. Montevidéu – UY.

Vergnaud, G. (2009). *A criança, a matemática e a realidade. Problemas do ensino de matemática na escola elementar.* Curitiba: Ed. da UFPR.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. pp. 127-174.New York: Academic Press.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

LAS PROBLEMÁTICAS SEMIÓTICAS Y LA METÁFORA EN LAS REPRESENTACIONES DE LOS CONJUNTOS INFINITOS

THE SEMIOTIC PROBLEMS AND THE METAPHOR IN THE REPRESENTATIONS OF THE INFINITE SETS

Héctor Mauricio Becerra Galindo, Vicenç Font Moll
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia), Universitat de Barcelona (España)
hemabe2@yahoo.es, vfont@ub.edu

Resumen

En este artículo se presentan los primeros resultados de la investigación doctoral sobre *las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos*. Esta surge de las dificultades que presentan los estudiantes en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos de números. Centraremos la atención en la dificultad asociada a la falta de conciencia semiótica por parte de los profesores en las representaciones elegidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Para abordar esta dificultad, se indaga y describe también las problemáticas semióticas y las metáforas presentadas en las representaciones de los conjuntos infinitos en los libros de texto.

Palabras clave: representación semiótica, metáfora, conciencia semiótica, conjuntos infinitos, libros de texto

Abstract

In this article, we present some results of the doctoral research on *the semiotic problems and the metaphor in the representations of the infinite sets*. This arises from the difficulties that students present in the cognitive construction of infinite sets. We will focus attention on the difficulty associated with the lack of semiotic awareness on the part of teachers in the representations chosen in the teaching of the infinite sets. To address this difficulty, the semiotic problems and metaphors presented in the representations of infinite sets in textbooks are also investigated and described.

Key words: semiotic representation, metaphor, semiotic awareness, infinite sets, textbooks

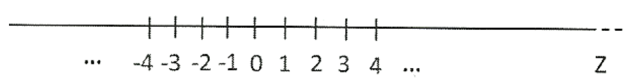
Introducción

Las diferentes investigaciones que se han realizado sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979; Duval, 1983; Moreno y Waldegg, 1991; Arrigo y D'Amore, 1999, 2002; Tsamir, 2000; Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011; entre otros) evidencian dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva. Estas dificultades están asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico) como se concluye en la investigación de Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), y a la temática general de la formación de una noética frente a representaciones semióticas como es propuesto por Duval (1993, p. 38) "[…] de una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (paradoja de Duval).

Las dificultades acabadas de comentar ya fueron tema de muchas investigaciones en el pasado, por lo cual nuestra atención en este trabajo se dirige a las dificultades relacionadas sobre todo con: 1) la falta de "*conciencia semiótica*" (conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática) que usan los profesores al elegir las representaciones para la enseñanza de los conjuntos infinitos y 2) las interpretaciones que hacen los estudiantes de estas representaciones desde la elección del profesor, con la finalidad de potenciar una reflexión crítica por parte de los profesores sobre las representaciones y metáforas utilizadas en sus explicaciones en la generación de dichos conflictos.

Estas dificultades se empiezan a evidenciar cuando los profesores generan argumentos desde lo que ven en las representaciones y no desde la coordinación de registros de representaciones semióticas que son necesarios para la conceptualización (Duval, 1993) de los conjuntos infinitos; por ejemplo, los profesores (se codifica con la letra C) el ver la siguiente representación gráfica (figura 1) que es habitual en los libros de texto, los lleva a proporcionar los siguientes argumentos a las preguntas realizadas por los investigadores (codificado como Inv):

Figura 1. *Representación gráfica de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.*



Fuente: Arrigo, G., D'Amore, B. y Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti* (p. 222). Trento, Italia: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). *Infinitos infinitos* (p. 222). Bogotá, Colombia: Magisterio].

> Inv: […] ¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son: más, menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?
> C: Obviamente son más, están además todos los negativos.
> Inv: ¿Cómo representarías estos conjuntos numéricos a tus estudiantes?
> C: Los relativos [enteros] los pondría en la recta de los números y los naturales en cambio deben estar en la línea de los números.[…]
> Inv: ¿Esto lo presentas en clase?
> C: Por supuesto que digo que los números negativos siempre deben estar siempre antes de los positivos. (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 209)

En este caso la representación gráfica lleva a pensar, tanto a los profesores como a los estudiantes, que el número de enteros es "el doble" de los números naturales, en otras palabras, que el conjunto de los enteros tiene más elementos que el conjunto de los naturales.

Para afrontar estas dificultades es necesario: 1) que el profesor reflexione sobre la importancia que tiene la elección de representaciones de los conjuntos infinitos en su enseñanza, 2) que se dé cuenta que esta elección no es univoca ni neutra y 3) que puede ser una causa de la falta de construcción cognitiva por parte de los alumnos. Alcanzar una conciencia semiótica en el proceso de su enseñanza, les permitirá a los profesores entender que "la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento [...] están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica" (Duval, 1999, p. 18).
Por lo tanto, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué manifestaciones de la conciencia semiótica se producen en el profesor al problematizarle su elección de representaciones semióticas en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los conjuntos infinitos?

Dicha pregunta se concreta en diferentes objetivos específicos, siendo uno de ellos: Indagar y describir las diferentes problemáticas de las representaciones semióticas y metáforas de los conjuntos infinitos a partir de los libros de texto, que es el que vamos a desarrollar en esta comunicación.

Marco teórico

Los objetos abstractos de la matemática no son cosas que son percibidas por los sentidos: nadie los puede ver, tocar, saborear, oír, sentir, pesar, colorear, romper, lo único que podemos hacer con estos "objetos matemáticos es describirlos, definirlos, denotarlos, denominarlos, diseñarlos etc., es decir dar representaciones semióticas" (D'Amore, Fandiño Pinilla y Iori, 2013, p. 125). Las representaciones semióticas no son las únicas que hacen parte de los procesos de la actividad matemática, como lo establece Font (2007) las metáforas también hacen parte de estos procesos, que estructuran el conocimiento de los objetos matemáticos en términos de nuestro conocimiento y que "actúa de manera icónica, puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto" (Font, 2007, p. 125). Por lo tanto, las referencias que se abordan para este trabajo de investigación están relacionadas especialmente con los elementos semióticos-cognitivos propuestos en la teoría de Duval (1999, 2004, 2006) y los elementos de las metáforas propuestos por Lakoff y Nuñez (2000).

Representaciones semióticas

En palabras de Duval (1999, 2004) una representación es algo que se pone en "lugar de otro algo" (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016, p. 62) y la estructura que propone Duval (2008) de una representación semiótica es:

{{contenido de la representación, registro semiótico representado}, objeto representado}.

Los registros que se movilizan en matemáticas son cuatro: discursivos, no discursivos, plurifuncionales y monofuncionales. Duval (2004) define los registros discursivos como los que permiten describir, inferir, razonar, calcular. Los registros no discursivos como los que permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible. Los registros plurifuncionales como los que son utilizados en todos los dominios de la vida cultural y social. Los registros monofuncionales como registros derivados, que son especializados en un solo tratamiento. En la figura 2, se presenta la clasificación de los registros que son movilizados en matemáticas.

Es necesario aclarar que existen unas representaciones auxiliares que no dependen del registro semiótico y son utilizadas en matemáticas, como el material (por ejemplo, el manipulativo como: el ábaco, las regletas de Cuisenaire, bloques lógicos, etc.), los ejemplos, las ilustraciones, la organización (las tablas), etc. (Duval, 2004).

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

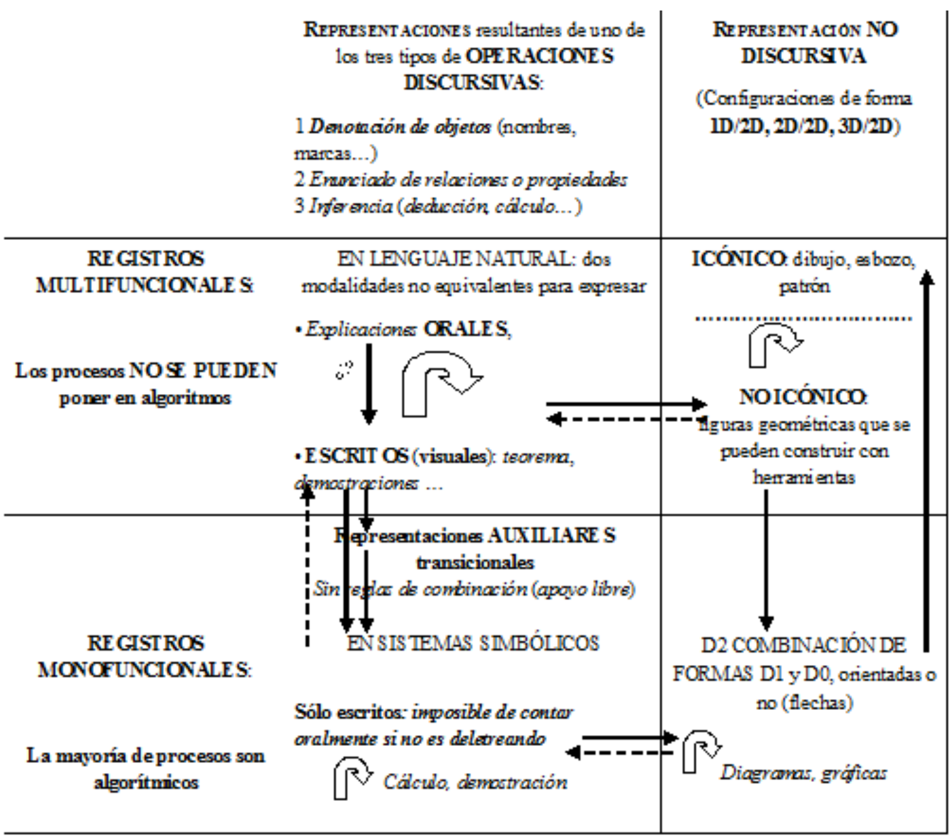
En los procesos de pensamiento que están involucrados con la actividad matemática, es necesario enfocarse en el nivel de los sistemas semióticos y no en la representación particular producida (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016), ya que es en este nivel donde se captura la importancia de la representación semiótica en las matemáticas.

Los dos tipos de transformaciones que se dan en la representación semiótica son:

1) Los tratamientos, que son transformaciones en el mismo registro; por ejemplo: ½ → 0,5, se pasa de un registro de escritura fraccionaria a un registro de escritura decimal, pero se sigue conservando en el registro monofuncional y registro discursivo.
2) Las conversiones son transformaciones de representaciones que consiste en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar del registro de la lengua natural al registro pictográfico, así: Un medio → (Fandiño Pinilla, 2010, p. 37).

Esta última transformación es la raíz de “los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático [… por su…] complejidad cognitiva […y por el…] cambio de representación” (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016, p. 85).

Figura 2. Clasificación de los diferentes tipos de registros movilizados en matemáticas.



Fuente: Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. trad.) (p. 71). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Metáfora

Lakoff y Johnson (1991) pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido; el papel del pensamiento metafórico en la formación de los conceptos matemáticos es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas (v.g. Van Dormolen, 1991; English, 1997; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2000; Núñez y Lakoff, 1998; D'Amore y Fandiño Pinilla, 2012).

Las metáforas se caracterizan por crear, entre un dominio de partida y un dominio de llegada, un puente conceptual que permite la transfusión de propiedades del dominio de partida en el domino de llegada. En otras palabras, crean un cierto "isomorfismo" que permite que se transpongan una serie de características y estructuras. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que no engloba su totalidad, la metáfora nos sirve para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y oculta otros aspectos, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes.

Las investigaciones sobre el pensamiento metafórico han detectado diferentes clases de metáforas. Un primer grupo lo constituyen las de tipo extramatemático (grounding), como la de "una función es una máquina", que sirven para explicar o interpretar situaciones matemáticas en términos de situaciones reales. Dos de los ejemplos más notables de este tipo para nuestra investigación son la del "contenedor" y la del "camino", la primera es usada para estructurar la teoría de clases, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora inconsciente, que tiene sus raíces en la vida cotidiana y que podemos visualizar de la siguiente manera:

Tabla 1. Las clases son contenedores

Dominio de partida **ESQUEMA DEL CONTENEDOR**		*Dominio de llegada* **CLASES**
Interior del contenedor	→	Clase
Objetos dentro del contenedor	→	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	→	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	→	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	→	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	→	La unión de clases
El exterior de un contenedor	→	El complementario de la clase

Nota. Fuente: Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics (p. 13). In T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of PME24*, vol.1. Hiroshima: Hiroshima University.

La metáfora del camino se puede observar en el discurso del profesor cuando este facilita la comprensión de la gráfica como un camino por el que uno camina o una línea por la que uno pasa:

> Lo que tenemos que hacer es crear una tabla de variación. *Si antes de cero está aumentando ... si después de cero está disminuyendo ... Si antes y después de cero está aumentando, entonces hay un punto de inflexión. Si antes de cero está aumentando y después de cero está disminuyendo, entonces hay un máximo*. *Si antes de*

> *cero está disminuyendo y después de cero está aumentando, entonces hay un mínimo*. (Dibuja una tabla de variación para esta función). (Acevedo, 2008, pp. 139-140)

De acuerdo con Talmy (2000), estos son ejemplos típicos de "movimiento ficticio" y se basan en el esquema de la imagen de un "camino". Este esquema permite una organización espacial: hay un origen (desde...), un camino (paso por, aquí, a lo largo) y un punto final (a...). Además, se refiere a una cosa que se está moviendo (un punto, un objeto) y cuya ubicación se puede conocer en un momento dado; en algunos casos, el punto de inicio es "menos infinito" y el punto final es "infinito positivo".

Podemos agregar que la "Gráfica de un camino" es una metáfora de tipo extramatemático (grounding), y el dominio de origen es el esquema de la imagen de un camino.

Tabla 2. *Gráfica de un camino*

Dominio de partida ESQUEMA DEL CAMINO		*Dominio de llegada* *GRÁFICA*
Camino	→	Gráfica
Origen del camino	→	Origen de la gráfica
Estar sobre el camino	→	Punto que pertenece a la gráfica
Una localización en el camino	→	Punto en la gráfica
Final del camino	→	Final de la gráfica (por ejemplo, más infinito)
Estar fuera del camino	→	Punto que no pertenece a la gráfica

Nota. Fuente: Font, V., Bolitte, J. y Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions (p. 145). *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2).

Un segundo grupo de metáforas, también frecuente en las aulas, lo constituyen las metáforas intramatemáticas (linking) las cuales permiten estructurar partes del conocimiento matemático a partir de otras partes ya conocidas. Ejemplos de este tipo son “los números reales son los puntos de una recta”, “los números complejos son vectores”, “las funciones de proporcionalidad son rectas que pasan por el origen de coordenadas", etc. A continuación, se presenta la metáfora de los números naturales como conjuntos.

Tabla 3. *Los números naturales como conjuntos*

Dominio de partida *CONJUNTOS*		*Dominio de llegada* *NÚMEROS NATURALES*
El conjunto vacío $\emptyset$	→	Cero
El conjunto que contiene al conjunto vacio $\{\emptyset\}$ (ejemplo, $\{0\}$)	→	Uno
El conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (es decir, $\{0, 1\}$)	→	Dos
El conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ (es decir, $\{0, 1, 2\}$)	→	Tres

El conjunto de sus predecesores (Construir siguiendo la regla anterior) →	Un número natural

Nota. Fuente: Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being* (p. 142). New York: Basic Books.

En esta metáfora se realiza la conceptualización desde una rama de las matemáticas como lo es la aritmética, en términos de otra rama de las matemáticas como lo es la teoría de conjuntos, se ve claramente que la perspectiva cognitiva es la conceptualización de los números a partir de los conjuntos.

Metodología

Esta investigación presenta un análisis de las representaciones de los conjuntos infinitos usadas en los libros de texto para la enseñanza de los números reales. Para la selección de los libros se siguió los siguientes procesos: 1) se preguntó a los profesores participantes qué libros utilizaban para enseñar los números reales, lo cual nos llevó a estudiar y examinar 35 libros diferentes, 2) los 35 libros en esta segunda fase se agruparon en tipos según las representaciones utilizadas, las problemáticas semióticas en las representaciones y las metáforas, y 3) se hizo un análisis detallado de las representaciones, de las problemáticas semióticas de las representaciones y de las metáforas, tal como se ejemplifican en el apartado siguiente.

Análisis de los datos

A continuación, se muestra un análisis de las problemáticas de las representaciones de los conjuntos infinitos y las metáforas de dos libros de texto, que hacen parte de dos de los cuatro tipos en los que se clasificaron los 35 libros analizados.

En un libro de grado octavo se define los números reales así: “Los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$ y los racionales $\mathbb{Q}$, conforman, junto con los irracionales $\mathbb{I}$, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$” (Dueñas, Garavito y Lara, 2007, p. 48); esta definición se ubica en el registro de la lengua natural, pero los autores presentan también el esquema de la figura 3 que se ubica como representación auxiliar. Hay una evidente contradicción entre las dos representaciones semióticas, la escrita y la figural, ya que si ubicamos una representación hipotética de dos números (puntos azules) en la representación auxiliar donde está la letra $\mathbb{R}$, se puede establecer que en esos lugares los números no pertenecen a $\mathbb{Q}$, ni a $\mathbb{I}$, entonces surge la siguiente pregunta: ¿Qué tipo de números se representarían en este lugar?; lo que tenemos en este ejemplo es un problema con la representación auxiliar, la cual no está representando correctamente el objeto matemático de los números reales, es decir, no existe una correcta coordinación de los dos registros (Duval, 1999; Duval y Sáenz-Ludlow, 2016).

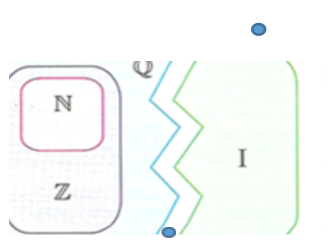


Figura 3: *Representación auxiliar en los $\mathbb{R}$*
Fuente: Dueñas, W., Garavito, A. y Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8* (p. 48). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Educar.

El esquema de la Figura 3, desde el punto de vista de los elementos metafóricos, se puede clasificar como un *esquema de contenedor* (es un esquema de imagen que se basa en la experiencia corporal) donde los elementos del contenedor forman la unidad, y tiene tres partes: el interior, el borde y el exterior; este esquema se relaciona con la metáfora conceptual de tipo extramatemático (grounding), donde el *esquema del contenedor* se encuentra en el dominio de partida y los números reales se encuentran en el dominio de llegada, y que haría parte de los ejemplos propuestos por Font (2007) de esta metáfora: *"Las clases son contenedores, los puntos son objetos y una función es una maquina*" (p. 118). En el esquema 1 (Figura 2) se puede comprender que la primera línea es el contenedor por lo tanto es la unidad, y en este caso todo lo que está al interior de esa línea serían los números reales, sin tener en cuenta las otras líneas interiores de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{I}$. La dificultad se presenta cuando tenemos tres contenedores el de $\mathbb{R}$, el de $\mathbb{Q}$ y el de $\mathbb{I}$, pero algunos objetos de $\mathbb{R}$ no están en $\mathbb{Q}$ ni en $\mathbb{I}$, entonces esto contradice la lógica del esquema de contenedor y a su vez el de números reales, porque tiene que existir objetos de $\mathbb{R}$, que estén en $\mathbb{Q}$ o en $\mathbb{I}$.

En la definición de un libro de grado once, se presentan los siguientes registros de representación: Algebraica: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ y $\mathbb{Z}=\{\ldots,-3, -2, -1, 0, 1,2,3,\ldots\}$, y gráfica (las rectas de los números naturales y enteros) (Figura 4):

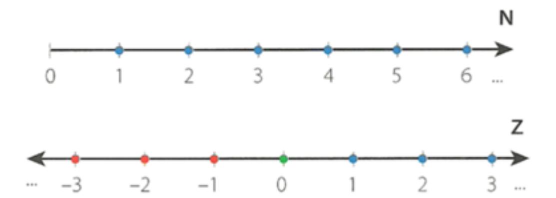


Figura 4: *Representación gráfica de* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{Z}$.
Fuente: Moreno, J., Roldán, D. y Romero, F**.** (2011). *Norma Matemáticas para pensar 11* (p. 12). Bogotá, Colombia: Carvajal Educación S.A.S.

En estos dos registros de representación se evidencian las siguientes problemáticas:

1) En el registro de representación algebraica se presenta en el conjunto de los números naturales su inicio desde 1, mientras que en la representación gráfica la recta de los números naturales empieza en 0, generando contradicción entre estos dos tipos de representaciones.
2) En el registro gráfico se presenta por parte de los autores del libro la semirrecta y la recta que representa los $\mathbb{N}$ y los $\mathbb{Z}$, lo que lleva a pensar a profesores y estudiante "que el número de enteros es el doble del número de naturales" (Arrigo, D'Amore y Sbaragli, 2011, p. 222); además, esta afirmación se fortalece cuando los profesores y estudiantes observan el registro gráfico y perciben que $\mathbb{N}$ tiene solo un verso hacia el infinito (positivo), mientras $\mathbb{Z}$ tiene dos versos hacia el infinito (uno positivo y uno negativo). Por lo tanto, $\mathbb{N}$ tiene más números que $\mathbb{Z}$, porque $\mathbb{N}$ tiene un infinito y $\mathbb{Z}$ tiene dos infinitos, argumento que no es válido y evidencia la problemática con este registro de representación.

Desde los elementos metafóricos se puede establecer la recta en este caso como la metáfora conceptual de la "gráfica de un camino", donde se establece en su esquema los siguiente elementos: origen o punto de partida (0 o menos infinito), un destino o punto final (más infinito), estar sobre el camino (en 1, 2, 3,.. o … -2, -1, 0, 1, 2, …), localización sobre el camino (1 o -2) y una ruta (serie de ubicaciones contiguas desde el origen hasta el destino).
Observamos dos tipos de situaciones con respecto a los puntos de inicio y fin del gráfico de los números naturales y de los números enteros con respecto al infinito. La primera se presenta cuando ya ha sido dibujado el gráfico de los números naturales y el de los números enteros (como los propuestos en los libros de texto), donde solo dibujan una parte de la recta y además le dejan al lector la interpretación en la recta numérica del infinito; por ejemplo, en la gráfica de la recta de los números enteros, se comienza en menos infinito y termina en más infinito, utilizando la flecha o los puntos suspensivos para sugerir que la recta continua en ambos sentidos, por lo tanto, ambos infinitos están fuera del gráfico dibujado.

La segunda situación se presenta cuando el docente dibuja un gráfico (en el tablero o con el software Cabri o Geogebra) generando una trayectoria con un punto desde el origen (0 o menos infinito) hasta que alcanza su punto final (más infinito), generando problemáticas con el concepto de la continuidad y nuevamente con el infinito en la recta numérica.

Si bien existen más problemáticas con los registros de representación y las metáforas en los libros de texto, solo se centró la atención en los anteriores análisis como una introducción a la falta de conciencia semiótica por parte de los autores de los libros de texto; los profesores se dejan conducir y guiar en la elección de las representaciones semióticas utilizadas para la enseñanza de los conjuntos infinitos.

Resultados

Se identificaron y describieron (a partir de los constructos teóricos propuestos anteriormente) tres problemáticas en las representaciones de los conjuntos infinitos, que están relacionadas con: 1) el registro de la lengua natural y la representación auxiliar, 2) el registro algebraico y el registro gráfico y 3) el registro gráfico y el registro de la lengua natural; se debe destacar que estas problemáticas son novedosas en la literatura de didáctica de la matemática.

Con respecto a las metáforas, se identificaron y describieron las problemáticas en la metáfora *esquema de contenedor* y la metáfora conceptual *"gráfica de un camino"*. Estas problemáticas que se identificaron y describieron en las representaciones de los conjuntos infinitos y en las metáforas en los libros de texto, permitirán identificar algunas manifestaciones de la conciencia semiótica que se producen en el profesor al problematizarle su elección de representaciones semióticas en el proceso de aprendizaje de los conjuntos infinitos. En la tesis doctoral se ampliarán estos análisis de las problemáticas semióticas de las representaciones de los conjuntos infinitos y las metáforas presentadas por el profesor en el aula de clase para dar respuesta a la pregunta de investigación doctoral.

Conclusiones

Los problemas que se presentan en las representaciones de los conjuntos infinitos apoyados algunas veces por las metáforas, aunque hayan sido evidenciados por las investigaciones en didáctica de la matemática, se siguen presentando en la enseñanza de los profesores que actualmente están en ejercicio y en formación. Por lo tanto, pensamos que se debe generar un cambio en la conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones utilizadas en la enseñanza de los conjuntos infinitos, teniendo en cuenta las metáforas.

El presente estudio proporciona, además, datos empíricos que demuestran que las metáforas conceptuales son herramientas relevantes para analizar no solo los libros de texto, sino el discurso matemático de los profesores en el aula, lo que contribuirá a una mejor comprensión de las representaciones de los conjuntos infinitos por parte de los estudiantes de secundaria y de universidad.

Referencias bibliográficas

Acevedo, J. I. (2008). *Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones*. (Tesis doctoral no publicada). Barcelona, España, Universitat de Barcelona.

Arrigo, G. y D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5-24.

Arrigo, G., D'Amore, B. y Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento, Italia: Erickson. [Versión en idioma español: (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá, Colombia: Magisterio].

D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. *11*, 63-71.

D'Amore, B. y Fandiño, Pinilla M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. Firenze: Giunti Scuola. II edición 2016.

D'Amore, B., Fandiño, Pinilla M. I. y Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

Dueñas, W., Garavito, A. y Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Educar.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(4), 385-414.

Duval, R. (1993). Registres de Répresentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitive, 6*(5), 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de la matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Duval R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En: Radford L., Schubring G., Seeger E. (Eds) (2008). *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture*. Rotterdam: Sense Publishers. 39-61.

Duval, R. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (M. Acosta, P. Perry. trad.). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, N.J: Erlbaum.

Fandiño Pinilla M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Fishbein, E., Tirosch, D. y Hess, P. (1979). "The intuitions of infinity". *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3-40.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, *19*(2), pp. 95-128.

Font, V., Bolitte, J. y Acevedo, J. (2010). Metaphors in mathematics classrooms: analyzing the dynamic process of teaching and learning of graph functions. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 131-152.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Moreno, L. y Walddeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Education Studies in Mathematics*, *22*(3), 211-231.

Moreno, J., Roldán, D. y Romero, F**.** (2011). *Norma Matemáticas para pensar 11*. Bogotá, Colombia: Carvajal Educación S.A.S.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of PME24*, vol.1 (pp. 3–22). Hiroshima: Hiroshima University.

Nuñez, R. y Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ε-δ continuity. *Mathematical cognition, 4*(2), 85-101.

Talmy, L. (2000). *Toward a cognitive semantics*. Cambridge, MA: MIT Press.

Tsamir, P. (2000). La comprensione dell′infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matemática e la sua didattica*, *2*, 167-207.

Van Dormolen, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. En A. J. Bishop & S. Melling Olsen (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 89-106). Dordrecht: Kluwer A. P.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA EN ANÁLISIS E INTERVENCIÓN DIDÁCTICA EN UN CICLO FORMATIVO QUE COMBINA EL USO DE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA Y LA METODOLOGÍA DE ESTUDIOS DE CLASES

DEVELOPMENT OF THE DIDACTIC ANALYSIS COMPETENCE IN A FORMATIVE CYCLE THAT COMBINES THE USE OF THE CRITERIA OF DIDACTIC SUITABILITY AND THE METHODOLOGY LESSON STUDY

Viviane Beatriz Hummes, Adriana Breda, Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona (España)
vivihummes@gmail.com, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu

Resumen
En este trabajo se presenta una investigación cuyo objetivo general es analizar cómo se desarrolla la competencia en análisis e intervención didáctica en profesores de matemáticas que participan de un ciclo formativo basado en los Criterios de Idoneidad Didáctica y en los Estudios de Clase. Para ello se realizará un estudio de caso que consistirá en el diseño, aplicación y evaluación de un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en las dos teorías. Dado que la investigación está en una fase inicial, se presentan los presupuestos teóricos y metodológicos para la realización y análisis de la investigación, así como las expectativas en relación a los resultados esperados.

Palabras clave: criterios de idoneidad didáctica, estudios de clase

Abstract
This paper presents a research whose general objective is to analyze how the competence in analysis and didactic intervention in mathematics teachers who participate in a training cycle based on the Criteria of Didactic Suitability and Lesson Study. For this, a case study will be carried out that will consist of the design, application and evaluation of a training cycle for teachers of mathematics in exercise based on the two theories. Since the research is in an initial phase, the theoretical and methodological assumptions for the realization and analysis of the research are presented, as well as the expectations in relation to the expected results.

Key words: criteria of didactic suitability, lesson study

Introducción

La enseñanza por competencias se ha convertido en una tendencia mundial y es tema de discusión de muchos colectivos académicos de diferentes países. Ahora bien, para que el profesor pueda desarrollar las competencias de sus alumnos en la educación básica, es importante que él tenga las competencias profesionales docentes para ello. En esta perspectiva, la formación didáctica de los profesores viene despertando el interés de investigadores de la Educación Matemática, pues "[...] el desarrollo del pensamiento y las competencias matemáticas básicas de los alumnos depende, de manera esencial, de esa formación." (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017, p. 91).

Según Breda, Font y Pino-Fan (2018), muchas tendencias en relación con la formación de profesores, sea inicial o continua, sugieren la investigación de los docentes y la reflexión sobre la propia práctica como fundamental para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. Desde la Didáctica de las Matemáticas han surgido diferentes propuestas que proporcionan marcos conceptuales relacionados con el desarrollo de la competencia reflexiva, tales como: la metodología Estudio de Clases (Fernández & Yoshiba, 2004) y la competencia en análisis e intervención didáctica en el Enfoque Ontosemiótico (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018).

La metodología Estudios de Clase, por ejemplo, consiste en una actividad de investigación en el aula, que fomenta el desarrollo de la competencia reflexiva durante la realización de la actividad docente. Por otro lado, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), propone el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (CI) como una herramienta para estructurar la reflexión del profesor. Dichos criterios pueden servir tanto para guiar a priori los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas como para valorar a posteriori su implementación (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Las ideas descritas hasta aquí comprenden un campo complejo y singular en lo que se refiere a los aspectos de la formación del docente del área de Matemáticas, dado que el desarrollo de la reflexión sistematizada sobre la propia práctica es un elemento clave para que el docente pueda desarrollar la competencia en análisis e intervención didáctica y, a su vez, desarrollar las competencias en matemáticas de sus alumnos.

A partir de lo expuesto, cabe entonces la siguiente cuestión de investigación: ¿de qué forma (o en qué medida) se desarrolla la competencia en análisis e intervención didáctica en profesores de matemáticas en ejercicio cuando estos participan de un ciclo formativo basado en el uso combinado de la metodología de los Estudios de Clase y los Criterios de Idoneidad Didáctica?

En este sentido, el objetivo de esta investigación, que se encuentra en su fase inicial, es analizar cómo se desarrolla la competencia en análisis e intervención didáctica en profesores de matemáticas en ejercicio que participan de un ciclo formativo basado en el uso de los Criterios de Idoneidad y en los Estudios de Clase.

Para alcanzar el objetivo general, se hace necesario enumerar algunos objetivos específicos, entre ellos:

a) Realizar una profundización teórica relacionada con los Estudios de Clase y los Criterios de Idoneidad Didáctica, buscando comprender cómo cada uno propone el desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica en la formación de profesores, buscando complementariedades entre ambos enfoques;

b) Hacer una revisión bibliográfica de las investigaciones que tratan del desarrollo de la reflexión sobre la práctica propia o ajena en profesores en ejercicio o en formación con base en los Estudios de Clase y en los Criterios de Idoneidad Didáctica;

c) Diseñar, aplicar y evaluar un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en los Estudios de Clase y en los Criterios de Idoneidad Didáctica, cuyo objetivo sea que los participantes diseñen, implementen, valoren y rediseñen secuencias de tareas para sus alumnos de enseñanza básica.

d) Analizar en qué medida el ciclo formativo implementado desarrolla la competencia en análisis e intervención didáctica en los profesores de matemáticas participantes.

Dado que la investigación está en una fase inicial, en las siguientes secciones, se presentarán los presupuestos teóricos y metodológicos para la realización y análisis de la investigación, así como las expectativas en relación a los resultados esperados.

El Enfoque Estudios de Clase (*Lesson Study*)

Una de las naciones que más se destaca en el escenario internacional en educación, en especial por su alto rendimiento y desempeño en evaluaciones, es Japón. En ese país un elemento central, incorporado en todo su sistema educativo, es el enfoque Estudios de Clase. La *Lesson Study* o *Jugy Kenkyuu* surgió como estrategia de desarrollo profesional docente cuyo foco está en el aprendizaje colectivo y en la práctica lectiva de los profesores. Inicialmente fue difundida por Stigler y Hiebert (1999) en los Estados Unidos y, en los últimos años, otros países vienen realizando procesos de enseñanza y aprendizaje utilizando esa metodología. En Brasil y Portugal se conoce como *Estudos de Aula* (Cardoso, 2006; Baldin, 2009; Felix, 2010; Ponte, Baptista, Velez, & Costa, 2012; Coelho, 2014; Utimura, 2015). Las investigaciones de diferentes países destacan que los Estudios de Clase incentivan la reflexión y la colaboración entre profesores y promueven el aprendizaje de los alumnos, el desarrollo profesional y el perfeccionamiento del currículo.

Según Ponte, Quaresma, Mata-Pereira y Baptista (2016), en los Estudios de Clase los profesores realizan una actividad de investigación de clase, es decir, una pequeña investigación de la propia práctica profesional. Los profesores, en conjunto, identifican las dificultades de los estudiantes, establecen alternativas curriculares para tratar determinados conceptos y preparan una clase que consideran tener potencial para tener éxito. A continuación, a partir de observaciones realizadas de las clases, los profesores analizan qué objetivos son atendidos y cuáles obstáculos se manifiestan durante la práctica.

Los Estudios de Clase son fundamentalmente metodologías de trabajo docente apoyadas en actitudes investigativas y prácticas colaborativas entre profesores, que tienen al mismo tiempo la calificación de la práctica docente, la mejora del aprendizaje de los estudiantes y el progreso profesional de los profesores. Se desarrollan básicamente en cuatro etapas.

1) Planificación de la clase: un grupo de profesores elige los temas a desarrollar; establece los objetivos para los aprendizajes y el desarrollo de los alumnos; elige el material didáctico; y apunta las expectativas sobre posibles respuestas y el comportamiento de los estudiantes frente a las cuestiones propuestas.

2) Realización y observación de la clase: un profesor comparte su clase mientras los demás observan y registran el proceso de enseñanza y aprendizaje. Un profesor acepta ser observado para que los demás puedan observar la clase en vivo. La participación de los alumnos es activa en cada etapa de resolución de las cuestiones propuestas, desde la comprensión del problema, el establecimiento de estrategias y análisis de la resolución, estimulando el cuestionamiento y el descubrimiento de los estudiantes.

3) Reflexión conjunta sobre los datos registrados: después de la clase, los profesores (observados y observadores) se reúnen para evaluar los procesos observados, reflexionando sobre las actitudes de los alumnos y del profesor durante la clase. El grupo hace un análisis de la clase, teniendo en cuenta sus perspectivas, tanto de enseñanza y del

área en sí. Con el fin de comprender la dinámica real de la clase, en términos de la enseñanza y de los aprendizajes, hacen relaciones con el plan de clase preestablecido y cuestiones transversales acerca del proceso; sistematizan el ciclo para consolidar, apoyar y desarrollar nuevos aprendizajes y nuevas cuestiones para el ciclo siguiente.

4) Reanudación: a partir de las discusiones realizadas en la etapa anterior, el plan de clase es reestructurado considerando los apuntes del grupo. Se aplica en otra clase y se inicia un nuevo ciclo.

A partir de un breve recorrido de investigaciones brasileñas sobre Estudios de Clases en Brasil, es posible identificar pocos trabajos de ámbito académico. Destacamos tres trabajos de conclusión de cursos de maestría. Felix (2010) en su investigación, una de las primeras investigaciones académicas de Estudios de Aula en Brasil, propone una discusión acerca de la práctica docente del propio autor en escuelas públicas del Estado de São Paulo, en especial sobre la enseñanza en los sexto y séptimo año de la enseñanza fundamental. Destaca que las consideraciones post-aulas posibilitan una nueva perspectiva sobre las actividades realizadas por los estudiantes, evidenciando un crecimiento en las evaluaciones.
Coelho (2014) en una experiencia realizada en el Instituto de Matemáticas de la UFRJ en la formación inicial de profesores de matemáticas, analizó las contribuciones del abordaje Estudios de Clase en la formación continuada de profesores. La metodología reveló gran potencial pedagógico favoreciendo el desarrollo de saberes docentes.

Utimura (2015) desarrolló un proyecto de docencia compartida bajo el enfoque del abordaje Estudios de Clase en una escuela municipal de enseñanza fundamental de São Paulo. Se analizó las potencialidades del proyecto en una clase de cinco años y destacó que las profesoras participantes de la investigación evolucionaron tanto en sus concepciones matemáticas como didácticas y de esta forma, con el paso del tiempo se sintieron más confiados para planificar y realizar sus clases.

■ Los criterios de idoneidad propuestos por el EOS

Para realizar la investigación, se hace necesario aclarar qué teorías harán el aporte teórico de la investigación. En esta perspectiva, utilizaremos los Criterios de Idoneidad Didáctica propuestos en el marco teórico denominado Enfoque Onosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007), teoría emergente en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

La noción de idoneidad didáctica es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

1) Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas".
2) Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
3) Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
4) Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5) Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,…) de los alumnos durante el proceso de instrucción.

6) Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa. Cada uno de estos criterios puede ser desglosado en componentes e indicadores a manera de rúbrica, con el fin de hacerlos operativos. Se detallan a continuación los criterios y componentes de idoneidad didáctica (por cuestiones de espacio no se detallan los indicadores) (Tabla 1).

Tabla 1- Criterios y componentes de idoneidad

Criterio de Idoneidad	Componente
Epistémica	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad
Cognitiva	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectiva	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológica	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Nota: Basado en Breda y Lima (2016).

En la revisión de la literatura sobre el uso de los criterios de idoneidad didáctica, se hallan diferentes investigaciones sobre formación de profesores de matemáticas, como las descritas en Breda (2016) o Morales y Font (2017), en las cuales se usa dicho constructo, pero no se hace en el marco de un dispositivo formativo pensado expresamente para enseñar este constructo como herramienta para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica. Por ejemplo, para el caso del profesorado en servicio, en Breda (2016) se presentan las características del análisis didáctico realizado por el profesorado de Brasil que cursa el *Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional* para justificar que sus propuestas son innovadoras y representan una mejora en la enseñanza de las matemáticas. Para dicha caracterización se usó el constructo de los criterios de idoneidad didáctica para inferir las razones utilizadas para justificar la calidad de la innovación que proponían. Los resultados muestran que las justificaciones dadas por el profesorado se basan, sobre todo, en el uso implícito de los criterios epistémico, ecológico y mediacional y, en menor medida, en el uso de los criterios cognitivo, emocional e interaccional. Además, se muestra que quienes implementaron sus propuestas contemplaron los criterios de idoneidad didáctica de una forma más detallada que aquellos que no las implementaron.

Otro ejemplo se tiene en Morales y Font (2017), donde se analizan las reflexiones sobre la práctica del futuro profesorado de matemática de secundaria en Costa Rica. Se examinaron los portafolios que éstos elaboran durante su práctica, tomando como base las crónicas que los futuros profesores escriben y explorándolas a la luz del constructo criterios de idoneidad didáctica. Los resultados muestran que: 1) El profesorado expresa comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración, 2) emergen tipos de análisis que se pueden considerar evidencias de alguno de las facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas (Pino-Fan, Font y Breda, 2017) y 3) cuando las opiniones son valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos (pocos) indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica y las reflexiones que los evidencian son superficiales.

Por otra parte, en la revisión de la literatura se observa el uso de los criterios de idoneidad didáctica como contenido a explicar para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica en grados (Seckel, 2016) y postgrados (Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018).

Metodología

Esta investigación es de carácter exploratorio, porque poco se sabe sobre el fenómeno que nos interesa, analizar cómo se desarrolla la competencia en análisis e intervención didáctica en profesores de matemáticas en ejercicio que participan de un ciclo formativo basado en los Criterios de Idoneidad, propuestos por el EOS (Breda, Font & Pino-fan, 2018) y en los Estudios de Clase (Fernández & Yoshida, 2004); y también analítico- interpretativo, pues busca analizar en qué medida tal ciclo puede promover la competencia en análisis e intervención didáctica en los profesores de matemáticas participantes.

Para ello, se realizará un estudio de caso referente a un ciclo formativo, con profesores en ejercicio que participan de un máster profesional en Enseñanza de Matemáticas, basado en las dos teorías, para el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias didácticas.

Los participantes serán profesores de matemáticas en ejercicio que participan de un máster profesional en enseñanza de las matemáticas en una institución pública de enseñanza superior ubicada en el sur de Brasil. Como metodología de recolección de datos se utilizarán entrevistas, cuestionarios, registro de observaciones en diarios de campo, grabaciones de videos, intervenciones reflexivas, grupos de discusión, entre otros. El análisis de los datos se realizará con base en los Estudios de Clase y en los Criterios de Idoneidad Didáctica propuestos por el EOS.

Los procedimientos de recolección y análisis de los datos se van a dar en diferentes etapas. La primera etapa se constituirá en el diseño de un ciclo formativo en lo cual, con base en los Estudios de Clase, los profesores participantes diseñen, implementen y analicen una secuencia didáctica (primera reflexión). En la segunda etapa se realizará un análisis de la reflexión realizada por esos profesores en el momento en que evalúan y valoran la secuencia implementada, buscando estudiar los argumentos dados por ellos para un posible rediseño de la secuencia previamente implementada. En la tercera etapa se realizará un proceso de formación de estos profesores con base en los Criterios de Idoneidad Didáctica, con el fin de que ellos hagan una valoración, rediseño y un re análisis de la implementación de la unidad didáctica previamente implementada y analizada (segunda reflexión). Por último, se buscará un entrelazamiento entre el proceso de realización del ciclo formativo y los argumentos dados por los profesores en sus análisis con el fin de analizar en qué medida el ciclo formativo realizado desarrolla la competencia en análisis didáctico de los profesores participantes.

Resultados esperados y perspectivas futuras

Desde una perspectiva teórica, se espera identificar relaciones convergentes entre los Estudios de Clase (Fernández & Yoshida, 2004) y los Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda, Font y Lima, 2015) que contribuyan para el desarrollo de la competencia en análisis e intervención didáctica en la formación de profesores. Se espera, también, que un ciclo formativo para profesores de matemáticas en ejercicio basado en los Estudios de Clase y en los Criterios de Idoneidad Didáctica muestre como en la fase de reflexión realizada van apareciendo de manera implícita algunos de los componentes e indicadores de los Criterios de Idoneidad. Este hecho se utilizará para que la metodología de Estudios de Clases se convierta en un tipo de dispositivo de formación que favorece que los Criterios de Idoneidad surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores. Por último, se espera mostrar cómo una segunda reflexión sobre la clase estudiada, guiada esta vez por los criterios de Idoneidad Didáctica, enriquece la primera reflexión realizada.

Agradecimientos

Este trabajo se desarrolla en el contexto del proyecto de investigación en formación del profesorado REDICE18-2000 (ICE-UB) y con el apoyo de una beca financiada por la CAPES, agencia federal brasileña de apoyo y evaluación de la educación de postgrado del Ministerio de Educación de Brasil.

Referencias bibliográficas

Baldin, Y. Y. (2009). O significado da introdução da metodologia japonesa de Lesson Study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. *Anais do XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão*, São Paulo, SP, Brasil, 09.

Breda, A. (2016). *Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado profmat no rio grande do sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso*. (Tesis de Doctorado no publicada). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil

Breda, A., Font, V., & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(1), 4-41.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32(*60), 255-278.

Breda, A., Font, V. y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Cardoso, C. (2006). Estudos de aula. Contributo para uma cultura participada de desenvolvimento profissional e da qualidade do ensino e das aprendizagens. *A página da educação*, *161*(1), 8-8.

Coelho, F. G. (2014). *A metodologia da Lesson Study na formação de professores: uma experiência com licenciados de matemática.* Dissertação de mestrado não publicada, Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Felix, T. F. (2010). *Pesquisando a melhoria de aulas de matemática segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study)*. Dissertação de mestrado, Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil.

Fernández, C., & Yoshiba, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, 44, e172011, 1-21.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2017). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Educationan*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 90-113.

Morales, Y. y Font, V. (2017). Análisis de la reflexión presente en las crónicas de estudiantes en formación inicial en educación matemática durante su periodo de práctica profesional. *Acta Scientiae*, *19*(1), 122-137.

Ponte, J. P., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Pesquisas em Formação de Professores na Educação Matemática*, *5*(1), 7-24.

Ponte, J. P. D., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). Lesson Study as a Professional Development Process of Mathematics Teachers. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(56), 868-891.

Seckel M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona.

Stigler, J., & Hierbert, J. (1999). *The Teaching Gap*. New York: Free Press.

Utimura, G. (2015). *Docência compartilhada na perspectiva de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no 5 ano*. Dissertação de mestrado, Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.

LA MODELACIÓN EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA: SUS MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN Y EL IMPACTO EDUCATIVO EN LA FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

MODELLING IN MATHEMATICS EDUCATION: METHODS OF RESEARCH AND THE EDUCATIONAL IMPACT ON THE TRAINING AND DEVELOPMENT OF MATHEMATICS TEACHERS

Francisco Cordero, Jhony Alexander Villa-Ochoa, Milton Rosa, Liliana Suárez-Téllez, Pablo Carranza, E. Johanna Mendoza-Higuera

Centro de Investigación de Estudios Avanzados-IPN (México). Universidad de Antioquia (Colombia). Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil). Instituto Politécnico Nacional (México). Universidad Nacional de Río Negro (Argentina), Universidad Industrial de Santander (Colombia)

fcordero@cinvestav.mx, jhony.villa@udea.edu.co, milton@cead.ufop.br, lsuarez@ipn.mx, pcarranza@unrn.edu.ar, edijomen@uis.edu.co

Resumen

El desarrollo de la educación contemporánea de la matemática considera el conocimiento matemático dentro y fuera de la escuela, e integra la *modelación* para que la matemática sea usada en la vida del ciudadano. Esto conlleva examinar una *categoría matemática,* para la escuela, que *valore las relaciones horizontales y recíprocas entre la matemática y el mundo real*. Para tal fin se consideraron aproximaciones teóricas en el contexto de la *construcción social del conocimiento matemático*: *la socio-crítica*, la *reproducibilidad*, la *etnomatemática*, la *socioepistemología* y el *ecosistema interdisciplinar.* Los principios que subyacen en estas aproximaciones norman los *programas de la modelación matemática*. Con este marco se reflexionó sobre el *impacto educativo* de estos programas y el rol del docente de matemáticas.

Palabras clave: modelación y categoría matemática, realidad, educación

Abstract

The development of contemporary mathematics education considers mathematical knowledge inside and outside the school and integrates modeling so that mathematics is used in real life of the citizens. This involves examining a mathematical category at school, that values the horizontal and reciprocal relationships between mathematics and the real world. For the context of this article, theoretical approaches are considered in relation to the social construction of mathematical knowledge: socio-critical perspective, the reproducibility, ethnomathematics, socioepistemology and interdisciplinary ecosystems. The principles that underlie these approaches regulate the programs of mathematical modelling. With this framework we reflect on the educational impact of these programs and the role of the mathematics teachers.

Key words: modeling and mathematical category, reality, education

Introducción

El *Grupo de Discusión la Modelación Matemática y la Matemática Educativa* (conformado por los autores de este artículo; quienes participaron como ponentes en el Grupo de Discusión, en las actividades del Relme 32) reflexionó y cuestionó sobre la diversidad de Programas de Modelación Matemática según las aproximaciones teóricas. Enmarcó la reflexión en la *construcción social del conocimiento matemático* debido a que la demanda educativa de estos programas consiste en que *la matemática sea usada en la vida del ciudadano*. Este hecho conlleva *estudiar la matemática fuera de la escuela*, lo que deriva en significados sobre la *educación de la matemática*, la *pluralidad matemática*, el *impacto educativo* y la *formación y desarrollo* de la práctica docente. Sin embargo, dependiendo de qué se entiende por “educación matemática”, se encuentran diferentes pronunciamientos en relación con la utilidad de la matemática en la educación. Blum y Borromeo-Ferri (2009) afirman que la modelación matemática puede apoyar el aprendizaje de las matemáticas en términos de motivación, comprensión y retención. Pero también existen tensiones; por ejemplo, los investigadores han buscado distinciones entre lo que constituyen las tareas de resolución de problemas y lo que forma una tarea de modelación. Aún no se logran poner de acuerdo (Zawojewski, 2013). Además, como lo mencionan Hirsh & McDuffie (2016), un desafío adicional para la educación matemática es la falta de comprensión de la modelación matemática en contraste con la matemática de la modelación. El avance es innegable, la modelación matemática en la enseñanza juega hoy un papel importante en educación matemática. Sin embargo, nos gustaría llamar la atención hacia otro aspecto. En este panorama, la base para definir lo que es modelación matemática es la ciencia; por ejemplo, el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM) dice que *modelar significa usar matemáticas o estadística para describir una situación del mundo real y deducir información adicional de la situación por el cálculo y análisis matemático y/o estadístico* (Common Core Standards Writing Team, 2013). La definición es viable, seguramente para modeladores matemáticos, y para los que creen en la modelación para la educación matemática. Pero aquí nuestros cuestionamientos: *¿la gente (o el ciudadano), cómo modela?; ¿cómo usa la modelación la gente?*

El epílogo de este apartado podría ser que el desarrollo de la educación de la matemática ha considerado, entre otros aspectos, entender el conocimiento matemático en la escuela y fuera de ella, e integrar la modelación matemática para que la matemática sea usada en la vida del ciudadano y en la fuerza de trabajo. Ambas orientaciones coinciden en un principio: “relacionar” la matemática con el mundo real. Sin embargo, la tensión radica en el constructo “relación”. Una asume como conocimiento verdadero el de la escuela (o el académico) por lo cual “mide” la emulación de ese conocimiento en el cotidiano, y la otra, privilegia las “acciones” sobre la modelación matemática. Nosotros, sostenemos que hay una categoría de la matemática que valora las relaciones horizontales y recíprocas entre la matemática y el mundo real y dejamos que ahí se construyan las modelaciones que sucedan (Orey & Rosa, 2015; Villa-Ochoa & Berrío, 2015; Carranza, 2016; Cordero, 2016).

Marco referencial

La perspectiva socio-crítica y el programa de modelación

Villa-Ochoa, Rosa y Gavarrete (2018) apuntan que existen comprensiones diferenciadas de la modelación, de sus propósitos y alcances en el ámbito de la Educación Matemática. En Latinoamérica: hay una “comprensión y uso de la modelación en la que se busca matematizar determinadas ideas, procedimientos o prácticas matemáticas presentes en la cotidianidad de diferentes grupos culturales” (p. 7-8). Para los autores, la modelación matemática, además de los aspectos conceptuales, también ha puesto la atención en

> [...] los intereses de los sujetos que modelan, sus relaciones con la cultura y las comunidades en las que se involucra, las necesidades e intereses que motivan el estudio de fenómenos a través de la matemática, y el uso no subordinado de contextos, los conocimientos propios de la sociedad y la cultura (p. 9).

En coherencia con estos planteamientos, la perspectiva sociocrítica (Araújo, 2009; Barbosa, 2006) de la modelación se preocupa por trascender el interés en los aspectos conceptuales y el desarrollo de competencias por la configuración de ambientes que promuevan la participación crítica de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas (Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016) y en la sociedad a través de discusiones sobre cuestiones políticas, económicas ambientales en las cuales las matemáticas sirven como soporte tecnológico (Araújo, 2009). En la perspectiva sociocrítica, la atención se dirige a develar el uso de las matemáticas en la sociedad.

La reproducibilidad y el programa de modelación en la práctica docente

La investigación educativa es una de las fuentes de las innovaciones en el salón de clase. A una década de trabajar en el Seminario Repensar las Matemáticas, la lectura de artículos científicos con profesores de matemáticas universitarios, Soto, Luna y Navarro (2016) han encontrado que uno de sus principales intereses se concentra en las tareas matemáticas que se presentan en las investigaciones de corte teórico, o que forma parte de los experimentos de enseñanza, en las investigaciones empíricas. Para entender los procesos de transformación, al incorporar la modelación en el salón de clases, se considera importante investigar cuáles son los elementos de reproducibilidad de las tareas de modelación graficación. Tomando como referencia una tarea de Modelación-Graficación con tecnología (Suárez, 2014), presentada desde una perspectiva socioepistemológica, se buscaron reportes de investigaciones que la retomaran para analizar las adecuaciones que sufrió en su diseño. Las categorías de análisis de la adecuación de la tarea que encontramos son 1) la fundamentación epistemológica, 2) los elementos didácticos del rediseño de la tarea y 3) las consideraciones metodológicas de la instrumentación de la tarea y el análisis de resultados. Profundizar la investigación sobre los usos de diversas tareas de modelación (Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona, 2017) dentro de la comunidad de investigación, para identificar los elementos que se reproducen, por un lado, y comprender los elementos que se rediseñan, por otro, pueden aportar conocimiento sobre las condiciones de integración de la modelación en la práctica docente.

Las etnomatemáticas y la modelación: etnomodelación

La etnomodelación es la utilización de las etnomatemáticas por medio de la modelación de situaciones y problemas que están presentes en el cotidiano de los miembros de grupos culturales distintos y tiene por objetivo la ampliación y el perfeccionamiento de su conocimiento matemático, pues alude al fortalecimiento de la identidad y de las raíces culturales de estos individuos, como seres autónomos y capaces (Rosa & Orey, 2003). De esa manera, los enfoques que delinearán esta acción pedagógica están relacionados con los sistemas de conocimientos vinculados al cotidiano de los miembros de grupos culturales distintos, que pueden ser *matematizados* y *traducidos* al lenguaje de otros sistemas de conocimientos matemáticos (Rosa & Orey, 2017). Así, *matematizar* ideas, procedimientos y prácticas matemáticas desarrolladas por estos miembros significa trabajar con las etnomatemáticas (D'Ambrosio, 1990). En consecuencia, partiendo del principio de que la *matematización* es una de las etapas más importantes de la modelación matemática, pues en esta etapa sucede la traducción de situaciones y problemas para el lenguaje matemático académico, Rosa & Orey (2017) argumentan que la modelación es una de las posibles propuestas para iniciar la acción pedagógica para las etnomatemáticas, pues la etnomodelación proporciona a los estudiantes una acción pedagógica que conecta estas prácticas matemáticas a las prácticas proporcionadas por la adquisición de los conocimientos matemáticos académicos.

El ecosistema interdisciplinar y el programa de modelación

En la Universidad Nacional de Río Negro, Argentina, estamos realizando proyectos interdisciplinarios vinculados a la comunidad a partir de la clase de Matemática (Carranza 2016). Estos proyectos buscan darle sentido al aprendizaje. La dinámica principal consiste en promover que las disciplinas emerjan como herramientas racionales para las tomas de decisiones que el proyecto demanda. Para ello, un conjunto de características nos resulta necesario:

a) *Demanda de precisión*: las cuestiones a tratar requieren precisión en su tratamiento y procesos de modelación para favorecer la aparición de conceptos disciplinares; b) *Integración de tiempos*: usualmente, el aprendizaje es percibido por muchos estudiantes como una inversión para el eventual futuro profesional. Nosotros consideramos que el aprendizaje debe ser de utilidad para el hoy también (Carranza 2016); c) *Integración con la comunidad*: los proyectos se orientan a dar una respuesta real y concreta a un problema de la comunidad (Chrestia, Carranza, Quijano, Goin y Sgreccia, 2015). Entendemos que el aprendizaje debe ser de beneficio personal para el estudiante pero también colectivo y esto de manera directa; d) *Integración de disciplinas*: los problemas reales raramente son abordables desde una sola disciplina; y e) *Integración de personas e instituciones*: los proyectos son intencionalmente complejos, ellos requieren del trabajo colectivo no solo entre estudiantes sino también entre carreras y entre instituciones (Carranza, Sgreccia, Quijano, Goin y Chrestia, 2017).

La socioepistemología y el programa de modelación

Asumimos un principio P´: la matemática funcional propia de la gente en la *relación recíproca y horizontal entre la matemática y el cotidiano*. Este *P´* genera una categoría de modelación ζ(Mod) que pone en juego el uso del conocimiento matemático, **U**(CM), de la gente, en situaciones específicas. Con este supuesto no preexisten *la Realidad* ni la *Matemática*. Se considera que la gente vive entre situaciones diversas, S_k . Entonces en el tránsito entre S_k, suceden epistemologías E_j (pluralidad) y transversalidades T_n (resignificaciones). Sin embargo, las S_k podrían estar sobre dominios de conocimiento D_m y en las alternancias entre los D_m. Siendo así, la categoría de modelación es la resignificación de usos, Res(**U**(CM), cuando sucede un tránsito entre S_k y S_m, incluso en alternancia de dominios. Este es el conocimiento que genera ζ(Mod) y se compone de dos ejes: *la institucionalización* y *la transversalidad de saberes*, donde suceden situaciones S_{ij}, dominios D_j y alternancias de escenarios: *escuela-académico, trabajo-profesión y ciudad- cotidiano.* Al esquema de la relación de todos esos elementos, le llamamos *Marco del saber* matemático de ζ(Mod) (Cordero, 2017).

Algunos ejemplos

La modelación en el salón de clases

A manera de ejemplo, Villa-Ochoa (2016) utilizó el modelo matemático del crecimiento fetal para promover en los estudiantes (futuros profesores) experiencias en las que usen modelos ya construidos en otras disciplinas. Inicialmente, el autor promovió el reconocimiento de las variables que intervienen en el fenómeno y de algunas de las características propias del modelo en la representación gráfica; involucró a los estudiantes en una descripción y comprensión del modelo, para ello, promovió la participación de los estudiantes en la búsqueda de preguntas y cuestionamientos que pudieran ser resueltos a través del modelo. Posteriormente, involucró a los estudiantes en la exploración conceptual de la covariación entre las variables involucradas en el fenómeno. Se formularon preguntas como: ¿Se puede observar algún patrón de crecimiento fetal durante el curso de la gestación? ¿Cuáles factores pueden influir o determinar el peso al nacer? Existen etapas en el proceso de gestación ¿Cuáles podrían ser los intervalos en los cuales se caracterizan esas etapas? ¿Cuáles criterios podrían definirlas y cuáles serían los pesos fetales promedio en tales etapas? Dado que la modelación no es solo una herramienta para el aprendizaje de la matemática, se promovieron acciones que pudieran aportar al futuro desempeño profesional de los participantes. Para el caso de la investigación, el autor creó una fase, dentro de la modelación, en la que promovió reflexiones de la modelación y su uso en las futuras prácticas profesionales. A partir de la experiencia, Villa-Ochoa (2016) señaló que los estudiantes tienden a concentrar sus esfuerzos en la construcción de una expresión algebraica; ello, por el grado de confianza que genera la manipulación algebraica en la determinación de cantidades y descripciones sobre el fenómeno. Depositar la actividad matemática, conforme el autor documentó, en el análisis de modelos ya construidos, aportó para que los estudiantes reconocieran usos sociales de los modelos matemáticos; otras maneras de producción de conocimientos matemáticos en el aula; y que en los modelos matemáticos se puede romper reglas cuando se encuentran en un ámbito extramatemático.

La introducción de la modelación en la práctica docente

Para avanzar en la comprensión de cuáles son los aspectos de modelación que se reproducen en la práctica docente, se ilustra a continuación los elementos de una Situación de Modelación del Movimiento cuyo diseño está condicionado por los datos epistemológicos que aporta la categoría Modelación-Graficación para el estudio de la variación y el cambio (Suárez, 2014), a saber: *la graficación antecede a la función*, *la gráfica es argumentativa*, y *el uso de las gráficas tiene un desarrollo*. En ese sentido, en el diseño se consideraron los siguientes elementos: 1) la situación establecerá como condición el uso de las gráficas para estudiar un fenómeno de variación, de tal manera que sea propensa a generar preguntas sobre la variable con respecto al tiempo, o sobre cómo cambia, 2) la situación debe ser susceptible a simularse mediante una toma de datos de la variable (distancia, temperatura), en diversos instantes de tiempo, generando múltiples realizaciones, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo en el razonamiento, 3) se construirán argumentos relacionados con el funcionamiento del uso de las gráficas en la modelación. Conjuntando los elementos se espera, de parte de los participantes, una reorganización de sus conocimientos para establecer una nueva forma del uso de las gráficas para la realización de estas tareas y, también, se espera que los estudiantes hagan funcionales algunos de los argumentos construidos. Cabe mencionar, que este diseño se ha trabajado en talleres de formación docente en los que no se concibe al profesor sólo como un usuario de las actividades, sino que nos concentramos en sus decisiones en clase al convertirse en diseñador de situaciones de aprendizaje, que tome en cuenta sus contextos educativos y sus propios saberes. Los profesores proponen la planeación de una situación problemática trabajada a partir de la modelación graficación con tecnología. En la fase de planeación por parte de los docentes se observa–un avance al inventar o adaptar situaciones de aprendizaje para trabajar contenidos matemáticos de su asignatura con la modelación-graficación con tecnología. En cuanto al uso de la tecnología han hecho visibles el uso del celular (para sacar video) y del Tracker (programa que procesa el video y al determinar variables del movimiento grafica relaciones entre las variables), con ello se discute la complejidad de afrontar el reto de implementación de estrategias didácticas con tecnología de manera colegiada, en grupos de dos y tres profesores. En cuanto a las categorías que definen la reproducibilidad identificadas en la literatura tenemos que para los profesores: 1) la fundamentación epistemológica, los datos epistemológicos de la modelación-graficación en este caso, sirven como argumentos de justificación en el uso de la actividad, 2) los elementos didácticos del rediseño de la tarea representan una guía para la instrumentación de sus propias actividades de aprendizaje y 3) las consideraciones metodológicas de la instrumentación de la tarea y el análisis de resultados, hasta este momento no han sido trabajadas por los profesores. Estos primeros datos nos dan elementos para afirmar que los profesores toman de las investigaciones los aspectos prácticos y que sirven para implementar estrategias novedosas en sus salones de clase.

La modelación en la cultura

Para mostrar el proceso de modelación en las culturas, un grupo de estudiantes, en Brasil, en un curso de especialización, buscaron comprender, entender, y saber cuáles eran las *matemáticas* utilizadas por Joaquim, en Ijuí, en Rio Grande do Sul, quien producía vinos y construía sus propios toneles, utilizando ideas, procedimientos y prácticas matemáticas, por medio del proceso de matematización que fue transmitido por sus antepasados italianos (Bassanezi, 2002). La figura 1 muestra una matematización del tonel de vino.

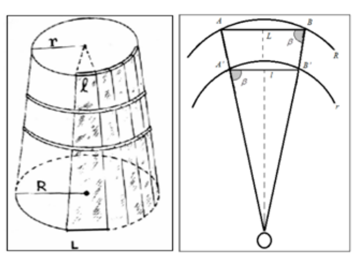


Figura 1. Matematización del tonel de vino. (Bassanezi, 2002)

En otro ejemplo, Rios (2000) buscó entender y comprender el proceso mental de idealización de *ponchos* (vestimenta utilizada como abrigo o sobretodo) y *aguayos* (vestimenta utilizada como mantilla) que son confeccionados por las campesinas bolivianas por medio de *etnomodelos* mentales. En esta investigación, Rios (2000) describió las prácticas *matematizadoras* que son utilizadas en la confección de estos tipos de vestimentas y, observó que durante este trabajo las campesinas están constantemente evaluando y analizando los resultados, alterándolos, en caso de que el *etnomodelo* obtenido no esté de acuerdo con las representaciones mentales que fueron previamente concebidas.

La modelación en la interdisciplinariedad

Compartiremos aquí un tipo de proyecto que venimos realizando desde el año 2014. Se trata de la construcción e instalación de molinos Savonius en puestos rurales de la Patagonia Argentina. Ese año construimos e instalamos el primero. Durante los años 2015 y 2016 construimos otro y al presente nos encontramos construyendo 8 molinos que serán instalados por los estudiantes en puestos rurales. En particular estos proyectos permiten abordar procesos relativamente completos de modelación de manera integral. En efecto, el contexto real y motivador aparece como problemática a resolver. Ese contexto presenta variables relevantes a retener y otras a descartar. El proceso de selección e identificación de las variables relevantes resulta rico en debates en general para los estudiantes. Luego se produce la articulación de las variables para llegar a construir un modelo pertinente. La instancia siguiente consiste en descubrir y analizar nuevas relaciones entre las variables, ya ahora en el marco del modelo para, finalmente, volcar esos análisis a la realidad que lo motivó. Resulta interesante observar cómo esos análisis efectuados en el plano del modelo son muy potentes en términos de relaciones inferidas las que por cierto serían casi imposibles de elaborar si se trabajara en el plano del contexto real. La figura 2 muestra uno de estos molinos al momento de su instalación.

Figura 2. Montaje del molino. (Chrestia et al., 2015)

Abajo pueden verse algunas imágenes de análisis efectuados en el plano de la modelación sobre cuestiones a resolver en el proyecto con ayuda del software GeoGebra.

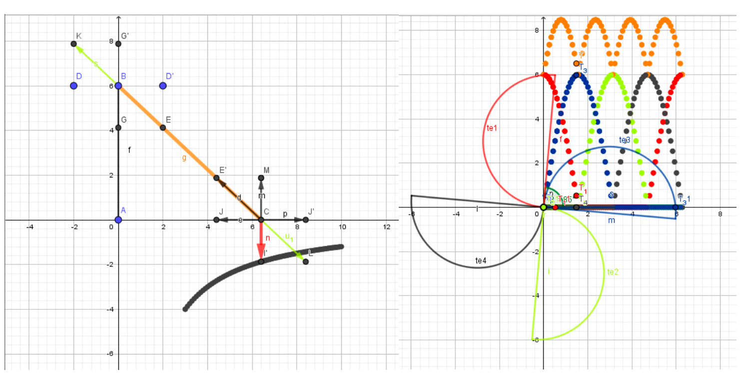


Figura 3. Variación de los esfuerzos y vibración del rotor

El primero corresponde al estudio de variación de los esfuerzos en las riendas en función de la ubicación de la misma. El segundo, a partir del área variable al viento, él permite explicar las vibraciones del rotor, entre otras cuestiones.

La modelación en la transversalidad de saberes

La transversalidad de saberes exige de un estatus epistemológico que rinda cuentas del conocimiento matemático con relación a los cotidianos de otras disciplinas. Se requiere ubicar una dimensión social que problematice la relación de los dominios multidisciplinares (Cordero, 2017). En consecuencia, el *programa de transversalidad de saberes* valora los conceptos en torno al conocimiento, para mejorar el aprendizaje de la matemática, como: la institucionalización, usos e instrumentos, las prácticas sociales que norman las construcciones del conocimiento, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones humanas, (Mendoza y Cordero, 2012). A continuación, se presenta un ejemplo que dará cuenta de la función y forma del conocimiento matemático desde la condición del ingeniero; el cual compone un *marco de referencia* para favorecer *el diálogo entre la matemática y la ingeniería* (Mendoza y Cordero, 2018). En este caso, se considera a la *Ingeniería Biónica.* Ésta se concibe como el conjunto de conocimientos interdisciplinarios entre la electrónica y la biología para crear sistemas artificiales y *reproducir* las características y la estructura de organismos vivos (Mendoza y Cordero, 2018). Estudiamos una comunidad de estos ingenieros, durante tres meses, en diseños de situación de *Sistemas de Control*: construyen dispositivos artificiales que se conforman de procesos que se requieren controlar, para reproducir características y estructuras deseadas. Esta comunidad la delimitamos en su profesión y formación escolar. La estabilidad de estos sistemas, modelados por ecuaciones diferenciales, conlleva la emergencia de diferentes conceptos y técnicas para la Teoría de Control y para la matemática misma (Mendoza y Cordero, 2018). En el diseño se observaron tres momentos. M_1: Dinámica del sistema, M_2: Ajuste de la función de transferencia o modelo de comportamiento, M_3: Control de la señal de salida y estabilidad. Cada momento está sujeto a la *Reproducción de Comportamientos* deseados; es decir, que la señal de salida tienda a comportarse como el valor de referencia. De esta manera, la estabilidad se *significa* en el comportamiento de las señales de un sistema de control, provocando *procedimientos* como la comparación entre las señales, lo que conlleva variar los parámetros de la ecuación diferencial que modela el sistema y significándola como un *instrumento* que modela la estabilidad de la señal de salida y así reproducir el comportamiento inicialmente propuesto. El artefacto considerado fue un "Sistema de control de temperatura de un foco" (ver figura 4).

Figura 4. Sistema de control de temperatura de un foco. (Mendoza y Cordero, 2018)

El escenario escolar de esa comunidad de ingenieros, nos ofreció una transversalidad del uso de la estabilidad: la *Reproducción de un Comportamiento en un Sistema de Control*. Se problematiza el diseño (la instrucción que organiza comportamientos). Esto compone *una epistemología de usos,* la cual se confronta con la matemática escolar. *Reproducción de comportamientos es una categoría de modelación que expresa una matemática funcional;* en ese sentido ecuaciones diferenciales, como$ay' = f - y$, *son el modelo de la reproducción de comportamientos: no se trata de "*encontrar la solución que no se conoce*",* son *instrucciones que organizan comportamientos* (Mendoza y Cordero, 2018).

Implicaciones y conclusiones

Las perspectivas señaladas anteriormente obligan a reflexionar sobre los programas habituales de formación y desarrollo del docente de matemáticas en todos los niveles educativos. Elementos como: *valorar los usos del conocimiento matemático que emergen en la gente; la matematización de la realidad, elaborada por miembros pertenecientes a grupos culturales distintos; los proyectos interdisciplinarios y su relación con los cursos de matemáticas; los diseños de situación de modelación-graficación que incentivan el uso de la tecnología digital* y *reconocer los usos sociales de los modelos matemáticos*; crean visiones ontológicas y epistemológicas que en general no están incluidas en los programas educativos de Latinoamérica y tal vez del mundo. Entonces, habrá que crear *programas de acompañamiento permanente, con el profesorado, que reconstruyan la matemática escolar*. En ese sentido, concluimos que las prospectivas de la investigación y de la afectación a la educación de la matemática deberán construir caminos cada vez más estrechos entre la matemática (escolar) y el cotidiano de la gente (realidad). Los programas de modelación con base en la construcción social del conocimiento son consecuentes con esa idea. Estos programas señalan la emergencia de un núcleo epistemológico que derivará en el cambio de la matemática escolar acompañado de la función del docente. Tal núcleo compondrá diferentes líneas simultáneas donde sucedan las transversalidades de saberes y la función del docente será mantenerlas como acciones del aprendizaje. Tenemos, entonces, el compromiso de generar el diálogo entre los diferentes programas de modelación para mejorar conjuntamente los aprendizajes de la matemática.

Referencias bibliográficas

Araújo, J. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 55–68.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Contexto.

Blum, W. & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Carranza, P. (2016). Cálculo y construcción de un molino Savonius. Una propuesta didáctica integral. *Novedades Educativas, (306).*

Carranza, P. Sgreccia, N. Quijano, T. Goin, T. y Chrestia, M. (2017). Ambientes de aprendizaje y proyectos escolares con la comunidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 10*(1), 50-61.

Chrestia, M.; Carranza, P.; Quijano, T.; Goin, M. y Sgreccia, N. (2015). Proyectos con la comunidad. Un camino hacia la integración de los conocimientos. *Novedades Educativas*, *299*, 30-36.

Common Core Standards Writing Team. (2013). *Progressions for the Common Core State Standards in Matheatics* (draft). High School, Modeling. Tucson, AZ: Institute for Mathematics and Education, University of Arizona.

Cordero, F. (2016). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Coord.). *Investigaciones Latinoamericanas. Modelación de la Matemática Educativa* (pp. 59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática: arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Ática.

Hirsh, C. & McDuffie, A. (2016). *Annual Perspectives in Mathematics Education: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*. USA: NCTM.

Mendoza-Higuera, E.J. & Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 25*, 1023 - 1030

Mendoza-Higuera, E.J. & Cordero, F. (2018). La Modelación en las Comunidades de Conocimiento Matemático. El Uso Matemático en Ingenieros Biónicos. El Caso de la Estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 36 – 61.

Orey, D. C. & Rosa, M. (2015). Three approaches in the research field of ethnomodeling: emic (local), etic (global), and dialogical (glocal). *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 364-380.

Parra-Zapata, M. M. & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación, 16*(3), 1–27. https://doi.org/10.15517/aie.v16i3.26084

Rios, D. P. (2000). Primero etnogeometría para seguir con etnomatemática. In: Domite, M. C. (Ed.). *Anais do Primeiro Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm-1* (pp. 357-375). São Paulo, SP, Brasil: FE-USP.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2003). Vinho e queijo: etnomatemática e modelagem! *BOLEMA*, *16*(20), 1-16.

Rosa, M. & Orey, D. C. (2017) *Etnomodelagem: a arte de traduzir práticas matemáticas locais*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Livraria de Física.

Soto, A.Y.; Luna, V.H. y Navarro, M.R. (Julio, 2016). *Competencias digitales para la innovación: las Comunidades virtuales de aprendizaje de matemáticas, Bioquímica y cultura financiera*. Paper presentado en el 13th International Congress on Mathematical Education, Hamburgo.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar.* México: Díaz de Santos.

Villa-Ochoa, J.A. Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemática. *Espaço Plural, 18* (36), 219-251.

Villa-Ochoa, J. A. & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice* (pp. 241-250). Switzerland: Springer

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. En J. Arrieta & L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Barcelona: Gedisa.

Villa-Ochoa, J. A.; Rosa, M. & Gavarrete, M. E. (2018). Aproximaciones socioculturales a la Modelación en Educación Matemática. Aportes de una comunidad latinoamericana. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 4–12.

Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 237–43). New York, NY: Springer.

NÚMERO CERO: ALGUNAS INTERPRETACIONES DESDE EL AULA

NUMBER ZERO: SOME INTERPRETATIONS FROM THE CLASSROOM

Jonathan Steven Villamil Pachón, Lida Esperanza Riscanevo Espitia
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – Uptc (Colombia)
jonathan.villamil@uptc.edu.co, lida.riscanevo@uptc.edu.co

Resumen
Este artículo presenta resultados parciales de una investigación en curso, en la línea de formación de profesores de matemáticas y tiene como objetivo categorizar las interpretaciones de estudiantes en formación inicial de matemáticas sobre el cero como número. La base conceptual se asume desde el reconocimiento de la historia como valor pedagógico en la enseñanza de las matemáticas y desde allí reflexionar sobre las prácticas que se llevan a cabo en el salón de clases desde las dimensiones: práctica, social y cultural. La investigación es de tipo descriptivo y las fuentes de información tenidas en cuenta son cuestionarios de pregunta abierta, entrevistas no estructuradas y grabaciones de audio. El estudio se realiza en un curso de historia y epistemología de las matemáticas que dirige uno de los investigadores, en el cual se logra percibir algunas interpretaciones de los estudiantes en el desarrollo de situaciones didácticas planteadas.

Palabras clave: número cero, historia de las matemáticas, formación de profesores

Abstract
This article presents partial results of an ongoing research, in the line of mathematics teacher training; it is aimed at categorizing the interpretations on zero as a number by students in initial mathematics training. The conceptual basis is assumed from the recognition of history as a pedagogical value in the teaching of mathematics, and on this basis, to reflect on the practices that are carried out in the classroom from the practical, social, and cultural dimensions. This is a descriptive research which considers questionnaires with open questions, unstructured interviews and audio recordings as sources of information. The study is carried out in a course of history and epistemology of mathematics directed by one of the researchers, in which it is possible to perceive some interpretations of students in the development of the posed didactic situations.

Key words: number zero, history of mathematics, teachers training

Introducción

Llegar a hablar del número cero con propiedad es algo complejo, es considerado por muchos como un número "extraño" debido a que no es positivo ni negativo y dividir por él es imposible, incluso el origen de su nombre evoca misterio (Waterson, 2017). El cero está relacionado con la nada y filosóficamente "en la mente humana el concepto de 'nada' es difícil de asumir" (Crespo, 2003, p.33). En este sentido, el cero se considera un número enigmático, en esencia diferente a los demás, con una historia compleja y epistemológicamente confuso, pero que ha formado parte de las matemáticas de manera especial hasta el punto de ser imprescindible, no solo en ellas, sino también para el avance de otras ciencias.

Las diferentes interpretaciones del cero como número han revolucionado el mundo e impulsado el desarrollo de la humanidad, de manera que en la actualidad su uso se propaga por cada rincón del mundo. Dantzig (1930) declara que "el descubrimiento del cero se puede considerar como uno de los grandes logros de la humanidad" (citado en Seife, 2006, p.20), pues su uso permite contextualizar situaciones de la vida cotidiana con bastante familiaridad; por ejemplo, hablar de temperaturas bajo cero, ver en el reloj 00:00 horas, tener en una báscula 0 kg, ubicarse en la latitud cero (línea ecuatorial) y otros ejemplos más, son aceptados en el lenguaje común y en ellos el cero no es interpretado como "nada". Otro ejemplo, es su uso en la codificación del lenguaje en programación, que ha permitido el avance de la tecnología, y con ella el acceso a la información de manera rápida, fácil y eficiente, impulsando los avances de las ciencias.

Para acudir a otras interpretaciones del cero, debe destacarse que las matemáticas no son entes divinos y perfectos dados a la humanidad; es decir, debemos alejarnos de visiones platonistas y acercarnos a la visión constructivista de las matemáticas, desde la cual ellas son el resultado de una actividad humana y desde esta perspectiva, la historia de las matemáticas proporciona esa visión requerida y menos engreída de su existencia. Desde la historia se reconoce que en muchos casos la matemática es inexacta, que su construcción asume partir del error, pero siempre en busca de la perfección (Guzmán, 1991). Este punto de vista aporta un valor pedagógico en su enseñanza y permite reconocer la importancia de los objetos matemáticos, su evolución y los obstáculos epistemológicos que hacen parte de su construcción. La enseñanza de las matemáticas en este caso asume que los profesores en ejercicio y los profesores en formación deben partir de reconocer el valor pedagógico que se logra al conocer la evolución de cada concepto, la relación con otros, las dificultades y retos en su construcción o descubrimiento, para tomar una postura crítica frente a las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje (Ventura y Rosa, 2015).

Específicamente, desconocer la historia del cero y las características que lo diferencian de los demás números, descontextualizaría sus posibles aplicaciones e interpretaciones, hecho que generaría problemas a la hora de enseñar este objeto matemático. Por tal motivo, este artículo presenta un avance problematizando lo enunciado en el marco del desarrollo de la investigación intitulada "*Número cero: algunas interpretaciones desde el aula"*, la cual se presenta como requisito parcial para obtener el título de Magister en Educación Matemática del primer autor y es dirigida por la segunda autora, integrantes del grupo de investigación Somos Maestr@s de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). En esta investigación, se pretende resaltar la necesidad de la historia y epistemología de las matemáticas en la formación de profesores y responder a la pregunta ¿Cómo interpretan los estudiantes en formación inicial de matemáticas el cero como número?, en lo seguido del texto, se describen algunos resultados previos, a partir de los factores sociales, culturales y prácticos de los estudiantes en formación, describiendo el contexto y las interpretaciones que logran en una primera situación didáctica.

Surgimiento histórico del cero

En los inicios de las matemáticas, uno de los problemas que tenía que resolver el hombre neandertal aproximadamente hacia los años 40.000 a.C., se relacionan con el conteo para la supervivencia, evidencia de esto se encuentra registrado en los huesos de lobos o babuinos documentados por historiadores; particularmente antropólogos y etnólogos, pues gracias a sus trabajos "(…) podemos intentar reconstruir el proceso natural que el hombre primitivo ha podido utilizar para enumerar objetos concretos o para tratar de hacer balance de los elementos contados" (Collette, 1991, p. 5). De manera que, tiene sentido hablar del surgimiento de las matemáticas como invención del hombre para suplir una necesidad aunque, establecer con precisión su inicio, se considera "(…) una aventura en las nieblas de los inciertos orígenes de la vida humana y de las civilizaciones" (Mankiewicz, 2005, p. 19); la civilización egipcia es un buen referente como punto de partida de las matemáticas en la vida del hombre en sociedad, pues en ellos se identifica como acudieron a ellas para registrar el paso del tiempo, controlar las cosechas y los rebaños que son actividades de conteo que dan inicio a los primeros sistemas numéricos; así, los números aparecen como un faro para guiar el camino del hombre a la evolución. Por tanto, Egipto se considera una de las primeras civilizaciones en poseer registros escritos sobre el uso civilizado de los números, destacándose, el desarrollo del sistema numérico en base 10 con jeroglíficos que les permitían escribir grandes números y algunas fracciones.

Los grandes avances en matemáticas atribuidos a los egipcios tiene diferentes reconocimientos a través de estudios realizados, algunos de ellos por muchos años creían que desconocían la existencia del cero, otros en la actualidad corroboran y certifican lo contrario. Al respecto Lumpkin (1997), comenta que en el imperio antiguo de la civilización egipcia (1770 a.C.) surge el cero por primera vez en la vida del hombre, no como un símbolo en el sistema de numeración desarrollado en esta civilización, sino como un valor de referencia en los planos de las construcciones y para denotar equilibrio en un estado de cuentas mensuales en el Reino Medio de la dinastía XIII. Su símbolo fue el jeroglífico **nfr** (ver figura 1) y se encontró en el papiro Boulaq 18.

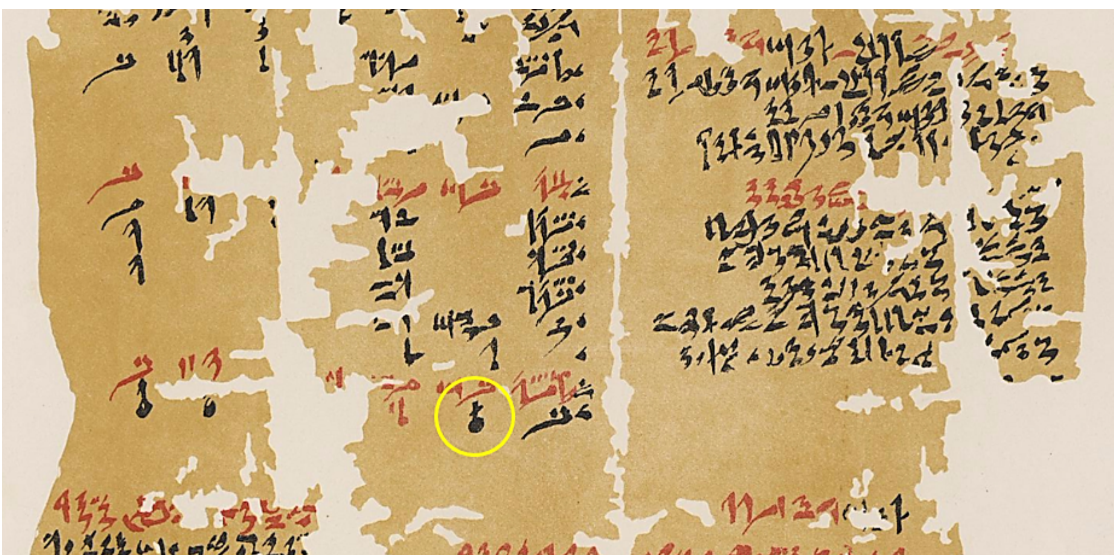


Figura 1. El Papiro Boulaq: una síntesis actualizada, por Jaramago (2008)

El valor posicional del número, fue logrado en Mesopotamia y en este sentido D'Amore y Fandiño (2012) atribuyen esta interpretación en el caso de representar una posición vacía al escribir números con los mismos símbolos y separar las cifras para evitar las ambigüedades. Un ejemplo, de este problema se puede observar en la figura 2.

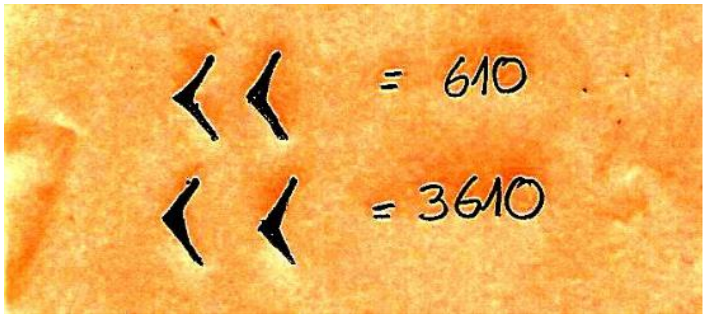


Figura 2. Representación numérica babilónica. Elaboración propia.

Alrededor de 300 a.C., en la escritura de un número en este sistema de numeración (el cual era posicional y en base 60), los babilonios para representar una posición en blanco o vacía de una cifra, usaban dos cuñas inclinadas, de manera que era clara la posición que tenían los símbolos al ocupar una cifra determinada de un número (Seife, 2006). Tomando como ejemplo la figura anterior, se observa el nuevo símbolo que ayudaba a evitar las ambigüedades (figura 3).

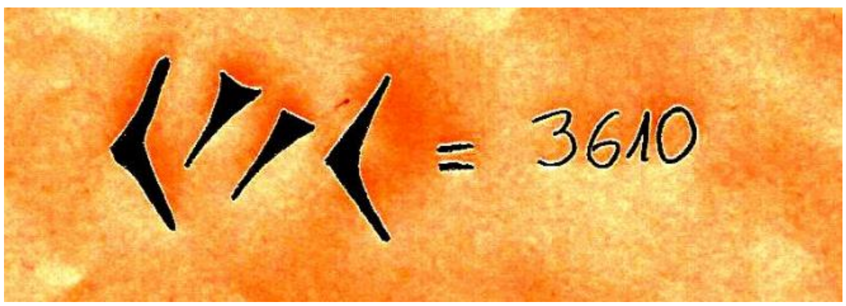


Figura 3. Representación simbólica en el sistema babilónico de una cifra vacía. Elaboración propia.

Otra de las primeras civilizaciones del mundo antiguo que creó un sistema numérico con la presencia del cero, fue la civilización Maya en la región Mesoamérica en el periodo Preclásico Tardío; es considerado como un gran logro intelectual y uno de los más antiguos ejemplos del cero en el mundo (Sharer, 2003). El sistema numérico que desarrollaron era posicional en base 20, con tres símbolos, el punto (•) para el uno, la barra (—) para el cinco y una concha ( ) para el cero. Así, por ejemplo para escribir el número ciento veinte (figura 4), los mayas ubicaban un punto sobre una barra en el segundo nivel y una concha en el primer nivel.

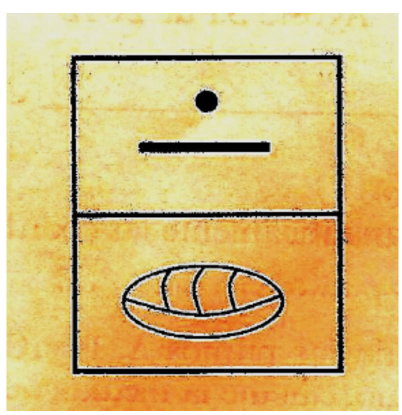


Figura 4. Representación numérica maya. Elaboración propia.

De esta manera, se destacan algunos aspectos históricos sobre el inicio del cero, su uso en las primeras civilizaciones para simbolizar la falta de algo, un símbolo que ocupa un lugar en la simbología matemática, pero sin llegar a considerarse, de momento, un número.

El valor pedagógico de sus interpretaciones

En una clase de matemáticas, la construcción de los objetos matemáticos se puede considerar como un proceso social y cultural, ligado a un contexto específico, a un sistema de símbolos, y a las actividades de resolución de problemas que realiza un grupo de personas y que va evolucionando con el tiempo (Godino y Batanero, 1994). Así, la dinámica en la clase de matemáticas se puede comprender desde el *triángulo didáctico*; es decir, desde las interacciones presentes entre el saber matemático, el docente y el estudiante. Cabe aclarar que los roles que desempeñan estudiante y docente en el aula de clase, se encuentran definidos en un ambiente estructurado con anterioridad por el docente, con el fin de lograr una actividad concreta hacia un conocimiento específico (D'Amore, 2006). La caracterización de las actividades se reconoce bajo las dimensiones propuestas por Ponte (2004) como tareas de tipo exploratorio. Este tipo de actividades siguieren pasar del paradigma del ejercicio al paradigma de la investigación y en este caso se generan posibilidades para favorecer ambientes de aprendizaje investigativos derivados de las matemáticas de la semirelidad y de las realidad. En ese caso, se advoca por pensar en actividades que generen ambiente de aprendizaje desde el reconociendo de la historia como herramienta didáctica para su enseñanza.

En consecuencia, se diseñó una situación didáctica, basada en la formulación de preguntas abiertas, para facilitar que el estudiante en formación inicial como profesor de matemáticas interactuara con el saber, con el fin de identificar las prácticas matemáticas emergentes en el salón de clase que dan sentido al aprendizaje de la historia del cero y sus interpretaciones. La situación didáctica, se tituló *construyendo la historia desde "cero",* esta situación se considera de tipo exploratorio, accesible y abierta, de duración media según lo establecido por Ponte (2004) y de carácter investigativo, del contexto histórico cultural de las matemáticas enmarcada en un ambiente de aprendizaje tipo 2, según la clasificación propuesta por Skovsmose (2000). El propósito de la situación era establecer algunos aspectos en la historia de las matemáticas que le dieran sentido al cero como número.

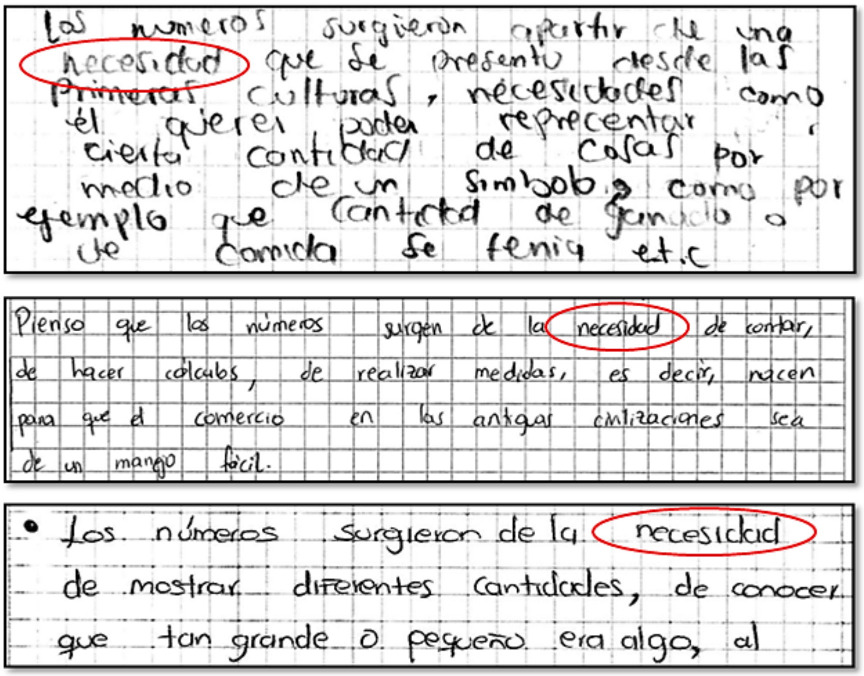
Metodología

La investigación es de tipo descriptivo bajo el enfoque cualitativo, en el que se tuvo en cuenta las interpretaciones realizadas por 20 estudiantes que cursaban la asignatura Epistemología e Historia de las Matemáticas, de cuarto semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC de Tunja. Para la recolección de la información se diseñó y aplicó un cuestionario formado por dos preguntas abiertas; adicionalmente, se grabó el audio de la sesión de clase. A manera de introducir el tema, primero se preguntó, ¿Cómo cree que surgieron los números?, y seguidamente "¿En qué circunstancias 'cero' significa simplemente la ausencia de cosas y en cuáles circunstancias de hecho representa alguna cosa (posiblemente abstracta)?" (Berlinghoff, W., y Gouvêa, F., 2010, p. 85).

La situación didáctica se dividió en tres momentos: En el primero, los estudiantes debían responder individualmente las preguntas; en el segundo, se invitó a los estudiantes que realizaran grupos de trabajo de tres estudiantes, de manera que pudieran compartir y discutir lo que habían escrito; y finalmente, se socializó con todo el grupo de estudiantes las respuestas y discusiones hechas por cada grupo, ya que de esta manera se propicia el ambiente necesario para la negociación de significados matemáticos que emergen de la discusión colectiva (Jiménez y Pineda, 2013).

Análisis de la situación didáctica: construyendo la historia desde "cero"

En el desarrollo de la situación didáctica, se pudo observar que la gran mayoría de las respuestas de los estudiantes a la primera pregunta, coinciden en que los números surgieron de una necesidad del hombre (ver figura 5); algunos estudiantes lo justifican desde lo cultural, otros como facilitador del comercio o simplemente como lenguaje para diferenciar cantidades.


Los numeros surgieron apartir de una necesidad que se presento desde las primeras culturas, necesidades como él querer poder reprecentar cierta cantidad de cosas por medio de un simbolo, como por ejemplo que cantidad de ganado o de comida se tenia et.c

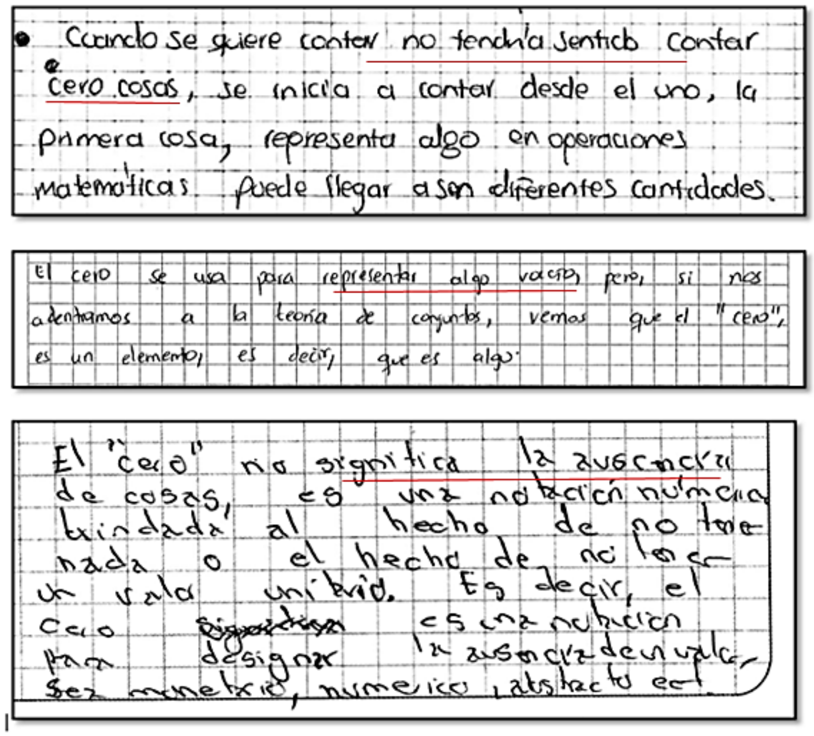
Pienso que los números surgen de la necesidad de contar, de hacer cálculos, de realizar medidas, es decir, nacen para que el comercio en las antiguas civilizaciones sea de un manejo fácil.

• Los números surgieron de la necesidad de mostrar diferentes cantidades, de conocer que tan grande o pequeño era algo, al

Figura 5. Respuestas de tres estudiantes a la primera pregunta.

En el primer momento, se evidenció la dificultad que tienen los estudiantes para comunicarse por escrito; la mayoría de escritos son cortos y en ocasiones confusos. Sobre las respuestas dadas a la primera pregunta, la gran mayoría coincidió en expresar que los números surgieron por la necesidad del hombre en el momento que consolidaron las primeras civilizaciones; reconocen que surgen como símbolos para representar cantidades, que fueron importantes en el intercambio comercial y cultural de las civilizaciones antiguas.

Sobre el cero, (ver figura 6) la gran mayoría lo relacionan con la nada, con el hecho de no tener que contar, la falta de algo o es tomado como el cardinal del conjunto vacío. De igual manera, el cero es interpretado como algo concreto cuando se toma como cifra, como ejemplo presentan el caso de los ceros de un billete de diez mil pesos colombianos.



- Cuando se quiere contar no tendría sentido contar cero cosas, se inicia a contar desde el uno, la primera cosa, representa algo en operaciones matemáticas puede llegar a ser diferentes cantidades.

El cero se usa para representar algo vacío, pero, si nos adentramos a la teoría de conjuntos, vemos que el "cero", es un elemento, es decir, que es algo.

El "cero" no significa la ausencia de cosas, es una notación numérica brindada al hecho de no tener nada o el hecho de no tener un valor unitario. Es decir, el cero ~~significa~~ es una notación para designar la ausencia de un valor, sea monetario, numérico, abstracto etc.

Figura 6. Respuestas de tres estudiantes a la segunda pregunta.

En el segundo momento, se destaca la comunicación que se logró en varios grupos gracias a la participación activa de los estudiantes. Al trabajar en grupos pequeños pudieron compartir lo que escribieron, ampliando sus ideas y colocando a juicio de los compañeros sus argumentos y apreciaciones sobre los temas de discusión. Luego, la comunicación entre pares tuvo gran importancia para la consolidación de argumentos, ya que permitió el intercambio cultural y el aprendizaje mutuo partiendo de las interpretaciones particulares de cada estudiante sobre el tema en discusión. Así, se rescata la importancia de la identidad cultural del estudiante en cuanto al lenguaje, los valores, las creencias y un conocimiento tácito sobre las matemáticas, de manera que brinda al docente en formación la posibilidad de ampliar su perspectiva sobre las matemáticas y su enseñanza (Rosa y Orey, 2017).

Se destaca la participación del grupo formado por los estudiantes E1, E2 y E3, quienes discuten las respuestas que dieron a la segunda pregunta. Se transcribe parte del diálogo presente en el grupo:

> ***E2:*** *-Desde la matemática va uno a ver y tiene valor cuando está acompañado de otro número, de lo contrario no.*
> ***E3:*** *-Pero si está a la derecha representa algo más que cuando se pone a la izquierda.*
> ***E1:*** *-Ah sí claro, si lo escribimos [en una hoja escribe un uno y continua agregando ceros] aquí sería las unidades, aquí las centenas y así se puede continuar.*
> ***E2:*** *-Pero sigue representando vacío, porque en los números de aquí [Indicando el último cero] representa que no hay unidades.*
> ***E1:*** *-mmmmm, pues sí. Ese es un ejemplo, porque yo también escribí que puede representar algo diferente, si uno ve en geometría un círculo tiene trescientos sesenta grados y eso es cero.*
> ***E3:*** *-¿Cómo así?*
> ***E1:*** *- Pues aquí [dibujando un circulo en una hoja] este ángulo es trescientos sesenta grados pero en este punto son cero grados.*
> ***E3:*** *-¿y es lo mismo?*

> ***E1:*** *-¡Pues es el mismo punto!*
> ***E2:*** *- Pero hay no está contando los grados [dirigiéndose al profesor], profe, ¿podemos decir que el cero me representa nada cuando no hay nada para contar?*
> ***Profesor:*** *-Cuando no hay nada que contar, puede ser una representación. Pero, en la vida cotidiana, ¿Cuándo el cero me representa algo diferente al vacío?*
> ***E2:*** *-Si hablamos del cero en la vida cotidiana, mmmm, no representa nada, es como cuando un bus no tiene pasajeros, o la casa está sola.*
> ***E1:*** *-Claro, eso es obvio, si se ve en la teoría el cero representa vacío, pero el profe pregunta que en la vida cotidiana que representa diferente de vacío.*
> ***E3:*** *- Lo mismo… nada.*
> ***E2: -****No porque si tomamos este número [refiriéndose al uno con los ceros que habían escrito anteriormente] como un billete, me representa algo.*
> ***E1: -****Pero también me puede representar una distancia, si yo salgo del salón y vuelvo me da cero.*
>
> Transcripción de la grabación de clase

En la discusión lleva a cabo por el grupo, se destaca la interpretación del cero como cifra y representación del vacío, ya sea desde lo abstracto (las matemáticas en sí) o concreto (usos en la vida cotidiana). La interpretación más frecuente dada por los estudiantes, es la idea de no tener objetos, o la ausencia de cosas, por ejemplo en el bus que pasa sin pasajeros. De otro lado, lo interpretan como cifra al usarse en la denominación de los billetes o en la escritura de los números para representar una posición vacía, de la misma manera como lo hacían los mayas.

En el tercer momento la participación fue muy baja, de manera que el análisis se enfocó en los dos primeros momentos.

Conclusiones

Los estudiantes han reconocido la importancia de la interculturalidad de las primeras civilizaciones en la invención de los sistemas numéricos a partir del estudio de la historia y epistemología de las matemáticas. Justificando así, la necesidad de conocer las matemáticas desde la historia de los objetos matemáticos.

Es pertinente el estudio del cero desde su historia en la formación inicial de profesores en matemáticas, ya que se evidencia una gran dificultad a la hora de representar, interpretar, dar significado y contextualizarlo como número.

Referencias bibliográficas

Berlinghoff, W. P., y Gouvêa, F. Q. (2010). *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*. (E. Gomide y H. Castro, Trad.) São Paulo: Edgard Blucher.

Collette, J. (1991). *Historia de las matemáticas* (Vol. I). Madrid: Siglo XXI Editores.

Crespo, J. (2003). La representación de la ausencia por medio de una presencia: el Cero. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16 (1), 33-39.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Corporación Editorial Magisterio.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2012). *El número cero: Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso*. Bogotá D.C.: Corporación Editorial Magisterio.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 14(3), 325-355.

Guzmán, de M. (septiembre de 1991). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. *III Simposio Ibero-Americano sobre Enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires, Argentina.

Jaramago, M. (2008). *El Papiro Boulaq: una síntesis actualizada.* [Figura]. Recuperado el 10 de mayo de 2018 de la dirección http://egiptologia.com/papiro-boulaq-sintesis-actualizada/

Jiménez, A., y Pineda, L. M. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Revista Educación y Ciencia,* 16, 101-116.

Lumpkin, B. (2004). *The mathematical legacy of ancient Egypt: A response to Robert Palter*. Recuperado el 10 de mayo de 2018 de la dirección www.ethnomath.org/resources/lumpkin1997.pdf.

Mankiewicz, R. (2010). *Historia de las matemáticas: Del cálculo al caos/por Richard Mankiewiez*. Barcelona, España: Paidós Ibérica.

Ponte, J. P. D. (2014). *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Recuperado el 15 de mayo de 2018 de la dirección http://hdl.handle.net/10451/15310

Rosa, M. y Orey, D. (2017). *Influências etnomatemáticas em salas de aula, caminando para a ação pedagógica*. Curitiba: Editora Appris Ltda.

Seife, C. (2006). *Cero. La biografía de una idea peligrosa*. (S. Zimmermann, Trad.). Madrid, Valenciana: Ellago.

Sharer, R. (2003). *La civilización maya*. 3rd ed. México: Fondo de Cultura Económica.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista Ema. Investigación e innovación en educación matemática*, 6(1), 3-26.

Ventura, M., y Rosa, M. (2015). La historia de las matemáticas en el currículo para la formación de profesores de matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28, 78-85.

Waterson, P. (2017). That strange number 'zero', Policy and Practice in Health and Safety, 15:2, 85-87, doi: 10.1080/14773996.2017.1376404.

PRÁCTICA PEDAGÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA RURAL MULTIGRADO

PEDAGOGICAL PRACTICE FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS IN THE MULTI-GRADE RURAL SCHOOL

Yessica Yolima Zorro Suárez
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Colombia)
sholimita@hotmail.com

Resumen
En el contexto de la educación colombiana, específicamente en las escuelas rurales, nace la figura del docente multigrado, quien por sus condiciones laborales (de espacio y población) requiere un continuo proceso de formación que fortalezca y amplíe la perspectiva que tiene de su práctica. De este modo nace la necesidad de analizar de manera estructurada la práctica pedagógica dentro del aula de matemáticas en este contexto, determinando aprendizajes de los docentes a partir de la (re)significación de sus prácticas después de participar en un programa de formación docente. Este análisis se realiza a partir de tres momentos: el antes, el durante y el después de una clase. El estudio en curso se enmarca en un enfoque cualitativo, desde una perspectiva fenomenológica en el sentido de estudiar la realidad de la práctica pedagógica en el aula multigrado de forma natural, lo que involucra las interacciones, procesos y estrategias utilizados por los docentes.

Palabras clave: práctica pedagógica, formación docente, (re)significación

Abstract
In the context of Colombian education, from the pedagogical model of the New School for rural education, the multi-grade teacher figure emerges; but there is little documented evidence with respect to this teacher practice in the classroom. Thus, it is necessary to analyze in a structured way the educational practice in the indicated context, determining teachers' learning in the re-signification of their practices after participating in a teacher training program based on the analysis of the before class-while in class –and after-class practice. The ongoing study is framed within a qualitative approach, from a phenomenological perspective in the sense of studying the reality of teaching practice, in the multi-grade classroom, in a natural way, involving the interactions, processes and strategies used by teachers.

Key words: educational practice, teacher training, re- signification

Acercamiento a la problemática

La naturaleza dinámica y cambiante de los contextos educativos ha generado que las instituciones adopten diversos enfoques o modelos que se adapten al espacio cultural en el que se desarrollan y donde los docentes toman parte sustancial. Según Hopcroft (2011), el papel que tienen los profesores en la educación resulta ser el más importante al considerarlos como la base de una sociedad más desarrollada y productiva; son ellos los llamados a crear y diseñar las estrategias que forman los verdaderos líderes (como se cita en Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN], 2011). A raíz de esto, reflexionar sobre el cómo, el para qué y por qué enseña un docente, se convierte en una tarea que caracteriza la práctica pedagógica, permitiéndole innovar, profundizar y transformar los procesos de enseñanza (Castro, Peley y Morillo, 2006), asociados a las creencias, concepciones, formación disciplinar y pedagógica (Jiménez y Gutiérrez 2017).

En el contexto de la educación colombiana, específicamente en la población rural, la práctica pedagógica actualmente se desarrolla en el contexto de aula multigrado a partir del modelo pedagógico de Escuela Nueva en donde un docente enseña diversas materias en dos o más grados simultáneamente. Según Vargas (2003) el aula multigrado se caracteriza por los altos niveles de pobreza, instalaciones inadecuadas, escasez de materiales pedagógicos, entre otros factores, que inciden en los bajos logros de aprendizaje de los estudiantes, convirtiéndose en un ambiente más exigente para el docente dado que requiere una organización y un proceso de planeación más cuidadosa. Este tipo de contextos demandan al docente moldearse a la realidad de sus estudiantes, por lo que su constante formación y cualificación disciplinar y didáctica se hacen necesarias para un óptimo acompañamiento en el aprendizaje de los docentes. Desde el MEN (2011), se reconoce que el mejoramiento de la calidad de la educación implica coordinar acciones en la formación de los docentes y directivos, de modo que sus prácticas y actividades pedagógicas incidan en el desarrollo de competencias de los estudiantes, que a su vez facilitarán la reflexión sobre estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de estos, fomentando el desarrollo profesional de los educadores. En este sentido y bajo la heterogeneidad de condiciones socioculturales y disciplinares a las que se enfrenta un docente multigrado, se les ha otorgado la posibilidad de pertenecer a Programas de Formación Docente, cuyo propósito es fortalecer los procesos formativos de los profesores para mejorar la calidad de la educación abarcando las diferentes disciplinas.

La enseñanza de las matemáticas ha tomado importancia por sus innumerables aportes a la sociedad, demandando a quienes la orientan desde los primeros años escolares conocer la disciplina a profundidad, su didáctica, y permanecer en formación constante que ayude a quien ingresa a un aula de clase a desarrollarse de forma activa y crítica en su vida social. Según la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la cultura (UNESCO) (2014), la formación no debe interrumpirse una vez que los docentes empiezan a trabajar en las escuelas; considera que deben estar preparados para atender las necesidades de los estudiantes de medios sociales desfavorecidos, incluidos los que asisten a escuelas que se encuentran en zonas remotas o tienen recursos escasos y alude a que la formación continuada debería aportarles ideas nuevas sobre la manera de apoyar a los estudiantes que tienen más dificultades de aprendizaje.

En respuesta al problema de la baja calidad educativa, medida a través del desempeño en pruebas estandarizadas, el Gobierno Nacional propuso un programa de formación docente al que accedieron profesores de básica primaria, priorizando a las instituciones con bajos desempeños y de difícil acceso para fortalecer la práctica pedagógica y la didáctica en esta área tomando como elementos de reflexión los momentos de planeación, ejecución y revisión de la clase de matemáticas. En este sentido, a partir del abordaje de diferentes estudios que se aproximan a la práctica pedagógica como lugar de análisis, se pretende retomar la propuesta de Jiménez y Gutiérrez (2017), de analizar la práctica pedagógica en el aula de matemáticas desde lo que se hace, examinando la manera de transformar y (re) significar las prácticas de algunos docentes que participaron del Programa de Formación. Así entonces se plantea la necesidad de responder a la pregunta ¿cómo materializar la transformación de la práctica pedagógica del docente multigrado? La respuesta a este interrogante permitirá determinar aprendizajes de los profesores en la transformación de sus prácticas. Este proceso se desarrollará en tres momentos: inicialmente se llevará a cabo la caracterización de la práctica pedagógica para el caso del docente de aula multigrado en la clase de matemáticas. Luego se proyectará la descripción de los componentes que materializan la transformación de la práctica pedagógica del docente multigrado para finalmente identificar elementos que muestren la transformación y (re) significación de la práctica pedagógica.

Trabajos afines a la investigación

En la última década se han desarrollado diferentes investigaciones en torno a la práctica pedagógica, que visibiliza realidades propias de las interacciones configuradas al interior del aula. De esta manera se contemplaron estudios relacionados con el análisis de prácticas pedagógicas partiendo del contexto internacional, hasta llegar a los escenarios más próximos.

Una visión Internacional

En el caso del contexto internacional Enamorado (2012) con una investigación de enfoque cualitativo, a través de la implementación del método fenomenológico, tuvo como objetivo conocer las prácticas de los docentes en el ciclo I en las escuelas primarias del departamento de Ocotepeque (Honduras). Se evidenciaron, entre otros elementos, que un gran número de maestros participantes utilizan la guía y el cuaderno de trabajo propuestos por la Secretaria de Educación y están acorde con el currículo nacional básico. Se denota el uso de la técnica expositiva y la escaza creatividad en implementar estrategias innovadoras. Así mismo se demuestra el interés sobre la necesidad de capacitaciones y actualizaciones con el hecho de que todos los docentes participantes planifican su labor. El informe de investigación de Angulo, Cerdas y Ovares (2012) analizó las formas de interacción empleadas por docentes y estudiantes en el desarrollo de actividades cotidianas en el aula escolar rural. Este estudio cualitativo, que implementó técnicas como la observación no participante, el diario de campo, cuestionarios y entrevistas, permitió encontrar indicadores relevantes para reflexionar y continuar investigando sobre temáticas tales como: aspectos metodológicos, características del proceso de enseñanza y de aprendizaje en la escuela rural, formas de organización de la clase, la invisibilidad de muchas labores docentes y la afectividad en las interacciones.

El trabajo de Block, Martinez, Mendoza y Ramirez (2013) se ocupó de indagar una modalidad de formación cuyo centro se ubicaba en la realización de experiencias en aula. Mediante la aplicación de situaciones didácticas los investigadores evidenciaron que la observación y el análisis de las prácticas de enseñanza pueden ser recursos valiosos para la formación docente.

El contexto nacional

Para el caso colombiano se puede citar el caso del trabajo de Flórez y Betancur (2015) se centró en identificar el movimiento de las prácticas pedagógicas de enseñanza-aprendizaje de los docentes del área de matemáticas. A través de una metodología descriptiva con un estudio de corte hermenéutico, se notó la organización de los contenidos dentro del desarrollo de la clase, así como la interacción social docente-estudiante. De igual modo se concluye que el maestro ha superado el modelo tradicional, dando paso a prácticas pedagógicas de repetición, construcción, clasificación, autoconocimiento, programación y prácticas de la mayéutica relacionadas con los modelos didácticos de la enseñanza, entre ellos, el modelo por descubrimiento, el cambio conceptual y la investigación. En el documento de Pabón (2009), se analizaron las prácticas pedagógicas de tres docentes en el área de matemáticas, por medio de la observación y la aplicación de entrevistas semiestructuradas a estudiantes y docentes, encontrando que los tres profesores planean sus clases de matemáticas teniendo en cuenta una visión integral de la asignatura, es decir, van más allá de la simple enseñanza de operaciones y fórmulas, sino que ven en ella un espacio formativo que apunta a muchas dimensiones del estudiante: cultural, social, intelectual, actitudinal, entre otras. Lo anterior coincide de manera intuitiva con las exigencias planteadas por los documentos emitidos por las entidades tanto gubernamentales como las instituciones dedicadas a la reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas.

Dentro de los estudios revisados es importante citar el de Guerra, Leguízamo y Rincón (2016). Este trabajo enmarcado dentro del enfoque hermenéutico, se interesó por describir la práctica docente a partir de los elementos encontrados en la enseñanza de las matemáticas. Se evidenció que a pesar de que los documentos oficiales muestran y direccionan el deber ser de la enseñanza, las prácticas se corresponden en gran parte a las ideas que ellos han construido a lo largo de su experiencia y que en algunos momentos se apartan de la normatividad establecida para revelar desde su labor lo que han podido hacer para transferir su saber. Es importante destacar a partir de esta investigación que a pesar de que los docentes a diario hacen algunas reflexiones acerca de su práctica en el aula, basados en los recursos didácticos, hay un distanciamiento entre lo que se dice y lo que se hace. Se concluyó adicionalmente que la manera cómo los docentes investigados llevan a cabo en la actualidad su práctica se encuentra determinada por las vivencias propias respecto al aprendizaje de las matemáticas. El documento de Buitrago y Giraldo (2016), presenta los resultados de un trabajo de corte interpretativo que se enmarcó en un diseño de estudio de caso. Este tuvo como objetivo analizar la práctica docente en matemáticas al implementar una unidad didáctica basada en la metodología de la indagación que a su vez ofrece al maestro la posibilidad de transformar su práctica. Se evidencia además la necesidad de fortalecer el desarrollo de habilidades matemáticas mediante el trabajo constante, interrelacionado con el contenido y su contextualización.

El caso de Boyacá

Aquí se cita la investigación de Jiménez, Limas y Alarcón (2016), que con un enfoque cualitativo y la aplicación de técnicas de observación participante y cuestionarios de pregunta abierta, trazó como objetivo conocer realidades escolares de prácticas pedagógicas matemáticas mediante vivencias de situaciones de aula. Los análisis planteados permitieron evidenciar que la práctica pedagógica-matemática se concibe como el conjunto de acciones que empiezan desde planear, organizar, preparar y desarrollar las clases. Además, se afirma que existe una influencia significativa del entorno escolar, puesto que los profesores de la institución observada se mueven e interactúan de acuerdo con el contexto en el que encuentran. En una investigación realizada en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Jiménez y Gutiérrez, 2017) se analizan los aspectos relacionados con las realidades de docentes de matemáticas en una institución de educación básica y media. Mediante el uso de la observación, entrevistas no estructuradas, y el diario de campo, este estudio cualitativo concluyó que la práctica pedagógica de los docentes participantes se basa en exponer los contenidos, manteniendo una postura mecanicista tradicional. De la misma manera se evidencia que las creencias y concepciones están asociadas a la forma como el docente aprendió las matemáticas. Es importante destacar que, los docentes reconocieron la necesidad de reflexionar sobre su práctica.

Finalmente, en la investigación de Pineda (2014) se presentan las reflexiones de una investigación que se centró en estudiar la labor docente en escuelas rurales valiéndose de la metodología de historias de vida, que se enmarca en el enfoque cualitativo. A partir de esto se pudo concluir que el desempeño docente se encuentra mediado por el cumplimiento con la política pública educativa. Igualmente se evidenció que las características o condiciones propias de los maestros influyen de manera determinante en la consolidación de sus prácticas pedagógicas. Como elemento congruente se afirma que los maestros denotan una comprensión y apropiación de su contexto por lo cual sus prácticas, que son el producto de su formación y sus experiencias, se direccionan a dar respuesta a las características específicas de la escuela.

A partir de la revisión documental realizada emergen elementos claves que serán analizados y que contribuirán a la presente investigación desde otra perspectiva. Se estudia la práctica pedagógica desde el contexto, considerado como un espacio que debe ser conocido, comprendido y apropiado por los profesores, lo que concluirá en una práctica que responda a las características y necesidades de cada escuela. Así mismo, dichas prácticas concebidas como el producto de la formación y experiencias de los docentes se analizarán desde las concepciones e ideas que ellos han construido a lo largo de su experiencia y que pueden o no ser congruentes con un currículo establecido.

Por último, los análisis planteados permitirán evidenciar reflexiones docentes acerca de la práctica pedagógica-matemática que concluyen en acciones importantes como planear, organizar, preparar y desarrollar las clases. De este modo, los trabajos aquí mencionados en conjunto con la investigación propuesta favorecen al fortalecimiento y renovación de los elementos relacionados con la práctica pedagógica en distintos contextos y niveles educativos,

Aspectos teóricos

En el escenario educativo actual surge la necesidad de emprender procesos investigativos que se ocupen de analizar la realidad construida en los diferentes contextos. Se reconoce una relación directa entre la práctica pedagógica, su reflexión y la formación docente, así entonces se hace relevante desde la investigación, generar la transformación de las prácticas sistemáticas a prácticas situadas en la reflexión que aporten al saber pedagógico y al sector educativo (Esquea-Gamero, 2017). Además, afirma que la práctica pedagógica se constituye como uno de los ejes de la formación docente según la legislación colombiana, hecho que convierte a las investigaciones sobre la práctica y los resultados de estas, en elementos de interés para entidades gubernamentales y privadas encargadas de estos procesos.

Es relevante señalar la necesidad de investigar la práctica educativa de los docentes en la medida en que se define como una actividad dinámica y reflexiva, que incluye las situaciones que resultan de la interacción entre maestro y alumnos. Según García-Cabrero, Loredo y Carranza (2008), la práctica no se limita a los procesos educativos desarrollados en el aula de clase, sino que también considera las intervenciones anteriores y posteriores a los mismos, lo que se convierte en insumo de gran valor en el desarrollo de procesos de indagación; a esto se suma el carácter experiencial de la profesión docente, en donde intervienen elementos culturales, académicos y políticos que permiten la construcción de saberes colectivos. (UNESCO, 2004). El escenario de la práctica pedagógica resulta ser un elemento fundamental que permite validar, comprobar y resignificar diferentes planteamientos en los que se sustenta la educación, además de ser un espacio de transformación del docente en la medida en que tiene la oportunidad de explorarse, sensibilizarse y observarse desde su quehacer cotidiano (Alzate, 2015) Consecuentemente con lo anterior, se hace ineludible reconocer que la práctica pedagógica se asume como actividad social sumergida en una red compleja de relaciones, vivencias y concepciones, alimentada de un conjunto de acciones desarrolladas por sujetos que actúan influenciados por un sinnúmero de factores físicos, individuales, colectivos y contextuales, entre otros, hecho que la convierte en un fenómeno de estudio permanente (Esquea-Gamero, 2017)

Desde la perspectiva de la noción de formación, es importante señalar que se constituye en eje fundamental dentro de la pedagogía. Resulta pertinente entonces investigar los procesos de formación en la medida en que esta se encuentra asociada a la irrupción de nuevas formas de concebir el conocimiento (Díaz, 2006); de esta manera al estudiar la formación docente se asume como un proceso de aprendizaje profesional de carácter político-ideológico, que se encamina al desarrollo profesional, teniendo al docente como protagonista (Quintero y otros, 2018). Desde esta perspectiva, en palabras de Souto (2010) la formación emerge como un escenario de problemas, al no ser un objeto único, que no se puede separar de su contexto y que se enriquece en la multiplicidad y la diversidad.

Así entonces son múltiples los planteamientos que sugieren la necesidad de desarrollar procesos de investigación en torno a la reflexión sobre práctica pedagógica. Se retoma en este sentido la propuesta de Jiménez y Gutiérrez (2017) sobre la necesidad de analizar las prácticas a partir de la reflexión sobre lo que se hace, indagando sobre el cómo transformar esas realidades con el propósito de (re)significar las prácticas. En esta dirección Martinez (2017) señala que dicha reflexión resulta convirtiéndose en una postura política del docente, que materializa su compromiso de aportar a la calidad de la educación desde su contexto y desde su aula. De esta manera este tipo de pesquisas permiten, inicialmente, evidenciar la construcción de conocimiento que hace el docente desde y sobre su propia realidad, partiendo de una revisión crítica de la labor que desarrolla; y en un segundo momento, otorgan la oportunidad de visibilizar las acciones que buscan fortalecer o reorientar, según sea el caso, las prácticas pedagógicas.

A este respecto, retomando las ideas de Zavala (2002), se anota que el análisis de la práctica educativa debe concretarse por medio de los hechos que derivan de la interacción maestro-alumnos y alumnos-alumnos, considerando, como se mencionó anteriormente, las intervenciones pedagógicas desarrolladas antes (planeación docente) y después (evaluación de los resultados) de los procesos interactivos en el aula. Por esta razón la presente investigación cobra vigencia a partir del principio según el cual el docente debe reflexionar sobre su práctica pedagógica para mejorarla, fortalecerla y construir nuevos conocimientos. Desde este enfoque, la reflexión mencionada emerge como un elemento determinante en la medida en que es un proceso de reconstrucción de la propia experiencia, de situaciones, de sí mismos y de sus concepciones acerca de la práctica pedagógica (Díaz, 2006). En este mismo sentido, el educador en su práctica diaria aprende a indagar en su propio contexto, por lo que esta intencionalidad investigativa se traduce en una enseñanza más efectiva en la medida en que involucra la exploración como un proceso continuo de aprendizaje a partir de la experiencia, reconociendo que este no es un asunto individual y que requiere ser compartido con los demás actores educativos. (UNESCO, 2004)

En cuanto a la relevancia de las investigaciones que tienen como eje la reflexión de las prácticas como herramienta central en la formación docente, se plantea la pertinencia del análisis de las prácticas en cuanto a su singularidad (Souto, 2010). El compromiso de situar a la práctica pedagógica como lugar central de la formación docente plantea grandes desafíos, como el de abandonar la visión tradicional, fragmentada, academicista y las tensiones entre la práctica y la teoría mediante una relación dialéctica. Consecuentemente con los anteriores planteamientos, la formación de maestros en la actualidad requiere la comprensión e interpretación de la práctica pedagógica (Belgich, 2008). En palabras de (Imbernón, 2001) la consolidación y construcción del saber profesional educativo a través de la práctica se encuentra sustentado en el análisis, la reflexión y la intervención sobre situaciones de enseñanza y aprendizaje concretas, elementos que se sitúan en un contexto educativo determinado y particular. Así entonces se resalta la exigencia de desarrollar investigaciones que buscan convertir a la práctica en un proceso enriquecedor de la formación docente, partiendo de la función social que les compete a los maestros que lo impulsa a vivir, entender y comprender sus prácticas. (UNESCO, 2004)

En el contexto de la educación colombiana, a partir del modelo pedagógico de Escuela Nueva para escuelas rurales, surge la figura del docente multigrado quien enseña dos o más grados simultáneamente en una misma aula de clase entendida como aula multigrado; Según Vargas (2003) este tipo de aula presenta altos niveles de pobreza, instalaciones inadecuadas, escasez de materiales pedagógicos, difícil acceso e incluso bajos logros de aprendizaje, lo que permite concluir que el entorno multigrado se convierte en un ambiente de exigencia para el docente, debido a que a mayor diversidad de estudiantes se requiere una organización y planeación más cuidadosa.

Aspectos metodológicos

El estudio se enmarca en un enfoque Cualitativo, desde una perspectiva fenomenológica en el sentido de estudiar la realidad de la práctica en el aula multigrado de manera natural, indagando acerca de las interacciones, procesos y estrategias que utilizan los docentes en el aula. El estudio enmarcado en tres fases se desarrollará con la participación de tres docentes de primaria cuyas características de contexto son similares: aulas multigrado, escuelas rurales, situación económica y sociocultural.

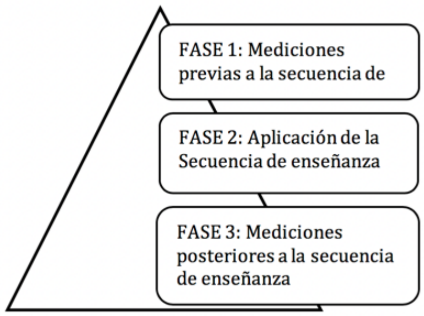


***Figura 1*:** Elaboración propia. Fases tomadas de García-Cabrero, B. (2002).

Para lograr el cumplimiento de los objetivos propuestos se proponen tres etapas en donde se aplicarán técnicas de recolección (la observación participante, la entrevista semi-estructurada y el grupo focal). Además, se realizará un proceso de recolección de información sistemático y con un orden establecido que permitirá (en el proceso de análisis) crear conjeturas válidas y confiables.

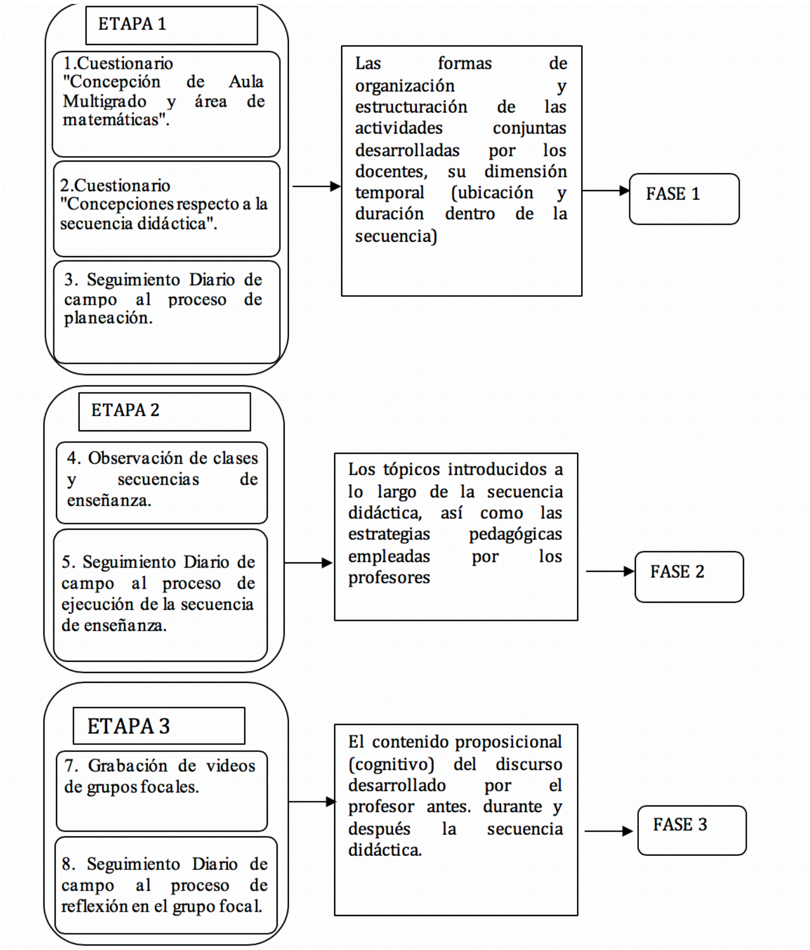


***Figura 2*:** Etapas de la Investigación. Elaboración propia

Conclusiones

El estudio de la práctica pedagógica y la reflexión crítica y dinámica vista desde la perspectiva de los docentes, resulta ser un proceso permanente que encamina al encuentro de acciones que fortalecen, reorientan y transforman todo tipo de interacciones que surjan entre profesor y estudiante en el contexto escolar. Dicho contexto, confronta al docente a dejar de lado una postura tradicional, consolidada por vivencias y concepciones adquiridas a lo largo del tiempo y tomar el riesgo de construir nuevo conocimiento con fines sociales. Así, la indagación de su realidad lo sumerge en un proceso de formación continua que abarca diferentes intervenciones pedagógicas (planeación, ejecución y evaluación) que responde a sus necesidades y las de su entorno.

Referencias bibliográficas

Alzate, A. (2015). Prácticas y formación docente: un escenario propicio para promover la investigación educativa en Colombia. *Actualidades Investigativas en Educación, 15(2),* 1-17. doi: 10.15517/aie.v15i2.18962

Angulo, L. Cerdas, Y. y Ovares S. (2012). El aula multigrado: espacio para la construcción de aprendizajes. En: *Congreso Internacional de Investigación Educativa IIMEC-INIE 25 años en Pro de la Educación*. San José, Costa Rica.

Belgich, H. (2008). *Reflexiones sobre las prácticas docentes en los procesos de integración escolar*. Ciudad de México: Limusa S.A.

Block, D., Martínez, P., Mendoza, T., Ramírez, M. (2013). La observación y el análisis de las prácticas de enseñar matemáticas como recursos para la formación continua de maestros de primaria. Reflexiones sobre una experiencia. *Educación Matemática, 25*(2), 31-59.

Buitrago, E. y Giraldo, S. (2016). *Análisis de la práctica docente en matemáticas a partir de la implementación de una unidad didáctica en grado tercero*. Tesis de pregrado no publicada, Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia.

Castro, E., Peley, R. y Morillo, R. (2006). La práctica pedagógica y el desarrollo de estrategias instruccionales desde el enfoque constructivista. *Revista de Ciencias Sociales, 12(3),* 591-595.

Díaz, V. (2006). Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico. *Laurus*, *12*, 88-103.

Enamorado, J. (2012). *Prácticas pedagógicas de los docentes en la enseñanza de las matemáticas en el ciclo I en las escuelas primarias del departamento de Ocotepeque.* Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Tegucigalpa, Honduras.

Esquea-Gamero, O. (2017). Sentidos de la práctica pedagógica en la formación docente. Caso Facultad de Educación - Universidad del Atlántico. *Praxis, 13(2),* 171-180. Doi: 10.21676/23897856.2359.

Flórez, L. y Betancur, M. (2015). *Prácticas pedagógicas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en el colegio Eugenia Ravasco en los grados evaluados por el Icfes en las pruebas saber*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Católica de Manizalez. Manizalez, Colombia.

García-Cabrero, B.(2002). *El análisis de la práctica educativa en el bachillerato: una aproximación metodológica desde la perspectiva del discurso situado*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad Nacional Autónoma de México. Ciudad de México, Mexico.

García-Cabrero, B., Loredo, E. y Carranza, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 10(Número Especial)*, 1-15.

Guerra, L., Leguízamo, C. y Rincón, D. (2016). *La práctica docente en la enseñanza de las matemáticas: investigación narrativa a nueve docentes de tres instituciones educativas de Bogotá.* Tesis de maestría no publicada. Universidad de La Salle. Bogotá, Colombia.

Imbernón, F. (2001). La profesión docente ante los desafíos del presente y del futuro. En: C. Marcelo (Ed). *La función docente* (pp. 27-46). Madrid: Síntesis.

Jiménez, A. y Gutiérrez, A. (2017). *Educación matemática, 29*(3), 109-129. doi: 10.24844/em2903.04.

Jiménez, A. y Gutiérrez, A. (2017). Realidades escolares en las clases de matemáticas. *Educación Matemática*, *29*(3), 09-129. doi:10.24844/em2903.04.

Jiménez, A., Limas, L. y Alarcón J. (2016). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis & Saber, 7*(13), 127-152.

Martínez, Y. (2017). *La reflexión de la práctica pedagógica: un camino a transitar en la construcción de saber pedagógico*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional- Colombia. (2011). *Programa para la transformación de la calidad educativa. Guía para los actores involucrados*. Recuperado el día 25 de julio de 2018 de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-310661_archivo_pdf _guia_actores.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (2011). *La verdadera importancia de los profesores*. Recuperado el día 25 de julio de 2018 de https://www.mineducacion.gov.co/observatorio/1722/article-272320.html

Naciones unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2004). *La formación de los docentes en Colombia. Estudio diagnóstico.* Recuperado el día 20 de julio de 2018 de unesdoc.unesco.org/images/0013/001399/139926s.pdf

Naciones unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2014). *Educación para Todos (EPT) en América Latina y el Caribe: Balance y Desafíos post-2015*. Recuperado el día 20 de julio de 2018 de http://www.unesco.org/new/fileadmin/ MULTIMEDIA/FIELD/ Santiago/images/Declaracion-de-Lima-31-10-2014-ESP.pdf

Pabón, L. (2009). *Análisis de la práctica pedagógica de los docentes de Matemáticas de los grados 4º y 5º de primaria de la Institución Educativa Distrital Restrepo Millán*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de La Salle. Bogotá, Colombia.

Pineda, N. (2014). Reflexiones sobre la labor docente en escuelas rurales que implementan la metodología escuela nueva. *Quaestiones Disputatae, 7*(15), 33-50.

Quintero, J., Miranda, C. y Rivera, P. (2018). Tendencias de investigación en formación permanente de profesores: estado del arte e interpretación de actores clave. *Actualidades Investigativas en Educación, 18(2*), 1-29. doi: 10.15517/aie.v18i2.33174

Souto, M. (2010). Elucidación Crítica sobre la Formación Docente. *Itinerarios Educativos, 1(4)*, 83-92. doi: 10.14409/ie.v1i4.3927.

Vargas, T. (2003). *Escuelas Multigrado ¿cómo funcionan? Reflexión a partir de las experiencias evaluativas del proyecto Escuelas Multigrado Innovadas*. *Cuadernos de educación básica para todo.* Santo Domingo: Editora de colores S.A.

Zavala, A. (2002). *La práctica educativa, cómo enseñar*. Barcelona: Grao.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ESTUDIO DE SIGNOS DEL CÁLCULO A TRAVÉS DE LOS ESPACIOS DE TRABAJO MATEMÁTICO

STUDY OF SIGNS OF CALCULUS IN THE MATHEMATICAL WORKSPACE

Luis Sandoval Troncoso
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
luis.sandoval@ufrontera.cl

Resumen
Se ha indagado con estudiantes de primer año universitario las dificultades de signos constituidos por otros signos como lo son sumatoria y límite, que son basales en los cursos de cálculo por su relación con los objetos matemáticos como las series, convergencias, integrales, etc. Las dificultades se han investigado desde el punto de vista semiótico de Peirce (1974) en cuanto al signo a través del Espacio de Trabajo Matemático (Kuzniak y Richard, 2014) como marco teórico. Mediante un estudio de casos se ha detectado que ante la solicitud de calcular el valor de una sumatoria y un límite, los estudiantes ven, a las sumatorias y a los límites como un signo desarticulado, funcionando cada uno en forma separada.

Palabras clave: semiótica, sumatorias, límite

Abstract
We have investigated with university students the difficulties of signs constituted by other signs such as summation and limit, which are basal in the courses of calculation for their relationship with mathematical objects such as series, convergences, integrals, etc. The difficulties have been investigated from the semiotic point of view of Peirce (1974) regarding the sign through the Mathematical Workspace (Kuzniak y Richard, 2014) as a theoretical framework. Through a case study it has been detected that before the request to calculate the value of a sum and a limit, the students see, the summations and the limits as a disjointed sign, each functioning separately.

Key words: semiotic, summation, limit

Introducción

La evidencia empírica revela que a diario en el aula de matemática, son consideradas muchas maneras de representar objetos matemáticos en el discurso de los docentes al momento de efectuar su clase.

Estas maneras de representar podrían estar dadas por gráficos, esquemas, símbolos, dibujos, o bien digamos, signos en general, sin hacer distinciones entre uno u otro término. Sin embargo, en el estudio de la didáctica de la matemática, se hace hincapié en las diferencias que merecen las terminologías mencionadas anteriormente, de tal forma que al hablar de signos, símbolos, representaciones, no nos estamos refiriendo a sinónimos sino a cuestiones que, si bien es cierto están relacionadas, pero de acuerdo a la literatura son diferentes, y serán la base de nuestra posición para enfrentar la problemática que describiremos en lo posterior.

A través de los años, variadas investigaciones muestran el aporte que ha significado el estudio de los signos y las representaciones en diversas áreas, por ejemplo, en Arzarello y Sabena (2011), se indica el aporte del signo en cuanto a la argumentación en estudiantes universitarios por medio de signos que evocan objetos matemáticos como la derivada y las primitivas, así como también la relación entre sus gráficas. Por consiguiente, destacamos que dicha investigación nos motivó a realizar un estudio más profundo del signo desde el punto de vista de Peirce (1974), el cual hallamos pertinente por la clasificación que hace éste para el signo tanto para un "objeto" como para un "interpretante" (Peirce, 1974), lo cual permite un análisis detallado en cuanto a dificultades y errores presentes en los estudiantes a la hora de enfrentarse a actividades matemáticas propuestas por el docente.

Otros trabajos, con enfoques geométricos, específicamente en el cálculo de áreas, como en Codes y González (2017) por ejemplo, tratan en particular situaciones que involucran los problemas del "infinito potencial" e "infinito actual", lo cual se sabe que es un "obstáculo epistemológico" resistente y persistente (Mena-Lorca *et al*, 2015), cuestión que se evidencia en los estudiantes cuando calculan límites. Sin embargo, creemos que Codes y González (2017) en su propuesta, no resuelven el problema, y nuestra posición es que el abordaje semiótico desde el punto de vista de Peirce (1974), podría dar más pistas para tratarlo mejor.

Continuando con la idea de signos, destacan múltiples aportes de éstos en el aprendizaje de la matemática en niños que se enfrentan al álgebra. Así lo demuestran las investigaciones realizadas por Radford (2006, 2009), quién a través de la consideración de signos, poco habituales, pero muy interesantes de analizar, como los gestos, permiten a través del "sistema semiótico cultural" (Radford, 2006) una mejor comprensión del objeto matemático involucrado, sistema que está basado en la actividad del colectivo, a través de signos que involucran algo más profundo que la sola consideración de simbología matemática, como lo es el caso de las "narrativas" (Radford, 2009) consideradas como parte de la actividad matemática del sujeto. Esa narrativa del estudiante corresponde, por ejemplo, a un patrón que desea encontrar a partir de objetos concretos que son evocados del mundo real para describir el comportamiento de algún fenómeno que vive en la matemática.

Por otra parte, quien hace su aporte relevante en cuanto a signos, es también Sfard (2008), pues ella a través de su "teoría comognitiva" (unión de las palabras comunicación y cognición), permite que en el "discurso" (Sfard, 2008) en el aula salgan a la luz signos relacionados con el objeto matemático en cuestión a través de las "realizaciones" (Sfard, 2008). Éstas corresponden a múltiples actividades comunicativas que no sólo contempla lo representacional escrito, pues también es llevado a cabo lo gestual, lo verbal oral escrito, lo verbal oral hablado, lo concreto. Es por ello entonces que decimos que va más allá de lo representacional, en contraste a lo que propone Duval (2004) con las "representaciones semióticas".

Como hemos podido apreciar, los aportes de los signos son mucho más que la simple acción de hablar de símbolos y de escribirlos, más aún, la literatura lo ha constatado. Así pues, referirse a signos implica un estudio más acabado en cuanto a los objetos matemáticos de acuerdo con los intereses didácticos de cada investigador. De esta manera, como investigadores, es posible analizar didácticamente cómo es que comprenden objetos matemáticos los estudiantes por medio del estudio de una multiplicidad de signos que tenemos a disposición, e ir en beneficio del entendimiento de la matemática de manera más amena para el estudiante. Combinando, por ejemplo, la formalidad de la matemática con los recursos tecnológicos y la interpretación de los sujetos que aprenden, así como la gesticulación para indicar propiedades de un objeto, y el "discurso" (Sfard, 2008) que propicia dicha manifestación corporal en el colectivo.

Luego de esta indagación por los trabajos mencionados previamente, debemos decir, que en un principio en nuestro andar a través de la semiótica, hemos mencionado en este escrito a Peirce, quién fue el que acuñó este nombre para referirse al estudio de los signos. Su naturaleza de químico y lógico nos hizo reflexionar acerca del signo como algo más general, ya que el mismo dice: "todo pensamiento es un signo" (Peirce, 1974), lo que nos instó a realizar un estudio de éstos para analizar producciones de estudiantes universitarios de primer año que cursan la asignatura de cálculo 1, quiénes son enfrentados a calcular una sumatoria doble y posteriormente un límite, con el objetivo de analizar las dificultades y errores a las que éstos están expuestos al llevar a efecto dicha tarea. De este modo, es idóneo abordar el estudio del signo a través de Peirce, ya que en una primera aproximación para analizar el trabajo de los estudiantes con los objetos matemáticos sumatoria y límite, el signo como objeto es lo que nos interesa destacar, ya que nos permitiría como investigadores detectar en dónde se ubican las dificultades de los individuos cuando nos referimos al signo a través del ícono, índice y símbolo (Peirce, 1974), caracterización del signo como objeto dada por Peirce.

Para llevar a cabo el estudio del trabajo matemático del estudiante en cuanto a signos, y pesquisar dificultades y errores con estos, procederemos a utilizar el marco teórico de los espacios de trabajo matemático (Kuzniak y Richard, 2014) junto al signo de Peirce (1974), los cuales nos permitirán identificar dificultades por medio de sus diversas génesis que articulan los planos epistemológico y cognitivo de dicho modelo.

La razón por la cual estudiaremos el signo con los objetos sumatorias y límites, es principalmente por el nexo que existe entre estos objetos con otros más complejos, como lo son las series, las cuales se relacionan con convergencias, integrales, ecuaciones diferenciales, entre otros, lo que nos permite llevar un estudio de manera basal, considerando que los objetos que se trabajan posteriormente son más difíciles de abordar por los estudiantes, lo que significa que un estudio de prácticas de los individuos con objetos matemáticos primarios, nos darían pistas para identificar prácticas similares con objetos que necesitan de una mayor comprensión y reflexión por parte del sujeto.

Marco teórico

Para efectuar nuestra investigación, como se dijo anteriormente, se empleará el estudio del signo desde el punto de vista de Peirce (1974) y conjuntamente se analizará el trabajo del estudiante a través del modelo de los espacios de trabajo matemático (Kuzniak y Richard, 2014), en adelante, ETM, que ligará el estudio del signo con las componentes de dicho modelo.
En el modelo del ETM, se articulan dos planos: un "plano epistemológico" relacionado con los contenidos matemáticos y un "plano cognitivo" relacionado con el pensamiento de la persona que resuelve tareas matemáticas (Kuzniak y Richard, 2014) (ver figura 1.)

El plano epistemológico consta de tres polos: "el referencial teórico", "el instrumental" y el "representamen".

Por otra parte, el plano cognitivo, consta de los polos: "visualización", "construcción" y "prueba".

Dichos planos, el epistemológico y el cognitivo, están articulados a través de tres "génesis" (Kuzniak y Richard, 2014): una "génesis semiótica", relacionada con los "registros de representación semiótica" (Duval, 2004), una "génesis instrumental", la cual alude a la funcionalidad de los "artefactos" en el proceso de construcción que contribuye al trabajo matemático, entendiendo por "artefacto", las herramientas de dibujo o software para dar funcionalidad al trabajo matemático, y la "génesis discursiva" de la prueba, relacionada con las propiedades matemáticas para el razonamiento.

Además, según Kuzniak y Richard (2014), se consideran distintos tipos de ETM:

"ETM de referencia", el cual refiere a los acuerdos tomados dentro de una comunidad en cuanto a formulación de problemas y sus soluciones, privilegiando formas de pensamiento en torno a la matemática.

"ETM idóneo", el cual corresponde al espacio de trabajo matemático en donde el profesor pone en juego la didáctica para enseñar cierto objeto matemático al estudiante, y el "ETM personal", el cual tiene por finalidad analizar la producción de los estudiantes, pues se consideran sus conocimientos y capacidades cognitivas.

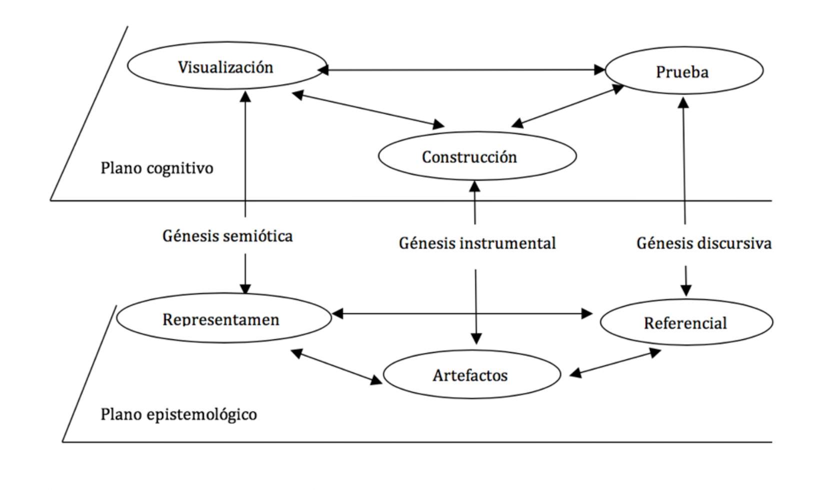


Figura 1. Modelo de los Espacios de Trabajo Matemático

Como hemos podido ver, en cuanto a las representaciones, se hizo referencia a Duval (2004). Sin embargo, para nuestros propósitos, hemos decidido estudiar la génesis semiótica a través de Peirce (1974), la cual como hemos especificado anteriormente, es más general, por abordar el signo desde otras perspectivas. Para comenzar, Peirce (1974) se refiere al signo de acuerdo con una relación triádica en la que divide a éste en tres.

1. Relaciona al signo consigo mismo.

En esta división el signo es:

a. Cualisigno: el cual corresponde a la cualidad que es un signo.
b. Sinsigno: el cual alude a la existencia que es un signo, una cosa o evento real que es un signo.
c. Legisigno: el cual es una ley que es un signo.

2. Relaciona al signo como objeto. En esta división el signo es:

a. Icono: Se refiere al objeto al que denota en virtud de características que le son propias, independiente de si existe o no tal objeto.

b. Indice: Se refiere al objeto que denota en virtud de ser afectado por el objeto, es decir, la naturaleza del objeto incide en la aparición del índice.

c. Símbolo: Se refiere al objeto que denota en cuanto a una ley, asociaciones de ideas generales que le dan al símbolo la interpretación con referencia al objeto.

3. Relaciona al signo como interpretante. En esta división el signo es:

a. Rema: Es un signo de posibilidad cualitativa, representa una u otra clase de objetos posibles, puede esta entregar información, sin embargo, no se interpreta que esta la entregue.

b. Signo Dicente: Es un signo de existencia real.
c. Argumento: Es un símbolo o un signo cuyo objeto es una ley.

Para nuestros análisis consideraremos el "signo como objeto", en virtud de identificar prácticas establecidas por el estudiante con los objetos matemáticos, pues hallamos en éstos: "íconos", "índices" y "símbolos". Esta clasificación permite estructurar nuestro estudio e identificar en qué subdivisión del signo como objeto se presentan errores y dificultades, y cómo influyen en las génesis del espacio de trabajo matemático personal del estudiante.

Metodología

Para analizar las producciones de los estudiantes, nos ubicamos bajo un paradigma cualitativo. La metodología fue llevada a cabo a través de un estudio de casos (Stake, 1998). Para ello, nos posicionamos en un curso de cálculo 1 de las carreras de bioquímica y química industrial de una universidad chilena, con el objetivo de indagar en las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a una actividad de sumatoria y límite.
El caso lo conforman 41 estudiantes (18-19 años). Se aplicó una pregunta con 2 ítems, la primera de ellas corresponde al cálculo de una sumatoria doble y la segunda es el cálculo de un límite. Los estudiantes participaron libremente de la actividad. Se han identificado como estudiante 1 por E1, estudiante dos por E2 y así hasta E41.

La actividad se detalla a continuación:

1. Calcule $\sum_{\substack{i=1 \\ j=0}}^{\substack{6 \\ 5}} (i+j)$.

En el caso de este ejercicio en particular, la notación empleada fue diseñada de forma intencionada, de modo que permita analizar cómo influye la adecuada o inadecuada notación. Así mismo será posible encontrar aquellas dificultades producto de la notación a la que hacemos mención y si es posible que el estudiante note que está frente a una sumatoria doble y la relevancia que tienen los signos. En este caso nos interesa saber qué iconos, índices y símbolos salen a la luz del trabajo matemático del sujeto, y en cuál o cuáles de estas subdivisiones presenciamos dificultades y/o errores además de analizar si es posible que se activen las génesis semiótica, instrumental y discursiva del modelo ETM.

2. ¿Qué valor tiene $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})$? ¿Es un valor exacto? Si, No, ¿Por qué? Explique.

Análogamente al caso de la sumatoria, nos interesa saber aquéllas dificultades y/o errores que se detectan en el cálculo del límite, es decir, en qué parte del signo como objeto podemos percibir ciertas incompatibilidades que hacen o no hacen que el sujeto trabaje de manera adecuada, y junto a ello, poder decir si existe una articulación entre los planos epistemológico y cognitivo del ETM a través de la activación de las génesis de dicho modelo.

Resultados

Para el primer inciso, del cálculo de la sumatoria, tomamos la producción de un estudiante que hemos denotado como E1, siendo esta producción el reflejo de aquéllas que respondieron que el valor de dicha sumatoria es 36, la elección de esta producción fue debido a que es la más explícita de todas, lo que implica un mejor análisis del signo en cuestión. De acuerdo con esto, 18 sujetos contestaron que el valor de esta sumatoria es 36 y los 23 estudiantes restantes no respondieron el ítem.

Por otro lado, ningún estudiante se percató de que se trataba de una sumatoria doble. (ver figura 2.). Más detalles de esta situación se dan en las conclusiones.

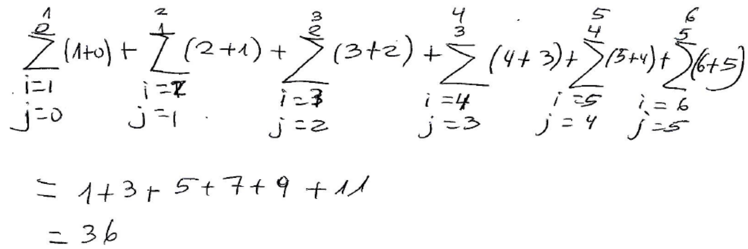


Figura 2. Producción de E1

Con respecto a lo visualizado en la producción, y como resultado de nuestras reflexiones, daremos a conocer ciertas indicaciones que se podrían tener en cuenta a la hora de revisar con los estudiantes la importancia de las propiedades y en particular de los signos (Peirce, 1974) que contiene la doble sumatoria.

Como bien sabemos que la notación para la sumatoria y sus índices no es la más adecuada, rescatamos que cualquiera de las dos siguientes maneras de escribirlas, nos hubiese dado algunos indicios de que el estudiante comprende la existencia de los índices i ,j ligados a una función que depende de i por una parte y de j por otra. De este modo, podríamos haber tenido las siguientes dos posibilidades:

a. Tomar desde i desde 1 hasta 5 y j desde 0 hasta 6.

$$\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{\substack{6\\5}}(i+j)$$

El desarrollo podría haber sido el siguiente: En una primera instancia dejar i fijo, y j variable con j corriendo desde 0 a 6, lo que genera la siguiente expresión y cálculo respectivo:

$$\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{\substack{6\\5}}(i+j)$$

$$=\sum_{i=1}^{5}((i+0)+(i+1)+(i+2)+(i+3)+(i+4)+(i+6)=\sum_{i=1}^{5}(7i+21)$$

$$=7\sum_{i=1}^{5}i+\sum_{i=1}^{5}21=7(1+2+3+4+5)+21\times 5=210$$

Si el estudiante toma j fijo e i variable corriendo desde 1 a 5, el resultado es el mismo, es decir 210, aunque sin duda, la notación sigue siendo muy subjetiva.

b. Tomar i desde 1 hasta 6 y j desde 0 hasta 5.

$$\sum_{\substack{i=1\\j=0}}^{\substack{6\\5}}(i+j)$$

En este caso, el estudiante optaría por dejar j fijo e i variable corriendo desde 1 a 6, generando el resultado siguiente:

$$\sum_{j=0}^{5}\big((1+j)+(2+j)+(3+j)+(4+j)+(5+j)+(6+j)\big)=\sum_{j=0}^{5}(6j+21)=216$$

Como en el caso anterior, al dejar i fijo, j variable corriendo desde 0 a 5 se obtiene el mismo resultado, es decir, en este caso, 216. Es fácil darse cuenta que en los casos a y b los resultados son distintos, lo que implica que ciertos procedimientos no están correctos. Sin embargo, el estudiante con esto, ya nos estaría revelando que es capaz de reconocer el rol que cumplen los índices y las funciones que intervienen, así como también el rol que cumple sigma. Destacamos que el resultado eventualmente puede ser correcto y coincidir con la doble sumatoria que se conoce actualmente, sin embargo, la declaración de las propiedades del objeto matemático junto a su simbología es fundamental para una comprensión adecuada y sin ambigüedades.

De esta forma, el profesor tomando su rol como tal y de matemático experto, debe en estos momentos indicar dichos desarrollos para proceder ahora con la importancia que tienen las propiedades y la correspondencia entre estas y su semiótica (Peirce, 1974). Finalmente, el profesor debería llegar a que:

$$\sum_{j=0}^{6}\sum_{i=1}^{5}(i+j)$$

Es la notación de la doble sumatoria y que coincide con la expresión:

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=0}^{6}(i+j)$$

Y que en ambos casos el resultado es 210. Lo que junto a las propiedades que enuncia el profesor, no da lugar a la generación de subjetividades y la relevancia del signo (Peirce, 1974) queda establecida en esos momentos.

Para el segundo inciso, el del cálculo del límite, tomamos la producción que hemos denotado como E2, ella caracteriza a muchas otras producciones, por lo que nos pareció pertinente tomarla como una producción ejemplo, pues deja constancia clara de lo que su trabajo matemático manifiesta en cuanto a análisis del signo (ver figura 3.)

Ahora en cuanto a resultados, ocho estudiantes respondieron que el límite era exactamente 1, diez que no existe el valor del límite, pues en su mayoría argumentan que 2 elevado a infinito no existe, y por último, 3 estudiantes dijeron que no existe por la razón expuesta por E2 en la producción, la cual expone: "no tiene valor exacto, porque el límite varía según la cantidad esté aumentando".

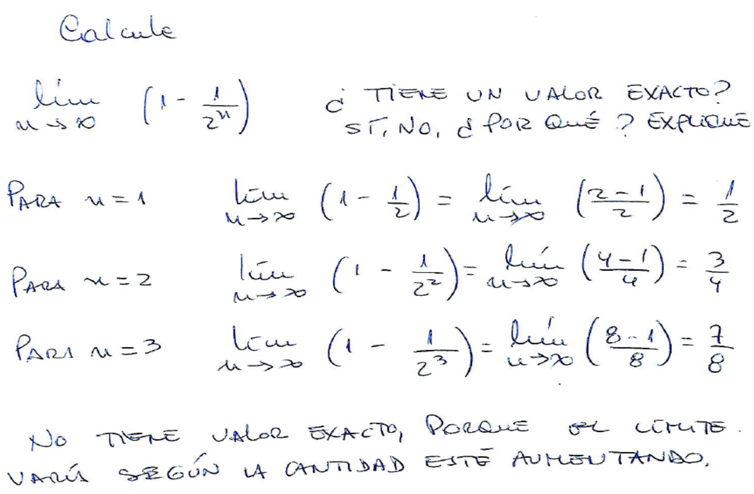


Figura 3. Producción de E2

A modo de reflexión consideremos lo siguiente en cuanto a la producción recién analizada:

Primeramente, una de las cuestiones relevantes que el alumno debiera preguntarse, es la siguiente:

¿Qué ocurre cuando consideramos $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{64}, \ldots, \frac{1}{2^{80}}, \ldots$?, ¿Qué resultado obtengo de esas divisiones cuando consideramos un valor en el denominador extremadamente grande? Pues bien, creemos que, en este sentido, el docente debe incluir ese tipo de preguntas al abordar el objeto matemático en sus clases habituales, considerando la posibilidad que la expresión numérica $\frac{1}{2^n}$ se haga cero cuando n tiende a infinito. Así mismo, con otras expresiones que arrojan el mismo resultado. De acuerdo con los datos obtenidos, podemos ver que existe una resistencia al infinito, cuestión que mencionábamos anteriormente con respecto al “infinito potencial”, y que la buena idea sería dar avances hacia el concepto de “infinito actual”. Más detalles de esta situación se dan en las conclusiones.

Conclusiones

En términos de signos de Peirce, se puede dar cuenta que tanto en el caso del cálculo de la sumatoria como en el caso del cálculo de límites, el signo analizado como objeto, es decir, el signo que identifica: ícono, índice y símbolo, arroja que éste falla en cuanto al índice, pues tanto en la sumatoria como en el límite se identifican funciones (índices, según Peirce (1974)) que no son afectadas por el objeto, es decir, en la sumatoria, no se refleja la acción de sigma (ícono, según Peirce (1974)) junto a sus índices sobre la función $i + j$. No se observa, digamos, el “activador” sigma sobre esta función, haciendo ver que sigma no es más que una instrucción para el estudiante, que implica la acción de sumar, quedando aislada de la función en cuestión. Dicha situación se vuelve a repetir en cuanto al cálculo del límite propuesto, donde la función $1 - \frac{1}{2^n}$ es un índice que implica la acción de reemplazar cierto número de acuerdo al otro índice “n tendiendo a”, que induce a la evaluación de dicho número en el índice función, que en este caso, al tender n a infinito, genera la confusión en el sujeto, pues al considerar infinito toma el significado de este como “cualquier número”, lo que lo hace tomar determinados valores, los cuales son reemplazados en la función $1 - \frac{1}{2^n}$ y con ello obtiene diversos valores para el límite, lo que no permite obtener la idea de convergencia, que sería la idea general que se desprende de lo que significa “símbolo” desde el punto de vista de Peirce.

Ahora bien, desde el trabajo matemático del estudiante, mediante el ETM y bajo la génesis semiótica, el signo en su totalidad permite una visualización del objeto que no es bien concebida dada la no articulación del sujeto con cada uno de los elementos que compone el signo general $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, pues todos funcionan de forma independiente, ya que ninguno influye de manera adecuada para llegar a un valor correcto, de forma tal que el ícono lim, cumple aquí también el rol de instructor: “ tome n cualquiera y calcule”, lo que no permite una activación adecuada de la génesis instrumental, ya que ésta se ve truncada, pues las herramientas que provee las propiedades de un sistema numérico basado en la adición y sustracción dada por el referencial teórico, no son suficientes pues no existe claridad con propiedades del límite y su relación con el infinito, de modo tal que la génesis instrumental no permite obtener el valor correcto de dicho límite, por lo que a su vez no es posible activar la génesis discursiva que de a conocer que el límite converge a cierto valor, que en el buen caso debiera arrojar que su valor es 1, o que el límite converge a 1.

Finalmente, nuestras hipótesis de por qué no es posible llegar a buen fin con estos cálculos, se debe a que el docente en su quehacer como tal, no contempla al signo como aquello que deba explicarse con detalle, es decir, como algo que sólo debe ser visto para instrumentalizarse, para dotar al sujeto de una serie de algoritmos bajo técnicas algebraicas, sin una interpretación detallada y correcta de los signos que componen un objeto, debido a la escasa articulación entre signos y, en consecuencia, sin sentido para el sujeto que resuelve tareas matemáticas, pues tiene ante sus ojos un objeto con múltiples signos en donde cada uno tiene roles distintos.

En conclusión, los signos que están presentes tanto en las sumatorias como en los límites deben ser abordados de forma articulada, de modo que tanto sigma como lim, sean "activadores" de las funciones que intervienen para su cálculo posterior, sólo de esa manera será posible activar las diversas génesis del modelo ETM para la correcta conexión entre los planos epistemológico y cognitivo del modelo en cuestión.

Por otra parte, tanto las sumatorias como los límites son dos objetos de mucha relevancia en el cálculo. La aplicación de dichos objetos en el cálculo de áreas tiene una profunda explicación en base a las sumas de Riemann, cuya naturaleza permite una adecuada comprensión del concepto de área bajo la curva.

Del mismo modo, el límite reaparece en el cálculo de series, objeto que lleva consigo elementos conceptuales tan importantes como el de la convergencia, en donde se precisa que si la serie converge, entonces se puede conocer la suma de esa serie, esa suma de la serie ya contempla el cálculo del límite de una sucesión de sumas parciales.

Finalmente, es así como damos cuenta de la importancia del objeto matemático en nuestro estudio. Un abordaje de los "signos" de forma pertinente y permanente, por parte del docente, mejoraría en los estudiantes su trabajo matemático. De este modo, el ETM junto al análisis de "signos", es un modelo propicio para indagar sobre aquellas dificultades con las que se encuentra el sujeto, de modo tal que resulta fructífero detectar en dónde se encuentran tales problemas y, a futuro, dar posibles caminos que ayuden a mejorar aquellas dificultades.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F. y Sabena, C. (2011). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof activities. *Educational Studies in Mathematics. (77)* (2-3)*,* 189-206. doi: 10.1007/s10649-010-9280-3.

Codes, M. y González, A. (2017). Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las ciencias, 35*(1), 89-110. doi:10.5565/rev/ensciencias.1927

Duval, R.(2004). Semiosis y Pensamiento Humano. *Registros semióticos y Aprendizajes Intelectuales* (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Merlín I.D.

Kuzniak, A. y Richard, P.R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *RELIME, 17*(4-1), 5-15. doi:10.12802/relime.13.1741a

Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J., Montoya, E., Morales, A. y Parraguez, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual. Persistencia, resistencia y categorías de análisis. *RELIME 18*(3), 329-358.doi:10.12802/relime.13.1832

Peirce, C. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

Radford, L. (2006). Introducción: Semiótica y Educación Matemática. En L. Radford y B. D' Amore (Eds.), *Semiótica, Cutura y Pensamiento Matemático* (Número especial de *RELIME*), 7-21.

Radford, L. (mayo, 2009). *Signs, Gestures, Meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective*. Plenaria del Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, Francia. Recuperado desde http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/plenary1-radford.pdf

Sfard, A. (2008). *Thinking as communication. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511499944

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos* (2da ed.). Madrid, España: Ediciones Morata.

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PARABOLA

MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF SECONDARY EDUCATION TEACHERS IN ORDER TO TEACH THE PARABLE

José Carlos León Ríos, Isabel Tórres, Elizabeth Advíncula, Marisel Beteta
Universidad de Lima. (Perú)
jleonr@ulima.edu.pe, iztorres@ulima.edu.pe, eadvincu@ulima.edu.pe, mbeteta@ulima.edu.pe.

Resumen
Este artículo es un reporte de investigación en curso, el cual indaga sobre la comprensión del conocimiento que utiliza un profesor de matemática en el tema de la parábola. El objetivo de nuestra investigación es validar una propuesta de innovación didáctica para el aprendizaje de la parábola tomando como base aspectos del Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK), propuesto por Carrilo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), y está dirigida a docentes de educación secundaria. Por otro lado, nuestra investigación sigue una metodología cualitativa, la cual nos permitirá describir con mayor profundidad los resultados encontrados. En este reporte presentamos un avance del diseño de la evaluación diagnóstica, la descripción de las principales categorías e indicadores, la cual nos permitirá recoger información de la actuación del docente en el aula.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento especializado del profesor, parábola

Abstract
This article is an ongoing research report, which investigates the understanding of knowledge that a mathematics teacher uses to develop the parable topic. The objective of our research is to validate a proposal of didactic innovation for the learning of the parable based on aspects of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge Model (MTSK), proposed by Carrilo, Climent, Contreras and Muñoz-Catalan (2013), and is aimed at secondary school teachers. On the other hand, our research follows a qualitative methodology, which will allow us to describe in greater depth the results found. In this report we present an advance of the design of the diagnostic evaluation, the description of the main categories and indicators, which will allow us to collect information on the teacher's performance in the classroom.

Key words: teacher training, mathematics teacher's specialized knowledge, parabola

Introducción

La situación actual en la que se encuentra la formación de docentes de Matemáticas en Perú, según Díaz (2015), presenta las debilidades siguientes: competencias insuficientes con las que egresan los profesionales de Institutos Pedagógicos, según resultados de la Evaluación de Egreso 2013, aplicada por el Ministerio de Educación, distintas mallas curriculares existentes en Institutos Superiores Pedagógicos y Universidades, resistencia al cambio por parte de los formadores de docentes, los cuales mantienen prácticas pedagógicas tradicionales, escasa preparación de los docentes en contenidos matemáticos; y falta de preparación de los docentes en aspectos didácticos matemáticos. En el Currículo Nacional de la Educación Básica, el objeto matemático parábola se encuentra ubicado en el último ciclo escolar y en un nivel de desarrollo destacado de la competencia.

Como nos interesa trabajar con docentes de educación secundaria, revisamos el Currículo Nacional de la Educación Básica y el Programa Curricular de Educación Secundaria, el cual está en vigencia desde el año 2016, y busca el desarrollo de competencias, es decir, reflexionar sobre la situación significativa que se debe ofrecer a los estudiantes para que pongan en juego determinados niveles de sus competencias y evidencien sus desempeños. Respecto a la noción de parábola en el Currículo Nacional de la Educación Básica (Ministerio de Educación del Perú, 2016), en la Competencia 26 "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización", al finalizar el VII ciclo se espera que los estudiantes resuelvan problemas relacionados con la parábola en diversos contextos. Esta competencia implica que los estudiantes deben desarrollar las siguientes capacidades: modelar objetos con formas geométricas y sus transformaciones, comunicar su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas, usar estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio, y argumentar afirmaciones sobre relaciones geométricas, que consiste en orientar y describir la posición del movimiento de objetos y de sí mismos en el espacio. Asimismo, cada competencia incluye estándares de aprendizaje que son los referentes para medir y describir los niveles de desarrollo de cada competencia que los estudiantes deben alcanzar desde el inicio hasta el fin de la escolaridad. Esta descripción permite conocer el nivel esperado que se espera alcanzar al finalizar cada ciclo escolar. En tal sentido los estándares ofrecen información valiosa que permite ver que tan lejos o tan cerca está el estudiante de alcanzar el aprendizaje esperado.

Objetivo

El objetivo de nuestra investigación es elaborar y validar una propuesta de innovación didáctica para el aprendizaje de la parábola, dirigida a docentes de educación secundaria.
Para alcanzar dicho objetivo, hemos identificado los siguientes objetivos específicos:

1. Identificar los conocimientos didácticos y matemáticos de los docentes de educación secundaria referidos a la parábola.
2. Implementar la propuesta de innovación didáctica con docentes de educación secundaria.
3. Analizarla y evaluarla con el fin de tener elementos que permitan mejorarla.

Aspectos del modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MSTK)

En los trabajos de Shulman (1986) se encuentran las bases de un modelo que permite identificar y sistematizar los conocimientos que requiere un profesor, el cual incluye por primera vez, el conocimiento del contenido y el conocimiento de la didáctica específica. En base a este estudio, Ball y su equipo de trabajo (Ball, 2000; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008) proponen la noción de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT), donde expone lo que los maestros necesitan conocer y hacer para una enseñanza que pretenda la comprensión de un contenido matemático.

Posteriormente, un grupo de investigación de la Universidad de Huelva ha propuesto el modelo Conocimiento Especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Dicho modelo consta de dos grandes dominios de conocimiento: el conocimiento del contenido matemático (MK) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK), como se muestra en la Figura 1.

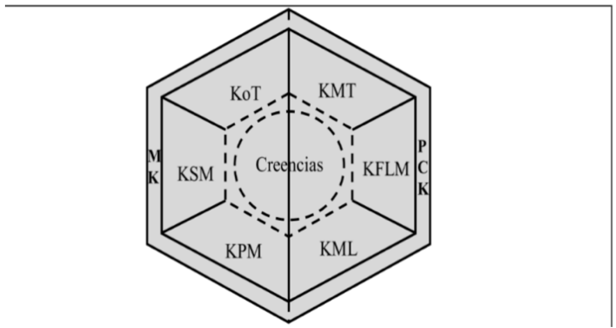


Figura 1: Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)

Nuestro trabajo toma como referencia los componentes del contenido matemático (MK), que está compuesto por tres subdominios de conocimiento (Rojas, Flores y Carrillo, 2015) que a continuación describimos.

El primer subdominio del dominio matemático es el conocimiento de los temas (Knowledge of Topics – KoT), el cual incluye el propio contenido matemático, como conocimiento de los conceptos y procedimientos matemáticos. Este subdominio ha sido organizado en diversas categorías como los contenidos, la fenomenología, los sistemas de representación y los procedimientos. La fenomenología, referida como la contextualización de las relaciones con los objetos, con las personas y las situaciones.

El segundo subdominio, es el conocimiento de la estructura de las matemáticas (Knowledge of the Structure of Mathematics – KSM) que encierra una visión de conjunto de la matemática, y que se origina cuando el profesor vincula los elementos que se encuentra considerando a otros, desde una conexión simple y compleja del contenido matemático, dichas conexiones son interconceptuales y temporales.

Finalmente. el conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practice of Mathematics – KPM) implica el modo de proceder en matemáticas, incluye el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico sobre la lógica en matemáticas), el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, elegir representaciones, argumentar, generalizar o explorar, aspectos de la comunicación matemática (Carrillo et al, 2013).

Nuestro trabajo se centra en el dominio del conocimiento del contenido matemático (MK) pues nos interesa indagar acerca de los conocimientos matemáticos que tienen los profesores de educación secundaria en relación con el contenido parábola, ya que observamos que los docentes en su práctica presenten muchas deficiencias en relación con el dominio de diversos contenidos matemáticos. Nuestra exploración en este dominio incluye tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático del profesor de matemáticas, estos son: el conocimiento de los contenidos matemáticos, el conocimiento de la estructura matemática y el conocimiento de la práctica matemática.

Diseño metodológico

Recalcamos que el diseño de la evaluación diagnóstica, la descripción de las principales categorías e indicadores, son parte de una investigación preliminar que en la actualidad estamos trabajando con un grupo de profesores secundaria, en el área de matemática. En este reporte, se realizó un estudio cualitativo e hicimos uso de algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995 citado en Artigue, 1995). Dado que nuestra investigación es cualitativa, categorizaremos y codificaremos los datos para tener una descripción más profunda y completa de éstos. Elaboramos una categorización y descripción de cada categoría según el Modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK) y luego procedimos a un análisis a priori para obtener los datos necesarios y realizar un análisis posterior de las posibles respuestas correctas e incorrectas de los profesores. Las categorías e indicadores se elaboraron para cada uno de los tres subdominios del dominio MK, las cuales mostraremos parcialmente. Las categorías y los indicadores vinculados con el conocimiento del objeto matemático parábola incluyen la comprensión de definiciones, uso de propiedades, notación y diversas representaciones, justificaciones, etc. Los instrumentos que utilizaremos son: la evaluación diagnóstica, el cuestionario de la entrevista semi-estructurada, y actividades didácticas que abarcan situaciones y problemas en diversos contextos. Las técnicas que utilizaremos son: la observación, la entrevista y la lectura de documentos que contienen significados. Para la observación utilizaremos listas de cotejo y matrices, para la entrevista se usarán los cuestionarios y las grabaciones.

Análisis del diseño y aplicación de la evaluación diagnóstico de conocimientos matemáticos acerca de la parábola

Para el diseño de nuestra evaluación diagnóstico hemos elaborado previamente las categorías e indicadores para cada uno de los tres subdominios del dominio MK y luego hemos construido preguntas que nos permitan recoger información relacionada con cada uno de los indicadores. En la estructura de la evaluación diagnóstico, para el subdominio KOT, hemos considerado organizarlo en cuatro categorías: contenidos, fenomenología, sistemas de representación de la parábola y procedimientos.

En el contenido se consideró el conocimiento del concepto de parábola como lugar geométrico, conocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática, el conocimiento de propiedades relacionadas con máximos y mínimos de una función cuadrática, conocimiento de propiedades relacionadas con ecuaciones cuadráticas, conocimiento de propiedades relacionadas con trayectorias ideales de cuerpos que se mueven bajo influencia exclusiva de la gravedad como el movimiento parabólico. En la fenomenología, se consideró el conocimiento de situaciones en las que se aplica el concepto de parábola (como sección cónica, como condición geométrica y como función) dentro y fuera de la matemática. En los sistemas de representación de la parábola, se consideró la representación de la condición geométrica de la parábola en el sistema de coordenadas cartesiano y la representación de la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano. Finalmente, en los procedimientos, se consideró incluir la determinación de la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos y la determinación de la ecuación ordinaria de la parábola y reconocimiento de sus principales elementos.

En la tabla 1, se muestra la estructura de la evaluación diagnóstico, del subdominio KOT.

Subdominio: KOT		
Categoría	**Indicadores**	**N° pregunta**
Contenidos	Conocimiento del concepto de parábola como lugar geométrico.	1
	Conocimiento de la parábola como la gráfica de una función cuadrática.	2a, 2b

	Conocimiento de propiedades relacionadas con máximos y mínimos de una función cuadrática.	2c
	Conocimiento de propiedades relacionadas con ecuaciones cuadráticas.	3
	Conocimiento de propiedades relacionadas con trayectorias ideales de cuerpos que se mueven bajo influencia exclusiva de la gravedad como el movimiento parabólico.	4
Fenomenología	Conocimiento de situaciones en las que se aplica el concepto de parábola (como sección cónica, como condición geométrica y como función) dentro y fuera de la matemática.	5, 6, 9
Sistemas de representación de la parábola	Representación de la condición geométrica de la parábola en el sistema de coordenadas cartesiano.	7
	Representación de la condición geométrica de la parábola omitiendo el sistema de coordenadas cartesiano.	8
Procedimientos	Determinación de la ecuación de la parábola teniendo en cuenta las propiedades de sus elementos.	10
	Determinación de la ecuación ordinaria de la parábola y reconocimiento de sus principales elementos.	11

Tabla 1. Estructura de la evaluación diagnóstico

Mostramos también el análisis a priori de una de las preguntas que se estructura en la categoría sistemas de representación de la parábola. La representación gráfica de la pregunta se muestra en la figura 2, donde se muestra un rectángulo formado por dos cuadrados. El profesor debe trazar, de ser posible, una parábola que pase por dos de los vértices del rectángulo y justificar su respuesta.

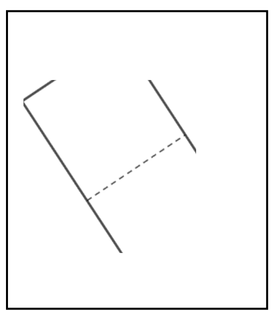


Figura 2: Representación del rectángulo formado por dos cuadrados

En esta pregunta, esperamos que los profesores a partir del conocimiento del lugar geométrico de la parábola como *el conjunto de puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo F (llamado foco) y una recta fija l (llamada directriz)*, representen una parábola en situaciones donde se omitan los ejes coordenados y muestren que sus propiedades se mantienen invariantes.

Alguna respuesta correcta esperada

Con la definición de parábola como *el conjunto de puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo F (llamado foco) y una recta fija l (llamada directriz)*, y con la propiedad del cuadrado que indica que todos sus lados son iguales y perpendiculares, el profesor debe ubicar cualquier vértice del rectángulo y encontrar el foco y la directriz de una parábola, representando al menos una de las múltiples representaciones gráficas que existen.

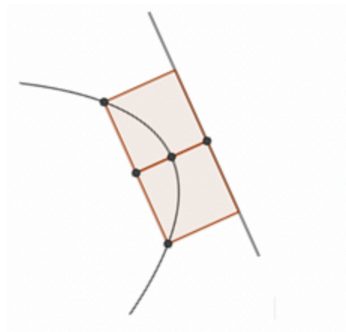


Figura 3: Representación de la parábola que pasa por dos de sus vértices

Algunas respuestas incorrectas esperadas

Esperamos que el profesor dibuje una parábola que pasa por dos de sus vértices pero que no tome en cuenta la condición geométrica de la elipse y ubique el vértice en cualquier punto interior del rectángulo.

Reflexiones finales

El conocimiento especializado de un profesor de matemática está orientado a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los indicadores propuestos en el subdominio del KOT nos da cuenta de los procedimientos, contenidos, sistemas de representación, conexiones y prácticas matemáticas que un docente debe utilizar para enriquecer la comprensión del conocimiento en el tema de la parábola. El presente artículo es un avance del diseño de la evaluación diagnóstico y la confrontación de los resultados nos permitirá indagar acerca de la comprensión del conocimiento del profesor de matemática, específicamente en el tema de la parábola.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 38, 97-140). México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59 (5), 399-406.

Boyer, C. (1987). Historia de la matemática. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial, Madrid, España.

Carrillo, J.; Climent, N.; Contreras, L.C. & Muñoz-Catalán, M.C. (2013) Mathematics Teacher Specialized Knowledge. En: Proceedings of the *eighth congress of the european society for research in mathematics, 8th, Antalya. CERME 8*, Antalya, Turquía.

Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica.* Tomado de http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-secundaria-17-abril.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15 (2), 4-14.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PRÁCTICAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES DE UN GRADO 7° AL RESOLVER UN PROBLEMA DE PROPORCIONALIDAD

MATHEMATICAL PRACTICES IN 7TH GRADE STUDENTS IN SOLVING PROPORTIONALITY PROBLEMS

Miguel Ángel Hurtado Martínez
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Colombia)
miguelhurtado@colegiolosangelestunja.com

Resumen

En este artículo se presentan los resultados parciales de una investigación en curso, desarrollada desde un enfoque mixto, y relacionada con los significados de la proporcionalidad. Se presenta un análisis epistémico/cognitivo a través del cual se identifican los objetos y significados, activados en la resolución de un problema de ampliación/reducción de una fotografía aérea. Se estudia la solución dada por el investigador (configuración epistémica), y por un grupo de estudiantes de grado 7° de educación básica (configuración cognitiva). El análisis epistémico permite la identificación previa de algunos conflictos potenciales que pueden estar presentes en la resolución del problema, mientras que el cognitivo comprende la identificación de algunos de los significados dados a la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes. En estos resultados se presenta la reflexión pedagógica del profesor investigador como un aporte a la enseñanza del objeto matemático proporcionalidad.

Palabras clave: proporcionalidad, objetos y significados, configuraciones epistémicas y cognitivas

Abstract

This article presents the partial results of an ongoing research developed under a mixed approach and related to the meanings of proportionality. This research includes an epistemic/cognitive analysis by means of which the emerging objects and meanings involved in an aerial photograph enlargement/reduction problem are identified. The epistemic analysis allows the previous identification of some potential learning conflicts which may be present when solving the problem; whereas the cognitive one deals with the identification of some of the meanings given to proportionality in the mathematical practices of the students. These research results show the pedagogical reflection of the teacher- researcher as a contribution to the teaching of proportionality as a mathematical object.

Key words: proportionality, objects and meanings, epistemic and cognitive configurations

Introducción

La enseñanza y aprendizaje de los objetos del conocimiento matemático: razón, proporción y proporcionalidad, es compleja, tanto para profesores como para estudiantes debido a su diversidad de significados, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Obando, 2015). Como dan a conocer Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017) en algunas ocasiones, la diversidad de significados del objeto proporcionalidad es desconocida por el profesor de matemáticas, este desconocimiento hace que el profesor enseñe a sus estudiantes la proporcionalidad desde el formalismo, es decir aplicando algoritmos como la regla de tres simple o compuesta al resolver problemas de proporcionalidad y dejando de lado el desarrollo de otras habilidades como el razonamiento proporcional.

Para Arboleda y Castrillón (2013) una de las posibles causas del formalismo con que se enseña la proporcionalidad en las instituciones educativas en Colombia es que los profesores no reflexionan sobre los significados que dan los estudiantes a la proporcionalidad, así como aquellos que emergen a través de la historia de la matemática. Desde esta perspectiva, se considera necesario estudiar las formas como han emergido los significados de los objetos: razón, proporción y proporcionalidad en los distintos contextos históricos, culturales y sociales, y además realizar estudios que permitan comprender la diversidad de significados atribuidos a la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes. Las reflexiones desde esta perspectiva por parte del profesor de matemáticas pueden llegar a favorecer el desarrollo de las competencias Didáctico–Matemáticas de los profesores (Pino-Fan, 2017).

El estudio de los significados de los objetos de conocimiento: razón, proporción y proporcionalidad desde estudios históricos, epistemológicos y fenomenológicos, así como la caracterización y reflexión de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver situaciones problema de proporcionalidad, pueden llegar a transformar las prácticas del profesor-investigador: por tal motivo, este articulo presenta un avance de la Tesis de Maestría del autor intitulada “ *Significados de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo* ”, la cual tiene como objetivo: Caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas institucionalizadas en un grupo de estudiantes de grado séptimo de un colegio de la ciudad de Tunja (Colombia), al resolver situaciones problema sobre proporcionalidad.

En el desarrollo de la tesis se ha venido realizando un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad, además del diseño y aplicación de tres situaciones problema que han permitido obtener información significativa relacionada con los significados de la proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes. En este artículo se reporta el proceso investigativo que se siguió para el análisis de una de las situaciones problema, con el propósito de dar respuesta a la pregunta ¿Cuáles son los significados de la proporcionalidad, presentes en las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja (Colombia) al resolver una situación problema de ampliación/reducción de una fotografía?

Marco teórico

El marco teórico y metodológico desde el cual se abordan los significados de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos - EOS (Godino, 2017). El EOS centra su atención en el problema de los significados y la representación del conocimiento matemático mediante la elaboración de una ontología matemática explicita sobre presupuestos de tipo antropológicos, semióticos y socioculturales. El estudio del proceso de asignar significado considera la relevancia de varios conceptos: la práctica matemática, los objetos, los significados y las configuraciones epistémicas/cognitivas. A continuación, se describen los conceptos más importantes para el desarrollo del estudio y la relación con el análisis de los significados de la proporcionalidad, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Se considera como *práctica matemática*, a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla, a otros contexto y problemas (Godino, 2017); las practicas pueden ser institucionales (grupo de personas que comparten una clase especifica de situaciones problema) o personales (estudiante que resuelve la situación problema). En el artículo se analizan las prácticas personales de los estudiantes evidenciadas en sus producciones escritas al resolver una situación problema de ampliación/reducción de una fotografía.

Como *objeto matemático*, se considera en el EOS, a cualquier entidad o cosa referida en el discurso matemático. El objeto matemático, designa a todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. Según D' Amore y Godino (2007) "los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo" (p.207). Por ello, no se puede reducir el significado del objeto a la sola definición matemática. El EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos o entidades primarias: *a) Lenguaje*: Términos y expresiones matemáticas, símbolos, representaciones gráficas, etc. *b) Situaciones- problema:* Aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc. *c) Conceptos:* Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición. *d)Proposiciones:* Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba. *e) Procedimientos:* Técnicas de cálculo, operaciones algoritmos. *f) Argumentos:* Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas (Godino, 2017).

Los objetos matemáticos o entidades primarias se analizan en una *configuración epistémica* y corresponde a la solución de la situación problema desde la perspectiva del profesor-investigador. En este sentido, la configuración epistémica, contempla el estudio de los seis tipos de entidades primarias que se relacionan entre sí, formando configuraciones más complejas, las cuales se definen como redes de objetos, que son los que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas (Rivas y Castro, 2011).

La propuesta metodológica del EOS permite efectuar análisis epistémicos los cuales tienen tres objetivos: el primero, explorar los objetos y significados puestos en juego en la solución de un problema, el cual se asume como un análisis de referencia; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir posibles dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes dan al problema, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias favorece predecir e identificar conflictos potenciales y posibles prácticas matemáticas de los estudiantes. Además, en el marco del EOS se propone efectuar *análisis cognitivos* que consisten en la caracterización de las prácticas matemáticas que realizan los estudiantes en relación a como aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje (D' Amore y Godino, 2007). El análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas constituyen finalmente el "sistema de prácticas matemáticas" que fija los significados de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad activados en la resolución de la situación problema propuesta.

■ Metodología

Esta investigación se desarrolla desde un enfoque mixto; el cual hace uso de las metodologías de la investigación cualitativa y cuantitativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2014); se analiza la variable cuantitativa: Número de estudiantes que evidencian cierto tipo de práctica matemática al resolver la situación problema propuesta, y además se caracterizan los significados de la proporcionalidad mediante el análisis de las producciones escritas de los estudiantes. La investigación se realizó en un colegio de la ciudad de Tunja del departamento de Boyacá (Colombia) con un grupo de 28 estudiantes de grado séptimo de educación básica.

Para la recogida de los datos, se entregó a cada participante una fotografía aérea tomada por un drone de dimensiones $25\ cm \times 20\ cm$, como se aprecia en la figura:

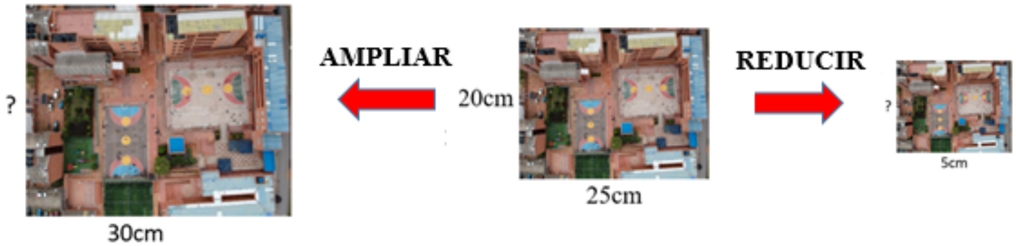


Figura 1. Fotografía de la Institución Educativa donde estudian las personas objeto de estudio. Fuente: Autor

Se plantearon las siguientes situaciones:

1. Si se desea ampliar la fotografía para que el lado de 25 cm mida 30 cm ¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía ampliada? Justifica tu respuesta.
2. Si ahora se desea reducir la fotografía para que el lado de 25 cm mida 5 cm ¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía reducida? Justifica tu respuesta.

La recogida de los datos tuvo lugar en cuatro clases de matemáticas, cada una de 50 minutos: En la primera los estudiantes realizaron una lectura sobre proporciones y se presentó la situación problema; en la segunda, los estudiantes resolvieron individualmente el problema; en la tercera, se realizó un trabajo cooperativo en equipos, donde se tomaron medidas de algunos lugares del colegio con el uso del metro y se realizaron comparaciones con la fotografía aérea. Finalmente, en la cuarta clase se realizó una plenaria acerca de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes, del mismo modo, el investigador institucionalizó los significados pretendidos. Este artículo reporta las prácticas matemáticas realizadas en la segunda clase donde los estudiantes resolvieron individualmente el problema.

Resultados

Análisis epistémico

A continuación, se presentan las soluciones propuestas por el investigador a las preguntas 1 y 2 usando la estrategia de la regla de tres simples:

Solución propuesta a la pregunta 1: Si el lado de 25 cm de la fotografía equivale a 30 cm del lado de la fotografía ampliada, entonces 20 cm de la fotografía equivale a x cm de la fotografía ampliada.

Fotografía Original (cm)	Fotografía ampliada (cm)
25	30
20	X

$$x = \frac{20 \times 30}{25} = 24$$

Respuesta**:** el lado de 20 cm quedara midiendo 24 cm en la fotografía ampliada.

Solución propuesta a la pregunta 2: Si el lado de 25 cm de la fotografía equivale a 5 cm del lado de la fotografía reducida, entonces 20 cm de la fotografía equivalen a x cm de la fotografía reducida.

Fotografía Original (cm)	Fotografía reducida (cm)
25	5
20	X

$$x = \frac{20 \times 5}{25} = 4$$

Respuesta: el lado de 20 cm quedara midiendo 4 cm en la fotografía reducida.

Este tipo de situación problema es usado en geometría al comparar polígonos semejantes y es posible identificar cuatro posibles soluciones: hacer uso de una regla de tres simple, establecer una proporción aplicando la propiedad fundamental de las proporciones (el producto de medios es igual al producto de extremos), comparar las magnitudes mediante un proceso de reducción a la unidad y establecer la relación de porcentajes entre las magnitudes correspondientes de la fotografía original y la ampliada/reducida.

Una vez *obtenidas las cuatro soluciones se procede a realizar una configuración epistémica,* la cual corresponde a la identificación de los objetos primarios (lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) relacionados con la solución de la situación problema propuesta en la que se aplica la regla de tres simple.

<table>
<tr><th>TIPOS DE OBJETOS</th><th>SIGNIFICADOS (RELACIÓN DE REFERENCIA O DE USO)</th></tr>
<tr><td colspan="2">ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (Términos y expresiones matemáticas: símbolos , representaciones graficas)</td></tr>
<tr><td>El lado de 25 cm equivale a 30 cm del lado de la fotografía ampliada.
El lado de 25 cm en equivaler a 5 cm del lado de la fotografía reducida.
¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía ampliada?
<table><tr><th>Fotografía Original (cm)</th><th>Fotografía ampliada (cm)</th></tr><tr><td>25</td><td>30</td></tr><tr><td>20</td><td>X</td></tr></table>¿Cuánto medirá el lado de 20 cm en la fotografía reducida?
<table><tr><th>Fotografía Original (cm)</th><th>Fotografía reducida (cm)</th></tr><tr><td>25</td><td>5</td></tr><tr><td>20</td><td>X</td></tr></table></td><td>Razón como comparación entre magnitudes homogéneas.
Medida relativa: lado de la fotografía original en relación con la medida del lado correspondiente de la fotografía ampliada/reducida.
Igualdad entre razones (ecuación lineal o de primer grado).
Magnitudes homogéneas.
Regla de tres simple: constante de proporcionalidad, reducción a la unidad Divisiones/multiplicaciones, escalas y porcentajes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conflictos relacionados con los elementos lingüísticos:
a. Comparar magnitudes mediante estrategias aditivas.
b. No reconocer la situación problema como una tarea de proporcionalidad.
c. No comprender las preguntas al razonar que solo se debe ampliar/reducir el lado de 20 cm, sin variar la medida del otro lado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)</td></tr>
<tr><td>Razón entre segmentos
Magnitudes directamente proporcionales
Reducción a la unidad
Incógnita x
Ecuación/igualdad de razones</td><td>La razón entre dos segmentos es la comparación entre sus correspondientes magnitudes, (que cantidad es una magnitud tomada como referencia en relación con otra).
Dos magnitudes son directamente proporcionales si al variar una al doble, el triple, la mitad, la otra también varía el doble, el triple, la mitad.
Relación multiplicativa entre cantidades de magnitudes (1 cm de la fotografía original equivale a 1,2 cm en la fotografía ampliada, 1 cm de la fotografía original equivale a 0,2 de la fotografía reducida o viceversa)
Valor desconocido que debe ser encontrado a partir de la resolución de una ecuación.
Relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas en la que interviene por lo menos una incógnita.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Conflictos relacionados con los conceptos:
a. Comparar segmentos no correspondientes.
b. No reconocer las fotografías ampliada/reducida como proporcionales.
c. No comprender el significado de la estrategia “reducción a la unidad”.
d. Despojar a x de su valor de incógnita.
e. Usar la igualdad como símbolo que indica un resultado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)</td></tr>
<tr><td>Regla de tres simple directa</td><td>Algoritmo algebraico (fórmula) que permite plantear y resolver problemas de proporcionalidad donde se desconoce un valor.</td></tr>
<tr><td>Representación: tabla de magnitudes.</td><td>Transforma una expresión verbal en una representación tabular.
<table><tr><th>Fotografía Original (cm)</th><th>Fotografía ampliada (cm)</th></tr><tr><td>25</td><td>30</td></tr><tr><td>20</td><td>X</td></tr></table>
<table><tr><th>Fotografía Original (cm)</th><th>Fotografía reducida (cm)</th></tr><tr><td>25</td><td>5</td></tr><tr><td>20</td><td>X</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Representación algebraica</td><td>Permite calcular el valor faltante utilizando propiedades de las ecuaciones (propiedad uniforme o transposición de términos)
Procedimiento de ampliación: $x = \frac{20 \times 30}{25} = 24$
Procedimiento de reducción: $x = \frac{20 \times 5}{25} = 4$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conflictos relacionados con los procedimientos:
a. Uso inconsciente-mecánico de la regla de tres, sin un razonamiento proporcional previo.
b. Interpretación de ampliación/reducción de la fotografía mediante razón por suma o diferencia.
c. Modelización de una expresión simbólica en otra también simbólica que permite operar y obtener un resultado que representa la solución del problema.
d. Operaciones que interviene entre cantidades en la regla de tres simples.
e. Uso inadecuado de la regla de tres.</td></tr>
<tr><td colspan="2">PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)</td></tr>
<tr><td>P1. Si los ángulos correspondientes de dos figuras tienen la misma amplitud y las razones entre los lados correspondientes forman una proporción, entonces las figuras son semejantes.</td><td>Se reconoce en la ampliación/reducción de la fotografía una tarea de proporcionalidad.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conflictos potenciales con las propiedades:
a) Comparar lados que no se corresponden.
b) No comprender P1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas)</td></tr>
<tr><td>A1: Puesto que al ampliar/reducir un lado de la fotografía (proporcionalmente) las medidas correspondientes deben ampliarse/reducirse proporcionalmente.</td><td>Justifica la propiedad P1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conflictos con los argumentos:
a. No evidenciar en la situación problema una tarea de proporcionalidad.
b. Obtener medidas, para las cuales no se tiene un significado preciso.</td></tr>
</table>

El análisis de la configuración epistémica permite prever algunas prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver la situación problema, estas posibles prácticas se presentan a continuación:

P0: El estudiante no comprende el problema, evidenciando otro tipo de prácticas matemáticas.
P1: El estudiante no usa un razonamiento proporcional al argumentar que se debe ampliar/reducir un solo lado dejando el otro lado de la fotografía constante (siempre medirá 20 cm).
P2. El estudiante usa estrategias aditivas.
P2.1: Para ampliar la fotografía el estudiante suma 5 cm al lado de 20 cm dando como respuesta 25 cm, y para reducir la fotografía resta 20 cm al otro lado dando como respuesta 0 cm y no argumenta la inconsistencia.
P2.2: Para ampliar la fotografía el estudiante suma 5 cm al lado de 20 cm, dando como respuesta 25 cm, y para reducirla resta 20 cm al otro lado dando como respuesta 0 cm, además manifiesta la inconsistencia, pero no da argumentación del porqué.
P3: El estudiante aplica el algoritmo de la regla de tres, reconoce la situación problema como una tarea de proporcionalidad, da una respuesta correcta, y argumenta los procedimientos.
P4: El estudiante aplica estrategias multiplicativas: reconoce las magnitudes dadas como proporcionales, da una respuesta correcta y usa otro tipo de estrategias como reducción a la unidad, relación de comparación entre lados, uso de porcentajes o notación de escalas.

Configuración cognitiva

En la Tabla 1, se muestra una síntesis de las prácticas matemáticas evidenciadas en las producciones escritas de los estudiantes de grado séptimo al resolver la situación problema propuesta. En las figuras 2 a 6 se muestran algunas producciones escritas que corresponden a los significados de la proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Tabla 1. *Practicas matemáticas de los estudiantes*

Categorías	Subcategorías	Frecuencias	
		No.	%
P0: No comprende el problema evidenciando otro tipo de prácticas matemáticas.		1	3,6
P2. Razonamiento no proporcional con estrategias aditivas.	P2.1: estrategia aditiva sin argumentación.	8	28,6
	P2.2: estrategia aditiva con argumentación.	2	7,1
P3: Regla de tres con argumentación.		3	10,7
P4. Uso de estrategias multiplicativas correctas.		12	42,9
Practicas matemáticas no previstas		2	7,1
Total		28	100

Frecuencias de estudiantes que evidencian cierto tipo de práctica matemática al resolver la situación problema propuesta.
Fuente: *Autor*

Del total de estudiantes objeto de estudio el 53,6 % resuelve con éxito el problema de ampliación/reducción de la fotografía. El 35,7 % aplica estrategias aditivas sin reconocer en el problema una tarea de proporcionalidad y el 3,6 % (un estudiante) no comprende el problema y evidencia otro tipo de procedimientos o respuestas. Se evidencian dentro de las practicas matemáticas de los estudiantes dos fuertes tendencias: una referente a estrategias multiplicativas con razonamiento proporcional argumentativo distinto a la regla de tres simple en un 42,9 % dando lugar a respuestas como las evidenciadas en la figura 2.

Estrategias usadas para ampliar la fotografía | Estrategias usadas para reducir la fotografía

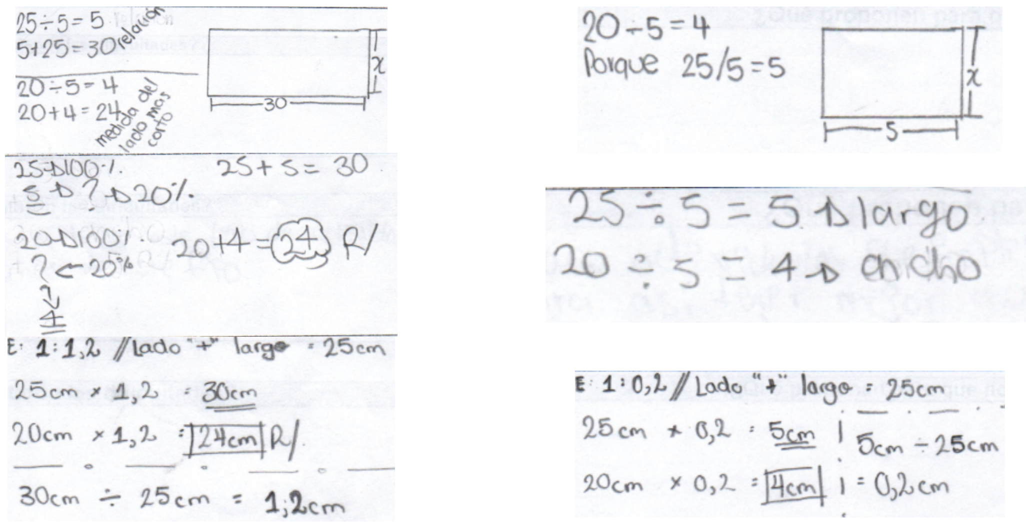


Figura 2. Uso de estrategias multiplicativas

La otra tendencia, es el uso de estrategias aditivas sin argumentación en un 28,6 %, dando lugar a respuestas como las que se presentan en la figura 3.

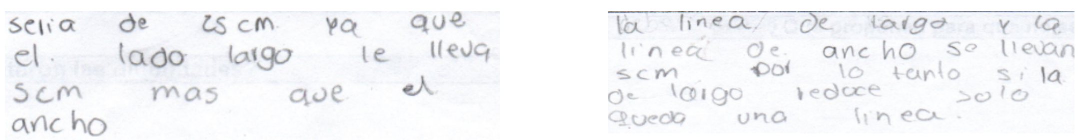


Figura 3. Uso de estrategias aditivas

Por otra parte, un 10,7% usa la estrategia de la regla de tres simple y la argumenta como se muestra en la figura 4.

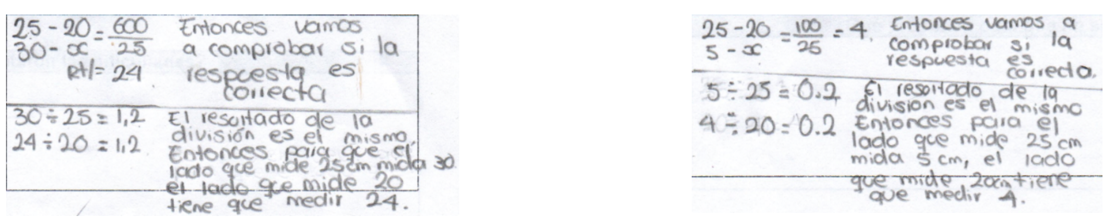
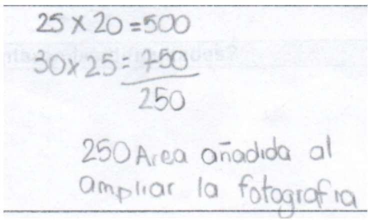


Figura 4. Regla de tres con argumentación

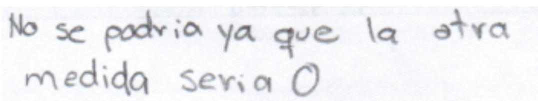
Un 7,1% de los estudiantes reflexionan sobre sus procedimientos al considerarlos inconsistentes, pero no logran clarificar las respuestas, tal como se muestra en la tabla 5.

Figura 5. Otro tipo de operaciones o respuestas

El 3,6 % (un estudiante) no comprende el problema y da a conocer otro tipo de respuestas como se evidencia en la figura 6. El 7,1 % de los estudiantes evidencia una solución que no se tenía prevista dentro de las practicas matemáticas como se observa en la figura 7.

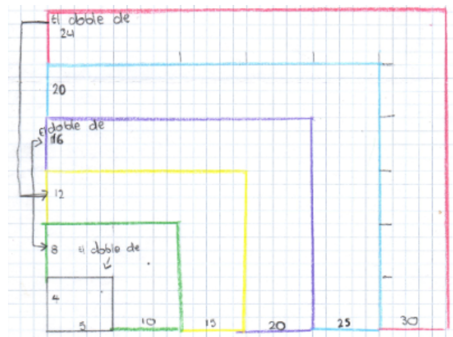


Estrategia usada para ampliar la fotografía



Estrategia usada para reducir la fotografía

Figura 6.
Estrategia aditiva con argumentación



El estudiante amplifica rectángulos proporcionalmente y llega a las respuestas correctas.

Figura 7.
Estrategia no prevista en las practicas matemáticas

Análisis cognitivo

las practicas matemáticas identificadas a través de las configuraciones epistémicas caracterizan un alto porcentaje (92,9%), pero resultaron insuficientes para explicar la totalidad de las prácticas matemáticas de los estudiantes, lo anterior justifica la necesidad de identificar los aspectos que pueden deducirse a partir del estudio de las configuraciones cognitivas. Un estudio de ambas configuraciones (epistémica/cognitiva), puede llegar a informar sobre la totalidad de las prácticas manifestadas durante la resolución del problema de ampliación/reducción de la fotografía. El análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas, permite identificar estrategias correctas e incorrectas, los errores y dificultades, así como conflictos potenciales que pueden darse en los procesos de resolución de la situación problema. Las estrategias correctas de resolución pueden ser identificadas al elaborar previamente el análisis epistémico. El hecho de que el 37, 5% de los estudiantes apliquen estrategias aditivas evidencia la complejidad de la situación problema, lo cual permite reflexionar en la preparación previa al momento de llevar el problema al aula para poder enfrentar las dificultades de los estudiantes.

Según Perry, Guacaneme, Andrade y Fernández (2003) las respuestas incorrectas de los estudiantes posiblemente pueden darse por la dificultad de relacionar los procedimientos de cálculo con su significado: para el estudiante es mucho más económico y sencillo desencadenar una respuesta automática ante cierta clase de estímulos (sobre todo cuando se piensa que esto es hacer matemáticas) que buscar el significado relacionando los conceptos matemáticos con las operaciones. Para Obando (2015) otra de las posibles causas de las respuestas incorrectas de los estudiantes se relaciona con la forma como se introduce la multiplicación en la escuela a partir de la suma de sumandos iguales porque se circunscribe a una forma de pensamiento aditivo alejándola de las formas de razonamiento típicamente multiplicativo (variación conjunta de dos o más cantidades), haciendo que los estudiantes al ampliar/reducir la fotografía sumen o resten un número a un solo lado de la fotografía sin evidenciar en la situación problema propuesta un razonamiento proporcional.

Conclusiones

La caracterización de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo se presenta desde una perspectiva del análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas, las cuales permitieron identificar los objetos y significados puestos en juego en la resolución de un problema de ampliación/reducción de una fotografía aérea. A través del análisis epistémico/cognitivo, el profesor investigador fue comprendiendo la complejidad de los significados de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad que emergen de las prácticas matemáticas de los estudiantes. La identificación de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos presentes en la resolución del problema llevaron al profesor a identificar posibles estrategias, errores, dificultades y conflictos potenciales que podrían manifestarse en las actuaciones de los estudiantes. Esta reflexión pedagógica del docente-investigador puede llegar a desarrollar algunas de las competencias didáctico – matemáticas, necesarias para una enseñanza idónea de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad.

Referencias bibliográficas

Arboleda, L., y Castrillón, G. (2013). La historia y la educación matemática en el “horizonte” conceptual de la pedagogía. *Revista cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 11, 189-202.

D’Amore, B., y Godino, J.D. (2007). El enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* 10(2), 191-218.

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. Recuperado el 02 de enero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino.pdf

Godino, J. D., Beltrán, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. Recuperado el 15 de enero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014*). Metodología de la de investigación*, México: McGraw-Hill.

Obando, G. (2015). *Sistemas de pràcticas matemàticas en relaciòn con las Razones , las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institucion educativa de la educacion basica.* Tesis de doctorado no publicada. Universidad del Valle,Cali, Colombia.

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L. y Fernández, F.(Ed). (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*, Bogotá: Una empresa docente.

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. Recuperado el 20 de febrero de 2018 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/pino-fan.pdf

Rivas, M., y Castro,W. (2011). *Aportes del estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas sobre la proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria.* Recuperado el 02 de Marzo de 2018 de http://funes.uniandes.edu.co/2589/1/RivasAportesAsocolme2011.pdf

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

ASPECTOS PERCEPTUALES, OPERACIONALES Y EXPERIENCIALES PRESENTES EN LA ACTIVIDAD DE INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS USADAS EN LA PRENSA

PERCEPTUAL, OPERATIONAL AND EXPERIENTIAL ASPECTS PRESENT IN THE ACTIVITY OF INTERPRETATION OF GRAPHICS USED IN THE PRESS

Eduardo Carrasco Henríquez, Teresa Sofía Oviedo Millones
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
ecarrasc@gmail.com. sofia.oviedo@pucp.edu.pe

Resumen
Cada vez más la prensa usa gráficas estadísticas para presentar información relevante a la ciudadanía. Sin embargo no siempre la escuela desarrolla las competencias necesarias para interpretar adecuadamente estas gráficas. En este sentido, este trabajo se orienta a caracterizar los elementos perceptuales, operacionales y experienciales que están presentes en la actividad de interpretación de gráficos estadísticos de la prensa. La fase inicial reportada es un estudio de caso en la que consideramos las entrevistas a docentes de Perú y Chile sobre prácticas de interpretación de gráficas estadísticas, caracterizando desde su actividad de interpretación aquello que está presente al leer la información así como en el proponer acciones con los datos. Los resultados mostraron estrategias comunes, elementos perceptuales y experienciales para interpretar y proyectar acciones a partir de la información graficada.

Palabras clave: visualización, pensamiento estadístico, gráficas

Abstract
The press increasingly uses statistical graphs to present relevant information to citizens. However, the school does not always develop the skills needed to adequately interpret these graphs. So, this work is aimed at characterizing the perceptual, operational and experiential elements that are involved in the interpretation of statistical graphs of the Press. The initial phase shows a case study in which teachers from Peru and Chile were interviewed with respect to their practices of statistical graph interpretation; characterizing from their interpretation activity, what is present while reading the information; as well as proposing actions with the data. The results showed common strategies, and perceptual and experiential elements to interpret and design actions from the graphical information

Key words: ***v***isualization, statistical thinking, graphs

Introducción

Uno de los conocimientos básicos y necesarios por la ciudadanía son las gráficas estadísticas, su aplicación e interpretación por lo cual se requiere de una sólida formación en su entendimiento. Sin embargo, un gran porcentaje de alumnos que llegan al nivel universitario no logran explicar y entender de forma idónea los gráficos estadísticos. Esto se torna más preocupante al considerar el cada vez mayor uso de gráficas estadísticas por la prensa para sintetizar datos, aun cuando estas gráficas no responden adecuadamente a las convenciones matemáticas.

Sabemos que los docentes somos los actores llamados a dar una sólida formación académica y debemos estar preparados en nuestro conocimiento didáctico y estadístico para poder lograr un aprendizaje significativo de nuestros alumnos. Por ello, en esta investigación se quiere conocer los conocimientos de un grupo de docentes que enseñan estadística de Perú y Chile, respecto a gráficas estadísticas con el propósito de conocer lo que consideran de los aspectos semióticos de las gráficas, las prácticas, las herramientas y los argumentos.

Por tal motivo, el marco teórico en que enfatizamos esta investigación es socioepistemológico respecto a la graficación. De acuerdo a Bowen, Roth y McGinn (1999) la graficación es un conjunto de prácticas de representación, producción lectura y crítica de gráficas, considerándolas de naturaleza social, además se considera el tipo de herramientas y recursos lingüísticos que se utilizan en estas prácticas. Es decir, nos interesa avanzar en la caracterzación de prácticas sociales, que en su función normativas de la actividad con las gráficas, permitan a quien trabaja con ellas significar la variación asociada a los fenómenos de cambio (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez-Sierra, 2006, Suárez, 2008). De acuerdo a Carrasco (2016), “la mirada a la gráfica cartesiana se amplía al entenderla no solo como una herramienta matemática, sino que se busca entenderla también en su calidad de dibujo que, como tal, narra algo específico de un fenómeno de variación” (p. 41).

Esta investigación busca entender la actividad matemática involucrada en la interpretación de gráficas estadísticas usadas en la prensa. Como un primer paso, y considerando que los docentes son los actores centrales a la hora de implementar una enseñanza de calidad, orientamos la mirada hacia el saber docente respecto de la interpretación de las gráficas estadísticas en la prensa y aquellos elementos que considera relevantes en su enseñanza. De modo particular, se busca caracterizar aquello que concurre a la actividad de interpretación de las gráficas, tanto las herramientas matemáticas, como no matemáticas. Así como iniciar la primera fase de un estudio comparativo Perú-Chile, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las herramientas gráficas para la estadística haciendo un análisis de las prácticas sociales de graficación.

Marco teórico

La graficación es entendida como un conjunto de prácticas de representación, producción y lectura de figuras (Bowen, et. al. 1999). Prácticas que se consideran de naturaleza social y que involucran en su ejercicio herramientas y significados diversos. Por tanto, interesa a la investigación el estudio de dichas prácticas sociales y como ellas norman la actividad estadística (Cantoral, 2013). En particular la actividad de interpretación y construcción de gráficas estadísticas usadas en la prensa.

En un marco socioepistemológico, se asume una mirada que considera a la gráfica “no sólo como una herramienta matemática, sino que se busca entenderla también en su calidad de dibujo que, como tal, narra algo específico de un fenómeno de variación” (Carrasco, 2016, p. 41). Narración que es interpretada en un acto cognitivo complejo, el cual ocurre en el constante vivir del estudiante y en el cual emerge el mundo del estudiante.

En la actividad de interpretación del estudiante concurren aspectos operacionales, como es seleccionar sectores del gráfico para analizar o tabular la información; aspectos experienciales, como el conocimiento previo respecto del fenómeno y; aspectos perceptuales, como es el hecho de reconocer el cambio de tendencia. Estos elementos conforman un espacio epistémico en el cual el sujeto conoce, construye una articulación entre la gráfica y el fenómeno que representa (Carrasco, Díaz y Buendía, 2014). En particular las prácticas de interpretación, que viven en el espacio epistémico, se constituyen en el uso de herramientas tales como los elementos pictóricos, con que interviene el gráfico; las nociones matemáticas, que se usa para interpolar o extraer información y que permiten operar con el gráfico; los argumentos, que permiten justificar su acción y que evidencian aquel saber experiencial que concurre a su trabajo y; los significados, que emergen de su actividad. De este modo las herramientas, argumentos y significados que concurren a la actividad permiten describir las prácticas de interpretación de gráficas estadísticas.

Por su parte, diversas taxonomías para el trabajo con gráficas estadísticas. Por ejemplo, Curcio (1989, citado en Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2015) presenta las habilidades de lectura para comprender las gráficas. En este modelo se plantea:

1. *Leer entre los datos:* consiste en la lectura literal del gráfico sin interpretar la información contenida en el mismo.
2. *Leer dentro de los datos:* implica la interpretación e integración de los datos de la gráfica; esta capacidad requiere la comparación de datos o la realización de operaciones con ellos.
3. *Leer más allá de los datos*: consiste en realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre información que no se refleja directamente en la gráfica.

En una mirada a los niveles, se reconoce la importancia de los tres niveles de lectura de la gráfica como niveles que orientan la enseñanza de la interpretación de las gráficas. Si bien en cada nivel concurren elementos perceptuales, operacionales y experienciales, podemos destacar que se presentan con distinto énfasis. Así en el primer nivel, el mayor énfasis es lo perceptual, por cuanto se ha de identificar elementos clave en el gráfico y su estructura. En el segundo nivel, el énfasis en lo operacional permite re-construir el mensaje denotado de la imagen, es decir aquellos significados que los elementos de la imagen denotan. Finalmente en el nivel tres el énfasis está puesto en los elementos experienciales que permiten la elaboración de inferencias respecto del fenómeno conformando el mensaje connotado.

Metodología

Esta investigación es de enfoque cualitativa, descriptiva e interpretativa. Se realizaron un total de 4 entrevistas semiestructuradas a docentes con amplia experiencia en impartir diversos cursos de estadística en el nivel universitario y que actualmente ejercen la docencia en universidades de Perú y Chile. La elección fue no probabilística de tipo intencional. Fueron dos docentes de Perú y dos docentes de Chile a quienes se aplicó una entrevista semiestructurada en torno a la interpretación de una gráfica usada en medios masivos de comunicación. Para seleccionar esta gráfica se consideró su cercanía con una gráfica estadística y que refleje un fenómeno conocido. En este marco se selecciona la gráfica de la figura 1, dada en un programa político español, lo cual alega una interpretación mediada por intereses políticos de los entrevistados.

Figura 1. Gráfica de Desempleo en España (2015).

Con esta gráfica se formaron preguntas que conlleven a conocer los elementos que concurren a la actividad de interpretación estadística de la gráfica. Por lo cual se establecieron tres momentos de la entrevista: La primera, la interpretación de la información; la segunda, obtener información no explícita; y la tercera, su valoración como docentes.

Se realizaron las entrevistas en los meses de mayo y junio de 2017. Los investigadores fueron quienes realizaron las entrevistas, en sus respectivos países, a los docentes que se les consideraron expertos en Estadística (de acuerdo a los años de experiencia y su trayectoria profesional). Para realizar las entrevistas se pidió el consentimiento verbal y escrito a los docentes. Previo a ello, se les informó el objetivo de la investigación, la confidencialidad de sus datos y se obtuvo su permiso para grabar las entrevistas. El tiempo de cada entrevista fue en promedio de 25 minutos.

Resultados

El análisis de la información se realizó a partir de la selección de segmentos clave, seleccionados según su pertinencia para identificar los elementos perceptuales, operacionales, y experienciales que concurren a su interpretación. Las textualidades, mediante un análisis semántico, se agruparon de acuerdo a las herramientas, argumentos y significados que develan, a la vez que se establece el nivel de lectura que apunta en el modelo de Curcio (1987).

Cada investigador analizó las entrevistas de los docentes en sus países respectivos y luego compartieron la información para considerar acuerdos en los análisis. A continuación se muestran algunos de los análisis (por razones de espacio) de los docentes de Perú y Chile.
La presentación de los análisis se hará respecto a los tres niveles de Curcio, más que al orden de análisis de la encuesta.

Lectura entre los datos. Esta lectura permite una mirada a la globalidad del fenómeno y a aspectos tendenciales. Ante la primera pregunta: *¿Qué dice el gráfico?,* vemos que se ofrece una lectura entre los datos que permite describir el fenómeno. Por ejemplo la textualidad:

> *[1-A-CH] estas serán cantidades,… son cantidades de gente desempleada… la escala, la escala acá en el eje x está de año en año… y... el eje y,… bueno en la prensa nunca pone un eje, pero en el fondo acá se podría extrapolar que como cantidad de desempleados… entonces en el fondo eso o veo, la tendencia de los desempleados.*

El docente entrevistado hace una formalización de lo que informa el gráfico, determinando las variables en cada eje. Dado que el eje *y* no esta explicito, lo reconoce en la altura de los datos y, desde su experiencia, entiende que la rigurosidad matemática de los gráficos no es la misma en comunidades profesionales diferentes. *"en la prensa nunca ponen un eje"*. Por su parte la textualidad siguiente ilustra cómo concurren los aspectos operacionales, experienciales y perceptuales a la lectura de los datos.

> *[1-A-P] Según este gráfico, años del 2007 al 2014 es notorio, que desde antes del 2007 hasta el 2012 el desempleo ha sido creciente, ha crecido de 2.129 547 a 4.848 723. A partir del 2012 ha decrecido el desempleo del 2012 al 2014, ha bajado más o menos aproximadamente como cerca de 300.000 el desempleo. Entre otras cosas, se puede notar que del 2007 al 2009 el desempleo ha sido creciente con comportamiento lineal y del 2009 hasta el 2012 el comportamiento del crecimiento de desempleo ha sido casi en forma parabólica y del 2012 al 2014 el decrecimiento ha sido casi lineal.*

Está textualidad nos muestra los diversos elementos que concurren a su interpretación. En primer lugar se recurre a una tabulación a partir de puntos críticos. Surge un elemento preceptivo, pues determinar el valor más alto, 2014, no responde más que a una inspección ocular. Luego para operar define dos casos: 2007 al 2012 como creciente, y después decreciente. Se tiene el elemento experencial como: reconocer el tipo de comportamiento lineal y el elemento operacional que es la tabulación, en este caso de dos intervalos para comparar.

Tabla 1. *Actividad de lectura entre Datos.*

Aspectos perceptuales	Aspectos Operacionales	Aspecto experienciales
• Determinar el máximo visualmente el punto más alto • Apreciar si la curva crece o decrece	• Determinar puntos críticos Tabulación: [2007 - 2012] Creciente [2012 - 2014] Decreciente Estimar variación relevante (decrecimiento)	• Tipo de Curva: 1. Lineal 2. Cuadrática

Fuente: Elaboración propia

Lo anterior se evidenció en las cuatro entrevistas, una exploración inicial de la figura articulada por el punto máximo en el año 2014 y luego una descripción de intervalos.

Lectura dentro de los datos. Aquí nuevamente emergen en las respuestas de los profesores, aspecto experienciales, operacionales y perceptuales. En respuesta a la pregunta: *¿Qué valor habría en el 2012?*, (pregunta 3) que implicaba interpolar el valor del desempleo en ese año, un profesor responde:

- *P: bueno tendría que hacer una estimación en el fondo… pucha…. O sea si uso un estimador lineal, podría sacar la ecuación de la recta por estos dos puntos yyy hacer el 20112 con los lo tengo que sacar preciso o lo tengo que hacer… con mono….podría decir 2012 y eel...eel el b y pensar, tú me pides la del 2013 yyy tengo la del 2014 yyyy, un a,.. ¿cierto? que sería el registro… y luego saco la pendiente, b-a,…eee... . 2014 menos 2012 y sacó la ecuación de la recta."*
- *E: ¿Pero el valor de a, lo tienes?*
- *P: ese…sí po' tengo el a y el b, solo que es muy largo de escribir, pero los tengo y entonces genero una ecuación del tipo y=mx+n... ¿si?... y luego x vale 2013, …. si x vale 2013, entonces y sería la estimación...pero la estimación lineal… sería él y estimado,... sería eeeeeee... el desempleo estimado 2013 pensando que es lineal"*

Cabe destacar en el texto cómo lo perceptual condiciona la selección de la estrategia de la persona entrevistada. El número conformado por "muchas" cifras no es cómodo escribirlo y operar con él. Luego, la entrevistada recurre a herramientas matemáticas del álgebra, para expresar una respuesta, no calculada. Junto a ella hay elementos operacionales: calcular la pendiente, operar con letras y aspectos experienciales, suponiendo linealidad, usado interpolación lineal. En síntesis, se tiene la Tabla 2.

Tabla 2. *Actividad de lectura dentro de los datos*

Aspectos perceptuales	Aspectos Operacionales	Aspecto experienciales
• El largo de los números • El color negro • La parte superior de la hoja es un valor mayor	• La ecuación de la recta: (a) calcular pendiente; (b) calcular intersección eje y; (c) calcular valor pedido.	• Usar interpolación lineal.

Fuente: Elaboración propia

Leer más allá de los datos. Aquí, lo experiencial pareciera tomar mayor preponderancia y la lectura de los gráficos se torna global, lo vital es la tendencia entre los segmentos tabulados, por ejemplo las siguientes textualidades señalan:

> *[B-3-P] "yo creo que quien creó esta gráfica me quiere decir de que a partir del 2012 hubo un cambio y que ese cambio ha sido positivo porque mira, esa tendencia en que el desempleo vaya aumentando ha cambiado y que como que las cosas están mejorando. Pero para tener un diagnóstico más adecuado de eso, necesitamos una foto más grande"*
> *[B-1-CH]"lo que recomendaría… sería que sigan haciendo lo que han estado haciendo. El empleo ha bajado".*
> *[A-3-P] Las recomendaciones son fundamentalmente de carácter político de los gobiernos para que haya mayor empleo en el modelo de mercado libre se hace la propuesta de que deberían incentivarse las inversiones de manera que a mayor inversión implicaría menos desempleo y por otro lado también el estado debe implementar o debe invertir en economía para bajar el desempleo, el gobierno es un factor importante para evitar estos problemas sociales de carácter de desempleo*

Las textualidades señalan la tendencia de decrecimiento, no refieren a puntos específicos, salvo aquello en donde la tendencia cambió. Sin embargo en la primera cita se reconoce la necesidad de una fotografía de mayor tiempo. Mientras que la última refiere a recomendaciones que responden a sus conocimiento sobre economía y no refieren a la gráfica. En síntesis, para la construcción de una recomendaciones, el entrevistado considera a la inclinación de la gráfica, como significante de la tendencia. Esto le permite recomendar la mantención de las acciones del gobierno. Aquí cabe señalar, que solo uno de los entrevistados reconoció el error en la gráfica, es decir, reconoció que la tendencia decreciente que estuvo a la base de las dos primeras citas no era correcta.

Tabla 3. Actividad de lectura más allá de los datos

Aspectos perceptuales	Aspectos Operacionales	Aspecto experienciales
La inclinación de la curva del gráfico.	Identificar un máximo y describir la inclinación de la curva.	Conocimiento de Economía Asumen que el cambio es producto de medidas gubernamentales.

Fuente: Elaboración propia

Identificación de la gráfica errada. Por último solo dos entrevistados, uno de cada país, reconoció lo que es una gráfica tendenciosa. El primero ante la pregunta 4 *¿Cuál es el desempleo en el 2013 de acuerdo al gráfico?*, reconoció que requiere interpolar el valor de desempleo en 2013, y el segundo entrevistado reconoció la gráfica tendenciosa en la última pregunta *¿Qué aspectos mejoraría del gráfico?*

> *[A-4-P]Es que como no tengo una escala, no lo puedo interpretar, pero si me baso en este punto de aquí, pensaría de que debería ser de más o menos 4 200, pero no tiene sentido porque este punto (señaló el punto de la izquierda) muestra un valor mayor que este, entonces queda claro que acá hay algo raro en la escala no? Porque este valor debería estar debajo de este punto.*
> *[B-4-P]Si tomó con una regla esa distancia y la dibujó por aca… sería el doble… ya 4 millones doscientos… pero ese es muy raro… pero este es mayor que ese….. el de cuatro millones está por debajo del cuatro millones ¡no, está malo! ¡ está malooooo! No no no … no le crea al candidato sus asesores manipulan la información….*

En ambas textualidades emerge el error a partir de leer entre los datos. En particular ambos profesores tuvieron la necesidad de comparar datos refiriendo al eje *y*, no graficado, pero no en la lectura inicial más cercana a la lectura de la información de prensa.

Discusión y conclusiones

Los resultados muestran que en el proceso de interpretación global de la gráfica priman en un primer momento herramientas perceptivas, que se centran en la tendencia de la curva más que en los valores de los puntos de la misma. Es más, solo a partir de una lectura entre los datos, para interpolar un valor o mejorar el gráfico, dos profesores pudieron reconocer el error en el gráfico, y dado que era un gráfico de campaña política, dieron por supuesto que era un gráfico tendencioso. En este sentido se observa que los niveles de lectura de Curcio no se presentan de modo secuencial, sino que van siendo abordados según la actividad propuesta. No hubo, en los profesores entrevistados, dificultad para proyectar acciones de los datos con una lectura de los datos focalizada en la tendencia más que en la lectura entre los datos.

La tabulación emerge como una herramienta central de interpretación, al seleccionar puntos o intervalos para describir la información de la gráfica. Los argumentos tienen un fuerte componente experiencial, pues en cada interpretación y evaluación del gráfico se recurre a supuestos que no están en la figura, por ejemplo: la importancia del desempleo permitió a los docentes hacer inferencias respecto de la información no explícita del gráfico. Finalmente diversos significados emergieron, como por ejemplo el hecho que a más "altura" del punto en la hoja implica un mayor valor de la ordenada.

Lo central que muestran los datos, es lo complejo que resulta la interpretación de gráficas de la prensa, en particular identificar cuándo la información está mal presentada. Lo perceptual que permite identificar tendencias y comparaciones cualitativas entre los valores parecen hacer innecesario la lectura entre los datos para la formulación de inferencias o, en palabras de Cursio, una lectura más allá de los datos. Sin embargo al intencionar en las entrevistas la interpolación, o la evaluación de la calidad del gráfico, facilitó identificar los errores de construcción del gráfico y por tanto reconocer el mensaje tendencioso. Esto releva la importancia de incorporar en la enseñanza, prácticas de lectura entre los datos de todo gráfico como herramienta y argumento para la inferencia.

En esta investigación se evidencia que el conocimiento matemático y estadístico no basta para la interpretación de la información presente en una gráfica en el contexto social, sino que a la interpretación concurren elementos experiencias, perceptuales y operacionales que permiten su interpretación respecto del fenómeno figurado. Sin embargo cuando los profesores fueron invitados a proponer preguntas de interpretación a los estudiantes (pregunta 5 de la entrevista) se centraron en identificar puntos máximos, mínimos o aspectos formales del gráfico, no presentando preguntas respecto de toma de decisiones o de interpretación de la información en términos del fenómeno. Luego se hace necesario, como dice Inzunsa (2015, p. 551) “un cambio de enfoque en la enseñanza de las gráficas, que haga un mayor énfasis en el desarrollo de habilidades interpretativas y la relación con el contexto de donde proviene la información”. donde el uso de gráficas, que aparecen en los medios de comunicación, se presenten como un recurso importante. para fortalecer el razonamiento estadístico de los alumnos.

En las aulas, tal como se afirma en diversas investigaciones (Díaz-Levicoy, D., Parraguez, R. Ferrada,C., Ramos-Rodríguez, E, .2016) muchas de las gráficas que utilizan los profesores están lejanas a las gráficas socialmente compartidas, se da énfasis en su construcción más que en los procesos de interpretación. Esto es un factor que influye en el bajo nivel de razonamiento estadístico de sus alumnos.

Por ello, se hace necesario y urgente abordar el conocimiento didáctico estadístico y el pensamiento estadístico en la formación de docentes, en particular, en docentes de nivel básico de enseñanza de Matemática que luego tendrán a su cargo la enseñanza de temas básicos de estadística, para que luego puedan desarrollar una cultura y razonamiento estadístico en sus alumnos, que les permita una argumentación crítica en datos de gráficas de diversos contextos, como los medios de comunicación, es decir deben desarrollar en sus alumnos prácticas de la graficación (que comprende la interpretación y la construcción) para hacer un acercamiento en las aulas a la matemática funcional. La enseñanza de las gráficas requiere una buena planificación por parte de los docentes que conlleve a los alumnos a estar preparados para interpretar las gráficas en la vida diaria.

Referencias bibliográficas

Bowen, G., Roth, W. M., McGinn, M. (1999). “Interpretations of Graphs by University Biology Students and Practicing Scientists: Toward a Social Practice View of Scientific Representation Practices”. En *Journal of Research in Science Teaching*, 36(9) 1020-1043.

Cantoral, R. (2013). Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. *Estudios sobre construcción social del conocimiento (1a ed.).* Editorial Gedisa SA, Barcelona.

Cantoral, R. Farfán, R. M., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006).“Socioepistemología y representación: algunos ejemplos”. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial, 83-102.

Carrasco, E., Moreno, L. D., y Abalos, G. B. (2014). Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(3), 365-384.

Carrasco, E. (2016). Lo experiencial, lo operacional y lo perceptivo en las interpretaciones cartesianas*. Educación Las Américas*, 3, 37-52

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *44*, 90-112.

Díaz-Levicoy, D., Parraguez, R., Ferrada, C. y Ramos-Rodríguez, E. (2016). Errores en la construcción de gráficos estadísticos por profesores chilenos de Educación Primaria. *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática. pp.*98-102. Valparaiso.

Inzunsa, S. (2015), Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 20*(65), 529-555.

Suárez,L.(2008). *Modelación Graficación, una Categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un Estudio Socioepistemológico*. Tesisde Doctoradono publicada, Cinvestav IPN.

FACTORES QUE INCIDEN EN LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN: UN ESTUDIO DE LA PRÁCTICA DOCENTE

FACTORS AFFECTING TEACHING VOLUME: A STUDY OF TEACHING PRACTICE

Noemí Pizarro, Alicia Zamorano-Vargas
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación; Universidad de Chile. (Chile)
noemi.pizarro@umce.cl; alicia.zamorano@uchile.cl

Resumen
Este artículo tiene como objetivo analizar y describir factores que influyen en la enseñanza del volumen. Para esto se ha optado por seguir la metodología cualitativa a través del estudio de un caso, donde se realiza el análisis de la práctica de enseñanza del concepto de volumen por medio del Mathematics Teacher's Spealized Knowledge (MTSK). Como resultado de este proceso se puede indicar que en la práctica de enseñanza influye que volumen y capacidad son tratados como sinónimos, lo que genera obstáculos en la resolución de problemas y en el aprendizaje del concepto volumen. Por otra parte, otras magnitudes físicas también influyen en la apropiación del concepto de los estudiantes. Situaciones como esta son relevantes en la formación de profesores ya que enriquece nuestro desarrollo profesional y permiten mejorar la profesión de enseñanza.

Palabras clave: práctica docente, volumen, conocimiento profesorado.

Abstract
This paper aims to analyze and describe factors that influence the teaching of volume concept. For this research, we use the qualitative methodology through a case study, analyzing the practices used for teaching the concept of volume using Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK). The results of this investigation show that volume and capacity are treated as synonyms, generating constraints in problem solving and in learning the concept of volume. On the other hand, other physical magnitude concepts also influence on the students' acquisition of the concept. Addressing these issues is relevant to teacher training as they enrich the professional development and allow improving teaching.

Key words: practice teaching, volume, teacher knowledge

Introducción

La reflexión sobre la práctica del profesorado es uno de los temas que ha alcanzado mayor relevancia en investigación y formación docente en las últimas décadas. En general, cuando se menciona a la práctica se asocia a las acciones que desarrolla el docente cuando enseña, en esta misma línea existe reflexión (e investigación) sobre la práctica que es realizada por investigadores, aunque los docentes desarrollan escasa y superficial reflexión (Manzi, González y Sun, 2011) En este sentido una escasa reflexión sobre la práctica, no permite el enriquecimiento del conocimiento profesional y por tanto que se pierdan oportunidades valiosas para analizar, reflexionar y mejorar los procesos de enseñanza de la matemática en la escuela.

Este artículo muestra el análisis de la práctica docente del volumen a partir de episodios específicos, que permitieron observar la enseñanza del objeto matemático (volumen), y de esta manera evidenciar diferentes complejidades que se producen en el aula.
Las dificultades sobre la enseñanza y los escasos recursos para orientar a los docentes han sido evidenciados por diversos autores (del Olmo, Moreno y Gil, 1993; Sáiz y Figueras, 2009; Clements y Sarama, 2014). En particular con respecto al concepto de volumen existen pocos trabajos que lo enfoquen desde su enseñanza, y entre estos casi toda la población observada corresponde a estudiantes y no a docentes (Sáiz, 2003). Por otro lado, se debe considerar que aún existe una débil formación del profesorado de secundaria sobre los aspectos didácticos del volumen, sobre el uso indiscriminado de fórmulas sin justificación y la no distinción necesaria entre las magnitudes y su asignación de medida (Gónzalez-López y Flores, 2001) y por tanto se puede concluir que es posible que la enseñanza del volumen no sea óptima en las aulas.

Finalmente, la escasa investigación sobre la enseñanza del volumen (Clements & Sarama, 2014), y el análisis de experiencias que derivan de cursos dirigidos a profesores de primaria, han revelado que existe una débil formación para tratarlo (Sáiz y Figueras, 2009), justifican la pertinencia de investigar sobre la complejidad del concepto durante la enseñanza y además para la práctica docente es necesario que el profesorado posea y emplee una amplia variedad de conocimientos y habilidades que pueden ser perfeccionadas con el tiempo (Darling-Hammond y Bransford, 2005).

Planteamiento del problema

Durante un curso electivo para futuros profesores de matemática, se decide planificar e implementar tres clases correspondientes al cálculo del volumen del cilindro en octavo año de enseñanza primaria (13 años). Se elige el concepto porque su dificultad es subestimada (Chamorro, 2003) ya que ni los libros de texto ni la formación docente la han dimensionado. Durante las clases se estudia de manera algebraica la fórmula del cálculo de volumen, lo que nos lleva a presumir que esta fórmula es fundamental para su comprensión aritmética, pero que de la misma forma carece de sentido sin las unidades no estandarizadas y estandarizadas, para su dimensión

Se consideraron diversos factores para la planificación: diacronía curricular el objeto matemático, contenidos y habilidades previas para el desarrollo de actividades y recursos de enseñanza; en el marco de las características del grupo y el espacio de trabajo en el que se lleva a cabo a la actividad.

Durante la implementación emergieron, por parte de los estudiantes y , a pesar de la rigurosa planificación de las clases, diversas situaciones vinculadas, principalmente, a la idea de volumen y sus unidades de medida, contenidos y habilidades que, de acuerdo a las características del centro educativo y a la diacronía curricular, los estudiantes deben tener apropiadas. A raíz de esto surge la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los nudos conflictivos que emergen en una práctica de la enseñanza del volumen?

Para poder dar respuesta a la pregunta, se propone el objetivo de analizar y describir factores que inciden en la enseñanza del volumen como objeto matemático.

Fundamentos teóricos

La práctica docente

Una de las ideas que mayor aumento ha tenido en la investigación en los últimos años es la práctica de la enseñanza de las matemáticas (Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, 2005; English y Kirshner, 2016), lo que ha traído como consecuencia que los profesores y su enseñanza han pasado a ser un elemento central (Sfard, 2005). Para comprender este fenómeno se debe relevar la figura y la investigación realizada por Shulman, quien en 1986 indicó que era necesario centrarse en la práctica del profesorado y sus conocimientos para una práctica efectiva, ya que hasta ese momento cuando se observaba a un docente el foco estaba mayormente puesto en el comportamiento de los alumnos, en el uso del tiempo y en las planificaciones. Indicó que era (es) necesario poner atención a la enseñanza del profesorado, a través del tipo de preguntas y las explicaciones que éste implementa en las clases.

La complejidad de la práctica ha sido estudiada por múltiples investigadores y quienes han coincidido que para la enseñanza es necesario que los profesores posean y empleen una amplia variedad de conocimientos y habilidades que pueden ser perfeccionadas con el tiempo (Darling-Hammond y Bransford, 2005; Ball y Forzani, 2009; Hargreaves y Fullan, 2014).

Desde la década de los 80, varios autores (Schön, 1992; Shulman, 1986, 1987; Darling-Hammond y Bransford, 2005, entre otros) han concluido que reflexión y práctica son conceptos indisolubles, estrechamente relacionados y mutuamente exigidos, de cuya evolución emerge el desarrollo profesional. La premisa que guía este estudio considera que el profesorado reflexiona sobre su práctica por medio de un análisis que involucre crítica, redescubrimiento y modificación de los referentes y creencias que la sustentan, así de esta manera desarrollará herramientas para construir su profesionalismo sobre su conocimiento para enseñar, y por lo demás, su propio aprendizaje.

La enseñanza del volumen

Piaget y su equipo (1948) son quienes realizan dos contribuciones esenciales para la enseñanza del volumen: la conservación y la transitividad. La conservación se remite a las cualidades invariantes de ciertos objetos cuando se ejercen transformaciones sobre ellos. La transitividad, consiste en establecer la igualdad de medidas entre dos objetos gracias un instrumento de medición.

La conservación en el espacio tridimensional es un pensamiento formal que requiere variadas experimentaciones para poder comprenderlo, por ello es un proceso complejo donde no basta verter líquido en dos vasos cilíndricos cuyas bases tengan distinto diámetro u observar que el volumen de un litro de leche cabe en un cubo de 10 cm. de arista. Trabajar en tres dimensiones presenta un cambio significativo en la estructura del pensamiento espacial de los estudiantes.

Por otro lado, se considera relevante diferenciar entre volumen y capacidad, siendo este último un concepto mucho más complejo para trabajar. A pesar de que el currículo chileno (y el de muchos países) considera que capacidad y volumen son sinónimos, es necesario diferenciarlos: volumen sugiere el espacio ocupado mientras que capacidad es el espacio vacío con posibilidad de ser llenado. La relación entre capacidad y volumen es complicada por ello debemos distinguir entre “capacidad como espacio creado (espacio vacío) y volumen como espacio reclamado (espacio ocupado)” (del Olmo, 1993, pp.98). Esta situación se releva al trabajar con unidades de medida no estandarizadas discretas, dado rellenar con lentejas o frijoles un recipiente no es lo mismo que llenarlo con un líquido.

La habilidad de visualización también presenta complicaciones, por ejemplo, en un prisma compuesto por cubos, es complejo entender cuántos cubos hay por cada fila o columna que lo componen. Cuando hay muchas filas o columnas, es difícil visualizar los cubos escondidos, lo que conlleva dificultades en el conteo (Clements & Sarama, 2014).

El yugo de la aritmetización por sobre la geometría y la medida también se observa en la enseñanza del volumen, dado que se prima el cálculo del volumen por sobre la cualidad en sí. Sin embargo a pesar que algunos estudiantes poseen variadas experiencias sobre su representación, al momento de encontrar la fórmula, sólo se remiten a multiplicar el área de la base por la altura (Lehrer, Strom & Confrey, 2002)

A raíz de lo anterior, se hace (es) necesario construir conocimiento especializado para enseñar el volumen.

Conocimiento especializado del profesorado de matemática

Para analizar la enseñanza, consideramos como referente al Conocimiento especializado para el profesor de matemática (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge, MTSK*) propuesto por Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Montes (2014). Este marco comprende el conocimiento del contenido del profesor desde la contribución de Shulman (1986, 1987) y el *Mathematical Knowledge for Teaching* desarrollado por Ball, Thames y Phelps (2008). En este marco teórico se distinguen dos componentes: una referida al conocimiento de la matemática, MK (*Mathematical Knowledge*), y otra relativa al conocimiento didáctico para enseñar, el PCK. (*Pedagogical Content Knowledg*e). El MTSK además de ser una propuesta teórica para modelar el conocimiento del profesor de matemática, es una herramienta metodológica, con la cual es posible analizar la práctica.

Las componentes se dividen a la vez en seis dominios, que serán a la vez, las dimensiones de análisis de los datos de este estudio. A continuación, se explica cada uno de los seis dominios del MTSK, los tres primeros son referentes al MK y los tres últimos al PCK (Flores, Escudero y Aguilar, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013). En cada uno de ellos nos referiremos al contexto de la enseñanza del volumen.

1. El Conocimiento de los Temas (*Knowledge of Topics*, KoT): este dominio analiza o modela qué y cómo el profesor de matemáticas conoce los temas que va a enseñar, supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada. En este subdominio, por ejemplo, el docente debe ser capaz de definir y diferenciar, por ejemplo, de la capacidad del volumen y comprender el porqué de las fórmulas asociadas al volumen.

2. Conocimiento de la estructura de la matemática (*Knowledge of the Structure of Mathematic*, KSM): Es el conocimiento de las relaciones que el profesor realiza entre distintos contenidos. Estos contenidos pueden ser del curso que está tratando o bien de otros cursos y niveles, la idea es que realice conexiones entre temas matemáticos. En nuestro caso, la conservación del volumen es una conexión intraconceptual. La capacidad es un concepto interconcepual que es fundamental en la apropiación del concepto de volumen. La enseñanza de otras magnitudes como el peso, la densidad o la presión son conexiones de contenidos transversales que poseen características semejantes al volumen.

3. Conocimiento de la práctica matemática (Knowledge of the Practice of Mathematics, KPM): Este dominio considera que es importante el conocimiento de los resultados matemáticos, pero que es fundamental conocer las formas de proceder para llegar a ellos y las características del trabajo matemático. En nuestro caso, nos interesa saber cómo el docente pone en juego el concepto de volumen para que los alumnos conjeturen y refuten sobre el mismo.

4. El Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (*Knowledge of Features of Learning Mathematics* KFLM): Este dominio se enfoca en el contenido matemático como objeto de aprendizaje, por ello se evita mirar al estudiante en sí, dado que la idea es observar las características del proceso de comprensión del estudiante sobre el contenido, que derivan de su interacción con el mismo. En este subdominio, es fundamental que el profesor comprenda, por ejemplo, los distintos niveles operacionales de los estudiantes para apropiarse del volumen y su conservación. En nuestro caso, los estudiantes ya deberían haber realizado operaciones formales y diversas actividades para apropiarse del volumen, para dar paso al trabajo geométrico-algebraico que permitiría encontrar las fórmulas asociadas al área y volumen de los cilindros. Sin embargo, es probable que no se hayan apropiado de la conservación del volumen, por ello es necesario considerar su evaluación en actividades de entrada.

5. Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (*Knowledge of Mathematics Teaching*, KMT): el KMT tiene como foco la enseñanza. En este dominio incluye el conocimiento de los recursos, materiales, formas de presentar el contenido, el uso de ejemplos adecuados tanto en el contenido, como en el contexto y la intención. En esta investigación, queremos observar si las actividades realizadas son pertinentes al trabajo del volumen con el fin de caracterizarlo y diferenciarlo. La relación entre el KFLM y el KMT son fundamentales para secuenciar las actividades.

6. Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS): se refiere al conocimiento curricular del maestro. Es el conocimiento que el profesor tiene sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueven en determinados momentos educativos. En este caso, dentro del contexto chileno, se requiere que el docente desarrolle la habilidad de representar, argumentar y comunicar, modelar y resolver problemas.
Por otro lado, el papel de las creencias del docente es central dado que engloba a los seis subdominos anteriores.

Metodología

Para la realización de este estudio se utilizó la metodología cualitativa. En particular se ha desarrollado un estudio de caso para lograr una comprensión profunda de la práctica y explicar lo que sucedió mientras se realizaba la enseñanza del concepto de volumen. Este caso corresponde a la enseñanza realizada por dos docentes en formación en una escuela denominada de alto rendimiento (por la selección de sus estudiantes y los niveles de exigencia para el aprendizaje) en el contexto de una actividad curricular que involucraba co-docencia con una formadora de profesores.

Para realizar el análisis la clase fue videograbada y posteriormente fue revisada y analizada en episodios de enseñanza que permitieran comprender el conocimiento para la enseñanza que el futuro docente posee y que pone al servicio de la gestión de la enseñanza de los estudiantes.

La decisión de utilizar el estudio de caso se debió a que permite estudiar con detenimiento cómo se realiza la enseñanza de un concepto que dentro de la formación inicial es tratado superficialmente y que en consecuencia nos permitió lograr nuestro objetivo de analizar y describir los factores que inciden en la enseñanza del volumen

Además, la decisión de videograbar la clase se basó en la consideración que las acciones que suceden al interior de la sala de clase son complejas y cambiantes por lo que la extracción de información se hace complejo y desde el análisis calmado del investigador se puede entender con detalle lo que allí sucedió (Erickson, 2006).

Análisis de resultados

Durante la actividad, se presentaron diversos episodios conflictivos que nos permiten detectar factores que indicen en la enseñanza del volumen. A continuación, se muestran diálogos entre estudiantes (Ei); profesores en formación (PFi) y la formadora de profesores (FP)

Episodio 1

Actividad: Se entrega a algunos estudiantes del curso dos piezas de plastilina del mismo tamaño para que la modelen con sus manos.

PF1: *¿qué figura tiene mayor volumen?* (mostrando las modelaciones de los estudiantes)
Grupo curso: (la respuesta no es inmediata por el grupo, murmullan)
En pocos segundos un estudiante interviene:
E1: *Todos tienen el mismo volumen porque se usó la misma cantidad de plasticina.*
Grupo curso: (discuten, algunos dicen que no, otros que podría ser…)
PF1: *Como todos usamos la misma cantidad de plasticina, todos tienen el mismo volumen. ¿Sí?*
Grupo curso: murmuran afirmando lo que el profesor dice.

En este episodio podemos observar que los estudiantes, difícilmente, comprenden la propiedad de conservación del volumen, dado que no es instantáneo, que a sabiendas que cada compañero usó dos piezas de plastilina, las distintas figuras deben tener el mismo volumen.

Episodio 2

Actividad: Un profesor en formación pregunta cómo poder medir el volumen de una de las modelaciones de plasticina.
PF1: *A alguien se le ocurre como poder medir el volumen de esta figura*
Grupo curso: murmuran
E2, E3,E5: *La masa* (se escuchan tres voces que dicen masa)
FP: *¿La masa? Entonces ¿la masa y el volumen son magnitudes iguales?*
Grupo curso: *Noooo*
FP: *¿Semejantes?*
Grupo curso: uhm…
FP: *Bueno entonces ¿Por qué no? ¿Qué tienen de diferente? A ver. dijeron que el volumen es el espacio que ocupa un cuerpo. ¿y la masa?*
Grupo curso: *(a coro) ¡¡el peso!!*
FP: *mmm ya el peso* (se observa incomodidad en su respuesta) *¿Entonces el volumen y la masa se relacionan?*
Grupo curso: *uhm… sí*
FP: *¿Sí? ¿Quién dice que sí? ¿Por qué?*
Grupo curso: *Uhm. más o menos, murmullos*
FP: *Entonces, entre mayor volumen, mayor masa.*
Grupo curso: *(a caro) sí/ claro/obvio*
FP: *Entonces si tengo un kilo de algodón…*
E1: (Interrumpe) *No…. no necesariamente. Porque el algodón puede tener mucho volumen, pero poco peso y una pelotita de acero, poco volumen y mucho peso.*

En este episodio, podemos observar que para los estudiantes las magnitudes de masa y volumen están relacionadas, dado que "es lógico" que un objeto de mayor tamaño "pesa" más. Se aprecia que el mismo estudiante que indicó la conservación en el episodio anterior, es quien diferencia masa de volumen a partir de los ejemplos de la formadora de profesores.

Episodio 3

Actividad: El profesor en formación pregunta por la diferenciación entre capacidad y volumen.

PF2: *Tenemos el volumen, que lo han definido, ¿les suena el concepto de capacidad?*
Grupo curso: (mmmm no, uhm, murmullos)
FP: *Pero ¿cómo no lo van a conocer? ¿Acaso no han comprado una mochila?*
Grupo curso: (a coro) *síiiii, claro que sí, en las mochilas.* Un estudiante mira una mochila
FP: *A ver* (hablándole al estudiante de la mochila) *¿Qué información hay? Cuéntele al curso*
E6: *Es de 30 litros*. (Se para y se la muestra a grupo curso)
P2: *¿El volumen y la capacidad son lo mismo? ¿por qué sí o por qué no?*
Grupo curso: Silencio, murmullos...
FP: Toma una bolsa. Pregunta *¿Tiene capacidad?*
Grupo curso: *Sí*
FP: *Muy bien. Había por ahí una mochila de 30 litros. ¿Dónde caben más cosas en la bolsa o en la mochila?*
Grupo curso: (a coro) *En la bolsa*
FP: *Entonces, la bolsa tiene una capacidad mayor de 30 litros.* (toma la bolsa y la reduce) *y ahora ¿qué ha pasado con la capacidad?*
Grupo a curso: *disminuyó*
FP: *¿y el volumen?*
Grupo curso: *También*
FP: *A muy bien ¿Por qué?*
Grupo curso: (discuten sobre si es el mismo, menor o mayor)
FP: *Levante la mano quien dice que el volumen disminuyó*
Grupo curso: (nadie levanta la mano… risas)
FP: *Entonces, ¿Quién dice que el volumen es el mismo?*
E7: *El volumen es diferente y la masa es igual*
FP: (toma la bolsa reducida) *Entonces, aquí la bolsa masa una cierta cantidad de kilos y ahora* (la vuelve a expandir) *masa otra cantidad*
E7: *No… es por el aire.*

De este episodio, podemos observar que para los estudiantes el volumen y la capacidad no son necesariamente distintos y que otras magnitudes, nuevamente como la masa, influyen en su razonamiento sobre la propiedad de conservación.

Conclusiones

Del análisis se concluye que los estudiantes comprenden el volumen como concepto, sin embargo, no lo conservan ni tienen apropiadas las unidades de volumen, característica no esperada en la planificación (KFLM), por el alto rendimiento de los estudiantes. En la planificación se realiza la diferenciación entre capacidad y volumen (KMT), pero la devolución de los estudiantes por la confusión de los conceptos crea situaciones de compleja resolución, ya que emergen afirmaciones y preguntas sobre distintas magnitudes (KSM): densidad, masa, aceleración y presión, provocando situaciones de contingencia que los futuros profesores no abordan, por lo tanto, debe interrumpir la formadora de profesores.

Magnitudes como la masa y la densidad (el aire), que inciden en la apropiación del volumen, no están presentes en el currículo de matemática, sino de ciencias naturales. Por otro lado, la transposición didáctica del peso y la masa, también inciden en la apropiación del volumen. Por ello, consideramos que es indispensable un trabajo didáctico y currículo desde la física y la matemática para crear actividades que tengan como objetivo presentar situaciones problema donde variadas magnitudes físicas intervengan.

En la matemática escolar el volumen y la capacidad son sinónimos (espacio ocupado- espacio vacío) que se miden con centímetros cúbicos y litros, gracias a la razón 1000 es a 1 y que se utiliza como igualdad. Sin embargo, al trabajar con unidades no estandarizadas, utilizado tanto cantidades discretas como continuas, se puede provocar confusión, dado que la iteración continua de la unidad de medida, podría ser imposible con unidades de medidas discretas, como un frijol. Estas situaciones, permitiría resolver situaciones problemáticas interesantes para hacer la diferenciación entre volumen y capacidad.

Consideramos que el espacio de co-docencia es una oportunidad para que los académicos que formadores de profesores se acerquen a la escuela y la complejidad de sus prácticas y, por otro lado, los futuros docentes puedan comenzar su docencia junto a un profesor con experiencia que puede ayudarle a detectar las situaciones de conflicto en las que debe investigar para tomar acciones de mejora.

En este trabajo quisimos incluir un apartado sobre el pensamiento métrico y el geométrico, considerando sus relaciones y diferencias, sin embargo, todo lo que encontramos, eran menciones desde el currículo, las pruebas estandarizadas o análisis de investigaciones sobre temas que desarrollan pensamiento matemático en algunos congresos de educación matemática, como CERME.

Finalmente, destacamos la importancia de la reflexión sobre elementos matemáticos y didácticos que en algunos casos se consideran adquiridos, pero que con una mirada crítica y ampliada permiten reconstruir saberes al servicio del aprendizaje de los estudiantes en el ámbito escolar y podrían ser parte del conocimiento especializado para la enseñanza.

Referencias

Adler, J., Ball, D., Krainer, K, Lin F.L., y Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.

Ball, D., y Forzani, F. (2009). The work of teaching and the challenge for teaching education. *Journal of Teacher Education*, 60(5), 497–511.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.

Clements, D., y Sarama, J. (2014). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escuedro-Ávila, D., Flores-Medrano, E., y Montes, M. A. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Chamorro, M. del C. (2003). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Pearson Education.

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2005). *Preparing Teachers for a changing world. What teachers should learn and be able to do.* San Francisco: Jossey Bass.

Del Olmo, M.A., Moreno, M.F. e Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis

Flores, E., Escudero, D. y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275- 282). Bilbao, España: SEIEM.

English, L. D., & Kirshner, D. (2016). Changing agendas in international research in mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Third, pp. 3–18). New York: Routledge.

Erickson, F. (2006) Definition and analysis of data from videotape: some research procedures and their rationales. En J. Green, G. Camili y P. Elmore (Eds.) *Handbook of complementary methods in education research* (pp. 177-191). Washington, D.C: American Educational Research Association.

González-López, M. J., y Flores, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: el caso del volumen. *Revista Educación Matemática*, *13*(1), 81–93.

Hargreaves, A., y Fullan, M. (2014). *Capital Profesional* (1a Edición). Madrid: Editorial Morata.

Lehrer, R., Strom, D., & Confrey, J. (2002). Grounding metaphors and inscriptional resonance: Children's emerging understanding of mathematical similarity. *Cognition and Instruction*, *20*(3), 359-398.

Manzi, J., González, R., y Sun, Y. (2011). *La evaluación docente en Chile*. Santiago, Chile: MIDE UC.

Montes, M. A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In *Proceedings of the CERME* (Vol. 8).

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1948). *La geometrie spontanee de l'enfant.* P.U.F: Paris

Sáiz, M., y Figueras, O. (2009). A research-based workshop design for volume tasks. *Tasks in primary mathematics teacher educatio*n, 147-160.

Sáiz Roldán, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de investigación educativa*, *8*(18).

Schön, D. A. (1992). *La Formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones.* Barcelona: Paidós.

Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relation between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *58(3*), 393–413.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

ERRORES RECURRENTES AL RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS APLICADOS A LAS CIENCIAS ECONÓMICAS

COMMON ERRORS INVOLVING MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING APPLIED TO ECONOMIC SCIENCES

Kenner Ordoñez Lacayo
Universidad de Costa Rica. (Costa Rica)
kenner.ordonez@ucr.ac.cr

Resumen
Se estudian los errores frecuentes de estudiantes en problemas de matemáticas aplicadas a las ciencias económicas, con el fin de buscar medidas correctivas. Para esto se seleccionó una muestra de 41 exámenes resueltos por estudiantes de cursos ExMa, un proyecto con 10 años de experiencia en evaluaciones de aprendizajes matemáticos, en cuyo período se han archivado soluciones de exámenes de dos cursos de matemáticas para futuros profesionales en ciencias económicas. Se determinan errores recurrentes de los estudiantes en sus soluciones, se hace una clasificación de estos y se establecen posibles causas para terminar con algunas recomendaciones a los docentes. Uno de los principales resultados es que los estudiantes no tratan de resolver los ítems que se refieren a aplicaciones.

Palabras clave: matemáticas, ciencias económicas, evaluación, errores

Abstract
Students frequent errors in mathematics problems applied to economic sciences are studied in order to look for corrective measures. So, we chose a sample of 41 exams solved by students of ExMa courses; a project with 10 years of experience in evaluations of mathematical learning, in which period exam-solutions of two mathematics courses have been filed for future professionals in economic sciences. We determined students' common errors in their solutions; and classified them, establishing the possible causes and providing some recommendations to teachers. One of the main results is that students do not try to solve the items that refer to applications.

Key words: mathematics, economic sciences, evaluation, errors

Introducción

Para el año 2016 en Costa Rica se reportó una tasa de cobertura en secundaria del 95,9%, sin embargo, para este mismo año, solamente el 50,4% de los jóvenes entre los 18 y 22 años tenían la secundaria finalizada (Programa Estado de la Nación, 2017, p. 49). Esto significa que en Costa Rica se procura que todos los jóvenes se inscriban en la secundaria, esto mediante estrategias que buscan la permanencia de los jóvenes en los sistemas educativos de secundaria.

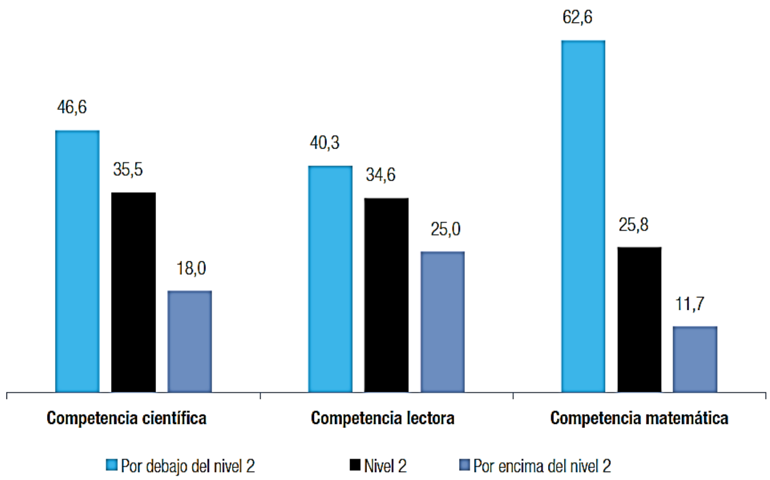


Ilustración 1. Distribución de los estudiantes costarricenses según nivel de desempeño en las pruebas PISA 2015.
Fuente: Programa Estado de la Nación (2017, p. 52).

Lo anterior sería muy bueno si se lograse mantener altos niveles en la calidad de la educación que reciben los jóvenes, pero, al analizar algunos indicadores que permitan comparar la calidad respecto a otros países, los resultados no son tan alentadores. Por ejemplo, en las Pruebas PISA aplicadas en el 2015, tal y como se aprecia en la Ilustración 1, un alto porcentaje de los jóvenes están por debajo del nivel 2 en las competencias evaluadas (Científica, Lectora y Matemática), siendo que en la matemática es donde poseen mayores dificultades, de hecho, en la Competencia matemática más del 60% no alcanza el nivel 2.

Además de no alcanzar los niveles aceptables en la Competencia matemática, tal y como se observa en la Ilustración 2, también la nota promedio que obtienen los jóvenes costarricenses está muy por debajo de la media de los resultados en PISA.

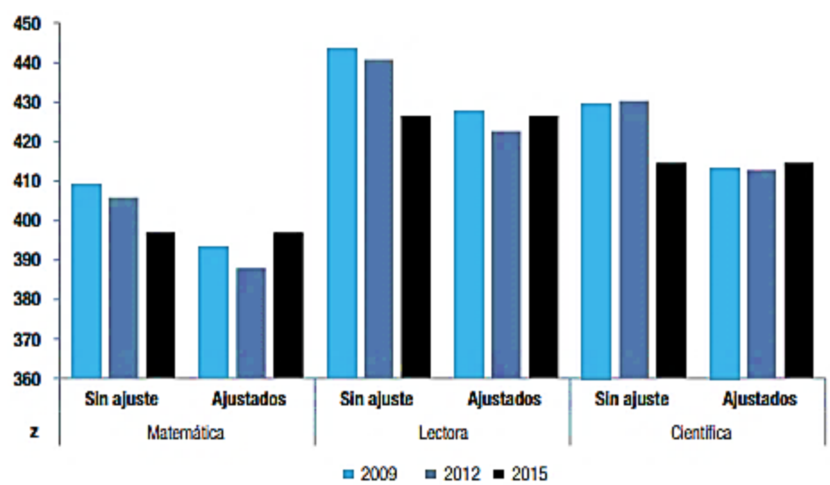


Ilustración 2. Comparación de los puntajes promedio de PISA con los ajustados por cobertura y modo de aplicación.
Fuente: Programa Estado de la Nación (2017, p. 195).

En general, con estos resultados, tal como se observa en la Tabla 1, en la Competencia matemática, Costa Rica está en la posición 59 de 70 zonas que participaron en las pruebas PISA 2015. En general, en todas las competencias, las zonas latinoamericanas participantes están por debajo de la mitad de las 70 zonas.

Tabla 1. *Notas promedio de Latinoamérica en las pruebas PISA 2015*

(70 zonas)	Matemáticas	Ciencias	Lectura
Media OECD	490	493	493
Argentina	456 (42)	475 (38)	475 (38)
Chile	423 (48)	447 (44)	447 (42)
Uruguay	418 (51)	435 (47)	437 (46)
México	408 (56)	416 (58)	423 (55)
Costa Rica	400 (59)	420 (55)	427 (52)
Colombia	390 (61)	416 (57)	425 (54)
Perú	387 (62)	397 (64)	398 (63)
Brasil	377 (65)	401 (63)	407 (59)

Fuente: basado en datos de la OECD (2016).

Lo anterior es una muestra del nivel matemático de la población estudiantil que reciben las universidades de Costa Rica. En el caso de la Universidad de Costa Rica, aunque esta posee un sistema de admisión que incluye una prueba de ingreso con altos estándares internacionales (Programa Permanente de la Prueba de Aptitud Académica, 2014), lo cierto es que el sistema no está diseñado para verificar las habilidades específicas para cada una de las carreras que la componen.

Ante las situaciones expuestas anteriormente, la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica ha procurado brindar oportunidades a los estudiantes para que alcancen los niveles necesarios para desempeñarse adecuadamente en los cursos que imparte. Algunas de estas medidas son el Diagnóstico de Matemática (Vicerrectoría de Docencia, 2009a) y el Proyecto Exámenes de Matemáticas (Vicerrectoría de Docencia, 2009b).

Según la Escuela de Matemáticas (2017), el Proyecto Exámenes de Matemáticas (ExMa) consiste en una modalidad de algunos cursos de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica, en la que los estudiantes deciden prepararse a distancia para realizar pruebas parciales que le certifiquen la aprobación del curso respectivo. Esta modalidad está dirigida a estudiantes aventajados o que han reprobado en varias ocasiones el mismo curso. Los estudiantes deben aprobar (obtener una nota de 67,5 o superior en la escala 0-100) el primer parcial para poder inscribirse en el segundo parcial y haber aprobado este último para poder inscribirse en el tercer parcial. Una vez que aprueban el tercer parcial, se les da por aprobado el curso con una nota equivalente al promedio de las notas con que aprobó cada examen parcial. Una de las diferencias, además de ser preparación a distancia, es que el estudiante no debe, necesariamente, realizar los tres exámenes parciales en el mismo ciclo lectivo, sino, que puede, por ejemplo, matricular un parcial cada año.

Como en el proyecto ExMa la evaluación únicamente depende de los exámenes que realizan los estudiantes, es muy importante que los instrumentos de medición estén muy bien diseñados y acordes a los objetivos y contenidos de los grupos regulares de cada curso. Por tal motivo, cada uno de los instrumentos sigue un proceso riguroso de diseño.

El diseño de los instrumentos sigue 3 etapas: diseño de la tabla de especificaciones, diseño de los ítems y validación del instrumento por la coordinación del curso y del proyecto ExMa. El diseño general de la tabla de especificaciones es semejante a la propuesta por Tecnológico de Monterrey (2016), solo que está orientada por los objetivos específicos de cada curso y el número de horas que se le dedica a cada objetivo en los grupos regulares. Para el diseño de cada ítem se considera la distribución de puntos que se obtuvo en la tabla de especificaciones y procurando que sean al menos dos tipos de reactivos. Adicionalmente, cada ítem es sometido a revisiones que garanticen que mida el objetivo específico y que esté perfectamente redactado. Para garantizar la asignación de puntos se deben realizar las soluciones que realizarían los estudiantes. Una vez que se finaliza con estas dos etapas, la propuesta de examen se envía a la validación de las coordinaciones para verificar que cumpla a cabalidad con las dos primeras etapas.

Una vez que el instrumento ha sido corregido, como es de esperar, se aplica a los examinados. Una vez aplicado cada instrumento, este es enviado para que se archive y forme parte de una batería de reactivos. Paralelamente, a los estudiantes se les facilita la nota que obtuvo, así como una lista de objetivos y contenidos que debe reforzar, los cuales están asociados a las tareas cognitivas que eran necesarios para resolver los ítems. Adicionalmente, se le permite consultar la solución de cada ítem para que compare lo que el examinado realizó, respecto a la solución esperada. De esta forma se espera que el examinado compare su calificación respecto a la solución que realizó en el instrumento.

En los cursos del área de Ciencias Económicas correspondientes al proyecto ExMa, durante los tres ciclos lectivos del 2017 (marzo de 2017 a febrero de 2018) se realizaron 41 exámenes (combinación de 3 parciales y 25 estudiantes). En la
Ilustración *3* se observa que la mayoría de los estudiantes realiza cada parcial solamente una vez, pero el nivel de deserción de estos cursos del proyecto es muy alto.

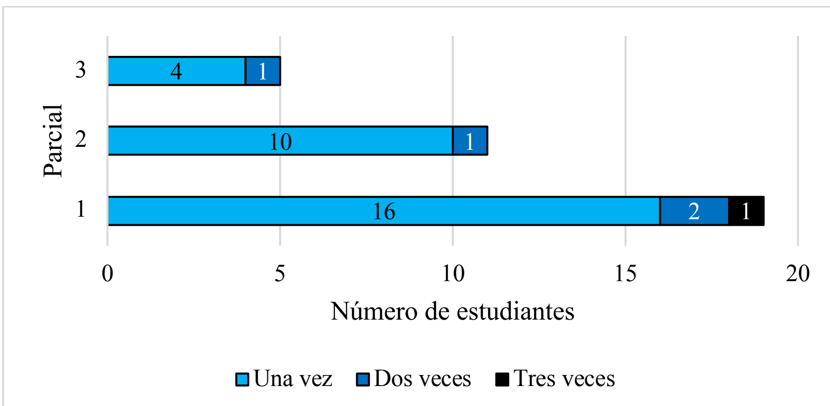


Ilustración 3. Frecuencia del número de veces que cada estudiante matriculó alguno de los 3 parciales.

Adicionalmente, en la Ilustración 4 se observa que, de los 25 estudiantes, 11 no lograron aprobar ninguno de los parciales y que solamente 2 aprobaron el curso.

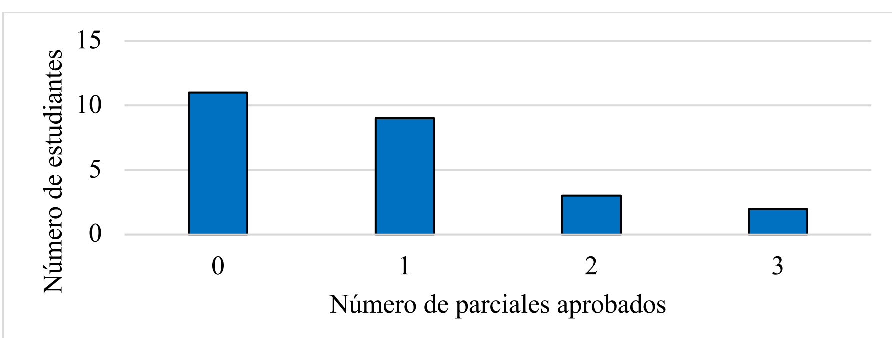


Ilustración 4. Número de parciales que aproaron los estudiantes.

Con los datos expuestos en la
Ilustración *3* y la Ilustración 4, con los resultados de Costa Rica en PISA y con las listas de objetivos que debían reforzar los examinados es que se decide analizar errores para así poder realizar recomendaciones de cómo abordar estas temáticas, tanto para los estudiantes que estudian a distancia como los docentes de los grupos regulares de cada curso de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica.

Considerando lo anterior y que los estudiantes de Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica no presentan una buena actitud hacia los cursos de Matemáticas, que estos estudiantes presentan hábitos de estudio deficientes y considerando que los cursos (y sus materiales didácticos) están diseñados para lecciones presenciales, esta primera etapa de la investigación se orienta mediante el siguiente objetivo:

Determinar los errores recurrentes que cometen los estudiantes al resolver problemas de matemáticas aplicados a las ciencias económicas, con el fin de buscar medidas correctivas que permitan superarlos, tanto por los alumnos autodidactas como por los docentes que enseñan estas temáticas.

Marco referencial

Para esta investigación se opta por analizar los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas de matemáticas aplicados a las ciencias económicas, por tal motivo se debe considerar cómo los estudiantes abordan la resolución de problemas, para lo cual se decide considerar uno de los métodos más difundidos, el de Pólya.

Como describe Alfaro (2006), el método de Pólya para resolver problemas se puede dividir en cuatro etapas: 1) Comprender el problema, 2) Concebir un plan, 3) Ejecutar el plan y 4) Examinar la solución. Para esta investigación, como solo se cuenta con las soluciones plasmadas por los estudiantes en sus exámenes, la clasificación de los errores se realizó en las etapas 2, 3 y 4 del método de Pólya. Estas etapas no son desarrolladas en este artículo pues son muy conocidas y están muy claras en el artículo del señor Alfaro.
Existen múltiples clasificaciones de los errores, de la revisión de literatura y considerando que algunas de ellas son semejantes, para esta investigación se opta por la clasificación basada en las de Davis (1984, citado en Rico, 1998, p. 88) y Radatz (1980, citado en Rico, 1998, pp. 88-90). De esta forma se obtienen los siguientes tipos de errores:

1. Inducidos por el lenguaje o la notación.
   Se muestra dificultades al comprender la simbología matemática y su significado. Este tipo de errores suele afectar las 4 etapas del método de Pólya.
2. Inferencias erróneas por asociaciones incorrectas.
   Se considera que el recíproco de un resultado siempre es verdadero. Este suele producirse en la etapa 3 del método de Pólya.
3. Recuperación de esquema previo.
   No recuerda todos los detalles de conocimientos o procesos que aprendió previamente. Este se da con mayor frecuencia en las etapas 2 y 3 del método de Pólya, sin embargo, es posible que dé en las etapas 1 y 4.
4. Datos mal utilizados.
   La información proporcionada en el problema se consigna o se utiliza erróneamente. Este se da en la etapa 2 del método de Pólya.
5. Reversiones binarias (efectuar mal una operación).
   El resultado de alguna operación no es el correcto, pues se confunde con otra. Este se da principalmente en la etapa 3 del método de Pólya.
6. Representaciones inadecuadas.
   Se escoge una representación o notación que es confusa o propensa a omitir resultados de operadores o conceptos matemáticos.

Este se da con mayor frecuencia en la etapa 2 del método de Pólya, sin embargo, se pueden encontrar algunos casos en la etapa 3 y otros, en la etapa 4.

7. Verificación de la solución.
   Al tratarse de aplicaciones, es decir, donde se aplica la resolución de problemas, se confunde el resultado válido en términos de esquemas matemáticos con los de la situación real de la situación-problema. Este se da en la etapa 4 del método de Pólya.
8. Atención o ansiedad.
   Se muestra un descuido y poca atención en el procedimiento desarrollado. Muchas veces se da por la ansiedad a ser evaluados o por crisis no necesariamente académicas. Este se puede presentar de forma trasversal en el método de Pólya.

Metodología

Según Durán (2012, p. 121):

> El Estudio de Caso (EC) es una forma de abordar un hecho, fenómeno, acontecimiento o situación particular de manera profunda y en su contexto, lo que permite una mayor comprensión de su complejidad y, por lo tanto, el mayor aprendizaje del caso en estudio. Utiliza múltiples fuentes de datos y métodos, es transparadigmático y transdisciplinario.

Este estudio se cataloga como un “Estudio de Caso”, por lo que, la metodología se basa en los puntos indicados por Stake (2005, citado por Durán, 2012, pp. 130-131). Entre las distintas subclasificaciones de los EC, en este se selecciona el EC desde su perspectiva Instrumental, en el sentido de Stake (2005, citado por Durán, 2012, p. 130).

Como primer punto, se decide escoger las temáticas clasificadas como “Aplicaciones de las matemáticas a las ciencias económicas”, esto porque es lo que, en esencia, diferencia los cursos de otros del proyecto ExMa.

En segundo lugar, con las tareas de los objetivos específicos, combinadas con las clasificaciones de los errores, planteadas en el marco teórico, se obtiene la triangulación requerida en los EC.

Respecto a los tipos de errores, Mulhern (1989, citado por Rico, 1998, pp. 99-100) indica las diferentes metodologías que existen para clasificar los errores. Para este estudio, considerando la información disponible y los plazos de la investigación, se decide optar por las estrategias “Contar el número de errores” y “Analizar los tipos de errores”.

Como tercer punto, el análisis de los resultados permitirá informar algunos de los errores que cometen los estudiantes en los cursos y temáticas seleccionadas. También, es posible obtener resultados que relacionen el desempeño de los estudiantes en la resolución de problemas.

En el cuarto punto, se retoma lo indicado en la justificación de este estudio y bajo los cuales se aplica este EC.

La última etapa, en este EC, se diseña y organiza este informe, especialmente, con el referido a las conclusiones.

La población está compuesta por 25 estudiantes de las carreras de la Facultad de Ciencias Económicas (exceptuando Estadística y Economía) de la Universidad de Costa Rica, los cuales se inscribieron en los cursos Matemática para Ciencias Económicas I o Cálculo para Ciencias Económicas I, en la modalidad ExMa.

Los instrumentos utilizados solamente son sometidos a validez de contenidos, en función de dos jueces expertos. Los instrumentos están clasificados como tres exámenes parciales, los cuales son distintos en las cuatro convocatorias del proyecto ExMa, y que fueron aplicados durante tres ciclos lectivos.

Resultados

Como primer resultado se recopilan las 30 tareas que se requieren para responder distintos ítems, que, a su vez, miden un objetivo específico del curso (ver Tabla 2).

Tabla 2. Ejemplos de las tareas requeridas para responder los ítems

ID	Tarea
1	Reconocer el costo fijo, dada la función de costo total
2	Determinar el costo medio, dado el costo total y el número de artículos
3	Determinar los pares ordenados para cada recta
4	Aplicar la fórmula para determinar la pendiente
5	Estimar el intercepto de una recta
	…
26	Determinar la diferencia común de una progresión aritmética
27	Determinar el término general de una progresión
28	Estimar el término de una progresión
29	Estimar la suma de términos de una progresión aritmética
30	Resolver ecuaciones exponenciales

Después de identificar las tareas requeridas, se identifican en cuáles de estas tareas se cometieron errores (Error), en cuáles se resolvió correctamente (Obtenidos) y en cuáles no se consignó una solución o respuesta (NR). Los resultados se pueden apreciar en la Ilustración 5.

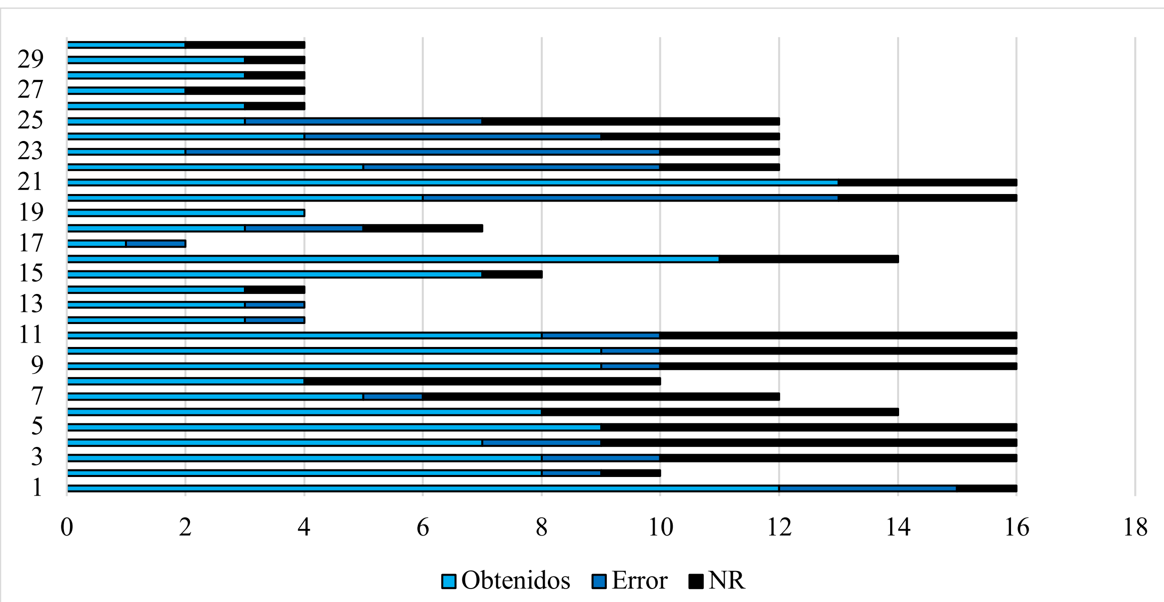


Ilustración 5. Distribución de puntos por tarea

Uno de los principales resultados de la Ilustración 5 es que una buena parte de los estudiantes ni siquiera intentan responder los ejercicios de matemáticas aplicadas.

Además, para el caso de la clasificación de los errores tipo 3 y 4 son los que cometen un mayor número de ocasiones (ver Ilustración 6).

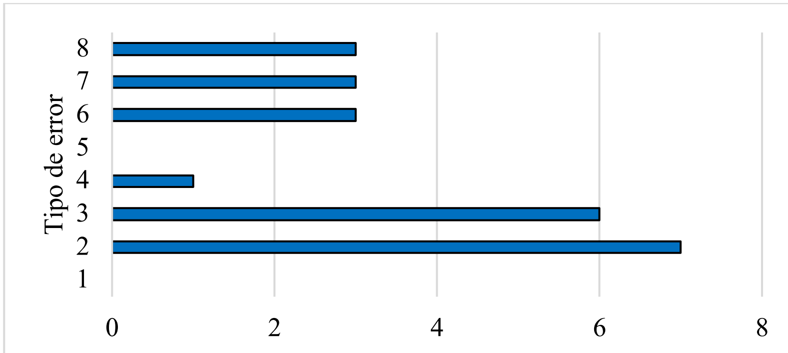


Ilustración 6. Frecuencia de los errores según el tipo

A continuación, se presentan algunos de los errores que se detectaron:

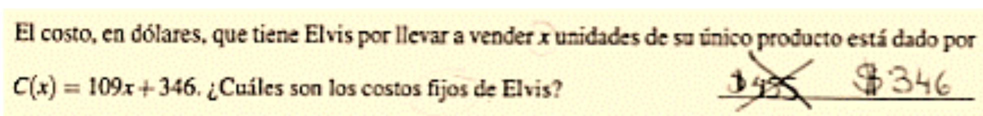


Ilustración 7. Ejemplo de error tipo 2 y 3

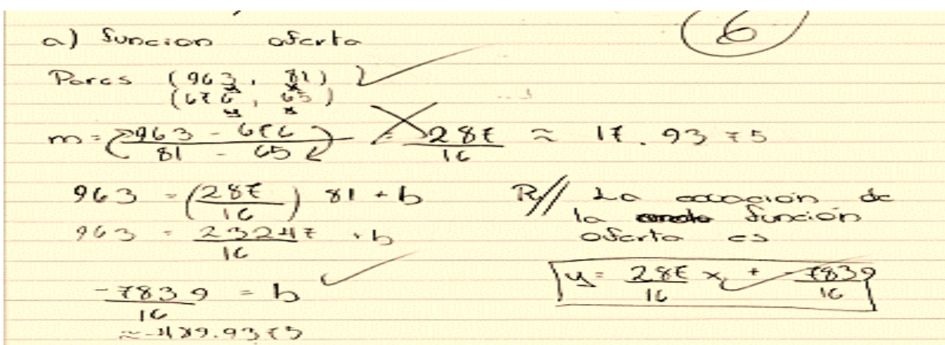


Ilustración 8. Ejemplo de error tipo 2 y 3

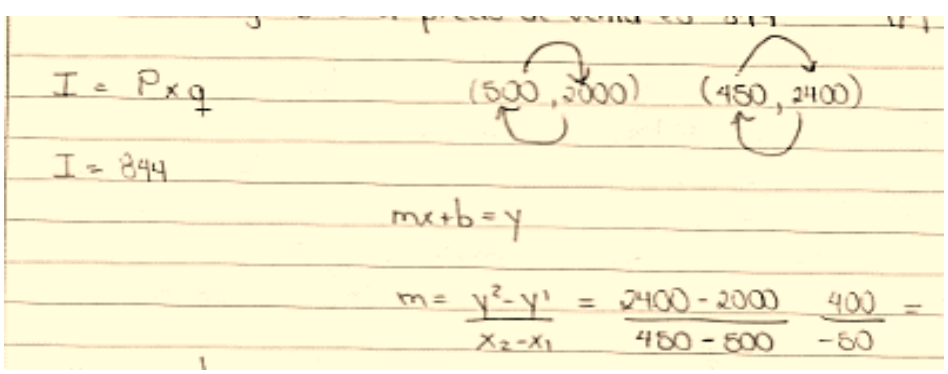


Ilustración 9. Ejemplo de error tipo 6

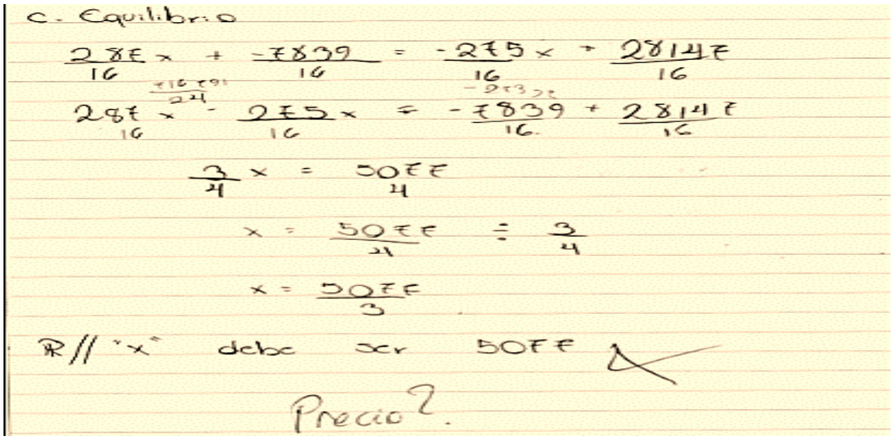


Ilustración 10. Ejemplo de error tipo 6

Conclusiones

Para este estudio solamente se cuenta con datos de 25 estudiantes ya que para esta modalidad de estos cursos no se inscriben suficientes estudiantes como para realizar inferencias sólidas. Por tal motivo, es necesario buscar muestras mayores de los cursos estudiados. Una forma de lograr esto es extendiendo el estudio a una muestra que incluya a estudiantes de la modalidad regular de los cursos.

Otra forma de lograr una mayor muestra sería divulgando las ventajas de la modalidad ExMa, para que así se inscriban más estudiantes en esta modalidad. Con esto, además de que los estudiantes tienen otra forma de poder aprobar los cursos, también permitirá comparar los tipos de errores que cometen los estudiantes de la modalidad ExMa, esto con el fin de verificar si los estudiantes que se preparan a distancia cometen los mismos errores que los estudiantes que asisten a las lecciones presenciales.

Uno de los resultados más interesantes es que en realidad la mayoría de los estudiantes ni siquiera tratan de resolver los ítems de aplicación de las matemáticas. Los datos presentados en este informe sugieren que se requiere un cambio significativo en la preparación que se les da a los jóvenes en lo que respecta a la resolución de problemas.

Adicionalmente, muchos de los errores que comenten los estudiantes están vinculados con los esquemas (en el sentido de la teoría Acciones-Procesos-Objetos-Esquemas, APOE) previos, pues no logran aplicarlos adecuadamente o no reconocen cuándo son necesarios para poder resolver el problema.

Aumentar el interés de los estudiantes por las aplicaciones de la matemática a sus carreras.

Referencias bibliográficas

Alfaro, C. (2006). Las ideas de Pólya en la Resolución de Problemas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (1), 1-13. Recuperado a partir de https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6967

Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, *3*(1), 121-134. Recuperado a partir de http://investiga.uned.ac.cr/revistas/index.php/rna/article/view/477

Escuela de Matemáticas. (2017). Examen de Matemáticas. Recuperado a partir de http://www.exma.emate.ucr.ac.cr/

OECD. (2016). *PISA 2015 Resultados Clave*. OECD Publishing. Recuperado a partir de https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf

Programa Estado de la Nación. (2017). *Sexto Informe Estado de la Educación Costarricense* (1 ed.). San José, Costa Rica: Servicios Gráficos, A. C. Recuperado a partir de https://www.estadonacion.or.cr/educacion2017/assets/ee6-informe-completo.pdf

Programa Permanente de la Prueba de Aptitud Académica. (2014). Prueba de Aptitud Académica. *Compendio de Instrumentos de Medición IIP - 2014*, Cuadernos Metodológicos (pp 286-293). Recuperado a partir de http://iip.ucr.ac.cr/sites/default/files/contenido/cuamet6.PDF

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*, Educación Matemática (pp 69-108). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica S. A. Recuperado a partir de https://www.researchgate.net/

Tecnológico de Monterrey. (2016). Tabla de Especificaciones. Recuperado a partir de http://sitios.itesm.mx/va/calidadacademica/files/especificaciones.pdf

Vicerrectoría de Docencia. (2009a). VD-R-8428-2009. *Proyecto Diagnóstico de Matemáticas*. Recuperado a partir de http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-8428-2009-pdf/

Vicerrectoría de Docencia. (2009b). VD-R-8375-2009. *Proyecto Exámenes de Matemáticas*. Recuperado a partir de http://vd.ucr.ac.cr/documento/vd-r-8375-2009-pdf/

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

REFLEXÕES SOBRE OS IMPACTOS DOS MOVIMENTOS SOCIAIS NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

REFLETIONS ABOUT THE IMPACTS OF THE SOCIAL MOVEMENTS IN THE IN THE MATHEMATICS TEACHER'S FORMATION

Emanuel Gomes Peixoto, Karly Barbosa Alvarenga
Universidade Federal de Goiás. (Brasil)
emanuellgomees@gmail.com, karlyalvarenga@gmail.com

Resumen
Este trabalho tem como principal objetivo refletir sobre a formação inicial de professores de matemática que participam de Movimentos Estudantis e Sociais durante seu processo formativo, baseado nas ideias e concepções de Paulo Freire e Ole Skovsmose, com contribuições de outros autores. É uma investigação documental, em que se analisaram registros e documentos sobre as políticas educacionais propostas nos anos 2015 a 2017. Foram analisados registros das movimentações estudantis e sociais que rejeitaram tais políticas a fim de refletir sobre a formação do professor de matemática. Os resultados indicam uma potencial formação crítica e política dos participantes dos movimentos sociais, de forma que entendam o papel político que o professor ocupa dentro da escola, bem como a importância de construir coletivamente espaços de debates dentro e fora do ensino da matemática, a fim de romper com a formação positivista nas áreas de exatas.

Palabras clave: matemática, formação inicial de professores, movimentos estudantis

Abstract
The main objective this work is to reflect about the students that attend Mathematics Teacher Education at university and who participate in student and social movements during their formative process, it is based on ideas and conceptions of Paulo Freire and Ole Skovsmose, with contributions from other authors. It is a Documentary investigation, in which analyzed records and documents on educational policies in Brazil in the years 2015 to 2017. Were analyzed records of the student and socials movements who rejected these policies in order to reflect about the Mathematics Teacher Education. The results point to a potential critical and political formation of the social movement's participants, so that they understand the social role who the teacher occupies inside the school as well as the importance of collectively constructing spaces for debates within and outside the teaching of mathematics, in order to break with the positivist formation in the exact areas.

Key words: Mathematics, Teacher Education, *Social movements*

Introdução

O objetivo deste trabalho é refletir sobre os impactos nas políticas educacionais, promovidos pelas reformas na educação no governo brasileiro de Michel Temer, na formação do professor de matemática. No percurso da graduação, talvez a compreensão de como trabalhar a criticidade do aluno nas aulas de matemática seja limitada, por ser proporcionada uma vivência da realidade escolar aos alunos de licenciaturas que é restrita a poucos momentos de intervenção pedagógica, somada a pouca vivência em outros contextos e ambientes educacionais. Logo, se faz necessária a discussão sobre a formação do professor de matemática que tem a vontade de se tornar um educador progressista.

Assim, um dos intuitos desta pesquisa é fornecer elementos para um debate sobre a formação do professor(a) de matemática que atua no Movimento Estudantil (ME) ou nos Movimentos Sociais (MS). Esse é um momento oportuno quando se considera que há o crescimento das lutas de massas por uma educação de qualidade, liderada por secundaristas e universitários. Entendemos que, atualmente, mudanças no cenário político brasileiro têm provocado drásticas alterações na estrutura escolar brasileira, retomando fortemente os laços com conservadorismos e tecnicismo no ensino, propagados, principalmente, durante o período da Ditadura Militar.

É preciso buscar alternativas de formação docente para romper com as negatividades do tradicionalismo enraizadas na prática dos professores de matemática, que já sofrem com a influência do Positivismo. Nessa circunstância, formam-se educadores cada vez mais acríticos e monótonos, que promovem uma educação desencontrada da realidade social do aluno, o que resulta na visão de que a matemática é uma disciplina sem sentido e utilidade.

Marco teórico

Mediante essa problematização e percebendo o caráter político assumido na discussão, utilizamos uma perspectiva libertadora de Paulo Freire (1984,2005, 2008), em que educar é um ato político, no qual o professor deve buscar esclarecimento durante sua formação sobre suas próprias concepções, questionando, a todo o momento, o papel político que o docente cumpre. Nesse mesmo sentido, baseamo-nos também em Skovsmose (2010) para argumentar sobre a Educação Matemática Crítica.

Pesquisas realizadas por Souza (1998), Bezerra e Xypas (2014) discutem a formação de professores que participaram do Movimento Estudantil (ME). Fonseca (2010) e Rocha (2013) também contribuem para este debate com suas reflexões acerca da formação de pedagogos que atuaram no ME, para uma formação crítica, libertadora. Como a formação matemática historicamente se fundamenta em princípios positivistas, também utilizaremos dessas ideias para refletir sobre o desenvolvimento crítico e cidadão dos professores de matemática no Brasil, conforme Motta & Brolezzi (2005) e Silva (1985). Assim, depois da revisão bibliográfica tecemos nosso marco teórico embasado na seguinte afirmação: A formação inicial de professores de Matemática precisa quebrar com o paradigma positivista e reorganizar seus currículos investindo em perspectivas libertadoras, autônomas, criativas e críticas.

E, no desenrolar da investigação apontamos e interconectamos autores, em especial, Skovsmose, Paulo Freire e Motta & Brolezzi para dialogarmos com os fatos e os desafios relacionados aos estudantes de Licenciatura em Matemática limitando o marco teórico.

Metodologia de pesquisa

Esta investigação se caracteriza como documental aliada a registros de acontecimentos em vários estados brasileiros, com participação de estudantes secundaristas e universitários, em especial, aqueles que estão em formação inicial para docência em matemática. Para tanto, realizamos um mapeamento de artigos, documentos oficiais, notas de entidades baseados em quatro termos: Movimento Estudantil, Movimentos Sociais, Formação de Professores e Matemática. O nosso *corpus*, portanto, é formado por 5 documentos oficiais, 5 reportagens publicadas em *sites,* observações em *lócus*, dos movimentos, algumas redes sociais e em torno de 4 artigos que trataram diretamente do tema.

Além desses documentos, localizamos também registros dos acontecimentos garimpando em reportagens, imagens, redes sociais e outros meios de comunicação. Nosso intuito foi identificar as principais movimentações estudantis ocorridas durante o período do governo Temer de implantação das novas políticas educacionais.

Um breve contexto político

Acontecimentos no cenário político brasileiro no período de 2014 a 2018 deixam uma marca conturbada e negativa na história brasileira, principalmente no período da recente democracia, conquistada após o fim da Ditadura Militar. O *impeachment* da presidente Dilma Rousseff se tornou um marco após três mandatos completos de governo dirigido pelo Partido dos Trabalhadores. A mudança drástica de governo causou um estreitamento do campo político, deixando explícitos os conflitos de interesses entre os partidos considerados de “Direita” e de “Esquerda”.

Com a consolidação do governo interino de Michel Temer, que foi eleito como vice-presidente em 2014, iniciou-se uma série de acordos políticos com o intuito de aprovar medidas que atendem aos interesses particulares das classes economicamente altas do país (como empresários e bancários). Desse modo, o referido governo foi considerado ilegítimo pelas classes econômicas baixas (Trabalhadores), principalmente pela postura conservadora e reacionária que ele adotou em suas políticas (Ruffato, 2017).

As formas como as propostas de emendas constitucionais foram feitas e levadas à frente mostram como a democracia no Estado Brasileiro é frágil e pouco valorizada pelos políticos, que propõem leis, reformas e mudanças constitucionais de forma impositiva e radical, comprometendo a garantia de direitos fundamentais dos brasileiros, como saúde e educação. As medidas conservadoras adotadas impulsionaram uma série de mobilizações lideradas por movimentos sociais e estudantis contra esses retrocessos. A tabela 1apresenta algumas características das medidas governamentais que trouxeram insatisfações em todo o país. Podemos notar que todas as medidas, inclusive algumas exclusivamente estaduais, em especial do governo do estado de Goiás, como a Militarização da Escola Pública e as Organizações Sociais nas escolas, apontam para uma grande regressão à educação brasileira.

Tabela 1. Medidas governamentais que impactam na educação de nossas crianças e jovens

Principais políticas relacionadas à educação	Período de aplicação	Impactos na educação e Formação docente
Emenda Constitucional 95	20 anos (2017-2037)	- Congelamentos dos investimentos em educação, saúde e infraestrutura por 20 anos. - Precarização das condições de trabalho dos professores (as). - Abertura para privatização de instituições públicas de ensino. - Déficit de investimentos para cumprir as metas do Plano Nacional de Educação, Reforma do Ensino Médio, entre outras políticas educacionais.
	Indeterminado (A partir	- Reestruturação curricular, permitindo a flexibilização de conteúdos obrigatórios – ex.: história, geografia, biologia, etc.

Principais políticas relacionadas à educação	Período de aplicação	Impactos na educação e Formação docente
LEI nº 13.415/2017 (Reforma do Ensino Médio)	de 2016)	- Aumento da carga horária do ano letivos, sem condições físicas e estruturais das escolas contemplarem ensino de tempo integral. - Promove uma educação voltada para o ensino técnico, acrítico e sem perspectiva de mudança social. - Abertura para financiamentos de bancos e instituições privadas na educação pública (estreitando laços neoliberais com a educação pública).
Organizações Sociais na gestão das escolas públicas	Se aprovado- tempo indeterminado	- Esvaziamento do princípio da gestão democrática. - Falácia de melhoria na qualidade educacional. - Desvalorização dos profissionais da educação. - Prejuízos ao processo de ensino e de aprendizagem. - Falta de transparência e criminalização dos movimentos sociais. - Desmantelamento da educação pública.
Organizações Sociais na gestão das escolas públicas	Se aprovado- tempo indeterminado	- Esvaziamento do princípio da gestão democrática. - Falácia de melhoria na qualidade educacional. - Desvalorização dos profissionais da educação. - Prejuízos ao processo de ensino e de aprendizagem. - Falta de transparência e criminalização dos movimentos sociais. - Desmantelamento da educação pública.
Militarização das Escolas em Goiás	Não possui tempo de duração	- De 2013 a 2018 houve um aumento de 212% de escolas estaduais geridas pela Polícia Militar no Brasil. - Obrigatoriedade das cobranças de mensalidades em escolas públicas. - Promove o fim da liberdade de expressão, do ensino crítico, da gestão democrática, da diversidade cultural e social, entre outros quesitos para uma educação de qualidade. - Transforma a escola em um ambiente idêntico a de um Quartel - General da Polícia Militar, imponto a ordem e respeito através de duras penas pautadas nos métodos militares, criando assim uma nova pedagógica: a Militar.

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos dados coletados.

Isso deixa claro como o cenário político do país está cada vez mais fragilizado, impondo medidas e adotando características autoritárias e não democráticas. A participação popular é fortemente reprimida, seja pela via burocrática e política como também no direito de livre manifestação, nas ruas, escolas e universidade. Macêdo (2011, p.79) aponta que:

> As ações de governo podem ser amplas ou restritas, centralizadas ou descentralizadas. (...) no governo democrático, onde impera o princípio da igualdade, as políticas são amplas/ universalistas e, em geral pressupõem a participação da sociedade, ou seja, são construídas horizontalmente. As demandas da população são atendidas.

Pelo seu caráter impositivo, as políticas do governo Temer são consideradas um ataque ao Estado Democrático de Direito, direcionados às classes oprimidas, economicamente menos favorecidas da sociedade, visando, por exemplo, implantar, a qualquer custo, a Reformas da Previdência (PEC 287/2016 na Câmara), Reforma Trabalhista (Projeto de Lei da Câmara n° 38, de 2017), Reforma do Ensino Médio (em vigor como Lei nº 13.415/2017), Proposta de Emenda Constitucional 55 (em vigor como EC 95/2016), que acabaram sendo sancionadas com exceção da Reforma da Previdência que ainda está em tramitação no congresso.

Resistência popular e estudantil

Para chegar a uma educação de qualidade, é preciso que haja a resistência do povo aos ataques contra seus direitos, que se configuram em políticas reacionárias antagônicas à perspectiva crítica e libertadora. Para afirmar isso, é preciso desmistificar que a educação é neutra. Para Freire (1984), é tão impossível negar a natureza política do processo educativo quanto negar o caráter educativo do ato político. Nesse sentido, uma política educacional se constitui principalmente como um aparato do estado para impor sua ideologia dominadora sobre os indivíduos de uma sociedade. Segundo Macêdo (2011, p. 81):

> A política educacional constitui-se em um mecanismo de sustentação/ reprodução do capital, todavia, como todo processo histórico-social, o capitalismo traz em si a contradição, pois ao se garantir o direito a educação transcende-se o caráter regulatório e ideológico implícito nesta política de estado e abre-se uma brecha para potencializar a luta de classe popular pelos demais direitos, individuais, sociais e políticos.

Estudantes e trabalhadores se uniram contra todas as medidas impostas. Nas ruas, nos colégios, nas faculdades e nas universidades foram organizados diversos protestos e foram emitidas pelos movimentos sociais, sindicais e estudantis cartas e moções direcionadas aos órgãos públicos, apontando a inconstitucionalidade de tais medidas (EC 55, MP 746, PEC 287/2016, Projeto de Lei nº 6.787/2016, dentre outras), assim como a reprovação nas consultas eletrônicas feitas pelo próprio Senado Federal em seu sítio na internet.

Motivados a barrar cada uma dessas propostas, os movimentos populares se organizaram por meio de sindicatos, juventudes, Grêmios Estudantis, Diretórios Centrais dos Estudantes, Centros Acadêmicos de Cursos e outros movimentos populares que se uniram em mobilizações pelo país inteiro. Essa mobilização gerou, no segundo semestre de 2016, um intenso processo de ocupações das escolas e universidades públicas.

As ocupações das escolas secundaristas já vinham sendo usadas como uma significativa forma de protesto, inspirados nas lutas de países vizinhos como Chile e Argentina. Em 2011, mais de 700 escolas foram ocupadas por estudantes secundaristas chilenos, em protesto por passe livre estudantil e por melhorias na educação pública. A exemplo dessas lutas, estudantes secundaristas do Estado de São Paulo - Brasil se uniram em 2015 contra a reorganização escolar proposta pelo governo local e contra a corrupção com o dinheiro das merendas escolares. Mais de 150 escolas foram ocupadas por todo estado.

Em Goiás - Brasil, também houve um massivo movimento no final de 2015, em que as escolas do estado foram ocupadas pelos secundaristas e universitários, que eram contra a proposta do governador de passar a gestão das escolas do estado para Organizações Sociais (OS), através do Aviso de Chamamento n° 3/2016. Segundo Silva, Soares, Echalar & Guimarães (2017, p. 8) "a gestão escolar não pode ser pautada na lógica empresarial, visto que o ambiente escolar é lugar de diversidade cultural e social". Os alunos, sujeitos no processo educativo, teriam suas individualidades ignoradas, sendo tratados como meros clientes. Os professores também não teriam seguridade alguma de emprego, sendo extinto o concurso público e tendo diversos direitos cassados pela proposta. Somado a isso, também há até nos dias de hoje uma forte tendência do governo em militarizar as escolas públicas, no intuito de impor a ordem, respeito e medo aos estudantes de Goiás, reforçando o caráter impositivo e excludente da educação no estado. Tanto no estado de São Paulo como no estado de Goiás, importantes conquistas foram obtidas, mostrando a força dos estudantes na luta pela educação pública.

É possível caracterizar uma ocupação como um movimento em que os estudantes adentram o ambiente físico das escolas e nele permanecem, até que suas demandas e reivindicações sejam atendidas ou até que o estado use de seu aparato repressor para obrigá-los a sair da escola. Inspirado nessas lutas, estudantes ocuparam em torno de mil escolas e centenas universidades no ano de 2016, contra a precarização proposta pelo governo. Em Goiás, as ocupações e protestos somaram-se novamente contra as OS e militarização das escolas estaduais.

Impactos na formação docente

O ME tem se constituído como importante espaço formativo de cidadania e pensamento crítico dos estudantes que nele atuam por uma sociedade justa e democrática. O sujeito em formação como professor de matemática sofre, ao longo desse processo, transformações importantes, que determinam de que forma ele irá compreender o modelo de ensino no qual está inserido, adquirindo saberes essenciais para propor novas medidas para superar a precarização a qual a educação é submetida, na qual é possível perceber que "(...) de fato o movimento estudantil contribui nesta formação, a partir da inserção dos alunos nos debates políticos, nas lutas por ideais coletivos, na sua condição de pertencimento a uma sociedade desigual e que pode ser sujeito de mudanças" (Bezerra & Xypas, 2014, p.11)

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás, os estudantes têm sido atuantes nas lutas dentro e fora do seu ambiente de estudo. Partindo das ocupações escolares e universitárias ocorridas nos anos de 2015 e 2016, analisamos e refletimos aqui como se deu a atuação dessa organização estudantil e como isso traz aspectos importantes para a formação desses futuros professores de matemática, uma área muito endurecida na perspectiva crítica e social. Preconizamos que a matemática deve ser ensinada para além de cálculos e da lógica formal, entendida como meio fundamental para leitura crítica de mundo. Nessa direção Skovsmose (2010, p. 18) aponta que:

> A abordagem pedagógica de Freire ilustra a ideia de que há uma conexão entre as qualidades de comunicação e as qualidades de aprendizagem. Freire quis desenvolver certas qualidades de aprendizagem. Os alunos não deveriam somente aprender a ler e a escrever, mas a interpretar criticamente a situação social e política.

Raízes positivistas na Educação

No Brasil, a educação sofre até hoje com as influências das ideias positivistas na organização escolar e curricular, assim como a própria formação do professor e aluno de matemática. O positivismo chegou ao Brasil no final do séc. XIX e no início do séc. XX, difundido principalmente na Academia Militar do Rio de Janeiro. Para Motta & Brolezzi (2005), a tradição humanística clássica foi substituída pela científica, com destaque para as ciências matemáticas.

Silva (1999) elenca quatro pontos que podem descrever as algumas características da filosofia positivista: 1. O estudo da ciência positiva fornece-nos o único meio racional de pôr em evidência as leis lógicas do espírito; 2. a filosofia positiva deve conduzir a uma transformação do nosso sistema de educação; 3. o ensino científico pode ser considerado como a base da educação geral, verdadeiramente racional; 4. a filosofia positiva pode ser considerada como a única base sólida da reorganização da sociedade. Logo, a matemática passa a influenciar também na maneira como todo o currículo escolar e científico é visto, pensado e organizado.

Atualmente, é comum no contexto escolar os alunos não enxergarem utilidade prática para a matemática, pois ela é vista apenas como um corpo de conhecimentos abstratos que dificilmente serão úteis no cotidiano do sujeito. Em grande parte, isso se deu pelo fato de essa área do conhecimento ser colocada como soberana em relação a outras, em que só a partir do sentido lógico matemático e racional as ciências e a sociedade se encontrariam em desenvolvimento.

Reduzir o ensino a um corpo de conhecimentos, que são aprendidos de forma cronológica e ordenada, faz com que a educação se torne, sobretudo, distante do seu objetivo social, emancipatório e crítico. O racionalismo ainda predomina no ensino da matemática, no qual professores encontram dificuldades em ensinar a matemática de maneira a considerar um caráter crítico e útil para a vida cotidiana, social e política.

■ O aspecto formativo do movimento estudantil

As ações estudantis foram apresentadas com o intuito de perceber uma alternativa prática para ruptura com a formação positiva enraizada no sistema educacional brasileiro. Isso porque consideramos que o Movimento Estudantil, nos seus espaços de atuação, se constitui como importante ferramenta de formação docente, no sentido em que o ato de rejeitar as políticas educacionais de cunho antidemocrático significa, sobretudo, assumir uma posição política e crítica sobre a educação, a sociedade e, principalmente, sobre a sua própria formação.
É preciso que o estudante tenha contato com experiências além da sala de aula, desenvolvendo, assim, competências que vão além do que é colocado no currículo. Perrenoud *et al.*(2002) define uma competência como a aptidão para enfrentar uma família de situações análogas, de uma forma correta, rápida, pertinente e criativa, mobilizando múltiplos recursos cognitivos: saberes, capacidades, micro competências, informações, valores, atitudes, esquemas de percepção, de avaliação e de raciocínio.

Dessa forma, na atuação política o licenciando desenvolve diversas competências em que o corpo de conhecimentos e seus saberes são igualmente importantes e que devem se organizar para que se chegue ao objetivo maior, que é defender a educação pública de qualidade. Segundo Freire (2005, p.156):

> [...] não há outra posição para o educador ou educadora progressista em face da questão dos conteúdos senão empenhar-se na luta incessante em favor da democratização da sociedade, que implica a democratização da escola como necessariamente a democratização, de um lado, da programação dos conteúdos, de outro, da de seu ensino.

No convívio com a luta diária e com pessoas com concepções políticas e ideológicas parecidas ou divergentes, o educando se encontra num processo de desenvolvimento de certas competências, que serão muito importantes para o seu desenvolvimento como professor progressista. Listamos aqui alguma delas, no intuito de provocar a reflexão de como isso pode influenciar no posicionamento do professor(a) no ato de educar, em que será capaz de: 1) ter interesse em crescer não só intelectualmente, mas também pessoalmente; 2) desenvolver habilidades de expressão de fala e pensamentos; 3) ter poder de argumentação para defender seus ideais; 4) construir conhecimentos por meio do diálogo; 5) assumir a responsabilidade de seus atos, falhas e acertos; 7) educar para uma formação matemática voltada para a cidadania; e 8) saber lidar com discussões sociais nas aulas de matemática e relacionar o conteúdo com diversas áreas do saber.

Essas competências são desenvolvidas no momento em que o estudante de licenciatura passar a ter uma atuação política incisiva em seu meio, seja na defesa da Universidade, curso, escola ou educação como um todo. Todos esses elementos acabam também por provocar, em partes, uma ruptura com a formação positivista que obtiveram até o momento. Neste sentido, a formação docente também ocorre no momento em que estudantes se posicionam criticamente sobre as políticas impostas pela atual presidência e alguns governos locais, não as aceitando, por acreditar que estas estão postas contra a autonomia de uma educação emancipatória e democrática.

Isso implica em pensar em um programa de ensino democrático para uma sociedade democrática. Skovsmose (2010) relaciona a pedagogia de Freire com o ensino da matemática, em que a literacia vai mais além do que a competência de ler e escrever, mas pode se referir também à competência de interpretar uma situação como algo que pode ser alterado ou à identificação de mecanismos de repressão. Logo, a matemática tem um papel correspondente à noção de literacia na formulação de Freire.

Ao se unirem com os trabalhadores (as) da educação, formam-se novos sujeitos com experiência prática de resistência às imposições do sistema político-educacional deste país, sendo essa a que ainda sustenta a perspectiva de luta de quem defende uma educação de qualidade social para todos(as), que, apesar de atualmente influenciada por diversos fatores positivistas e neoliberais, ainda tem abertura para o mínimo de criticidade a ser impactado às novas gerações deste país. Então, é importante que quem se forme como professor esteja consciente de toda a repressão e imposição em uma sociedade capitalista, e que a educação tende a atender os interesses das classes burguesas. No entanto, ao mesmo tempo, o professor precisa estar disposto e apto a aproveitar os espaços educacionais para levar uma visão crítica a todo esse sistema, sempre deixando a esperança de luta e mudança por igualdade social. É importante destacar que o processo educativo deve ser inclusivo e não reprodutivo!

Resultados

A matemática infelizmente ocupa uma posição de destaque na manutenção do sistema ora vigente. Hoje, a escola pública adquire um forte caráter excludente, tendo a matemática como base dessa exclusão. As frases que escutamos – como: "quem sabe matemática é mais inteligente"; "os professores de matemática não tem interesse em política e, em geral, são 'da direita'"; "só tem interesse pelo social os professores e estudantes das humanas"; "os estudantes e professores das humanas só querem confusão", dentre outras até de cunho machistas como "as mulheres são ruins de conta" – possuem a marca das ideias positivistas, impregnadas no sistema educacional e na forma de conceber o ensino e a aprendizagem.

O professor de matemática está totalmente incluído na tarefa de romper com o programa de ensino tecnicista, pois com o ensino da matemática voltado para a formação crítica é possível também potencializar uma visão menos egoísta que o educando pode ter da realidade, passar a questionar e não só aceitar as coisas como elas são, como é comumente feito no ensino com raízes positivistas, como apontam Motta & Brolezzi (2005).

O educador, que é esclarecido com suas concepções políticas e que tem a coragem de assumi-las, saberá que o conhecimento não deve ser meramente repassado, mecanicamente seguindo uma ordem sequencial endurecida. Desde que suas concepções tenham o caráter progressista, de educar para cidadania, a prática docente se volta para a liberdade e para a emancipação do educando. Adquire muito provavelmente olhares interdisciplinares e transdisciplinares, pois o conhecimento científico não estará mais desvinculado do real e dos embates sociais e políticos vivenciados e discutidos pelos alunos e professores. Isso já afirmava Freire (2005; 2008) em suas concepções e lutas por uma educação que liberta.

Em defesa da educação que atenda realmente esses critérios, os professores e alunos vão às ruas e às vias burocráticas para defender seus ideais. Neste sentido, foram as lutas que barraram as Organizações Sociais na educação, que fizeram os estudantes se posicionarem contra a EC 95 e Reforma do Ensino Médio, bem como contra a Reforma da Previdência e Trabalhista, entre outras séries de projetos do governo com pressupostos conservadores e unilaterais. São essas lutas que motivam e conscientizam os professores em formação sobre como sua atuação em sala deverá ser caracterizada por uma prática entrelaçada com suas concepções renovadoras e não reprodutivistas das classes sociais, como os educadores Freire (2005) e Skovsmose (2010) defendem. O último, em especial, rumo a uma educação matemática criativa, crítica, útil, como ferramenta de libertação e não de opressão, de inclusão e não de exclusão.

É importante que quem se forme como professor esteja consciente de toda repressão e imposição em uma sociedade capitalista, que a educação tende a atender aos interesses das classes burguesas. Ao mesmo tempo, o professor precisa estar disposto e apto a aproveitar os espaços educacionais para levar uma visão crítica a todo esse sistema, sempre deixando a esperança de luta e mudança por igualdade social.

Vale ressaltar que, dos acontecimentos citados, foram obtidos importantes resultados para a educação em Goiás, como foi o fortalecimento do movimento secundarista, que ocupou e barrou a implantação das Organizações Sociais na gestão das escolas Públicas. Nas ocupações universitárias, o movimento estudantil se fortaleceu, possibilitando a reestruturação de Centros e Diretórios Acadêmicos, como, por exemplo, do Diretório Acadêmico da Matemática, que tem usado desses espaços de debate para levar uma formação mais crítica aos estudantes que se encontram em formação inicial.

Conclusões

Pelos documentos oficiais publicados em 2016 e 2017, pelas observações em *lócus* e análises correlacionadas dos artigos selecionados ao tema reafirmamos a necessidade que a formação inicial de professores de Matemática precisa quebrar com o paradigma positivista e reorganizar seus currículos investindo em perspectivas libertadoras, autônomas, criativas e críticas. Os movimentos estudantis que se estabeleceram no governo brasileiro de Temer culminaram no grito dos estudantes, em especial, dos que cursam Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Goiás, que marcam as indicações de um início de rompimento parcial com educação positivista que predomina no Brasil e clamam por uma educação crítica, libertadora, inclusiva e não opressora, o que incide na formação de professores de matemática. Skovsmose, Freire e Motta & Brolezzi, nos ajudaram a fundamentar o nosso marco teórico e o debate, para juntos, refletirmos sobre os fatos e os desafios relacionados aos futuros docentes de Matemática.

Com todas essas mudanças vivenciadas no contexto político brasileiro, principalmente durante o governo Temer, é impossível acreditar na neutralidade da educação. Tudo que é proposto tem uma intenção por trás, sendo que, atualmente, os interesses predominantes seguem a lógica do mundo capitalista, que é fornecer uma educação pobre aos pobres, para que estes vejam sua única possibilidade de crescer na perspectiva do trabalho puramente técnico, subordinado às injustiças promovidas pela exploração da força de trabalho.

É preciso que o professor, formado ou em formação, se envolva em um crescente movimento de luta pela educação pública, percebendo que, para além da disciplina que ele irá ministrar, é preciso carregar uma série de valores educacionais para promover uma educação integral, de qualidade, crítica, reflexiva e cidadã para todas e todos. Freire (2009) aponta algumas características que um educador pode cumprir para uma prática libertadora e progressista: coragem, confiança, respeito a si e aos outros, criticidade, aceitação do novo e rejeição a qualquer forma de preconceito, bom-senso, humildade, tolerância, defesa dos direitos dos educadores, convicção de que a mudança é possível, compreender que a educação é uma forma de intervenção no mundo, liberdade, autoridade, reconhecer que a educação é ideológica, entre outros. Essas competências são vistas também como as algumas das indicadas por Perrenoud *et a*l.(2002). Dessa forma, o Movimento Estudantil além de se constituir como um importante instrumento popular para regulação das políticas educacionais, também é espaço para formação crítica de sujeitos que serão os futuros professores(as).

Referências

Bezerra, M. R.& Xypas, C. (2014). *O Movimento Estudantil Como Espaço de Formação do Educando Para Cidadania: Experiências e Opiniões de Docentes do CAMEAM/UERN,* Editora Realice. Recuperado em 30 de abril, 2018, em http://editorarealize.com.br/revistas/fiped/trabalhos/Modalidade_2datahora_25_05_2014_20_53_33_idinscrito_174_96cc6ee926b837bf03a2bbd8f83bc91d.pdf

Brolezzi, A & Mota, C. (2005). *A Influência do Positivismo na História da Educação Matemática no Brasil.* Recuperado em 31 de agosto de 2018 em http:// www.ebah.com.br/content/ABAAAgGlcAG/a-influencia-positivismo-na-historia-educacao-matematica-no-brasil

Emenda Constitucional Nº 95 da República Federativa do Brasil. (2016). De 15 de Dezembro de 2016. Recuperado em 31 de agosto de 2018, em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/Emendas/Emc/emc95.htm

Fonseca, M. P. (2010). *O Movimento Estudantil como Espaço Dialógico de Formação*. Universidade de Brasília, Brasília: Monografia.

Freire, P. (1984). *A importância do Ato de Ler em três artigos que se contemplam*. São Paulo: Autores Associados: Cortez.

Freire, P. (2005). *Pedagogia da Esperança um reencontro com a pedagogia do oprimido*. São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (2008). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. Rio de Janeiro/ São Paulo: Paz e Terra.

Lei Nº 13.415, de 16 de Fevereiro de 2017 *da República Federativa do* Brasil (2017).Recuperado em 31 de agosto de 2018 em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/Lei/L13415.htm

Macêdo, L. (2011). Estado, Sociedade e Política Educacional Brasileira: Uma Possível Análise. *Espaço do Currículo 4(1), 78-91*. Recuperado em 24 de fevereiro, 2019, em http://www.periodicos.ufpb.br/index.php/rec/article/viewFile/10545/5832

Medida Provisória nº 746/2016, de 22 de setembro de 2016 *da República Federativa do* Brasil (2016). Recuperado em 24 de fevereiro de 2019 em https://legis.senado.leg.br/sdleg-getter/documento?dm=2517992&ts=1547877004651&disposition=inline

Perrenoud P; Thurler M.G; Macedo L ; Machado N. J & Allessandrini C.D. (2002). *As Competências para Ensinar no Século XXI*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Projeto de Lei da Câmara n° 38, de 2017 - Reforma Trabalhista. *da República Federativa do* Brasil (2017).Recuperado em 31 de agosto de 2018 em https://www25.senado.leg.br/web/atividade/materias/-/materia/129049

Projeto de Lei n.º 6.787/2016, de 2016 *da República Federativa do* Brasil (2016). Recuperado em 24 de fevereiro de 2019 em https://www.camara.leg.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra;jsessionid=80046BC660E2BE7AA8DD36A9DABE33BD.proposicoesWebExterno2?codteor=1550297&filename=Avulso+-PL+6787/2016

Proposta de Emenda à Constituição 287/2016 da República Federativa do Brasil (2016). Recuperado em 31 de agosto de 2018 em http://www.camara.gov.br/proposicoesWeb/prop_mostrarintegra?codteor=1514975&filename=PEC+287/2016

Proposta de Emenda à Constituição nº 55/2016, de 2016 *da República Federativa do* Brasil (2016). Recuperado em 24 de fevereiro de 2019 em https://legis.senado.leg.br/sdleg-getter/documento?dm=3877571&ts=1547872853209&disposition=inline

Rocha, D. R. (2013). *O impacto dos Movimentos Sociais na formação e atuação docente: construções dialógicas para uma educação emancipatória e libertária.* Universidade de Brasília, Brasília: Monografia.

Ruffato, L. (2017). O sombrio legado de Temer. *El País*. [online] Recuperado em 16 de maio de 2018 em https://brasil.elpais.com/brasil/2017/11/15/opinion/1510748409_938683.html

Silva, C. (1999). *A Matemática Positivista e sua difusão no Brasil.* Vitória: EDUFES.

Silva, V., Soares, G., Echalar, A.,& Guimarães, S. (2017). *Organizações sociais em Goiás: o neotecnicismo e as implicações para o ensino de Ciências*. Recuperado em 31 de agosto de 2018 em http://www.abrapecnet.org.br/enpec/xi-enpec/anais/resumos/R1986-1.pdf

Skovsmose, O. (2010). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Souza, F. (1998). Movimento Estudantil Em Biblioteconomia: Um Olhar Sobre UFSC ou a Importância do Movimento Estudantil para a Formação Profissional. *Editorial do Encontros Bibli, 3*(6),48-62. Recuperado em 30 de abril, 2018, em https://periodicos.ufsc.br/index.php/eb/article/view/28

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

CONHECIMENTOS DE PROFESSORES SOBRE PROBABILIDADE: INTERPRESTAÇÃO DAS RESPOSTAS A UMA ATIVIDADE COM EVENTOS INDEPENDENTES

TEACHERS' KNOWLEDGE ON PROBABILITY: INTERPRETATION OF THE ANSWERS TO AN ACTIVITY WITH INDEPENDENT EVENTS

Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro, Angélica da Fontoura Garcia Silva, Rosana Nogueira Lima
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN (Brasil).
gracilenepinheiro@gmail.com, angelicafontoura@gmail.com, rosananlima@gmail.com

Resumo
Este texto traz discussões e reflexões a respeito de evidências do conhecimento de professores, que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, relativos à Probabilidade, explicitados a partir da resolução de uma situação na qual estavam envolvidas variáveis aleatórias discretas. Objetivou-se olhar para as estratégias adotadas pelos professores ao analisarem a possibilidade de uma associação entre duas variáveis apresentada numa tabela de dupla entrada. Em termos de resultados, observou-se que os argumentos dos professores releram que eles possuíam e faziam uso de ideias intuitivas de probabilidade condicional; e que, em alguns casos, essas ideias estavam caracterizadas sobretudo por opiniões pessoais, levando-os às vezes a uma avaliação equivocada da associação, como discute Chapman e Chapman.

Palavras-chave: ensino de probabilidade, tabela de contingência, conhecimento dos professores

Abstract
This paper shows discussions and reflections about the evidence of mathematics teachers' knowledge with respect to Probability, in the first years of elementary education, all of which is explained from the solution of a situation involving discrete random variables. This study is aimed at analyzing the strategies adopted by the teachers to examine the possibility of an association between two variables presented in a table of double entry. The results showed that teachers' arguments revealed that they had and put into practice intuitive ideas of conditional probability; and, in some cases, these ideas were characterized mainly by personal opinions, leading them, sometimes, to a mistaken assessment of the association, as discussed by Chapman and Chapman.

Key-words: probability teaching. contingency table, teachers' knowledge

Introdução

Este estudo é parte de um projeto de investigação de doutorado que está buscando perceber implicações de um curso de formação continuada para o Desenvolvimento Profissional Docente. Participam dessa investigação professores da rede estadual de ensino de São Paulo – Brasil, que ministram aulas de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Apresentamos, nesta comunicação, os resultados suscitados a partir da análise das respostas dos professores a uma atividade por meio da qual são explorados conceitos ligados à Probabilidade. A atividade traz uma situação representada numa tabela de contingência contendo eventos independentes.

A relevância deste estudo centra-se nas discussões referentes às questões ligadas ao ensino e à aprendizagem das ideias que sustentam o conceito de Probabilidade, visto que investigadores em Educação Matemática têm assinalado que os professores possuem pouco conhecimento e/ou domínio, tanto em relação à compreensão do conceito – Conhecimento do conteúdo – quanto ao ensino – Conhecimento Pedagógico.

Tal problemática está sendo discutida, sobretudo, em razão da importância em iniciar o estudo de noções ligadas à Probabilidade e à Estatística ainda nos primeiros anos de escolarização, exigindo do professor conhecimentos para o ensino. Dias (2004, p. 144), por exemplo, aponta duas dificuldades pedagógicas que os professores enfrentam quanto ao desenvolvimento desse ensino: a primeira refere-se à novidade que a sua inserção representa, pois "obriga" o professor a quebrar hábitos, sendo forçado a buscar novas informações e atividades para serem desenvolvidas em sala de aula; a segunda dificuldade está relacionada à insuficiência e/ou à inexistência de formação específica para desenvolver o ensino de Probabilidade.

A esse respeito, Batanero, Godino e Roa (2004) argumentam, com base em experiência em cursos de formação de professores para o ensino primário e secundário, que os professores de Matemática não possuem formação específica na educação estatística e que essa é a realidade de muitos países. Os estudos de Campos e Pietropaolo (2013) corroboram com essas pesquisas, à medida que defendem haver necessidade de avanços no que se refere aos conhecimentos do conteúdo e pedagógico do conteúdo para o ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental ao mesmo tempo em que defendem investimentos em cursos de formação inicial e continuada para professores. Nessa direção, Batanero (2013) argumenta que a formação do professor é a chave para o sucesso da proposta de ensino de Probabilidade na escola e que ela deve contemplar o estudo do raciocínio das crianças a respeito do assunto.

Fundamentação teórica

A pesquisa, em desenvolvimento, está apoiada, em relação à Probabilidade, em Nunes, Bryant, Evans e Barros (2011), que discutem a compreensão de demandas cognitivas, cuja abordagem se relaciona às ideias que formam o conceito de Probabilidade: entendimento da aleatoriedade; elaboração do espaço amostral; comparação e quantificação de probabilidades; e o entendimento da correlação. Buscamos apoio teórico também em Godino, Batanero e Cañizares (1996), que expõem diferentes concepções de Probabilidade; e Gal (2005) sobre o Letramento Probabilístico. Esse autor propôs um modelo teórico formado por cinco componentes cognitivos e três componentes disposicionais que devem ser trabalhados pelo professor com seus alunos, com vistas a propiciar o desenvolvimento do letramento probabilístico.

Em relação à formação e às questões pedagógicas para o ensino, nossa investigação está pautada nos estudos de Ball, Thames e Phelps (2008), que discutem categorias de análise para o Conhecimento do Conteúdo Específico e Conhecimento do Conteúdo Pedagógico; e em Serrazina (2013), que trata do objeto da reflexão e o relaciona com o conhecimento.

Particularmente, no que se refere aos resultados apresentados nesta publicação, buscamos em Nunes et al. (2011) e em Cañadas, Batanero, Contreras e Arteaga (2011) fundamentação para discutir a compreensão dos professores a respeito da correlação a partir da análise da associação entre as variáveis apresentadas em uma tabela de dupla entrada.

A compreensão da associação é adquirida apenas quando se tem a compreensão do conceito de probabilidade (Inhelder; Piaget, 1955).

As tabelas de dupla entrada ou tabelas de contigência se constituem como um recurso que pode auxiliar profissionais de diferentes áreas na tomada de decisões.

Em investigações sobre problemas de Probabilidade, Nunes e Bryant (2011) discutem que entre a certeza de eventos determinados e a incerteza de eventos aleatórios existem associações significativas entre eventos e que essas associações pertencem ao mundo das correlações; e ainda que, embora essas (as correlações) não possam levar à certeza, elas podem ser muito úteis em situações do dia a dia e nas ciências, pois do ponto de vista do raciocínio correlacional:

> Se não há nenhuma relação entre dois eventos, A e B, ainda é possível que possam ocorrer em conjunto por acaso. O objetivo de uma análise da correlação entre dois eventos é estabelecer se eles co-ocorrem com mais frequência do que seria de esperar por acaso. (Nunes e Bryant, 2011, p. 5).

Esses mesmos autores apoiados em Ross e Cousins, (1993), afirmam que o raciocínio correlacional exige o reconhecimento de que as relações entre as variáveis não são absolutas, mas existem em graus, por isso envolvem raciocínio probabilístico. Assim, o grau de relacionamento entre duas variáveis pode ser determinado pelas frequências relativas nas tabelas de dupla entrada.

Metodologia

As informações coletadas para análise foram produzidas a partir de uma situação, por meio da qual é possível explorar a compreensão da correlação. Assim, nela buscamos investigar as estratégias adotadas pelos professores quando analisam a possibilidade ou não de uma associação entre duas variáveis apresentada numa tabela de dupla entrada contendo eventos independentes – Figura 1.

uestão: Observe a seguinte tabela de dupla entrada:

	Pessoas que tem alergias de pele (A)	*Pessoas que não te alergias de pele (B)*
Pessoas que fazem exercício regularmente (X)	*2*	*10*
Pessoas que não fazem muito exercício (Y)	*15*	*3*

Jsando **apenas** as informações da tabela, você acha que existe uma relação
ıão fazer exercícios e ter alergias?

☐ Sim ☐ Não

Explique, **usando apenas as informações da tabela**, por que você pensa ass

Figura 1: Protocolo da atividade
Fonte: Acervo dos pesquisadores

Essa situação foi apresentada com base em Nunes e Bryant (2011), na oficina *"A classificação de respostas abertas em pesquisa"* desenvolvido no ano de 2012, em visita deles ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirantes – UNIBAN - SP

A situação propõe que os professores façam uma análise, com base nas informações contidas na tabela (número de pessoas que têm ou não alergia de pele e número de pessoas que fazem ou não fazem exercício regularmente), sobre a existência de uma relação entre a ocorrência do evento "não fazer exercício (Y) e ter alergia de pele (A); e em seguida, explicite, também com base nas informações da tabela, qual foi a sua estratégia de resolução.

Análise dos resultados

Nunes e Bryant (2011) discutiram essa atividade com base nos níveis de dificuldades observados por Pérez Echeverría (1990) e na classificação apresentada por Batanero, Estepa, Godino e Green (1996).

Para a análise dos resultados desta investigação, visitamos os estudos desses investigadores e constatamos que Pérez Echeverría (1990) fez um levantamento de pesquisas, anteriores à sua, sobre as estratégias de raciocínio de associações e as classificou em cinco níveis de dificuldade:

- Nível 1: usa somente uma célula, usualmente (a)
- Nível 2: Compara (a) com (b) ou (a) com (c)
- Nível 3: Compara (a) com (b) e (a) com (c)
- Nível 4: Usa as quatro células, fazendo comparações aditivas
- Nível 5: Usa as quatro células, fazendo comparações multiplicativas.

Constatamos também que Estepa (1993) e Estepa e Batanero (1995) realizaram um estudo sobre as estratégias de estudantes e as descreveram em categorias: estratégias corretas, estratégias parcialmente corretas e estratégias erradas.

Olhamos, sobretudo, para as estratégias consideradas corretas: (E1) comparar todas as distribuições de frequência relativa condicional de uma variável para os diferentes valores da outra variável; (E2) comparar todas as frequências relativas condicionadas de uma variável para um único valor da outra variável com a frequência marginal da primeira variável e (E3) comparação de possibilidades para e contra B em cada valor de A.

Visitando também os estudos de Chapman e Chapman (1969), pudemos observar que eles nos alertam que muitas pessoas formam suas próprias teorias sobre a relação entre variáveis apresentadas em uma tabela de contingência, o que, segundo os autores, as impedem de avaliar corretamente a associação. Assim, a análise da questão pode envolver diferentes ideias ou relações: comparação de quantidades absolutas; razão; e correlação.

O argumento fundamentado na comparação de quantidades pode-se considerar, por exemplo, que a maioria das pessoas que tem alergia – 15 – não fazem exercícios; o fundamentado na análise das razões pode considerar, por exemplo: para as pessoas que fazem exercícios regularmente, o acometimento de alergia é de 1 a cada 5 pessoas; já para as pessoas que não fazem muito exercício a razão é inversa ou seja, 5 alérgicos para cada pessoa que não tem alergia; este argumento é fortemente baseado na ideia de proporcionalidade (nesse caso, há uma relação de proporcionalidade); já o argumento fundamentado na ideia de correlação, pode considerar, por exemplo, que os dois eventos – praticar exercícios regularmente e ter alergia de pele – são eventos independentes.

Em relação aos resultados do nosso estudo observamos que treze professores responderam afirmativamente, considerando haver uma relação entre não fazer exercícios físicos regularmente e ter alergias de pele. As justificativas desses professores a essa afirmação, de maneira geral, apresentam argumentos apoiados na ideia de quantidade, como por exemplo, a Professora Safira, que com base na quantidade, analisou a situação qualitativamente – Figura 2.

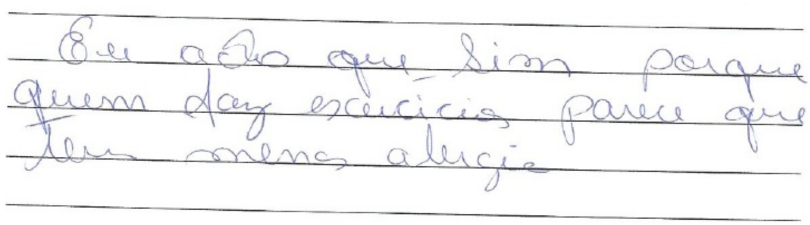

Eu acho que Sim porque quem faz exercicio parece que tem menos alergia

Figura 2: Protocolos exemplares – Professora Safira
Fonte: Acervo das pesquisadoras

Inferimos que a Professora Safira comparou apenas as duas células da tabela; ou observou as quatro células e fez comparações aditivas; fundamentados nas discussões de Estepa e Batanero (1995), deduzimos ainda que a estratégia da professora consistiu em fazer a comparação da frequência absoluta de uma variável para os diferentes valores de outra variável ao invés da frequência relativa.

A Professora Opala – Figura 3 –, embora também não tenha formalizado o seu raciocínio, apresenta indícios de que analisou a associação por meio da frequência relativa, ou seja, comparou todas as distribuições de frequência relativa condicional de uma variável para os diferentes valores da outra variável – Estepa e Batanero (1995).

Porque está demonstrando na tabela que pessoas que praticam algum exercício físico tem menos possibilidade de ter uma alergia e vice-versa.

Figura 3: Protocolo Exemplar – Professora Opala
Fonte: Acervo das pesquisadoras

Outra possibilidade é que ela tenha se apoiado na ideia de razão; nesse caso, inferimos que ela usou intuitivamente as quatro células da tabela para elaborar o seu argumento.

Assim, observamos que os professores, de maneira geral, fizeram associações por meio da comparação entre quantidades absolutas (maior, menor, mais, menos) – *"Porque a* ***quantidade*** *de pessoas que tem alergia e não fazem exercícios é* ***maior*** *do que qualquer outra informação da tabela"*. (Grifos nosso) –; outros fizeram associações com o uso de comparações baseadas na ideia intuitiva de razão.

A professora Esmeralda – Figura 4 – fez uso de apenas uma célula, aquela que tem a maior frequência: *"É provável haver relação"*.

	Pessoas que tem alergias de pele	Pessoas que não tem alergias de pele	
Pessoas que fazem exercício regularmente	2	10	12
Pessoas que não fazem muito exercício	15	3	18

Figura 4: Protocolo Exemplar – Professora Esmeralda
Fonte: Acervo das pesquisadoras

Ainda em relação à estratégia adotada pela professora Esmeralda, inferimos que talvez seja um reflexo do que normalmente é solicitado em atividades contendo tabelas; nas quais é solicitado apenas a identificação de um dado quantitativamente, apresentadas para alunos dos anos iniciais.

Essa atividade pode explorar a ideia de aleatoriedade que já vinha sendo discutida ao longo da formação e que se constitui como primeira demanda cognitiva para compreender a correlação (Nunes e Bryant, 2011); algumas análises poderiam ter sido feitas, como por exemplo: se uma pessoa que faz exercício regularmente for escolhida aleatoriamente, qual seria a probabilidade de a pessoa ter alergia de pele ou não ter alergia de pele; ou ainda qual a probabilidade de a pessoa escolhida fazer exercício regularmente, sendo que tem alergia de pele; ou ter alergia de pele, dado que faz exercício regularmente; entre outras análises.

Dentre os seis professores que afirmaram não haver relação entre as variáveis da tabela, as Professoras Topázio, Lapis Lazúli e Água Marinha apontam indícios de que fizeram o uso da comparação da proporção (percentagem) de pessoas que não fazem muito exercício e que tem alergia de pele (15/17, aproximadamente 89%) à percentagem de pessoas que não fazem muito exercício e o número total (15/18; 83%)

	Pessoas que tem alergias de pele	Pessoas que não tem alergias de pele	
Pessoas que fazem exercício regularmente	2	10	12
Pessoas que não fazem muito exercício	15	3	18
	17	13	

Usando ***apenas*** as informações da tabela, você acha que existe uma relação entre não fazer exercícios e ter alergias?

☐ Sim ☒ Não

Devido a probabilidade de não fazer exercícios e ter alergias ser a mesma.

Figura 5: Protocolo Exemplar – Professoras Topázio, Lapis Lazúli e Água Marinha
Fonte: Acervo das pesquisadoras

Conclusões

A análise mostrou que as justificativas dos professores apresentaram argumentos apoiados na comparação de quantidades absolutas e alguns, apoiados na ideia de razão.

Diante de tais constatações, observamos que os argumentos apresentados pelos professores evidenciaram que seus conhecimentos sobre associação entre as variáveis poderiam estar apoiados, inicialmente, em ideias intuitivas, caracterizadas por opiniões pessoais, mas também que eles possuíam ideias intuitivas de probabilidade condicional no contexto de análise de tabela de dupla entrada ou tabela de contingência.

Para analisar associações, é preciso estabelecer quais são os casos possíveis e quais são os casos que confirmam ou vão contra a hipótese de uma associação entre as variáveis (Nunes e Bryant, 2011). Embora isso não tenha ocorrido explicitamente, julgamos que os professores apresentaram ideias favoráveis à compreensão de conceitos envolvidos no raciocínio correlacional: eventos aleatórios e não aleatórios; espaço amostral; raciocínio proposicional (busca de informações relevantes reação às contradições); quantificação das probabilidades; e compreensão de relações inversas.

Agradecimento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Ball, D., Thames, M. H., e Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*, 389-407.

Batanero, C. (2013). La Comprensión de La Probabilidad em los niños: ¿Qué podemos aprender de La investigación? En J. A. Ferenandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, F. Viseu, (EDS.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. (pp. 1-13). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Recuperado el 10 de maio de 2017 de http://www.ugr.es/~batanero/pages/formacionprofesores.html.

Batanero, C., Godino, J. D. e Roa, R. (2004). Training Teachers to Teach Probability. *Journal of Statistics Education*, 12, (1), 1-15. Recuperado el 23 de fevereiro de 2018 de https://tandfonline.com/loi/ujse20.

Bryant, P., Nunes, T., Evans, D., Gottardis, L. e Terlektsi, M. E. (2011). *Teaching primary school children about probability. Teacher Handbook.*

Campos, T. M. M. e Pietropaolo, R. C. (2013). Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In R. Borba e C. Monteiro (Orgs.), *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática.* Capítulo 2, (pp. 55-91), Recife: Universidade Federal de Pernambuco-UFPE.

Cañadas, G., Batanero, C., Contreras, J. M. e Arteaga, P. (2011). Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicologia. Educación Matemática, 23(2), 5-31. México ago. *versión impresa* ISSN 1665-5826. Recuperado el 12 de maio de 2017 de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000200002.

Chapman, L. J. e J. P. Chapman (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid Psychodiagnostic signs, *Journal of Abnormal Psychology*, 74, 271-280.

Dias, A. L. B. (2004). *Projeto Gestar: ensino de probabilidade*. Brasília: MEC.

Estepa, A. (1993), *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Estepa Castro, A. e Batanero Bernabeu, M. C. (1995). Concepciones Iniciales sobre la Associación Estadística. *Enseñanza de Las Ciencias*,13(2),155-170.

Gal, I. (2005). *Exploring probability in school:* Challeges for teachingand learning. 39-63 p.

Godino, J. D., Batanero, C. e Cañizares, M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. España: Editorial Síntesis.

Inhelder, B. y J. Piaget (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent*, París, Presses Universitaires de France.

Nunes, T., Bryant, P. (2011). Understanding risk and uncertainty: the importance of correlations. *EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 2 (2), 1-24. Recuperado el 12 de janeiro de 2018 de https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/issue/view/143.

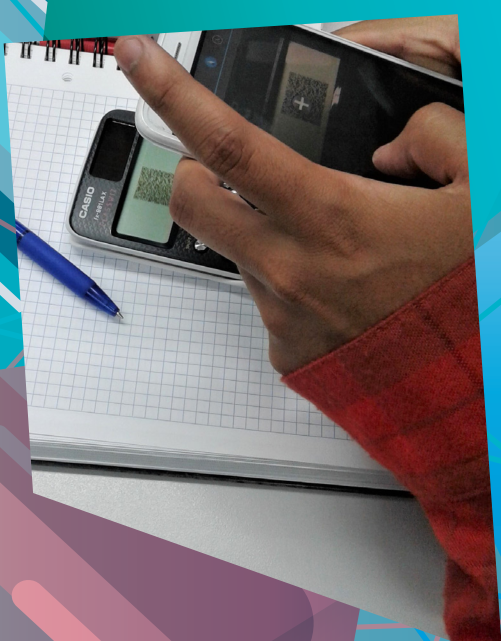
Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.

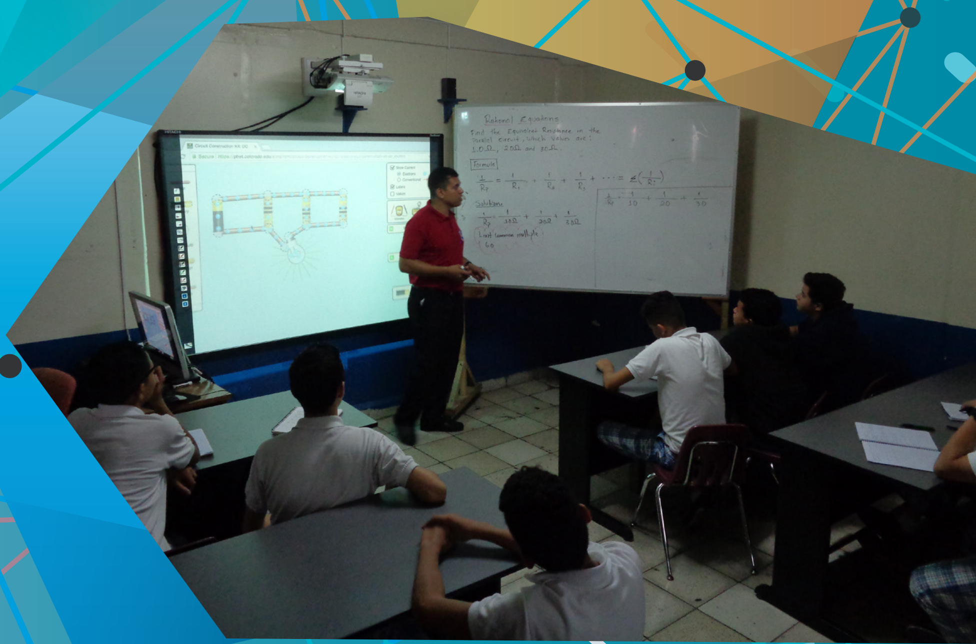
Ross, J.A. and Cousins, J. B. (1993). Enhancing secondary school students' acquisition of correlational reasoning skills. *Research in Science and Technological Education*, 11(2), 191–205.

Serrazina, M. (2013). O Programa de Formação Continuada em Matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. *Da Investigação às Práticas, 3(2)*, 75-97. Recuperado el 15 de setembro de 2014 de http://www.eselx.ipl.pt/cied/publicacoes/.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS





UN CURSO HIBRIDO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA ADAPTATIVO

AN HYBRID AND ADAPTIVE COURSE OF PROBABILITY AND STATISTICS

Rubén-Darío Santiago-Acosta, Carlos-Daniel Prado-Pérez
Tecnológico de Monterrey (México)
ruben.dario@itesm.mx, cprado@itesm.mx

Resumen
En este trabajo se presenta un curso híbrido de probabilidad y estadística basado en aprendizaje adaptativo. El objetivo es fortalecer las competencias en estudiantes de ingeniería relacionadas con el uso de modelos probabilísticos y herramientas de análisis estadístico. El curso se estructuró en doce capítulos que contienen: material electrónico de apoyo, videos explicativos, prácticas de experimentación computacional de conceptos, entrenador de ejercicios, actividades integradoras y de evaluación. El sistema de evaluación se construyó mediante programas interactivos que utilizan gamificación y/o aprendizaje adaptativo. En el curso se fomenta el uso de los paquetes Mathematica y Excel porque los estudiantes pueden analizar, simbólica y gráficamente, soluciones de ejercicios y problemas. El curso se colocó en la plataforma Open-EdX por sus ventajas de uso en cualquier dispositivo móvil. En el trabajo se muestran varios elementos usados en la construcción del curso y se contrastan resultados de aprendizaje de 56 estudiantes.

Palabras clave: sistema gamificado, MOOC, probabilidad, estadística

Abstract
This paper presents a hybrid course of probability and statistics based on adaptive learning, which is intended to foster engineering students' competences related to the use of probabilistic models and statistical analysis tools. The gamification course consists of twelve chapters that contain supporting electronic material, explanatory videos, and computer-assisted experimentation practices of concepts, exercise trainer, and integration and evaluation activities. The evaluation system was built through interactive programs that use and / or adaptive learning. The students use Mathematics and Excel packages in their activities because these packages allow analyzing, symbolically and graphically, solutions of exercises and problems. The course was placed on the Open-EdX platform for its advantages of use on any mobile device. To sum up, we showed several elements used in the construction of the course, and compared the learning achieved by 56 students.

Key words: gamified system, MOOC, probability, statistics

Introducción

Diversos estudios realizados en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey indican que los alumnos que toman los cursos de matemáticas no son capaces de analizar situaciones problemáticas en contexto debido al débil desarrollo de sus habilidades de resolución de problemas y porque los cursos sólo promueven el estudio de métodos algorítmicos (Santiago, Delgado y Quezada, 2012). El curso de Probabilidad y Estadística no es la excepción, profesores que lo han impartido indican que es poco el tiempo para discutir todos los temas con amplitud y, en consecuencia, sacrifican la modelación para dedicar mayor espacio al estudio de los conceptos y algoritmos probabilísticos. Se pierde así la posibilidad de utilizar las herramientas discutidas en el curso para describir fenómenos que ocurren en la economía, la demografía, la ecología, entre muchas otras áreas. Como consecuencia, los algoritmos y fórmulas estudiados no son apreciados y, ante la falta de contexto, pierden significado para los alumnos. Además, tampoco se logran avances significativos en sus competencias algorítmicas.

Por otra parte, la modelación matemática de situaciones estocásticas es una competencia que permite a los estudiantes de ingeniería entender mejor los problemas que ellos analizan en cursos superiores. El problema es el poco tiempo dedicado al desarrollo de competencias de modelación y el bajo rendimiento debido al pobre uso de los conceptos de la probabilidad y de las herramientas estadísticas en los alumnos. Para remediar esta situación se propone utilizar un curso en línea que sea flexible, auto-contenido y con un sistema de prácticas adaptativas que permitan reducir las deficiencias conceptuales y operativas en temas de Probabilidad y Estadística En este trabajo se presentan las características del curso y su impacto en los aprendizajes de 56 estudiantes.

Marco teórico

El azar está ligado a nuestras vidas y aparece en múltiples situaciones cotidianas y en el actuar profesional de muchísimas personas. Sin embargo, generalmente tenemos concepciones equivocadas y una mala intuición probabilística que, frecuentemente, nos lleva a conclusiones erróneas. Una enseñanza formal no es suficiente para reducir los sesgos de razonamiento que pueden llevar a decisiones incorrectas.

Recientemente, se han dado orientaciones sobre la pertinencia de incorporar el uso de la experimentación computacional y actividades retadoras o problemas reales para provocar una mejora en nuestros conceptos de matemáticas, en general, y de probabilidad, en particular. Al presentar situaciones problemáticas reales, factibles de representarse mediante modelos matemáticos, se puede incentivar la contextualización del conocimiento de la Probabilidad y Estadística. En general, estos modelos surgen de manera natural cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es necesario hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales; por ejemplo, analizar resultados médicos, predecir el clima, o decidir cursos de acción ante los fenómenos económicos. Lehrer y Schauble (2000) sugieren, como hipótesis, que la introducción de la modelación al aula permitirá que los alumnos enfrenten situaciones de interés, que desarrollarán su capacidad de explorar y obtener formas de representarlas, que podrán explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones y manipularlas para desarrollar ideas importantes y que reducirán sus errores en conceptualización. Sin embargo, la investigación en solución de problemas ha mostrado que los alumnos tienen dificultades para traducir los enunciados de los problemas verbales en cursos convencionales al lenguaje matemático. El caso del uso de conceptos estadísticos y probabilísticos en situaciones reales es más complejo aún. En estas circunstancias, los estudiantes deben interpretar la situación que se les proporciona y determinar las condiciones que describan adecuadamente el problema de interés. Requieren formular hipótesis que les permitan simplificar la situación problemática y representarla a través de modelos o funciones de probabilidad. En general, el planteamiento no es simple y su construcción requiere de práctica. Algunos investigadores señalan que la enseñanza de la Probabilidad y Estadística por medio de la modelación requiere enseñar tanto los elementos teóricos como las estrategias de construcción de modelos. Otros investigadores, en cambio, ponen énfasis en las bondades del uso de la modelación y en las matemáticas que los alumnos pueden aprender cuando se utiliza esta metodología de enseñanza. A pesar de que ambos coinciden en los problemas que los estudiantes pueden enfrentar, consideran que el hecho mismo de enfrentarlos, y hacerlos conscientes de ello, favorece el aprendizaje. Entre las varias posturas existentes en el ámbito de la modelación, la llamada "Modelos y Modelación" (Trigueros, 2009) enfatiza la construcción, por parte de los alumnos, de sistemas conceptuales o modelos cuando ellos trabajan con una situación en contexto que favorece el proceso de matematización. En esta postura son dos las preocupaciones. La primera consiste en preparar a los estudiantes para planear y resolver el tipo de problemas que enfrentarán fuera de la escuela. La segunda es relacionar este tipo de problemas con los temas que se estudian en las matemáticas escolares, aunque esa relación no sea clara y evidente. En esta línea de investigación el interés se centra en que los estudiantes desarrollen formas flexibles y creativas de pensar que les permitan abordar las situaciones que se les presentan (Lesh y English, 2005). Existe acuerdo entre esta postura y la técnica de gamificación, ya que en las actividades lúdicas los estudiantes tienen amplias posibilidades de éxito y se les brinda la posibilidad de discutir conceptos básicos de cualquier área (Devlin, 2011).

Por otra parte, diversos materiales didácticos (programas, asistentes educativos, libros electrónicos, tutoriales de apoyo) se han construido con el objetivo específico de provocar una mejora en el aprendizaje de la matemática. Las experiencias muestran que dichos materiales deben diseñarse ex profeso para un fin y poblaciones determinadas ya que en caso contrario se reduce su éxito (Rojas y Muñoz, 2007). Artigue (2011) menciona que "las tecnologías informáticas trastornan los equilibrios tradicionales entre el valor epistémico y pragmático de las técnicas". Es decir, aun cuando la tecnología pretende que los estudiantes aprendan más y mejor es necesario no descuidar los problemas que el estudiante tiene con los objetos matemáticos de aprendizaje. Un juego digital que interactúa con los alumnos para que aprendan algún tema, o bien, un sistema que toma en cuenta el dominio del profesor, el entendimiento del estudiante, los tipos de enseñanza, las características del aprendizaje y el medio de comunicación es un buen sistema de apoyo para el aprendizaje. Existen diferentes alternativas para el uso de gamificación. Herramientas como Kahoot o Quizizz abren una posibilidad de alternar aprendizajes complejos con herramientas lúdicas. Otra posibilidad es el sistema "Diálogos con Prometeo", donde las actividades lúdicas se construyen mediante interacciones máquina-estudiante (Rojano y Abreu, 2012).

La base del aprendizaje adaptativo se encuentra en la capacidad de las computadoras para analizar infinidad de datos de cada estudiante en tiempo real. A partir de esos datos, se intenta responder al instante ¿qué es mejor enseñar ahora para maximizar la probabilidad de mejorar el rendimiento escolar? Para determinar si el alumno posee un conocimiento, o qué tanto conoce sobre él, se puede utilizar un algoritmo como el que se muestra en la Figura 1.

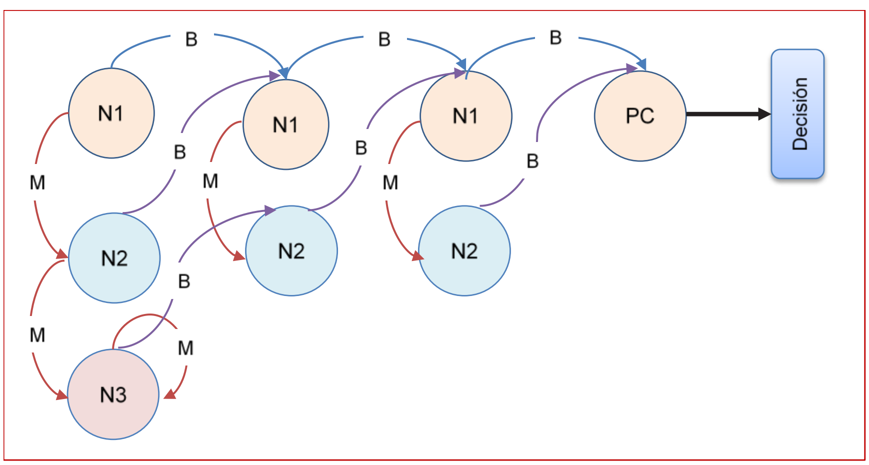


Figura 1. Algoritmo adaptativo básico

Allí se empieza en una pregunta de nivel N1, si la respuesta es correcta (B) se pasa a otra pregunta del mismo nivel y se sigue así hasta terminar un número de preguntas definido previamente. Si la pregunta es incorrecta (M) se analizan 3 posibilidades posibles de errores (conceptual, aritmético, algorítmico) mediante preguntas de nivel N2. Después de determinar el error se puede seguir con preguntas de nivel N1 o N2 o bajar a preguntas de Nivel N3. Después de cierto número máximo de preguntas se establece la calidad del conocimiento del estudiante y sus sugerencias de estudio. El algoritmo se utiliza, con algunas variantes, para establecer una ruta de aprendizaje que considera la historia previa del alumno. En consecuencia, para tener un sistema de aprendizaje adaptativo se debe construir primero una actividad diagnóstica, de toda la información que se obtenga se determina la ruta de aprendizaje óptima, que podrá cambiar en cada pregunta que el alumno responde.

Si a cada pregunta de la Figura 1 se le agregan puntajes por respuesta correcta se genera un algoritmo para gamificación. Este nuevo algoritmo se presenta en la Figura 2. Las dinámicas del juego, base de la gamificación, se corresponde con motivaciones internas de los alumnos (emociones, recompensas). En la salida del juego, se otorgan premios, niveles y puntos extra, dependiendo de la participación en uno o varios juegos (Parente, 2016).

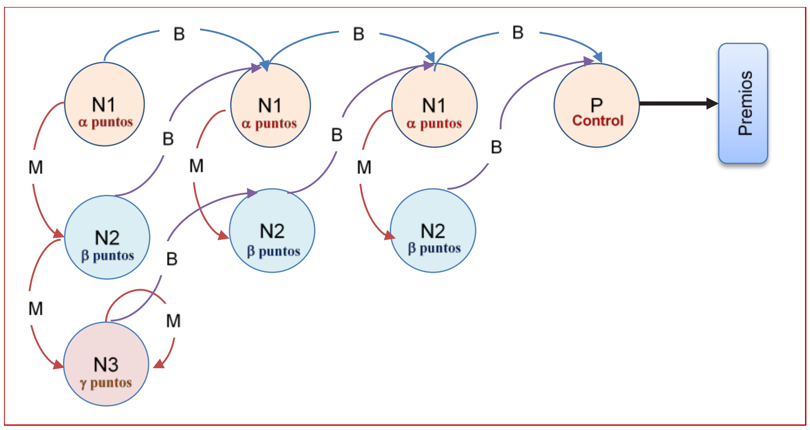
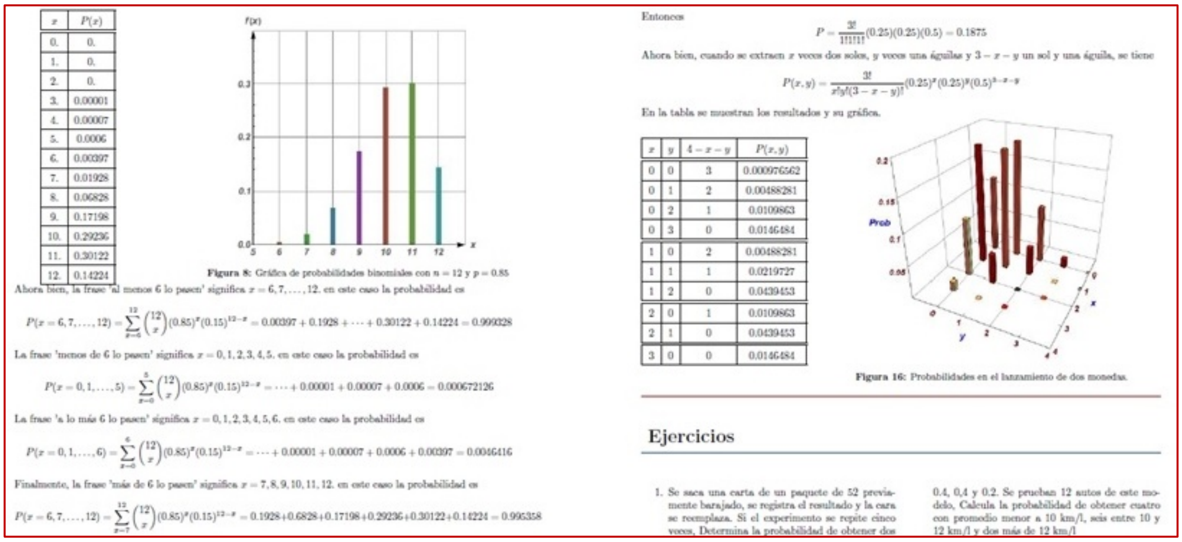


Figura 2. Algoritmo para gamificación

En otro contexto, los cursos masivos abiertos en línea (MOOC) integran la conectividad de las redes sociales y recursos en línea de libre acceso. Actualmente, la plataforma Open-EdX es de acceso libre y se usa para elaborar cursos en diferentes áreas. Surge así la necesidad de utilizar la técnica de gamificación, el aprendizaje adaptativo y la plataforma Open-EdX para construir un curso de Probabilidad y Estadística que use herramientas tecnológicas de vanguardia, estructurado con actividades lúdicas, contenga ejercicios interactivos y entrenador semi-adaptativo utilizando como soporte la Teoría APOE (acciones, procesos, objetos, esquemas) y los ciclos ACE (actividad, clase, ejercicios) de Dubinsky (1991).

Diseño del curso

El trabajo se estructuró en dos fases. En la primera fase se construyeron materiales didácticos diversos. Por ejemplo, en la plataforma ShareLaTeX se elaboró un libro electrónico con 12 capítulos enfocados a los temas siguientes: Estadística Descriptiva, Probabilidad Básica, Técnicas de Conteo, Probabilidad Condicional, Variables Aleatorias Discretas, Distribuciones Discretas, Variable Aleatoria Continua, Modelos Continuos, Distribuciones Muestrales, Estimación, Prueba de Hipótesis, Bondad de Ajuste. En la Figura 3 se muestran algunos materiales. Posteriormente se montó el curso en la plataforma Open-EdX.



x	$P(x)$
0.	0.
1.	0.
2.	0.
3.	0.00001
4.	0.00007
5.	0.0006
6.	0.00397
7.	0.01928
8.	0.06828
9.	0.17198
10.	0.29236
11.	0.30122
12.	0.14224

Figura 8: Gráfica de probabilidades binomiales con $n = 12$ y $p = 0.85$

Ahora bien, la frase 'al menos 6 lo pasen' significa $x = 6, 7, \ldots, 12$. en este caso la probabilidad es

$$P(x = 6, 7, \ldots, 12) = \sum_{x=6}^{12} \binom{12}{x} (0.85)^x (0.15)^{12-x} = 0.00397 + 0.1928 + \cdots + 0.30122 + 0.14224 = 0.999328$$

La frase 'menos de 6 lo pasen' significa $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. en este caso la probabilidad es

$$P(x = 0, 1, \ldots, 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{12}{x} (0.85)^x (0.15)^{12-x} = \cdots + 0.00001 + 0.00007 + 0.0006 = 0.000672126$$

La frase 'a lo más 6 lo pasen' significa $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. en este caso la probabilidad es

$$P(x = 0, 1, \ldots, 6) = \sum_{x=0}^{6} \binom{12}{x} (0.85)^x (0.15)^{12-x} = \cdots + 0.00001 + 0.00007 + 0.0006 + 0.00397 = 0.0046416$$

Finalmente, la frase 'más de 6 lo pasen' significa $x = 7, 8, 9, 10, 11, 12$. en este caso la probabilidad es

$$P(x = 6, 7, \ldots, 12) = \sum_{x=7}^{12} \binom{12}{x} (0.85)^x (0.15)^{12-x} = 0.1928 + 0.6828 + 0.17198 + 0.29236 + 0.30122 + 0.14224 = 0.995358$$

Entonces

$$P = \frac{3!}{1!1!1!}(0.25)(0.25)(0.5) = 0.1875$$

Ahora bien, cuando se extraen x veces dos soles, y veces una águilas y $3 - x - y$ un sol y una águila, se tiene

$$P(x, y) = \frac{3!}{x!y!(3-x-y)!}(0.25)^x(0.25)^y(0.5)^{3-x-y}$$

En la tabla se muestran los resultados y su gráfica.

x	y	$4 - x - y$	$P(x,y)$
0	0	3	0.000976562
0	1	2	0.00488281
0	2	1	0.0109863
0	3	0	0.0146484
1	0	2	0.00488281
1	1	1	0.0219727
1	2	0	0.0439453
2	0	1	0.0109863
2	1	0	0.0439453
3	0	0	0.0146484

Figura 16: Probabilidades en el lanzamiento de dos monedas.

Ejercicios

1. Se saca una carta de un paquete de 52 previamente barajado, se registra el resultado y la cara se reemplaza. Si el experimento se repite cinco veces, Determina la probabilidad de obtener dos

0.4, 0,4 y 0.2. Se prueban 12 autos de este modelo, Calcula la probabilidad de obtener cuatro con promedio menor a 10 km/l, seis entre 10 y 12 km/l y dos más de 12 km/l

Figura 3. Material electrónico de apoyo del curso

Por otra parte, el curso en la plataforma OpenEdX, está estructurado en la forma usual de un MOOC y contiene: presentación, material electrónico de apoyo, teoría básica, práctica de exploración, ejemplos, ejercicios interactivos, problema y evaluación semiadaptativa o con gamificación, ver Figura 4.

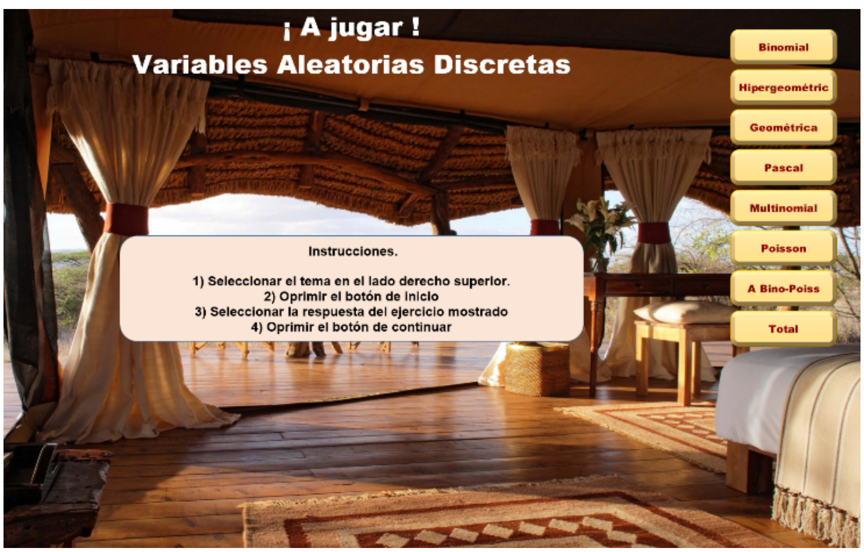


Figura 4. Actividad de Gamificación

En el apartado de teoría se consideran los conceptos más importantes, los algoritmos necesarios y los resultados relevantes, este apartado se enlaza con un video complementario, donde se explican los conceptos fundamentales, ver Figura 5.

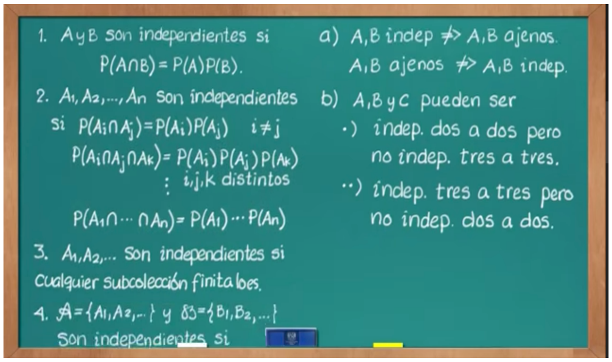


Figura 5. Apartado de Teoría, un ejemplo de video.

En las prácticas se utilizan los paquetes Mathematica y Excel para analizar conceptos del tema y resolver ejercicios típicos. En la Figura 6 se muestra una práctica interactiva en Excel.

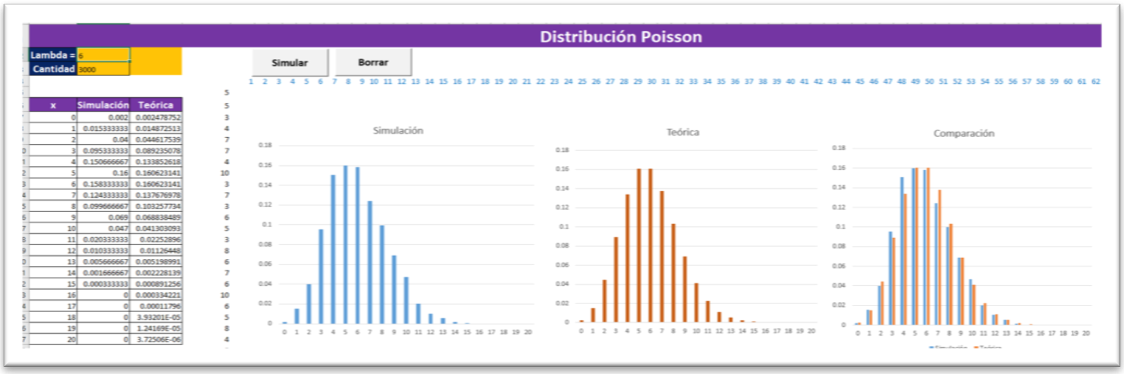


Figura 6. Actividad de exploración con el paquete Excel.

En la sección de ejemplos y ejercicios interactivos se explican ejemplos típicos y se enlaza con el entrenador de ejercicios del tema. El entrenador presenta aleatoriamente ejercicios de pregunta abierta o de opción múltiple. Este sistema se construyó mediante programas escritos en Python y se usó LaTeX y la librería MathJax para uniformizar la simbología matemática. En la Figura 7 se muestra un ejemplo y parte del código de implementación.

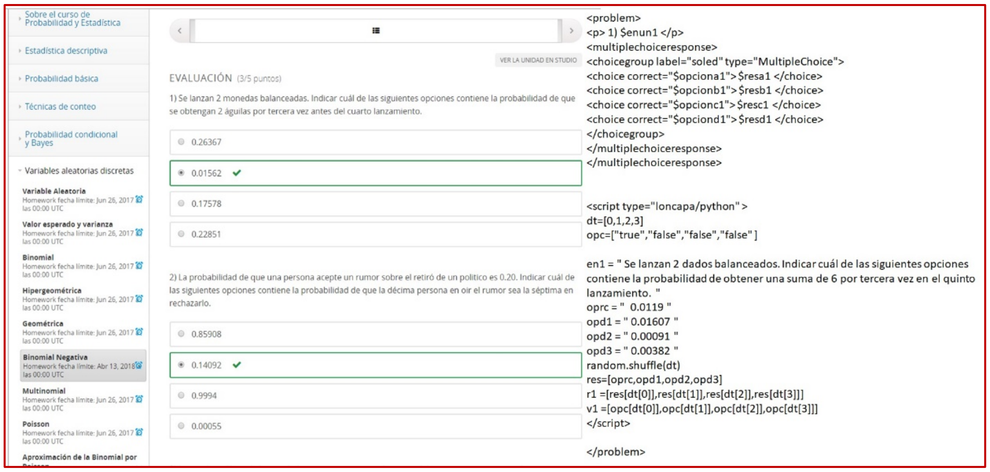


Figura 7. Entrenador de ejercicios

En el apartado de problemas se presentan situaciones complejas a los estudiantes. Finalmente, cada alumno es evaluado mediante ejercicios y problemas seleccionados aleatoriamente. El sistema de evaluación se construyó con actividades de gamificación o semi-adaptativas. En ambos sistemas se usaron las herramientas Mathematica, Forms y/o Google-Script. En la Figura 8 se ilustra una actividad de gamificación usando Forms.

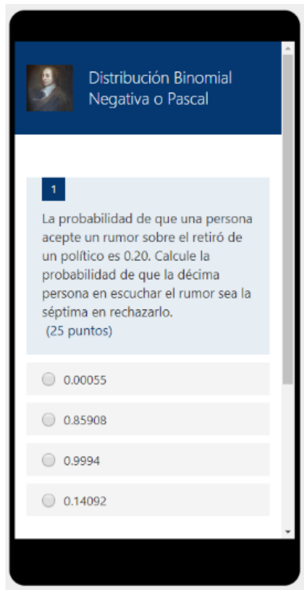


Figura 8. Actividad de gamificación

Investigación

Para realizar la investigación se consideraron dos grupos de 32 y 24 alumnos de las carreras de ingeniería del Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México. En el primero se usó aprendizaje semi-adaptativo y en el segundo la técnica de gamificación. En ambos cursos, se utilizó el ciclo de aprendizaje Actividad-Clase-Ejercicios-Problema (ACEP), donde: 1) los alumnos hacen una primera actividad lúdica (A) fuera del aula; 2) en clase (C) se revisa el tema; 3) fuera del aula, los alumnos hacen los ejercicios (E) interactivos aleatorios. Finalmente, se cierra el ciclo con un problema (P) u otra actividad lúdica. Se analizaron los resultados de las actividades lúdicas y de aprendizaje adaptativo en cada uno de los grupos donde se aplicó cada alternativa. Se analizaron los exámenes mediante una lista de cotejo que considera estrategia, procedimiento y respuesta, y se contrastaron los resultados con alumnos de un tercer grupo que utilizó un proceso de enseñanza-aprendizaje convencional. Finalmente, se encuestó a los alumnos sobre su percepción de los cursos y de las diversas actividades.

Resultados

Presentamos ahora los resultados en tres rubros: actividades, exámenes parciales y percepción del curso. Para el análisis de resultados en actividades consideramos el módulo Modelos Continuos. El puntaje máximo corresponde a 511 puntos (18 preguntas máximo). Para comparar con los alumnos que usan aprendizaje semi-adaptativo se consideraron las preguntas con el mismo peso. Se utilizaron tres niveles para cada tema. Las preguntas se enfocaron en los subtemas: probabilidad con función de densidad lineal, distribución exponencial, distribución gamma, distribución uniforme, distribución normal y aproximación de la binomial por la normal. El primer nivel corresponde a un problema en contexto, el segundo a un ejercicio operativo y el tercero a una pregunta conceptual.

Los resultados del módulo muestran que los alumnos que usan gamificación (G) obtienen mejores resultados que aquéllos que usan el aprendizaje semi-adaptativo (A), ver Figura 9. Este resultado no debe ser considerado definitivo ya que el número de veces que los estudiantes realizan las actividades lúdicas es mayor que el de las actividades adaptativas porque el alumno quiere obtener mejor puntuación, y aquí se ha considerado el mayor puntaje logrado.

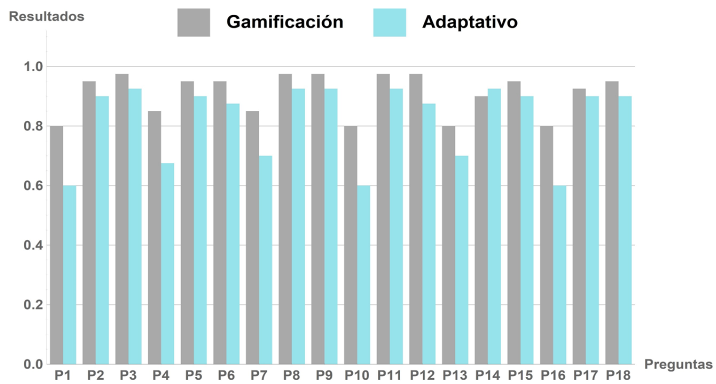


Figura 9. Resultados al aplicar actividades lúdicas.

Para el estudio en resultados en exámenes se consideró el tema de Prueba de hipótesis, con cinco preguntas que aparecen en las actividades de resolución de ejercicios. Cada pregunta tuvo un puntaje de 0, 1, 2 o 3 puntos considerando estrategia seguida (correcta o incorrecta), procedimiento (adecuado o inadecuado), respuesta (congruente y correcta o incongruente). En la figura 10 se muestran los resultados por pregunta y el resultado global en los tres grupos: Gamificación (G), Adaptativo (A) y Convencional (C). Las primeras tres preguntas son de opción múltiple (error tipo 1, medias, diferencia de medias) y las últimas dos son abiertas (proporciones y varianzas). En general, existe una percepción de que los alumnos G y A obtienen mejores resultados en preguntas de opción múltiple, pero no en las preguntas abiertas, lo que lleva a concluir que es necesario una investigación más amplia.

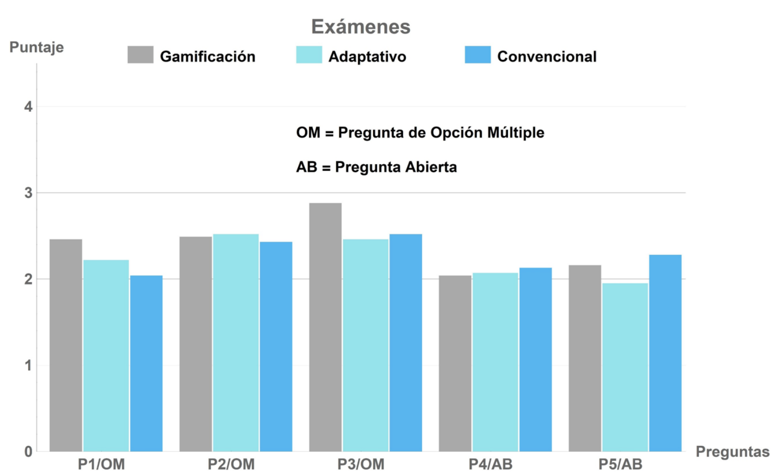


Figura 10. Resultados en exámenes.

En cuanto a la percepción del curso, los alumnos consideran que las actividades lúdicas les permiten mejorar sus habilidades (Lu), pero el trabajo del profesor (Pr) necesita mejorar. La organización del curso (Or) y los objetivos

(Ob) son adecuados, pero requieren dedicar mucho más tiempo que en el curso convencional (Tm). En su opinión, se requiere planear mejor las actividades (Pl) ya que no se desarrollan totalmente los conceptos (Dc), En general, consideran que su trabajo (Al) es adecuado, ver Figura 11.

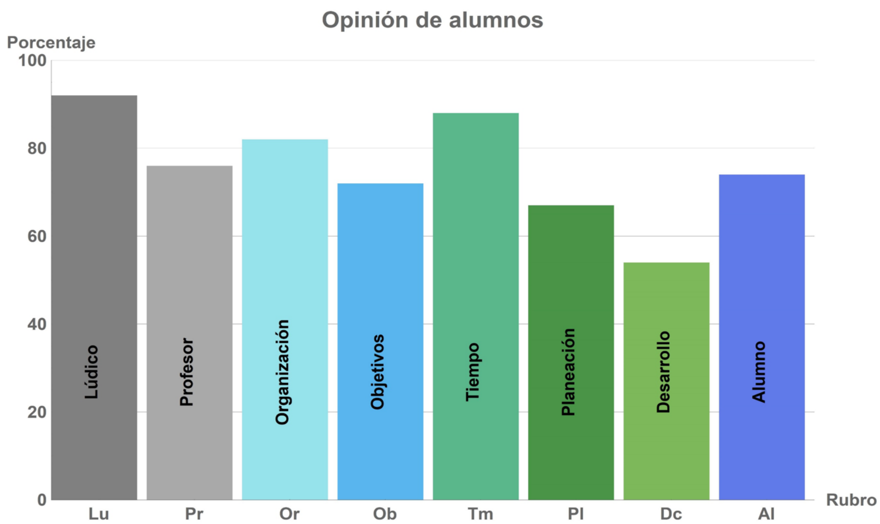


Figura 11. Resultados de la encuesta de percepción.

Discusión

Los resultados obtenidos en esta investigación sugieren que los estudiantes mejoran sus competencias para resolver ejercicios y se mantienen motivados cuando se usa gamificación, resultado acorde con lo planteado por Trigueros (2009) ya que los estudiantes desarrollan estrategias creativas al resolver ejercicios mediante juegos de preguntas.

El usar una metodología basada en ciclos de aprendizaje permite que los estudiantes conozcan y usen la tecnología para comprender mejor las ideas matemáticas del curso, lo cual es observable al realizar las actividades de evaluación, conclusión acorde con las reportadas por Garfield y Ahlgren (1988). En cuanto al análisis del curso, los estudiantes sugieren uniformizar el grado de dificultad de los problemas, y que se facilite el uso de guías rápidas. Estos apoyos deben ser provistos como formularios cortos y estrategias de solución breves. De acuerdo con Zapata (2015), todas las sugerencias deben ser incorporadas a la brevedad para obtener una mejora del curso.

Conclusiones

El estudio de las probabilidad y Estadística es fundamental para los estudiantes de ingeniería que las requieren para modelar fenómenos estocásticos en cursos avanzados (diseño de experimentos, administración de la producción, control estocástico, etc.). En este trabajo se buscó potenciar las habilidades de los estudiantes en competencias básicas, a saber: el uso de herramientas tecnológicas de análisis, la modelación matemática de situaciones complejas que requieren de la estadística y probabilidad, mejora de las capacidades algorítmicas de los alumnos. Para ello se necesita el apoyo de un curso en línea, material construido exprofeso y actividades lúdicas o de aprendizaje adaptativo. Los resultados indican que los alumnos mejoraron en esas competencias y abre perspectivas claras para que los profesores apoyen más y mejor a sus futuros estudiantes. Por otra parte, el estudio sugiere que los alumnos que usan un entrenador en línea desarrollan sus habilidades algorítmicas. Como consecuencia, es posible reducir el tiempo dedicado al estudio de dichos procesos en el aula. Finalmente, todas las actividades propuestas en el curso encajan en un modelo que permite desarrollar habilidades matemáticas y potenciar competencias tecnológicas de los estudiantes

Referencias bibliográficas

Artigue M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportaciones de la aproximación instrumental. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática* (8) 13-33.

Devlin, K. (2011). *Mathematics education for a new era: Video games as a medium for learning*. New York: CRC Press.

Dubinsky, E. (1991). "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.

Garfield, J. & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for research in Mathematics Education*, 44-63.

Lehrer, R. & Schauble, L. (2000). The development of model-based reasoning, *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), pp. 39-48.

Lesh, R. & English, L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving, ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 37(6), pp. 487-489.

Parente, D. (2016). Gamificación en la educación. *Gamificación en aulas universitarias*, 11. Recuperado el 2018/08/24 de https://ddd.uab.cat/pub/llibres/2016/166455/Ebook_INCOM-UAB_10.pdf

Rojano, T. & Abreu, J. (2012). Dialogs with Prometheus: Intelligent support for teaching mathematics. En C. Kynigos, J. Clayson & N. Yiannoutsou (Ed), *Constructionism: Theory, Practice and Impact* (pp 544-548), Athens: University of Athens.

Rojas, Y. & Muñoz, T. (2007). Mentor: Sistema tutorial inteligente para el desarrollo de habilidades en la solución de problemas matemáticos. *Revista de Investigación* (7) 2, 235-246.

Santiago, R.; Delgado, D. & Quezada, M. (2012) Sistema de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas basado en Web. Compendio de innovación Educativa 2012.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, 9(46), 75-87.

Zapata, M. (2015). El diseño instruccional de los MOOC y el de los nuevos cursos abiertos personalizados. *Revista de Educación a Distancia,* (45).

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA FUNCIÓN LINEAL AFÍN CON EL USO DE LA CALCULADORA CLASSWIZ

A DIDACTIC PROPOSAL FOR THE TEACHING AND LEARNING OF THE AFFINE LINEAR FUNCTION WITH THE USE OF THE CLASSWIZ CALCULATOR

Daysi Julissa García-Cuéllar, Mónica Marcela Parra-Zapata, Mihály Martínez-Miraval Horacio Saúl Sostenes González
Pontificia Universidad Católica de São Paulo (Brasil). Universidad de Antioquia (Colombia). Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Cinvestav (México)
ra00193072@pucsp.edu.br, monica.parra@udea.edu.co, martinez.ma@pucp.edu.pe, hssg_33@hotmail.com

Resumen
La idea de la calculadora como instrumento que puede ocupar el lugar del cálculo escrito o mental parece superponerse a la idea de la calculadora como herramienta facilitadora de exploraciones numéricas e indagaciones matemáticas, tan importantes en el contexto de resolución de problemas. El presente escrito muestra una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora *ClassWiz* en la enseñanza secundaria. Se utiliza el código QR que es transferido a una aplicación de Smartphone (Casio-EDU+) para que la representación de la función pueda ser analizada tanto numérica como gráficamente. Consideramos que esta propuesta pueda ser utilizada por maestros de Educación Secundaria para introducir esta noción en sus clases.

Palabras clave: calculadora, función lineal, propuesta didáctica

Abstract
The idea of the calculator as a tool that replace written or mental calculation seems to overlap the idea of the calculator as an enabler tool of numerical explorations and mathematical enquiries, which are very important in the context of problem solving. This paper shows a didactic proposal for the teaching and learning of the affine linear function with the use of the CLASSWIZ calculator in secondary education. The QR code that is transferred to a Smartphone application (Casio-EDU+) is used, so that the representation of the function can be analyzed both numerically and graphically. We considered that secondary school teachers can use this proposal to introduce the concept in their classes.

Key words: calculator, linear function, didactic proposal

Introducción

Diversos autores sostienen la idea de que la integración de la calculadora en la clase de Matemáticas puede ser altamente ventajosa, incluso al inicio de la Enseñanza Básica. Según Campbell y Stewart (1993), la resolución de problemas con el uso de la calculadora puede alentar al alumno a entender y representar el problema, e indagar por el comportamiento de las funciones.

El uso de la calculadora facilita la focalización de la atención en el proceso de resolución del problema, lo que no siempre sucede cuando se hacen algoritmos por rutinas (Campbell y Stewart, 1993; Duea, Immerzeel, Ockenga y Tarr, 1980; Albergaria y Ponte, 2008). Lo anterior no dispensa una buena comprensión de los conceptos ni permite desarrollar la capacidad aritmética mental. Como indican Cockcroft (1985) y Abelló (1997), la disponibilidad de la calculadora no reduce de alguna manera la necesidad de su usuario de comprender Matemáticas.

La calculadora Casio-*ClassWiz* tiene 270 funciones, entre ellas: crear lista de variables, factorización prima, enteros aleatorios, transformación de coordenadas, cálculo de potencia y fraccionarios, trigonometría, combinación y permutación, estadísticas, desviación estándar, análisis de regresión, función de tabla. Además, permite utilizar el código *QR* que puede ser transferido a una aplicación de Smartphone (*Casio EDU+)* para que la representación de la función pueda ser analizada numérica y gráficamente (Ver figura 1).

Figura 1: Algunas funciones de la calculadora Casio - *ClassWizz*

Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa, muestran la necesidad de realizar estudios con relación a las funciones, pues se evidencian dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático (Trujillo, Guerrero y Castro, 2007; Tabach y NachielI, 2015; García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2018), como por ejemplo, dificultades en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función, dificultades en la conversión de la representación en registro gráfico al algebraico y viceversa. Por lo que es necesario reconsiderar los procesos de enseñanza y aprendizaje para dicha noción.

Por lo anterior, nuestro objetivo es presentar una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Casio-*ClassWiz* en la enseñanza secundaria.

Fundamento teórico

El marco teórico en que se fundamenta nuestra propuesta didáctica es la Teoría de Registros de Representación Semiótica (*TRRS*) de Duval (1995).

Duval (1995), afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las Matemáticas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas, requieren del uso de sistemas de expresión y representación. Duval aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente, sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: Lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros (Duval, 1995, p.14).

Para Duval (1995), las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la Semiosis (actividad ligada a la producción de representaciones semióticas, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas) son la *formación*, que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; *el tratamiento*, que es la transformación de una representación a otra al interior del mismo registro, y *la conversión*, que es una transformación que produce una representación en un registro distinto al inicial. De acuerdo con el autor, para que se logre el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes. Es en esta transformación donde el sujeto articula las distintas aprehensiones de la representación en un registro.

Duval (2012) cuatro tipos de aprehensiones en el registro figural. La *perceptiva,* que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio; *secuencial*, que concierne al orden de construcción de una figura, este orden no solo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas a utilizar; *operatoria,* que son las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras; y *discursiva,* que corresponde a una explicación desde otras propiedades matemáticas. En nuestra propuesta didáctica, por tratarse del objeto matemático, función lineal afín y trabajar dentro del registro gráfico, prestaremos mayor atención en las aprehensiones perceptivas, secuenciales y discursivas.

Adaptamos estos registros a nuestro objeto matemático función lineal afín con la mediación de la calculadora Casio-*ClassWizz* como se muestra en la figura 2.

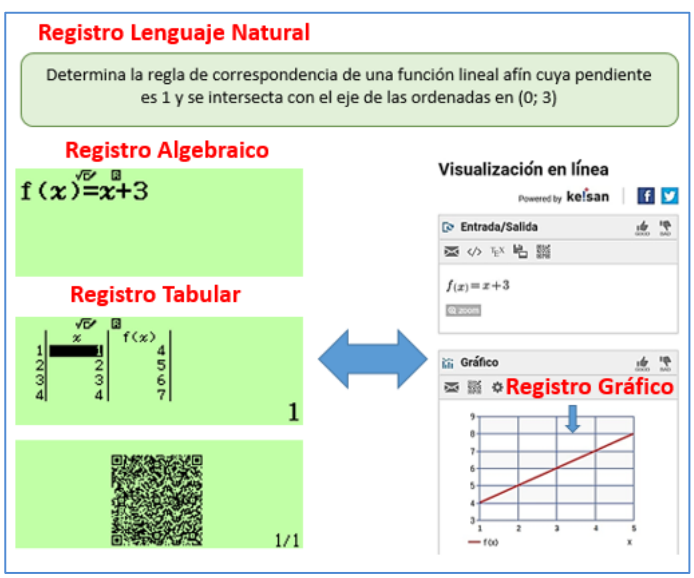


Figura 2: Algunos registros de representación mediados por Casio - *ClassWizz*

Metodología

Nuestra propuesta didáctica está basada en el enfoque metodológico *Investigación basada en el diseño* o también llamada *Investigación de diseño (*Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Dicho enfoque se caracteriza por ser primordialmente cualitativo.

Molina, Castro, Molina y Castro (2011), sostienen que este enfoque metodológico tiene la finalidad de establecer un modelo del aprendizaje de los estudiantes con relación a un contenido matemático específico, como resultado de las situaciones e interacciones planificadas por el equipo de la investigación.

Las investigaciones basadas en el diseño se enmarcan en los *experimentos de enseñanza*, en los cuales se diseñan secuencias instruccionales de enseñanza donde participan un investigador-docente, uno o más estudiantes y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000).

En el desarrollo de los *experimentos de enseñanza* se distinguen las tres fases siguientes (Cobb y Gravemeijer, 2008, en Diaz, Gutierrez y Luque, 2017):

Fase 1. Preparación del experimento: en esta fase se definen los propósitos del experimento y los contenidos a ser abordados, las actividades y tareas a ser resueltas y una "trayectoria hipotética de aprendizaje" por la cual puede producirse el aprendizaje tras resolver las actividades.

Fase 2. Experimentación para promover el aprendizaje: en esta fase se llevan a cabo las interacciones entre los participantes del experimento con los contenidos, las actividades, las herramientas y el formador.
Fase 3. Análisis retrospectivo de los datos: en este caso se analizan los datos recopilados de la fase 2 del experimento. En muchas ocasiones, este análisis conduce a realizar cambios en las actividades planteadas y en la trayectoria hipotética de aprendizaje.

La tabla 1 muestra las fases y las acciones a realizar en cada una de ellas:

Tabla 1. Acciones a realizar en cada una de las fases de un experimento de enseñanza

Fases	Acciones
PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO	*Definir el problema y los objetivos de investigación.* *Identificar los objetivos instruccionales.* *Evaluar el conocimiento inicial de los alumnos.* Identificar las metodologías de enseñanza adecuadas para los contenidos elegidos, en función de los objetivos planteados y los conocimientos previos de los alumnos. Diseñar de forma justificada la secuencia de intervenciones en el aula y su temporalización. Diseñar la recogida de datos. *Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje que describa el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.* Ubicar el experimento dentro de un contexto teórico más amplio en el que se enmarque el modelo teórico emergente.
EXPERIMENTACIÓN	

Antes de cada intervención	Obtener información sobre el trabajo previo realizado en el aula, para tenerlo en cuenta en el diseño de la intervención y en la posterior interpretación de los datos. Identificar los objetivos instruccionales de la intervención. Ultimar el diseño de la intervención, de forma justificada, a partir de la información empírica y teórica disponible. Elaborar hipótesis/conjeturas sobre los resultados a obtener en la intervención. Ultimar la selección de los métodos de recogida de datos. Registrar las decisiones tomadas en el proceso de ejecución de las acciones descritas en los cinco apartados anteriores y su justificación.
En cada intervención	Si es necesario, modificar sobre la marcha, de manera justificada, el diseño de la intervención de acuerdo con los objetivos de la intervención. Recoger datos de todo lo que ocurre en el aula, incluyendo las decisiones tomadas durante la intervención.
Después de cada intervención	Analizar los datos recogidos en la intervención. Revisar, y en su caso reformular, las hipótesis/ conjeturas de investigación.
ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE LOS DATOS	Recopilar y organizar toda la información recogida. Analizar el conjunto de los datos, lo que implica: a) Distanciarse de los resultados del análisis preliminar, de las conjeturas iniciales y de la justificación del diseño de cada intervención, para profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad. b) Identificar la ruta conceptual seguida por el grupo y por cada alumno, por medio de los cambios que pueden ser apreciados, atendiendo a las acciones específicas del investigador -docente que contribuyeron a dichos cambios.

Fuente: Molina, Castro, Molina y Castro (2011, p.80)

Experimento de enseñanza

Como nuestro trabajo es una propuesta didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la función lineal afín con el uso de la calculadora Casio-*ClassWiz*, nos centramos en la primera fase del experimento de enseñanza (preparación del experimento – Tabla1) del enfoque metodológico Investigación basada en el diseño.

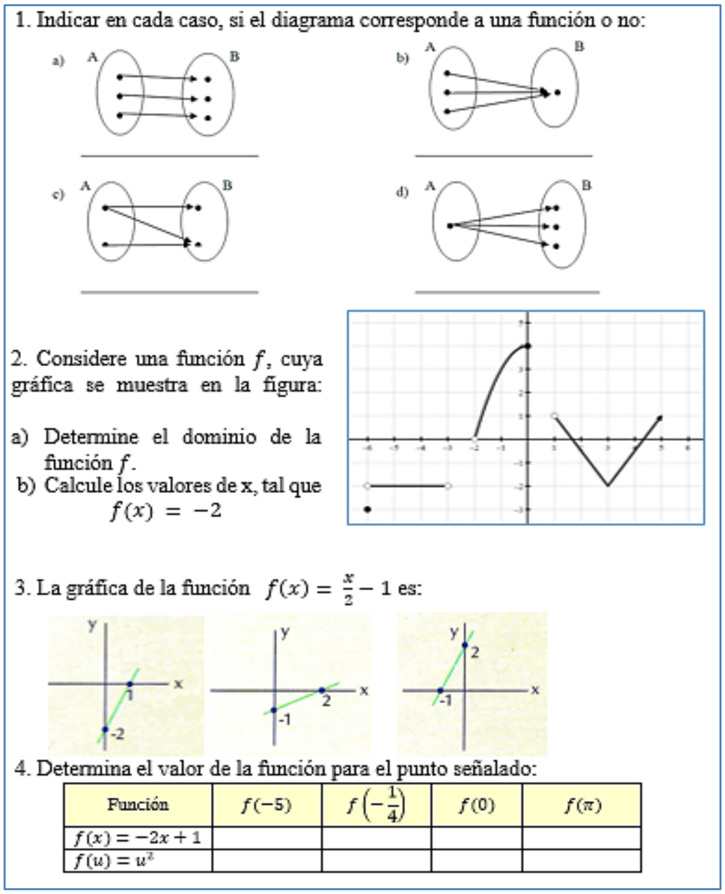
Objetivos instruccionales:

Al desarrollar la propuesta didáctica (Experimento de enseñanza) se busca que los estudiantes aprendan las características, propiedades y representaciones de la función lineal afín al desarrollar actividades que permitan las conversiones de registros de representación de dicho objeto matemático y sus aprehensiones, utilizando la calculadora Casio-*ClassWiz.*

Los contenidos seleccionados para el experimento están relacionados con la definición de la función lineal afín, sus distintas representaciones, propiedades y características principales.

Identificación del conocimiento inicial:

Para poder identificar los saberes previos de los estudiantes con relación a la función lineal afín, propusimos algunas actividades referidas a aspectos generales de las funciones reales (ver figura 3), para identificar el nivel en que se encuentran en relación con este objeto matemático.



1. Indicar en cada caso, si el diagrama corresponde a una función o no:

a) A B

b) A B

c) A B

d) A B

2. Considere una función f, cuya gráfica se muestra en la figura:

a) Determine el dominio de la función f.

b) Calcule los valores de x, tal que $f(x) = -2$

3. La gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ es:

4. Determina el valor de la función para el punto señalado:

Función	$f(-5)$	$f\left(-\frac{1}{4}\right)$	$f(0)$	$f(\pi)$
$f(x) = -2x+1$				
$f(u) = u^2$				

Figura 3: Algunas preguntas para identificar saberes previos sobre funciones

La trayectoria hipotética de aprendizaje:

Delinear una trayectoria hipotética de aprendizaje consiste en describir el resultado esperado del proceso de aprendizaje y el modo en que se va a promover y alcanzar dicho aprendizaje.

Nuestra propuesta didáctica (Experimento de enseñanza) de la función lineal afín, busca evidenciar que los estudiantes aprendan a:

Utilizar la calculadora Casio-*ClassWiz* como medio para analizar el comportamiento de la función lineal afín al momento de graficar ésta en lápiz y papel.

Utilizar la calculadora Casio-ClassWiz como medio para analizar el comportamiento de la función lineal afín al momento de representarla en el registro gráfico mediante un aplicativo con códigos QR.

Expresar y justificar sus resultados al resolver actividades que permitan conversiones de las representaciones de la función lineal afín en los registros de lenguaje natural, registro tabular, registro algebraico y registro gráfico.

Movilizar las aprehensiones perceptivas, secuenciales y discursivas en el registro gráfico de la función lineal afín al resolver las actividades propuestas.

Secuencia instruccional:

Nuestra propuesta didáctica tiene dos momentos:

En el primero, las actividades se centran en la caracterización de la función lineal afín. Así como en el cálculo del valor numérico con uso de la calculadora Casio-*ClassWiz* para representar, a lápiz y papel, la función lineal afín.

En el segundo, las actividades se centran en la conversión de registros de la función lineal afín con el uso del código *QR* de la calculadora Casio-*ClassWiz*.

A continuación, presentamos cuatro actividades de nuestra propuesta didáctica, las dos primeras correspondientes al primer momento y las dos últimas, al segundo momento de la propuesta.

Momento I: Caracterizar y representar la función lineal afín

Actividad 1:

Caracterizando $f(x) = mx + b$
a) Reconociendo $f(x) = mx + b$, cuando $b = 1$
Observa las representaciones gráficas de las funciones y responde:
¿Cómo es la función cuando los valores de m son negativos?
¿Cómo es la función cuando los valores de m son positivos?

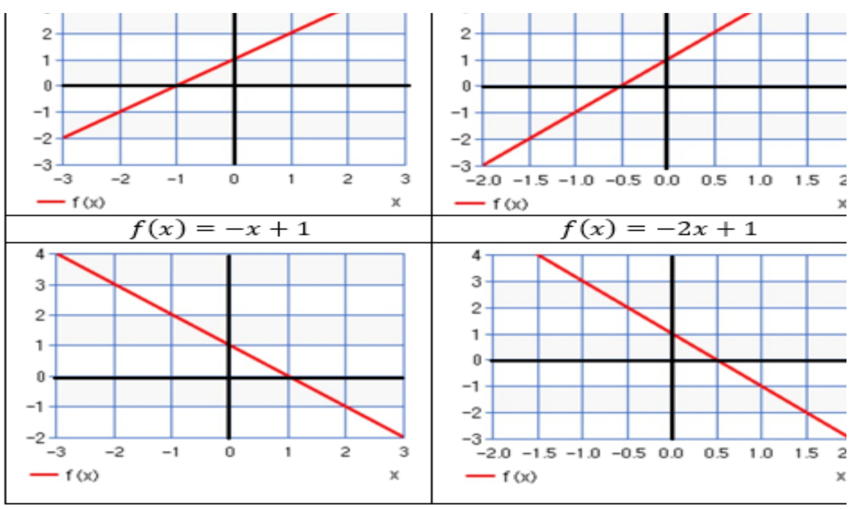


Figura 4: Gráficas de las funciones lineales afín realizadas con la calculadora Casio-C*lass*W*iz*.

b) Reconociendo $f(x) = mx + b$, cuando $m = 1$
Observa las representaciones gráficas de las funciones y responde:
¿Qué ocurre con las gráficas de las funciones cuando b toma los valores de 1; 2 y 3?
¿Qué ocurre con las gráficas de las funciones cuando b toma los valores de -1; -2 y -3?

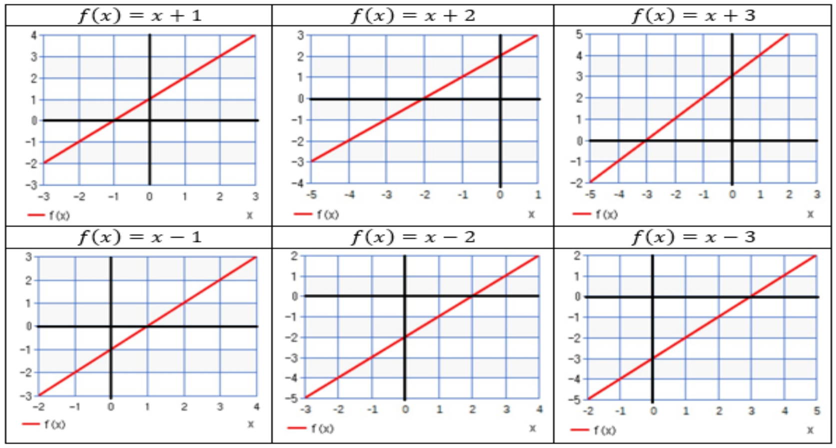


Figura 5: Gráficas de las funciones lineales afín realizadas con la calculadora Casio-C*lass*W*iz.*

Esta actividad busca caracterizar a la función lineal afín, a través de sus parámetros m (pendiente) y b (intersecto en la ordenada) en el registro gráfico, por lo cual, al dar respuesta a éstas, los estudiantes movilizarán las aprehensiones perceptivas y discursivas.

Actividad 2:

Dada la función $f(x) = 2x + 4$, realiza la gráfica; indica el dominio y el rango; halla los interceptos con los ejes “x” e “y”; e indica si la función es creciente o decreciente.

En esta actividad, los estudiantes deberán tabular los valores de x en f con ayuda de la calculadora Casio-C*lass*W*iz* como muestra la figura 6 y luego, representar la gráfica de f a lápiz y papel. Por ello, los estudiantes realizarán la conversión del registro algebraico a los registros tabular y gráfico. Luego, por la aprehensión perceptual reconocerán el domino, rango, los interceptos y si la función es creciente o decreciente.

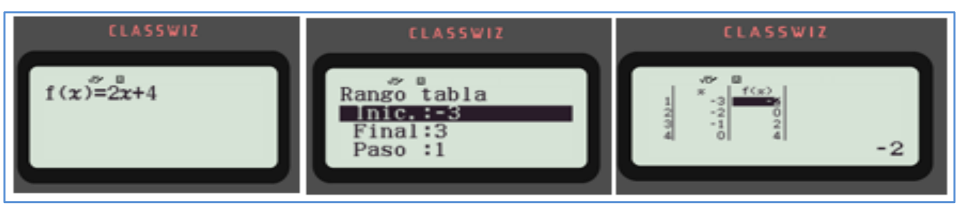


Figura 6: Tabulando con el uso de la calculadora Casio-C*lass*W*iz*

Momento II: Resolver actividades de contexto realizando conversiones de la representación de la función lineal afín en diferentes registros.

Actividad 3:

Un hotel alquila una habitación a una persona a una tarifa de 25 soles la primera noche y 20 soles por cada noche siguiente. Determine una función que exprese el costo en soles del alquiler de la habitación por x noches y represéntala gráficamente.

En esta actividad, los estudiantes deben de reconocer la regla de correspondencia, es decir, harán una conversión de representaciones del registro lenguaje natural al registro algebraico, para luego, usar la Casio-C*lass*W*iz* en el registro tabular (ver figura 7), y finalmente, representarla gráficamente a lápiz y papel. También podrán comparar su resultado usando el código *QR*.

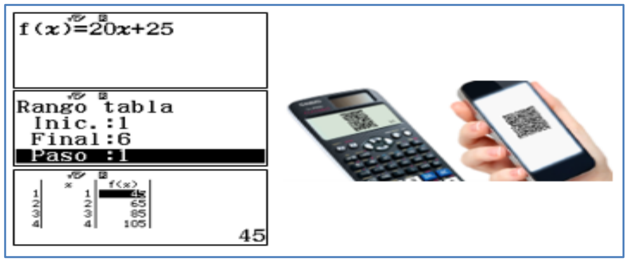


Figura 7: Tabulando con el uso de la calculadora Casio-C*lass*W*iz*

Actividad 4:

Dos depósitos de agua, A y B, funcionan de la forma siguiente: a medida que A se va vaciando, B se va llenando. El depósito A está lleno y tiene una capacidad de 15 litros y se vacía a razón de 2 litros por minuto. El depósito B, que está vacío, se llena con una velocidad de un litro por minuto. Representa las reglas de correspondencia de las dos funciones que relacionan la capacidad (y) de los depósitos en función del tiempo (x) transcurrido. Determina en qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua.

Para dar solución a la actividad 4, los estudiantes deben representar las reglas de correspondencias de las dos funciones que se proponen en la tarea dada, y luego deben utilizar la calculadora Casio-*ClassWiz* para identificar los posibles valores comunes en que los depósitos tienen igual cantidad de agua. Finalmente, deben representar gráficamente ambas funciones haciendo uso del código *QR* que por medio de un aplicativo Smartphone *Casio-EDU+* permitirá observar la gráfica y verificar que a los 5 minutos ambos depósitos tendrán la misma cantidad de agua. La figura 8 presenta el proceso anterior.

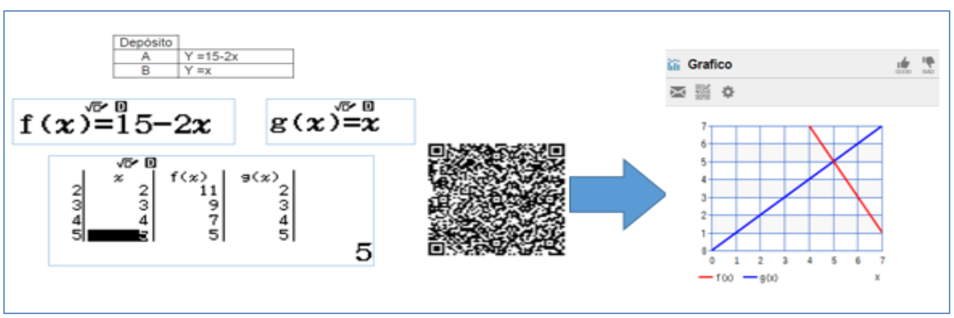


Figura 8. Solución de la tarea con el uso de ClassWiz

Conclusiones

A manera de conclusiones, podemos afirmar que la propuesta didáctica está enfocada a presentar actividades donde el uso de la calculadora facilita a que los estudiantes centren su atención en el proceso de resolución del problema, lo que no siempre sucede cuando se hacen algoritmos por rutinas.

El diseño de la secuencia instruccional (propuesta didáctica) de la función lineal afín utilizando la calculadora Casio-ClassWiz, se basó en el enfoque metodológico *Investigación basada en el diseño* que abarca los experimentos de enseñanza, del cual solo hemos abarcado la primera fase denominada *preparación del experimento* en la cual se han definido los objetivos instruccionales, los contenidos a trabajar, las actividades para reconocer saberes previos, las actividades a resolver y la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Los dos momentos de nuestra propuesta didáctica se han diseñado para que los estudiantes comprendan el concepto de la función lineal afín y sus características algebraica, geométrica y variacional, a partir de los tratamientos y conversiones de sus representaciones en los registros de lenguaje natural, registro tabular, registro algebraico y registro gráfico, analizados bajo la teoría de Registros de Representación Semiótica. Del mismo modo, estudiar las aprehensiones perceptivas, secuenciales y discursivas que se evidencian al resolver las tareas propuestas de la secuencia de actividades planteada.

Referencias bibliográficas

Abelló, F. U. (1997). *Aritmética y calculadoras*. Madrid: Síntesis.

Albergaria, I. S. y Ponte, J. P. (2008). *Cálculo mental e calculadora*. In A. P. Canavarro, D. Moreira y M. I. Rocha (Eds.), Tecnologias e educação matemática (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

Campbell, P. y Stewart, E. (1993). *Calculators and computers. In R. J. Jensen (Org.), Research ideas for the classroom: Early childhood mathematics* (pp. 251-268). New York, NY: Macmillan.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan* (traducción en español de la versión publicada en inglés en 1982). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Diaz, S., Gutierrez, R. y Luque, R. (2017). Propuesta didáctica para abordar el tema de la función trigonométrica f(x)= tanx con el software GeoGebra. Revista Números (97), p. 83-91.

Duea, J., Immerzeel, G., Ockenga, E. y Tarr, J. (1980). *Problem posing using calculator. In S. Krulik & R. Reys (Orgs.), Problem solving in school mathematics* (pp. 177-126). País: editorial

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis: Brasil.

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis *Instrumental* del artefacto simbólico función exponencial. *Revista Transformación*, 14(2), 252-261. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/324515608_ESTUDIO_DEL_PROCESO_DE_GENESIS_INSTRUMENTAL_DEL_ARTEFACTO_SIMBOLICO_FUNCION_EXPONENCIAL/citations

Molina, M., Castro, E., Molina, J.L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29 (1), 75–88.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306. Mahwah: NJ: LAE.

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics* (90), 163-187. Recuperado de https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0

Trujillo, M.; Guerrero, J. y Castro, M. (2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. *Revista de investigación*, 7 (2), 223 – 233.

LA INSTRUMENTACIÓN DE GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS EN SECUNDARIA. LAS RECTAS NOTABLES DE LOS TRIÁNGULOS

GEOGEBRA IMPLEMENTATION IN GEOMETRIC PROBLEM SOLVING AT SECONDARY SCHOOL; NOTABLE STRAIGHT LINES OF TRIANGLES

Horacio Sostenes-González, Irma Fuenlabrada-Velázquez
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
hssg_33@hotmail.com, irfuen@cinvestav.mx

Resumen

Se presenta una investigación en proceso, de carácter exploratorio, que estudia las estrategias que ponen en juego los alumnos de 1º de secundaria en la resolución de problemas que implican las propiedades de las rectas notables de los triángulos, utilizando el software GeoGebra. Se asume como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica a través de la implementación de una secuencia diseñada en apego a la Teoría de las Situaciones didácticas, que se complementa con referentes de la Génesis instrumental. Los resultados muestran cómo se apropian los estudiantes de los esquemas de uso de las herramientas de GeoGebra, y la coexistencia de estos con sus ideas geométricas para resolver los problemas planteados.

Palabras clave: ingeniería didáctica, génesis instrumental, rectas notables de los triángulos

Abstract

This paper presents an ongoing research, of exploratory nature, which studies the strategies that first-year secondary students use in problem solving involving the properties the of notable lines of triangles, by using GeoGebra software. Didactic engineering is assumed as the methodology of this research, by implementing a sequence designed according to the Theory of Didactic situations that is supported by referents of the Instrumental Genesis. The results show how students learn and acquire schemes of using GeoGebra tools, and the way in which they use these schemes to solve the problems of the notable straight lines in triangles.

Key words: didactic engineering,instrumental genesis, notable lines of the triangles

Introducción

En México y en otros países latinoamericanos como Perú, Colombia y Argentina, la Geometría en la Educación Básica se ha estudiado y tratado superficialmente (Etcheverry, Reid, Botta, 2009., García, 2014). En años recientes en los niveles medio superior y superior se han privilegiado principalmente estudios de contenidos algebraicos, mientras que en la educación básica se ha privilegiado la indagación sobre el estudio de las fracciones y el desarrollo del pensamiento algebraico (Ávila, 2015).

Aun así, en los últimos años el acceso a recursos tecnológicos ha permitido el estudio de la Matemática en un carácter dinámico, y con ello también la Geometría. La geometría dinámica "puede ser mejor entendida en contraposición a la estructura "estática" de las construcciones de la geometría tradicional de lápiz y papel. Los sistemas de geometría dinámica permiten crear y manipular construcciones geométricas, principalmente de geometría euclidiana" (Reyes, 2016, p.43)

Si bien en los últimos años trabajar a través de la Geometría dinámica mediante recursos tecnológicos ha propiciado un incremento en el desarrollo en investigaciones y propuestas educativas, aun son bastantes los retos que hay que afrontar y que requieren un estudio arduo para comprender de mejor manera el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Entre otros datos, por ejemplo, las pruebas nacionales en México como PISA 2015 (INEE, 2016), muestra que solo el 3.1% de los estudiantes de secundaria se encuentran en el nivel IV de desarrollo de pensamiento geométrico. En este nivel, que es el más alto, se encuentra la resolución de problemas que implican: a) transformación de figuras; b) propiedades de las mediatrices y bisectrices –interés de la investigación que nos ocupa-; y, c) razones trigonométricas.

La investigación pretende contribuir al estudio del desarrollo de conocimientos sobre los procesos que siguen los estudiantes de secundaria, al incorporar como recurso de apoyo a su razonamiento geométrico el software GeoGebra. Específicamente en la resolución de problemas que implican a las rectas notables de los triángulos, se pretende analizar y caracterizar las estrategias de solución, que las parejas de trabajo ponen en juego usando el software; destacando de ellas, las primeras manifestaciones de apropiación de esquemas de uso de las herramientas del software. Cabe señalar que el reporte que aquí se presenta, proviene de una investigación -en curso- del trabajo de tesis para obtener el grado de maestría de uno de los autores.

Marco teórico y metodológico

Se asume como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1998), la cual "…designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos" (Douady, 1996, p.241). De ella se retoman esquemas experimentales basados en realizaciones didácticas aulicas, considerándose las fases de análisis *a priori* y *a posteriori* de las situaciones problemáticas en las que subyace el uso de las rectas notables de los triángulos. Dichas situaciones se diseñaron en apego a la Teoría de Situaciones Didácticas desarrollada por Brousseau (2007).

Para orientar tecnológicamente el desarrollo y estudio de la secuencia se consideró la génesis instrumental (Rabardel, 1995), que describe el proceso e interacción entre un sujeto y un artefacto y como es que éste se convierte en un instrumento en las manos del usuario, para nuestro caso el estudiante de secundaria. El proceso tiene dos dimensiones (Castillo y Montiel, 2009): la instrumentalización y la instrumentación.

La instrumentalización refiere a que el sujeto se apropia de las propiedades iniciales del artefacto y se adapta a él, además, en esta dimensión del proceso el sujeto puede construir nuevas funciones del artefacto. Mientras que la instrumentación es relativa a la aparición y evolución de los esquemas de utilización del artefacto.

La génesis instrumental es un complejo proceso que necesita tiempo tanto para el desarrollo de esquemas de uso, como para que el artefacto se convierta en un instrumento en las manos del usuario.

Metodología

En la secuencia didáctica diseñada, se identifican cuatro momentos: *Para comenzar a usar GeoGebra*; *Construcción y análisis de los triángulos*; *Las rectas notables del triángulo* y *resolución de problemas*.

Los primeros tres momentos tienen como propósito iniciar la primera dimensión del proceso: la instrumentalización. Es decir, que los estudiantes se familiaricen con GeoGebra y adquirieran las primeras nociones de su uso, ya que la primera indagatoria para recabar información académica personal de los estudiantes mostró que ninguno había utilizado este software. El cuarto momento, tiene la pretensión de propiciar el inicio de la segunda dimensión del proceso: la instrumentación de las nociones de las rectas notables al mismo tiempo que se evidencian los esquemas de uso de algunas de las herramientas de GeoGebra. Dado el propósito de la investigación este cuarto momento es el de mayor interés para el análisis.

Para realizar la indagatoria se estudia el caso de un grupo de 8 alumnos (13 años) de primer grado de una telesecundaria ubicada en el Estado de México, seleccionados con base en criterios definidos por la institución.

A fin de contar con información relativa a lo que estos estudiantes sabían acerca del objeto de estudio de la investigación y con ello tener elementos de referencia para el diseño de la secuencia didáctica, se realizó una entrevista con cada uno de los alumnos. De éstas supimos que, al inicio del ciclo escolar, habían abordado con sus profesores el tema de las rectas notables de los triángulos de forma convencional a través del uso de regla, compás y escuadras; pero no habían resuelto problemas y además desconocían el uso de GeoGebra.
Para conformar el referente empírico de la investigación, se video grabaron tanto las entrevistas como las sesiones de trabajo con la secuencia didáctica.

Los alumnos trabajaron siempre en parejas en una computadora donde previamente se había instalado el GeoGebra, en ella resolvían las situaciones problemáticas que el maestro les entregaba por escrito sesión por sesión. Para el referente empírico, se contó también con las grabaciones de pantalla de las computadoras y las anotaciones que los alumnos hicieron en el material escrito de la secuencia didáctica.

Resultados, a título de ejemplificación

Para ilustrar el proceso de solución y los esquemas que los estudiantes ponen en juego en la resolución de una situación y con ello, dar cuenta de la manera como se documentan y analizan los resultados con los que se cuenta hasta ahora, retomemos el primer problema que se planteó en la secuencia (Imagen 1).

El problema demanda que los estudiantes pongan en juego las nociones de mediatriz y sus propiedades. Requieren determinar el centro del calendario azteca para poder obtener la medida del radio. Es decir, necesitan determinar el centro de una circunferencia que pase por tres puntos (que deben colocar sobre el contorno del calendario azteca), y el centro se obtiene por la intersección de las mediatrices a partir de los puntos anteriormente marcados.

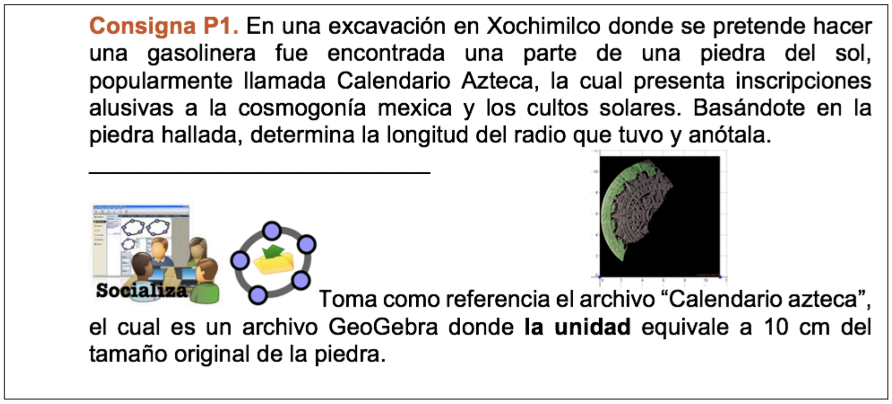


Imagen 1. Problema del calendario azteca.

A continuación, se muestra el proceso de solución del equipo cuatro a través de los distintos intentos que pusieron en juego. Para distinguir los diferentes intentos se considera el momento en que los estudiantes borran sus trazos, o deshacen con el cursor la última construcción. Los intentos, se describen de manera concisa para facilitar la visualización de la estrategia y el uso de las herramientas de Geogebra.

1. Ubican tres puntos sobre el contorno circular del calendario azteca trazan posteriormente una circunferencia usando la herramienta *Circunferencia por tres puntos* que modela al calendario azteca.
2. Trazan una circunferencia aproximada al contorno del calendario azteca, utilizan *Circunferencia (centro, punto).*
3. Desde un punto aproximado al centro del calendario, trazan una circunferencia de radio 6u, usando la herramienta *Circunferencia (centro, radio)*.
4. Utilizan *Circunferencia (centro, punto)*, dan clic en un punto aproximado al centro del calendario, pero desplazan el puntero sin dar clic haciendo que se genere una circunferencia que no queda estática ni definida en un punto.
5. Trazan varias circunferencias utilizando *Circunferencia (centro, punto)* o *Circunferencia (centro, radio)*, que deshacen de inmediato al ver que no quedan de la medida deseada.
6. Intentan trazar una perpendicular, al dar clic sólo en un punto y sobre la imagen, la recta no se genera.
7. Trazan tres rectas a partir del contorno del calendario azteca. Las rectas se intersectan en un punto, pero éste no corresponde al centro del calendario.
8. Trazan una recta que pasa aproximadamente por la mitad de la imagen, la deshacen.
9. Trazan una recta que va aproximadamente del centro del calendario hacia un punto en su contorno.
10. Intentan trazar una *bisectriz,* dan clic sobre la imagen, pero no definen los puntos por lo que no se genera algún trazo.
11. Trazan dos mediatrices tomando como referencia las esquinas de la imagen.
12. Trazan un triángulo dentro de la imagen, intentan trazar una mediatriz en uno de sus lados, como sólo dan clic en un vértice, la recta aparece, pero no queda fija porque no dieron clic en el otro punto.
13. Del triángulo trazado anteriormente desplazan los vértices sobre el contorno circular del calendario. Obtienen la intersección de las mediatrices y miden la distancia del circuncentro a los vértices del triángulo (Imagen 2).

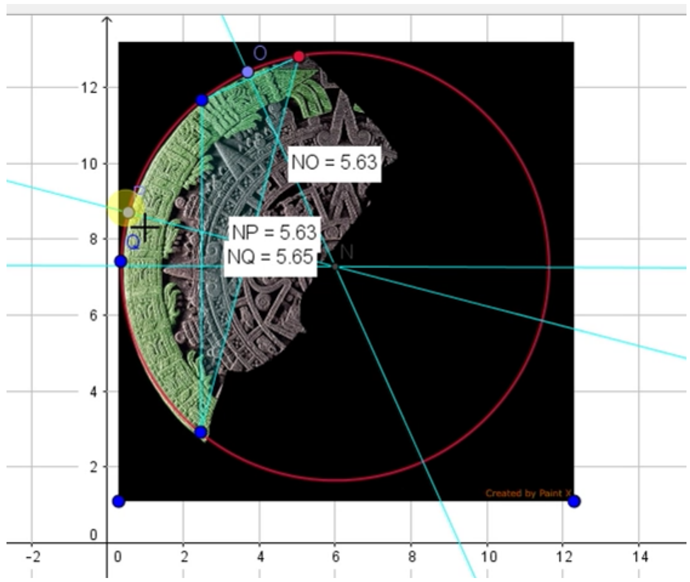


Imagen 2. Solución del equipo 4 al problema del calendario azteca.

Frente a este problema, puede observarse, que los estudiantes no identifican de manera inmediata que para resolverlo necesitan usar las propiedades de las rectas notables del triángulo, específicamente las de la mediatriz. Los primeros intentos de solución que manifiestan los estudiantes son azarosos e inexactos, exploran y experimentan con herramientas que han usado frecuentemente en otras situaciones, como son *Recta, Segmento, Circunferencia, Punto* que no los llevan a la solución; cabe destacar que los alumnos toman consciencia de ello, lo que en el proceso de aprendizaje no es nada desdeñable. En consecuencia, su disposición mental frente a la necesaria intervención docente les permite percatarse que la solución del problema está relacionada con alguna de las líneas notables del triángulo.

Si bien, las diferentes parejas de estudiantes lo intentan con mayor o menor éxito -tratan por ejemplo de trazar las medianas de un triángulo, ubicando aproximadamente el punto medio de los lados, en lugar de utilizar directamente la herramienta *Punto medio* de GeoGebra-, manifiestan en general un conocimiento insuficiente del software, evidenciando que el tiempo de génesis instrumental no fue el suficiente.

Aunado a que la noción del objeto matemático mediatriz aún se ve frágil y su uso se vuelve limitado ya que los estudiantes por si mismos no logran poner en juego un trazo exacto y fluido que permita utilizar sus propiedades para la resolución de la situación problema donde se requiere su uso.

Conclusiones

Lo que caracteriza en general a las estrategias de solución de los estudiantes de la muestra, es que se apropian con mayor facilidad de esquemas de uso de las herramientas que refieren a nociones que recurrentemente aparecen cuando se trabaja con geometría como recta, segmento, circunferencia y polígono, con las que seguramente han tenido conocimiento en su tránsito por la escuela primaria y que ciertamente también se utilizan y aparecen en la búsqueda de solución a los problemas planteados desde el inicio de la secuencia didáctica. Es decir, en esta breve experiencia de aprendizaje, los estudiantes de la muestra incorporaron solo los esquemas de uso de las herramientas de GeoGebra de aquellos que refieren a las nociones geométricas que cuentan con un sentido construido, con antelación, por parte de los estudiantes.

Los estudiantes tuvieron mayor dificultad para incorporar los esquemas de uso de herramientas como mediatriz, bisectriz, perpendicular (incluso para algunos no quedó consolidado); de hecho, al término de la experiencia el conocimiento sobre las rectas notables se muestra frágil, al margen del requerimiento experimental de evocarlo e instrumentarlo con el uso de GeoGebra para plantear una solución a los problemas.

Estos hechos nos permiten expresar, más allá de lo obvio -que el abordaje del tema requiere de mayor tiempo para que los alumnos accedan a un buen conocimiento de las rectas notables del triángulo-, que el andamiaje metodológico utilizado en la investigación, nos permitió instalar condiciones para ahondar sobre la comprensión de las primeras manifestaciones de apropiación de esquemas de uso de las herramientas del software GeoGebra en la resolución de problemas geométricos en estudiantes que recién inician su educación secundaria, Así mismo, mantener la hipótesis, para futuras indagaciones, del beneficio que supone la instrumentalización e instrumentación de GeoGebra para favorecer el aprendizaje de las rectas notables de los triángulos en particular y la geométrica en general, al inicio de la escuela secundaria.

Referencias

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Colombia. Una empresa docente.

Ávila, A. (2015). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo en el campo. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática-IACME*, Chiapas, México: CIAEM.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Castillo, A. y Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 459-467. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia: Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Etcheverry, N., Reid, M. y Botta, R. (2009). *Tic: Animándonos a la Enseñanza de la Geometría con Cabri.* Unión 17(1), 102-116.

García-Cuéllar, D. (2014). *Simetría axial mediado por el GeoGebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria.* Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú.

INEE (2016). *México en PISA 201, 1a edición*. México: INEE

Pantoja, R. (2014). *Uso de tecnología en matemática educativa, Investigaciones y propuestas*. Ciudad Guzmán, México: AMIUTEM.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Reyes, M. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales.* Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav, México.

Vázquez, H. (2013). *Uso de geometría dinámica en la escuela secundaria.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav. México.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN COMO MEDIADORES EN EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN EN UNA ESCUELA DE COLOMBIA

INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGIES AS MEDIATORS IN THE MEANINGFUL LEARNING OF THE CONCEPT OF FUNCTION AT A SCHOOL IN COLOMBIA

Oscar Orlando Hoyos Gaviria, Marta María Darsie
Universidad Federal de Mato Grosso (Brasil). Institución Educativa Francisco de Paula Santander (Colombia)
orsr28@hotmail.com, marponda@uol.com.br

Resumen
Es posible analizar el uso de las TIC como recurso para el aprendizaje de las matemáticas en la educación básica, este reporte de investigación en un abordaje de tipo cualitativo busca discutir las contribuciones de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para la construcción del concepto de función por alumnos de grado noveno. Para responder a tal objetivo, nuestras investigaciones apuntan para atender el siguiente problema de investigación: ¿cuáles son las contribuciones de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) como mediadoras para promover un aprendizaje significativo del concepto de función en alumnos de grado noveno? Nuestra investigación caracterizada por investigación-acción será desarrollada en aula de clase con un grupo de grado noveno de la institución educativa Francisco de Paula Santander, localizada en el municipio de Popayán, Cauca.

Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, aprendizaje significativo, tic, mediación, concepto de función

Abstract
It is possible to analyze the use of Information and Communication Technologies (ICT) as a tool in mathematical learning in basic education. This qualitative-research report seeks to discuss the contributions of the ICT for the construction of the concept of function by 9th grade students. In this sense, our investigation focuses on the research question: what is the contribution of ICT to promote meaningful learning of the concept of function in ninth graders? This action research will be developed in a classroom with a ninth-grade group of students in Francisco de Paula Santander School, located in the municipality of Popayán, Cauca.

Key words: mathematics teaching, meaningful learning, ICT, aids, concept of function

Introducción

En la educación básica y la enseñanza media, el concepto de función contribuye para la estructuración del pensamiento variacional y los sistemas analíticos, conforme a lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia en los lineamientos y estándares curriculares de matemática, puesto que, promueve en los estudiantes habilidades y competencias para observar, medir, registrar datos, realizar diferentes representaciones gráficas, que permiten la identificación de variables y el establecimiento de relaciones funcionales aplicables a contextos reales.

En estos años de experiencia como profesor de matemática he percibido que muchos de nuestros estudiantes no encuentran una justificación de por qué aprender matemática y, mucho más, en los años finales de la enseñanza media. Con relación al concepto de función, los alumnos hacen preguntas como: “¿Por qué aprender función, eso para que me sirve?” “¿Por qué aprender que f(x)=y, donde puedo aplicar eso en mi vida?” en fin, preguntas que en ocasiones no conseguimos responder con buenos argumentos, a pesar de ser profesionales en la enseñanza de las matemáticas.

Al mismo tiempo, actualmente nos encontramos en una nueva realidad escolar, que es diferente debido a ciertos factores que a lo largo del tiempo han cambiado, como la motivación, la disciplina y cómo actúan los alumnos dentro del aula de clase; además debemos adicionar nuevos aspectos de la personalidad de los estudiantes referentes a su manera de pensar, heterogeneidad, necesidades educativas especiales, etc. Luego, para nadie es extraño que la manera de pensar, actuar, desear, gustos, etc. de los niños de hoy en día es muy diferente de los que vivieron hace 20 años, por ejemplo.

Con respecto a lo anterior, formulamos nuestro problema de investigación, pretendiendo pesquisar sobre ¿cuáles serían las contribuciones de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) como mediadoras para promover un aprendizaje significativo del concepto de función para los estudiantes de 9 grado?

Con el propósito de superar esas dificultades de los estudiantes y alcanzar un verdadero aprendizaje significativo que promueva la integración de los elementos del concepto de función (verbal, tabular-numérica, gráfica, algebraico, simbólico y figural) este trabajo se constituye como una propuesta didáctica y dinámica para la enseñanza del concepto de función, intentando unificar los elementos de la enseñanza constructivista con herramientas interactivas ofrecidas por las TIC.

Marco teórico

La Teoría del Aprendizaje Significativo

Para tratar de favorecer la enseñanza-aprendizaje del concepto de función, se usa la Teoría del aprendizaje significativo creado por Ausubel, Novak y Hanesian, y otros autores que se refieren a esta teoría en sus trabajos como Moreira y demás. La teoría del aprendizaje significativo fue diseñada por los especialistas en psicología educativa de la Universidad de Cornell, David Ausubel, Josep Novak y Helen Hanesian teniendo como base las teorías de Vygotsky. De acuerdo con Valori (2002), la teoría en cuestión es una teoría constructivista, por la cual para aprender es necesario relacionar los nuevos aprendizajes a partir de los conocimientos previos que tienen los estudiantes. Desde esta perspectiva el aprendizaje es un proceso de contraste, de modificación de los esquemas de conocimiento, de equilibrio, de conflicto y de nuevo de equilibrio.

Podemos empezar por entender que es "estructura cognitiva"; se refiere al conjunto de conceptos, ideas que un individuo tiene en un determinado campo del conocimiento, así como su organización (Soria, Giménez, Fanlo, & Escanero Marcen, 2011, pág. 4).

Para Ausubel (1983) el aprendizaje significativo es el proceso a través del cual una nueva información (un nuevo conocimiento) se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no literal) con la estructura cognitiva de la persona que aprende. En el curso del aprendizaje significativo, el significado lógico del material de aprendizaje se transforma en significado psicológico para el sujeto.

En palabras de Ausubel (1983, pág. 1), "el aprendizaje significativo es el mecanismo humano, por excelencia, para adquirir y almacenar una inmensa cantidad de ideas e informaciones representadas en cualquier campo de conocimiento".

Las TIC en el Aprendizaje de las Matemáticas

Es evidente el acelerado desarrollo de la tecnología, se ha demostrado que en los últimos 50 años se han presentado muchas revoluciones en innovaciones y que inevitablemente toca y afecta a la sociedad en su conjunto. El lenguaje y la comunicación tuvieron cambios desde la antigüedad, la imprenta tuvo unos de los cambios más radicales en el lenguaje escrito debido principalmente a la electrónica y la computación que digitalizan la información que después es compartida, manipulable de diferentes formas, transferible y lo mejor que se transmite por un medio atemporal, es decir, podemos consultar y acceder a esa información en cualquier momento. Ferrer (2007) dice que los términos hipertexto, multimedia e hipermedia ya pertenecen a nuestra sociedad afectada por las nuevas tecnologías, en especial en el ámbito educativo. Estos elementos computacionales se conocen como recursos de hipermedia que tienen animaciones, audio, imagen, sonido y que aplicado a los hipervínculos conduce a la hipermedia. Estos recursos en constante evolución se están aplicando en el aula en diferentes disciplinas.

Otro elemento importante que Ferrer trae es el término "*visualización*", donde la imagen desempeña un papel muy importante en la comunicación, puesto que a través de ésta se pueden transmitir ideas, conceptos, abstracciones, fórmulas, leyes, etc. En el caso de que se trate de un proceso de visualización, es el gráfico, elaborado por el ser humano que también permite transmitir una idea o una acción, Galvis (1992) citado por Ferrer (2007) dice que los gráficos pueden tener diferentes funciones para representar un fenómeno de cualquier índole o formar en la mente una imagen visual de algo que es abstracto.

> Los dibujos y esquemas pueden ser muy útiles para trabajar conceptos o ideas, para presentar el contexto o reafirmarlo; las animaciones sirven para mostrar o ensayar el funcionamiento de algo, para destacar elementos o para motivar; los diagramas sirven para ilustrar procedimientos, relaciones entre partes o estados de un sistema; los diagramas de flujo indican los pasos y la lógica ligada al logro de una meta; los de transición, las relaciones entre los diversos estados de un sistema y las condiciones que produce la transición; las redes no cíclicas muestran precedencias entre sus nodos; los diagramas de barras expresan duración y holgura. El tipo de diagrama que se vaya a utilizar no es arbitrario, depende de lo que se desea especificar, los gráficos de tratamiento numérico se utilizan cuando interesa comprender o manipular cifras, magnitudes o sus relaciones (Ferrer, 2007, pág. 2).

En la actualidad, un ordenador con acceso a Internet tiene software educativo gratuito, enlaces educativos en línea, vídeos, paquete de Office, editores de vídeos, plataformas virtuales de aprendizaje, etc. una serie de instrumentos que el profesor puede usar y preparar con el fin de desarrollar una práctica educativa "diferente" en su aula. De esta forma, cuando el profesor posibilita a los alumnos la utilización de esos recursos, eso propone una manera innovadora de hacer "educación", pues, el alumno construye el conocimiento mediado por la tecnología, sin embargo, es necesario hacer una buena planificación de las actividades que incorporen algún tipo de tecnología, así en casi todas las situaciones en el aula estas actividades pedagógicas potencian los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es notable la importancia de las TIC en la educación, las cuales están siendo utilizadas por niños y jóvenes como instrumento facilitador de acceso a la información en Internet. Algunos están conectados a las redes sociales, asisten videos, tutoriales, entre otros, además, se encuentran comunicados todo el tiempo a través de los celulares en el intercambio de información.

Si tomamos un referencial teórico como la teoría del aprendizaje significativo, las TIC se pueden integrar a la definición de material potencialmente significativo de acuerdo con Moreira (1997), este material es aquel que es relacional o incorporable a la estructura cognitiva del aprendiz, de manera no arbitraria y no literal. Entonces, el material pedagógico apoyado en las TIC, relacionado con la teoría del aprendizaje significativo se puede definir como un material potencialmente significativo. En este sentido, Hurtado Montesinos (2006) dice que el uso de las TIC en la educación en diferentes niveles y sistemas educativos tiene un impacto importante en el desarrollo de la enseñanza-aprendizaje del educando, puesto que los contenidos de una determinada disciplina están siendo visualizados por el estudiante de forma diferente que en muchas ocasiones es una nueva mirada convirtiéndose en un conocimiento más significativo para él.

Como hemos visto en un primer instante, la importancia de las TIC es evidente en el contexto escolar en la actualidad, pero no podemos decir que en la clase de matemáticas el uso de las TIC es para que el estudiante esté entretenido frente al ordenador o su interés y atención gire a los gráficos, animaciones, etc. y no para el aprendizaje del concepto matemático. Es por eso que debemos diseñar unos objetivos, una nueva forma de enseñar los contenidos, una nueva forma de evaluar, en definitiva, un nuevo enfoque para aprovechar el potencial de la Tecnología en el aula.

Ahora surgen muchas preguntas, por ejemplo: ¿cómo hacer esto en la clase de matemáticas? ¿Qué recursos pueden aprovechar? ¿Siempre debemos usarlos de la misma manera? ¿Las mismas aplicaciones sirven para todo? Son preguntas que surgen en torno a esta temática y que invitan a reflexionar sobre el proceso o que podríamos seguir en el diario vivir del aula con nuestros estudiantes y los diferentes caminos que podemos proponer para la enseñanza. Real Pérez (2013, pág. 13) plantea una discusión sobre cuatro puntos con respecto al uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas. Estamos educando a las personas para que formen parte activa de la sociedad en la que viven y en esta sociedad cada vez más están presentes las TIC; hay aplicaciones específicas que desde el punto de vista matemático son maravillosas, pero tenemos que entender, si estamos buscando que nuestros alumnos sean expertos en matemáticas o informática; las TIC en general son una herramienta que facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, sin embargo requiere un enfoque adecuado que sea significativo para los estudiantes; es verdad que algunos alumnos pueden utilizar las TIC mejor que los profesores, por lo que no debemos sentir inseguridad en la clase, por el contrario, lo que interesa no es enseñar a manipular las TIC, en lugar de que el alumno entienda que ellas son unas auxiliares para aprender matemáticas.

Aunque en las TIC no está la solución a las dificultades que tiene el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, ellas producen un cambio en la forma de enseñar, posibilitando múltiples modos de representar situaciones problemáticas que les permite a los estudiantes desarrollar estrategias de resolución de problemas y mejor comprensión de los conceptos matemáticos.

Metodología

Nuestra investigación está ancorada en un enfoque cualitativo. Nos apoyamos en la definición de Triviños (2006, p. 129), para quien la investigación cualitativa es aquella que tiene por característica partir de una descripción "que intenta captar no sólo la apariencia del fenómeno, sino también su esencia". Nuestra investigación tiene características de investigación-acción educativa, que según Torrecilla (2011) se usa para describir una serie de actividades que realizan los profesores en sus propias clases con el propósito de desarrollo curricular, su autodesarrollo profesional, la mejora de los programas educativos, los sistemas de planificación o la política de desarrollo.

Siendo el aula el *locus* de nuestro trabajo de investigación, ésta fue realizada en clases de Matemáticas. La carga horaria de la disciplina es 4 horas semanales de 60 minutos cada una, repartidas entre los días jueves y viernes en horario de 9:00 hasta las 11:00 am.

Los sujetos seleccionados para esta investigación son 22 estudiantes de un grupo de la mañana de grado noveno de educación básica secundaria, con edades variando entre los 12 a los 17 años de la Institución Educativa Francisco de Paula Santander localizada en el municipio de Popayán, Departamento del Cauca, Colombia. 65% eran niños y 35% niñas. La selección de la escuela se debió al hecho de ofrecer condiciones favorables para el desarrollo de la investigación y la intención del rector de tener un proyecto en TIC en la disciplina de Matemática, además de poseer laboratorio de informática y acceso a internet.

El designio del grupo surgió por el hecho de, comúnmente, el contenido a ser abordado con mayor énfasis se da en dicho grado, conforme Estándares Básicos de competencias en Matemática y a la propia disposición de los autores de libros didácticos en direccionarlos en esa etapa del currículo escolar. Asimismo, en virtud de percepciones a lo largo de nuestra práctica docente sobre las dificultades de aprendizaje del concepto de función cuando los alumnos de grado once se disponen a resolver actividades envolviendo los registros de representación semiótica de dicho concepto matemático.

Se trabajó en conjunto con el profesor del grado noveno de la institución, Edward Pacheco, haciendo las veces de acompañante en las aulas y como fuente de informaciones del grupo y de los estudiantes, puesto que posee seis años ocupando la labor de docente de matemáticas en la institución. Por ejemplo, manifestó que el grupo presenta rendimiento escolar bajo en el área de matemáticas, con estudiantes que, en su mayoría, demuestran una habilidad regular en la resolución de actividades y nunca tuvieron contacto formal con el concepto de función anteriormente. Eso eliminó las posibles influencias de abordaje escolar durante el desenvolvimiento de las actividades de la investigación.

Con respecto al proceso de investigación-acción, Torrecilla (2011) escribe que, una vez identificado el problema de investigación, necesitamos hacer un reconocimiento o diagnóstico de este, con la finalidad de hacer una descripción y explicación comprensiva de la situación actual. Para esto, se realizó un levantamiento bibliográfico que nos llevó a identificar las pesquisas de maestría y doctorado que abordaron la enseñanza y aprendizaje de función en Brasil en el periodo comprendido entre 2017 hasta 2016. De la misma manera, hicimos un levantamiento de las pesquisas hechas en Colombia entre los años 2011 hasta 2014. Los trabajos escogidos apuntan a la propuesta del tema de nuestra investigación y entre ellos, los que nos pudieran ayudar a responder la cuestión direccionada y que abordaran el tema de enseñanza y aprendizaje de función auxiliada por las tecnologías de la información y comunicación, también que pudiera tener como base teórica la teoría del aprendizaje significativo. Después del levantamiento de los trabajos, en el caso de Brasil, fueron seleccionadas veintidós disertaciones de maestría, siendo tres de ellas de maestría profesional en enseñanza de la Física y Matemática, diez de maestría en enseñanza de las ciencias y educación matemática, cinco de maestría en educación, cuatro de maestría profesional en matemática. Seguidamente, 2 tesis de doctorado, siendo una de doctorado en educación matemática e una de doctorado en educación. En el caso de Colombia, fueron seleccionadas doce disertaciones de maestría, siendo once de ellas de maestría en enseñanza de las ciencias exactas y naturales y una de maestría en enseñanza de las ciencias. Además de estas, un trabajo de pregrado de la licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas.

Hicimos un análisis en cuanto a metodologías de investigación y abordajes, teorías que fueron usadas en las pesquisas y algunos resultados obtenidos, a partir de análisis y de las consideraciones finales dejadas por los autores.

Esos resultados nos permitieron reflexionar sobre el tratamiento del concepto de función, histórica y epistemológicamente, metodologías e instrumentos usados por los autores en la colecta de datos. Esto favoreció nuestra investigación de modo que pudimos aplicarlos en nuestro propio contexto, tomando algunos caminos, reformular y aplicar actividades desarrolladas, verificar si los materiales son potencialmente significativos, etc. Así es sugerido por algunos autores.

Por ejemplo, en casi todas las pesquisas se confirma que el uso de las tecnologías favorece de algún modo la enseñanza-aprendizaje de las funciones, sin embargo, algunas recomiendan que la utilización de dichos recursos en el aula depende de una buena planeación del profesor, ya que a veces, el aprendizaje puede darse de igual manera que en una clase tradicional.

Otro punto importante es que la mayoría de las secuencias didácticas y actividades desarrolladas en algunas investigaciones no usan la teoría de conjuntos y la teoría de las relaciones matemáticas para abordar el concepto de función, dado que esta teoría es base fundamental para entender la esencia dicho concepto. Hacen un tratamiento más tabular y gráfico con situaciones traídas de la física. De igual forma, las comparaciones de esos enfoques y concepciones nos permitieron trazar un perfil sobre las formas de tratamiento de ese objeto matemático y cómo los autores de los diversos materiales pensaron en la enseñanza y en el aprendizaje del concepto de función.

Para el desarrollo del experimento se utilizaron los siguientes instrumentos: diagnóstico inicial, elaboración de actividades, aplicación de las actividades, registro fotográfico de las clases y análisis de resultados. La dinámica del aula fue planeada con el material de secuencias de actividades auxiliadas por las TIC, siendo mediadoras del conocimiento. Para ello, utilizamos los siguientes recursos tecnológicos: El portátil, en la creación de presentaciones en PowerPoint y en Prezi, intentando hacerlas más interactivas para que el educando visualice los conceptos matemáticos de forma diferente a las clases comunes, tomando los enfoques de Ferrer (2007); Reproducción de vídeos o imágenes en el vídeo sobre los temas que involucran el concepto de función y que sean del vivir diario del estudiante; Uso del AVA "*Edmodo"* para interactuar con los estudiantes, por el chat académico, foros, material y actividades para ellos descargar y optamos por la elección de "*Geogebra*" para el desarrollo de algunas actividades en el aula.

En cuanto a los instrumentos de investigación usados para recoger los datos tuvimos: Cuestionarios, Pre-test y Pos-test, observación (Diario de campo, registros fotográficos, Registros de las actividades de los estudiantes y captura de pantalla de las actividades de los estudiantes).

Resultados

El grupo sabe que seré su profesor y muestran curiosidad por cómo van a hacer las clases, entonces se aprovecha para reiterar el convite a participar en esta investigación presentándoles el objetivo del estudio a través de un mensaje de motivación con una presentación en Prezi disponible en el siguiente enlace https://prezi.com/p/k5dqwhkpzqgg/. Igualmente ayudo para presentar la relevancia del proyecto en la construcción de la secuencia de actividades, la cual se organizó en cuatro etapas, cada una de ellas contendrá un desarrollo de actividades correspondiente a las concepciones del concepto de función (verbal, tabular-numérica, gráfico, algebraico, simbólico, figura l). Para intentar desarrollar todas las actividades correspondientes a las concepciones del concepto de función utilizamos 22 horas de intervención pedagógica en el aula. Igualmente, se consideró importante enfatizar para los alumnos la perseverancia y disciplina para estudiar y reescribir los contenidos abordados durante todas las etapas de la investigación.

Enseguida, aplicamos un cuestionario inicial, en formato electrónico, a través de la herramienta *"formularios"* disponible en el servicio *Google drive* que luego estaría disponible para los estudiantes en el AVA *Edmodo*. El formulario tenía preguntas personales y educativas que se refieren al uso de la tecnología, teniendo la finalidad de recoger datos que contribuyeron a caracterizar inicialmente al grupo, de esta manera, conocer mejor nuestro contexto de investigación.

El diagnóstico inicial de la clase elegida se realizó por medio de un pre-test con 11 cuestiones sobre teoría de conjuntos y álgebra como: gráfica de conjuntos, notaciones de conjuntos, relaciones de conjuntos, determinación de conjuntos, operaciones con conjuntos, tipos de conjuntos y conjuntos de números. Las preguntas eran de selección múltiple, pero dejamos la opción "d" vacía con el propósito de que propusieran una solución en caso de que las otras opciones fueran incorrectas. Además, la prueba tenía unas preguntas sobre conocimientos matemáticos claves que sirvieron para hacer un análisis mayor de los conocimientos previos de los estudiantes.

En el transcurso de cada actividad de la intervención, serán respondidos cuestionarios de evaluación de las estrategias de enseñanza utilizadas a lo largo de la intervención pedagógica. Este material puede ser utilizado para ayudar en el análisis de datos en cuanto a los conocimientos previos, así como en cuanto a los conocimientos construidos durante las actividades.

Durante cada encuentro, las actividades prácticas podrán ser registradas en fotografías, diario de campo, indicando fechas y lugares de todos los hechos, pasos, descubrimientos e interrogantes, investigaciones, entrevistas, pruebas, resultados y sus análisis.

A continuación, la primera tarea fue hacer el registro en la plataforma Edmodo, antes preguntando si ya habían trabajado, conocían o escuchado hablar de ella. Sólo el estudiante Sebastián Camilo Balvin dijo que había trabajado con un profesor en otra escuela, pero fue poco y teniendo en cuenta que ingresó en la institución el año pasado.

Gracias a que el entorno virtual *Edmodo* tiene aplicación que se puede descargar en *Google Play Store* algunos estudiantes hicieron uso del *Smartphone* para hacer el registro, ya que la situación del laboratorio de informática no era óptima presentando algunos problemas como bloqueo de las computadoras o en la conexión a internet.

Después de que la mayoría de los alumnos hicieron el registro en Edmodo posteé el cuestionario 1 de caracterización de los estudiantes disponible en el enlace https://goo.gl/forms/yAwMM6pX5oyQxmfP2. Este cuestionario fue respondido por 20 estudiantes. Para las preguntas con múltiples opciones, los alumnos tenían alternativas de opciones disponibles descritas como: nunca, raramente, a menudo y siempre, a fin de que optar por la respuesta indicativa de la frecuencia del uso de las tecnologías, principalmente del ordenador durante sus clases. Las edades de los alumnos que respondieron el cuestionario, siendo que el 30% de los alumnos tiene 15 años, el 5% de ellos tiene 12, el 15% de ellos tienen 13 años, el 25% tiene 14, el 15% de ellos tienen 16 años y el 10% de los 20 alumnos tienen 17 años.

En cuanto al uso del laboratorio de informática durante las clases, en el gráfico 1 muestra las respuestas: 10% (2) de ellos respondieron que nunca utilizaron ese ambiente, el 70% (14) respondieron que utilizan raramente, el 20% (4) respondió que frecuentemente y, 10% (2) informó que siempre utiliza el laboratorio durante las clases. Estos datos muestran que los alumnos poco utilizan el laboratorio de informática de la escuela.

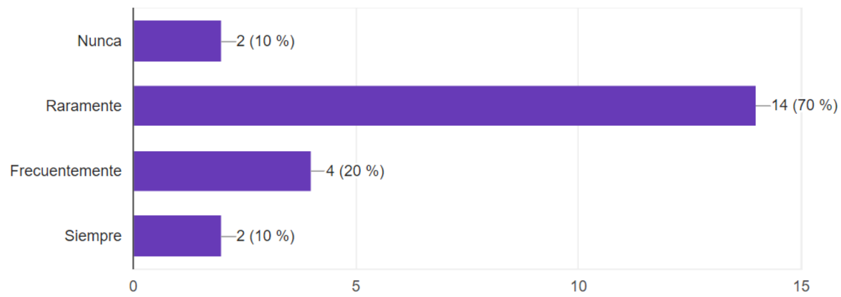


Gráfico 1: Porcentaje de encuestados que utilizan el laboratorio de la escuela en las clases

El gráfico 3 trata del número de alumnos que ya utilizaron el ordenador en las clases de Matemáticas. De los que respondieron, 7 alumnos contestaron que nunca usaron, 9 alumnos respondieron raramente, 1 respondieron frecuentemente y 3 respondieron siempre. De aquí la mayoría (16 alumnos) no están familiarizados con el uso de la tecnología en las clases de matemáticas, lo que representó una novedad para ellos, pero tuvimos que tener mucho cuidado en el uso de algunas TIC para no generar nuevos obstáculos y no avanzar en el aprendizaje.

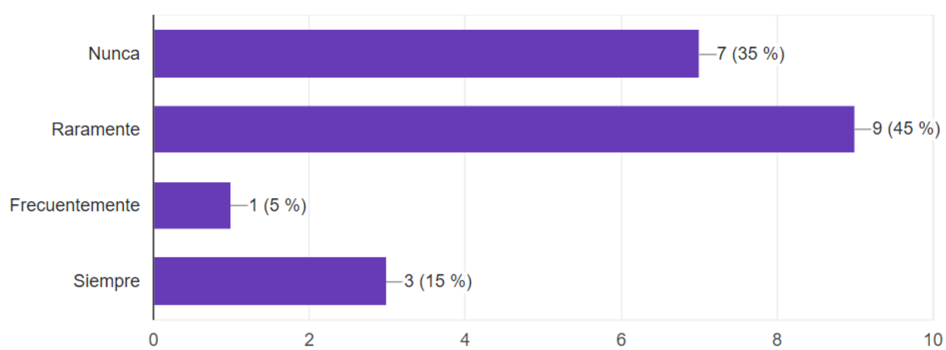


Gráfico 2: Números de respondientes que utilizó el ordenador en las clases de Matemáticas

Otra pregunta del cuestionario fue la frecuencia con que utilizan dispositivos tecnológicos como computadora, portátil, tableta, celular y Smart tv. Los resultados se presentan en un gráfico. Claramente para un total de 19 estudiantes el celular es el dispositivo que más utilizan, todo el tiempo y algunas veces. Esto permitió que el director de la escuela permitiera que los alumnos utilizar este dispositivo en las aulas con fines educativos y que todo lo referente al ambiente *Edmodo* fuera seguido por la aplicación en el celular (no usaron el ordenador).

También se pidió a los jóvenes respondieran sobre el uso del laboratorio de informática de la escuela en la consulta de tareas que los profesores dejan en las aulas, si los profesores solicitan en las aulas la utilización de algunos recursos TIC, si la escuela ofrece condiciones para que las nuevas tecnologías se utilicen como un recurso en el proceso de aprendizaje. Los gráficos muestran que entre los 20 alumnos la mayoría respondió nunca y raramente, o sea más de 18 estudiantes. El anterior da para entender que la escuela casi no promueve el uso de las TIC en las diferentes disciplinas, los profesores prefieren hacer clases sin uso de tecnologías.

Es importante señalar que en un comienzo se trabajó con 20 estudiantes, debido a que fue principio de año escolar, más estudiantes continuaron ingresando al grado 9, finalmente terminamos con 30 estudiantes, sin embargo, para este estudio tendremos en consideración un total de 22 estudiantes que consiguieron nivelarse y hacer todo el proceso.

El gráfico 3 muestra el desempeño de los estudiantes en las pruebas, vemos que en el pre-test la nota máxima fue de dos alumnos, recibieron 3,0, los otros tuvieron una media de 1,6. Por el contrario en el post-test la nota máxima fue 4,8 y la media de los otros fue 2,6; por tanto, cada estudiante alcanzó una nota mayor en el examen final.

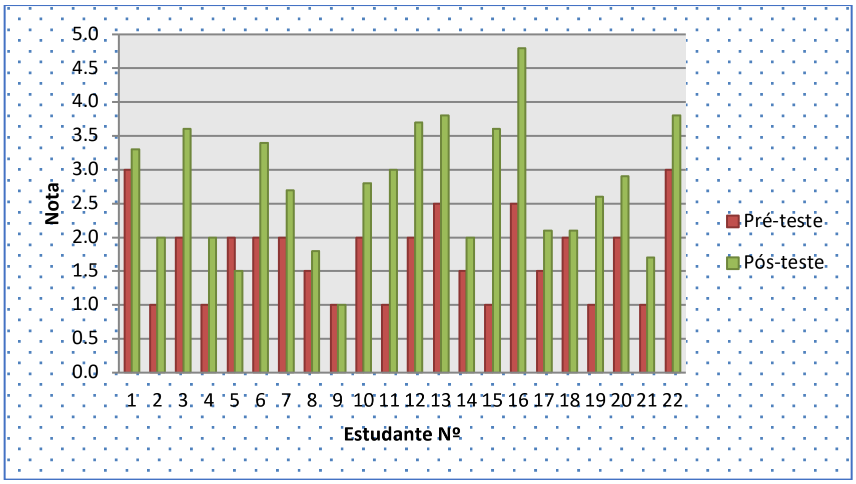


Gráfico 3: rendimiento de los estudiantes en las pruebas (pre y post)

La alumna 5 obtuvo una nota inferior al pre-test, teniendo en cuenta esto, preguntamos al profesor Edward y él explica que la niña tiene problemas de aprendizaje, no sólo en matemáticas, también en otras disciplinas, corroboramos que ella tiene 17 años, es decir, se encuentra en extra edad debido a que ha perdido otros años escolares.

Los alumnos 2, 4, 8, 14, 17, 18 y 21 tuvieron procesos similares, ellos hicieron progreso en su aprendizaje, sin embargo, el resultado final fue bajo. El alumno 9 se quedó en el mismo lugar de aprendizaje, no pudo hacer el proceso. La razón principal fue porque en algunas clases no tuvo buen comportamiento, a veces se distrajo y, por lo tanto, fue necesario llamar la atención y hacer una observación en su observador.

Los alumnos 7, 10,19 y 20 también tuvieron procesos similares, pero su desempeño fue mejor en el post-test con una nota promedio de 2,8. Por lo tanto, los alumnos 3, 6, 11, 12, 13, 15 y 16 ellos fueron de menor a mayor en su proceso de aprendizaje, comenzaron con una nota media de 1,9 y acabaron con una nota media final de 3,7. Finalmente, los estudiantes 1 y 22 mantuvieron su nivel con una mejora al final del proceso.

El desempeño de los alumnos en las pruebas (pre y pos) está representado en el siguiente gráfico (gráfico 4) la información muestra los aciertos totales por preguntas. De esta forma, se puede tener un panorama de los resultados, donde las preguntas fueron marcadas en el eje X y los aciertos en el eje Y. El máximo de aciertos por cuestión serían 22, por el hecho de ser el número de participantes. Las preguntas con mayor número de aciertos fueron las de número 1, 3 y 6, en el pre-test; 9 y 10, en el post-test. Las preguntas 2 y 5 no tuvieron aciertos en el pre-test y la de menor número de aciertos fue la de número 2, en el post-test.

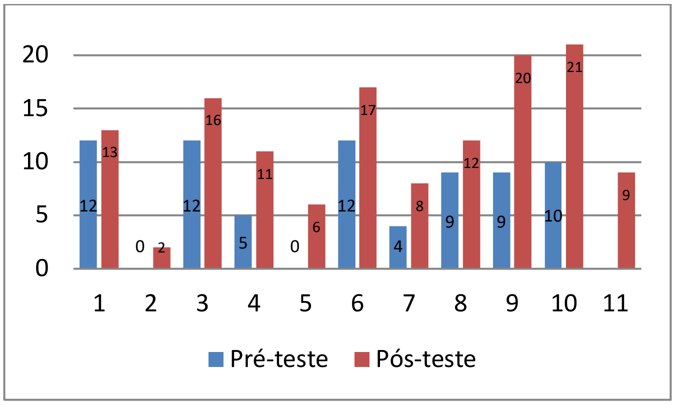


Gráfico 4: Aciertos totales por pregunta (Pre y Pos)

Conclusiones

En el desarrollo de los objetivos propuestos por la investigación, investigar las contribuciones de las TIC para el aprendizaje significativo del concepto de función, las tecnologías se conciben como excelentes aliadas para un trabajo más dinámico en el aula, ya que los estudiantes lograron visualizar de manera diferente los conceptos matemáticos implicados en la construcción de ese concepto. Además, fuera del aula los estudiantes y el investigador tuvieron constante comunicación a través del AVA *Edmodo*, lo que fue aprovechado para estar más cerca de los estudiantes y motivar su aprendizaje.

Con respecto a si se consiguió un aprendizaje significativo del concepto de función, podemos decir que logramos movilizar aprendizaje, como fue mostrado en el gráfico 6, puesto que los resultados de la evaluación final fue mucho mejor para la mayoría de estudiantes, sin embargo, el sentido psicológico del material falló en algunas ocasiones porque, por ejemplo, algunos estudiantes no llegaron a conectar algunos conocimientos nuevos con los conocimientos previos del álgebra y operaciones aritméticas con números enteros, debido a que tuvieron dificultades para resolver algunos problemas. Por eso, sugerimos que el proceso debería iniciarse desde años anteriores.

Este trabajo mostró que los alumnos se involucraron con los recursos tecnológicos y se motivaron con clases más diversificadas, donde el alumno intercambia información y aprendizaje. El ambiente informatizado y la metodología adoptada exigieron participación y discusiones cambiando el escenario tradicional de aula. Por eso el profesor necesitó estar abierto a las innovaciones tanto pedagógicas como tecnológicas, proporcionando así un aprendizaje más dinámico e innovador.

Referencias

Ausubel, D. (1983). Teoria del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF, 1*, 1-10.

Ferrer, D. M. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. (l. C. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, Ed.) *Revista Iberoamericana de Educación*, 4-10.

Hurtado Montesinos , D. (2006). *Las TIC como recurso en el acceso a la lecto-escritura.* Murcia.

Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. *Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo*, *19*, pág. 44. Porto Alegre.

Real Pérez, M. (2013). *Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* Materiales para el desarrollo curricular de matemáticas de tercero de ESO por competencias, Universidad de Sevilla, Sevilla.

Soria, A. M., Giménez, I., Fanlo, A. J., & Escanero Marcen, J. F. (2011). *El mapa conceptual: una nueva herramienta de trabajo. diseño de una practiva para fisiologia.* Zaragoza.

Torrecilla, M. F. (2011). Investigación acción. *Métodos de investigación en Educación Especial*, (págs. 1-32).

Triviños, A. N. (2006). *Introdução à pesquisa em ciências sociais : a pesquisa qualitativa em educação : o positivismo, a fenomenologia, o marxismo.* São Paulo: Atlas.

Valori, A. B. (2002). *El aprendizaje significativo en la practica.* España : deposito legal.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 5 / USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

UN ITINERARIO DE INVESTIGACIÓN ALREDEDOR DE LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA

A RESEARCH ITINERARY AROUND THE DEVELOPMENT OF SIMULATORS WITH GEOGEBRA

Juan Luis Prieto G., Stephanie Díaz-Urdaneta
Asociación Aprender en Red (Venezuela); Universidad del Zulia (Venezuela); Universidade Federal do Paraná (Brasil)
juanl.prietog@gmail.com; stephaniediazurdaneta@gmail.com

Resumen
Desde el año 2013, nuestro grupo de investigación en Venezuela viene promoviendo la elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) como una actividad educativa no convencional desarrollada en los clubes GeoGebra con el propósito de facilitar el aprendizaje geométrico en ambientes dinámicos. Para comprender las implicaciones de la ESG en el proceso de enseñanza y aprendizaje que tiene lugar en los clubes ha sido necesario emprender una serie de investigaciones relacionadas con esta actividad, centradas en una variedad de aspectos que son analizadas desde diferentes perspectivas teóricas. En su conjunto, estas investigaciones conforman un itinerario de investigación que describimos sucintamente en esta comunicación, destacando aquellos trabajos que nos han permitido responder a las inquietudes de investigación surgidas a raíz de la implementación de esta actividad en los clubes GeoGebra.

Palabras clave: simuladores con software dinámico, elaboración de simuladores, geometría, geogebra

Abstract
Since 2013, our research group in Venezuela has been promoting the development of simulators with GeoGebra (DSG) as an unconventional educational activity developed in GeoGebra clubs with the purpose of facilitating geometric learning in dynamic environments. To understand the implications of the DSG in the teaching and learning process that takes place in the clubs, it has been necessary to undertake a series of investigations related to this activity, focused on a variety of aspects that are analyzed from different theoretical perspectives. As a whole, these investigations make up a research itinerary that we describe succinctly in this report, highlighting those works that have allowed us to respond to research concerns arose from the implementation of this activity in GeoGebra clubs.

Key words: dynamical software simulators, development of simulators, geometry, geogebra

Introducción

La elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) es una actividad no convencional que busca promover aprendizaje matemático en un ambiente que combina el uso de tecnologías digitales, la comprensión responsable de teoría geométrica y la modelación matemática (Prieto, 2017). Esta actividad es promovida por el *Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática* desde el año 2013, a través de la conformación de los denominados "Clubes GeoGebra", espacios a través de los cuales la actividad de ESG busca romper con aquellas prácticas matemáticas escolares basadas en la memorización de fórmulas, algoritmos y hechos discretos, dentro de las cuales los alumnos se limitan a observar, copiar y reproducir las "explicaciones" del profesor. El potencial educativo de esta actividad ha sido reconocido dentro y fuera de Venezuela. Prueba de ello es el premio EDUTEC otorgado a los Clubes GeoGebra en 2016, al ser este proyecto una de las tres innovaciones educativas con TIC más representativas de Iberoamérica en ese año.

Básicamente, elaborar un simulador con GeoGebra consiste en producir modelos computacionales representativos de las formas, dimensiones y movimientos de fenómenos naturales y/o artificiales, elegidos por los propios alumnos (Prieto y Gutiérrez, 2015, 2016, 2017). Si bien la ESG puede ser interesante por su relación con los simuladores computacionales, la realidad y el software GeoGebra, es importante reconocer que estas cuestiones por sí solas no garantizan aprendizaje matemático en los alumnos, lo que hace necesario contar con evidencias que nos aporten una comprensión al respecto. La clave de esta comprensión parece estar del lado de un uso responsable del GeoGebra como artefacto que media el saber geométrico y el conocimiento de la realidad.

Como el propósito de comprender las implicaciones de la ESG en el aprendizaje geométrico de los alumnos que participan en los clubes GeoGebra y en los modos de enseñar de los promotores (profesores de matemática) que acompañan estas experiencias, en los últimos años nos hemos dedicado a estudiar esta actividad, revelándose en nuestras acciones cierto "itinerario de investigación". En este sentido, el objetivo del presente trabajo es describir dicho itinerario, partiendo de un conjunto de preguntas centrales que han guiado cada tramo de investigación recorrido.

¿En qué medida la matemática escolar interviene en la ESG?

Para saber si la matemática escolar tiene presencia en las experiencias de ESG, realizamos varios trabajos que describen el modo en que determinados saberes matemáticos emergen en la actividad para guiar las reflexiones y acciones de profesores y alumnos en situación de elaboración. Por ejemplo, Rubio, Prieto y Ortiz (2016) dan a conocer el modo en que ellos han representado con GeoGebra una situación real vinculada con el movimiento en caída libre. En su descripción, los autores definen las *tareas de simulación* que organizan la elaboración del simulador y explican cómo ciertas ideas matemáticas (p. ej., función lineal, cuadrática y trigonométrica, relación ángulo central-arco que subtiende) orientaban sus reflexiones y acciones en la dirección de producir el simulador correspondiente con el software.

Otro ejemplo lo encontramos en Reyes y Prieto (2016). En este trabajo, los autores dan cuenta del modo en que dos alumnas de un club GeoGebra recurren a diferentes interpretaciones de la fracción para establecer un procedimiento de construcción de un cuadrado a partir de uno de sus vértices, teniendo como referente la altura de la grúa torre que servía de fenómeno para las jóvenes. En las conclusiones, los autores refieren que el concepto de fracción se hizo presente cuando las alumnas intentaban localizar los vértices desconocidos del rectángulo. Las interpretaciones de este concepto que fueron evocadas en la actividad fueron las de parte-todo, reparto y operador.

Otros trabajos que muestran la presencia de las matemáticas en la resolución de las tareas de simulación son los siguientes:

- Castillo y Prieto (2016): se describe la manera en que fue posible relacionar la idea de ecuación cuadrática con las acciones de representación del movimiento parabólico, en la elaboración de un simulador del tiro libre en el futbol soccer.

- Díaz y Rubio (2016): las autoras dan cuenta del modo en que usaron la expresión matemática vinculada al movimiento rectilíneo uniforme para obtener la representación de dicho movimiento en una escena de carreras de automóviles.

- Gutiérrez y Fernández (2016): se describe el uso que hacen los autores de la ecuación asociada al movimiento del péndulo simple, para obtener una representación de este movimiento recreando una escena de una niña meciéndose en un columpio.

- Sánchez-S. y Sánchez-N. (2016): se reporta cómo la ecuación matemática asociada a la fuerza eléctrica sirvió para recrear un modelo (el simulador) de energía bajo la Ley de Coulomb.

Más recientemente, Díaz-Urdaneta (2017) caracteriza el conocimiento geométrico puesto de manifiesto en diferentes experiencias de ESG. Particularmente, la autora describe varias formas de construir un rectángulo por alumnos de distintos clubes GeoGebra, a partir de los elementos que estos consideraban durante la construcción. En este sentido, se hace una clasificación de las tareas de construcción que subyacen en la actividad, develando así la teoría geométrica que sustentaba las construcciones de los jóvenes, la cual estaba relacionada con las características o propiedades del rectángulo.

■¿Cómo es la actividad matemática que ocurre en la ESG?

Para responder esta pregunta, decidimos centrar la atención en dos aspectos de la actividad matemática emergente: su estructura y forma de organización, y su relación con los fenómenos reales representados. En cuanto a lo primero, Sánchez-N. y Prieto (2017) se apoyan en noción de *praxeología matemática* propuesta por Chevallard para describir las componentes práctica y teórica que organizan el trabajo matemático dentro de las experiencias de ESG. En el ambiente de geometría dinámica característico de la ESG, los autores reportan tres componentes de las prácticas matemáticas de elaboración:

- *Tareas de construcción*: enunciados que demandan la construcción de determinada figura geométrica en la interfaz del GeoGebra. Este tipo de tareas son de naturaleza geométrica y se resuelven mediante el uso de las diferentes herramientas y funcionalidades dinámicas del software.
- *Técnicas de resolución*: procedimientos de construcción empleados para resolver alguna tarea de construcción.
- *Discursos tecnológicos*: razones que justifican las técnicas de construcción producidas por los alumnos.

Con respecto a lo segundo, Gutiérrez, Prieto y Ortiz (2017) asumen una perspectiva cognitiva de la modelación matemática para describir las relaciones entre las prácticas matemáticas y los fenómenos reales que intentan ser representados durante las experiencias de ESG. En este sentido, los autores se centran en los procesos de modelación por los que transitan un grupo de alumnos que producen un simulador. Mediante el análisis de este caso fue posible caracterizar dos de estos procesos, a saber, la matematización y trabajo matemático, fundamentales en las experiencias de modelación derivadas de la ESG:

- *Matematización*: proceso mediante el cual los alumnos cambian su interpretación del modelo real, para traducirlo en términos geométricos. Este proceso está influenciado tanto por el conocimiento matemático de los involucrados, como por las herramientas y funcionalidades del GeoGebra.

- *Trabajo matemático*: proceso mediante el cual se obtiene un dibujo dinámico que corresponde con el modelo matemático derivado de la matematización, y el cual es construido en la interfaz del software.

¿Qué y cómo se aprende matemática durante la ESG?

Otro asunto que es tratado en nuestro itinerario tiene que ver con el aprendizaje matemático de los alumnos que producen simuladores en los clubes. Al respecto, realizamos dos trabajos de investigación, uno referido a la *experimentación* con GeoGebra y otro que destaca los procesos de *visualización*. En el primer caso, Sánchez-S. y Prieto (2017), usando ideas ofrecidas por el marco Humans-with-media (Borba y Villarreal, 2005), dan cuenta del modo en que unos profesores experimentan con GeoGebra durante la resolución de tareas de construcción geométrica que atienden a fenómenos de la realidad. En esta investigación, la experimentación con GeoGebra se entiende como aquel "proceso de creación y validación de conjeturas sobre las propiedades y relaciones de los objetos geométricos constituyentes de un dibujo dinámico, apoyado en el "ensayo y error" y la exploración de construcciones auxiliares" (p. 41-42).

En Díaz y Prieto (2016) se presentan evidencias de los procesos de *visualización* que contribuyen a una *reorganización del conocimiento matemático* en torno a una experiencia concreta de ESG, las cuales son descritas a la luz de la teoría Humans-with-media antes citada. El análisis se realiza especialmente durante el momento de matematización por el que transitan unos alumnos del club GeoGebra. Apoyados en ideas de Hershkowitz (1990), Alsina, Fortuny y Pérez (1997) y Torregrosa (2002), los autores asumen una concepción de la visualización en la ESG como aquel proceso cognitivo a partir del cual se representa cierto fenómeno seleccionado por uno o varios alumnos, utilizando para ello conceptos matemáticos, en diferentes registros de representación y que son ampliadas o reorganizadas durante el desarrollo de la actividad.

¿Qué otros conocimientos se ponen de manifiesto en la ESG?

En un primer momento de aplicación del proyecto Club GeoGebra, las experiencias de ESG nos mostraban que la producción de los simuladores estaba fundamentada en modelos geométricos. Sin embargo, evidencias posteriores nos han mostrado que durante estas experiencias surgen contenidos algebraicos que, a través de la representación gráfica de las expresiones y la manipulación de diferentes elementos de las expresiones algebraicas permiten la representación de alguna parte del fenómeno que se trate. Entre los casos que podemos destacar tenemos el de Contreras y Díaz (2015) quienes utilizaron la expresión $f(x) = a \cdot sen\,(bx + c) + d$, para obtener una representación gráfica de esa función que representase una parte del simulador en cuestión, variando los parámetros asociados a la expresión. Otro caso es el de Faria (2016), quien se apoyó en un sistema de ecuaciones asociadas a la elipse para representar la órbita de la tierra alrededor del sol. Finalmente, en Bello (2017) se reporta como a través de la manipulación unas ecuaciones que modelan fenómenos físicos fue posible estimar la posición de la tierra en su órbita alrededor del sol en el momento de producirse el eclipse total de sol de 1998.

¿Qué saberes son movilizados por los promotores del Club GeoGebra al gestionar las experiencias de ESG de sus alumnos?

El reconocimiento de la dificultad que enfrentan los alumnos para resolver ciertas tareas de construcción surgidas en las experiencias de ESG y para comunicar a otros las técnicas empleadas por ellos, nos ha mostrado que los promotores de los clubes, en condición de profesores de matemática, piensan y actúan de forma muy particular para ayudar a sus alumnos a trascender estas dificultades y lograr el aprendizaje esperado. Estos indicios nos han hecho interesarnos en los saberes de los profesores que tienen a su cargo los clubes GeoGebra. En este sentido, Prieto y

Ortiz (en prensa) dan cuenta de tres saberes del trabajo matemático que siete promotores del proyecto Club GeoGebra fueron capaces de identificar sobre una escena de comunicación de una técnica producida en un club y registrada en formato de vídeo. Los saberes en cuestión son denominados: (i) saber cómo analizar la inconsistencia de una construcción, (ii) saber cómo comunicar una técnica de construcción y (iii) saber cómo anticipar una técnica. En sus conclusiones, estos autores afirman que los saberes del trabajo matemático antes mencionados están fuertemente arraigados en las experiencias de gestión de los promotores.

¿Cuáles son los asuntos de interés actual?

Nuestra necesidad de ampliar nuestra mirada de la ESG para conocer y comprender mejor aquellos fenómenos de aprendizaje y enseñanza que no parecen tan evidentes, nos han llevado a explorar nuevos marcos interpretativos. En este sentido, la perspectiva sociocultural nos proporciona nuevas herramientas para interpretar lo que ocurre en el despliegue de la actividad de ESG, atendiendo aquellas cuestiones de interés para el proyecto que habían permanecido relegadas. Particularmente, nos apoyamos en la *Teoría de la Objetivación* propuesta por Radford (2006; 2014) para estudiar tanto el significado del aprendizaje geométrico dentro de las experiencias de ESG, desde una mirada histórico-cultural, como la ética comunitaria que es necesaria promover en la actividad para lograr un aprendizaje con las características antes develadas.

En este sentido, actualmente nos encontramos analizando datos que nos proporcionen evidencias de las formas de pensamiento geométrico y procesos de objetivación del saber geométrico que se producen en experiencias concretas de ESG, así como también de las formas de colaboración humana que coadyuvan al aprendizaje geométrico en estas experiencias y que constituyen una ética basada en la responsabilidad, el compromiso y el cuidado del otro. Otro fenómeno de interés para nuestro grupo tiene que ver con los saberes necesarios para que los profesores que tienen bajo su responsabilidad los clubes GeoGebra puedan gestionar eficientemente el proceso de trabajo matemático en el que trabajan junto a sus alumnos durante la ESG, de manera que puedan promoverse el aprendizaje geométrico de los jóvenes. Aunque el trabajo de Prieto y Ortiz (en prensa) es un avance al respecto, aún queda mucho por hacer para dar cuenta de la nueva ética detrás de la ESG.

Finalmente, un fenómeno que queda pendiente por trabajar tiene que ver con la formación de nuevos promotores que puedan integrarse al proyecto Club GeoGebra para garantizar su permanencia en el tiempo. Al respecto, nos interesa indagar sobre las características del diseño de esta formación tan particular (centrada en la enseñanza de la geometría en entornos dinámicos), como en el aprendizaje logrado por aquellos profesores que se incorporan a esta formación.

Reflexiones finales

En este trabajo hemos descrito sucintamente la manera en que hemos desarrollado un itinerario de investigación alrededor de la elaboración de simuladores con GeoGebra con el fin de comprender las implicaciones de esta actividad no convencional en el aprendizaje y enseñanza de la geometría (y otros contenidos matemáticos) de los profesores y alumnos que participan en estas experiencias. En este sentido, fueron descritos los estudios realizados en atención a las evidencias encontradas, destacando los siguientes hechos:

- el conocimiento matemático escolar interviene en la ESG, especialmente el conocimiento geométrico,
- la ESG es una actividad matemática con componente práctica y teórica, además que se produce en un ciclo de modelación que incluye procesos como la matematización y el trabajo matemático,
- durante su participación en las ESG, los alumnos producen modelos reales, matemáticos y computacionales para tratar de representar los fenómenos que ellos mismos seleccionan,

- el aprendizaje matemático que tiene lugar en las experiencias de ESG puede interpretarse en términos de capacidades para la experimentación con el software y la reorganización derivada de procesos de visualización,
- las experiencias de ESG demandan no solo de teoría geométrica, sino también de contenidos de otros dominios de la matemática, inclusive de otros campos científicos como la física, y
- en su trabajo con los alumnos, los profesores ponen de manifiesto un conjunto de saberes docentes relacionados con los problemas que se tienen para analizar técnicas inconsistentes, comunicar o anticipar una técnica.

En lo descrito hasta el momento, encontramos razones para creer que la elaboración de simuladores con GeoGebra es una actividad educativa no convencional que puede impactar favorablemente en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. A pesar de los avances en nuestros estudios, consideramos importante insistir con este tipo de trabajos para avanzar en nuestra comprensión de la actividad y la promoción del aprendizaje geométrico a través de esta. Con todo lo mostrado se deja claro que el fomento de los clubes GeoGebra en nuestras escuelas es una gran oportunidad para trascender los procesos monótonos que han caracterizado la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Pérez, R. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Bello, Y. (2017). La posición de la Tierra en el eclipse total de sol del año 1998 en el GeoGebra. En: J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 198-204). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Castillo. L. A. y Prieto, J. L. (2016). Simulador de movimiento parabólico con GeoGebra. Aprendiendo matemática y física con el fútbol soccer. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 135-155). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Contreras, F. y Díaz, S. (2015). Elementos de la M16 y la matemática. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 127-133). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Díaz, S. y Prieto, J. L. (2016). Visualización en la simulación con GeoGebra. Una experiencia de reorganización del conocimiento matemático. En Y. Serres, A. Martínez, M. Inojosa y N. Gómez (Eds.), *Memorias del IX Congreso Venezolano de Educación Matemática* (pp. 445-453). Barquisimeto, Venezuela: ASOVEMAT.

Díaz, S. y Rubio, L. (2016). Movimiento rectilíneo uniforme con GeoGebra. Un simulador para la enseñanza de la Física. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 156-168). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Díaz-Urdaneta, S. (2017). Construcción de rectángulos con GeoGebra. Formas de instanciación de un mismo saber matemático. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 253-270). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Faria, R. (2016). Movimiento planetario en el sistema solar desde una perspectiva tridimensional. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 85-98). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Gutiérrez, R. y Hernández, M. F. (2016). Simulación de fenómenos físicos con GeoGebra. Una oportunidad de aprendizaje mediada por tecnologías digitales. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 224-240). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Gutiérrez, R. E., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática*, 29(2), 37-68.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70-95.

Prieto, J. L. (2017). *Proyectos de simulación con GeoGebra: una estrategia del desarrollo del pensamiento científico desde el servicio comunitario*. Trabajo de ascenso, Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia, Maracaibo.

Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2015). *Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (Comps.). (2017). *Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Prieto, J. L. y Ortiz, J. (en prensa). Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Relime, Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, n. especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103–129.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación [On the theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.

Reyes, J. y Prieto, J. L. (2016). Interpretaciones de la fracción en una experiencia de simulación con GeoGebra. *Revista Educación y Humanismo*, 18(30), 42-56.

Rubio, L., Prieto, J., & Ortiz, J. (2015). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *IJERI: International Journal of Educational Research and Innovation*, 2, 90-111.

Sánchez-S., I. y Prieto, J. L. (2017). El uso experimental del GeoGebra en un contexto de formación docente en matemática. En Rosas, A. M. (Ed.), *Avances en Matemática Educativa. Tecnología para la educación. No. 4* (pp. 38-51). Ciudad de México: Lectorum.

Sánchez-N., I. y Prieto, J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números Revista de Didácticas de las Matemáticas*, 96, 97–101.

Sánchez-S., I. y Sánchez-N., I. (2016). Un ambiente de aprendizaje matemático en la elaboración del simulador "Ley de Coulomb" con GeoGebra. En J. L. Prieto y R. E. Gutiérrez (Comps.), Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia (pp. 209-223). Maracaibo, Venezuela: Aprender en Red.

Torregrosa, G. (2002). *Visualización y aprendizaje de la Geometría*. Universidad de Alicante, España.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

NATURALEZA DINÁMICA DE LA VARIACIÓN EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL: SIMULACIÓN DIGITAL DE UN FENÓMENO FÍSICO CON PERSPECTIVA DE GÉNERO

DYNAMIC NATURE OF VARIATION IN THE DIFFERENTIAL EQUATION: DIGITAL SIMULATION OF A PHYSICAL PHENOMENON WITH A GENDER PERSPECTIVE

Brenda Carranza-Rogerio, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
brenda.carranza@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen

Se presentan los avances de una investigación en curso, cuya motivación surgió de una problemática doble: la persistente desarticulación del currículo escolar en el Nivel Superior y la aún escasa presencia de las mujeres en carreras STEM. Se detalla la definición del problema de investigación a partir de la transversalidad de las ecuaciones diferenciales y la necesidad de atender su introducción. Se describen los fundamentos que permitieron perfilar una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial para rescatar el *carácter funcional* del saber, esencial para el diseño de una iniciativa *integradora* (en el sentido de interdisciplinariedad y de inclusión de género). Se muestran algunos ejemplos de cómo se abordó la hipótesis de investigación a través de un diseño en un ambiente digital y se comparten las primeras reflexiones respecto al *valor pragmático* y *epistémico* del ambiente en la correspondencia de la naturaleza dinámica de la noción con las *representaciones dinámicas* del fenómeno físico asociado a través de *estrategias dinámicas*.

Palabras clave: naturaleza dinámica, variación, ecuación diferencial, STEM, género

Abstract

Here are presented the advances of an ongoing investigation whose motivation arose from a twofold issue: the persistent disarticulation of higher education curriculum and the still scarce presence of women in STEM careers. The definition of the research problem is detailed based on the transversality of the differential equations and the need to address their introduction. The theoretical foundations that led to outline a *dynamic nature* of the variation in the differential equation for regaining the *functional character* of knowledge are also described, as this character is assumed essential for the design of an *integrative* initiative (in the sense of interdisciplinarity and of gender inclusion). Some examples of how the research hypothesis was addressed via a design in a digital environment are shared, as well as the first reflections on the *pragmatic* and *epistemic value* of the environment in the correspondence of the dynamic nature of the notion with the *dynamic representations* of the associated physical phenomenon via *dynamic strategies*.

Key words: dynamic nature, variation, differential equation, STEM, gender

Introducción

Se presentan los avances de una investigación en curso, cuya motivación surgió de una problemática doble: (1) la persistente desarticulación del currículo escolar en el Nivel Superior (universitario) y (2) la aún escasa presencia de las mujeres en carreras del área de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés).

El primero de dichos fenómenos, además de estar reportado en investigaciones nacionales (Hernández, 1995) e internacionales (Marciuc y Miron, 2014; Roth, 2014), se puede apreciar en la propia estructura del plan de estudios de algunas universidades mexicanas. Como ejemplo está el de la universidad de la cual provenían las y los participantes de la fase empírica de la investigación: para el primer semestre se contempla la asignatura de Física I y, para el segundo, la de Ecuaciones Diferenciales; sin embargo, consultado un libro (Halliday, Resnick y Walker, 2009) de la bibliografía básica recomendada para el curso inicial de física, se observa, desde el segundo capítulo, una concepción *diferencial* de la velocidad y de la aceleración, así como la necesidad (implícita) de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales para deducir las fórmulas correspondientes al movimiento con aceleración constante. Más aún, para el momento en que esto es abordado, en el curso de Cálculo I (de primer semestre) todavía no se ha tratado el tema de la derivada.

Respecto a la baja presencia de mujeres en carreras STEM, más allá de equilibrar en términos numéricos la desigual distribución por sexo de la matrícula (41.8% de mujeres en *ciencias exactas y naturales* y 26.8% en *ingeniería y tecnología* en el año escolar 2012-2013, de acuerdo con Zubieta y Herzig, 2016, p. 161), se plantea la necesidad de conformar *espacios inclusivos* para el desarrollo académico de las mujeres (Dasgupta y Stout, 2014; Master y Meltzoff, 2016) y, más aún, de propiciar su inclusión desde el propio tratamiento matemático, por ejemplo, atendiendo el *carácter funcional del saber* (Farfán y Simón, 2016).

A partir de lo anterior, se comenzó a perfilar un problema de investigación que permitiera abordar la problemática desde un enfoque *integrador* de la Matemática Educativa, tanto en el sentido *interdisciplinario* que propone Sanders (2009), como en el sentido de *inclusión* para la democratización del aprendizaje (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014; Roschelle y Hegedus, 2013).

El problema de investigación se precisó entonces tras realizar un análisis general de los programas de estudio de las carreras STEM de una institución pública mexicana. A través de él fue posible identificar a las ecuaciones diferenciales como un elemento *transversal* en dicha área: *horizontalmente*, al estar presente en la mayoría de las carreras, y *verticalmente*, al retomarse en diversas asignaturas de distinto nivel en una misma carrera.

Con base en tal observación se llevó a cabo una revisión inicial de literatura (Carranza-Rogerio y Farfán, 2018) que permitió identificar *tendencias* en investigación respecto al aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (ordinarias): el estudio de *fenómenos físicos* (para la contextualización), el uso de *tecnología* (para la simulación o el análisis de datos) y la *modelación* matemática (para la matematización de dichos fenómenos); comunes en varios estudios, con mayor o menor énfasis dependiendo del enfoque del cual partieran.

Etapas posteriores de revisión y análisis condujeron a la identificación de un aspecto adicional que hizo posible acotar el problema de investigación: si bien la literatura era amplia entorno al tratamiento de las ecuaciones diferenciales, poco se hablaba de su *introducción*. Así, se decidió abordar esta etapa tomando en cuenta las tendencias antes señaladas.

En las secciones subsecuentes se describe el desarrollo que ha seguido la investigación hasta el momento: inicialmente, los fundamentos que permitieron perfilar una *naturaleza dinámica* de la variación en la ecuación diferencial –con base en la cual se identificaron pautas para la concepción de una *evolución pragmática* de su construcción que contemplara el uso de *estrategias dinámicas* (asociadas a las representaciones dinámicas de un fenómeno de variación) además de *estrategias variacionales* (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017)–; seguidamente, la hipótesis epistemológica de investigación, fruto del análisis de los fundamentos descritos; posteriormente, la manera en la cual este supuesto puede ser explorado a través de un diseño en un ambiente digital; luego, a grandes rasgos, el proceso de implementación del diseño (fase empírica de la investigación y etapa más actual en el desarrollo del estudio) con la perspectiva de género integrada; y, para cerrar, las primeras reflexiones respecto al *valor pragmático* y *epistémico* del ambiente digital en la correspondencia de la *naturaleza dinámica* de la noción con las *representaciones dinámicas* del fenómeno físico asociado a través de *estrategias dinámicas*.

Tsme, stem y género

Por un lado, se reconoce la formación de competencias transversales como un objetivo clave en la reconstrucción del currículo que demandan los cambios estructurales de la sociedad del siglo XXI (Marciuc y Miron, 2014). Por otro lado, en lo que respecta al *género* (entendiéndolo como una construcción social, distinta de *sexo* que alude a lo biológico), Dasgupta y Stout (2014) señalan la importancia de la *sensación de pertenencia* de las mujeres en el área STEM, pues se ha demostrado que aquellas que creen en visiones estereotipadas ven mermado su desempeño (p. 24). Ante ello, Master y Meltzoff (2016) proponen: diseñar espacios de aprendizaje neutros (sin objetos estereotípicos); hacer énfasis en que las habilidades requeridas en el área STEM son maleables; remarcar que las carreras STEM involucran trabajo colaborativo; así como mostrar modelos de rol (mujeres o no) diferentes al estereotipo y con quienes puedan identificarse de algún modo (p. 227).

Asimismo, la *exclusión* de las mujeres y otros *grupos minoritarios* (en cantidad o en representatividad) es un fenómeno que se puede abordar desde el propio *discurso matemático escolar*: la cultura del salón –e incluso el contenido matemático– es una propiedad emergente construida conjuntamente por quienes participan en su construcción, principalmente, a través del *discurso* (Pierson-Bishop, 2013, p. 234); sin embargo, este discurso suele ser hegemónico y utilitario (Soto y Cantoral, 2014), limitando el acceso del alumnado al aprendizaje.

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se sugiere rediseñar dicho discurso considerando al *saber* cómo conocimiento puesto en uso, aunado a “una visión crítica, solidaria y humanista de la sociedad del conocimiento” (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014, p. 112). Esto es congruente con la perspectiva de Roschelle y Hegedus (2013) sobre el *acceso democrático* al aprendizaje, pues lo abordan en tres sentidos: en cuanto al filtro de grupos privilegiados; con relación a sus implicaciones en la participación ciudadana; y al ver en las representaciones dinámicas una oportunidad para crear notaciones más accesibles hacia las matemáticas del cambio y la variación (p. 7).

En el caso de las mujeres, el carácter utilitario del discurso “no solamente las excluye de la construcción del conocimiento matemático, sino que […] no es suficiente para despertar su interés en matemáticas o para cumplir sus expectativas” (Farfán y Simón, 2016, p. 182), pues se ha identificado que sus respuestas, inferencias y argumentaciones toman en cuenta una gran cantidad de variables *funcionales* relacionadas con el fenómeno específico (p. 181).

En consecuencia, se determinó que el diseño habría de conceder un papel central a este carácter funcional del saber. Al respecto, Mendoza y Cordero (2012), quienes estudian los usos de las ecuaciones diferenciales y de la modelación en una comunidad de ingenieros en formación, reportan que no se ha logrado que el conocimiento matemático sea funcional pues se busca explicar la matemática desde ella misma, "soslayando otros campos, […] desconociendo las prácticas de referencia que hicieron surgir el conocimiento" (p. 1023).

A partir de estas condiciones, se decidió abordar el problema *desde* la Matemática Educativa a través de una visión *socioepistemológica*, pues ella plantea constructos teóricos que atienden la transversalidad de la dimensión *sociocultural* del aprendizaje en consonancia con sus dimensiones *didáctica*, *cognitiva* y *epistemológica*. A su vez, las preocupaciones de esta perspectiva coinciden con las de un enfoque integrador de la educación STEM:

Se postula [en el caso del cálculo] como objetivo al análisis de los *procesos de construcción del conocimiento matemático* cuando estos se guiaron por la *transversalidad* del pensamiento físico, ámbito de *significación* progresiva cuyo *valor epistémico* se nutre de las peculiaridades de los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza. (Cantoral, 2013, p. 102)

El remarcar que el problema se aborda *desde* esta disciplina responde al carácter *interdisciplinario* de la iniciativa. Como Roth (2014) señala, uno de los problemas que suele enfrentar la interdisciplinariedad es que las matemáticas son consideradas como una disciplina *de servicio*. La consecuencia de esta concepción es que, dado que las intenciones curriculares de las demás materias son diferentes a las de las matemáticas, se producen tensiones acerca de dónde hacer énfasis en las iniciativas interdisciplinarias (p. 317).

Si bien la investigación parte de un objetivo para el aprendizaje *en* matemáticas, la consideración anterior devino en reconocer la necesidad de delimitar los conceptos físicos que intervendrían en el proceso, puesto que se buscaba rescatar el carácter funcional del saber a través del estudio de un fenómeno físico. A su vez, dado que la comunidad objetivo estaba conformada por estudiantes de una carrera fisicomatemática, se asumió importante el establecer los inicios de un puente entre las asignaturas de Ecuaciones Diferenciales y Física.

Contexto y práctica de referencia

Desde el *constructivismo social*, Simon (1995) propone una articulación alrededor de diversas nociones que abordan la contextualización. De manera particular, alude a que el objetivo es proponer una situación de aprendizaje en la cual el alumnado busque una respuesta al *milieu*, en lugar de una que solo busque satisfacer a quien enseña (p. 120).

Desde la TSME, Reyes-Gasperini (2016) identifica dos contextos que rigen a las interacciones didácticas: el *contexto situacional* y el *de significancia*. “El primero, refiere a la manera de contextualizar la tarea y, el segundo, la manera de contextualizar la construcción de conocimiento matemático (basado en objetos o en prácticas)” (p. 58). La investigadora añade que “las *prácticas de referencia* están inmersas en el *contexto de significancia* mientras que los marcos de referencia podrían relacionarse con el *contexto situacional*” (p. 58).

La noción de *práctica de referencia* fue introducida por Farfán (2012) con base en la matematización del estado estacionario a partir de fenómenos propios de la ingeniería. En el caso de la ecuación diferencial, al estar epistemológicamente correlacionada con el desarrollo del cálculo –*fluxional*– (Hernández, 1995), comparte con éste prácticas de referencia. Cantoral (2013) señala que la teoría de fluxiones fue la herramienta mediante la cual se puso en uso el conocimiento –matematizando el cambio instantáneo–, dando pie al nacimiento de un saber con práctica de referencia específica: la cinemática y la dinámica (pp. 125-126).

Estas dos ramas de la física se diferencian en que la *cinemática* describe el movimiento de objetos, su comparación y clasificación, independientemente de sus causas; mientras que la *dinámica*, para el caso de movimiento, busca describir su evolución con respecto al tiempo y con relación a las causas que lo originan. Para definir las características que se retomarían a partir de estas prácticas de referencia para apoyar la introducción de la ecuación diferencial ordinaria, se retomaron los trabajos de Arrieta (2003) y Arthur (1995).

Por un lado, la *figuración de las cualidades* de Oresme –que retoma Arrieta (2003)–permite establecer un puente entre las descripciones *cinemáticas* de los miembros del Merton College y el análisis *dinámico* de Galileo mediante una caracterización gráfica del movimiento independiente a la utilización de ejes coordenados graduados, pero con una patente asociación funcional de correspondencia entre la “cualidad” (velocidad) y el tiempo. En particular, Suárez (2014) retoma esta figuración para estudiar el uso de gráficas en la modelación de fenómenos de variación a través de figuras geométricas (p. 97).

Por otro lado, Arthur (1995) provee un indicio a partir del análisis de lo *fluxional* para la visión newtoniana, pues señala que ésta contenía inmersa una concepción *absoluta* del tiempo como referente inmutable con respecto al cual se cuantificaba el cambio, ya que el considerar *fluentes* (cantidades que fluyen) presupone la existencia de un *flujo* temporal cuya magnitud no aumenta ni disminuye; a su vez, asumir que con él se generan *todas* las cantidades, permite *comparar* las tasas (*fluxiones*) a las cuales cambian (p. 334). A partir de este relativismo con respecto al tiempo, se vislumbró una *naturaleza dinámica* en la variación.

Ahora bien, en términos generales, la ecuación diferencial ordinaria se caracteriza por tres aspectos: (a) en ella aparece al menos una *derivada* (como función o como cociente de diferenciales) de la función a analizar; (b) a través de ella es posible *relacionar* una o más derivadas de diferente orden y la propia función; (c) su solución es de tipo funcional y depende de condiciones particulares (llamadas *condiciones iniciales*) del fenómeno descrito.

No obstante, en el discurso usual –observable a través de los libros de texto (Hernández, 1995)– solo el primero suele ser explícito, aunque se omiten explicaciones sobre la notación (Martínez, Pluvinage y Montaño, 2017). El segundo suele sugerirse en términos *utilitarios* conforme se incorporan marcos de referencia reales. Y el tercero suele responder más a las demandas algebraicas del planteamiento (“dadas las condiciones iniciales, hallar la solución particular …”) que a cuestiones asociadas al contexto (Buendía y García, 2002).

Por ende, para abordar tales aspectos en una introducción a la ecuación diferencial, se propone rescatar el análisis cinemático y dinámico del movimiento. En esta labor, se plantea retomar las *estrategias variacionales* propuestas por Caballero-Pérez y Cantoral (2017), las cuales “deja[n] ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación” (p. 1060) y consisten en: la *comparación* (cuantificación del cambio), la *seriación* (conjunto de comparaciones sucesivas), la *estimación* y la *predicción*. Asimismo, dos nociones que retoman los autores de la psicogenética: la *causalidad* y la *temporalización*, donde la primera implica reconocer que, entre todas las posibles variables que intervienen en un fenómeno, existen algunas que se pueden relacionar entre sí; mientras que la segunda conlleva reconocer los estados intermedios de un fenómeno (Cantoral, Moreno-Durazo y Caballero-Pérez, 2018). Y, transversal a ello, la consideración de un *sistema de referencia* (Caballero-Pérez y Cantoral, 2017) para “organizar” la variación del fenómeno mediante cuatro elementos: *variables* (¿qué cambia?), *unidades de referencia* (¿respecto de qué cambia?), *unidad de medida* (¿cuánto cambia?) y *temporización* (¿cómo cambia?).

En cuanto a las condiciones iniciales, se retoman los hallazgos de Buendía y García (2002) que parten de observar gráficamente que, en el caso de las ecuaciones diferenciales de primer orden, la familia de soluciones se conforma por curvas que no se cruzan entre ellas, por lo que, para determinar una solución particular, basta con *una* condición inicial que indique un punto por el cual pasa la curva. En el caso de las de segundo orden, al observar que varias curvas solución se pueden intersecar en un mismo punto, se hace necesario saber además de qué manera pasa la solución particular por él, lo cual se obtiene con una *segunda* condición inicial (p. 112). Asimismo, abordar esto mediante la *modelación* de un fenómeno físico permite articular los diferentes significados contextuales de las condiciones iniciales para una resignificación de la relación entre el orden de una ecuación y su número de condiciones iniciales necesarias (Cordero, Solís, Buendía, Mendoza y Zaldívar, 2016, p. 116).

Respecto a la modelación, se retoma la concepción de Arrieta y Díaz (2015), quienes la definen como “una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo” (p. 35). La modelación de un fenómeno puede abordarse desde la experimentación, ya sea presencial, discursiva o *virtual* (Arrieta y Díaz, 2016); esta última comprende la *simulación* en ambientes digitales a través de animaciones interactivas, la cual se postula como un elemento que permite fusionar la modelación con las tecnologías digitales para vincular hechos e ideas asociadas a un fenómeno físico (Rubio, Prieto y Ortiz, 2016). En general, se prefiere el término “digital” al “virtual”, pues lo *virtual* posee la connotación de *algo no real* y en este tipo de ambientes se puede tener un soporte *concreto* significativo para el alumnado, que resulta ser incluso más limpio, flexible y extensible que su contraparte física (Sarama y Clements, 2016, p. 73).

Por otro lado, se postula que la propia naturaleza dinámica de la variación en la ecuación diferencial se encuentra intrínsecamente relacionada con las representaciones dinámicas que permite un software de matemática dinámica, como el software libre GeoGebra. Al respecto, Parada, Conde y Fiallo (2016) señalan que, en este ambiente, "todas estas variaciones se pueden representar *en movimiento*" (p. 1035) con lo cual se potencia la visualización de *variantes* e *invariantes* y, por ende, "involucra al concepto de *función* como la generalización de la *interdependencia* entre magnitudes variables" (pp. 1035-1036). Así, se plantea que la propia herramienta permite acceder a cualidades del objeto matemático mediante *estrategias dinámicas* en cuyo proceso se reconoce –además de un *valor pragmático*– un *valor epistémico* (Artigue, 2002) asociado a su naturaleza.

Con base en todo lo anterior, se planteó la siguiente hipótesis epistemológica: *la noción de variación en la ecuación diferencial surge de modelar un fenómeno como el movimiento a partir de su naturaleza dinámica*.

Diseño para la fase empírica

A continuación, se presentan algunos de los elementos del diseño elaborado para mostrar ejemplos sobre cómo se abordó la hipótesis con base en las consideraciones descritas. En términos generales, el diseño se basa en la observación de la caída del agua.

Inicialmente, se muestra la caída simultánea de tres gotas de agua con velocidades iniciales diferentes (Imagen 1). En el applet, además de los controles de la animación, aparecen dos deslizadores: tiempo y "paso del tiempo". Cuando se inicia la animación, se muestra la caída de las gotas de agua y el tiempo transcurrido.

Se cuestiona entonces cuál de las tres gotas ha caído más rápidamente y las razones posibles de la diferencia en las caídas (origen del movimiento: *causalidad*).

Dado que la programación se hizo de tal manera que se simulara el tiempo real de caída, la percepción de la diferencia se torna complicada pues los desplazamientos son muy rápidos. En ello entran en juego los deslizadores. Con el primero, es posible observar la posición de las gotas en cada momento; no obstante, difícilmente se logra un transcurso temporal uniforme mediante el desplazamiento manual del cursor. Para ello, el segundo, al permitir *ralentizar* el tiempo, tiene una implicación directa en el estudio del *comportamiento* del fenómeno, pues permite apreciar la dinámica de las variables de manera continua.

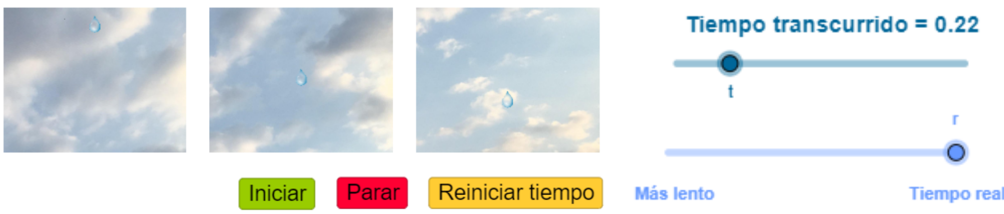


Imagen 1: Escenas de la caída de tres gotas de agua (izquierda) y deslizadores (derecha) del applet.

Más adelante en el diseño, se muestra la unión de estas tres escenas de manera vertical (hasta arriba la de la izquierda, en medio la del centro y hasta abajo la de la derecha), lo cual evidencia que las escenas corresponden a diferentes intervalos en la caída de una misma gota.

En seguida, se cuestiona sobre el comportamiento de la caída si la primera escena se subdividiera en más y más partes (*temporalización*).

Otro momento del diseño plantea el análisis de la caída del agua en una cascada artificial (agua regulada que proyecta figuras, Imagen 2 – izquierda) a partir de un video. Después, se muestra una simulación del fenómeno (Imagen 2 – derecha) para ser analizada posteriormente de forma gráfica y numérica mediante estrategias variacionales.

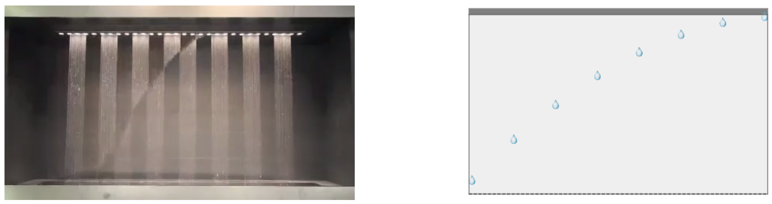


Imagen 2**:** Escena de la cascada artificial (izquierda) y escena de la simulación digital interactiva (derecha).

Luego de una exploración cualitativa de la caída del agua, se aborda la *comparación* y *seriación* de forma numérica mediante una hoja de cálculo integrada a la interfaz del ambiente y se cuestiona sobre el comportamiento de las diferencias. Seguidamente, se muestran las diferencias gráficamente (Imagen 3 – izquierda) con un primer botón y, con un segundo botón, se muestra una animación de su desplazamiento hacia la parte inferior de la pantalla con sus extremos superiores alineados (Imagen 3 – derecha).

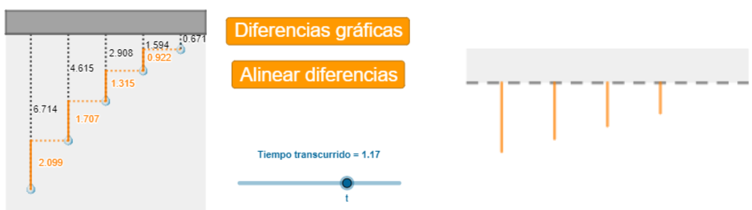


Imagen 3**:** Diferencias gráficas (izquierda) y diferencias alineadas en acercamiento (derecha).

Se propone entonces mover el deslizador de tiempo para explorar qué ocurre con el *comportamiento* de estas diferencias alineadas (lo *variante* e *invariante*).

El diseño continúa con la construcción de las gráficas de posición, velocidad y aceleración (analizando su correlación) y una introducción a la notación. Transversalmente, se aborda la necesidad de las *condiciones iniciales* para deducir aspectos particulares del fenómeno. Por ejemplo, en el cierre del diseño, se busca explorar dicha necesidad con relación al número de condiciones requeridas para el orden de la ecuación.

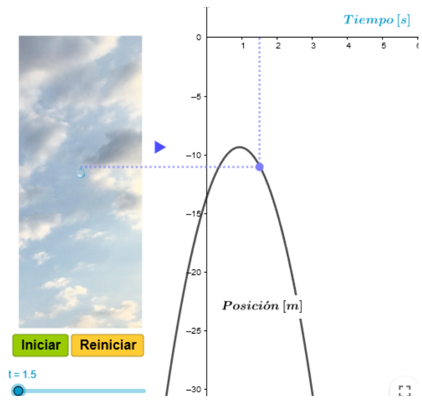


Imagen 3: Applet con animación de la caída de la gota y la gráfica de su posición respecto al tiempo (móvil).

Se presenta primero el applet de la Imagen 3 sin los controles de animación, es decir, solo se puede ver de forma estática la escena de la caída. Entonces, se cuestiona sobre la ubicación correspondiente de la gráfica de la posición de la gota (parábola en color negro). Esta gráfica se puede arrastrar hacia cualquier lugar en el plano y la única información disponible es la altura de la gota en un cierto tiempo (punto azul).

Para explorar la *estimación* producto de la exploración anterior, se presenta el applet de la Imagen 3 –con los controles de animación– de tal manera que la/el estudiante tenga la posibilidad de ver la simulación de la caída y la correspondiente trayectoria del punto azul.

Implementación

En la fase empírica del diseño participaron tres mujeres y ocho hombres de una carrera fisicomatemática, que acababan de cursar Cálculo I y que se encontraban próximas y próximos a cursar Ecuaciones Diferenciales.

La implementación consistió en una introducción de la actividad, la resolución del diseño en línea (en un *Libro GeoGebra* dentro de un *Grupo GeoGebra*) por parte del alumnado, una charla informal respecto a sus experiencias escolares y una socialización de las conclusiones emanadas de la resolución del diseño. Para este último momento, dado que el *Grupo* permite un seguimiento en tiempo real de las respuestas del alumnado, se seleccionaron algunas sobre ciertos puntos de interés para propiciar y mediar la discusión grupal; en este aspecto, se procuró visibilizar y promover activamente la participación de las mujeres al considerar en cada punto respuestas de ellas. Aunado a ello, se les solicitó resolver una encuesta en línea (Hinojos y Torres-Corrales, 2018) basada en la obra de Farfán y Simón (2016) respecto al entorno sociocultural de las y los participantes.

Para el registro de datos se empleó un cuaderno de notas y se grabó en audio y video todo el proceso; asimismo, las respuestas escritas quedaron registradas en la plataforma de GeoGebra y la pantalla de cada quién fue grabada para observar posteriormente sus exploraciones dinámicas. Además, se consideró la colaboración de un observador externo. Todo lo anterior fue con la autorización previa de quienes participaron.

Primeras reflexiones

En particular, se definen dos acepciones de lo dinámico: con respecto a la relación de variables (*estrategias dinámicas*) y con respecto a las transformaciones de los objetos (*acciones dinámicas*). La primera alude a la *naturaleza dinámica* de la variación, mientras que la segunda se refiere al movimiento en ambientes dinámicos (como traslaciones o rotaciones).

En el caso de los usos descritos anteriormente de los deslizadores, se identifica un *valor epistémico* del instrumento, en cuanto tales acciones instrumentadas promueven el planteamiento de preguntas respecto al conocimiento matemático involucrado (Artigue, 2002). La *estrategia dinámica* emerge entonces en el uso del instrumento con una intención particular en el análisis de fenómenos de variación. Por ejemplo, al regular el paso de tiempo para explorar la cinemática en la caída simultánea de las tres gotas de agua y al mover el deslizador de tiempo para explorar la dinámica en el comportamiento de las diferencias.

Asimismo, el permitir el arrastre libre en el applet de cierre (que en principio es una *acción dinámica*) propicia el surgimiento de una *estrategia dinámica* al promover que se identifique que, además de la altura de la gota en un cierto tiempo (un punto: $y(t_0)$), se requiere saber qué velocidad lleva la gota en ese momento (cualidad de la gráfica: $y'(t_0)$). De ahí que, si bien la acción dinámica tiene más que ver con el valor pragmático del instrumento, puede a su vez posibilitar la exploración con estrategias dinámicas que permitan acceder a su valor epistémico.

En general, se identifica que, si bien la variación posee una *naturaleza dinámica* asociada a un cambio continuo y uniforme del tiempo, para describirla se recurre a aproximaciones discretas, pero que se pueden explorar dinámicamente.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 19-48.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2016). Lo lineal y su otredad. En J. Arrieta y L. Díaz (Coords.), *Investigaciones latinoamericanas en modelación: Matemática Educativa* (pp. 17-57). Barcelona, España: Gedisa.

Arthur, R. (1995). Newton's fluxions and equably flowing time. *Studies in History and Philosophy of Science*, *26*(2), 323-351.

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *7*, 245-274.

Buendía, G. y García, C. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *15*(1), 109-114. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Caballero-Pérez, M. y Cantoral, R. (2017). Una caracterización de la noción sistema de referencia para el tratamiento del cambio y la variación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*, 1057-1065.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. y Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 50*(1-2), 77-89.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91-116.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Mendoza, J. y Zaldívar, D. (2016). *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales: Una argumentación gráfica*. Barcelona, España: Gedisa.

Carranza-Rogerio, B. y Farfán, R. (2018). Ecuaciones diferenciales: Tecnología digital y fenómenos físicos con perspectiva de género. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1852-1859.

Dasgupta, N. y Stout, J. (2014). Girls and women in science, technology, engineering, and mathematics: STEMing the tide and broadening participation in STEM careers. *Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences*, *1*(1), 21-29.

Farfán, R. (2012). *Socioepistemología y ciencia: El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

Farfán, R y Simón, G. (2016). *La construcción social del conocimiento: El caso de género y matemáticas*. Barcelona, España: Gedisa.

Halliday, D., Resnick, R. y Walker, J. (2009). *Fundamentos de Física* (Vol. 1, 8ª ed.). Ciudad de México: Grupo Editorial Patria.

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinaras*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Hinojos, J. y Torres-Corrales, D. (2018). *Encuesta del entorno sociocultural del estudiante de ingeniería*. Recuperado el 23 de junio de 2018 de https://goo.gl/forms/pTbE9yiFgHoYzaxo2

Marciuc, D. y Miron, C. (2014). Technology integration of GeoGebra software in interdisciplinary teaching. En I. Roceanu (Ed.), *Proceedings of the 10th international scientific conference "eLearning and Software for Education"* (Vol. 3, pp. 280-287). Bucharest, Rumania: Editura Universitatii Nationale de Aparare "Carol I".

Master, A. y Meltzoff, A. (2016). Building bridges between psychological science and education: Cultural stereotypes, STEM, and equity. *Prospects*, *46*(2), 215-234.

Martínez, A., Pluvinage, F. y Montaño, L. (2017). El concepto de la derivada en el contexto de la enseñanza de la física, recursos para el uso de diferenciales y las tecnologías de información y comunicación. *El cálculo y su enseñanza, enseñanza de las ciencias y la matemática*, *8*, 1-17.

Mendoza, J. y Cordero, F. (2012). El uso de las ecuaciones diferenciales y la ingeniería como comunidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25*, 1023-1030. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Parada, S. E., Conde, L. A. y Fiallo, J. (2016). Mediación digital e interdisciplinariedad: Una aproximación al estudio de la variación. *Bolema*, *30*(56), 1031-1051.

Pierson-Bishop, J. (2013). Mathematical discourse as a process that mediates learning in SimCalc classrooms. En S. J. Hegedus y J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc vision and contributions* (pp. 233-249). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Roschelle, J. y Hegedus, S. (2013). Introduction: Major themes, technologies, and timeline. En S. Hegedus y J. Roschelle, *The SimCalc vision and contributions: Democratizing access to important mathematics* (pp. 5-11). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona: Gedisa.

Roth, W. M. (2014). Interdisciplinary approaches in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 317-320). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Rubio, L., Prieto, J. y Ortiz, J. (2016). La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. *International Journal of Educational Research and Innovation*, *2*, 90-111.

Sanders, M. (2009). STEM, STEM Education, STEMmania. *The Technology Teacher*, *68*(4), 20-26.

Sarama, J. y Clements, D. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is "Concrete"? En P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (pp. 71-93). Suiza: Springer.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión: Una visión socioepistemológica. *Bolema*, *28*(50), 1525-1544.

Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Ciudad de México: Díaz de Santos.

Zubieta, J. y Herzig, M. (2016). *Participación de las mujeres y niñas en la educación nacional y en el sistema de ciencia, tecnología e innovación en México: Evaluación nacional con base en el marco de indicadores de equidad de género en la sociedad del conocimiento*. Ciudad de México: WISAT-Conacyt.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 5 / USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

RÚBRICA PARA EVALUAR LA COMPETENCIA DIGITAL EN LOS FUTUROS PROFESORES DE SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS

DIGITAL SKILLS ASSESSMENT HEADING FOR PROSPECTIVE MATH SECONDARY TEACHERS

Silvia Carvajal, Joaquín Giménez, Vicenç Font, Adriana Breda
Universitat de Barcelona (España)
scarvajal@ub.edu, quimgimenez@ub.edu, vfont@ub.edu, adriana.breda@gmail.com

Resumen
En esta investigación se estudia y caracteriza el nivel de competencia digital de un grupo de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria. Para ello, creamos una rúbrica de evaluación basada en las categorías del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS). Se confirman un conjunto de once indicadores asociados a seis categorías del EOS: lo epistémico, cognitivo, interaccional, afectivo, ecológico y de análisis didáctico que mejoran unas categorías e indicadores creados previamente en una primera versión de esta rúbrica. Se presentan evidencias de niveles de desarrollo para cada una de las nuevas dimensiones propuestas en la herramienta. Posteriormente, después de analizar las reflexiones sobre la propia práctica del grupo de futuros profesores y asignar puntajes a las evidencias encontradas en sus escritos, caracterizamos cuatro niveles de la competencia digital que asociamos a cuatro perfiles de futuro profesor.

Palabras clave: competencia digital, enfoque ontosemiótico, formación

Abstract
This research analyzes and characterizes future high-school mathematics teachers digital skills. A new skill assessment framework has been built based on the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (OSA). A set of eleven indicators associated with six categories can be confirmed: the epistemic, cognitive, interaction, affective, ecological and didactic analysis. For each of the categories, evidences of development levels are identified. Finally, after applying the assessment framework to a set of Mathematics teaching students, a complete characterization of the the different type of mathemical teachers has been completed. 4 different profiles/levels of digital skill have been identified and described.

Key words: digital competence, ontosemiotic approach, training

Introducción

Investigaciones recientes ponen de relevancia la importancia del análisis de competencias profesionales, y entre ellas, la digital en futuros docentes. Además, la competencia digital es una cuestión de interés social que preocupa a gobiernos, a empleados, a padres y a madres, y a la sociedad en su conjunto, debido fundamentalmente a las transformaciones sociales y económicas que se están desarrollando en el siglo XXI, que imponen criterios y orientan las demandas para el sistema educativo. En este artículo pretendemos caracterizar niveles de desarrollo de la competencia digital de futuros profesores de Matemáticas a partir de sus producciones de reflexión sobre una práctica.

Marco teórico

A partir de los estudios teóricos realizados, que siguen el modelo del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS) para el análisis evaluador de la competencia digital en educación matemática, consideramos que las dimensiones principales de lo digital en el desarrollo profesional se centran en las cinco dimensiones de los niveles de análisis de dicho enfoque.

A continuación, se describen las dimensiones que consideramos como elementos a priori, para la elaboración de una rúbrica (de la que se muestra una parte en la página siguiente), que consideramos que mejora la anteriormente desarrollada (Carvajal, Giménez y Font, 2017). Se trata de un instrumento creado “ad hoc” por el equipo investigador. Para ello, se consideran las dimensiones siguientes:

(1) Lo epistémico: uso y control de informaciones sobre los objetos matemáticos y su enseñanza /aprendizaje (lo digital que contribuye a las configuraciones epistémicas puestas de manifiesto); herramientas de almacenamiento y co-construcción de significados matemáticos y de educación matemática (elementos de lo digital que tienen a ver con interacciones y recursos);
(2) Lo cognitivo en cuanto contribución de lo digital a los procesos reflexivos del alumnado (correspondiente a la idoneidad cognitiva en EOS) También, el uso de herramientas como por ejemplo ayudas representacionales; tutoriales basados en el árbol de problema; y, en cuanto lo didáctico: propuestas de estudios de caso, colecciones de recursos, experiencias de investigación, elementos de evaluación y artículos de apoyo.
(3) Lo afectivo: En cuanto la idoneidad emocional y normativa se piensa en el desarrollo de elementos motivacionales en el proceso de instrucción
(4) Lo interaccional, en cuanto contribución de lo digital en procesos de co-construcción de significados matemáticos y de educación matemática (contribución de medios digitales en el fomento de significados institucionales a partir de los significados personales).
(5) Lo ecológico, no tiene una dimensión específica, pero se asocia fundamentalmente a lo ético y a las restricciones posibles del entorno.

Por otro lado, la Unión Europea considera que:

> La competencia digital entraña el uso seguro y crítico de las tecnologías de la sociedad de la información para el trabajo, el ocio y la comunicación. Se sustenta en las competencias básicas en materia de TIC: el uso de ordenadores para obtener, evaluar, almacenar, producir, presentar e intercambiar información, y comunicarse y participar en redes de colaboración a través de Internet (INTEF, 2013).

Esto implica, una mirada profesional que permita identificar necesidades de uso de recursos digitales, tomar decisiones informadas sobre las herramientas digitales más apropiadas según el propósito o la necesidad, resolver problemas conceptuales a través de medios digitales, usar las tecnologías de forma creativa, resolver problemas técnicos y actualizarse de forma permanente en su propia competencia digital. Para mostrarse competente en lo digital, se supone que uno sabe analizar las propias necesidades en términos tanto de uso de recursos, herramientas como de desarrollo competencial, asignar posibles soluciones a las necesidades detectadas, adaptar las herramientas a las necesidades personales y evaluar de forma crítica las posibles soluciones y las herramientas digitales. Teniendo en cuenta que a un profesor de matemáticas se le exige innovación y creatividad, se supone que:

> El futuro docente de matemáticas debe poder innovar utilizando la tecnología, participar activamente en producciones colaborativas multimedia y digitales, expresarse de forma creativa a través de medios digitales y de tecnologías, generar conocimiento y resolver problemas conceptuales con el apoyo de herramientas digitales (INTEF, 2017).

Metodología/desarrollo de algunos ejemplos

Se analizaron 40 trabajos finales (TFM) del Master Interuniversitario de formación de profesores de Secundaria de Matemáticas de Catalunya (MFPSM) escogidos de forma arbitraria. La asignación de evidencias en el uso de este instrumento se ha realizado mediante la explicación de ejemplos de sus memorias de TFM vinculados a cada una de los indicadores considerados.

Indicadores a priori.

En una asignación a priori, se consideran 11 indicadores, correspondientes a las seis dimensiones que se han considerado sobre lo digital, a lo que se añade una componente profesional como es la conciencia del uso de lo digital en el análisis didáctico. A continuación, se concretan las dimensiones e indicadores considerados.

Dimensión 1. Lo epistémico. Usa o crea medios digitales específicos para dar significado a contenidos matemáticos (i1) y usa los medios digitales para establecer relaciones entre el conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas matemáticos (i2). Almacena y comunica matemáticas mediante herramientas digitales (i3) y además interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social (i4).

Dimensión 2. Lo cognitivo. Usa los medios digitales para reconocer la idoneidad cognitiva de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje (i5).

Dimensión 3. Afectivo-Normativo. Usa los medios digitales para reconocer la idoneidad afectiva y normativa de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje (i6).

Dimensión 4. Interaccional. Reconoce el valor interaccional del uso de los medios digitales que utiliza (i7).

Dimensión 5. Ecológica-Ética. Reconoce el valor ecológico del uso de los medios digitales que utiliza (i8). Asume una conciencia ética en el uso de lo digital en el aula de matemáticas (i9).

Dimensión 6. Análisis didáctico, innovación e investigación. Contrasta, evalúa e integra información matemática o de educación matemática en formato tecnológico más allá del simple repositorio para hacer innovaciones y mejoras en su práctica (i10). Y reconoce el valor epistémico y didáctico del uso de los medios digitales que utiliza (i11).

Asignación de evidencias para la evaluación de la competencia digital a priori

Aunque sabemos que las dimensiones son de distinta naturaleza, pensamos que para una asignación de nivel consideraremos todos los indicadores con la misma importancia en cuanto al nivel global de competencia digital.

En cada uno de los textos de los futuros profesores, se observan indicios de comentarios asociados a los distintos indicadores. A continuación, en la tabla 1, se codifican algunos indicadores según el número de respuestas encontradas.

Tabla 1. Codificación en textos parciales del futuro profesor FP38 y asignación de puntaje

Textos parciales	Código	Asignación
Durante las sesiones se utilizaron explicaciones en la pizarra, presentaciones con Power Point, vídeos y programas de diferente tipo.	i1	3
En la sesión inicial se realizó un concurso tipo test con Socrative (haciendo uso del Smartphone).	i2	2
En todas las sesiones se hizo una aportación en formato de presentación Power Point para facilitar el desarrollo de las actividades.	i1	
En algunos apartados trabajamos con GeoGebra para hacer la representación gráfica de la función.	i1	
Primeramente les presentamos un vídeo de Eduardo Sáenz de Cabezón denominado ¿Por qué una hoja de papel es de tamaño DIN A4? (primer acto). En esta primera parte solo avanzamos hasta el minuto 1:06 ya que a partir de aquí en el vídeo se comprueban las proporciones de las hojas DIN y esta parte queremos que la hagan los alumnos. A continuación, en este momento organizamos a los alumnos en grupos de cuatro y les entregamos el material con la ficha de la actividad. Hacemos que cada grupo escoja a un representante que recogerá el material y será el encargado de presentar los resultados del grupo. Para ampliar la ficha de la actividad hace falta que los grupos tomen la medida de los lados de las hojas y calculen el área de cada una de ellas. Tendrán que ver que hay cuatro que tienen alguna relación y calcularla. Les pedimos también que con esta razón de proporcionalidad calculen las dimensiones de una hoja A0 (segundo acto). Finalmente, los alumnos presentan sus resultados delante del resto de la clase y los anotan en la pizarra. Para comprobar los resultados veremos los últimos minutos del vídeo (tercer acto).	i2	

Una vez realizadas las asignaciones a los textos, se atribuyen estos resultados a cada uno de los futuros docentes. Se decide asignar puntuaciones de 0 a 3, según el número de alusiones que se dan a los diferentes indicadores que se pueden ver en diferentes momentos del trabajo de los estudiantes. Se ajusta este resultado en base a las posibilidades de una mayor calidad de estas asignaciones. Estos ajustes permitirán posteriormente, para cada uno de los indicadores, describir y caracterizar los niveles en forma de rúbrica.

En la Tabla 2 que se muestra a continuación, se explicitan los ajustes iniciales que se hacen en cada uno de los indicadores según el nivel de profundidad de las aportaciones. Para ello asumimos que en un desarrollo competencial se dan tres niveles de logro: usa, justifica y aplica o integra (INTEF, 2017).

Tabla 2. Ajustes y criterios de puntuación asignada a cada una de las dimensiones

Ind	Puntuación 1	Puntuación 2	Puntuación 3
	Existe una única evidencia	Existen dos evidencias	Tres o más evidencias
1	Usa recursos digitales del curso	Justifica el valor de los recursos	Desarrolla recursos nuevos

2	Establece relaciones con el contenido	Justifica las relaciones	Plantea nuevas relaciones
3	Almacena informaciones digitales	Incorpora comunicación	Relaciona formatos
4	Usa interacciones virtuales	Justifica	Incorpora interacciones
5	Busca conocer alumnado	Justifica las propuestas	Elabora e inventa
6	Busca motivar con herramientas digitales	Justifica	Profundiza y relaciona
7	Interacciona	Relaciona y valora	Propone redes
8	Reconoce variables del entorno en el uso de lo digital	Relaciona variables del entorno	Desarrolla variables
9	Reconoce lo ético	Establece relaciones	Desarrolla lo ético
10	Contrasta información	Evalúa información	Integra información
11	Reconoce la importancia de lo epistémico	Valora lo epistémico	Desarrolla relaciones

La puntuación 0 se indica en los casos en los que no aparece ninguna evidencia sobre un determinado indicador.

Asignación de evidencias para la evaluación de la competencia digital

Para mostrar cómo se ha realizado la asignación de evidencias para cada uno de los indicadores, y ver cómo se asignan los diferentes niveles de competencia digital de cada profesor, se toman ejemplos de un futuro profesor llamado FP38. El alumno FP38 implementa su unidad didáctica sobre proporcionalidad numérica en un grupo de 2º ESO.
Sobre la ***dimensión epistémica*** hemos constatado que este futuro profesor crea y usa contenidos matemáticos específicos con medios digitales (i1). En efecto, desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos por lo que le asignamos un puntaje máximo, un nivel de consolidación 3. El alumno cita textualmente:

> Durante las sesiones se utilizaron explicaciones en la pizarra, presentaciones con Power Point, vídeos y programas de diferente tipo. (…) En todas las sesiones se hizo una aportación en formato de presentación Power Point para facilitar el desarrollo de las actividades. (…) En algunos apartados trabajamos con GeoGebra para hacer la representación gráfica de la función.

También usa los medios digitales para establecer relaciones entre el conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas de numeración (i2). Es decir, modifica, perfecciona y combina los recursos existentes para crear contenido y conocimiento nuevo, original y relevante y establecer rediseños por lo que se le ha inferido un nivel de consolidación 2. El alumno FP38 incluye una actividad en tres actos en la que, a partir del estímulo inicial de un vídeo, los alumnos tienen que interpretar qué pregunta se les plantea y calcular cuál es la razón de proporcionalidad entre diferentes folios. El alumno cita textualmente:

> *Primeramente les presentamos un vídeo de Eduardo Sáenz de Cabezón denominado ¿Por qué una hoja de papel es de tamaño DIN A4? (primer acto).*
> *En esta primera parte solo avanzamos hasta el minuto 1:06 ya que a partir de aquí en el vídeo se comprueban las proporciones de las hojas DIN y esta parte queremos que la hagan los alumnos.*
> *A continuación, en este momento organizamos a los alumnos en grupos de cuatro y les entregamos el material con la ficha de la actividad. Hacemos que cada grupo escoja a un representante que recogerá el material y será el encargado de presentar los resultados del grupo. Para ampliar la ficha de la actividad hace falta que los grupos tomen la medida de los lados de las hojas y calculen el área de cada una de ellas.*

> *Tendrán que ver que hay cuatro que tienen alguna relación y calcularla. Les pedimos también que con esta razón de proporcionalidad calculen las dimensiones de una hoja A0 (segundo acto).*
> *Finalmente, los alumnos presentan sus resultados delante del resto de la clase y los anotan en la pizarra. Para comprobar los resultados veremos los últimos minutos del vídeo (tercer acto) (…). En la sesión inicial se realizó un concurso tipo test con Socrative (haciendo uso del Smartphone).*

Este futuro profesor no almacena información matemática mediante herramientas digitales (i3) por lo que se le ha inferido un nivel de consolidación 0. Pero sí interacciona por medio de diversos dispositivos y aplicaciones digitales para establecer contacto social (i4). Es decir, utiliza de forma consciente tecnologías y medios para los procesos colaborativos y para la creación y construcción común de recursos, conocimiento y contenido matemático por lo que se le ha inferido un nivel de consolidación 2. El alumno cita textualmente:

> *Para conocer los conocimientos previos necesarios para iniciar una unidad nueva podemos utilizar diversas herramientas como una prueba previa, ejercicios, etc. o podemos hacer un test en forma de juego (quiz) para obtener esta información. Este "quiz" se puede realizar con diversas aplicaciones y programas. En mi caso utilicé el programa Socrative. Naturalmente esta actividad se puede llevar al aula no solo como una evaluación de conocimientos previos, sino que puede dar juego a trabajar cuestiones del temario, concursos del temario de las asignaturas, trabajo en grupo de alumnos, etc.*

En cuanto ***Lo cognitivo,*** usa los medios digitales para reconocer la idoneidad cognitiva de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje (i5), al alumno FP38 se le ha inferido un nivel 1 ya que establece diferencias entre el uso de mediadores (digitales o físicos) en función de un mejor aprendizaje y explica por qué se usa un determinado medio digital. El alumno cita textualmente:

> *Para conocer los conocimientos previos necesarios para iniciar una unidad nueva podemos utilizar diversas herramientas como una prueba previa, ejercicios, etc. o podemos hacer un test en forma de juego (quiz) para obtener esta información. Este "quiz" se puede realizar con diversas aplicaciones y programas. En mi caso utilicé el programa Socrative. Naturalmente esta actividad se puede llevar al aula no solo como una evaluación de conocimientos previos, sino que puede dar juego a trabajar cuestiones del temario, concursos del temario de las asignaturas, trabajo en grupo de alumnos, etc..*

En la componente ***afectiva***, el futuro profesor usa los medios digitales para reconocer la idoneidad afectiva y normativa de sus propuestas de enseñanza-aprendizaje (i6) ya que consigue que los alumnos se emocionen con las matemáticas e identifiquen significados matemáticos mediante el uso de medios digitales. El alumno indica:

> *El concurso Socrative (para evaluar los conocimientos previos), la actividad de porcentajes con garbanzos y la actividad de proporcionalidad con las hojas DIN fueron las más atractivas para los alumnos y considero que los contenidos de estas sesiones los alcanzaron completamente, en gran medida por la diversión que les ofrecían las actividades y que les creaban necesidades de aprendizaje.*

Por ello, en este indicador al alumno FP38 se le ha inferido un nivel de consolidación 2.

En lo *interaccional*, reconoce el valor interaccional del uso de los medios digitales que utiliza (i7) ya que colabora con otros colegas usando formatos tradicionales. Por ejemplo, utilizan el correo electrónico o el Moodle para comunicarse con sus tutores de prácticas y con los compañeros del máster que realizan las prácticas en el mismo centro. En este indicador se le ha inferido un nivel de consolidación 1.

En la dimensión ecológica y ética, en el indicador: Reconoce el valor ecológico del uso de los medios digitales (i8) se le ha inferido un nivel de consolidación 0 ya que no analiza la dimensión ecológica de los procesos de instrucción. Por último, el futuro profesor asume una conciencia ética en el uso de lo digital (i9) ya que entiende las normas básicas de conducta que rigen la comunicación con otros mediante herramientas digitales pero no las aplica en el periodo de prácticas. En este indicador se le ha inferido un nivel 1 de consolidación.

Observamos la componente de *Análisis didáctico, innovación e investigación.* En el indicador: Usa, revisa y valora información en el análisis didáctico para tomar decisiones profesionales (i10) se le ha inferido un puntaje de 1 sobre 3 ya que usa herramientas digitales sobre el análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje-evaluación. El alumno cita textualmente:

> *Los alumnos trabajaron durante el anterior trimestre actividades y problemas relacionados con las ecuaciones de primer grado, por tanto, consideramos que los alumnos tendrían que saber:*
> - *o Reducir al mínimo común denominador.*
> - *o Operaciones con fracciones.*
> - *o Resolución de ecuaciones de primer grado.*
> - *o Planteamiento de resolución de problemas.*
>
> *Para saber si los alumnos partían de estos conocimientos, la primera sesión se dedicó a hacer un juego utilizando la herramienta TIC Socrative. El resultado del juego/test fue muy bueno y los alumnos demostraron tener los conocimientos necesarios para iniciar la unidad didáctica. Las dos últimas preguntas del test se aprovecharon para introducir la unidad didáctica.*

En el indicador: Reconoce el valor epistémico y didáctico del uso de los medios digitales que utiliza (i11) se le ha inferido un nivel de consolidación 0 ya que no analiza configuraciones epistémicas con dispositivos digitales para mejorar prácticas matemáticas.

Asignación del nivel de competencia digital

Como se ha dicho, para cada indicador el puntaje varía de 0 a 3, Por lo tanto, la mayor puntuación que puede obtener un futuro profesor es la de 33 puntos. En nuestra tradición, la evaluación, aunque sea multidimensional, se traslada a un único digito o medida. Las franjas de puntuación por niveles se han repartido de la siguiente forma: (nivel 0) un futuro profesor posee un nivel 0 de competencia digital si ha obtenido un puntaje global de 7 o menor; (nivel 1) un futuro profesor posee un nivel 1 si ha obtenido un puntaje entre 8 y 14; (nivel 2) un futuro profesor posee un nivel 2 en la competencia si ha obtenido un puntaje entre 15 y 25 y (nivel 3) un futuro profesor posee un nivel 3 si ha obtenido un puntaje entre 26 y 33. Después del reconocimiento de evidencias en los distintos indicadores, al futuro profesor FP38 se le asigna un puntaje que se asocia a un nivel inicial de la competencia.

Rúbrica de evaluación de la competencia digital

A partir de las distintas evidencias encontradas por los 40 futuros profesores de la muestra, se reconoce la posibilidad de una rúbrica de asignación de niveles en los 11 indicadores descritos anteriormente. A continuación, en la tabla 3, mostramos los indicadores de la dimensión epistémica.

Tabla 3. Indicadores de la dimensión (1) lo epistémico

Indicadores	0	1	2	3
Crea y usa contenidos matemáticos específicos con medios digitales	No usa ni desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante	Usa propuestas digitales realizadas por otros sin adaptaciones o con pocas adaptaciones; introduce propuestas	Usa instrumentos digitales para establecer relaciones entre conexiones, representaciones, etc. identificando las	Desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante diferentes formatos y/o diseña tareas en las que los alumnos tengan que utilizar diferentes programas informáticos más allá de los que se proponen en la formación.

	formatos digitales. (i1)	en entornos cerrados (textos, tablas, imágenes, presentaciones, etc.) para establecer asociaciones, con objetivo de reconocer la adquisición de ideas u objetos matemáticos.	dificultades subyacentes y las implicaciones junto a otros mediadores.	
	No usa ni desarrolla contenidos matemáticos para su clase mediante formatos digitales. (i2)	Problematiza con herramientas digitales usadas como desarrollo de procedimientos específicos, o bien introduciendo significados parciales del contenido.	Modifica, perfecciona y combina los recursos existentes para crear contenido y conocimiento nuevo, original y relevante y establecer rediseños.	Usa medios digitales para relacionar conocimiento común y el matemático en la construcción de los objetos y sistemas matemáticos. Prepara análisis de la práctica con recursos digitales.
Almacena y comunica matemáticas mediante herramientas digitales	No almacena información matemática mediante herramientas digitales. (i3)	Almacena en un único dispositivo/servicio los recursos digitales y/o la información matemática.	Gestiona, almacena y selecciona diferentes dispositivos/servicios en donde almacenar los recursos digitales y/o la información matemática (wikis, repositorios, fórums, blogs, etc.).	Usa modos de interacción para crear conocimiento matemá-tico compartido en formato digital que se sitúa en un espacio nuevo para ser apropiado por otros.
	No comunica matemáticas mediante herramientas digitales. (i4)	Interacciona por medio de diversos dispositivos y/o aplicaciones digitales para establecer contacto social.	Utiliza de forma consciente tecnologías y medios para los procesos colaborativos y para la creación y construcción común de recursos, conocimiento y contenido matemático.	Usa, valora y analiza el uso de medios interactivos digitales para tener un control del proceso de enseñanza/aprendizaje y autorregular el aprendizaje matemático reconociendo las limitaciones y potencialidades de cada dispositivo o aplicación digital.

Resultados

Cuantitativamente, después de analizar las reflexiones sobre la práctica de los 40 estudiantes, y asignar puntajes a las evidencias encontradas en su trabajo, caracterizamos 4 niveles de la competencia que asociamos a 4 perfiles de futuro profesor.

En la tabla 4 se muestra resumido el nivel de competencia digital de los 40 alumnos de la muestra una vez realizada la transformación de puntaje a nivel y también su equivalente porcentaje:

Tabla 4. Número de alumnos y porcentaje de cada uno de los niveles de competencia digital

N = 40	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
Número de alumnos	3	20	17	0
Porcentaje	7,5 %	50 %	42,5 %	0 %

Conclusiones

Dentro de estos cuatro perfiles, observamos que una minoría de futuros profesores diseña tareas en las que los alumnos tienen que utilizar diferentes programas informáticos. Estos programas suelen ser el GeoGebra u hojas de cálculo (Excel, OpenOffice…) para trabajar contenidos de aritmética y funciones. Y mucho menos, se proponen tareas originales ad hoc. Este resultado sigue la misma línea de los resultados obtenidos por Font (2011) y Breda, Lima y Pereira (2015) con estudiantes en Brasil.

En muchas ocasiones, el futuro profesor pretende abrir un diálogo sobre el conocimiento previo, usando herramientas digitales. En algunos de estos casos, los conocimientos previos de los alumnos son almacenados en recursos digitales mediante cuestionarios online (plataforma Socrative, Kahoot, etc.) que los alumnos responden en tiempo real a través de sus dispositivos.

En nuestra investigación, se pone de manifiesto la necesidad de potenciar un trabajo colaborativo real entre alumnos y profesores cuando se trata de realizar una evaluación formativa mediante herramientas digitales, y no quedarse en búsqueda de respuestas mediante cálculos (Aldon, Cusi, Morselli, Panero y Sabena, 2017).

Como consecuencia de lo observado, concluimos que el uso de las TIC en espacios de formación del profesor de Secundaria de Matemáticas no puede ser esporádico como ya apuntó Drijvers (2013). Y consideramos que los futuros docentes necesitan experiencias de trabajo colaborativo matemático en su formación que pueda suplir la ausencia de experiencias escolares.

Después de observar los resultados, nos parece que los futuros docentes de matemáticas necesitan saber del uso de recursos digitales para la evaluación formativa, y no sólo usar elementos reproductivos o automáticos. También la necesidad de usar herramientas de simulación, Y poder discutir algo el valor epistémico y cognitivo de los recursos. Consideramos que para poder valorar lo interaccional, en los procesos de formación, debemos incidir en el uso de tareas que promuevan la interacción digital conociendo al menos experiencias como las descritas por Royo, Coll y Giménez (2017).

Por otro lado, es importante que los futuros docentes de matemáticas conozcan las potencialidades de instrumentos de uso corriente como tabletas, para realizar trabajos de calidad matemática, y no sólo para realizar tareas de pregunta respuesta como los programas tipo Kahoot o Socrative, conociendo algunas de sus limitaciones (Arzarello, Bairral y Dané, 2014). Y reconocer que no sólo se trata de usar dichos programas sino ver cómo se gestiona su uso. Es importante que en la formación se muestren evidencias de construcción de modelos con los estudiantes usando herramientas digitales. Un ejemplo es el estudio de la salinidad (Pimentel, 2018), o bien el trabajo arqueológico para usar el modelo de Vitruvio con GeoGebra (Sala, Font, Barquero y Giménez, 2017).

Las dificultades ya observadas en procesos de formación de docentes en matemáticas parten tradicionalmente de que, en un primer año, los profesores están preocupados por la parte técnica de las redes y el manejo de las tabletas de forma pedagógicamente efectiva, y en un segundo año, se muestra la preocupación por los caminos de aprendizaje de los estudiantes (Aldon, Panero, Trgalova y Trouche, 2017). Eso nos hace pensar que los resultados obtenidos en nuestra experiencia son debidos precisamente al poco tiempo dedicado a lo digital en los cursos de formación. Y por lo tanto la necesidad de ampliarlo en la formación continuada.

Referencias bibliográficas

Aldon, G., Cusi, A., Morselli, F., Panero, M., y Sabena, C. (2017). Formative assessment and technology: reflections developed through the collaboration between teachers and researchers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, y U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology: a C.I.E.A.E.M. Sourcebook* (pp. 551-578). Basel, Suiza: Springer International Publishing

Aldon, G., Panero, M., Trgalova, J., & Trouche, L. (2017). Analysing MOOCs in terms of teacher collaboration potential and issues: the French experience. *In Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.*

Arzarello, F., Bairral, M., y Dané, C. (2014). Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. *Teaching Mathematics and its Applications, 33*(1), 39-51. doi: 10.1093/teamat/hru002.

Breda, A., Lima, V.M.R., y Pereira, M.V. (2015). Papel das TIC nos trabalhos de conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional: o contexto do Rio Grande do Sul. *Práxis Educacional (Online), 11*(19), 213-230.

Carvajal, S., Giménez, J., y Font, V. (2017). Caracterización de la competencia digital en la formación de futuros profesores de secundaria a través del análisis sobre su propia práctica. En H. Ramos y S. Nieto (Eds.) *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 94-107). Madrid, España: CIBEM

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA, 8*(1), 1-20.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 26*(1), 9-25.

Pimentel, T. (2018) Salinity study in the river Lima estuary: an interdisciplinary project at secondary level En F. Cerquetti, G. Aldon (Eds). *Pre-Proceedings CIEAEM 70*. Mostaganem.

Royo, M. P., Coll, C., y Giménez, J. (2017). e-Collaborative Forums as Mediators When Solving Algebraic Problems. *In Mathematics and Technology* (pp. 395-408). Springer, Cham.

Sala, G., Font, V., Barquero, B., y Giménez, J. (2017). Contribución del EOS en la construcción de una herramienta de evaluación del pensamiento matemático creativo. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Granada, España: Universidad de Granada.

Unión Europea. INTEF Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. (2013). Marco Común de Competencia Digital Docente v 2.0.

Unión Europea. INTEF Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. (2017). Marco Común de Competencia Digital Docente v 2.0.

INSTRUCCIÓN POR MODELACIÓN Y TI-NSPIRE, APRENDIZAJE-COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS DE CINEMÁTICA, PERCEPCIONES DE ESTUDIANTES Y DOCENTES

MODELING INSTRUCTION AND TI-NSPIRE, LEARNING-UNDERSTANDING OF KINEMATICS CONCEPTS, PERCEPTIONS OF STUDENTS AND TEACHERS

José Alexander Rincón Cárdenas, Ángeles Domínguez Cuenca
IED Integrado (Colombia), Tecnológico de Monterrey (México)
lntrinconj@gmail.com, angeles.dominguez@itesm.mx

Resumen
El articulo presenta los resultados investigación relacionada a la aplicación de nuevas metodologías MI (Instrucción por modelación) con evocación de MEAs (Actividades reveladoras de pensamiento) y uso de mediador tecnológico TI Nspire en el campo de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes, en Física área de cinemática. Se utilizó metodología mixta con aplicación de instrumento cuantitativo a estudiantes y cualitativo a estudiantes y docentes. Se evidencia que el uso de MI con evocación de MEAs con medidor tecnológico contribuyen a enriquecer el aprendizaje en la comprensión de conceptos de cinemática en estudiantes y que percepciones tanto estudiantes y docentes son favorables a su uso, destacando que el aprendizaje de los estudiantes tuvo una mejor comprensión de los conceptos de fenómeno físico de cinemática, al relacionarlo y hacerlos con movimiento corpóreos.

Palabras clave: Instrucción por modelación, MEAs, mediador tecnológico, TI Nspire, enseñanza-aprendizaje

Abstract
The article presents the results of research related to the application of new methodology such as MI (Modeling Instrution) with the evocation of MEAs (Model-eliciting activities) and the use of technological mediator TI Nspire in the teaching-learning field of students, in Physics area of kinematics. Mixed methodology was used with application of quantitative instrument to students and qualitative to students and teachers. It is evident that the use of MI with evocation of MEAs with technological mediator use, contributes to enrich the learning in the understanding of concepts of kinematics in students and what perceptions of students and teachers are favorable to its use, highlighting the students' learning, had improvement in the understanding of the concepts of physical phenomenon of kinematics, by relating it and making them with corporeal movements.

Key words: Modeling instrution, MEAs, technological mediator, TI Nspire, teaching-learning.

Introducción

El proceso de enseñanza y aprendizaje, evoluciona contantemente, supliendo necesidades y retos, con la incorporación de nuevos modelos de enseñanza que fortalecen el proceso de aprendizaje, apoyado con uso de de TICs (Tecnologías de la información y la comunicación), provocando cambios en el aula por parte del docente, su interacción con los estudiantes, he innovación en la enseñanza (Sánchez y Veytia, 2015), existiendo falencias en los medios y métodos de modelización de la enseñanza, que no ponen en práctica modelos por descubrimiento, trabajo colaborativo, información a nivel del estudiante, esquemas de proponer-oponer y aprendizaje construido por el hacer del estudiante. En este trabajo presenta los resultados de investigación realizada en la implementación de MI con evocación de MEAs y uso de mediador tecnológico TI Nspire, para el aprendizaje de conceptos de cinemática.

Marco teórico

El aprendizaje de las matemáticas busca desarrollo de capacidades para la solución de problemas no solo matemáticos, sino desarrollo de habilidades cognitivas, como capacidad para comunicarse, proceso de escritura y lectura, estímulos sensoriales, la memoria, emociones y actividades cognitivas superiores, como la atención, la síntesis, la planificación, el razonamiento, la imaginación espacial y el lenguaje, la plasticidad del cerebro, todo esto conexo a la capacidad de aprender (Valdivieso, 2016), donde el conocimiento previo, se fortalece por medio de didácticas de problemas reales y practica de nuevas metodologías, impactando el nivel cognitivo (Zúñiga y Morales, 2017), además el razonamiento relacionado a la intuición del estudiante, ayuda a agilizar el proceso de pensamiento, intuición es guía en el entendimiento de la solución al problemas y predecir resultados por ejemplo de fenómenos físicos (Espinoza, 2017), donde la predicción se relaciona a la interacción social, actividad empírica desarrollada por el hacer, el proceso de anticipación guarda relación con el intelecto y desarrollo de habilidad de análisis con un conocimiento previo (Soto y Osorio, 2014).

La instrucción por modelación (MI), es una propuestas didácticas para la enseñanza-aprendizaje, donde se recurre a la discusión y abordaje del fenómeno en una secuencia de actividades instruccionales, ayudando al estudiante a involucrarse con el problema y a entenderlo desde sus bases conceptuales (De Souza y Matos, 2017), asimismo los modelos matemáticos dan explicación científica de los fenómenos, apoyándose en competencias de lectura, interpretación, formulación y resolución de situaciones problemáticas, ayudando a superar la creencia que el aprendizaje de las matemáticas es algo abstracto y difícil para los estudiantes (Flores, Gómez y Chávez, 2015), además el desempeño de los estudiantes es importante en los modelos educativos, siendo necesario implementar estrategias, métodos, didácticas y pedagogías que aumente dicho desempeño (Latif, 2016), es donde el modelamiento fortalece el aprendizaje de conceptos matemáticos, motivando a los estudiantes para comprender y captar los conceptos (Park, J., Park, M., Park, S., Cho, y Lee, 2013), para desarrollar competencias de STEM (Ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas) por sus siglas en inglés, con énfasis en la construcción y aplicación de modelos conceptuales sobre los fenómenos que se quieren aprender (Barlow, Frick, Barker y Phelps, 2014).

La metodología de modelo y modelización es recomendada como unificador en la enseñanza de las ciencias y matemáticas, consiguiendo relacionarse con método, técnica, didáctica y desarrollar el conocimiento por medio de secuencias de clase, preguntas y acompañamiento del docente, apoyado en el uso de la tecnología para toma de datos, análisis de los mismos, para obtener una interpretación de los estudiantes sobre un modelo que dé solución al problema o fenómeno que se esté estudiando (Barlow et al., 2014), donde las preguntas son claves para el entendimiento del problema, la comunicación verbal y escrita son importantes, por ende las matemáticas que se utilizaron o el método debe ser entendido por los estudiantes, para poder argumentar (Stohlmann y Albarracin, 2016), además MI como metodología didáctica puede enriquecer la experiencia de los estudiantes en el aula y genera emoción por aprender del mundo real, generando una argumentación tanto oral y escrita, formulación del modelo del fenómeno en cuestión y evaluación del modelo obtenido con relación a los datos recolectados, desarrolla mayor confianza y elocuencia, por medio de argumentación de las ideas, el error es tomado como generador de conocimiento, curiosidad por la ciencia acercando al estudiante a pensar, generar cooperación y disertación en un ambiente de confrontación interactiva, por medio de un trabajo colaborativo, con utilización de modelación que explica, describe, prediga el comportamiento de fenómenos físicos estudiados (De Souza y Matos, 2017).

MI género en USA excelencia en docentes por sus prácticas pedagógicas, espacios para trabajar creencias erróneas y falsas ideas, por medio de interrogativos Socráticos, (Jackson, Dukerich y Hestenes, 2008), así mismo MI son aplicables a otros campos de conocimiento, para la optimización de estrategias de enseñanza y didácticas de aprendizaje en el estudiante (Flores, et al., 2015), generando efectividad en el proceso el uso de herramientas tecnológicas para recolectar, organizar, analizar, visualizar y modelar datos reales, siendo estrategia didáctica en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Rodríguez y Quiroz, 2016), la práctica docente se fortalece con de planificación de clases y ejecución de las mismas, con aplicación de la tecnología y nuevas metodologías (Ilaria, 2017).

Otra estrategia innovadora de enseñanza-aprendizaje son los MEAs entendidos como actividades reveladoras del pensamiento, herramienta curricular para el desarrollo de la creatividad matemática e identificar a los estudiantes que son dotados creativamente en matemáticas, (Silk, Higashi, Shoop y Schunn, 2010), siendo tareas complejas, estructuradas, abiertas y realistas, donde tanto el producto y el proceso son importantes, se valora el resultado pero también el proceso que se llevó a ese resultado, pues la solución dada puede tener varios caminos, valorando habilidades de pensamiento y metacognición de los estudiantes (Latif, 2016; Stohlmann y Albarracin, 2016), ellas sirve para evaluar la creatividad matemática en los estudiantes, complementando las tradicionales en el desarrollo de competencias STEM. (Coxbill, Chamberlin y Weatherford, 2013; Silk et al., 2010), los MEAs al igual que MI, favorecen la originalidad, creatividad, identificando estudiantes con potenciales en creatividad matemática, que pueden favorecer el desempeño de sus compañeros al trabajar colaborativamente, con una autonomía, libertad y confianza dentro del proceso, donde se valora la diversidad de soluciones (Coxbill et al., 2013).

El proceso de modelado con la calculadora reduce el tiempo empleado en el cálculo, permiten observar la resolución de problemas con perspectivas diferentes, por medio de datos recolectados por sensores se procede a la generación de gráficas y análisis de ellas (Méndez, Marquina y Zúñiga, 2017), estando directamente relacionado con la apropiación de la tecnología y la incorporación de la misma en las clases por parte del docente (Flores et al., 2015), asimismo el mediador tecnológico TI-Nspire es centrado en el estudiante, con la práctica de experiencias vivas, del hacer y practicar por parte del estudiante, favorece así el proceso de aprendizaje de los estudiantes con enfoque constructivista, con participación activa en su proceso de aprendizaje, y mejor comunicación con espacios de discusión, colaboración y motivación por aprender (Herman, Meagher, Abrahamson, y Owens, 2013).

Metodología

La enseñanza-aprendizaje requiere de didácticas, herramientas para innovación dentro del aula, implementando metodologías que unifiquen la teoría por medio de la práctica (Schoenfeld, 2013), donde el interés del estudiante por aprender es débil y se presenta una actitud al desapego del lenguaje matemático y sus bases (Guerra y Lim, 2017), en términos científicos existe la necesidad de analizar si la implementación de nuevas estrategias de enseñanza, con las realidades y contextos socioeconómicos en instituciones educativas rurales en Colombia, si pueden ser factibles y favorables, indagando el proceso de aprendizaje del estudiante y las percepciones de los docentes frente a la incorporación en el aula de estas estrategias. La relevancia practica radica en la búsqueda del mejoramiento de las practicas docentes en el aula, fortaleciendo el proceso de enseñanza con aplicación de didácticas motivadoras para los estudiantes, favoreciendo el proceso de aprendizaje, construcción y entendimiento de conceptos matemáticos y su aplicación en el estudio de fenómenos físicos, esto conllevo a las siguientes preguntas de investigación:

¿Cómo la modelación y el uso de la tecnología TI Nspire contribuyen a enriquecer el aprendizaje en la comprensión de conceptos de Cinemática en estudiantes de 10º grado del IED Integrado?

¿Cuáles son las percepciones de los docentes frente a la modelación y el uso de la tecnología TI Nspire para enriquecer el enseñanza-aprendizaje de conceptos de cinemática?

La investigación de desarrollo dentro un enfoque metodológico de aporte de información cuantitativo y cualitativo dentro del paradigma pos-positivista, con uso de método mixto, el cual brinda una mejor comprensión del problema, lo cual apoya al investigador a enfocarse en la solución del mismo (Valenzuela y Flores, 2011), la población involucrada en el estudio cuantitativo, son 29 estudiantes de secundaria, del grado decimo, quienes cursaban la materia de Física I, que contiene la introducción a la cinemática. Para los métodos cualitativos participaron cuatro docentes, que están directamente involucrados en la enseñanza de cursos de básica y media técnica de materias de ciencias; además cuatro estudiantes del grupo general seleccionados por medio de instrumento de carácter abierto.

La investigación conto con la aplicación de tres instrumentos, el primero instrumento cuantitativo, test de 14 preguntas de opción múltiple, que mantienen la estructura de las presentadas dentro de las investigaciones de Beichner, (1994) y Perez-Goytia, Dominguez y Zavala (2010), preguntas relacionadas a conceptos de posición, velocidad y aceleración. El modelo de diseño contiene tratamiento experimental con pre-test y pos-test (Valenzuela y Flores, 2011). El segundo instrumento de metodología cualitativa, entrevista con 4 estudiantes, donde explicaban el proceso que llevaron a cabo para la solución de los dos ejercicios planteados en el primer instrumento; la selección de los cuatro estudiantes se hizo por intención, por medio de la aplicación de test de pregunta abierta identificando quienes, de la población general, brindaron mejor información de acuerdo al avance de su proceso de aprendizaje. El tercero instrumento de metodología cualitativa dirigido a los docentes buscaba saber su percepción frente al objeto de la investigación, constaba de cinco preguntas abiertas, que indagan sobre la experiencia de los docentes, sus creencias, aptitudes y actitudes, sus posturas frente a las fortalezas y debilidades de la instrucción por modelación con mediador tecnológico. La aplicación del pre-test, el proceso de modelación y el pos-test, se llevó a cabo dentro de las cesiones de clase de física I, con intensidad de tres horas semanales, dentro de un lapso de 5 semanas. En la figura 1 se muestra la secuencia del desarrollo de las actividades y los tiempos en semanas.

La estrategia de análisis de datos se hizo de forma estadística para el instrumento cuantitativo, por medio de la utilización de aplicativo de Excel y SPSS, con la aplicación de parámetros descriptivos de medidas de tendencia central, medidas de dispersión, análisis estadístico de frecuencias, comparando los resultados del pre y post test. Para los instrumentos cualitativos, se procedió a analizar los factores de convergencia; a nivel de los docentes, correlacionar su experiencia en el campo, con la realidad de sus entornos, identificando concordancias y similitudes frente a los aspectos tanto positivos y negativos.

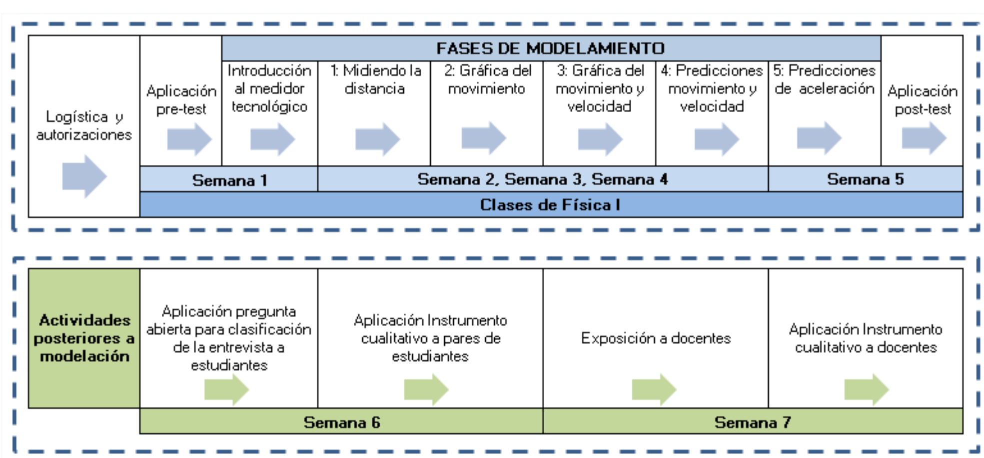


Figura 1: Diagrama procedimientos

Resultados

Resultados instrumento cuantitativo estudiantes

El análisis estadístico descriptivo de frecuencias, de la Tabla 1, muestra un aumento de la media, que pasa en el pre-test de 2.59 a 4.14 en el pos-test, presentándose una mejoría leve de la cantidad de respuestas correctas, posterior al proceso de modelación; además la mediana para el pre-test en 3 y para el pos-test en 4. Los rangos en el pre-test están de 0-5, 0 relacionado a un estudiante que en el pre-test no tuvo aciertos y un máximo de 5, para dos estudiantes, los restantes 26 estudiantes con valores intermedios; para el post-test, el rango fue 1-8, se presenta mayor dispersión, un minino de 1, obtenido por dos estudiantes y un máximo de 8, obtenida por un estudiante.

ESTADISTICOS		PRE-TEST	POS-TEST
N	Válido	29	29
	Perdidos	0	0
Media		2,59	4,14
Mediana		3,00	4,00
Moda		2	5
Desviación estándar		1,323	1,706
Varianza		1,751	2,909
Rango		5	7
Mínimo		0	1
Máximo		5	8

Tabla 1. Valores estadísticos de frecuencia de variables

La Figura 2, histograma y curva normal, muestra una variación en la medias y mayor dispersión de los resultados en el pos-test, posicionamiento de la media con un valor superior en el pos-test, con una disminución del valor de la frecuencia en el punto medio, mayor dispersión de los resultados, apareciendo resultados superiores a 5 que fue el valor máximo dentro del pre-test.

Las modas en el pre-test son dos y tres respuestas correctas, donde se concentran 14 estudiantes, que equivalen a un 48% de la muestra total, hay 8 estudiantes un 28%, que está por encima de las modas y por debajo 7 estudiantes un 24% de la muestra total, la dispersión de los datos con relación a la media muy pareja. Analizando el histograma del pos-test, la punta de curva normal esta sobre la barra 4, con 4 estudiantes un 14% de la muestra total, la moda es 5 respuestas correctas en esta se albergan 9 estudiantes un 31% de la muestra total, arriba de la moda 5 estudiantes, un 17% de la muestra total, y por debajo de la moda hay 15 estudiantes un 52% de la muestra total.

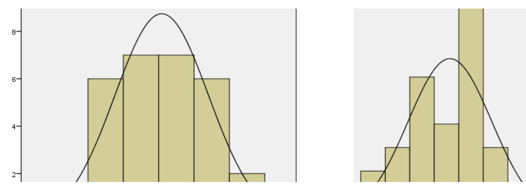


Figura 2: Histograma comparativo entre pre-test y pos-test

Con relación a la frecuencia de cinco o más respuestas en el pre-test, es 6.9% de la muestra total, con comparación a un 48,1% que tuvo 5 o más respuestas correctas en post-test, existiendo incremento de 41.2%, con relación a cantidad respuesta correctas por estudiante, existen 7 estudiantes un 24% de la muestra total, desmejoraron; 4 estudiantes un 14% de la muestra total continuaron con la misma cantidad de respuesta; 18 estudiantes un 62% de la muestra total tienen un incremento en la cantidad de respuestas correctas en pos-test, de este 62%, se tienen que 6 estudiantes un 21% de la muestra total, incrementaron en 4 o más respuestas correctas en el pos-test en comparación con el pre-test, esto es una razón de 1 a 3, de los estudiantes que mejoraron su desempeño, igual o superior a 4 respuestas más correctas de las que obtuvieron en el pre-test.

Evocando proceso de MEAs donde el proceso al igual que el resultado es importante, se resalta la información proporcionada por las respuestas alternativas donde el análisis de las dimensiones de preguntas que indagaban los mismos conceptos, en ambos grupos de preguntas (cálculo de pendiente y cálculo de área bajo la curva), se identifica que hay una transferencia de conocimiento. Esto se evidencia por las respuestas correctas y las respuestas alternativas más atractivas seleccionadas por los participantes, en las preguntas donde se requiere el cálculo de la pendiente en un punto específico, es notorio el abandono del modelo de la lectura directa, hacia el entendimiento del cálculo de la velocidad y aceleración a través del cociente; faltando el uso del cambio (cociente de diferencias) en lugar del valor (Y/X), tendencia de abandono de la idea de selección del punto más negativo, hacia selección de mayor pendiente sin identificar el signo negativo para caso de aceleración, abandono del modelo del misma forma de la gráfica. Cuando se daba gráfica de velocidad y se pide el cálculo del cambio de posición (desplazamiento) y la transferencia sería partir de la gráfica de aceleración para calcular el cambio de velocidad, en estas preguntas se requiere realizar el cálculo del área bajo la curva en el intervalo de interés, se presenta ganancia del entendimiento del área bajo la curva, abandono del modelo incorrecto aleatorio, disminución del cálculo de la pendiente, aumento en el cálculo del producto, faltando entendimiento del área bajo la curva (área de triangulo) y disminución de la lectura directa.

Resultados del instrumento cualitativo estudiantes:

Se identifica por los estudiantes el concepto de velocidad constante asociado con una línea recta, la cual tienen una pendiente, como lo expresa uno de los estudiantes en su respuesta *"Aparecen tres valores de pendientes en los intervalos de 0 a 1 y de 3 a 4 segundos el valor es cero es decir el valor de la aceleración es cero, de 1 a 3 segundos pendiente negativa y de 4 a 5 segundos pendiente positiva"*. En las respuestas también se asocian los valores de la aceleración con los movimientos corpóreos realizados dentro de la modelación, como son un movimiento con velocidad constante, cambio de la aceleración, relacionándolo con la pendiente de la recta en la gráfica, asociación valor positivo o negativo de la pendiente con el signo de velocidad-aceleración. Se presenta en los estudiantes uso de lenguaje científico a relacionar dentro de sus argumentaciones conceptos matemáticos, para sustentar sus ideas. Cuando se da una gráfica de velocidad-tiempo y se solicita cambio de posición, en ambos binomios expresan solución con relación a el área debajo de la curva, analizando intervalos solicitado, el primer binomio relaciona el área con la figura de un triángulo rectángulo, mientras el segundo binomio, da solución al ejercicio realizando el área de un cuadrado y después lo divide en dos. En gráfica de Posición-tiempo y solicita determinarla grafica de la velocidad, dentro de uno de los binomios el estudiante comenta: *"Existen en la gráfica tres pendientes, una positiva, una cero y una negativa, donde la negativa es de mayor valor que la positiva"*, respuesta complementada por otro estudiante: *"Entonces la respuesta vendría siendo la D, porque en esta respuesta se ve la velocidad se mantienen estable positiva hasta el dos, la velocidad baja y se mantienen estable hasta 4 segundos, y en cuatro es mayor la velocidad negativa hasta el 5, porque a mayor pendiente mayor velocidad",* los estudiantes relacionan el valor de la velocidad con el de la pendiente de la gráfica posición-tiempo, además atribuyen el signo de la velocidad con relación al valor de la pendiente, en las respuestas también se puede ver que relacionan acercarse al sensor como velocidad negativa y alejarse del sensor como velocidad positiva. Pregunta final relacionada a proceso de modelamiento con mediador tecnológico, expresan que el poder realizar las gráficas con su propio movimiento hace que se facilite la comprensión de conceptos como velocidad, aceleración, cambio de movimiento, esto asociado a conceptos matemáticos como la pendiente, signo de la misma lo cual es más fácil de entender he interiorizar para acordarse fácilmente de lo aprendido; siendo un desarrollo de competencias que los estudiantes desarrollan por medio de la práctica (Park et al., 2013).

Resultados del instrumento cualitativo docentes

Las ventajas que identifican sobre modelos didácticos de MI y MEAs por medio de mediador tecnológico, es aplicación de modelos pedagógicos colaborativos por descubrimiento, donde de una manera autónoma y amigable el estudiante realiza el proceso de vivenciar el conocimiento, de crear por medio de su experiencias, aprender de una forma diferentes, forma de aprender más didáctica y significativa, docentes mencionan la importancia que los mediadores tecnológicos puedan ser asequibles a los estudiantes, lo cual está relacionado a la creatividad de los estudiantes y su capacidad de desarrollo de competencias (Coxbill et al.,2013). Para que los mediadores tecnológicos ayuden a mejorar las prácticas de enseñanza en el aula, se resalta la importancia que la herramienta sea bien utilizada, de una forma innovadora, pues muchos estudiantes son atraídos por temas tecnológicos, lo cual ayuda a generar esa curiosidad, púes aprenden haciendo, esto permite repensar el hacer docente dentro del aula. Las principales desventajas descritas por los docentes detallan el poder acceder a las herramientas tecnológicas y tener continuidad en su uso, el desinterés en ocasiones de los estudiantes por participar y darse la oportunidad de usar o conocer nuevas herramientas, adicional es comentado el costo de las herramientas, siendo importante la enseñanza de manera significativa (Silk et al., 2010). Se ratifica que, si sería eficiente el uso de esta innovación por medio de MI y mediador tecnológico, pues el estudiante está inmerso en un proceso de aprendizaje donde el simula y modela los conceptos y situaciones. Las creencias de los docentes y su postura frente a la aplicación y desarrollo de nuevas metodologías de enseñanza, pueden ser potenciadores o limitantes, una está asociada a la capacitación-entrenamiento y saber usarlos y el otro aspecto a resaltar es poder contar con la herramienta tecnológica, existiendo una carencia de cultura tecnológica y aplicación de nuevos tipos de aprendizaje (Clark-Wilson, 2010).

■ Conclusiones

Se evidencia que la aplicación de MI, con integración de características de MEAs y uso de mediador tecnológico TI Nspire, fomentaron la comprensión de conceptos de cinemática en los estudiantes de grado decimo del IED Integrado, con aumento de la media y rangos dentro del pos-test con relación al pre-test, aumento de cantidad de respuestas correctas, donde las medidas de tendencia central aportan una variación favorables de 62% de estudiantes que mejoraron su desempeño; triangulando con el instrumento cualitativo a los estudiantes dan evidencia de una mejora y cambios de actitud, cambiando desinterés por participación, a medida que la modelación fue pasando de fases, se generó estímulo bajo la curiosidad del querer hacer, siendo este uno de los beneficios que se hallan en investigaciones anteriores (Clark-Wilson, 2010).

Se identificaron cuatro estudiantes que presentan facilidad para asimilar conceptos de física y aplicación de cálculos matemáticos dentro de la misma, favoreciendo al desempeño del grupo, con una mayor participación de los estudiantes. Se enfatiza el aprendizaje por medio del hacer con el cuerpo y relacionarlo con la obtención de gráficas y modelado matemático, por medio de la aplicación de curvas, rectas, pendientes, variación, dejando a un lado la percepción de que la matemática es abstracta y no se puede crear, que es difícil y siempre ligada a la memorización de fórmulas, se capta la atención de los estudiantes, generando curiosidad por entender y practicar los fenómenos físicos, el estudiante se motiva si el docente guía es formador y motivador de cambio (Herman, et al., 2013); el docente debe buscar espacios para la aplicación de nuevos modelos de enseñanza-aprendizaje , con mediadores tecnológicos, que favorezcan, faciliten y motiven la práctica docente, fortaleciendo las aptitud del alumnado frente a descubrir y aprender sobre las ciencias. (Flores et al., 2015).

Las percepciones de los docentes frente a la modelación y el uso de la tecnología TI Nspire para enriquecer la enseñanza-aprendizaje de conceptos de cinemática, son aceptables, pero es importante fortalecer la disponibilidad de las herramientas tecnológicas, el entrenamiento, adaptación de cambio a nuevos procesos.

Existe debilidad en conocimientos básicos de los estudiantes, costumbre del método tradicional de memorización, transcripción de contenidos y aptitud apática de estudiantes a nuevas estrategias de autoformación, las dificultades pueden superarse, con la incursión de estrategias innovadoras de enseñanza-aprendizaje de ciencias y matemáticas, beneficiando proceso de aprendizaje del estudiante, apoyada por el docente, con uso de mediadores tecnológicos (Tun Uc, 2017).

Es de concluir que la estrategia didáctica de MI con evocación de MEAS y uso de mediador tecnológico, es adaptable a los contextos reales de institución educativa departamental de carácter rural de Colombia, pero que es importante poder superar los limitantes existentes; además existe un campo de aplicación de MI, MEAs y uso de mediador tecnológico dentro ciclos de educación temprana como es primaria, para fortalecer herramientas de desarrollo cognitivo a los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Barlow, A., Frick, T., Barker, H., y Phelps, A. (2014). Modeling instruction: The impact of professional development on instructional practices. *Science Educator*, *23* (1), 14-26.

Beichner, R. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs, *American Journal of Physics*, *62* (8), 750-762.

Clark-Wilson, A. (2010). Emergent pedagogies and the changing role of the teacher in the TI-Nspire Navigator-networked mathematics classroom. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 42* (7), 747-761.

Coxbill, E., Chamberlin, S., y Weatherford, J. (2013). Using model-eliciting activities as a tool to identify and develop mathematically creative students. *Journal for the Education of the Gifted*, *36* (1), 176-197.

De Souza, L., y Matos, R. (2017). Physics teaching methods: an analysis on peer instruction and modeling instruction. *Estação Científica (UNIFAP), 7* (3), 51-60.

Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas, 3* (39), 64-79.

Flores, Á., Gómez, A., y Chávez, X. (2015). Using TI-nspire in a modelling teacher's training course. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 22* (2), 79-83.

Guerra, P. y Lim, W. (2017). Critical Examination of Ways Students Mirror the Teacher's Classroom Practice: What Does It Mean to be Successful at Mathematics? *The Mathematics Enthusiast, 14* (1), 175-206.

Herman, M., Meagher, M., Abrahamson, L., y Owens, D. (2013). Student perceptions on use of a classroom communication system in mathematics classes. *The International Journal for Technology in Mathematics Education, 20* (2), 45-67.

Ilaria, D. (2017). The efficacy and impact of a hybrid professional development model on handheld graphing technology use. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 17* (2), 194-204.

Jackson, J., Dukerich, L., y Hestenes, D. (2008). Modeling instruction: An effective model for science education. *Science Educator, 17* (1), 10-17.

Latif, R. (2016). Problem-solving effects in teaching and learning mathematics. *International Journal of Innovation and Applied Studies, 18* (3), 909-927.

Méndez, M., Marquina, N., y Zúñiga, K. (2017). Situaciones de aprendizaje para la modelación escolar. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, (30)* 1, 1046-1056.

Park, J., Park, M., Park, S., Cho, J., y Lee, K. (2013). Mathematical modelling as a facilitator to conceptualization of the derivative and the integral in a spreadsheet environment. *Teaching Mathematics & Its Applications, 32* (3), 123-139.

Perez-Goytia, N., Dominguez, A., y Zavala, G. (2010). Understanding and interpreting calculus graphs: Refining an instrument. *AIP Conference Proceedings, 1289* (1), 249-252. doi: 10.1063/1.3515213

Rodríguez, R., y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 19* (1), 99-124.

Sánchez, A. y Veytia, M. (2015). Situaciones de aprendizaje mediante las TIC para la formación de investigadores desde una intención práctica. *Atenas, 4* (32), 31-48.

Schoenfeld, A. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast, 10 (1*), 9-34.

Silk, E., Higashi, R., Shoop, R., y Schunn, C. (2010). Designing technology activities that teach mathematics. *The Technology Teacher,69* (4), 21-27.

Soto, A., y Osorio, F (2014). La graficación - modelación y la serie de taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana De Investigación En Matemática Educativa, 17* (3), 319-345.

Stohlmann, M., y Albarracin, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling? *Education Research International*, 1 (1), 1-9

Tun Uc, L (2017). El periodo de una función: una propuesta para resignificar su aprendizaje a partir de lo intuitivo, la modelación y predicción. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa*, *(30)* 1, 953-960.

Valdivieso, L. (2016). El aprendizaje de las matemáticas: Psicología cognitiva y neurociencias. *Revista de investigación, 7* (1),11-29.

Valenzuela, J. R. y Flores, M. (2011). *Fundamentos de investigación educativa* (*eBook*). Monterrey, México: Editorial Digital Tecnológico de Monterrey.

Zúñiga, F. y Morales, E. (2017). Diseño de una secuencia didáctica para el aprendizaje de la Pendiente como razón de cambio para estudiantes de nivel medio Superior utilizando herramientas tecnológicas. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, (30)*1, 1495-1504.

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

PROCESOS COGNITIVOS Y PENSAMIENTO GEOMÉTRICO EN NIÑOS CIEGOS. ACTIVIDADES EXPLORATORIAS SOBRE LA NOCIÓN DE PERÍMETRO DE FIGURAS PLANAS

COGNITIVE PROCESSES AND GEOMETRIC THINKING IN BLIND CHILDREN; EXPLORATORY ACTIVITIES ABOUT THE NOTION OF PERIMETER OF PLANE SHAPES

Karen Ivón Avilés Canché, María Guadalupe Ordaz Arjona, Jorge Alberto Ríos Martínez
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
karen.avilescanche@gmail.com, oarjona@correo.uady.mx, jorge.rios@correo.uady.mx

Resumen
A pesar de que la educación de niños con necesidades especiales es tema de investigaciones en matemática educativa en México, muy poco se ha estudiado sobre el aprendizaje matemático de niños ciegos. Por ello, esta investigación de corte cualitativo tuvo por objetivo identificar los procesos cognitivos asociados al Pensamiento Geométrico (PG) en dos niños ciegos, en torno a la noción de perímetro de figuras planas, considerando la caracterización del PG asociado al saber matemático de estudio y el empleo de tecnología computacional para propiciar la motivación y adquisición de conocimiento geométrico. Entre los resultados obtenidos destacan las características del PG y los procesos cognitivos identificados en los participantes del estudio, así como el impacto de la tecnología computacional en dichos resultados.

Palabras clave: procesos cognitivos, pensamiento geométrico, discapacidad visual, tecnología computacional

Abstract
Although the education of children with special needs is a subject of researches in educational mathematics in Mexico, few studies have approached the mathematical learning of blind children. Therefore, this qualitative research aimed to identify the cognitive processes associated with geometric thinking (GT) in two blind children, around the notion of the perimeter of plane shapes, considering the characterization of the GT associated with the mathematical knowledge of study and the use of computer technology to promote motivation and acquisition of geometric knowledge. The research results highlight the characteristics of the geometric thinking and the cognitive processes identified in the participants of the study, as well as the impact of the computer technology on such results.

Key words: cognitive processes, geometric thinking, visual impairment, computational technology

Introducción

La atención educativa de las personas con discapacidad visual no es reciente en México ni en el mundo. Según Hernández (2011), surge antes del siglo XVIII al crearse la primera escuela para ciegos en Francia, y a partir de ello, se ha logrado avanzar en su incorporación a las instituciones educativas como muestra de un avance inclusivo; el cual se refleja en el nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria (Secretaría de Educación Pública, 2017), que obedece a la lógica de la equidad para lograr que todos los estudiantes adquirieran los conocimientos, habilidades, actitudes y valores necesarios para integrarse y participar activamente como miembros de la sociedad. De manera que los niños ciegos tienen derecho a una educación de calidad donde sea posible la construcción de diferentes conocimientos, incluido el conocimiento matemático. En ese sentido, estudios (e.g. Gutiérrez y Guataquira, 2017; Sánchez y Badilla, 2011) reportan que el empleo de material didáctico y particularmente el uso de nuevas tecnologías para la construcción de conocimiento matemático en niños ciegos, contribuye y potencializa no solo la enseñanza sino también el aprendizaje de la matemática, ya que promueve ambientes de aprendizaje accesibles para el desarrollo académico idóneo de todos los estudiantes, incluidas las personas con discapacidad visual total.

No obstante, investigaciones (e.g. Ortin, 1999; Aranda, 2002 citados en Baquero y Beltrán, 2014) mencionan que la asignatura matemática con mayor dificultad para los estudiantes con problemas de visión es la geometría, puesto que conceptos como perímetro de figuras planas se construyen a partir de la posibilidad de actuar en el espacio, manejar figuras en el plano, efectuar desplazamientos, realizar mediciones, entre otras estrategias. Por lo tanto, aunque existen investigaciones que señalan la importancia de una educación matemática en personas con discapacidad visual, aún es poca la documentación que se reporta sobre aprendizaje geométrico en niños ciegos. Motivo por el cual los procesos cognitivos adquieren un papel fundamental, ya que forman parte del camino que llevará al individuo al desarrollo de un PG.

En consecuencia, existe escasa documentación sobre aprendizaje matemático en niños ciegos pues, aunque hay materiales didácticos adaptados para esta población, no se establecen elementos metodológicos que fundamenten su uso en la enseñanza-aprendizaje de la geometría, de modo que contribuya al desarrollo de un PG. Es por ello que el objetivo de la investigación fue identificar los procesos cognitivos asociados al PG en niños ciegos del nivel educativo básico primaria, mediante actividades exploratorias relativas al perímetro de figuras planas como saber matemático de estudio.

Fundamento teórico

La investigación sigue una perspectiva teórica que se direcciona en los tres ejes rectores que propone Ojeda (2006 citado en Mojica, 2013) para la educación especial, los cuales pretenden evidenciar las capacidades que una persona con alguna limitación puede desarrollar en ausencia de otras, dichos ejes son, epistemológico, cognitivo y social.

El *eje epistemológico* se orienta por el conocimiento sobre el concepto geométrico perímetro de figuras planas y las nociones fundamentales para su desarrollo, las cuales proponen Aldana-Bermúdez y López-Mesa (2016) y se presentan en la Figura 1. Lo anterior debido a la importancia que se otorga al estudio y comprensión de este concepto en la educación básica primaria (Secretaría de Educación Pública, 2017). El *eje cognitivo* se orienta por el conocimiento sobre los procesos cognitivos y el PG y sus características, de acuerdo con la clasificación del nivel de PG de Garrido y Leyva (2008) para la educación básica. Asimismo, se incorporan elementos sobre la discapacidad visual y los esquemas compensatorios (Vygotsky, 1997 citado en Mojica, 2013) particularmente interesados en aspectos cognitivos específicos del sujeto en la apropiación del concepto perímetro de figuras planas. El *eje social* considera al individuo en interacción con su medio y el conocimiento geométrico, pues contempla la idea de que los estudiantes ciegos pueden acceder a los mismos conocimientos que otros estudiantes, solo que es necesario encontrar los caminos adecuados a sus necesidades particulares (Mojica, 2013). Adicionalmente, se incorporan elementos didácticos como el uso de la tecnología computacional por permitir al estudiante nuevas experiencias matemáticas, particularmente geométricas, a partir del uso de la voz humana y la voz generada por computadora como medios para adaptar las actividades a las necesidades particulares.

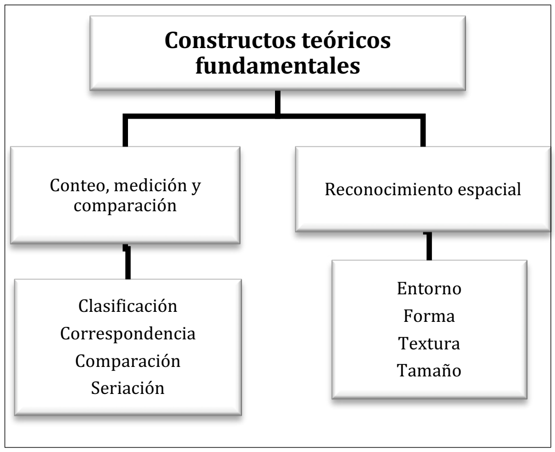


Figura 1. Constructos teóricos para el desarrollo de la noción perímetro. Adaptado de Aldana-Bermúdez y López-Mesa (2016).

Metodología

Se considera al método cualitativo como el más adecuado para organizar, reportar información del estudio y evidenciar los procesos cognitivos que los niños ciegos utilizan como una forma de compensación. En ese sentido, se considera un estudio de casos, por tratarse de un método de investigación que busca comprender en profundidad la realidad social de estudiantes ciegos del nivel básico primaria. Los participantes del estudio fueron dos niños ciegos de 8 y 9 años que cursan el primer ciclo del nivel primaria (2° y 3°, respectivamente) en el CAM "Luis Braille" ubicado en Mérida, Yucatán, México. La investigación constó de seis etapas: revisión documental, observación participante y no participante, selección del marco de referencia, diseño de las actividades exploratorias, puesta en escena de las actividades exploratorias y análisis de los resultados obtenidos. Con la cuarta etapa se logró diseñar tres actividades exploratorias, las dos primeras tuvieron por objetivo verificar si los estudiantes realizan la estimación y medición de longitudes, por lo que se emplearon herramientas de medición no convencionales (como la mano y una vara de madera) y convencionales (como la regla); así como el reconocimiento de las figuras geométricas básicas (triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo) por medio de unas fichas geométricas como material didáctico. En la tercera actividad se tuvo por objetivo permitir la construcción de argumentos geométricos que brinden una interpretación de la definición del perímetro de figuras planas mediante un contexto que pretende involucrar al estudiante en la construcción de su propio conocimiento; considerando la caracterización del PG y las implicaciones cognitivas que se asocian a su aprendizaje.

Se consideraron como instrumentos para la recolección de datos la videograbación, digitalización y transcripción de la implementación de las actividades exploratorias, así como las actividades exploratorias por sí mismas. Las actividades se programaron en un software mediante un entorno y lenguaje de programación para dispositivos móviles Android llamado AppInventor. La aplicación resultante, QRVoice, es capaz de identificar una actividad mediante un código QR, leer automáticamente el texto de la actividad y almacenar las voces de los estudiantes para su posterior análisis. En la Figura 2 puede observarse la interfaz de dicha aplicación, cada botón aparece numerado y a continuación se describe su propósito: 1) escanea código QR de la actividad, 2) detiene la lectura automática del texto, 3) graba el audio del estudiante, 4) presenta reactivo anterior, 5) lee automáticamente el texto de la actividad, 6) presenta el reactivo siguiente. Lo anterior debido a que el uso de tecnología computacional no solo genera un apoyo al investigador para la automatización de ciertas tareas, como el etiquetado de las evidencias, sino un apoyo valioso en el aprendizaje de niños ciegos, por facilitar su acceso a la información a través de otros canales sensoriales (como el oído y el tacto), ofrecer independencia y autonomía para acceder a la comunicación y propiciar su motivación hacia la adquisición de conocimiento geométrico.

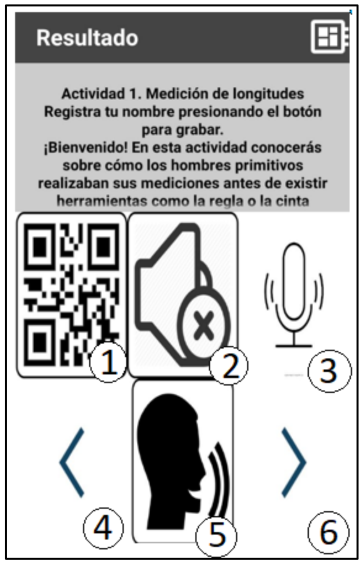


Figura 2. Interfaz de la aplicación Android QRVoice, la cual lee automáticamente los textos de la actividad y permite grabar las respuestas verbales de los estudiantes.

Los criterios para analizar los datos fueron aspectos sobre el desempeño de niños ciegos, como tipos de movimiento y expresiones faciales; los niveles de PG de acuerdo con Garrido y Leyva (2008), con adecuaciones sobre las características particulares de los participantes de estudio, así como las características del PG en torno al concepto perímetro de figuras planas; y los procesos cognitivos en niños ciegos identificados durante la revisión documental.

Resultados

Los resultados de la implementación de las actividades exploratorias tienen su énfasis en las características del PG identificadas en el estudiante 1 (Est.1) y el estudiante 2 (Est.2), así como los procesos cognitivos asociados a la noción de perímetro de figuras planas de los participantes del estudio. Para ejemplificar el análisis de los resultados, se muestran algunos fragmentos de las transcripciones de la puesta en escena de las actividades exploratorias.

Sobre las características del pensamiento geométrico

En primer lugar, sobre las unidades de medida lineal, los resultados sugieren que los estudiantes reconocieron que los centímetros son la unidad lineal más adecuada para expresar longitudes, en comparación con unidades de medida no convencionales como la mano y la vara de madera, dado que sus argumentaciones se basaron en la facilidad de aproximar medidas a los objetos de medición proporcionados, con el empleo de la regla. La explicación podría estar en las marcas del relieve, ya que son unidades lineales con menor longitud en comparación con la mano o la vara de madera. Adicionalmente, aprendieron a utilizar instrumentos de medición para estimar y medir longitudes (ver la Figura 3).

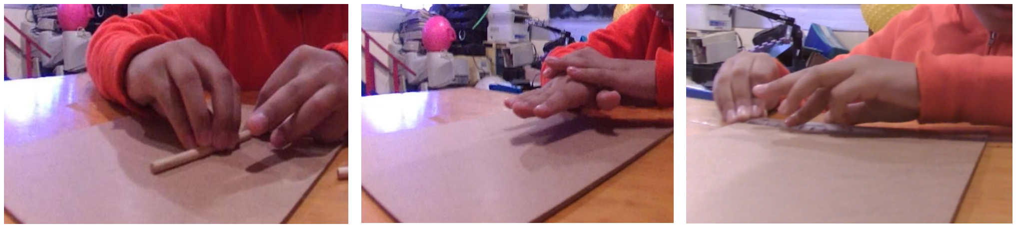


Figura 3. Empleo de los instrumentos de medición por el estudiante 1.

Otro aspecto importante es que las argumentaciones de los estudiantes para el uso de unidades de medida lineal sugieren una comprensión de su empleo en la vida real. El estudiante 1, argumenta el uso de los kilómetros como unidades de medida lineal en un contexto conocido, tal como se presenta en el siguiente fragmento:

> Est.1: Por eso dicen, el hipopótamo corre 80 kilómetros por hora…… Es interesante porque el… si te das cuenta el hipopótamo está tan gordito y tan grande qué pues no quiere decir que no se puede mover, pero ¿tan rápido corre?

Su respuesta sugiere que además de evidenciar la compresión de las nociones fundamentales para el desarrollo del saber matemático de estudio, como es el caso de las unidades de medida lineal, tiene una noción sobre otro concepto matemático, la velocidad, a partir de la relación distancia-tiempo de un recorrido y el peso de un objeto en movimiento, lo cual influye en la velocidad de dicho recorrido.

Además, acerca del reconocimiento de figuras planas, los estudiantes identificaron características básicas de las figuras geométricas, en relación con su número de lados y su forma. Para ilustrar lo anterior, en el siguiente fragmento se presenta la respuesta que proporciona el estudiante 2 cuando el investigador (Inv.) le cuestiona sobre la diferencia entre un triángulo y otras figuras geométricas:

> Est.2: Este rectángulo tiene cuatro lados, y este triángulo tiene tres… Si tiene tres lados va a ser un triángulo. Parar [presiona el botón grabar voz para guardar su respuesta]

Por otro lado, se observó que los estudiantes identificaron características geométricas en los objetos que se encuentran a su alrededor a partir de la asociación con formas geométricas conocidas, por ejemplo, el estudiante 1 estableció una relación entre las características de dos objetos con forma rectangular por medio del tacto activo y la comparación de sus cualidades (ver la Figura 4). A saber, el estudiante reconoció que la tablet tiene las mismas características que un rectángulo y lo utilizó como ejemplo para explicar cómo identificar que una libreta tiene la misma forma, tal es el caso de este fragmento:

> Est.1: Hago esto [extiende las manos sobre la mesa, una frente a la otra como tomando una caja], por ejemplo, con la tablet [acerca las manos a los costados más largos de la tablet]
> Inv.: Ajá
> Est.1: Así [presiona las manos a los costados más largos de la tablet] y así [gira la tablet para tocar los costados más cortos], entonces es rectangular
> Inv.: ¡Oh!
> Est.1: Porque estos lados son más largos [toca con los dedos los lados más largos de la tablet] y estos son más cortos [toca los lados más cortos de la tablet]

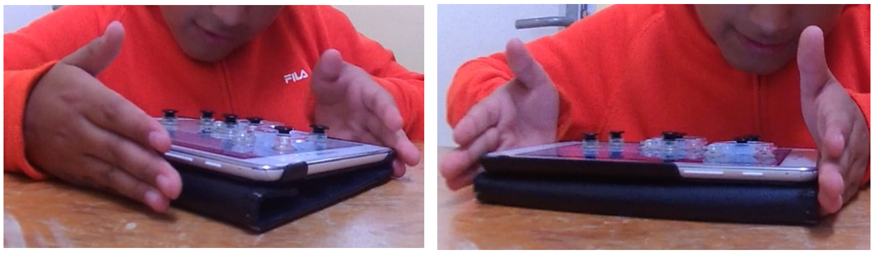


Figura 4. Identificación de formas geométricas y objetos del entorno por el estudiante 1.

Otro aspecto importante es que el estudiante 1 estableció una relación entre una figura bidimensional y una de las caras de una figura tridimensional e identificó, por medio de su comparación, similitudes y diferencias entre sí, como se presenta a continuación:

> Est.1: Y la pirámide que también es como un triángulo [toma dos de las fichas y las toca con ambas manos]
> Inv.: Pero ¿la pirámide sería una figura plana?
> Est.1: No [risa]
> Inv.: Ok, sería otro ¿no? como que...
> Est.1: Se parece a la familia de los triángulos, ¿será como su primo?

El extracto de la conversación sugiere que el estudiante reconoce que ambas figuras geométricas pueden ser de una misma familia porque hay algo en ellas que las hace similares. Cabe mencionar, que no se proporciona una representación tangible de la pirámide, lo cual se podría asociar a una rememoración de lo que el estudiante conoce sobre la figura tridimensional.

Por último, en la actividad 3, se presentó a los estudiantes un contexto para el desarrollo de la noción perímetro de figuras planas, y se solicitó determinar cuánta cinta de regalo es necesaria para cubrir todo el borde de un portarretrato de cartón. Durante la implementación los estudiantes identificaron al perímetro como el contorno de una figura por medio del tacto activo, por ejemplo, el estudiante 2 menciona lo siguiente sobre el perímetro de una ficha rectangular:

> Est.2: Éste es el perímetro [toca el borde de los lados de la ficha rectangular]

Los resultados muestran que los estudiantes reconocen la necesidad de medir cada uno de los lados de un objeto (rectangular o triangular) y realizar una suma de longitudes para determinar la medida de perímetro. Por ejemplo, el estudiante 1 responde lo siguiente al cuestionarlo sobre la cinta necesaria para adornar el portarretrato triangular:

> Est.1: Lo sumé
> Inv.: … ¿y ahora? ¿cómo podrías calcular el borde de cualquier figura? Como un cuadrado por ejemplo…
> Est.1: Emm, sumándolo con la regla… O sea, sí
> Inv.: Sumando, sumando ¿qué?
> Est.1: Sumando los bordes

Por otra parte, los estudiantes identifican propiedades de las formas geométricas a partir del tacto activo y las mediciones realizadas anteriormente. Por ejemplo, el estudiante 1 argumenta propiedades del rectángulo como se muestra a continuación:

> Est.1: Este mide 8 [toca uno de los lados de la forma rectangular con menor medida], este mide 10 [toca uno de los lados con mayor medida]. Entonces, este también mide 8 [toca otro lado con menor medida] y este 10 [toca otro lado con mayor medida]

Sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje geométrico

Los procesos cognitivos identificados en los participantes del estudio fueron la atención, la memoria ciega (procesos cognitivos simples), la percepción háptica y la visualización (procesos cognitivos complejos). A continuación, se presentan algunos ejemplos donde es posible identificarlos en términos del conocimiento geométrico que permitieron adquirir a los estudiantes.

Atención. Se evidenció en la escucha activa de ambos estudiantes, es decir, en movimientos como bajar la cabeza o ladearla ligeramente, ya que puede ser motivo de gran alerta o interés por las voces o sonidos del entorno o cuando se está concentrado en una actividad táctil, lo cual no quiere decir que puede observarse solo cuando los niños ciegos están quietos o callados. En el caso del estudiante 2, aunque se encontrara en movimiento o tocando el material tangible, mostró la habilidad de concientizar la información por medio de la audición, un sentido que debe priorizarse en la resolución de actividades matemáticas. Del mismo modo, los resultados sugieren que la atención permitió un grado de concentración en los participantes del estudio, lo que ayudó a desarrollar habilidades geométricas, entre ellas, el establecimiento de relaciones, identificación de propiedades y comparación de características de las figuras geométricas. Por ejemplo, cuando se discute sobre el sistema métrico decimal empleado en México, el estudiante 1 menciona que se podría medir utilizando los pies, por lo que se comenta que también existen unidades inglesas como el pie o la pulgada. En ese sentido, se evidencia que el estudiante presta atención a la discusión porque menciona un objeto que puede medirse en pulgadas:

> Est.1: Como en los celulares
> Inv.: Como en los celulares, las pantallas
> Est.1: ¡100 pulgadas!

Memoria ciega. Se evidenció en la capacidad de memorización de los estudiantes y la toma de conciencia de lo que tocaban y escuchaban, para luego recuperar esa información cuando era necesario, lo cual permitió formular conclusiones y establecer relaciones entre la información previa y nueva. Por ejemplo, el estudiante 2 establece una relación entre el concepto figura geométrica y aquellas figuras planas que ha estudiado previamente al responder lo siguiente cuando se le cuestiona sobre las figuras geométricas que conoce:

> Est.2: Cuadrado… triángulo…… el círculo, cuadrado y triángulo [en voz baja los últimos tres]. Rectángulo, rombo, óvalo, hexágono…… ¿cuál más?

En otro momento, el estudiante 1 menciona los nombres de las figuras planas y sus características sin contar con material tangible haciendo uso de su memoria en el tema de figuras geométricas para ejemplificar el conocimiento adquirido recientemente y ahondar en otros temas. Lo anterior se le atribuye a que, desde edad temprana, los estudiantes tuvieron oportunidad de potenciar sus habilidades de memoria y retener información durante y después de las actividades.

Percepción háptica. El sentido del tacto proporcionó a los estudiantes una variada estimulación por medio de la piel, una serie de receptores que otorgaron información de la textura, forma, tamaño y relieve del material tangible. Aún más, el tacto permitió la interpretación de las figuras planas y sus cualidades, características de sus lados y su medición, es decir, priorizó el análisis de los elementos que rodeaban a los estudiantes, trasladando los conceptos de estudio a los sentidos. Por ejemplo, el estudiante 1 menciona que la medida de un lado del portarretrato rectangular es de 14.5 centímetros y solo requiere medir el otro lado (adyacente al anterior) para determinar cuál es la longitud de cada uno de los lados. Por ese motivo, se le cuestiona por qué le basta con medir solo dos lados de dicho portarretrato. Su respuesta se presenta en el siguiente fragmento:

> Est.1: Porque sé que este igual tiene el mismo tamaño que este [toca los lados con mayor longitud] y este es del mismo tamaño que este [toca los lados con menor longitud]

A saber, el estudiante identificó una propiedad del rectángulo estudiada anteriormente: los lados opuestos del rectángulo son iguales, y acompaña sus argumentos haciendo referencia a dichos lados, por medio del tacto.

Visualización. Se evidenció tanto en las argumentaciones de los estudiantes y en la descripción de experiencias geométricas como en la generalización de las propiedades de figuras planas y en la abstracción de información, aunque en diferente nivel. Un ejemplo de ello es la representación gestual que los estudiantes realizan sobre información geométrica sin la necesidad de emplear material tangible, y en el caso del estudiante 1, por medio de la materialización del concepto figura geométrica al comparar algunas figuras con objetos de su vida cotidiana y concebir nuevas figuras a partir de las características que conoce. Durante las observaciones se escucha al estudiante mencionar a un compañero que ahora entiende por qué el Triceratops tiene ese nombre, estableciendo una relación entre las características del triángulo y las de un dinosaurio, lo cual sugiere que tiene la habilidad de extrapolar información geométrica a otros contextos porque realiza conjeturas a partir de la información recabada en la actividad:

> Est.1: ¡Ah! del Triceratops que tiene tres cuernos, uno acá, uno acá y uno acá en la nariz [toca los extremos de su frente con ambas manos y luego su nariz con una mano], por eso se llamaba Triceratops
> Inv.: ¿De 3? ¡Ah! ya entendí
> Est.1: Y el triángulo de tres puntas

Esta observación resalta el hecho de que la visualización es un acercamiento a procesos cognitivos más complejos como la abstracción de saberes geométricos y, en el caso de los participantes del estudio, se puede lograr por medios distintos al tacto, por ejemplo, con la ayuda de la memoria ciega y la atención.

Conclusiones

Las actividades exploratorias permitieron a los estudiantes del estudio identificar al perímetro como el contorno de una figura plana. Adicionalmente, se identificaron características del desarrollo de ciertos procesos cognitivos relacionados con el PG en ambos estudiantes, así como el impacto de la tecnología computacional en los resultados del estudio.

Procesos cognitivos asociados al pensamiento geométrico

La investigación sugiere que los procesos cognitivos que los estudiantes emplean en la resolución de actividades geométricas se complementan con otros. Por ejemplo, cuando un estudiante descubre o identifica propiedades en las formas geométricas no solo "pone en juego" su concentración en las cualidades de las figuras planas por medio de la exploración con las manos, sino que adicionalmente percibe de manera háptica características propias de dichas figuras y a partir de ello compara propiedades de estas. En ese sentido, los resultados indican que es conveniente apartar los materiales con lo que no se trabajará para no producir distracciones en los estudiantes. Por otro lado, la percepción háptica aunado a la audición cobraron especial importancia en la resolución de las actividades por ser las dos vías de entrada más importantes para estimular la memoria de los estudiantes. Razón por la cual se sugiere que el desarrollo de la memoria ciega es relevante por la agilidad que ofrece a los niños ciegos para retener información y replicarla en beneficio de nuevo aprendizaje.

Por otro lado, cabe mencionar que los procesos cognitivos identificados en el estudio (atención, memoria ciega, percepción háptica y visualización) funcionaron a manera de esquemas compensatorios en los participantes, ya que según Mojica (2013) un proceso cognitivo se puede considerar como un esquema compensatorio si hay evidencia de que permitió la adquisición del concepto matemático por parte del niño con alguna discapacidad. En ese sentido, se contempla a los esquemas compensatorios a manera de Vygotsky, es decir, como aquellos programas cognitivos que pueden ser potencializados para favorecer el desarrollo del PG (Vygotsky, 1997 citado en Mojica 2013). Lo cual se considera relevante debido a que los procesos cognitivos se podrían considerar como estrategias integradoras que permitan desarrollar un PG en niños ciegos, para posteriormente lograr prácticas exitosas que hagan que los estudiantes se sientan partícipes de la construcción de su conocimiento y puedan desenvolverse en contextos sociales que impliquen las mismas competencias geométricas para estudiantes regulares.

Impacto de la tecnología computacional

La tecnología empleada como material didáctico permitió a los estudiantes avanzar a su propio ritmo en la resolución de las actividades exploratorias y desarrollar independencia. Adicionalmente, algunos de los resultados que se lograron, particularmente con el empleo de la aplicación Android "QRVoice" fueron las siguientes:

Innovación. Se promovió la interacción entre los estudiantes, el medio didáctico y el saber matemático de estudio con una nueva forma de interacción a la cual los estudiantes no estaban acostumbrados (ver la Figura 5). Por ejemplo, el estudiante 2 menciona en la app "Tablet, hoy no encontré nada. Lo siento", lo que muestra una interacción social con una máquina.

Motivación. Despertó el interés de los estudiantes por medio de sus características específicas, por ejemplo, el almacenamiento de respuestas condujo a que quisieran responder los cuestionamientos por ellos mismos, cuando estuvieran seguros de hacerlo.

Formación. Permitió a los estudiantes la comunicación y argumentación de resultados, sobre todo por la capacidad de la tablet para almacenar respuestas y reproducirlas después a solicitud del investigador, para que el estudiante reflexionara sobre ellas.

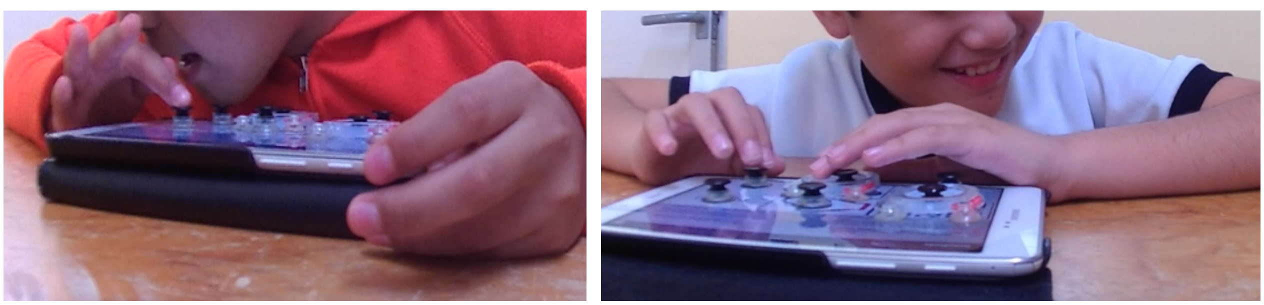


Figura 5. Interacción de los estudiantes con la aplicación Android "QRVoice".

Referencias bibliográficas

Aldana-Bermúdez, E. y López-Mesa, J. H. (2016). Matemáticas para la diversidad: un estudio histórico, epistemológico, didáctico y cognitivo sobre perímetro y área. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación,* 7 (1), 77-92.

Baquero, M. J. y Beltrán, J. E. (2014). *Revisión documental sobre materiales utilizados en la enseñanza de la geometría en un aula integrada donde se encuentren estudiantes con limitación visual, en básica primaria.* (Tesis de Licenciatura), Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.

Garrido, Y. P. y Leyva, L. M. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: Estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana de Educación, 48* (1), 1-7.

Gutiérrez, E. A. y Guataquira, O. (2017). *Estrategias de aprendizaje de matemáticas en estudiantes con ceguera o baja visión.* Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Colombia.

Hernández, C. (2011). *Desarrollo de las concepciones educativas de las personas con discapacidad visual.* La Habana: Pueblo y Educación.

Mojica, J. M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Sánchez, J. M. y Badilla, J. E. (2011). Experiencias docentes. Uso de las nuevas tecnologías de la información y comunicación para la enseñanza de las matemáticas a alumnos con minusvalía visual. *Pensamiento Matemático*, 1-12.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Modelo Educativo para la Educación Obligatoria.* México: Secretaría de Educación Pública.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

EXPERIENCIAS DEL PROCESO DE AUTOVALIDACIÓN EN UN AMBIENTE VIRTUAL AL RESOLVER SITUACIONES BAJO INCERTIDUMBRE

EXPERIENCES OF THE SELF-VALIDATION PROCESS IN A VIRTUAL ENVIRONMENT WHEN SOLVING UNCERTAINTY SITUATIONS

Fernando León Parada
Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (Colombia)
profeleonp@gmail.com

Resumen
Este reporte es parte de una investigación doctoral en curso que explora las actividades de estudiantes de ingeniería cuando buscan estrategias para resolver problemas de índole estocástica en un Ambiente Virtual de Aprendizaje Autorregulado (AVAA); el registro de sus trayectorias reales de aprendizaje sobre mapas conceptuales y árboles de decisión revela algunas tendencias significativas en el proceso de autovalidación de sus soluciones propuestas y, de autocorrección de equivocaciones en los casos de sesgos de razonamiento causados por falacias que fueron inducidas con preguntas capciosas en los enunciados de los problemas. Las distintas interpretaciones semánticas y el determinismo excesivo en el tratamiento de los problemas de probabilidad cedieron el paso a la intuición inferencial durante el proceso de autovalidación.

Palabras clave: probabilidad, ambiente virtual de aprendizaje, resolución de problema, autovalidación

Abstract
This report is part of an ongoing doctoral research that explores the activities of engineering students when looking for strategies to solve stochastic problems in a Virtual Self-Regulated Learning Environment (VSRLE); the record of their real learning trajectories on conceptual maps and decision trees, reveals some significant trends in the process of self-validation of their proposed solutions and of self-correction of mistakes in cases of reasoning biases caused by fallacies that were induced with problem statements having trick questions. The different semantic interpretations and excessive determinism in the treatment of probability problems gave way to inferential intuition during the process of self-validation

Key words: probability, virtual learning environment, problem solving, self-validation

Introducción

El presente reporte es parte de una investigación doctoral en curso que muestra indicios exploratorios con estudiantes de ingeniería cuando sus respuestas equivocadas por causa de falacias de probabilidad logran autocorregirlas mediante la construcción de mapas conceptuales que son facilitados por un medio virtual que los encamina en el proceso de autovalidación. Se trata de una exploración que desarrolla una metodología mixta; inicia planteando problemas de probabilidad con preguntas capciosas y facilitando en un ambiente virtual la construcción de esquemas conceptuales, como herramienta metacognitiva, para buscar implicaciones en el proceso de autovalidación. Las unidades de análisis en la exploración fueron las acciones de los estudiantes de ingeniería que respondieron cuatro situaciones problemáticas bajo condiciones de incertidumbre.

La primera estrategia metodológica fue la de plantearles los problemas con preguntas capciosas de modo que a los estudiantes se les indujera en falacias de probabilidad para hacer que cometieran decisiones equivocadas, y a partir de estas conductas previas, motivar el inicio de los procesos de autovalidación para cada uno de ellos. Las falacias son estructuras sintácticas que contienen ambigüedades en el lenguaje; una pregunta capciosa puede despertar alguna interpretación distinta en el receptor si éste es influenciado por falsas creencias, o por ignorancias, que desvirtúen el significado del enunciado. “En la lógica tradicional, si se presenta en forma apropiada, una falacia puede ser hecha incluso a partir de declaraciones verdaderas; es decir, constituir o expresar un argumento que parece válido, pero no lo es.” (Hamblin, 2004, p. 224).

La segunda estrategia metodológica fue brindarle al estudiante en cada problema, un arquetipo de esquema y un menú de contenidos teóricos tales como conceptos de probabilidad, fórmulas matemáticas, gráficos, etc., para que, con el ‘arrastre’ de los considerados por él como pertinentes, de modo autónomo, los colocara dentro de las cajas vacías de texto del esquema, conectara estas cajas o nodos con arcos dirigidos y términos que formaran frases coherentes, y desde un nodo final del esquema o mapa conceptual hiciera la implicación de una solución, entre varias opciones sugeridas, que fuera relevante al problema planteado; en cada problema la solución relevante se estableció previamente por el administrador de contenidos quien fue responsable de la certeza de esa solución.

El problema de esta investigación tiene origen en la pregunta investigativa: ¿qué efecto tiene el uso de los mapas conceptuales en el proceso de autovalidación de soluciones de problemas sobre probabilidad propuestos con preguntas capciosas a los estudiantes de ingeniería?

El objetivo propuesto es describir resultados exploratorios de una forma de auto-instrucción que potencia el momento de autovalidación de respuestas sin necesidad de acudir a agentes externos al entorno virtual. Los resultados de esta exploración nos mostraron esquemas o mapas de los estudiantes en los que no todas las conexiones textuales que ligaban los nodos formaban frases gramaticalmente bien construidas; en otros, se dejaron por fuera conceptos claves, o incluyeron algunos contenidos que no tenían relación alguna con la problemática planteada; no obstante, la deficiente *coherencia* entre los nodos ligados y las fallas en la *pertinencia* de los contenidos, hubo significativa *relevancia* de las soluciones acertadas a los problemas planteados en la mayoría de los esquemas o mapas conceptuales desarrollados por los estudiantes, en la sección de resultados se muestran cuatro ejemplos.

Marco teórico

El marco teórico de esta fase de exploración investigativa se delimita desde varios acercamientos provenientes de distintos campos tales como la implementación de un Ambientes Virtual de Aprendizaje Autorregulado (AVAA), los sesgos de razonamiento como prejuicios cognitivos, la competencia de resolución de problemas de probabilidad, el análisis didáctico de las trayectorias de aprendizaje, y el uso de la herramienta metacognitiva del esquema o del mapa conceptual. Para la creación del AVAA se tuvo en cuenta la metodología que consta de cinco etapas: análisis, diseño, desarrollo, evaluación y administración (Mendoza y Galvis, 1999); los módulos de diseño instruccional del AVAA fueron articulados en un sistema dotado de comandos para la ejecución de funciones como el ‘arrastre’ y ‘conexión’ de contenidos textuales declarativos y gráficos extraíbles de un repositorio por medio de íconos en un menú de ayudas para facilitar la conformación de esquemas o de mapas conceptuales de representación virtual. El AVAA incluyó elementos metacognitivos de autoaprendizaje como los arquetipos de mapas conceptuales que sirven para abordar los contenidos declarativos (González, Novak y Morón, 2001).

La aplicación de los conceptos de la probabilidad tuvo en cuenta experiencias investigativas sobre el desarrollo cognitivo de la intuición probabilística en la adolescencia (Batanero, 2005), y en la edad adulta (Batanero, Contreras, y Diaz, 2012). También se consultó el trabajo investigativo de Fischbein (1975) relacionado con las intuiciones que se desarrollan en función de lo que mejora la capacidad para extrapolar y activar los mecanismos de inferencia lógica, en la misma medida en que se puedan condensar en hábitos mentales. El hecho de las frecuentes equivocaciones de los estudiantes que enfrentan problemas de probabilidad corrobora que en más del 90% de los casos incurren en dilemas y contradicciones al recurrir a la intuición inferencial, o sea al tipo de intuición que se basa en procesos previamente analíticos que se vuelven automáticos para el sujeto (Pretz & Totz, 2007); la aplicación del proceso heurístico de resolución de problemas mediante inferencias a partir de la intuición, más allá del uso de las técnicas y herramientas matemáticas de la probabilidad, es un obstáculo que desvía la atención hacia respuestas incorrectas, precisamente por impulsar al sujeto a saltarse los pasos lógicos e intuitivamente apostarle a una conclusión.

El análisis didáctico sobre la resolución de problemas estuvo relacionado con los mecanismos propios del proceso de autovalidación, entendido como aquel proceso por el cual un estudiante accede por sí mismo a alguna información que le asegure la validez o la decisión acertada sobre un problema (Balacheff, 1987). Se tuvo en cuenta la distinción entre los dos tipos de trayectorias de aprendizaje; la primera es la trayectoria hipotética compuesta por el objetivo de aprendizaje, las actividades de aprendizaje, y el proceso de aprendizaje hipotético que consiste en una predicción acerca de cómo evolucionarán el pensamiento y la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades de aprendizaje; y la segunda, es la trayectoria real, o factual, de aprendizaje que se identifica por ser específica durante y después que un estudiante ha progresado a través de un camino o un tipo de aprendizaje, lo que hace de este tipo de trayectoria real de aprendizaje un fenómeno que no se puede saber de antemano (Simon, 1995).

■ Metodología/desarrollo de algunos ejemplos

La exploración de conocimientos existentes para apoyar las alternativas propuestas en la investigación es la décima fase de una metodología mixta, de un total de quince (15) fases, comprendida en el ciclo de investigación de la ciencia del diseño (Alturki, Gable, Bandara, Gregor, 2012). La metodología estuvo centrada en descubrir rasgos de la autorregulación en el aprendizaje según las dimensiones sicológicas de Zimmerman (1998) dentro de las cuales se desarrollan los subprocesos de autoinstrucción, autocontrol, autoevaluación, autoverificación, autocontrastación, autocorrección, autojustificación, y autovalidación.

La focalización se hizo en las trayectorias factuales de autoaprendizaje de 20 estudiantes de ingeniería, tomados aleatoriamente de la población de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital de Bogotá, de carácter público; cada estudiante enfrentó la resolución de cuatro tipos de problemas de probabilidad cada uno en una sesión de media hora. La estrategia metodológica consistió en plantearles las situaciones de incertidumbre con enunciados que ocultaban falacias de probabilidad; la intención de provocarles sesgos de razonamiento se hizo para incentivarlos luego a que ellos mismos se percataran de sus respuestas equivocadas y se sintieran motivados por salir de sus dilemas con la ayuda de mapas conceptuales que debían construir interactivamente en un Ambiente Virtual de Autoaprendizaje Autorregulado (AVAA), provisto de ayudas para el manejo de comandos sencillos de “arrastre” y de “conexión” de herramientas teóricas disponibles en un repositorio como medio a través del cual, de modo autónomo, se llevó a cabo la construcción de diversas configuraciones de esquemas y mapas conceptuales para el proceso de autovalidación de soluciones relevantes a los problemas planteados.

Hubo diversas representaciones desarrolladas por los estudiantes en el estudio exploratorio; a continuación, se ilustran como ejemplo siete (7) de ellas que fueron desarrolladas por los estudiantes al resolver cuatro (4) tipos de situaciones problemáticas. El primero tipo tiene tres casos donde se oculta la falacia de la conjunción.

Situación 1

Un profesor, que no llevaba registro de asistencias a su clase, envió por e-mail una tarea para que la hicieran sus estudiantes y sobre ella hizo un Quiz en la siguiente clase.

Caso 1. Si un estudiante aprueba el Quiz, ¿cuál de estos dos hechos pudo haber sido más probable en su conducta antes de presentar la prueba?

Evento A: haber 'Asistido a clase'
Evento A ∩ H: haber 'Asistido a clase' y haber 'Hecho bien la tarea'.

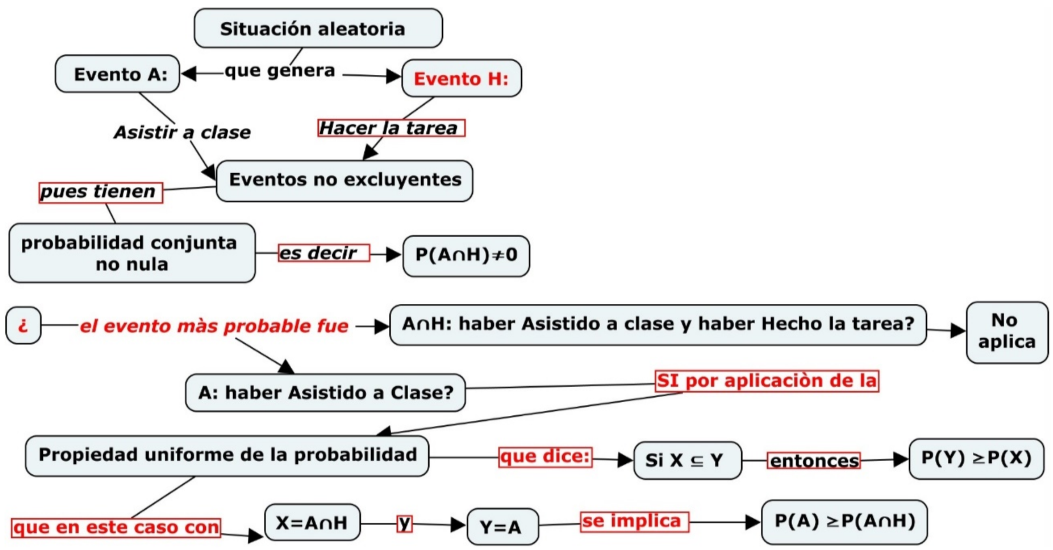


***Figura 1*:** Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 12 de feb. 2018. Creación propia.

Caso 2. Si un estudiante reprueba el Quiz, ¿cuál de estos dos hechos pudo haber sido más probable en su conducta antes de presentar la prueba?

Evento A': No haber 'Asistido a clase'
Evento A' ∪ H': No haber 'Asistido a clase' o no haber 'Hecho bien la tarea'.

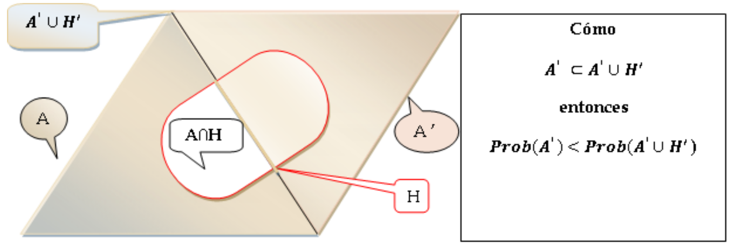


Figura 2: Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 13 de feb. 2018. Creación propia.

Caso 3. Si un estudiante reprueba el Quiz, ¿cuál de estos dos hechos pudo haber sido más probable en su conducta antes de presentar la prueba?

Evento A’: No haber ‘Asistido a clase’
Evento A’ ∩ H’: No haber ‘Asistido a clase’ ni haber ‘Hecho bien la tarea’.

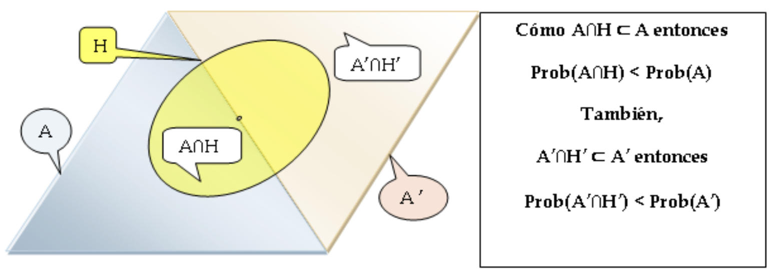


Figura 3: Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 14 de feb. 2018. Creación propia.

El siguiente tipo de situación tiene dos casos donde se oculta la falacia de la probabilidad condicional.

Situación 2

Un sistema cibernético programa el vuelo de ‘drones’ que tienen mayor la probabilidad de ‘Despegar a tiempo’ (D) que la de ‘Aterrizar a tiempo’ (A).

Caso 1. En condiciones favorables para los vuelos, ¿cuál de estos dos hechos pudo haber sido más probable?

Evento D|A: haber ‘Despegado a tiempo’ cuando ha ‘Aterrizado a tiempo’
Evento A|D: ‘Aterrizar a tiempo’ cuando ha ‘Despegado a tiempo’.

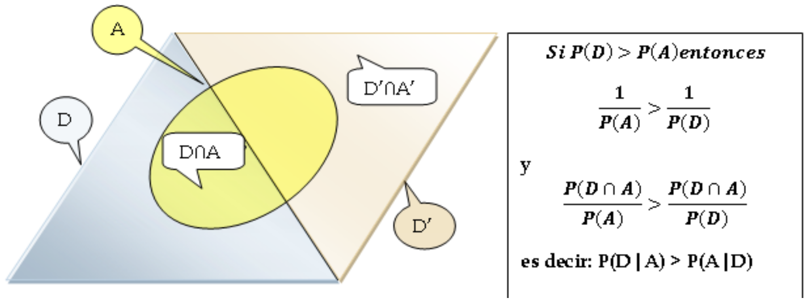


Figura 4: Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 15 de feb. 2018. Creación propia.

Caso 2. En condiciones desfavorables para los vuelos, ¿cuál de estos dos hechos pudo haber sido más probable?
Evento A'|D': 'Aterrizar retrasado' cuando ha 'Despegado tarde'
Evento D'|A': haber 'Despegado tarde' cuando 'Aterriza tarde'.

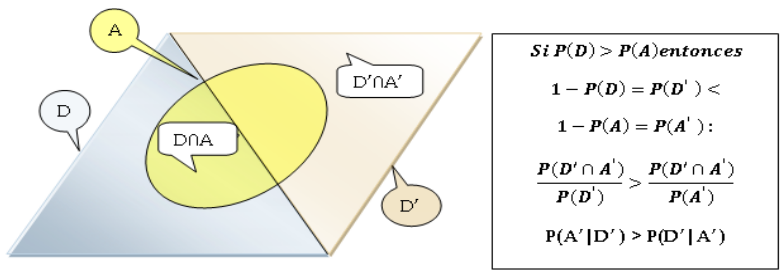


Figura 5: Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 16 de feb. 2018. Creación propia.

El siguiente tipo de situación oculta la falacia de *Descuido* sobre eventos conjuntos dependientes.

Situación 3

Las 'bases piratas' son plataformas terrestres que detectan drones y les disparan misiles para destruirlos en pleno vuelo. Un grupo de ingenieros ha diseñado tres tipos de drones con antimisiles para eliminar 'bases piratas': *Tri-drones* de tres cañones, *Cuadri-drones* de cuatro cañones, y *Penta-drones* de cinco cañones. Si un dron detecta una 'base pirata' le dispara simultáneamente sus misiles a través de cañones conectados a un nodo central de su estructura. La probabilidad de dar en el blanco de cada antimisil depende del tipo de dron desde el cual sea accionado: 25% si es desde el *Tri-dron*, 20% si es desde el *Cuadri-dron*, y 19% si es desde el *Penta-dron*.

Una misión enviará un dron de cada tipo por cada una de tres rutas donde se colocan al azar 'bases piratas': el *Tri-dron* irá por la ruta donde estarán tres 'bases piratas', el *Cuadri-dron* por la ruta de cuatro 'bases piratas', y el *Penta-dron* por la ruta de cinco 'bases piratas'.

¿Cuál tipo de dron tendrá mayor éxito, y porqué, en eliminar las 'bases piratas' en su ruta y culminar su misión de recorrido, el *Tri-dron*, el *Cuadri-dron*, o el *Penta-dron*?

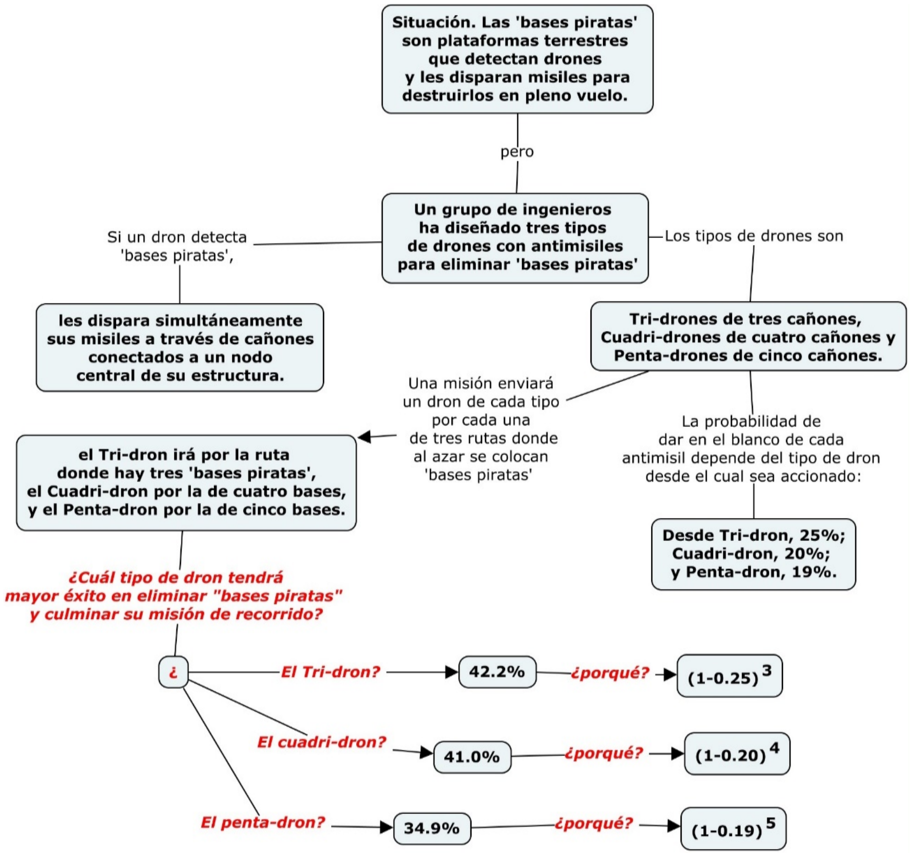


Figura 6: Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 19 de feb. 2018. Creación propia.

El siguiente tipo de situación oculta la falacia “del jugador”, o la falacia de “confianza excesiva”.

Situación 4

En cierto casino un jugador observaba una ruleta que se detenía al azar en una de sus celdas; cada celda estaba pintada de uno de dos colores: ‘negro’, o ‘rojo’. Había igual cantidad de celdas de cada color y se garantizaba la ruleta sin defectos.

El jugador, al ver que después de cinco veces consecutivas la ruleta solo se detenía en el color ‘negro’ apostó solo al color ‘rojo’ pero perdió en cada una de las tres veces siguientes y resultó quedando con un solo ‘centavo’; ¿cuál de las siguientes situaciones realizará con el ‘centavo’?:

¿lo apostará otra vez al ‘rojo’?, ¿por qué?
¿lo apostará ahora al ‘negro’?, ¿por qué?
¿dejará de apostar?, ¿por qué?

Un estudiante configuró el siguiente esquema, pero no contestó en los nodos finales.

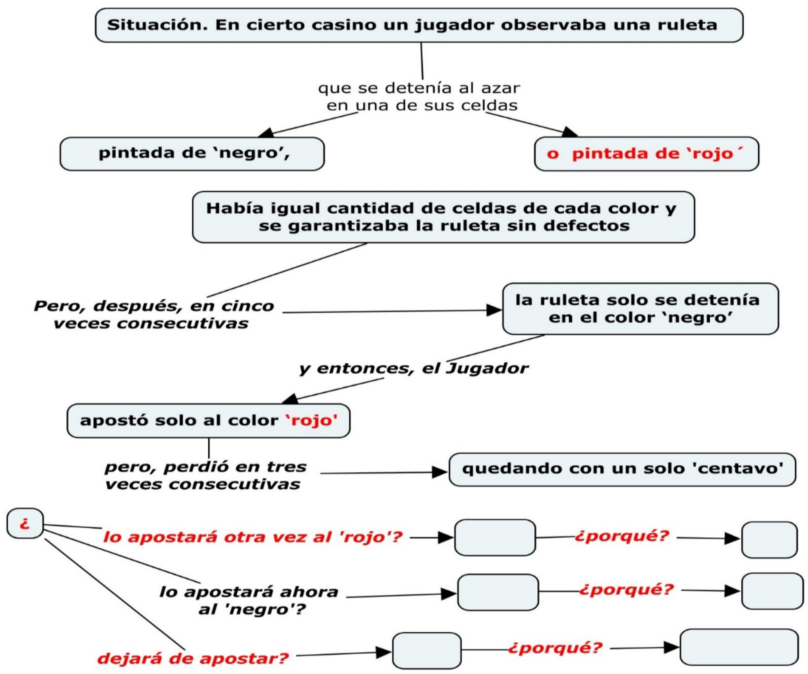


Figura 7: Captura de pantalla del mapa conceptual en el PC de un estudiante de ingeniería participante en el estudio exploratorio de una tesis doctoral; 20 de feb. 2018. Creación propia.

Análisis de resultados/implicaciones

El análisis de la exploración con los estudiantes se sintetiza en los siguientes resultados parciales:

1) Se comprobó que los estudiantes de ingeniería son propensos a sesgos de razonamiento cuando son sensibles a la perturbación del uso de preguntas capciosas en situaciones problemáticas bajo incertidumbre.

2) Se reconoció que el estudiante al momento de haber construido su mapa conceptual flexibiliza sus acciones para la auto-corrección de errores de decisión como una forma de autorregulación del aprendizaje aprovechando las condiciones y los recursos del entorno virtual.

3) Se identificaron algunos elementos en el desarrollo del proceso de autorregulación del aprendizaje durante los momentos en que el estudiante, de modo autónomo, organizaba los recursos provistos por el ambiente virtual para culminar adecuadamente el proceso de autovalidación con una solución relevante al problema que se le había planteado.

Conclusiones

Las conclusiones correspondientes a los resultados parciales fueron las siguientes:

1) Se verificó la hipótesis acerca de que las personas son propensas a la confianza excesiva en las creencias y, en consecuencia, generan sesgos de razonamiento que distorsionan sistemáticamente los juicios y las decisiones (Dunlosky & Metcalfe, 2009).

2) Se comprobó que los mapas en el AVAA, además de actuar como recursos gráficos facilitando la representación jerárquica de conceptos y proposiciones, se constituyeron en herramientas claves para el diagnóstico y el manejo auto-correctivo de errores conceptuales por parte de los estudiantes.

3) Se dio alcance a la meta objetiva sobre el desarrollo de la autorregulación del aprendizaje a través del AVAA en los momentos en que los estudiantes interactuaron, de modo autónomo, en el proceso de autovalidación de soluciones relevantes a los problemas, toda vez que éstos les fueron planteados con preguntas capciosas.

Referencias bibliográficas

Alturki, A., Gable, G., Bandara, W., Gregor, S. (2012). Validating the design science research roadmap: through the lens of the idealised model for theory development. *Pacis 2012, Proceedings. Paper 2*. Recuperado de http://aisel.aisnet.org/pacis2012/2

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18(2)*, 147-76.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(*003*)*, 247-263.

Batanero, C., Contreras, J. M., y Diaz, C. (Marzo-Agosto de 2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 1-27.

Dunlosky, J., & Metcalfe, J. (2009). *Metacognition* (primera ed.). Los Angeles, California, USA: SAGE.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive sources of Probabilistic Thinking in Children* (1a. ed.). Dordrecht, Netherlands: Reidel.

González, F. M., Novak, J. D., y Morón, C. A. (2001). Errores conceptuales, diagnosis, tratamiento y reflexiones. Pamplona, España: Eunate. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=237993

Hamblin, C. L. (1970/2004). *Fallacies.* Newport News, Virginia, USA: Vale Press. (Obra original publicada en Londres: Methuen, 1970).

Mendoza, P. B., y Galvis, A. P. (1999). Ambientes virtuales de aprendizaje: una metodología para su creación. (LIDIE, Ed.). *Informática Educativa, 12*(2), 295-317.

Pretz, J. E., & Totz, K. S. (2007). Measuring individual differences in affective, heuristic, and holistic intuition, *Personality and Individual Differences, 43(*5), 1247-1257.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Zimmerman, B. J. (1998). Academic studying and the development of personal skill: a self-regulatory perspective. *Educational Psychologist*, *33*(2/3), 73-86.

VOL 32, NÚMERO 1, AÑO 2019

USO DE TRACKER Y GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA PARA EL APRENDIZAJE DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

USE OF AND GEOGEBRA AS A TEACHING TOOL FOR THE LEARNING OF SOLIDS TRACKER OF REVOLUTION

Rafael Pantoja González, Karla Liliana Puga Nathal, Leopoldo Castillo Figueroa
Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (México)
rpantoja3@hotmail.com, karlalpn4@gmail.com, polin86@prodigy.net.mx

Resumen
La investigación se centra en aproximar el volumen de objetos cotidianos, con el método de sólidos de revolución, de cálculo integral, a partir de una fotografía, como una alternativa a la forma tradicional de enseñanza del tema. Con Tracker se obtienen las coordenadas (x,y) aproximadas con la interfase fotografía/PC. GeoGebra se ajusta a polinomios para modelado y volumen. Las actividades se realizaron colaborativamente y del análisis de las hojas de trabajo y observación. Se concluye que los alumnos mostraron motivación e interés para desarrollar las actividades y apropiarse de conceptos. Algunos objetos fueron frutas, recipientes, panqué y balones.

Palabras clave: solidos, revolución, colaborativo, tracker, geogebra

Abstract
The research focuses on approximate the volume of everyday objects, with the solid's method of revolution, of integral calculus, from a photograph, as an alternative to the traditional way of teaching the subject. With Tracker, the approximate coordinates (x, y) of the photography / PC interface and with GeoGebra, adjustment to polynomials for modeling and volume are obtained. The activities were carried out collaboratively and the analysis of the worksheets and observation. It is concluded that the students showed motivation and interest to develop the activities and appropriate concepts. Some objects were fruits, containers, pancakes and balloons.

Key words: solids, revolution, collaborative, tracker, geogebra

Introducción

En el plan de desarrollo institucional (2013-2018) del Tecnológico Nacional de México (TecNM) se sugiere emplear la modelación y las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los distintos cursos de matemáticas, con la finalidad de fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como propiciar el interés del profesor por generar estrategias de enseñanza alternativas, que incentiven y motiven al estudiante por aprender matemáticas (Arrieta y Díaz, 2015).

En esta reforma, en el plan de estudio que rige el desarrollo del curso Cálculo integral, se sugiere utilizar las TIC para facilitar el entendimiento de los temas a los estudiantes, pero su enseñanza se orienta a utilizar el software especializado de matemáticas para solucionar ejercicios propuestos en la bibliografía recomendada, que por un lado, los docentes no lo relacionan con la vida cotidiana, y por otro, omiten otras tecnologías como es el empleo de la fotografía y el video digital (Ezquerra, Iturrioz, Díaz, 2011; Jofrey, 2010).

En el caso que se reporta, se parte de la selección de una situación problema (Hitt y González-Martín, 2015; Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016) de la vida cotidiana, como es calcular el volumen de una fruta, un recipiente o un balón deportivo, objetos tridimensionales con distintas formas.

Estos objetos se capturan en fotografía, para ser analizados y revisados en dos momentos: el primero es generar con el software Tracker un conjunto de coordenadas (x, y), a partir de la señalización del contorno de la proyección del objeto plasmado en la fotografía, y segundo, exportar estas coordenadas a GeoGebra para ajustar una función a su periferia y aplicar la fórmula para aproximar su volumen.

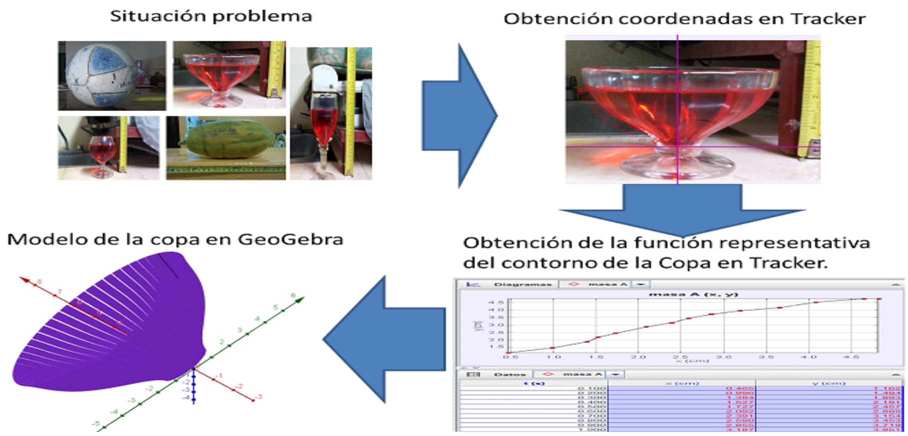
Con la aplicación de estas herramientas digitales, se trata de dar una justificación al plan de estudios y sacar del aula el concepto del cálculo volúmenes por el método de solidos de revolución, al aplicarlo a objetos cotidianos del contexto del estudiantes como son los cortes trasversales de cuerpos tridimensionales como recipientes, frutas, balones, entre otros; se pretende fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como propiciar el interés del profesor por generar estrategias alternativas para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

Se reportan los resultados del curso de Cálculo Integral impartido en el periodo Agosto a diciembre de 2017, realizado en el Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán (ITCG), perteneciente al sistema descentralizado Tecnológico Nacional de México (TecNM) con 33 alumnos. La metodología para encontrar el volumen y su modelo, por el método de solidos de revolución, se sustentó en el empleo de la fotografía y el video de objetos planos y de secciones transversales de cuerpos tridimensionales, comunes en el contexto del estudiante, mediante el ajuste de funciones polinómicas al contorno de la región con apoyo del software GeoGebra y con los datos o coordenadas (x, y) obtenidos de la manipulación al contorno del objetos que se haya seleccionado de la fotografía o video con el Tracker.

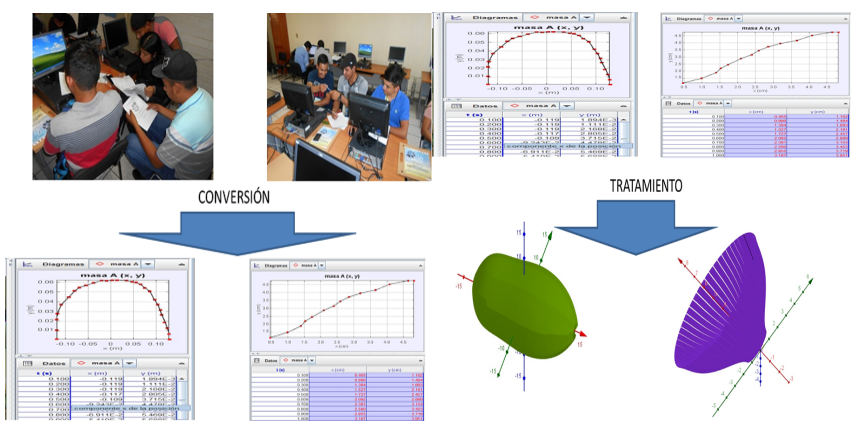
Un elemento importante para el desarrollo de la metodología propuesta son los conocimientos previos de los alumnos participantes, pues aproximadamente el 55% de los alumnos ha cursado y reprobado el curso Cálculo Integral, y el otro 45% de alumnos, son jóvenes en situación regular académica que quieren adelantar materias o ponerse al corriente con sus créditos escolares, situación que ha beneficiado de manera indirecta el desarrollo de alternativa didáctica planteada, pues ya tenían un conocimiento incipiente de los temas del curso.

Marco teórico

La Teoría de las representaciones Semióticas de Raymond Duval (2004), se ha elegido sustento teórico debido a que desde el inicio se generan cuatro registros a saber: El visual que se relaciona con la fotografía del objeto, y al momento de emplear al Tracker se generan los acercamientos gráficos (gráfica del contorno), analítico (expresión algebraica) y numérico (tabla de datos). Las representaciones verbal y escrita se propician al momento del trabajo colaborativo con la metodología ACODESA (Aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión) y la elaboración de un reporte final de las actividades realizadas.



(a) Esquema de la representacion semiotica de Duval para encontrar el volumen del liquido de las copas.



(b) Experimentación en colaborativo esperada en la conversión y tratamiento de las representaciones semióticas de Duval del volumen aproximado del objeto seleccionado, en este caso, las copas

Figura 1. Esquemas esperados sobre la experimentación al utilizar las representaciones semióticas de Duval y el trabajo colaborativo

Las directrices que marca la teoría de representaciones Semióticas de Raymond Duval citado en Pantoja, *et al,* (2016), en el que este trabajo se sustenta, sitúa al alumno en acciones para la generación de los cinco registros: el *visual* que se relaciona con la toma de la fotografía digital, con la utilización de una medida de referencia, ya sea regleta, regla, flexómetro o cualquier elemento que se sepa su medida real, para que el software Tracker con sus rutinas de interfaz humano-máquina, pueda escalar el objeto de manera confiable para su análisis posterior, el *grafico* el cual se relaciona directamente con las gráficas que arroja el software Tracker al colocar los puntos o coordenadas (x,y) del contorno del objeto que se analiza, en este caso las copas. El *verbal* se denota cuando se observa discutir, entablar o discernir sobre en qué regiones marcar y visualizar la imagen para colocar los puntos en la imagen cuando se usa Tracker. El *analítico* se observa cuando se utilizan las herramientas de GeoGebra para obtener la función polinómica del contorno de la copa y el *numérico* en la obtención de las coordenadas (x,y) y en la solución del polinomio para aproximar el volumen al aplicar el tema de solido de revolución.

Metodología

La actividad inicia con la selección de la situación problema, como se presenta en la figura 2, para este caso, encontrar el volumen de una copa mediante su fotografía. Otros objetos como la fruta papaya, se utilizan como ejemplos en salón de clase.

Al alumno se le ha capacitado sobre los cuidados que hay que tener en el manejo de la fotografía con el Tracker, direccionado a determinar el volumen de los diferentes objetos.
Los cuidados se describen a continuación:

- El lente de la cámara fotográfica digital, debe ser lo más paralela al objeto que se analizará.
- Se debe contar con una referencia de medida, esto sea con una regla graduada o un elemento que se conozca su longitud.
- Claridad en el objeto que se fotografía.

Figura 2, situaciones iniciales para encontrar el sólido de revolución.

Para la experimentación se planearon tres sesiones de trabajo guiado con los alumnos, las cuales se describen a continuación.

Sesión uno

La labor de los instructores fue generar actividades significativas y accesibles para los alumnos, que fueron avaladas por la academia de ciencias básicas del ITCG, con la finalidad de validar la pertinencia del material. Como resultado de la revisión, se propuso generar una actividad extra previa al modelado de las copas, que consistió en una práctica guiada cuyo objetivo fue modelar el volumen de una papaya (Figura 3), fruta conocida por su forma ovalada semejante a un elipsoide.

Esta actividad promovió que los estudiantes vivieran la experiencia del modelado y manifestar sus dudas e inquietudes sobre la actividad.

Para lograr tal meta, las actividades se integraron en una secuencia didáctica, elemento promotor que los orientó paso a paso en el proceso de cálculo del volumen de la fruta. Se inicia con la búsqueda de la función que modela la periferia en la fotografía de la papaya en Tracker, en donde con las rutinas se puede encontrar las coordenadas cartesianas (x, y) del contorno de la fruta. Ver figura 3.

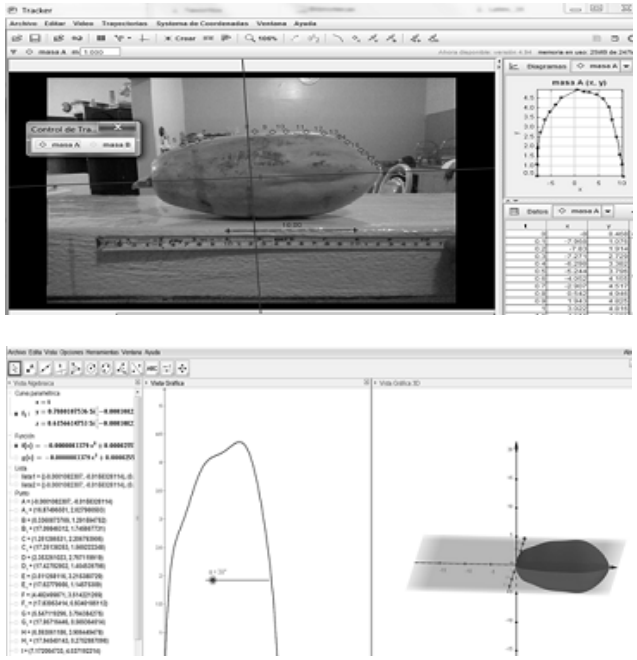


Figura3. Ejercicio de práctica, el volumen de la Papaya.

De esta manera se logró sistematizar un proceso de análisis para aproximar el volumen que ayudó al alumno a visualizar y obtener el volumen de algunos objetos de su entorno, ya que la metodología es semejante.

Sesión dos

Esta sesión es importante, ya que se trata de encontrar y aproximar el líquido que contiene la copa. Previamente a los alumnos se les mostró la instrucción de trabajo para toda la sesión lo que promovió el trabajo en grupos colaborativos. Los profesores únicamente participaron en resolver dudas sobre procedimientos técnicos.

Se solicitó a los estudiantes que, una vez que terminaran de explorar y calcular un volumen aproximado de la copa, redactaran un reporte con sus resultados, observaciones y conclusiones respecto al trabajo que se realizó, con esto se promueve la auto reflexión, trabajo colaborativo y sustentación del modelo ACODESA.

Sesión tres

Se solicitó a los estudiantes exponer sus dudas o problemas que se generaron durante las sesiones anteriores y de esta forma, en sesión plenaria, dar solución y así aclarar, retroalimentar y sobre todo, enriquecer el trabajo en el aula.

Resultados

El uso de los software Tracker y GeoGebra en esta experimentación, auxiliaron a los alumnos a visualizar, relacionar y dar respuesta a las preguntas ya trilladas sobre para qué sirve el uso del teorema fundamental del cálculo en sus vidas. El uso de estos Software agiliza y facilita los procesos de interiorización en las definiciones básicas del cálculo. El software Tracker apoyó a los alumnos en los registros visuales que se hacen presentes en los reportes que, Duval (2004) menciona que si los alumnos logran pasar de un registro visual (en este caso la fotografía o video de la copa) al registro gráfico que se logró con la obtención de las coordenadas del contorno de la copa en el software Tracker, se promueve un aprendizaje en el alumno ya que alcanza a visualizar parcialmente el modelo matemático del contorno de la copa.

Tracker necesita para realizar sus rutinas internas, que el usuario utilice una medida de referencia para enlazar el interfaz humano-maquina. Se utiliza este programa por que la medida que se usa es más acertada y menos complicada de trabajar que con el software GeoGebra, el cual se utilizan sus poderosas rutinas para aproximar el polinomio que mejor se acerque al contorno de la copa, que por otro lado, en Tracker son pobres y poco precisas. En Tracker se deja al alumno en libertad de ubicar los ejes coordenados (no como en el aula), que lleva implícito la representación gráfica de una función, pues depende de la ubicación de la ubicación de los ejes coordenados sobre la copa complicar o simplificar la determinación del polinomio ajustado, así como su grado (en el aula se le proporciona siempre), en función de la tabla de coordenadas y gráfica proporcionada por Tracker.

La tabla de datos o coordenadas (x,y) se exportan a GeoGebra, cuya rutina, como ya se mencionó, para el ajuste de funciones es más completa que la de Tracker, con la finalidad de que el alumno visualice el polinomio conveniente para realizar el ajuste, que en este caso puede ser de grado dos, tres, cuatro o lo que ellos consideren conveniente.

Un aspecto importante en la que tuvieron problema los alumnos fue la identificación de los límites de integración, porque no logran relacionar el acercamiento numérico, es decir, no visualizan que los límites de integración se encuentran implícitos en las tablas de datos. Se intuye que no están acostumbrados a relacionar la representación numérica y la analítica, ya que en el aula se le acostumbra a solucionar las ecuaciones o se les proporcionan los límites de integración, a partir de las funciones incluidas en el ejercicio. Por último, en la hoja de trabajo se les indica el proceso para reproducir el objeto en 3D, que les costó una inversión cognitiva considerable, pero en un alto porcentaje lo lograron después de varios intentos.

Por otro lado se observó que las conclusiones de los equipos de trabajo fueron variadas, ya que la mayoría presentaron evidencias de haber entendido y comprendido la función de la integral para encontrar el volumen de un objeto por el método de sólidos de revolución y el uso adecuado del software como complemento del trabajo en el aula. Pero también nos encontramos con diversos cuestionamientos que manifestaron los alumnos después de realizar la actividad. Hubo estudiantes que no les agrado en lo absoluto romper con el formato de lápiz y papel para realizar sus actividades, otros prefirieron trabajar en soledad, y no siguieron instrucciones establecidas (ver tabla 1).

***Tabla 1.** Conclusiones varias de los alumnos (Transcripción fiel con errores de sintaxis)*

Como conclusión puede obtener que es impresionante como la tecnología cada vez se adapta mas a las necesidades, como con estos programas realizamos algo de la vida cotidiana al transportarlos ahí y de una manera sencilla. Aparte me gusta mucho el tema, el aprender cosas nuevas, me interese mucho por dicha actividad y me dejó un gran aprendizaje, creo que es muy dinámica y aporta mucho para los conocimientos.
(a) Conclusión alumno 1.
Al principio me exaspere porque no tenía mucho conocimiento de la plataforma y me sentía más segura realizando los cálculos a mano, pero una vez que los entendimos, si puedo admitir que estos programas te ahorran mucho tiempo de cálculos y es mejor verlo de esa forma visual. El pensar que íbamos a obtener el volumen de una copa con un método complejo, suena un poco sin sentido, porque hay métodos mas sencillos, pero si este ejemplo que nos permitio conocer cómo se

realiza, lo vemos enfocado a estructuras grandes. En ese caso si suena interesante pensar que podrían calcular el volumen de un barco.
(b) Conclusión alumno 2.
Que podemos concluir con esto, que esperaban mucho de nosotros dándonos recursos bastante limitados, resolver problemas de cálculo para mi no es difícil siempre y cuando tenga tiempo y la práctica suficiente, pero resolver esos mismos problemas usando un software que mas que ayudar ralentizaba los procedimientos, estoy de acuerdo que hubiéramos tomado mas tiempo de práctica no sería problema, pero no sólo tuvimos una clase sino que además no fue explicada de la manera adecuada, el documento que se nos dio le hacía falta bastante información, en conclusión, prefiero volver a el lápiz y papel.
(c) Conclusión alumno 3.
Esta unidad me pareció muy interesante, no tenía idea que se podía sacar el volumen o peso de un objeto mediante el cálculo integral, por el cual rompe todas mis creencias que solamente era teoría y nunca se le podría dar un uso en nuestro día.
(d) Conclusión alumno 4.
En este examen, puedo decir que fue un poco más rápido nuestro procedimiento, creo que memorizamos bien los pasos, y no sé si estemos bien, pero fue una actividad muy dinámica, no me gusta escribir mucho en cuaderno, aprendí algunas funciones de los software que utilizamos, creo que aunque no seamos arquitectos, necesitaremos en alguna ocasión programar algo como esto, no lo sé igual y a lo mejor hasta nos toca hacer programas para arquitectos, nunca está de más aprender algo nuevo.
(e) Conclusión alumno 5.
Creo que el uso de las tecnologías para el aprendizaje resulta verdaderamente eficiente, ya que a los alumnos nos resulta mas atractivo y menos aburrido aprender de esta forma que de la forma convencional y si más maestros utilizan estas técnicas algunas materias nos resultan un poco tediosas y complicadas, se nos harían más dinámicas.
(f) Conclusión alumno 6.

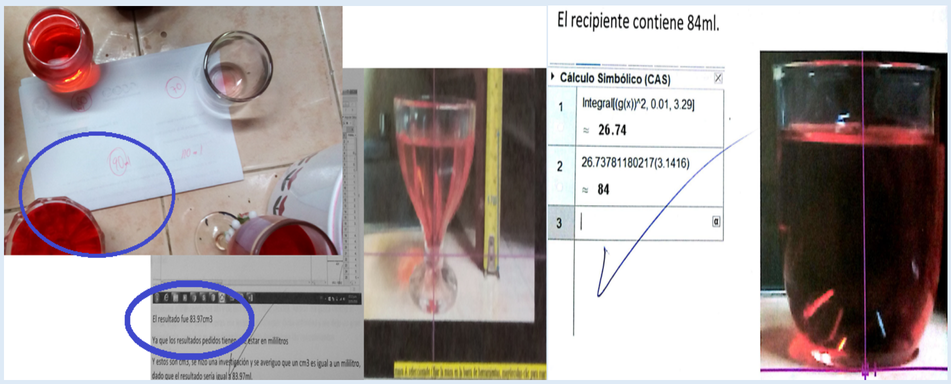
Conclusiones

La investigación y propuesta generó interés y motivación en el estudiante por aprender una forma alternativa de aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo al acercamiento del volumen de objetos por el método de sólidos de revolución, a partir de fotografía, con la finalidad de relacionar la matemática escolar con situaciones problema de la vida cotidiana.
Se observó que la propuesta generó interés y motivación en los alumnos por aprender solidos de revolución en el curso de cálculo integral. Les motivó la idea de obtener información a partir de la fotografía o video digital de objetos de la vida cotidiana, pues en los ejercicios desarrollados en el aula siempre se les proporciona la función y en este caso ellos las obtuvieron.

Algunas dificultades que se identificaron al aplicar la propuesta se presentan en la tabla 2:

Tabla 2: tabla de dificultades que se presentaron durante la experimentación con los alumnos.

- La falta de calidad en los videos y fotográficas borrosas.
- El grosor de las copas afecta el volumen calculado con el medido.



- La dificultad que manifestaron algunos alumnos al integrarse al trabajo colaborativo

Que podemos concluir con esto, que esperaban mucho de nosotros dándonos recursos bastante limitados, resolver problemas de cálculo para mí no es difícil siempre y cuando tenga el tiempo y la practica suficiente, pero resolver esos mismos problemas usando un software que más que ayudar ralentizaba los procedimientos, estoy de acuerdo que si hubiéramos tenido más tiempo de practica no sería problema, pero no solo tuvimos una clase sino que además no fue explicada de la manera adecuada, el documento que se nos dio le hacía falta bastante información, en conclusión, prefiero volver a el papel y el lápiz.

- Computadoras lentas.
- Falta de práctica en los programas de cómputo Tracker y GeoGebra.

Al principio me exaspere porque no tenía mucho conocimiento de la plataforma y me sentía más segura realizando los cálculos a mano, pero una vez que lo entendimos, sí puedo admitir que estos programas te ahorran mucho tiempo de cálculos y es mejor verlo de esa forma visual. El pensar que íbamos a obtener el volumen de una copa con un método complejo, suena un poco sin sentido, porque hay métodos más sencillo, pero si este ejemplo que nos permitió conocer cómo se realiza, lo vemos enfocado a estructuras grandes, en ese caso si suena interesante pensar que podrían calcular el volumen de un barco.

- Apatía de algunos estudiantes al aplicar conceptos matemáticos a su vida cotidiana.

Esta unidad me pareció muy interesante, no tenía idea que se podía sacar el volumen o peso de un objeto mediante el cálculo integral, por el cual rompe todas mis creencias que solamente era teoría y nunca se le podría dar un uso en nuestro día a día

- Alumnos acostumbrados a la clase exposición por parte del académico.
- Alumnos no atendieron las directrices para la sistematización del proceso.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., Díaz L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología a modeling perspective from socioepistemology. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8*(1),19-48. doi: 10.12802/relime.13.1811.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.* Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula*.* *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias Universidad de Cádiz*. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X.

Hitt, F., González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics 88,* 201–219.

Jofrey, J. A. (2010). *Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases.Physics Education*. doi: 10.1088/0031-9120/1/005.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development 5(*1), 62-76.

CARACTERIZACIÓN Y ANÁLISIS GRÁFICO DE LAS VARIACIONES DE UNA FUNCIÓN LINEAL AFÍN CON GEOGEBRA MÓVIL

CHARACTERIZATION AND GRAPHICAL ANALYSIS OF THE VARIATIONS OF A LINEAR AFFINE FUNCTION TO MOBILE GEOGEBRA

Horacio Saúl Sostenes González, Daysi García-Cuéllar, Mihály Martínez-Miraval
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). Pontificia Universidad Católica de São Paulo (Brasil). Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (Perú).
hssg_33@hotmail.com, ra00193072@pucsp.edu.br, pcmammar@upc.edu.pe

Resumen
El objetivo del presente artículo es mostrar cómo se puede utilizar el GeoGebra para móviles para construir la relación de dependencia entre las variables de una función lineal afín y caracterizarla a partir de la variación de los parámetros de su regla de correspondencia. El marco teórico para el diseño de las actividades se apoya en ciertos aspectos de la teoría de registros de representación semiótica y del pensamiento variacional. Los resultados de la experiencia manifiestan que es factible utilizar las herramientas del GeoGebra para móviles al trabajar con la función lineal afín, dado que los docentes de educación secundaria que participaron de la experiencia realizaron coordinaciones entre los registros de lenguaje natural, gráfico y algébrico de dichas funciones; asimismo, emplearon el GeoGebra para resolver problemas en situaciones de contexto real.

Palabras clave: función lineal afín, geogebra, pensamiento variacional, educación secundaria

Abstract
The objective of this article is to show how mobile GeoGebra can be used to construct the dependency relationship between linear affine function variables and characterize it based on the parameter's variation of its correspondence rule. The theoretical framework for the activities design is supported in certain aspects of the theory of registers of semiotic representation and variational thinking. The experience results show it is feasible to use the mobile GeoGebra tools when people working with linear affine function, since the secondary education teachers who participated in the experience, made coordination between the natural, graphic and algebraic language registers of said functions; also, they used GeoGebra to resolve problems in real context situations.

Key words: linear affine function, GeoGebra, variational thinking, secondary education

Introducción

Diversas investigaciones en el campo de la Matemática Educativa muestran la necesidad de realizar estudios sobre funciones, en particular sobre la función lineal afín, pues se evidencian dificultades en el aprendizaje de este objeto matemático (Trujillo, Guerrero y Castro, 2007; Tabach y NachielI, 2015; Viirman, 2014; García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2018). En estos estudios, se han identificado dificultades de los estudiantes en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función, así como al realizar conversiones de la representación del registro gráfico al algebraico y viceversa; por lo cual, es necesario reconsiderar los procesos de enseñanza y aprendizaje para dicha noción.

El estudio de la función lineal afín forma parte de la malla curricular en los diferentes países latinoamericanos. Para el diseño de las actividades y la puesta en práctica de la experiencia, partimos de la revisión de los currículos de Perú y México en el nivel de secundaria, dado que en México se da énfasis al desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de la función lineal afín, y en Perú, se da énfasis en la representación de dicha función en los diferentes registros como gráfico, tabular y algebraico, esto se puede observar en la tabla 1. Asimismo, identificamos procedimientos, estrategias, y/o elementos comunes en la enseñanza de dicha función, así como su aplicación en situaciones de diversos contextos. Cabe mencionar que la función lineal afín es introducida en primero y segundo grado de secundaria en Perú, sin embargo, en México se trata en segundo y tercer grado de secundaria.

Tabla 1. Función lineal afín en los currículos de Educación Secundaria

México	Perú
En segundo grado se tiene: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal entre dos conjuntos de cantidades. Representación de la variación mediante una tabla o una expresión algebraica de la forma: $y = ax + b$. En tercer grado se analizan situaciones de funciones lineales y cuadráticas: Análisis de situaciones problemáticas asociadas a fenómenos de la física, la biología, la economía y otras disciplinas, en las que existe variación lineal o cuadrática entre dos conjuntos de cantidades.	Desempeños para el primer grado: Interrelaciona representaciones gráficas, tabulares y algebraicas para expresar el comportamiento de la función lineal y sus elementos: intercepto con los ejes, pendiente, dominio y rango, para interpretar y resolver un problema según su contexto. Desempeños para el segundo grado: Expresa, usando lenguaje matemático y representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, su comprensión de la relación de correspondencia entre la constante de cambio de una función lineal y función lineal afín, para interpretarlas y explicarlas en el contexto de la situación. Establece conexiones entre representaciones y pasa de una a otra representación cuando la situación requiere. Plantea afirmaciones sobre las diferencias entre la función lineal y una función lineal afín. Justifica la validez de sus afirmaciones usando ejemplos y sus conocimientos matemáticos.

Fuente: Adaptado de México (2011) y Perú (2016).

Al tener características variacionales, es pertinente introducir la noción de función lineal afín con el apoyo de *softwares* matemáticos que permitan observar y analizar cómo varía una función a partir de cambios en su variable y sus parámetros (Montiel y Buendía, 2013); lo cual debe ser complementado con situaciones de contexto extramatemáticas (Evitts, 2004), en donde prime el análisis y la justificación de resultados, a partir de la interpretación gráfica de las variaciones realizadas.

El uso del GeoGebra móvil permite construir la relación de dependencia lineal entre las variables y caracterizar a la función lineal afín a partir de la variación de sus parámetros, lo que posibilita la búsqueda de generalidades, ya que como vemos en PosgradoMatEdu (2016), el pensamiento matemático debe desarrollarse a través de generalidades. Por ello, nos centramos en abordar este tipo de funciones con docentes de secundaria, pero de manera dinámica a través del uso de GeoGebra móvil, de modo que les brindemos una alternativa de uso de sus teléfonos móviles, liberándolos de la necesidad de utilizar laboratorios computarizados.

Fundamento teórico y metodológico

Para realizar la secuencia de actividades tomamos como fundamento teórico aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y del Pensamiento Variacional desde la perspectiva de Vasco (2002).

En relación con la Teoría de Registros de Representación Semiótica, Duval (1995) afirma que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de las matemáticas como la conceptualización, razonamiento y resolución de problema, requieren del uso de sistemas de expresión y representación. Duval, aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

> Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje formal, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…), no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. (Duval, 1995, p. 14)

El autor manifiesta que las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la Semiosis (actividad ligada a la producción de representaciones semióticas, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas) son: la *formación*, que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; *el tratamiento*, que es la transformación de una representación a otra al interior del mismo registro; y *la conversión*, que es una transformación que produce una representación en un registro distinto al inicial. De acuerdo con Duval, para que se logre el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes.

En cuanto al Pensamiento Variacional, usamos la definición de Vasco (2002):

> El pensamiento variacional tiene que ver con el tratamiento matemático de la variación y el cambio. En este sentido, "el pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2002, p. 63)

De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012), para el desarrollo del pensamiento variacional, además de la modelación, se puede (y debe) integrar las tecnologías digitales, pues estas juegan un papel fundamental para visualizar el dinamismo que caracteriza a algunos conceptos del análisis matemático (el concepto de función, derivadas, integrales, etc.). Asimismo, estos autores indican que, con el uso de un software dinámico como el GeoGebra, se puede producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos.

Metodología y procedimientos metodológicos

Nuestra metodología es de corte cualitativo, Denzin y Lincoln (1994) sostienen que la metodología cualitativa es multimetódica, naturalista e interpretativa. Es decir, que las investigadoras e investigadores cualitativos indagan en situaciones naturales, intentado dar sentido o interpretar los fenómenos en los términos del significado que las personas les otorgan. Asimismo, los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que por los resultados o productos. Es por ello, que en la siguiente sección hacemos énfasis en los procesos seguidos por los docentes participantes.

En cuanto a los procedimientos metodológicos, el taller se realizó en dos sesiones con diez docentes e investigadores de México, Perú y Colombia, que se enfocan en la enseñanza de la matemática en Educación Secundaria. En la primera sesión, se atendió la incorporación del recurso tecnológico GeoGebra para móviles, con el cual, en primer lugar, se construyó la relación lineal de dependencia de la variable y respecto de la variable x, y en segundo lugar, se caracterizó a la función lineal afín a partir de sus variaciones gráficas al movilizar los parámetros a y b que componen su regla de correspondencia, esto permitió transitar entre sus representaciones en los registros lenguaje natural, gráfico y algebraico. En la segunda sesión, se dio la puesta en práctica de dichas características de la función lineal afín, enfocadas en el planteamiento, resolución y análisis de situaciones problemáticas de contexto apoyados en el GeoGebra para móviles.

Para realizar la implementación de la secuencia didáctica diseñada para el análisis de la función lineal afín, se consideró necesario que se tuviera además del GeoGebra móvil, un recurso que permitiera visualizar el trabajo que realizaban los docentes participantes desde sus teléfonos móviles, a fin de detectar errores comunes que se cometen o de verificar que se están siguiendo correctamente los pasos del proceso de construcción; para esta finalidad se uso el *Teamviewer,* que es una aplicación que permite vincular de forma gratuita, a través del wifi, el teléfono móvil con la computadora, es decir, la pantalla del teléfono móvil se visualiza en tiempo real en la pantalla de la computadora.

Actividades y análisis didáctico

A continuación, presentamos la descripción y el análisis de dos actividades (una de cada sesión) que se propusieron en el taller.

Actividad 1: análisis de la función afín $f(x) = ax + b$

1. En el archivo GeoGebra traza dos deslizadores. Observa que en automático aparecen con el nombre a y b.
2. Coloca un punto B sobre el eje X. Luego, digita en la barra de entrada el punto de coordenadas $(0; a \cdot x(B) + b)$ que será denominado como C.
3. Traza una perpendicular al eje X que pase por B; luego, traza una perpendicular al eje Y que pase por C. La intersección de ambas rectas genera el punto A.
4. Oculta las rectas perpendiculares.
5. Traza segmentos que vayan de A a B, y de A a C. Selecciona propiedades y elige un estilo de línea punteada.
6. Active el rastro del punto A. ¿Qué características presenta el rastro del punto A al mover el punto B sobre el eje X?
7. En la barra de entrada coloca la expresión $f(x) = ax + b$. Esta expresión generará la gráfica de una función lineal que toma los valores de a y b como referencia.
8. Desplaza los deslizadores. Observa lo que ocurre y responde a las siguientes preguntas:
   a) ¿Qué sucede con la posición de la recta si movemos el valor del deslizador b en $b = -2$, $b = 0$ y $b = 3$? ¿Qué papel cumple el coeficiente b?

b) ¿Qué sucede con la posición de la recta si movemos el valor del deslizador a en $a = -1$, $a = 0$ y $a = 2$?

c) Para los valores del coeficiente a de la pregunta anterior y fijando $b = 0$, ¿en cuánto varía la variable y si x aumenta en 1 unidad? ¿Qué papel cumple el coeficiente a?

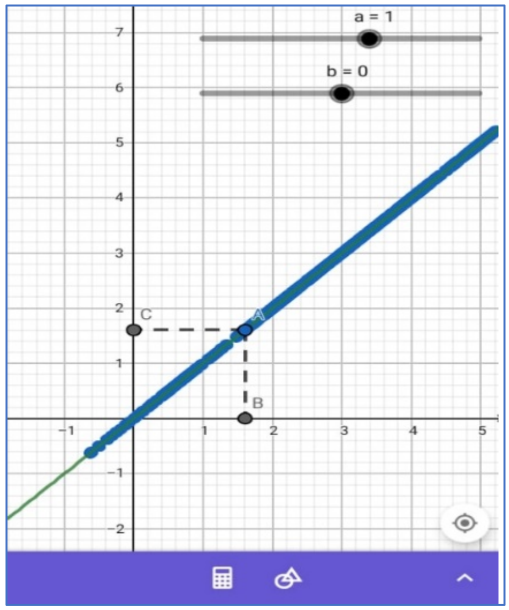


Figura 1. Representación en el registro gráfico de la función lineal afín en el GeoGebra para móviles.

La figura 1 muestra la imagen de un celular en el que se utilizó el GeoGebra para móviles en la construcción de la función $f(x) = ax + b$. A partir de los deslizadores *a* y *b*, y del punto B colocado en el eje X, se construyó un punto C en el eje Y, de coordenadas $(0; a \cdot x(B) + b)$. Luego de encontrar el punto A, que resulta de la intersección de las rectas perpendiculares a los ejes coordenados por los puntos B y C, activar la opción de rastro para dicho punto, este describe una recta cuando desplazamos el punto B sobre el eje X, lo cual generó la noción de dependencia lineal entre las variables. A continuación, se desactivó la opción de arrastre, se digitó en la barra de entrada la instrucción $f(x) = ax + b$ y se procedió a manipular los deslizadores *a* y *b*, esto permitió observar qué efecto tienen estos parámetros en la representación gráfica de la función.

Con esta actividad se realizó el análisis de la función lineal afín, utilizando rectas, puntos y deslizadores, entre otras herramientas del GeoGebra móvil para construir un modelo dinámico de esta función. A partir del arrastre se establecieron las relaciones variacionales entre las variables x y y, así como el papel que cumplen los parámetros a y b de la representación algebraica de la función lineal afín $f(x)$; asimismo, se identificaron propiedades de este tipo de función y se representó la función en el registro gráfico.

En la figura 2, se observa el uso del GeoGebra para móviles en dos docentes participantes del taller, que realizaron la construcción del modelo dinámico de la función lineal afín. Luego de construir la relación de dependencia lineal entre las variables y reconocer el comportamiento de la representación gráfica de la función a partir de la variación de sus parámetros *a* y *b*, se formalizó la noción de función lineal afín, esto se hizo con el objetivo de darles estrategias didácticas a los docentes participantes, para introducir este tema con sus estudiantes.

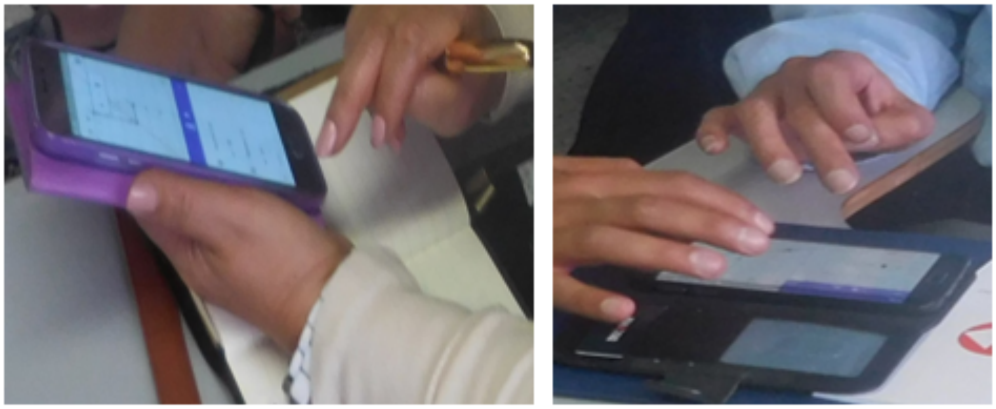


Figura 2. Construcción de un modelo dinámico de la función lineal afín en el GeoGebra móvil.

A continuación, se hizo una reflexión sobre la importancia de reconocer el aspecto variacional en el estudio de funciones y cómo el GeoGebra móvil se convierte en una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, al hacer visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos, en nuestro caso de la función lineal afín. Según Leung (2008, citado en Tavera y Villa-Ochoa, 2012) se entiende por *dinamismo implícito* a aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de "animación mental", de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación o las propiedades invariantes de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Actividad 2: Tarifas de un taxi

En 2018 las tarifas actuales de los taxis, son las siguientes:

Taxi libre	Banderazo \$8,74 y \$1,07 por cada 250 m o 45 seg.
Taxi de sitio	\$13,10 de inicio y \$1,30 por cada 250 m o 45 seg.
Radio taxi	\$27,30 de inicio y \$1,84 por cada 250 m o 45 seg.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que relaciona la duración (tiempo en segundos) del viaje con el costo, en cada tipo de taxi? Escríbela.
b) Anticipa: ¿Crees que habrá un punto en que pudieras pagar lo mismo por haber viajado la misma distancia en un taxi u otro?
Grafica las expresiones mediante GeoGebra y responde:
c) Después de observar la gráfica ¿Tu anticipación fue acertada?
d) ¿Cuál es el costo que tendría que pagarse por tomar un taxi para los primeros 90 segundos? Taxi libre _______ Taxi de sitio _______ Radio taxis __________

En esta segunda actividad, se presentó la situación de tarifas de taxis en donde en la *pregunta a*, se enfatiza la conversión de la representación de las funciones lineales afines en el registro de lenguaje natural a sus representaciones en el registro algebraico como se muestra en la figura 3.

Taxi libre	Banderazo \$8,74 y \$1,07 por cada 250 m o 45 seg.	$f(x) = 8.74 + \frac{1.07}{45}x$
Taxi de sitio	\$13,10 de inicio y \$1,30 por cada 250 m o 45 seg.	$g(x) = 13.10 + \frac{1.3}{45}x$
Radio taxi	\$27,30 de inicio y \$1,84 por cada 250 m o 45 seg.	$h(x) = 27.30 + \frac{1.84}{45}x$

Figura 3. Conversión de las representaciones de funciones lineales afín del registro de lenguaje natural al registro algebraico

Luego, los docentes reconocieron que las funciones se definen para $x \geq 0$, y con ayuda del GeoGebra móvil respondieron a las *pregunta b y c*, representando las tres funciones en el registro gráfico.

Taxi libre	$f(x) = 8.74 + \frac{1.07}{45}x$ $x \geq 0$
Taxi de sitio	$g(x) = 13.10 + \frac{1.3}{45}x$ $x \geq 0$
Radio taxi	$h(x) = 27.30 + \frac{1.84}{45}x$ $x \geq 0$

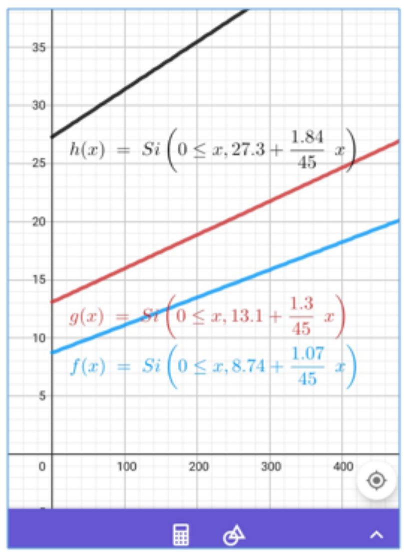


Figura 4. Conversión de las representaciones de funciones lineales afín del registro del registro algebraico al gráfico.

Para responder a la *pregunta d*, algunos docentes llegaron a la respuesta a partir de las representaciones algebraicas de las funciones que modelan las tarifas de taxi, y otros docentes determinaron la respuesta con ayuda del GeoGebra móvil al ubicar el punto con abscisa igual a 90 como se muestra en la Figura 5.

Cabe destacar que, en su mayoría, los docentes participantes del taller utilizaron la primera estrategia de solución (en el registro algebraico). Fueron solo 3 docentes, los que utilizaron la segunda estrategia (en el registro gráfico).

Taxi libre	$f(90) = 8.74 + \frac{1.07}{45}(90) = 30.98$
Taxi de sitio	$g(x) = 13.10 + \frac{1.3}{45}(90) = 15.7$
Radio taxi	$h(x) = 27.30 + \frac{1.84}{45}(90) = 10.88$

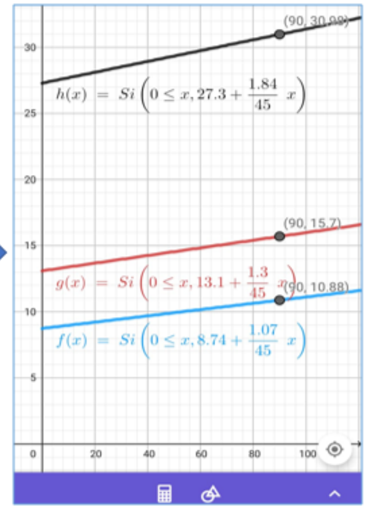


Figura 5. Estrategias usadas por los docentes al momento de responder la pregunta d

Consideraciones finales

Al trabajar el concepto de función lineal afín de manera dinámica, se pueden estudiar generalidades a partir de un análisis de la variación en aspectos cualitativos, para los que las nociones de dependencia, razón de cambio y la ordenada al origen resultan centrales y que pueden visualizarse en la representación en los registros gráficos y algebraicos de la función lineal afín. Esta visualización otorga un análisis que permite, a través de interrogantes, llevar a los participantes a una comprensión del objeto de estudio.

Los participantes reflexionaron sobre la importancia de reconocer lo variacional en el estudio de función lineal afín. Del mismo modo, reconocieron al GeoGebra móvil como una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, porque hace visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos.

A partir de la resolución de las actividades presentadas en este escrito, se puede afirmar que los docentes participantes desarrollaron su pensamiento variacional, dado que observaron dinámicamente la relación de dependencia entre las variables x y y, y cómo afecta a la gráfica la variación de los parámetros a y b; del mismo modo, realizaron conversiones de las representaciones de la función lineal afín en los registros de lengua natural, gráfico y algebraico, mediante situaciones en contexto. Lo cual es importante porque según por Duval (1995), para conseguir el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes.

Cuando los docentes dieron respuesta a la pregunta d de la actividad 2, se evidenció lo dicho por López y Sosa (2008), acerca de que la enseñanza del concepto de función actualmente gira alrededor del registro algebraico, y la interacción de este registro con otros, como el gráfico, suele ser limitado. Es por ello que afirmamos que el hecho de presentar objetos matemáticos por medio de sus diferentes representaciones y coordinarlas entre sí, permite atender diversos estilos de aprendizaje.

La secuencia didáctica permitió que los participantes actúen sobre los comandos y herramientas del GeoGebra para móviles, que comparen sus estrategias y nociones nuevas adquiridas relacionadas a los parámetros de la función lineal afín, mediados por el GeoGebra, y cómo estos afectan a la gráfica de dicha función, y que confirmen el uso del *software* como instrumento que les permite manipular la función y representarla en diferentes registros.

Se pudo evidenciar que el GeoGebra móvil es un recurso que permite movilizar conocimientos mediante la transición de las representaciones en diferentes registros de representación semiótica de la función lineal afín, ya que permitió la coordinación de las representaciones en diferentes registros.

Referencias bibliográficas

Denzin, N. y Lincoln, Y. (1994). Introduction entering the field of qualitative research, en Denzin, N. y Lincoln, Y (eds). *Handbook of qualitative research*. Thousand Oaks, California.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Evitts, T. (2004). *Investigating the Mathematical Connections that Preservice Teachers Use and Develop While Solving Problems from Reform Curricula*. Thesis (Doctor of Philosophy) - Pennsylvania State University College of Education, Pennsylvania.

García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval, M. (2018). Estudio del proceso de Génesis *Instrumental* del artefacto simbólico función exponencial. *Revista Transformación*, 14(2), 252-261. Recuperado de http://scielo.sld.cu/scielo.php? script=sci_arttext&pid=S2077-29552018000200010&lng=es&tlng=es.

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *XVIII Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México, p.308 - 318.

México, Secretaria de Educación Pública. (2011). *Plan de Estudios 2011.Educación Básica*. Recuperado de https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/20177/Plan_de_Estudios_2011_f.pdf

Montiel, G. y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En G. Buendía, M. Ferrari, y G. Martínez, *Resignificación de funciones para profesores de matemáticas*. México D. F.: Díaz de Santos.

Perú, Ministerio de educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-2017.pdf

PosgradoMatEdu. (2016). *Soportes tecnológicos para el pensamiento y el aprendizaje matemático. Ponente: Dr. Luis Moreno*. Recuperado de http://youtu.be/fLH6DkeDfN0

Santos-Trigo, M. y Moreno-Armella, L. (2016). The use of digital technology to frame and foster *learners'* problem-solving experiences. En Felmer, P.; Pehkonen, E. y Kilpatrick, J. (eds), *Posing and Solving Mahtematical Problems*. Switzerland: Springer

Tabach, M. y Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics* (90), 163-187. Recuperado de https://doi.org/10.1007/s10649-015-9624-0

Tavera, F. y Villa-Ochoa, J. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Códoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín: ITM.

Trujillo, M.; Guerrero, J. y Castro, M. (2007). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje del concepto de función con la mediación de la calculadora graficadora. *Revista de investigación*,7(2), pp. 223 – 233. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/ 952/95270209.pdf

Vasco, C. (2002). *El pensamiento Variacional, la Modelación y las Nuevas Tecnologías*. Memorias del Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Santafé de Bogotá.

Viirman, O. (2014). *The function concept and university mathematics teaching*. Dissertation. Karlstad, Suecia: Karlstad University, Faculty of Health, Science and Technology. Department of Mathematics and Computer Science. Recuperado de dehttp://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:693890/fulltext01.pdf

ABORDAGEM INSTRUMENTAL: UMA REVISÃO DA LITERATURA NO PERU E NO BRASIL DOS ANOS 2013 A 2017

INSTRUMENTAL APPROACH: A REVIEW OF LITERATURE IN PERU AND BRAZIL IN THE YEARS 2013 TO 2017

Daysi Julissa García-Cuéllar, Saddo Ag Almouloud, Jesús Victoria Flores Salazar
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brasil). Pontificia Universidad Católica del Perú (Peru).
ra00193072@pucsp.edu.br, saddoag@pucsp.br, jvflores@pucp.pe

Resumo
Este estudo é um levantamento de dissertações e teses produzidas no Peru e no Brasil de 2013 a 2017. Tem como objetivo apresentar um panorama das pesquisas que usam a Abordagem Instrumental como quadro teórico, tendo como critérios: as instituições das pesquisas, o objeto matemático, o tipo de artefato usado, os sujeitos envolvidos, e as fases da Gênese Instrumental usadas. A metodologia foi uma pesquisa bibliográfica do tipo estado da arte. Concluímos que as pesquisas no Brasil usam diversos artefatos, em diferentes níveis de ensino e utilizam as duas fases das Gênese Instrumental. Enquanto no Peru, usam artefatos simbólicos, são do nível médio e superior e maioritariamente usam uma das fases.

Palavras-chave: gênese instrumental, pesquisa bibliográfica, artefato físico, artefato simbólico

Abstract
This study is a survey of dissertations and theses written in Peru and Brazil in 2013 to 2017. Its objective is to provide a current overview of research using the Instrumental Approach as the theoretical framework, having as criteria: the research institutions, the mathematical object, the type of artifact used, the subjects involved, and the phases of Instrumental Genesis that were used. The methodology was a theoretical view-bibliographic research. We conclude that research in Brazil uses several tools at different educational levels and they use the two phases of Instrumental Genesis. With respect to Peru, they use symbolic artifacts, which are of middle and higher level and they mainly use one of the phases.

Key words: instrumental genesis, bibliographical research, physical artifact, symbolic artifact

Introdução

Existem muitas pesquisas sobre o uso da tecnologia na área da Educação Matemática, assim como vários referenciais teóricos sobre a integração das tecnologias na sala de aula de Matemática como são a Abordagem Instrumental, a Transposição Informática, a Orquestração Instrumental, a Mediação semiótica e os Seres humanos com mídias, entre outras. (García-Cuéllar, 2018 e Pérez, 2014). Centramo-nos no estudo da Abordagem Instrumental. Este artigo apresenta uma pesquisa inicial que faz parte da tese doutoral da primeira autora que usa a Abordagem Instrumental como parte de seu referencial teórico. A razão da escolha dos países é porque a primeira autora faz seus estudos de pós-graduação no Brasil, mas a pesquisa será aplicada no Peru.

Mostra-se uma revisão da literatura de teses e dissertações no Peru e no Brasil de 2013 a 2017. A pesquisa tem como objetivo apresentar um panorama das investigações que usam a Abordagem Instrumental como quadro teórico, tendo como critérios: as instituições das pesquisas, o objeto matemático, o tipo de artefato usado, os sujeitos envolvidos, e as fases da Gênese Instrumental. Consideramos que este estudo pode contribuir aos pesquisadores interessados na temática para saber sobre o que já foi feito em ambos os países e fornecer informações para futuros estudos na área.

Abordagem instrumental

A Abordagem Instrumental é proposta por Rabardel (1995) e estuda a diferença que existe entre o artefato e o instrumento, assim como os processos que desenvolvem a transformação progressiva do artefato em um instrumento, uma transformação que ele chamou de processo da Gênese Instrumental. O autor considera três importantes polos na Gênese Instrumental, estes são: *o sujeito,* que pode ser um usuário, operador, trabalhador ou agente; *o instrumento*, que se refere a ferramentas, máquinas, sistemas, utensílios, etc.; e *o objeto*, para o qual a ação é dirigida com a ajuda do instrumento, objeto da atividade ou obra.

Para o pesquisador, os conceitos de artefato e instrumento são fundamentais na Gênese Instrumental.

> O artefato está ligado ao uso que o sujeito faz como um meio de ação e que pode ser considerado como uma máquina, um objeto técnico, objetos e sistemas simbólicos, isto é, que podem ser definidos como materiais ou simbólicos. (Rabardel, 1995, p. 52).

Para Rabardel (1995), o instrumento não existe em si mesmo, mas é o resultado da associação do artefato com a ação do sujeito, como um meio para isso.

> Um instrumento consiste de uma entidade mista formada por um artefato e um esquema, e também é uma construção produzida pelo sujeito. (Rabardel, 1995, p. 85).

O processo da Gênese Instrumental (figura 1) é desenvolvido, por sua vez, a partir de duas fases chamadas *Instrumentalização* e *Instrumentação*. No primeiro caso, o sujeito familiariza-se com as propriedades e características do artefato que será usado na atividade, sendo esta fase entendida basicamente como um período de adaptação do sujeito ao uso do artefato em questão. No caso da Instrumentação, o sujeito é dedicado a construir esquemas para o uso do artefato, dependendo de suas necessidades e o que é requerido na atividade.

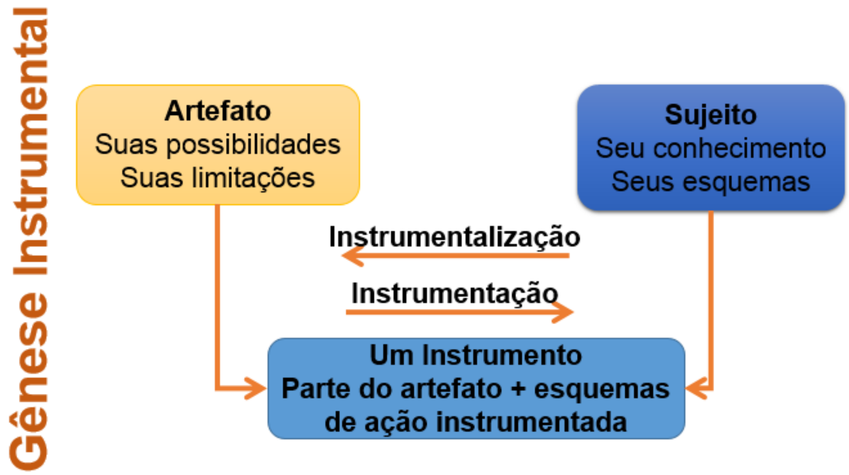


Figura 1. Processo da Gênese Instrumental. Adaptado de Trouche (2004)

Nesse sentido, Bellemain e Trouche (2016) argumentam que essas duas fases (dimensões) da Gênese Instrumental não são independentes uma da outra, estão interligadas. Mas, para distingui-las na análise, pode-se focar no lado do aluno (em que medida a integração de um novo artefato modifica a forma de sua atividade?), e por outro lado, no artefato (em que medida ele porta o vestígio da atividade do aluno, do seu poder criativo?).

A Abordagem Instrumental baseia-se na noção de esquema de Vergnaud (1996). A partir dessa noção, Rabardel (1995) define os esquemas de utilização como o conjunto estruturado das características generalizáveis da ação que permite repetir a mesma ação ou aplicá-las em novos contextos. Esses esquemas podem ser classificados em *esquemas de uso* (direcionados para tarefas secundárias), *esquemas de ação instrumentados* (direcionados para a tarefa principal ou primária) e *esquemas de ação coletiva instrumentados* (quando o coletivo compartilha o mesmo instrumento ou trabalha com a mesma classe de instrumento, buscando atingir um objetivo comum).

Metodologia

Realizou-se uma pesquisa bibliográfica do tipo Estado da Arte de teses e dissertações produzidas no período de 2013 a 2017 no Peru e no Brasil, tendo como ênfase a Abordagem Instrumental. Baseamo-nos em Messina (1999), Ferreira (2002) e Romanowski e Ens (2006) visto que a pesquisa que apresentamos visa apresentar um panorama das pesquisas que usam a Abordagem Instrumental como quadro teórico.

Nesse sentido, Messina (1999), afirma que "um estado da arte é um mapa que nos permite continuar caminhando; um estado da arte é também uma possibilidade de perceber discursos que em um primeiro exame se apresentam como descontínuos ou contraditórios. Em um estado da arte está presente a possibilidade de contribuir com a teoria e prática" (p.1) de uma determinada área de conhecimento. Na mesma linha de pensamento, Ferreira (2002) aponta que pesquisa realizada com base em uma sistematização de dados é chamada de "estado da arte", porque compreendem toda uma área de conhecimento, em distintas perspectivas que geraram produção de conhecimento.

Além disso, Romanowski e Ens afirmam que,

> pode constituir-se em levantamentos do que se conhece sobre determinada área, desenvolvimento de protótipos de análises de pesquisas, avaliação da situação da produção do conhecimento da área

> focalizada. Pode, também, estabelecer relação com produções anteriores, identificando temáticas recorrentes e apontando novas perspectivas, consolidando uma área de conhecimento e constituindo-se orientações de práticas pedagógicas para a definição dos parâmetros de formação de profissionais para atuarem na área (Romanowski e Ens, 2006, p. 39).

A escolha dos anos foi porque, no caso do Peru, a primeira dissertação que usou a Abordagem Instrumental como quadro teórico foi defendida no ano de 2013 e no caso do Brasil, nossa pesquisa acrescenta o estudo feito por Neto e Da Silva (2015), que apresentam um levantamento de pesquisa sobre a Gêneses Instrumental no Brasil nos anos 2005 até o início de 2013.

Sobre o procedimento metodológico, a coleta das informações sobre o tema em estudo foi realizada, no caso do Brasil, no portal eletrônico da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e, no caso do Peru, no portal do Registro Nacional de Trabalhos de Investigação da SUNEDU (Superintendência Nacional de Ensino Superior Universitário).

Critérios para a análise

Com o objetivo de organizar as análises das teses e dissertações produzidas no Peru e no Brasil no período de 2013 a 2017, e poder compreender melhor a utilização da Abordagem Instrumental, estabelecemos alguns critérios para analisá-las.

O primeiro critério escolhido é *a instituição* em que a pesquisa foi realizada, com o interesse de identificar quais instituições e programas de pós-graduação de ambos os países realizam pesquisas usando como fundamento teórico a Abordagem Instrumental. O segundo critério é o *objeto matemático estudado*, a fim de identificar aqueles objetos matemáticos já estudados e ter informação daqueles que não foram estudados, para propô-los em novas pesquisas. O terceiro critério é o *tipo de artefato* utilizado, a escolha deste critério tem por finalidade identificar quais são usados nas pesquisas (artefatos materiais ou simbólicos), e identificar também se existe pesquisas que fazem complementariedade entre vários artefatos. O quarto critério é *os sujeitos* que formam parte do estudo, a razão desta escolha se deve ao fato de sabermos os níveis acadêmicos dos sujeitos envolvidos nas pesquisas e, o último critério é sobre as *fases da Gênese Instrumental*, com o intuito de identificar o que foi argumentado por Bellemain e Trouche (2016) que afirmam que essas duas fases não são independentes uma da outra, mas para distingui-las na análise podemos centrar-nos na instrumentação ou na instrumentalização.

Análise das pesquisas

A seguir apresentamos o levantamento de quinze pesquisas na área de Educação Matemática que foram defendidas nos anos 2013 a 2017 que usam como quadro teórico a Abordagem Instrumental das quais onze são do Brasil e quatro são do Peru.
Para a análise levamos em conta os seguintes critérios:

Primeiro critério: Instituições de pesquisa

No quadro a seguir apresentamos as instituições que desenvolvem pesquisa com a Abordagem Instrumental como quadro teórico.

Quadro 1: Instituições que desenvolvem pesquisas com a Abordagem Instrumental

Autor	Universidade	Nome do Programa	Cidade
Salomão, C. (2013) Vieira, U. (2015) Porto, F (2016)	Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN)	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática	São Paulo Brasil
Neto, A. (2015)	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática	São Paulo Brasil
Da Costa, C. (2013)	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática	Rio de Janeiro Brasil
Krüger, E. (2015)	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática	Porto alegre Brasil
Dos Santos, S. (2016) De Oliveira, P. (2015) Gonçalves, I. 2016	Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática	Ilhéus – Bahia Brasil
Soares, L. (2013) De Moraes, K. (2014)	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)	Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática	Campo Grande-MS Brasil
Chumpitaz, L. (2013) García-Cuéllar, D. (2014) León, J. (2014) Silva, M. (2017)	Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP)	Maestría en Enseñanza de las Matemáticas	Lima Peru

Fonte: Portal eletrônico da CAPES - Brasil e Portal do Registro Nacional de trabalhos de Investigação da SUNEDU - Peru

No quadro 1, no Brasil foram encontradas uma tese (Vieira, 2015) e dez dissertações que pertencem a diferentes universidades (PUC-SP, UESC, UFMS, UFRGS, UNIAN e UFRJ). A cidade que tem universidades com o maior número de pesquisas é São Paulo.
No caso do Peru, encontrou-se quatro dissertações pertencentes todas à Pontifícia Universidade Católica do Peru na cidade de Lima, o que pode dar conta que é a única instituição no Peru que faz pesquisa com a Abordagem Instrumental.

Na análise deste critério observa-se que no Brasil existem seis instituições que realizaram pesquisas com a Abordagem Instrumental em diferentes programas e cidades do país. No entanto, no Peru, somente no programa de *Maestría en Enseñanza de las Matemáticas* da PUCP, realizou-se pesquisas que envolvem a abordagem teórica estudada.

Segundo critério: Objeto matemático

O quadro 2 apresenta os objetos matemáticos estudados nas pesquisas feitas nos anos 2013 a 2017 no Brasil e no Peru.

Quadro 2: Objetos de estudo das pesquisas com a Abordagem Instrumental

Autor	Objeto de estudo
Vieira, U. (2015)	Conceitos básicos de probabilidade
Porto, F. (2016)	Função linear e quadrática
Neto, A. (2015)	Função de uma variável real com várias sentenças
Da Costa, C. (2013)	Conteúdos do primeiro semestre de ensino do 1º ano do Ensino Médio
Salomão, C. (2013)	Expressões aritméticas
Krüger, E. (2015)	Ângulos, Triângulos, quadriláteros,
Gonçalves, I. (2016)	Função Quadrática
De Moraes, K. (2014)	Geometria plana
Dos Santos, S. (2016)	Integrais duplas e triplas
Soares, L. (2013)	Desigualdade, função seno, circunferência
De Oliveira, P. (2015)	Equação quadrática
Chumpitaz, L. (2013)	Função definida por várias sentenças
García-Cuéllar, D. (2014)	Simetria ortogonal
León, J. (2014)	Elipse
Silva, M. (2017)	Circuncentro

Fonte: Portal eletrônico da CAPES - Brasil e Portal do Registro Nacional de trabalhos de Investigação da SUNEDU - Peru

No quadro anterior, pode-se observar que no caso das pesquisas brasileiras os objetos matemáticos são diversos e principalmente em Geometria, Cálculo, Aritmética, Álgebra e Probabilidade. Algumas pesquisas como Soares (2013) e Krüger (2015) usaram três objetos matemáticos e destacou-se a pesquisa de Da Costa (2013) com mais de três objetos de estudos, porque seu foco foi a comunicação matemática em fóruns de discussão no Moodle.
No caso do Peru, as dissertações centraram-se em Cálculo e maioritariamente na Geometria. Destacou-se a pesquisa de Chumpitaz (2013) que foi a única que se centrou no Cálculo.

Também, observamos que as pesquisas de Chumpitaz (2013) da PUC-Peru e Neto (2015) da PUC-São Paulo usaram o mesmo objeto matemático que é a função definida por várias sentenças, só que o primeiro usou só a Abordagem Instrumental como quadro teórico e no segundo usou a Abordagem Instrumental e Teoria de Registros de Representações Semióticas para o analises de seus dados.

Terceiro critério: Tipo de artefato

O quadro 3 apresenta o tipo de artefato usados nas pesquisas no Brasil e no Peru, nos anos de nosso estudo.

Quadro 3: Tipo de artefato das pesquisas com a Abordagem Instrumental

Autor	Artefato
Vieira, U. (2015)	Maquete Tátil
Porto, F. (2016)	Software GeoGebra
Neto, A. (2015)	Função de uma variável real com várias sentenças
Da Costa, C. (2013)	Fórum do Moodle
Salomão, C. (2013)	Calculadora
Krüger, E. (2015)	Software GeoGebra
Gonçalves, I. (2016)	Software GeoGebra
De Moraes, K. (2014)	Superlogo
Dos Santos, S. (2016)	Cubify invent
Soares, L. (2013)	Software GrafEq
De Oliveira, P. (2015)	Laboratórios de Informática
Chumpitaz, L. (2013)	Função definida por várias sentenças
García-Cuéllar, D. (2014)	Simetria axial
León, J. (2014)	Elipse
Silva, M. (2017)	Circuncentro

Fonte: Portal eletrônico da CAPES - Brasil e Portal do Registro Nacional de trabalhos de Investigação da SUNEDU - Peru

Os resultados mostram que no critério de tipo de artefato, as universidades no Brasil usaram artefatos – softwares (Geogebra, Superlogo, Cubify Invent, GrafEq, entre outros), só duas pesquisas usaram artefato material (Calculadora e Maquete Tátil) e só a pesquisa de Neto (2015) da PUC-São Paulo usou como artefato simbólico o mesmo objeto matemático de sua pesquisa que foi a função de uma variável real com várias sentenças.

Nas pesquisas do Peru, se utilizaram artefatos simbólicos objetos matemáticos como: Função com várias sentenças, Simetria ortogonal, Elipse e Circuncentro. Não apresenta pesquisas que usem artefatos materiais.

Quarto critério: Os sujeitos envolvidos

O quadro 4 apresenta os sujeitos envolvidos nas pesquisas com a Abordagem Instrumental e o nível de aplicação de cada uma.

Quadro 4: Os sujeitos envolvidos das pesquisas com a Abordagem Instrumental

Autor	Sujeitos
Vieira, U. (2015)	Estudantes do 4° ano do Ensino Fundamental (11 anos)
Porto, F. (2016)	Professores em formação continuada

Neto, A. (2015)	Professores em formação continuada
Da Costa, C. (2013)	Estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental (15 anos) e Estudantes do 1° ano do Ensino Médio (16 anos)
Salomão, C. (2013)	Professores em formação inicial (graduação)
Krüger, E. (2015)	Professores em formação continuada
Gonçalves, I. (2016)	Estudantes do 1° no do Ensino Médio (16 anos)
De Moraes, K. (2014)	Professores em formação inicial (graduação)
Dos Santos, S. (2016)	Estudantes do Ensino Superior (Engenharia)
Soares, L. (2013)	Professores em formação continuada
De Oliveira, P. (2015)	Professores em formação continuada
Chumpitaz, L. (2013)	Estudantes do Ensino Superior (Engenharia)
García-Cuéllar, D. (2014)	Estudantes do 1° ano do Ensino Médio (11 anos)
León, J. (2014)	Estudantes do Ensino Superior (arquitetura e administração)
Silva, M. (2017)	Estudantes do Ensino Médio (11 anos)

Fonte: Portal eletrônico da CAPES - Brasil e Portal do Registro Nacional de trabalhos de Investigação da SUNEDU - Peru

Como se pode observar no quadro 4, as onze primeiras pesquisas que são do Brasil e que usam a Abordagem Instrumental envolvem sujeitos de diferentes níveis como estudantes de Ensino Fundamental, Ensino Médio e Superior, assim como professores em formação inicial e formação continuada.

No caso do Peru, as pesquisas centraram-se em estudantes dos níveis de Ensino Médio e Superior, ao contrário do Brasil no Peru não se tem evidências de pesquisas na formação docente que usam essa abordagem.

Quinto: Fases da Gênese Instrumental

O quadro 5 apresenta as fases da Gênese Instrumental (Instrumentalização e Instrumentação) envolvidas nas pesquisas com a Abordagem Instrumental.

Quadro 5: Fases da Gênesis Instrumental das pesquisas com a Abordagem Instrumental

Autor	Fase da gênese
Vieira, U. (2015)	Instrumentalização e instrumentação
Porto, F. (2016)	Instrumentalização
Neto, A. (2015)	Instrumentalização e instrumentação
Da Costa, C. (2013)	Instrumentalização e instrumentação
Salomão, C. (2013)	Não especificada
Krüger, E. (2015)	Não especificada

Gonçalves, I. (2016)	Instrumentalização e instrumentação
De Moraes, K. (2014)	Instrumentalização e instrumentação
Dos Santos, S. (2016)	Instrumentalização e instrumentação
Soares, L. (2013)	Instrumentalização e instrumentação
De Oliveira, P. (2015)	Instrumentalização e instrumentação
Chumpitaz, L. (2013)	Instrumentalização
García-Cuéllar, D. (2014)	Instrumentação
León, J. (2014)	Instrumentalização
Silva, M. (2017)	Instrumentalização e instrumentação

Fonte: Portal eletrônico da CAPES - Brasil e Portal do Registro Nacional de trabalhos de Investigação da SUNEDU - Peru

Neste critério, no Brasil oito das onze pesquisas estudaram ambas as fases (Instrumentalização e instrumentação), uma estudou só a fase da Instrumentalização. As pesquisas de Da Costa (2013) e Krüger (2015) não usaram as fases em suas análises, porque centraram-se em diferenciar um artefato do que no instrumento de maneira geral.

No Peru, as pesquisas de Chumpitaz (2013) e León (2014) centraram-se na fase da instrumentalização, García-Cuéllar (2014) centrou-se na fase da instrumentação e Silva (2017) focou-se em ambas fases da Gênese Instrumental.

Pode-se identificar que no Brasil as pesquisas usam as duas fases da Gênese Instrumental e no Peru, maioritariamente, usam uma das fases da Gênese. Pensa-se que isso poderia ser pois a realidade de ambos os países é diferente em relação a produção, grupos de pesquisa e, além disso, no Brasil há maior apoio do que no Peru por parte de instituições de fomento para pesquisas em diferentes áreas de estudo.

Considerações finais

O estado da arte realizado no presente estudo, ajudou a delimitar os diferentes trabalhos produzidos envolvendo a Abordagem Instrumental no Brasil e no Peru no período de 2013 a 2017.

Foi possível constatar que no Peru a instituição onde ocorreu a maior concentração de pesquisas envolvendo a Abordagem Instrumental foi a Pontifícia Universidade Católica do Peru – PUCP.

Com relação a Gênese Instrumental e suas fases (Instrumentação e instrumentalização), no caso do Brasil, as pesquisas se orientam ao estudo das duas fases da Gênese Instrumental, somente duas não são especificas, pois são consideradas como um todo integrado. No caso do Peru, as pesquisas em sua maioria centraram-se em uma das fases e somente uma pesquisa estudou as duas fases.

No desenvolver do presente estudo foi possível identificar que no Brasil a Abordagem Instrumental é chamada de diferentes maneiras, como, por exemplo, a teoria da Instrumentação em Vieira (2015), teoria da Gênese Instrumental em Porto (2016), teoria de Rabardel em Salomão (2013) e Teoria da Atividade Instrumentada em Soares (2013). No entanto, no Peru somente é chamada de Abordagem Instrumental. Consideramos importante tomar em conta estes nomes para uma futura procura de informação em relação com este quadro teórico.

Com relação ao artefato usado nas pesquisas, no Brasil e no Peru usam maioritariamente um único artefato, isto é, software ou material. Somente o caso de Neto (2015) da PUC-SP identifica-se que utilizou um artefato simbólico. No entanto, no Peru os artefatos são todos simbólicos, especificamente, objetos matemáticos.

Foi possível constatar que as pesquisas tanto no Brasil como no Peru priorizam objetos matemáticos em relação ao Cálculo e à Geometria. O que é possível pensar em futuras pesquisas que envolvam a Abordagem Instrumental em outras áreas da Matemática como, por exemplo, a Estatística.

Em relação aos sujeitos envolvidos nas pesquisas, foi possível constatar que no Brasil se distribuíram entre estudantes de Ensino Fundamental, Médio e Superior, assim como na formação inicial e continuada de professores. Mas no caso do Peru, os sujeitos de pesquisa foram de Ensino Médio e Superior. O que é possível pensar em futuras pesquisas no Peru em Ensino Fundamental e na formação inicial e continuada de professores de matemática.

Referências bibliográficas

Bellemain, F. B., e Trouche, L. (2016). Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. *Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática.* Bonito, Brasil. Recuperado de:https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01560233

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudiantes de ingeniería*. Dissertação. Pontificia Universidad Católica del Perú. Peru.

Da Costa, C. (2013). *A comunicação matemática em fóruns de discussão no Moodle: a experiência no CAP-UFRJ*. Dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Brasil.

De Moraes, K. (2014). *Integração da tecnologia: um estudo da mobilização e construção de conhecimentos por acadêmicos de um curso de pedagogia*. Dissertação. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Brasil.

De Oliveira, P. (2015). *Tecnologias no ensino da matemática: Mapeamento e estudo da utilização efetiva de Laboratórios de Informática nas Escolas Públicas no Sul da Bahia*. Dissertação. Universidade Estadual de Santa Cruz. Brasil.

Dos Santos, S. (2016). *Prototipagem rápida de PCOC NA impressora 3D para o ensino e aprendizagem de integrais duplas e triplas*. Dissertação. Universidade Estadual de Santa Cruz. Brasil.

Ferreira, N. S. A. (2002). *Pesquisa em leitura: um estudo dos resumos e dissertações de mestrado e teses de doutorado defendidas no Brasil – de 1980 a 1995*. Teses de doutorado. UNICAMP. Brasil.

García-Cuéllar, D. (2014). *Simetria axial mediado por el geogebra: un estudio con alumnos de primer grado de educación secundaria*. Dissertação. Pontificia Universidad Católica del Perú. Peru.

García-Cuéllar, D. (2018). Enfoques teóricos en investigación con tecnología en educación matemática. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 32 (2), 1402-1409.

Gonçalves, I. (2016). *A influência do software GeoGebra na aprendizagem de funções quadráticas. Dissertação*. Universidade Estadual de Santa Cruz. Brasil.

Krüger, E. (2015*). Apropriação de tecnologias digitais: Um Estudo de Caso sobre formação Continuada com Professores de Matemática*. Dissertação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil.

León, J. (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el GeoGebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. Dissertação. Pontificia Universidad Católica del Perú. Peru.

Messina, G. (1999). *Investigación acerca de la formación docente: un estado del arte en los noventa*. *Revista Iberoamericana de Educación, 19, 145-207. Recuperado de* https://rieoei.org/RIE/article/view/1057.

Neto, A. (2015). *Um estudo da Gênese instrumental para função de uma variável real com várias sentenças*. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Brasil.

Neto, A. e Da Silva, MJF (2015). Gênese Instrumental: Levantamento das pesquisas no Brasil no período de 2005 a 2013. *XVI Encontro Baiano de Educação Matemática*. Brasil.

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores* 53(2), 129-150.

Porto, F. (2016). *Formação continuada do professor de matemática para o uso do GeoGebra em dispositivo mobile*. Dissertação. Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/

Romanowski, J. P. e Ens, R. T. (2006). *As pesquisas denominadas do tipo "Estado da Arte"*. Diálogos Educacionais, *6*(19), 37–50. Recuperado de: http://www.redalyc.org/pdf/1891/189116275004.pdf

Salomão, C. (2013). *A passagem de textos em língua materna para expressões aritméticas, mediada pelo uso de uma calculadora*. Dissertação. Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Silva, M. (2017). *Génesis instrumental del circuncentro con el uso del Geogebra en estudiantes de nivel secundario*. Dissertação. Pontificia Universidad Católica del Perú. Peru.

Soares, L. (2013). *Integração do computador na prática pedagógica de professores de matemática que atuam em sala de tecnologia: uma abordagem instrumental*. Dissertação. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Brasil.

Touche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized *learning* environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9: 281–307.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. En Jean Brun (org), *Didáctica das matemáticas*. (pp. 155-189). Lisboa: Horizontes pedagógicos.

Vieira, U. (2015). *Estudo das interações entre estudantes do 4° ano do ensino fundamental e noções de probabilidades mediada pela maqueta tátil*. Tese de doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.

- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.
- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (http://clame.org.mx/actas/) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido expuesto durante RELME 32. Es por ello que se solicita **enviar el certificado de la ponencia escaneado**, junto con el escrito.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo

de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.

4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.
10. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.

- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

  Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

  Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba "...". Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

  Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

  El formato será el siguiente:

  - *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

    Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

  - *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

    García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

  - *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

    Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

  Referencias de formatos electrónicos:

  - *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa