Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 32 » NÚMERO 2 » AÑO 2019 » ISSN 2448-6469

ALME 32

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 32, Número 2, agosto 2019, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidente: Olga Lidia Pérez (Cuba); Secretario: Hugo Parra Sandoval (Venezuela); Tesorera: Daniela Reyes Gasperini (Argentina); Vocal Norteamérica: Rebeca Flores García (México); Vocal Caribe: Juan Manzueta Concepción (República Dominicana); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Marcela Parraguez González (Chile).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Ana Rosa Corica Caponio
Cecilia Ester Elguero Dotta
Cecilia Rita Crespo Crespo
Christiane Ponteville
Claudia Minnaard
Elisa Silvia Oliva Díaz
Haydeé Blanco Cerchiara
Lidia Beatriz Esper Lara
Liliana Mabel Tauber
Mabel Rodríguez
Marcela Evangelina Götte Salin
María Angélica Pérez Monges
Maria Elina Vergara Viano
María Susana Dal Maso Miná
Rodolfo Eliseo D´Andrea
Silvia Vrancken
Verónica Parra

BRASIL

Adriana Breda
Ângela Maria Dos Santos
Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Edvonete Souza de Alencar
José Ronaldo Alves Araújo
Juliana Silva De Andrade
Nielce Lobo da Costa Meneguelo
Karly Barbosa Alvarenga
Jonei Cerqueira Barbosa
Jose Ivanildo Felisberto de Carvalho
Miguel Ribero
Divanízia Souza
Laerte Silva da Fonseca Laerte
Marlene Alves Dias
Renata Camacho Bezerra
Angelica da Fontoura Garcia Silva

CHILE

Andrea Dorila Cárcamo Bahamonde
Carol Sepulveda
Jaime Mena Lorca
Marcela Parraguez González
Nicolás Sánchez Acevedo
Patricia Vásquez Saldías
Daniela Alejandra Soto-Henríquez
Eduardo Carrasco Heríquez

COLOMBIA

Ingrith Yadira Álvarez
Paula Rendón Meza

COSTA RICA

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

CUBA

Olga Lidia Pérez González

ESPAÑA

Carmen López Esteban
María Belén Giacomone
José Carrillo Yáñez

ITALIA

Mariangela Borello

MÉXICO

Adriana Gómez Reyes
Angélica Dueñas Cruz
Clara Eccius
Cuauhtémoc Rodríguez
Edgar Ponciano Bustos
Eduardo Carlos Briceño Solis
Enrique Javier Gómez Otero
Francisco Cordero
Gabriela Márquez García
Germán Muñoz Ortega
Gricelda Mendivil Rosas
Hipólito Hernández Pérez
Javier García García
José Marcos López Mojica
José Trinidad Ulloa Ibarra
Julio Moisés Sánchez Barrera
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Lilia Patricia Aké Tec
Lizzeth Aurora Navarro Ibarra
Lorenzo Contreras Garduño
Luis Arturo Serna
Luis Manuel Aguayo Rendón
Luis Manuel Cabrera Chim
Magdalena Rivera Abrajan
Mario Adrián Caballero Pérez
Mayra Báez Melendres
Miriam Martínez Vázquez
Nehemías Moreno
Raul Alonso Ramirez Escobar
Rebeca Ascencio González
Reyna Arcelia Brito Páez
Rita Angulo
Rogelio Ramos Carranza
Rosa Isela Vázquez Camacho
Saúl Ezequiel Ramos Cancino

MÉXICO

Ulises Alfonso Salinas Hernández
Víctor Larios Osorio

PANAMÁ

Analida Isabel Ardila Acuña

PERÚ

Enrique Huapaya Gómez
Verónica Neira Fernández
Flor Carrillo Lara

URUGUAY

Daniela Pagés
Verónica Molfino Vigo

VENEZUELA

Sandra Liliana Castillo Vallejo

PRESENTACIÓN

La revista ALME es publicada semestralmente por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), con el propósito de posibilitar el intercambio y divulgación de la producción académica entre colegas de distintos países latinoamericanos. La revista, se plantea con un carácter científico, cuyas publicaciones se componen de artículos en los que profesores e investigadores abren espacios académicos que favorezcan la innovación, organización, acumulación y transformación del conocimiento de la disciplina.

En esta segunda parte del volumen 32 se publican 85 artículos que integran las 5 secciones que la conforman y que a continuación se presentan:

Sección 1: Análisis del discurso matemático escolar, se conforma de artículos relacionados con el discurso matemático, procesos argumentativos y la proporcionalidad.

Sección 2: Propuestas para la enseñanza de las matemáticas, plantea propuestas específicas en torno a la resolución de problemas, diseño de actividades didácticas y la evaluación del aprendizaje.

Sección 3: Aspectos Socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, cuyos artículos aluden a usos de la proporcionalidad, la significación de la geometría euclidiana y el análisis de ideas variacionales en una obra.

Sección 4: El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional, se presentan artículos relacionados con reflexiones de futuros profesores, diseño curricular y narrativas de profesores.

Sección 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, contiene artículos relacionados con el uso de la calculadora, la construcción de objetos con GeoGebra y entornos tecnológicos.

La revista ALME surge como un instrumento que visibilice y difunda difunda la producción que desde la matemática educativa, se construye en materia de docencia e investigación, con la intención de ampliar su acceso tanto a profesores , así como a investigadores de Latinoamérica.

Un reconocimiento especial a los editores y a los árbitros por el riguroso trabajo realizado, por su constancia y responsabilidad para que la revista ALME sea un producto de calidad, a los autores por compartir sus producciones y permitirnos difundir su obra en un escenario de pluralidad.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2020)

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 5:
USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

EL PRINCIPIO ESTRELLA EN LA PRÁCTICA MÉDICA. EL USO DE LA VARIACIÓN SUCESIVA EN EL DIAGNÓSTICO Y EN EL TRATAMIENTO DE ENFERMEDADES CARDIACAS

THE STAR PRINCIPLE IN MEDICAL PRACTICE. THE USE OF SUCCESSIVE VARIATION IN THE DIAGNOSIS AND IN THE TREATMENT OF CARDIAC DISEASES

Angélica Moreno–Durazo, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (México)
gamoreno@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
Como resultado de nuestra investigación, caracterizamos uno de los principios del pensamiento matemático, el principio estrella está presente cuando en una situación de cambio se transita entre lo desconocido y el establecimiento de prácticas predictivas a través del análisis de la *pequeña variación*. En ello analizamos, desde la Socioepistemología, las prácticas y los argumentos empleados en situaciones de cambio singulares: durante el diagnóstico y en la elección del tratamiento de enfermedades cardíacas; particularmente, nos ocupamos del papel que juega la *variación sucesiva* y el *razonamiento abductivo* en ese tránsito. Los resultados de esta investigación brindan elementos para el rediseño del discurso Matemático Escolar de ideas variacionales.

Palabras clave: pequeña variación, práctica predictiva, socioepistemología

Abstract
We characterize one of the principles of mathematical thinking. The star principle is present when in a situation of change we go through the unknown and establish predictive practices through the analysis of *small variation*. In this study, we analyze, from the Socio-epistemological theory, the practices and the arguments used in specific situations of change: during the diagnosis and in the election of the treatment of heart diseases, we particularly focus on the role of *successive variation* and *abductive reasoning*. The results of this research provide elements for the redesign of the mathematical School discourse involving variational ideas

Key words: small variation, predictive practice, socio-epistemological theory

Introducción

La articulación de dos perspectivas sobre la función, la analiticidad y la predicción, analizada por Cantoral (1990) desde la relación simbiótica entre el *Prædiciere* y lo analítico, gesta una base de resignificaciones para los conceptos del Análisis Matemático. Un caso particular lo constituye el concepto matemático serie de Taylor, abordado en (Cantoral, 1991), su significación primaria radica en la noción de predicción en los fenómenos de flujo continuo en la naturaleza; conocer el estado inicial del sistema en evolución con datos como $x, f(x), f'(x), \ldots$ permite enuncia el estado posterior que asume la función:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \cdots$$

El discurso Matemático Escolar enfatiza las relaciones del tipo $f^{(n)} \leftrightarrow f^{(n+1)}$ (*variación consecutiva*), por ejemplo, la derivada de una función en el sentido de Cauchy es entendida como el límite del cociente incremental:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Mientras que, por el discurso, no son favorecidas las articulaciones de derivadas en relaciones hacia arriba y hacia abajo:

$$f \to f' \to f'' \to f''' \to \cdots, \text{ o } f''' \to f'' \to f' \to f,$$

referidas en la serie de Taylor. Bajo esta mirada, el significado de los conceptos matemáticos alude a la *variación sucesiva* (articulación de órdenes de variación). De lo anterior, la noción matemática de derivada, que acompaña a la práctica de predecir, tendrá sentido para los estudiantes cuando las derivadas se utilicen como una forma de expresar *variaciones sucesivas* en entornos socioculturales (Cantoral y Farfán, 1998); de manera que, la variación sucesiva sustenta el rediseño del discurso Matemático Escolar para el desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional*.

En nuestra investigación, tomamos a la variación sucesiva como objeto de estudio y así determinamos la existencia de un principio del pensamiento matemático, el *principio estrella* (Moreno, 2018). Este principio del pensamiento, en situaciones de cambio, permite el desarrollo de prácticas predictivas (predecir, estimar, inferir) y se caracteriza por el análisis de la *pequeña variación*, expresado a través del uso de la *variación sucesiva* y del *razonamiento abductivo*.

El principio estrella surge de los esquemas teóricos resultantes de investigaciones sobre el análisis del cambio en situaciones de naturaleza determinista (Cantoral, 1990; 1991; 1995), se caracteriza y se consolida como base del pensamiento matemático al evidenciar su participación en situaciones de otra naturaleza, aquellas que no siguen leyes de cambio. El escenario de nuestra investigación es singular, entre las situaciones de control –aquellas cuya finalidad es provocar un comportamiento deseado–, el caso del tratamiento de las enfermedades es altamente complejo debido a que no solo hay que tratar con los efectos provocados por las modificaciones externas (medicamentos), sino que, se consideran las modificaciones internas, respuestas adaptativas o de reacción a las modificaciones internas.

De esta manera, nuestro objetivo de investigación fue explicar cómo son socialmente construidas las prácticas predictivas de la Cardiología, esto es, para el tratamiento de enfermedades cardiacas no preguntábamos ¿cuál es la organización de las prácticas y de los argumentos en la interpretación de electrocardiogramas?, ¿cuál es el uso de la variación sucesiva en su tratamiento? y ¿cómo se relaciona con los elementos de un rediseño del discurso Matemático Escolar para las matemáticas del cambio?

Elementos teóricos

La teoría Socioepistemológica que sustenta esta investigación, en tanto teoría pragmática del conocimiento, asume que el significado no es intrínseco al objeto, sino es un derivado (consecuencia) de su uso. Por tanto, en el aprendizaje de las matemáticas se busca la conformación de redes de significado en contextos variados, cuya interacción coadyuve a la construcción y explicación de la naturaleza dinámica de los conceptos matemáticos. Esto explica la máxima de la teoría: de los objetos a las prácticas (Cantoral, 2013; 2016).

Las formas culturales de apropiación de las nociones matemáticas involucradas en el estudio del cambio y la predicción, donde emerge la variación, son analizadas desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV). Bajo esta postura, el cambio es observado por los individuos, se considera pues como la manifestación que evidencia la evolución en un fenómeno, pero la observación no es suficiente para explicar los cambios que siguen –predecir. Por ello, en el estudio del cambio con fines predictivos emerge la noción de variación como una construcción del individuo que, mediante la cuantificación de las modificaciones de estado, explique la evolución que seguirá el fenómeno.

Las explicaciones de la evolución de las situaciones o fenómenos de cambio precisan de la articulación de las nociones de *variación*, *variable* y *práctica predictiva*. Esta articulación es explicada por Cantoral (1990) a través de dos aspectos fundamentales en el estudio del cambio: los *niveles de constantificación* y el *carácter estable del cambio*.

- *Los niveles de constantificación logran la articulación –variables, variación–,* en el primer nivel de constantificación se seleccionan las variables que describen con suficiente precisión el fenómeno y en el segundo nivel de constantificación se selecciona el orden de variación que lo afecta significativamente.
- *La identificación de carácter estable del cambio* se sustenta en estos niveles, ya que posibilitan la búsqueda de las leyes que rigen el cambio identificando lo invariante en él. Por ejemplo, en situaciones de cambio la identificación de lo periódico, lo proporcional, lo exponencial, lo logarítmico, lo constante, en general, la regularidad en el cambio (Ferrari, 2001; Covián, 2005; Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006; Buendía, 2006; Buendía y Ordoñez, 2009; Espinoza, 2014; Reyes, 2016). De esta manera, a través de los dos aspectos se logra la articulación –variable, variación y práctica predictiva.

En una lectura focalizada de la noción de *variación sucesiva como emergente del estudio de situaciones de cambio con fines predictivos*, identificamos los primeros rasgos del principio estrella; reconocimos una idea común en los escenarios de naturaleza determinista:

> *La determinación del carácter estable del cambio (aquello que posibilita la predicción) se sustenta en la <u>pequeña variación</u>, el descubrimiento de que $f(x+h) \approx f(x)$ precisa del análisis sobre los valores que tomará la variable x en estados posteriores $x+h$ (bajo una función f); esto es, el análisis de las variaciones en $f(x)$ ante el tránsito de x a $x+h$.*

En nuestros estudios de las prácticas predictivas desarrolladas durante el tratamiento de las enfermedades cardiacas reportamos el uso de la variación sucesiva en el diagnóstico –previo al tratamiento se requiere de reconocer cuál enfermedad tratar– (Moreno–Durazo y Cantoral, 2017; Moreno, 2018; Cantoral, Moreno–Durazo y Caballero–Pérez, 2018); además, mediante evidencia empírica, identificamos el uso del razonamiento abductivo en el diagnóstico. Sin embargo, nuestro foco de interés, la pequeña variación, aparece como fundamental en el tratamiento de las enfermedades cardiacas, mostrado más adelante.

Elementos metodológicos

Para alcanzar el objetivo propuesto, realizamos un análisis de corte cualitativo–interpretativo, pues es necesario reconocer mediante triangulaciones, la "visión de la realidad" de los individuos, *desde las estrategias que siguen para atender las problemáticas planteadas.* Además, seguimos este análisis cualitativo mediante un marco etnográfico, a fin de conocer de cerca las problemáticas de la comunidad de cardiólogos, la diversidad de acciones y argumentaciones que se siguen para atender estas problemáticas, el establecimiento de prioridades, etc. Esto es, realizamos una inmersión profunda en la práctica de los cardiólogos en el tratamiento de las enfermedades.

> "… el término etnografía se refiere al trabajo, el proceso o la forma de investigación que nos permite realizar un estudio descriptivo y un análisis teóricamente orientado de una cultura o de algunos aspectos concretos de una cultura, y, por otra, al resultado final de este trabajo (la monografía o el texto que contiene la descripción de la cultura en cuestión)" (Serra, 2004, p.165).

El estudio etnográfico lo realizamos en el servicio de cardiología del Hospital Universitario "Manuel Ascunce Domenech" (Camagüey, Cuba) analizando durante dos meses las prácticas e interacciones que los cardiólogos realizaban día con día. Mantuvimos un diálogo constante con las enfermeras del servicio, los residentes (médicos generales que se especializan en Cardiología) y los cardiólogos. Particularmente, seguimos todas las actividades del hospital en la vida de un cardiólogo: desde el cambio de guardia, pasando por la consulta de pacientes con cita regular y la consulta de pacientes en terapia intensiva, así como en la realización de estudios (ecocardiogramas y ecocardiogramas transesofágicos) y en las interconsultas. De este seguimiento, obtuvimos datos acerca de los argumentos y las prácticas de los cardiólogos durante el diagnóstico y el tratamiento de las enfermedades cardiacas (tabla 1).

Tabla 1. Entrevistas realizadas

Entrevistas iniciales	*Instrumento de identificación de bloqueos auriculoventriculares* - Se configuró con base en un análisis documental sobre las características electrocardiográficas de las enfermedades. - Se dialogó con el cardiólogo 1, el cardiólogo 2 y el cardiólogo 4.
	Entrevista de seguimiento a las primeras consultas - Se configuró con base en la observación participante para abordar aspectos generales del diagnóstico y tratamiento de enfermedades. - Se dialogó con el cardiólogo 1.
Casos clínicos	*Entrevista de profundización de las consultas regulares* - Se configuró con base en la observación participante en las consultas de pacientes con citas regulares y la selección de aquellas interacciones que aludieron a la variación (siete pacientes). - Se dialogó con el cardiólogo 1
	Entrevistas sobre pacientes en terapia intensiva - Se configuró con base en la selección de pacientes donde su expediente muestra su evolución a través de electrocardiogramas (cuatro pacientes). - La trombosis pulmonar se dialogó con el cardiólogo 1 y el cardiólogo 4. El implante de marcapasos se dialogó con el cardiólogo 4. El infarto anteroseptal se dialogó con el cardiólogo 2. El posible infarto se dialogó con el cardiólogo 3.
Entrevistas finales	*Entrevista sobre la evolución de las enfermedades cardiacas* *Entrevista sobre la combinación de fármacos* - Se configuró con base en la hipótesis del uso de la variación sucesiva en el tratamiento - Se dialogó con el cardiólogo 1

Fuente: Elaboración propia

Análisis y resultados

En la tabla 2 se muestra la intervención de las cotas para el controlar el estado del paciente (el estado deseado). En el caso de la coagulación de la sangre, los valores del INR deben ser entre 2 y 3 (adecuados para evitar la formación de trombos). Además, en algunas ocasiones, para mantener al paciente dentro del rango se hace una doble protección sumando al anticoagulante un antiagregante aún bajo el riesgo de provocar complicaciones de desangramiento (pequeñas variaciones).

Tabla 2 Argumentos del cardiólogo 1 sobre el tratamiento de anticoagulante

Cardiólogo: ese INR – el valor que calcula el laboratorio debe estar entre dos y tres. si está por debajo de dos el paciente no está anticoagulado, o sea, el medicamento no está provocando lo que yo quiero. si está por encima de tres – si está en cinco o en diez – el paciente está muy anticoagulado y puede complicarse con sangramiento **Cardiólogo:** yo tengo en mi consulta como 5 o 6 pacientes que han hecho trombosis de prótesis - porque fueron indisciplinados y porque dejaron de controlarse o porque tienen problemas genéticos. yo a esos pacientes los protejo también con una aspirina, o sea con antiagregante. hago una doble protección – con anticoagulante y antiagregante plaquetario. pero sabiendo que es mayor el riesgo de complicaciones de desangramiento

Fuente: Extracto [Entrevista de profundización sobre casos clínicos]

Observamos que para alcanzar el estado deseado se analizan las variaciones que sufrirá el cuerpo al reaccionar al cambio en los medicamentos, esto es, los efectos que producirán (pequeñas variaciones).

Otro ejemplo de doble protección es el tratamiento que sigue el paciente 4 (tabla 3), para mantener los niveles de potasio, el paciente toma dos diuréticos (furosemida y espironolactona); la importancia del tratamiento consiste en que el paciente no se descompense y, para ello, se va ajustando la dosis de medicamento (pequeñas variaciones), donde las evidencias del estado deseable se obtienen a través de los niveles de frecuencia cardiaca, INR, edemas, etc.

Tabla 3 Argumentos del cardiólogo sobre el tratamiento

Cardiólogo: la furosemida provoca que el potasio caiga y la espironolactona es un diurético ahorrador - de potasio. o sea, lo que por un lado este está eliminando – este lo compensa **Cardiólogo:** tú tienes que tratar de en un paciente que tiene una insuficiencia mitral o que tiene insuficiencia cardiaca – buscar que el paciente esté - en normovolemia. o sea, tiene un problema cardiaco – tú tienes que tratar que el paciente no se descompense. tú vas ajustando la dosis y te vas guiando por la frecuencia cardiaca – por la presión arterial – si tiene edemas en miembros inferiores – o si tiene el hígado crecido o la yugular

Fuente: Extracto [Entrevista de profundización sobre casos clínicos]

A manera de síntesis presentamos el siguiente esquema (figura 1). Mostramos que alcanzar el diagnóstico de enfermedades cardiacas precisa del uso de la variación sucesiva para identificar, basados en el carácter estable del cambio y los niveles de constantificación, los estados de evolución de la salud del paciente, también precisa del razonamiento abductivo para explicar el cambio en las dinámicas de estos estados.

En el diagnóstico es reconocido el estado de salud del paciente (en ese momento) y, es posible estimar la posible evolución del padecimiento (por el conocimiento disciplinar, la evolución natural de las enfermedades). El fin de la práctica médica es la mejora en la condición de salud de los pacientes y, evidenciamos que ese fin se alcanza mediante el análisis de la pequeña variación - *las modificaciones en las variables del fenómeno cuya variación* *provoca momentos conocidos o con cierta regularidad.* Este proceso es cíclico, el tránsito al estado saludable no es directo y de una ocasión, sino que se requieren ajustes como reacción a diversas situaciones, complicaciones propias de la enfermedad o reflejo de la presencia de otros padecimientos, circunstancias del entorno de los pacientes o de su reacción a los medicamentos. De manera que, el proceso de tratamiento constantemente involucra el diagnóstico, para ello, se establecen consultas periódicas de seguimiento.

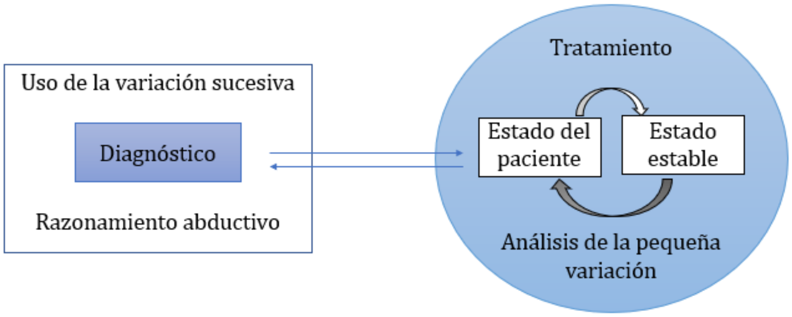


Figura 1. La variación sucesiva, el razonamiento abductivo y la pequeña variación en la práctica médica
Fuente: Elaboración propia

Esto último, evidencia la presencia del principio estrella en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas, además, muestra cómo es posible analizarlo a través del uso de la variación sucesiva y del razonamiento abductivo.

Conclusiones

Encontramos en la Cardiología una práctica de referencia que permite la resignificación de la variación sucesiva en la determinación de prácticas predictivas. Los argumentos que siguen los cardiólogos para referirse al cambio y al cambio del cambio, tienen una naturaleza similar a aquella en la que el sentido simbólico corresponde a expresiones diferenciales como: dy, d^2y, d^3y, ya que $d^2y = d(dy)$ y $d^3y = d(d^2y) = d(d(dy))$. Es importante reconocer que, bajo este enfoque, la variación sucesiva alude a especificaciones cada vez más refinadas sobre el comportamiento del fenómeno, según el orden de variación utilizado.

Más aún, hasta el momento, las investigaciones bajo el enfoque del PyLV consideraban muy importante, para el rediseño del discurso Matemático Escolar, al uso de la variación sucesiva en escenarios socioculturales para la significación de los objetos matemáticos del Cálculo. Al respecto, la carga significativa de los argumentos de los cardiólogos sobre la naturaleza de comportamientos crecientes o constantes se toma al acompañar la identificación de tal comportamiento con su conocimiento disciplinar, su experiencia y su entorno, pero faltaba algo.

La discusión anterior acerca de la importancia de la variación sucesiva como evidencia del principio estrella, le otorga un estatus mayor que su consideración para la significación de los objetos matemáticos del Cálculo, sino uno como parte fundamental de las expresiones del pensamiento que conlleva a la toma de decisión en situaciones de cambio, particularmente, en situaciones de control con dinámicas no deterministas.

Lo anterior, nos conduce a la reflexión sobre los principios del pensamiento matemático. Analizamos detenidamente el papel que juega la noción de *pequeña variación* en la búsqueda de un carácter estable (situaciones deterministas) o la inducción de momentos de estabilidad (situaciones no deterministas). Los resultados mostraron que, a través de la combinación de la *variación sucesiva* y del *razonamiento abductivo* es que se puede expresar racionalmente el análisis de la *pequeña variación*. Particularmente, mostramos la existencia y la función del principio estrella en la práctica médica de la Cardiología.

¿Qué relación tienen estos resultados de investigación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas?, ¿la consideración del principio estrella en los diseños de situaciones de aprendizaje que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático? y ¿cómo sería dicha inclusión? Debemos aclarar que estas reflexiones requieren ser objeto de estudio en futuras investigaciones, es decir, abrimos otro campo de posibilidades hacia la investigación en el Pensamiento y Lenguaje Variacional. En ello se versarían las técnicas de la segunda derivada de una función empleadas, por ejemplo, el cálculo de máximos y mínimos bajo las reglas del signo y la concavidad, con una significación de la derivada en relación a los usos de la variación sucesiva en escenarios socioculturales, un caso: los significados que toma un comportamiento creciente-decreciente en el diagnóstico de enfermedades cardiacas.

Por último, con base en esta investigación, encontramos una manera en la que el razonamiento abductivo, habitualmente no considerado en las clases de matemáticas, participe en los procesos de análisis variacional donde se significa a los objetos matemáticos formales del cambio. De esta manera, la inclusión del estudio de la pequeña variación, apoyada con el estudio sistémico de la variación sucesiva y el razonamiento abductivo en escenarios socioculturales, provee elementos para el rediseño del discurso Matemático Escolar que favorezca el desarrollo del pensamiento matemático entre los estudiantes; por tanto, tratar con situaciones que despierten su interés y les permita poner a prueba sus razonamientos y así, llevar al ámbito escolar los principios del pensamiento matemático.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(2), 227–251.

Buendía, G. y Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(1), 7–28

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la Teoría Elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de "el Prædiciere" y "lo Analítico"*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. D.F.: México.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: Formación de la noción de función analítica. *Mathesis 7*(2), 223–239.

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: El caso de la serie de Taylor. *Mathesis 11*(1), 55–101.

Cantoral, R. (2013, 2016 2ª ed.). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Épsilon 42*(14,3), 353–369.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: Algunos Ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, Número Especial, 83–102.

Cantoral, R., Moreno–Durazo, A. y Caballero–Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education 50*(1), 77–89. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0922-8

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la Cultura Maya.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. D. F.: México.

Espinoza, L. (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. D. F.: México.

Ferrari, M. (2001). *Una aproximación socioepistemológica a la matemática educativa. El caso de la función logaritmo.* Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. D. F.: México
Moreno, G. (2018). *Principios del pensamiento matemático: el principio estrella en la práctica médica. El uso de la pequeña variación en el diagnóstico y el tratamiento de enfermedades cardiacas*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. CDMX: México.
Moreno–Durazo, A., y Cantoral, R. (2017). El uso de los órdenes superiores de variación en la interpretación clínica del electrocardiograma. En L. A. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 30, 927–935. CDMX, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa. Tesis doctoral*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. CDMX: México.
Serra, C. (2004). Etnografía escolar, etnografía de la educación. *Revista de Educación* 334, 165–176.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

EL APRENDIZAJE GEOMÉTRICO EN LA ELABORACIÓN DE SIMULADORES CON GEOGEBRA. EL CASO DE ELWIN

THE GEOMETRIC LEARNING IN THE ELABORATION OF SIMULATORS WITH GEOGEBRA: THE CASE OF ELWIN

Ivonne C. Sánchez, Juan Luis Prieto G.
Universidade Federal do Pará (Brasil),Universidad del Zulia (Venezuela)
ivonne.s.1812@gmail.com, juanl.prietog@gmail.com

Resumen
La elaboración de simuladores con geogebra (esg) es una actividad que comprende la producción de dibujos dinámicos de determinadas realidades. durante la esg los alumnos usan distintas herramientas de construcción del geogebra para resolver un conjunto de tareas de construcción, empleando técnicas cuyos razonamientos asociados revelan el modo en que los jóvenes llegan a conocer los objetos geométricos. desde la teoría de la objetivación, nos apoyamos en la noción de aprendizaje para describir la manera en que un alumno y dos profesores reconocen el papel de los extremos de un semicírculo en la aplicación de la técnica de construcción empleada por el joven. aplicamos un análisis de contenido para identificar como el alumno se hizo consciente del papel que tenía los extremos del semicírculo en su técnica.

Palabras clave: aprendizaje, teoría de objetivación, técnicas de construcción, geogebra, semicírculo

Abstract
The elaboration of simulators with GeoGebra (ESG) is an activity that includes the production of dynamic drawings of certain realities. During the ESG the students use different construction tools of the GeoGebra to solve a set of construction tasks, using techniques whose associated reasoning reveals the way in which young people get to know the geometric objects. From the Theory of Objectification, we rely on the notion of learning to describe the way in which a student and two teachers recognize the role of the ends of a semicircle in the application of the construction technique used by the student. We apply a content analysis to identify how the student became aware of the role of the ends of the semicircle in his technique

Key words: learning, theory of objectification, construction techniques, geogebra, semicircle

Introducción

El aprendizaje matemático es un fenómeno educativo cuya caracterización depende de la perspectiva teórica con la que decida ser analizado. Una perspectiva teórica que ha tenido gran influencia en el modo de entender el aprendizaje matemático desde finales del siglo pasado es el *constructivismo* en sus distintas formas: radical, moderado o social (Lerman, 1992). Inspirados en Piaget, los constructivistas asumen al individuo como "el elemento central de la construcción de sentido" (Lerman, 1992, p. 133), dejando de lado los aspectos sociales, culturales e históricos que caracterizan al aprendizaje humano.

Desde sus inicios en los años 80, el constructivismo ha sido considerado por muchos como el "método idóneo" para la mediación del aprendizaje matemático en el aula. Sin embargo, Radford (2018) afirma que esta perspectiva se corresponde con una teoría individualista del aprendizaje, ya que en sus principios se considera al individuo como constructor del saber a través de su propia experiencia. Desde esta perspectiva, es "haciendo cosas" que el individuo llega a conocer, por lo cual, en esta teoría, se asumen como iguales la acción y el saber. Se sabe aquello y sólo aquello que resulta de la acción del alumno. De allí que, para los constructivistas, nadie puede construir un saber y transferirlo a otro.

Radford (2006; 2014) avanza un paso más ante la crítica que realiza al constructivismo y otras teorías, al proponer junto a su equipo de trabajo en la Universidad Laurentiana (Canada) la Teoría de Objetivación (TO) como una alternativa a las corrientes individualistas del aprendizaje. La TO tiene como idea fundamental que los individuos lleguen a conocer cuando trabajan conjuntamente en actividades sociales de producción de saberes y seres humanos (Radford, 2017), concibiendo al aprendizaje como procesos de *objetivación* y *subjetivación* que ocurren de forma simultánea y conjunta en la actividad. Como puede notarse, el concepto de actividad se convierte en la categoría conceptual más importante de la TO, al constituir el centro de su posicionamiento filosófico, epistemológico, antropológico y ontológico.

Una actividad que venimos analizando desde la TO en los últimos años es la elaboración de simuladores con GeoGebra (ESG) (Sánchez y Prieto, 2017). La ESG es una actividad educativa no convencional que reúne a profesores de matemática y a estudiantes de educación media con el fin de producir modelos computacionales de una diversidad de fenómenos reales elegidos por los jóvenes. Tales modelos son elaborados con el software GeoGebra y en su producción los alumnos deben formular, resolver y comunicar una serie de técnicas de construcción geométrica. De esta comunicación surge un aprendizaje geométrico que es materializado en la discusión de los pasos y acciones que componen a la técnica de construcción.

Hasta este momento no habíamos realizado algún estudio sobre el aprendizaje geométrico en un momento tan particular de la ESG como el de comunicación de una técnica. Por esta razón, dedicamos este trabajo a la caracterización del aprendizaje geométrico que se produce en una situación de comunicación de una técnica de construcción de un semicírculo con GeoGebra. Nuestra intención es contribuir con información que sea de provecho para aquellos profesores que ven en la ESG una oportunidad para la promoción del aprendizaje matemático.

Marco teórico

La TO es una teoría que se fundamenta en una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje matemático (Radford, 2006; 2014; 2018). Esta teoría conceptualiza el aprendizaje como "el encuentro con el saber y su transformación subjetiva en algo que aparece a la conciencia" (Radford, 2017, p. 120). Dentro de la TO, el nombre que recibe tal proceso de toma de conciencia es *objetivación*, de manera que aprender llega a entenderse como un proceso social (no individual) de toma de conciencia progresiva y crítica acerca de ciertas formas codificadas de acción y reflexión que comprenden el saber histórico de una cultura. Por conciencia se entiende aquella forma específicamente humana de reflexionar sobre la realidad concreta y de posicionarse en ella (Radford, 2017).

Como se dijo anteriormente, la TO coloca en el centro de sus planteamientos al concepto de *actividad*, entendida como "un evento creado por una búsqueda común […] que es, al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética." (Radford, 2017, p. 125). Es mediante la actividad que los estudiantes llegan a hacerse progresivamente consientes de las formas históricamente codificadas de pensar y actuar matemáticamente, las cuales determinan el saber matemático escolar. En el caso de la geometría, la construcción de figuras geométricas con software de geometría dinámica es una actividad con el potencial de hacer que profesores y alumnos tomen conciencia del saber geométrico encarnado en las herramientas que nos ofrece la tecnología, como producto de la evolución del conocimiento matemático desde los tiempos de Euclides hasta la actualidad.

A su vez, la ESG es una actividad no convencional que propicia un espacio de trabajo particular con las construcciones geométricas por medio del uso del GeoGebra. Tales construcciones son el medio directo de producción de dibujos dinámicos que recrean en la pantalla aquellas formas y movimientos característicos de determinados fenómenos de la realidad. Por *dibujo dinámico* se entiende aquel dibujo creado con un software de geometría dinámica que "[…] conserve ciertas propiedades espaciales impuestas cuando se desplace por uno de los puntos básicos del dibujo." (Laborde, 1997, p. 42). En el contexto de la ESG, la construcción de un dibujo dinámico implica el reconocer las propiedades espaciales del fenómeno (relacionadas con sus formas y movimientos), que luego son traducidas en términos geométricos.

El trabajo matemático que surge alrededor de la producción de un dibujo dinámico en la ESG se caracteriza por el paso de un modelo matemático (el diagrama geométrico representativo de la realidad que se quiere simular) a un modelo computacional, mediante la formulación y resolución de unas *tareas de construcción* (Sánchez y Prieto, 2017). En este proceso, los jóvenes establecen procedimientos de construcción geométrica, que llamamos *técnicas* (Sánchez y Prieto, 2017), las cuales son ejecutadas a través de las herramientas de construcción, medida y otras funcionalidades dinámicas del GeoGebra (Castillo y Prieto, 2018). Las técnicas de construcción están compuestas por *pasos y acciones* que, en su conjunto, actualizan una forma culturalmente codificada de construir con el software la figura geométrica correspondiente a la tarea.

En principio, el empleo de una técnica de construcción puede estar basada en información proveniente de aquella herramienta del GeoGebra con la que se desea construir la figura (Prieto y Ortiz, en prensa). Por ejemplo, si se desea construir un rectángulo con GeoGebra, la herramienta *Polígono* sugiere al usuario una forma de construcción de la figura en la que se debe comunicar los vértices al programa. En este sentido, las herramientas del GeoGebra juegan un papel fundamental en la producción y empleo de una técnica para resolver una determinada tarea de construcción. Sin embargo, el hecho de que un estudiante haya aplicado una cierta técnica de construcción para producir un dibujo dinámico geométricamente consistente no significa que el joven tenga conciencia del saber geométrico encarnado en las herramientas usadas en su construcción.

En este contexto, la *comunicación de la técnica* puede ser el modo particular en que los profesores del club GeoGebra se aseguren de que los estudiantes aprendan la geometría detrás de la formulación y empleo de una técnica de construcción. En esta actividad, los estudiantes deben argumentar, debatir y explicar los pasos y acciones que componen a la técnica apoyando sus ideas en las herramientas del GeoGebra y en teoría geométrica. Para Llinares y Valls (2011), la comunicación de la resolución de un problema matemático (en nuestro caso, de una técnica de construcción) es una componente fundamental del aprendizaje matemático y una capacidad que se apoya en las reflexiones de los individuos sobre el significado de lo hecho para llegar a la solución.

Los significados matemáticos escolares que surgen de la actividad de comunicación de una técnica de construcción con GeoGebra pueden expresarse simultáneamente por medio del cuerpo (p. ej., usando la percepción, acciones kinestésicas, gestos), de signos (p. ej., a través de palabras escritas u orales, notación geométrica, diagramas) y de artefactos culturales (p. ej., lápiz y papel, pizarra, software GeoGebra) disponibles en la actividad (Arzarello, Paola, Robutti y Sabena, 2009; Radford, 2011). De esta manera, los significados geométricos compartidos que surgen en la ESG son el producto de las reflexiones en y con diferentes recursos semióticos que los alumnos movilizan para justificar los pasos y acciones de la técnica que ellos han empleado. En conclusión, podemos decir que la comunicación y el aprendizaje están estrechamente vinculados, mutuamente constituidos y se definen recíprocamente en la producción de significados.

Metodología

La metodología implementada en este trabajo es de tipo cualitativa, correspondiente a la de una investigación descriptiva e interpretativa. Según Bogdan y Biklen (1994), algunas características de las investigaciones cualitativas son: (i) los datos provienen directamente del ambiente natural, (ii) los investigadores están preocupados más por los procesos que por los productos, y (iii) los resultados tienen una fuerte componente descriptiva.

Participantes y contexto

En la investigación participaron dos profesores de matemática y un estudiante de educación media, quienes formaban parte de una discusión sobre los pasos y acciones que conforman la técnica de construcción de un semicírculo con GeoGebra. Estos sujetos formaban parte del proyecto "Club GeoGebra para la Diversidad" en el año escolar 2015-20016, siendo que los dos profesores (a quienes llamaremos P1 y P2) eran "promotores" de los clubes y el estudiante cursaba cuarto año en una institución escolar pública localizada en el municipio San Rafael del Mojan, en Venezuela. El encuentro entre los participantes se llevó a cabo en junio de 2016, y tuvo por objetivo conocer el trabajo de simulación realizado por el joven en miras a su presentación en el II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia (Prieto y Gutiérrez, 2016), realizado en Maracaibo días después de la reunión.

Durante esta reunión, el estudiante (a quien llamaremos Elwin) explicó a los profesores las tareas de construcción y las técnicas utilizadas para obtener el dibujo dinámico correspondiente a una parte del mecanismo de Klann (Fig. 1a).

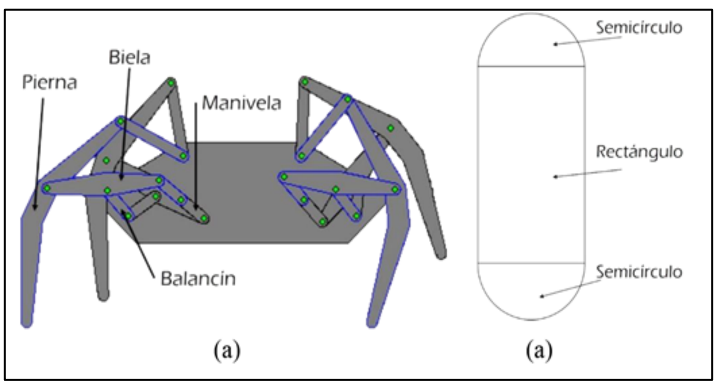


Figura 1. Imagen del mecanismo de Klann y boceto de la pieza seleccionada por Elwin
Fuente: Villalobos, 2016

Esta dinámica de trabajo con el joven genero una discusión en torno a la comunicación de la técnica que no fue lineal, sino más bien se produjo como un diálogo de ideas argumentadas sobre las acciones realizadas para ejecutar la técnica con GeoGebra. La parte del mecanismo en cuestión corresponde al primer balancín, cuya representación con el software implicó la formulación y resolución de tres tareas de construcción referidas ciertas figuras geométricas (Fig. 1b). De estas tareas, en la investigación analizamos los procesos de objetivación en torno a la comunicación de la *construcción de un semicírculo a partir de un punto exterior*.

Recolección de la información

Los datos del estudio provienen de la discusión generada entre los dos profesores y el estudiante con respecto al contenido de la comunicación de la técnica de construcción. Esta discusión fue grabada en formato de video mediante una cámara digital, de manera que en el registro de la discusión se pudieran apreciar las expresiones, gestos y artefactos simbólicos y materiales utilizados por los participantes durante la actividad de comunicación de ideas. En el vídeo, centramos la atención particularmente en una discusión suscitada sobre los extremos del diámetro del semicírculo.

Análisis de los datos

En correspondencia con nuestro marco teórico, para investigar el desarrollo del aprendizaje geométrico producido en el momento en que Elwin y los profesores discuten sobre los pasos de la técnica, realizamos un *análisis multisemiótico*. Este tipo de análisis consiste en identificar y describir una variedad de modos y recursos semióticos utilizados por los individuos para significar, y que confluyen en un mismo evento comunicativo (Manghi, 2011). El vídeo capturado durante la actividad fue transcrito en su totalidad, para ello utilizamos un instrumento similar al mostrado en cuadro 1.

No. Línea	Contenido de la trascripción	Comentarios interpretativos

Cuadro 1. Instrumento para la trascripción de los episodios

Luego de la transcripción del vídeo, identificamos aquellos *episodios destacados* (Radford, 2015) que ponen de manifiesto la objetivación producida en ese momento. Para cada segmento destacado, realizamos un microanálisis de grano fino y cuadro por cuadro para identificar así los modos (el habla, dibujo y gestos) y los medios (la interacción cara a cara y lápiz y papel) que el estudiante y los profesores pusieron en juego durante la objetivación de la técnica referida al semicírculo. Específicamente, centraremos la atención en los medios y modos que utilizaron para dar significado a la construcción del semicírculo a partir de la determinación de sus extremos.

Resultados

El análisis de los datos da cuenta del proceso de objetivación del proceso de construcción de un semicírculo a partir de la comunicación de la técnica empleada por Elwin. Específicamente, se revela el reconocimiento de los extremos del semicírculo como los elementos característicos de la construcción de este objeto geométrico con el medio tecnológico.

La técnica empleada por el joven presenta dos aspectos importantes. Por un lado, este procedimiento estuvo guiado por la herramienta del GeoGebra que permite dibujar el contorno de la figura: *Semicircunferencia*. La demanda de uso de esta herramienta por el GeoGebra responde a una conceptualización de la semicircunferencia desde la teoría geométrica que guio el diseño del software por equipo de desarrolladores del Instituto GeoGebra Internacional, entre los que se encuentran matemáticos de carrera. En este caso, la herramienta seleccionada por Elwin para dibujar el semicírculo le demandó la localización de *extremos de su diámetro*, elementos característicos de la semicircunferencia como un objeto geométrico.

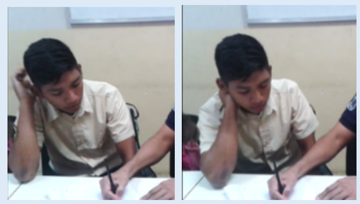
Por otro lado, la técnica de construcción de Elwin fue particularmente producida por el joven en una dinámica de reflexión dialógica entre el modelo geométrico y el dibujo dinámico obtenido. Con esto queremos decir que el procedimiento de construcción comunicado en la reunión fue único, por lo tanto, se espera que otros estudiantes enfrentados a la misma situación de Elwin produzcan técnicas diferentes en algún aspecto, que cambian entre sí de acuerdo al contexto y las capacidades de los estudiantes. La técnica presentada por Elwin a los profesores consta de tres pasos y diversas acciones para cada paso, tal como se describe a continuación (Cuadro 2).

Vídeo No. 1: 00:00 – 12:35 / Líneas: 1-116
Paso 1: Determinar los extremos del semicírculo 1.1 Se trazó una recta $\boldsymbol{a}$ perpendicular al *eje y* que pasa por el punto $\boldsymbol{A}$. 1.2 Se rotó la recta $\boldsymbol{a}$ con respecto al punto $\boldsymbol{A}$, un ángulo de $\mathbf{33°}$ y sentido anti horario, generando así la recta $\boldsymbol{a}'$. 1.3 Se trazó una circunferencia $\boldsymbol{d}$ con centro en el punto $\boldsymbol{A}$ y radio igual al *patrón de medida*. 1.4 Se interceptó la recta $\boldsymbol{a}'$ con la circunferencia $\boldsymbol{d}$, generando así el punto $\boldsymbol{B}$. 1.5 Se trazó una recta $\boldsymbol{b}$ perpendicular al *eje x* que pasara por el punto $\boldsymbol{B}$. 1.6 Se rotó la recta $\boldsymbol{b}$ con respecto al punto $\boldsymbol{B}$, un ángulo de $\mathbf{33°}$ y sentido anti horario, generando así la recta $\boldsymbol{b}'$. 1.7 Se creó un deslizador de ángulo α, con valores mínimo y máximo de $\mathbf{0°}$ y 66°, respectivamente, e incremento de 1°. 1.8 Se rotó la recta $\boldsymbol{b}'$ con respecto al punto $\boldsymbol{B}$, un ángulo α y sentido horario, generando así la recta $\boldsymbol{b}''$. 1.9 Se ha trazado una recta $\boldsymbol{m}$, perpendicular a $\boldsymbol{b}''$ por el punto $\boldsymbol{B}$. 1.10 Se ha construido una circunferencia $\boldsymbol{e}$ con centro en $\boldsymbol{B}$ y radio $\mathbf{0.052} * \boldsymbol{Patrón}$. 1.11 Se ha interceptado la circunferencia $\boldsymbol{e}$ con la recta $\boldsymbol{m}$, generando los puntos $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ que son los extremos del semicírculo.
Paso 2: Aplicar la herramienta de semicircunferencia 2.1 Se ha dibujado la semicircunferencia $\boldsymbol{f}$ de extremos $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$.
Paso 3: Modificar la opacidad de la semicircunferencia 3.1. Se ha modificado la opacidad de la semicircunferencia $\boldsymbol{f}$ para destacar su superficie.

Cuadro 2. Técnica de construcción del semicírculo empleada por Elwin

La comunicación de la técnica por parte de Elwin comienza con la explicación de las acciones 1.1 hasta la 1.4 del paso, como se indica en el cuadro anterior. En su discurso de la acción 1.1, el joven omite un elemento indispensable para referirse a la rotación que fue sometida la recta que dibujo en el papel (recta a), este es, el objeto a rotar. Esta omisión es detectada por P1, el cual comunica a través del habla, articulando su discurso con el uso de gestos (el dedo índice para señalar) que buscan que el joven reconozca los elementos necesarios para aplicar la herramienta (centro de rotación y objeto a rotar). A partir de este momento, se produce una discusión con la que se busca hacer consciente a Elwin de la necesidad de precisar el objeto a rotar y el ángulo de rotación si se quiere referir con propiedad de la rotación en la acción 1.2. Solo así podría avanzar en su explicación hacia el trazado de la circunferencia (acción 1.3) y su intercesión con la recta a', de manera que se obtenga el centro de la semicircunferencia (acción 1.4).

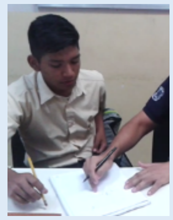
En nuestro análisis, identificamos que la explicación de Elwin sobre las acciones 1.1 a la 1.4 tendría sentido únicamente si el estudiante es capaz de conectar esas acciones que el menciona con los elementos que requiere el software para construir la semicircunferencia, es decir, los extremos del diámetro. El hecho de que el joven no hiciera esta conexión entre las acciones y la herramienta *Semicircunferencia* representa un problema, ya que se observa que el joven no tiene conciencia de la importancia de los extremos de la semicircunferencia para el empleo de su técnica. Este problema es identificado por los profesores, quienes lo ponen de manifiesto por medio de una serie de preguntas dirigidas a Elwin, muchas de ellas apoyadas en dibujos y gestos (Cuadro 3).

Línea	Contenido de la transcripción
1	P1: ¿Cuáles son los extremos? Me imagino que aquí son este punto y este punto [dibuja dos puntos en el papel]. ¿No tienes ninguno de los dos? [dirige su pregunta a E]. 
2	Elwin: [mueve la cabeza en señal de negación] No.
3	P1: Los tienes que determinar [se refiere a los extremos de la semicircunferencia]. Si yo tuviera los extremos, usando la herramienta [del GeoGebra] semicircunferencia, los selecciono y yo la determino, no necesito más nada. Entonces fíjate [se refiere a E] todo lo que estas explicando y todavía no tienes un extremo, solo tienes el centro de la semicircunferencia.
4	P2: Exacto. P1 y yo estamos esperando que nos digas que estas construcciones [se refiere a las descritas anteriormente] ayudaron para determinar estos puntos [se refiere a los extremos]. Pero de momento no es así.

Cuadro 3. Manifestación del problema

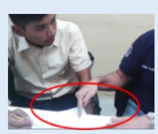
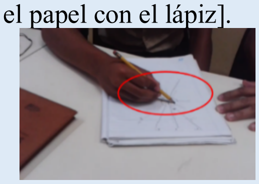
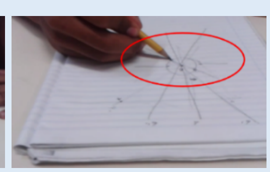
P1 y P2 realizan un esfuerzo por hacer que Elwin reconociera la importancia de haber determinado los extremos de la semicircunferencia para avanzar en la técnica. En este sentido, P2 le recuerda al joven qué elementos requiere el GeoGebra para utilizar la herramienta *Semicircunferencia* (ver línea 5 y 6 del Cuadro 4). Seguidamente, P1 le propone a Elwin una acción a seguir para determinar los extremos de la semicircunferencia. Sin embargo, en ese momento el estudiante muestra una *posición crítica* frente a esta manera de proceder del profesor, evitando así que le fuera impuesta alguna acción que conllevara a la modificación de su técnica. Posteriormente el joven procede a explicar esta parte de su técnica al profesor (Cuadro 4).

Línea	Contenido de la transcripción
5	P2: ¿Porque la herramienta que pide? La herramienta de semicircunferencia pide dos extremos. ¿Si estas entendiendo? [dirige su pregunta a E].
6	A: los extremos de la semicircunferencia .

7	P1: Bueno tú [se refiere a E] dices que es una recta. Pero es ésta [mueve el lápiz de izquierda a derecha en señal de la recta dibujada]. 
8	P2: ¿No fue esa [recta] verdad? [dirige su pregunta a E].
9	A: [Mueve su cabeza en señal de negación] no.
10	P1: ¿No? ¿Cuál fue entonces? [dirige su pregunta a E]

Cuadro 4. Reconocimiento del problema por parte de Elwin

A partir del reconocimiento del problema en su explicación, Elwin retoma nuevamente la explicación de las acciones de su técnica, esta vez destacando los extremos de la semicircunferencia. Durante la discusión, P1 y P2 participaban para hacer énfasis en las acciones y como debían ser explicadas de manera correcta (Cuadro 5).

Línea	Contenido de la transcripción
14	A: Esta recta [señalando la recta con su lápiz], yo decidí que tenía un ángulo de 33° [se refiere al ángulo de rotación] que se movía [indica el movimiento con el lápiz en su mano de derecha a izquierda], entonces, la rote [se refiere a la recta] a 33° en sentido anti horario.  
	…
15	A: Rote b' con…
16	P1: El ángulo alfa del deslizador que estaba entre 0º y 66º… P1: Trazando una recta perpendicular a la [recta] b_2' [señala la recta con el dedo índice]. 
17	E: Corte la recta perpendicular con la circunferencia para que me diera los dos extremos de semicírculo [dibuja los dos puntos sobre el papel con el lápiz].  

Cuadro 5. Acciones realizadas por el estudiante para determinar los extremos de la semicircunferencia

Conclusiones

Este trabajo se ha apoyado en una perspectiva histórico-cultural del aprendizaje matemático para caracterizar el aprendizaje geométrico en relación a la construcción de un semicírculo con GeoGebra. A través de un análisis multimodal buscamos dar cuenta del reconocimiento de los extremos del semicírculo como los elementos característicos de la construcción de este objeto geométrico en la interfaz del GeoGebra. Para ello, utilizamos una conceptualización del aprendizaje geométrico en correspondencia con la Teoría de Objetivación, de manera que se pudieran analizar las discusiones de un estudiante y dos profesores involucrados en la actividad de comunicación de una técnica de construcción. El análisis de los datos permitió detectar segmentos destacados que dieron cuenta de la manera en que los profesores, apoyados en una variedad de medios semióticos de objetivación, ayudaron a que el estudiante fuera consciente de la importancia de determinar los extremos del semicírculo.

Los resultados mostraron, en primer lugar, que Elwin no era capaz de reconocer los elementos necesarios para aplicar una rotación en la vista gráfica del GeoGebra. Esto se ve reflejado en el discurso del joven al omitir tales elementos en su explicación de la técnica. En segundo lugar, se manifiesta la falta de consciencia del estudiante sobre la conexión que existe sobre las primeras acciones con los elementos que requería la herramienta para ser utilizada. Es decir, en un momento de la discusión Elwin no parece dar importancia a la localización de los extremos de la semicircunferencia y menos aún al hecho de que las acciones de su técnica debían responder a lo requerido por la herramienta.

Luego de las discusiones con los profesores, el joven asume una posición crítica sobre cómo debía llevar a cabo su explicación de ahora en adelante, basándose en las acciones que él realizó y no en aquellas que le fueran impuestas por los profesores. En este sentido, vemos necesario que los profesores que guíen los procesos de construcción en la elaboración de simuladores con GeoGebra proporcionen oportunidades para que los alumnos reflexionen con ellos y entre sí sobre la producción de saberes geométricos que den sentido a las técnicas. Pero también se requiere del respeto necesario hacia las ideas de los estudiantes al expresar los pasos y acciones de sus técnicas de construcción.

Referencias bibliográficas

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. y Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.

Bogdan, R. y Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto.

Castillo, L. A. y Prieto, J. L. (2018). El Uso de Comandos y Guiones en la Elaboración de Simuladores con GeoGebra. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 250-262.

Gutiérrez, R., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educacion Matematica*, *29*(2), pp. 37–68.

Manghi, D. M. (2011). La perspectiva multimodal sobre la comunicación: desafíos y aportes para la enseñanza en el aula. *Diálogos educativos*, 22, 3-14.

Laborde, C. (1997). Cabri Geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Eds.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 33-48), Madrid: Una empresa docente.

Lerman, S. (1992) The function of language in radical constructivism: A Vygotskian perspective. En W. GEESLIN y K. GRAHAM (Eds.), *Proceedings of 16th conference of international group for the psychology of mathematics education* 2 (pp. 40–47), New Hampshire: PME.

Llinares, S. y Valls, J. (2011). Aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En J.M. Goñi (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas*, 12(2) (pp. 137-165). Barcelona: Editorial Graó.

Prieto, J. L. y Gutiérrez, R. E. (2016). (comps.). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo: Aprender en Red.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, 103–129.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz. (Eds), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Volume 4* (pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación [On the theory of objectification]. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.

Radford, L. (2015). Methodological aspects of the theory of objectification. *Perspectivas da Educação Matemática* 8(18), 547-567.

Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. En B. D' Amore y L. Radford. (Eds), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales* (pp. 139–165). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la Teoría de la Objetivación. *PNA*, 12(2), 61-80.

Sánchez, I. y Prieto J. L. (2017). Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Números. Revista de Didácticas de las Matemáticas*, 96, 97–101.

Villalobos, E. (2016) La geometría en los balancines del mecanismo de Klann. En J. L. Prieto y R. Gutiérrez (Comps), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 249–257). Venezuela: A. C. Aprender en Red.

ANÁLISIS DEL LENGUAJE SOBRE ESTIMACIÓN DE LA MEDIA EN LIBROS DE TEXTO ESPAÑOLES

ANALYSIS OF THE LANGUAJE ON ESTIMATION IN HIGH SCHOOL IN SPANICH TEXTOBOOKS

Juan Jesús Ortiz, Veronica Albanese, Nordin Mohamed
Universidad de Granada (España)
jortiz@ugr.es; vealbanese@ugr.es; nmohamed@ugr.es

Resumen
Se presenta un análisis del lenguaje matemático sobre el tema de la estimación de la media en tres libros de textos españoles de Bachillerato publicados en 2016. El objetivo es realizar una comparación del lenguaje empleado en los tres libros. Los resultados muestran una prevalencia del lenguaje formal, así como el empleo de algunas expresiones cotidianas que adquieren un diferente significado matemático. Así mismo se denota una gran variedad en el empleo del lenguaje tabular y gráfico. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

Palabras clave: imación, media, libros de texto, lenguaje matemático

Abstract
We present an analysis of the mathematical language on the topic of the estimation of the average in three Spanish high school textbooks published in 2016. The objective is to make a comparison of the language used in the three textbooks. The results show a prevalence of formal language as well as the use of some everyday expressions that acquire a different specific mathematical meaning. A wide variety of use of the tabular and graphic language is detected. Some differences in the books indicate the important role of the teacher to select and use these books in teaching.

Key words: estimation, average, textbooks, mathematical language

Introducción

Un tema relevante que se trata en el segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales en España, en la asignatura de *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II,* es la inferencia estadística debido a su presencia en las pruebas de acceso a la universidad (López-Martín Batanero, Gea y Arteaga, 2016) así como a su relevancia para la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016). Dentro de la inferencia estadística, el primer tema que se aborda es la estimación de la media, tal como lo indican las directrices curriculares españolas que entraron en vigor en 2016 (MECD, 2015). A raíz de la implementación de esta nueva normativa se han editado nuevos libros de texto que son los que se toman en cuenta en este análisis.

Los libros de texto son una herramienta fundamental para el profesor ya que se suele apoyar en ellos para pasar del currículo pretendido en directrices legislativas al currículo implementado en el salón de aula (Stylianides, 2009). Dentro de los libros de texto, el lenguaje es un elemento importante que determina la complejidad conceptual de un tema, entendiendo como lenguaje, las expresiones verbales, como también el lenguaje simbólico, tabular y gráfico.

El objetivo de este trabajo es analizar el lenguaje (en el sentido amplio anteriormente descrito) en el tema de estimación de la media en tres libros de texto españoles de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales publicados según la nueva normativa.

Marco teórico y antecedentes

Aprender matemáticas implica, entre otras cosas, manejar lenguajes múltiples. Para referirse a los objetos matemáticos, tratándose de entidades abstractas, es necesario emplear diversas representaciones o lenguajes, tales como lenguaje verbal, tabular, gráfico y representaciones icónicas (Duval, 2006).

Entre las diferentes perspectivas teóricas para analizar libros de texto hemos optado por utilizar el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En este marco teórico se considera la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas. Así mismo se postula que los objetos matemáticos emergen de las prácticas que un sujeto (persona o institución) realiza al resolver problemas, y que estas prácticas están mediadas por el lenguaje. El significado de un objeto matemático, en nuestro caso la estimación de la media sería "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de problemas en los cuales se necesita estimar la media de una población, con desviación típica conocida". En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático, pues se trata de "cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)" (Godino, Batanero y Font, 2007, p.133).

Existen algunos antecedentes, si bien bastante escasos, sobre el lenguaje de la probabilidad en libros de textos. Por su relevancia para el posterior análisis que presentamos, mencionamos el estudio de Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) que analiza el lenguaje de la probabilidad en seis series de textos de Educación Primaria de 2008 y 2011. Estos autores destacan que dentro las expresiones verbales predominan las coloquiales respecto al lenguaje formal para permitir la introducción de conceptos básicos de la probabilidad a las niñas y niños, pero encuentran amplio uso de otros tipos de lenguajes, como numérico, tabular y gráfico.

Ortiz, Albanese y Serrano (2016) analizaron el lenguaje de la probabilidad en libros de textos de Educación Secundaria, diferenciando entre el lenguaje referido a la estadística y la probabilidad y el lenguaje referido a los juegos de azar. Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a los diferentes significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal) (Batanero, 2005). El lenguaje numérico se desarrolla de acuerdo a la introducción de diferentes sistemas numéricos en la enseñanza y se encuentra también amplio uso de representaciones tabulares y gráficas. Algunas diferencias en los libros indican el importante papel del profesor al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

Respecto a la inferencia, mencionamos el estudio de García y García (2009) quienes analizaron el lenguaje de la inferencia en libros de textos de Bachillerato, centrándose en las expresiones verbales, que clasificaron en varias categorías, según tengan el mismo o distinto significado en los contextos matemático y cotidiano. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de las expresiones y que, en ocasiones, la definición de estas expresiones que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que puede provocar que el estudiante aprenda este concepto matemático con errores. Su estudio se completa en García (2011), con el análisis de las definiciones sobre términos de inferencia, proporcionadas por 26 estudiantes de segundo curso de Bachillerato, donde se observan las dificultades que tienen para dar una definición adecuada en el contexto matemático, finalizando con una propuesta de enseñanza para superarlas.

Metodología

Los tres libros de texto analizados son una muestra intencional, que fueron seleccionados por ser de las editoriales más prestigiosas en España y muy utilizados por el profesorado, que en España son los responsables de elegir los textos que utilizarán sus estudiantes. Los tres textos se indican con unos códigos [T1], [T2] y [T3] incluyendo sus referencias completas en un anexo. Por las características de la muestra no pretendemos extender los resultados, sino proporcionar información específica sobre el tratamiento de la estimación de la media en estos textos.

En cada libro se ha realizado un análisis de contenido del capítulo que trata el tema de estadística inferencial y estimación de la media, estudiando las variables establecidas en Gómez et al. (2013): a) expresiones verbales; b) expresiones numéricas; c) expresiones simbólicas; d) representaciones tabulares y gráficas. Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo. Por ejemplo, para la variable "expresiones verbales" se han diferenciado cuatro tipos: expresiones cotidianas, específicas de estadística, específicas de probabilidad y específicas de los juegos de azar. A través de la comparación del contenido de estos textos, se establece la presencia o ausencia de cada una de las categorías en los libros de la muestra. Por último, se seleccionan ejemplos en los textos que ilustren las diferentes categorías y se elaboran unas tablas cuya lectura facilite la obtención de conclusiones sobre el uso del lenguaje en los libros analizados. A continuación, se presentan los resultados, utilizando ejemplos de los textos cuando sea necesario.

Resultados

Lenguaje verbal

En la Tabla 1 se muestran las frecuencias de las expresiones verbales según las categorías de análisis mencionadas. Hemos encontrado una gran variedad de expresiones cotidianas, en general palabras que se usan para indicar de forma resumida un procedimiento o hacen alusión a conceptos o propiedades de estadística o probabilidad, o bien a ejemplos de material que se utiliza en los juegos de azar, acciones sobre dicho material y los resultados de estas.

Tabla 1. Frecuencia de expresiones distintas en los libros de texto según categoría

		Frecuencia de aparición		
Categoría	**Expresiones diferentes**	**[T1]**	**[T2]**	**[T3]**
Expresiones cotidianas	Afirmar, amplitud, aproximar, audiencia, averiguar, calcular, centro, censos, certeza, confianza, construir, control calidad, dar, datos, decidir, determinar, distribución, elegir, encontrar, encuesta, error, estadística, estimar, estudiar, extraer, frecuencia, gráficas, hallar, internet, interpretar, intervalo, justificar, medidas, muestra, nivel, normal, obtener, observar, población, preguntar, radio, registrar, relacionar, resolver, resultados, seleccionar, suma, valores, variación	27	37	26
Específicas de probabilidad	Aleatorio, azar, cálculo (probabilidades), probabilidad, probabilidades puntuales, Distribución continua, distribución discreta (Mirar Israel), Distribución diferencia medias muestrales, Distribución medias muestrales, Distribución normal, Distribuciones probabilidad, ley normal, variable aleatoria,	11	9	20
Específicas de estadística	Amplitud intervalo, desviación típica, distribuciones estadísticas, Error máximo admisible estimación media, Error máximo admisible estimación diferencia medias, Estadística inductiva, estadística inferencial, Estimación, Estimación media, Estimación diferencia, Estimación puntual, Estimación mediante un intervalo, Estimador, estimar, fiable, función, frecuencia absoluta, Frecuencia relativa, inferencia estadística (Inferir-deducir mirar Israel), Intervalo característico, Intervalo de confianza para la media, intervalo de confianza para la diferencia de medias, longitud intervalo, media, media muestral, media población, muestra, muestra aleatoria, muestra aleatoria dirigida (p.310), nivel de confianza, nivel de significación, parámetro, población, promedios (resultados), tabla, tamaño muestra, tamaño mínimo muestra, teorema central límite (distinto enunciado que T1), tipificación (variable), valor crítico, variable, variable continua, variación media, varianza,	33	36	41
Específicas de juegos de azar	Dado, lanzar (dado)moneda,	3	0	3

Entre las específicas de probabilidad, las más utilizadas están relacionadas con el cálculo de probabilidades, variable aleatoria, las distribuciones normal y binomial y las distribuciones muestrales. La distribución de medias muestrales se trata en los tres textos, pero las distribuciones de la suma y la diferencia de medias muestrales aparecen en unos textos y en otros no. El texto [T3], es el único que destaca la idea de incertidumbre como una característica de los estudios sobre poblaciones. Respecto al estudio de Ortiz et al. (2016), con textos de secundaria, el lenguaje cambia bastante ya que aparecen conceptos más complejos.

Los términos específicos de estadística más utilizados están relacionados con los conceptos de población y muestra, estimación de la media, inferencia estadística, intervalos de confianza y el teorema central del límite, que aparecen en los tres textos. El texto [T3] es el único que menciona ejemplos de muestreos no aleatorios, y el texto [T2] introduce el concepto de “muestra aleatoria dirigida” que no hemos encontrado en libros de estadística de referencia, lo que puede provocar dificultades en el alumnado que utiliza este texto. Destacar que en ningún texto se da una definición explícita del concepto de inferencia que es fundamental, y lo que hacen los textos [T1] y [T3] es utilizar la palabra *inferir* como sinónimo de *deducir* que, según García y García (2009), está más relacionado con el contexto cotidiano, ya que en matemáticas son dos términos opuestos con significados distintos, lo que puede generar en el alumnado un conflicto semiótico, que puede conducirles a interpretaciones inadecuadas. Las expresiones relacionadas con los juegos de azar son muy escasas, al contrario que en Ortiz et al. (2016).

Al comparar el contenido de los textos con las recomendaciones del currículo, se observa que en los textos se tratan más conceptos que los propuestos en los documentos curriculares, como, por ejemplo, las distribuciones de la suma y diferencia de medias muestrales. El [T3] es el único que analiza los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico, y en el texto [T2] no se hace ninguna referencia a expresiones relacionadas con las tecnologías y la simulación que sí se recomienda en dichos documentos.

Lenguaje simbólico

Hemos encontrado una gran variedad de símbolos, que incluyen las expresiones de igualdad, desigualdad, y operaciones aritméticas, lo que coincide con el trabajo de Ortiz et al. (2016) (Tabla 2). También coincidiendo con dicho trabajo se utilizan símbolos literales y notación funcional, para expresar la relación entre la desviación típica de una distribución y el tamaño de la muestra: *"Desv. típica para n dados = Desv. típica para un dado/$\sqrt{n}$"* (T1, p. 285) o para expresar la fórmula de la media aritmética (T1, p.292). La implicación es utilizada para realizar cálculos encadenados: "*Por tanto: 3 = 2,575.8/$\sqrt{n}$ $\longrightarrow$ $\sqrt{n}$= 2,575.8/3= 6,87 $\longrightarrow$ n=47,15. Habrá que tomar una muestra de 48 individuos*" (T1, p. 302) y también la equivalencia que aparece en un solo texto:

$$“\frac{\sqrt{n\,(\overline{X}-\mu)}}{\sigma} \sim N(0,1) \Longleftrightarrow \overline{X} \sim N(\mu\,,\frac{\sigma}{\sqrt{n}})” \text{ (T3, p. 306)}$$

Es frecuente el uso de porcentajes para determinar el intervalo característico correspondiente a una probabilidad o para expresar el nivel de confianza en la estimación de la media poblacional: "*Determina un intervalo de confianza para la antigüedad media de la flota de vehículos con un nivel de confianza del 97 %*" (T2, p. 305).

En general se utiliza un lenguaje formal, donde el símbolo $\emptyset(\mathrm{a})$, representa la función de distribución o probabilidad de que la variable z sea menor o igual que un determinado valor en una distribución N (0,1): "*La función que acumula la probabilidad hasta el valor Z=a, se denomina función de distribución y se escribe* $\emptyset(\mathrm{a}) =$ *P [z≤a]*" (T3, p.281). Son así mismo formales, la expresión utilizada para representar el proceso de tipificación de la variable: "*Si x es N(μ, σ), entonces z = x−μ/σ es N(0,1)*" (T1, p.290), o la expresión que indica la distribución normal de la diferencia de medias muestrales, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, de las muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 que se pueden extraer de dos poblaciones de medias μ_1 y μ_2 y desviaciones típicas σ_1 y σ_2:

$$“\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \equiv N\,(\mu_1-\mu_2\,, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,)” \text{ (T2, p.291)}$$

El símbolo sumatorio aparece en la fórmula del cálculo de la media aritmética o también para justificar el cálculo de la probabilidad de que la suma de los elementos de una muestra esté, a priori, en un cierto intervalo, ya que: "$\sum$ *xi es N(nμ, σ$\sqrt{n}$)*" (T1, p.292). El símbolo aproximado ≃ aparece en los tres textos, por ejemplo, para indicar la aproximación de la distribución binomial por la normal cuando n es suficientemente grande (T2, p.288). Otro símbolo que aparece en un solo texto es ≡ para indicar que una variable aleatoria sigue una distribución normal: "*X≡ N (nμ, σ* $\sqrt{n}$)" (T2, p.288).

También aparece el lenguaje conjuntista, por ejemplo, el símbolo €, en un problema donde conocida la media de la estatura de los soldados de un regimiento, se pregunta por la probabilidad de que la media de una muestra en una guardia esté comprendida en un determinado intervalo: "*¿P $\bar{x}$ € (174,4; 175,6]*?" (T1, p.294). Un único texto utiliza el símbolo de la integral para calcular la probabilidad de cualquier intervalo [a,b] de la recta real, en el caso de una variable aleatoria continua: "*Si f(x) es la función de densidad de una variable continua, entonces P(a ≤ X≤ b) =* $\int_a^b f(x)dx$ "(T3, p.279).

Tabla 2. Tipos de símbolos y operaciones incluidos en los libros de texto

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Igualdad y desigualdad (=,<)	x	x	x
Operaciones aritméticas	x	x	x
Conjuntos (€)	x		
Porcentajes, Aproximación ≃	x	x	x
Es (≡)		x	
Es (~)			x
Implicación	x	x	
Equivalencia			x
Sumatorio (∑)	x	x	
Símbolos literales, notación funcional	x	x	x
Integral			x

En la Tabla 2 se observa que, en general, los tres libros de texto utilizan un lenguaje simbólico muy formalizado, y solo hay pequeñas diferencias: el uso del lenguaje conjuntista que solo aparece en [T1] o los símbolos ≡ y ~ que aparecen en [T2] y [T3] respectivamente o la integral que solo aparece en [T3]. Se observa que hay un aumento considerable de la formalización respecto a Ortiz et al. (2016), lo cual es razonable pues estamos en el curso previo al ingreso en la universidad.

Lenguaje tabular

Con respecto al lenguaje tabular, se han encontrado diferentes tipos de tabla (Figura 1):

Muestras en °C de las temperaturas

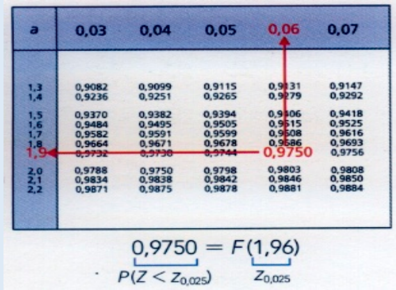
Teruel:
4,7; 16,4; 23,4; 9,1; 4,5; 12,6; 21,9; 6,0; 5,7; 16,3; 23,5; 9,3; 1,9; 16,9; 24,3; 8,3; 4,5; 11,7; 22,2; 6,5; 5,2; 15,3; 23,7; 9,6

Oviedo:
10,1; 17,4; 17,7; 7,6; 9,9; 16,4; 17,7; 7,4; 10,6; 16,5; 18,8; 9,3; 11,1; 17,3; 18,1; 9,8; 9,8; 15,1; 18,8; 8,8; 10,4; 17,6; 19,6; 8,2

a. Listado de datos (T3, p. 326)

	MEDIA	DESVIACIÓN TÍPICA
UN DADO	3,5	1,71
DOS DADOS (promedio)	3,5	1,21
TRES DADOS (promedio)	3,5	0,98
CUATRO DADOS (promedio)	3,5	0,86

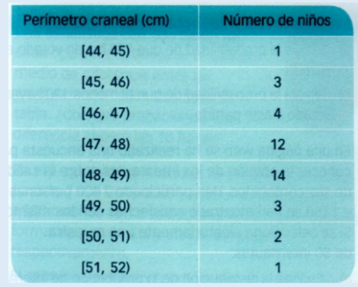
b. Tabla de resultados (T1, p. 285)



a	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
1,3	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147
1,4	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292
1,5	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418
1,6	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525
1,7	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616
1,8	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693
1,9	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756
2,0	0,9788	0,9750	0,9798	0,9803	0,9808
2,1	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850
2,2	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884

$$\underbrace{0{,}9750}_{P(Z<Z_{0,025})} = F(\underbrace{1{,}96}_{Z_{0,025}})$$

c.Tabla distribución normal (T2, p. 294)



Perímetro craneal (cm)	Número de niños
[44, 45)	1
[45, 46)	3
[46, 47)	4
[47, 48)	12
[48, 49)	14
[49, 50)	3
[50, 51)	2
[51, 52)	1

d. Tabla de datos agrupados (T2, 305)

Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos

a) Listado de datos sobre una variable que se supone sigue una distribución normal y se pregunta "cuál de estas dos ciudades tiene un clima más frío", como el ejemplo de la Figura 1.a (T3, p.326) o tablas de frecuencias (T1, p.297); b) tablas de resultados donde por ejemplo se comparan la media y la desviación típica de cuatro distribuciones correspondientes al lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados, Figura 1.b (T1, p. 285); c) tablas de la N (0,1) donde aparecen las probabilidades de que P(z≤k) para valores de k de 0 a 4 que el alumno ha de leer para poder calcular probabilidades (T1, p.286) o para calcular el valor crítico correspondiente a una determinada probabilidad:" *Se halla el valor crítico* $z_{\alpha/2}$ *y se busca su valor en la tabla de la N(0,1).* $F(Z_{0.025}) = 1-0{,}025 = 0{,}975$ $P(Z<Z_{0.025}) = 0{,}975 \longrightarrow Z_{0.025} = 1{,}96$" Figura 1.c (T2, p. 294); d) tablas de datos obtenidos de simulaciones o experimentos que pueden estar o no agrupadas Figura 1.d (T2, p.305); e) tablas de intervalos característicos correspondientes a una determinada probabilidad (T1, p. 300); f) tablas de distribuciones normales con datos de parámetros estadísticos y de probabilidad para hallar el intervalo característico en cada caso, o con datos de distribución y tamaño de la muestra para indicar como se distribuyen las medias muestrales en cada caso (T1, p.304), o tablas de datos sobre el tamaño de dos muestras y sus respectivos parámetros estadísticos, por ejemplo sobre el peso de los hijos de dos grupos de mujeres embarazadas, donde se pide a partir de dichos datos decidir cómo influye que la madre sea fumadora en el peso de su hijo al nacer (T2, p. 298).

En la Tabla 3 se resumen los resultados relativos a esta variable, observando pocas diferencias entre los textos analizados. Hacemos notar la dificultad procedimental que implica para el alumno la lectura y en algunos casos la construcción de todos estos tipos de tablas, puesto que cada una de ellas tiene sus propios convenios, lo que puede convertirse en un conflicto para el alumnado. Se observa que el texto [T1] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje tabular. En este estudio también aparece una mayor diversidad de lenguaje tabular y de mayor complejidad que en Ortiz et al. (2016).

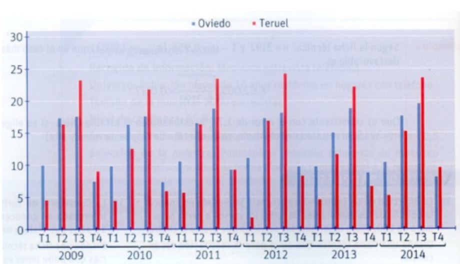
Tabla 3. Lenguaje tabular

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Listado de datos		x	x
Tabla de frecuencias	x	x	x
Tabla de resultados distribución de probabilidad	x	x	
Tabla de frecuencias con datos agrupados	x	x	
Tabla de N (0,1)	x	x	x
Tabla de valores críticos	x	x	x

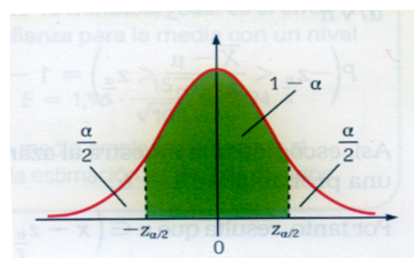
Tabla de intervalos característicos	x		x
Tabla de parámetros de distribuciones y probabilidad	x		
Tabla de parámetros de distribuciones y tamaño muestra	x	x	x
Tabla para organizar los cálculos	x		

Lenguaje gráfico

Con respecto al lenguaje gráfico también se denota el empleo de distintas gráficas: Diagrama de barras, donde se representan el promedio de los resultados al lanzar cuatro dados, (T1, p.285) o diagrama de barras agrupados, Figura 2.a (T3, p. 326), lo que supone un mayor nivel de complejidad, según Batanero, Arteaga y Ruiz (2010), al representar conjuntamente dos distribuciones de datos. Gráfica de distribución normal, donde se representa el nivel de confianza, $1-\alpha$, el valor crítico $z_{\alpha/2}$ y el nivel de significación α, Figura 2.b (T2, p.293); gráfica de comparación de varias distribuciones donde se representan cuatro distribuciones correspondientes al lanzamiento de uno, dos, tres o cuatro dados y se comparan la media y la desviación típica, Figura 2.c (T1, p.291); gráfico donde se muestran los intervalos de confianza correspondientes a 20 muestras de 45 latas de refrescos y donde se observa que el 95% de ellos proporcionan intervalos que contienen el verdadero valor de μ, Figura 2d (T3, p.317). También hay gráficas donde se representa la aproximación de una distribución binomial por una normal y donde se observa que cuanto mayor es n, mejor aproximación se obtiene, Figura 2.d (T2, 275). En algunas gráficas (por ejemplo, Figuras 1a y 1c), la ausencia de títulos y etiquetas en los ejes puede causar conflictos en la identificación de las variables representadas o las escalas de medida.

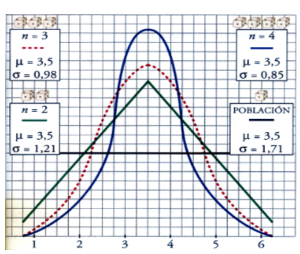


a. Diagrama de barras agrupado (T3, p.326)



b. Gráfica de normal (T2, p.293)

c.



Comparación distribuciones (T1, p.291)

d. Gráfico intervalos confianza (T3, p.317)

Figura 2. Distintos tipos de gráficas encontradas en los textos

En la Tabla 4 observamos algunas diferencias entre los libros. El texto [T3] es el que presenta una mayor variedad de lenguaje gráfico, el libro [T2] presenta los mismos gráficos excepto el diagrama de barras agrupado y ya con menor variedad está el [T3]. En [T1] y [T3] aparecen fotos de matemáticos importantes relacionados con el origen de la distribución normal, la estimación y la inferencia estadística, y en todos ellos, sobre todo en [T2] y [T3], fotos e imágenes relacionadas con el tema o con el contexto de los problemas. En el estudio de Ortiz et al. (2016) también aparecen diagramas de barra y agrupados y representaciones icónicas, como imágenes y dibujos; sin embargo, en nuestro estudio encontramos otro tipo de gráficos más complejos relacionados con la inferencia estadística, diferencias lógicas al tratarse de un nivel educativo superior.

Tabla 4. Lenguaje gráfico e imágenes

Expresiones	[T1]	[T2]	[T3]
Diagrama de barras	x		x
Diagrama de barras agrupado			x
Gráfica normal	x	x	x
Aproximación binomial por normal	x	x	x
Gráfica comparación distribuciones	x		x
Gráfico intervalos característicos	x	x	x
Gráfico intervalos de confianza	x	x	x
Fotos matemáticos	x		x
Fotos e imágenes	x	x	x

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para el alumnado aprender el uso de símbolos, tablas y gráficos.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de estadística que de probabilidad, y muy pocas relativas a los juegos de azar que si aparecen en el estudio de Ortiz et al. (2016). En contra de lo especificado en las orientaciones curriculares hay un texto que no hace referencia al uso de la tecnología o la simulación, y dos que no proponen el análisis de los elementos de una ficha técnica en un estudio estadístico.

Puesto que el estudio es exploratorio, estos resultados deben ser valorados con precaución y sería necesario ampliar el estudio con otros textos. Por otro lado, el profesor debe buscar estrategias que permitan a los estudiantes consolidar un lenguaje matemático más avanzado e interpretar así los significados más complejos de la inferencia estadística. Esto requiere que los profesores cuiden el lenguaje formal que se utiliza en el aula, evitando dar definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar conflictos semióticos en el alumnado.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyectos EDU2013-41141-P, EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática, 8*(3), 247-263.
Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education 19*(2), 118–126.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103–131.

García, I. y García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en Bachillerato. *Educación Matemática, 21*(3), 95-126.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión, 35*, 75-91.

López-Martín, M., Batanero, C., Gea, M. M. y Arteaga, P. (2016). Análisis de los problemas de inferencia propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía. *Vidya, 36*(2), 409-428.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Boletín Oficial del Estado, nº 3.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11*(4), 258-288.

ANEXO: Textos empleados en el análisis.

[T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Anaya.

[T2]. Gámez, J., Marín, S., Martin, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.

[T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II*. 2º Bachillerato. Madrid: SM.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

PROCESOS ARGUMENTATIVOS AL HACER TRANSFORMACIONES DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE UNA RELACIÓN FUNCIONAL DE VARIACIÓN Y CAMBIO EN ESTUDIANTES DE NOVENO GRADO

ARGUMENTATIVE PROCESSES WHEN MAKING TRANSFORMATIONS OF THE SEMIOTIC REPRESENTATIONS OF A FUNCTIONAL RELATION OF VARIATION AND CHANGE IN NINTH-GRADE STUDENTS

Arjuna G. Castellanos-Muñoz, Tulio R. Amaya De Armas, Natalia F. Sgreccia
Institución Educativa la Milagrosa,(Colombia), Universidad Católica de la Santísima Concepción (Chile), Universidad Nacional de Rosario (Argentina)
acastellanosm@hotmail.com, tuama1@hotmail.com, nataliasgreccia@gmail.com

Resumen
Se reportan los hallazgos de una prueba piloto realizada con ocho estudiantes colombianos con edades entre 14 y 16 años. En el trabajo se efectúa un estudio descriptivo de casos aplicando seis cuestionarios que involucran funciones. Se tuvo como objetivo analizar los procesos argumentativos al resolver situaciones problema que comprenden relaciones funcionales de variación y cambio. Los resultados evidencian serias dificultades al argumentar la solución de un problema, quizás por la falta de oportunidades en el trabajo con este tipo de estrategias, predominando procesos algorítmicos, de ensayo error y de visualización inmediata, que conllevan a explicaciones descriptivas sin justificación de sus procedimientos. Esto permite concluir que la forma habitual de trabajo no favorece el surgimiento de argumentos variacionales.

Palabras clave: procesos argumentativos, relaciones funcionales, representaciones de una función

Abstract
The findings of a pilot test conducted with eight Colombian students aged between 14 and 16 years are reported. In the work a descriptive study of cases is done applying six questionnaires that involve functions. The objective was to analyze the argumentative processes when solving problem situations that comprise functional relations of variation and change. The results show serious difficulties in arguing the solution of a problem, perhaps due to the lack of opportunities in the work with this type of strategies, predominating algorithmic processes, essay error and immediate visualization, which lead to descriptive explanations without justification of their procedures. This allows us to conclude that the usual way of working does not favor the emergence of variational arguments.

Key words: argumentative processes, functional relationships, representation of a function

Introducción

En los últimos años la educación matemática ha venido indagando en la vida escolar de los estudiantes y los procesos de enseñanza y de aprendizaje que en ellos se suscitan. En Colombia algunas de estas inquietudes se han plasmado en los estándares de matemática que guían el currículo nacional y explicitan lo que significa ser matemáticamente competente (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas y usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y rechazar conjeturas, son algunas de las actividades que se plantean para alcanzar tales competencias. En el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos es posible estudiar estas actividades desde la educación básica, en el tema de las funciones lineales y las distintas congruencias que se pueden establecer entre sus elementos.

De esta manera, la argumentación en la escuela limitada al área del lenguaje donde se enseña a dar razones de peso para justificar una tesis y saber explicarla para convencer a su interlocutor, ha llamado la atención como un medio para obtener procesos (lingüísticos, lógicos, dialógicos, psicológicos, etc.) que pueden sostener o provocar el razonamiento y el aprendizaje. Ha comenzado a constituirse en una dimensión importante de las actividades que se realizan, está jugando un papel especial en las democracias y está en el centro del razonamiento filosófico y de la investigación científica (Muller y Perret-Clermont, 2009). Como puede apreciarse, la argumentación tiene una estrecha relación con la validación, el razonamiento, la comprensión y es explorada en numerosas áreas del conocimiento.

Es así como la argumentación en matemática de acuerdo a León y Calderón (2003), permite el desarrollo de habilidades comunicativas y proporciona estrategias de validación al conocimiento matemático, lo que admite en el estudiante comprender cuando se es capaz de producir, representar, actuar y dar un punto de vista. Por tanto, cuando se soluciona un problema, se apropia y se explica con claridad, es porque se ha alcanzado una cierta habilidad en los procesos de comprensión del estudiante y se está en capacidad de comunicar y persuadir al interlocutor.

Además, Vrancken, Engler, Giampieri y Müller (2015) plantean que si no se desarrollan procesos argumentativos que abonen a la producción de razones para justificar las afirmaciones generadas durante una discusión, van a existir problemas para identificar las variables intervinientes en una situación, enunciar fenómenos o situaciones que involucren una relación funcional entre variables, interpretar el comportamiento de la gráfica de una función, obtener la gráfica de una función que modele un fenómeno; todos ellos elementos fundamentales que facilitan el acceso al cálculo indispensable en el desarrollo de carreras profesionales que tienen un alto grado de matemática.

Por otro lado, Vasco (2007) considera que de continuar con prácticas donde se presenten los distintos registros semióticos de manera tradicional, acabada, sin ningún tipo de transformación, no se podría incluso llegar a que se produzca algún tipo de aprendizaje.
En este orden de ideas, Dolores (2010) evidencia que, de subsistir dificultades en la comprensión de los conceptos de variación y cambio, hace que persistan concepciones equivocadas y estrategias de solución no adecuadas a problemas variacionales, lo que motiva a profundizar estos conceptos en las funciones lineales que se enseñan en noveno grado, en distintos contextos y situaciones problema.

Así Aldana (2014) manifiesta que los jóvenes, en su gran mayoría, no presentan una competencia comunicativa para argumentar sus posturas académicas y son poco expresivos en la forma en que justifican la resolución de las tareas matemáticas. Se quedan en lo operativo, en las respuestas cerradas, lo que dificulta elaborar estructuras que expliquen y den razones de un proceso matemático, esto es, saber por qué proceden de una forma dada.
Castellanos (2011), quien estudió los procesos de argumentación en la solución de problemas algebraicos de noveno grado, afirma que una de las dificultades por las que los estudiantes no argumentan está relacionada con la comprensión del problema, específicamente con la identificación y uso del lenguaje algebraico implícito en él, con

la identificación de la variable, con el análisis de los datos, con su interpretación, en la que muchas veces no se valen de ningún tipo de ayuda gráfica o algebraica para plantearlo y con la modelación e identificación del proceso utilizado en la solución del mismo, que llevan al educando a utilizar esquemas fácticos y procedimientos aritméticos de ensayo y error. Esto deja muchas dudas sobre los conocimientos aritméticos y algebraicos que han consolidado los estudiantes, cómo se les han estado presentando los contenidos y qué análisis hacen ellos de estos problemas cuando deben solucionarlos.

Barros (2013) manifiesta que estas dificultades de argumentación en las clases se deben muy seguramente a que los estudiantes no están acostumbrados a realizar actividades diferentes a las habituales en el aula, donde generalmente son presentadas de la misma manera sin tareas que lleven a explicar y justificar un proceso.

Por otro lado Crespo, Farfán y Lezama (2010) invitan a comprender que en diferentes escenarios, las argumentaciones utilizadas poseen características distintas de las que posee la argumentación deductiva, lo que permite estudiar la argumentación en diversos pensamientos matemáticos y ramas de la matemática. Lo anterior posibilita enriquecer la orientación a la argumentación, ya que en matemática se ha perfilado principalmente en geometría (Durango, 2017) debido a la relación que presenta con la validación de enunciados expresados en teoremas y corolarios. Una demostración privilegia la deducción y la formalización; sin embargo, en otras ramas de la matemática como la aritmética y el álgebra recién comienza su indagación. En estas la argumentación permite enmarcar la demostración o la actividad demostrativa, como afirma Durango (2017), no tanto a la validación de enunciados, sino a procesos comunicativos que ocurren en el aula, tales como el diálogo y persuasión, que solo se dan mientras se está en la interacción de solucionar problemas y comprender un procedimiento.

Por su parte Vasco (2007) manifiesta que las dificultades introducidas por la sintaxis, la semántica y la pragmática del lenguaje aritmético-algebraico no aparecen solo con la introducción del álgebra elemental en los grados 8° y 9°, sino que están presentes desde el inicio de la aritmética escolar y en los primeros grados de primaria.

Todo ello indica que la argumentación parece ser una dificultad epistemológica en el aprendizaje de la matemática, para lo que se desea estudiar: ¿Cómo son los procesos argumentativos utilizados por los estudiantes de noveno grado al hacer transformaciones semióticas de una relación funcional de variación y cambio?

La pertinencia de este tipo de investigación está relacionada con las dificultades que presentan los estudiantes de noveno grado al hacer transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento con los elementos de una relación funcional en condiciones de variación y cambio y la elaboración de argumentos que utilizan para intentar comunicar su respuesta a la solución dada a una situación problema.

Fundamento teórico

Sobre la argumentación

La argumentación presente en los procesos de comunicación y el dialogo cuando se pide explicar, justificar o defender un punto de vista, busca persuadir a su interlocutor por medio de razonamientos que, enlazados uno tras otro, configuran una estructura llamada proceso argumentativo. Durante este proceso se busca asentar una posición, la cual se defiende y trata de convencer a su orador. Al respecto León y Calderón (2003) afirman: “los procesos argumentativos son el posicionamiento discursivo de los interlocutores que surgen de una interacción argumentativa” (p.25). De este modo, cuando se argumenta, se debe tener una buena claridad y conocimiento del tema; solo así podrán fluir los argumentos con sentido y establecer una comunicación con un discurso coherente que busca adherir a su interlocutor.

Durante este proceso argumentativo, del que hablan León y Calderón (2003), debe estar presente un medio, donde pueda darse el diálogo y confrontación de saberes, y exige del estudiante, tener un reconocimiento del tema de estudio, reconocer una situación argumentativa y la disposición de defenderse en todo momento para persuadir al otro. Brousseau (1995), atendiendo a los relatos y construcción de textos narrativos, ha definido el discurso argumentativo en sinonimia con el proceso argumentativo como:

> El intento que lleva a cabo un argumentador para modificar o reforzar a través del lenguaje las representaciones, creencias y valores de un individuo o de un grupo (el argumentado) esperando que a continuación las reacciones observables en el argumentado se ajusten a estas creencias nuevas o reforzadas.

Según Brousseau (1995), el discurso argumentativo se orienta a intervenir en las opiniones, actitudes o comportamientos del interlocutor haciendo creíble o aceptable un enunciado (conclusión) apoyado en los distintos argumentos (datos o razones). Pizarro (1996) aclara la diferencia entre discurso argumentativo y argumento -con similitud a lo indicado por León y Calderón (2003) en el contexto matemático-.

> El discurso argumentativo es aquel que expone razones a favor o en contra de algo. Un elemento fundamental del discurso argumentativo es el argumento. Un argumento no es más que un razonamiento. Una persona proporciona un razonamiento cuando apoya cierta afirmación (o cierta negación) que hace de determinados datos o puntos de partida

En este sentido, para que el proceso argumentativo pueda darse, de acuerdo a Molina (2015), deben intervenir dos aspectos que condicionan la configuración de quien argumenta: Un hablante y el oyente, y unos acuerdos básicos de intercambio y consenso simbólico. Es decir, en una acción argumentativa el hablante dirige un discurso a un oyente (presente o no) quien lo escucha, analiza y decide sobre las ideas presentadas y luego se intercambian los roles en cualquier momento para seguir en discusión; los acuerdos implícitos en la comunicación son los valores y conceptos de verdad que rodean el diálogo.

Perelman (1997) considera que en este proceso argumentativo también debe estar presente “el enunciado de la tesis de la que uno se propone hacer la defensa y los medios de probarla” (p.193); esto es, un esquema de hipótesis y tesis, donde se busca demostrar con razonamientos válidos la tesis con miras a persuadir y lograr la adhesión del auditorio.

Es así como la argumentación es definida en matemática por Planas y Morera (2012), donde las razones que fundamentan el paso de la premisa a la conclusión se apoyan en elementos del conocimiento matemático, tales como definiciones, lemas, proposiciones y teoremas que permiten avanzar en los razonamientos mediante la regla de implicación. Para argumentar se emplea por tanto un lenguaje de signos y relaciones no solo de naturaleza semántica sino deductiva que, al darles una secuencia ordenada y lógica, permite comprender su estructura.
Para finalizar, una clase en matemática es argumentada cuando al menos en la solución de un problema se expone una explicación y una razón de conocimiento matemático.

Sobre los registros semióticos de representación

En Duval (1999) se define el registro semiótico o registro de representación semiótica como un aparato mental de producción, procesamiento e interpretación de un cierto tipo de representaciones materializadas con sus reglas de producción, interpretación y transformación.

De esta manera para Duval (1999) un sistema semiótico de representación es un registro de representación si permite las siguientes actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

- La presencia de una representación identificable.

- El tratamiento de una representación que es la transformación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

En las representaciones semióticas hay dos tipos de transformaciones: el tratamiento y la conversión. El tratamiento es una transformación estrictamente interna a un registro. Una conversión es una transformación de la representación de un objeto de un registro P a un registro L (Duval, 2004); es decir, es decodificar los elementos de una representación de un registro P y recodificarlos en un registro L.

Al plantear una situación problema, es necesario que en el registro de partida estén presentes los elementos que plantea Duval (2004): a) El objeto representado, b) El contenido de la representación, es decir, lo que una representación particular representa del objeto que nunca es completa en cada representación y c) La forma de la representación, es decir, su modalidad o su registro.

Es así comoVilla-Ochoa (2015) expresa que si se estudia solamente una representación de un objeto, quien aprende termina confundiendo la representación con el objeto representado, cuando en realidad hay que estudiarlas en conjunto porque ninguna de ellas representa en su totalidad al objeto estudiado, dichas representaciones se complementan.

En este sentido, Vasco (2007) manifiesta la posibilidad de trabajar los registros semióticos en el álgebra y establece la diferencia entre un registro semiótico cualquiera y uno que se puede llamar “algebraico” en esa operatividad que presenta dentro del sistema variacional. De allí que los sistemas semióticos se puedan trabajar desde las relaciones funcionales y establecer tratamientos y conversiones en las distintas representaciones de un registro.

Sobre las funciones

Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) plantean el concepto de función como una relación entre variables, que son elementos de dos conjuntos -uno de partida y otro de llegada- en donde cada elemento del conjunto de partida está relacionado con un único elemento del conjunto de llegada. Según estos autores algunas de las definiciones que se encuentran en la literatura para el concepto de función son las siguientes:

- Relación de correspondencia entre variables: a cada valor en la variable de entrada le corresponde uno y solo un valor de la variable de salida.
- Correspondencia entre elementos de dos conjuntos: cada elemento del conjunto de partida debe estar relacionado con un único elemento del conjunto de llegada.
- Dependencia entre dos variables: por cada valor que se le asigne a la variable independiente, existe un único valor de la variable dependiente.
- Conjunto de pares ordenados: con la condición de que la primera componente no se repita en ningún par del conjunto.
- Relación entre dominio e imagen: a cada número perteneciente al dominio le asocia un único resultado numérico de entre las imágenes.
- Criterio de la recta vertical: si se traza una recta vertical por cualquier parte del plano, si esta corta la gráfica, lo hace en una sola parte.

Con estas acepciones de las funciones, Amaya y Medina (2016) manifiestan que se pueden establecer distintos registros de representación, que se pueden relacionar entre sí y establecer congruencias. Entre ellos están: materno o coloquial, analítico algebraico, analítico numérico, gráfico, figural, tabular, cartesiano, sagital y fenomenológico.

Una relación funcional es una función identificada en un contexto sociocultural donde tengan lugar procesos de enseñanza y aprendizaje (Amaya y Mesa, 2017); es decir, se trata de una función identificable en un contexto social de la que se puede hacer uso para diseñar una situación problema. De esta manera una relación funcional genera aprendizajes cuando en ella se hacen transformaciones semióticas tipo conversión o tipo tratamiento.

En las funciones, de acuerdo a Dolores (2010), se define el cambio como la comparación de un estado final con otro inicial: la variación es la cuantificación de ese cambio. Lo anterior permite introducir la noción de función resaltando su aspecto fundamental, el de variación, que prepara al estudiante para el análisis de funciones.

Metodología

En el presente trabajo de corte cualitativo se realiza un estudio de caso múltiple, en el cual se puede analizar profundamente una unidad holística (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2014) con la intención de estudiar el fenómeno que exhiben esos casos (Martínez, 2006); concretamente aquí los estudiantes de noveno grado con los que se estudia la forma de comunicar sus argumentos cuando realizan transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento en las representaciones de una función.

Se trata de un estudio de tipo interpretativo en el que se consideran variables cualitativas como las configuraciones cognitivas que emergen de los estudiantes al intentar comunicar sus respuestas de las distintas transformaciones semióticas que realizan y el nivel de solución a través de la argumentación.

Para la recolección de la información se aplican seis cuestionarios abiertos de manera presencial e individual. Los cuestionarios son comparables entre sí y en ellos se utilizara una situación problema que comprende un registro de partida diferente. En estos cuestionarios se les solicita encontrar los elementos de una función y que realicen transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, luego que relacionen los elementos equivalentes en cada una de las representaciones en las que sea posible identificarlos y que describan los procesos realizados al intentar dar respuestas a las cuestiones por las que se indaga. Además, posteriormente se prevé realizar observaciones participantes y entrevistas abiertas, que permitan dar claridad a algunos aspectos de la solución de problemas.

La observación participante pretende dar cuenta de las acciones realizadas por los estudiantes mientras se recoge la información y las entrevistas abiertas se realizan después de haber aplicado cada cuestionario, de manera individual y los entrevistados son intencionalmente seleccionados según criterio de interés específico para los investigadores.

La muestra definitiva estará constituida por 59 estudiantes con edades entre 14 y 16 años provenientes de una institución pública colombiana de estratos socioeconómico 1 y 2. El estrato socioeconómico se refiere a una clasificación establecida por el gobierno relacionada con la calidad de los servicios públicos del sector de la ciudad donde habitan; en particular, los estratos 1 y 2 son los de mayor grado de vulnerabilidad.

El diseño metodológico para sistematizar esta experiencia está enmarcado en siete fases:
Primera fase. Fundamentación de la investigación, se efectúa la búsqueda de bibliografía especializada para dar soporte teórico-metodológico al estudio. También, se selecciona la situación problema a emplear:

> Juan trabaja de moto-taxista, por cada carrera que haga recibe \$700. La moto no es de su propiedad y le tiene que entregar al dueño una tarifa diaria de \$12.000.

Segunda fase. Delimitación de categorías de análisis de interés y diseño del cuestionario acorde con preguntas específicas en correspondencia con las categorías de análisis, como se aprecia en la Tabla 1.

Tabla 1. *Categorías de análisis y modelo del tipo de preguntas planteadas a los estudiantes en cada situación*

N°	Categoría de análisis	Cuestión planteada
1	Identificación de los elementos de una relación funcional	¿Qué cantidades intervienen en la situación? ¿A cuánto ascienden los costos que debe liquidar diariamente? ¿Cuáles son los costos, los ingresos y la ganancia por realizar x cantidad de carreras?
2	Clasificación de los elementos de una relación funcional	De las cantidades que intervienen en la situación, ¿cuáles varían y cuáles están fijas? ¿En cuánto varía el salario diario por cada carrera que haga?
3	Establecimiento de relaciones de dependencia entre los elementos de una relación funcional	¿Qué relación de dependencia hay entre las cantidades que intervienen en la situación?
4	Utilización del concepto de ecuación para encontrar una incógnita	Si el costo total de producir x carreras es k, ¿qué dinero le queda después de liquidar al dueño de la moto-taxi?
5	Establecimiento de congruencias entre los elementos equivalentes de diferentes representaciones de un objeto	Encuentra los elementos equivalentes en cada una de las representaciones de una misma relación funcional
6	Modelación matemática de una relación funcional	Encuentra un patrón de la situación Haz una gráfica que represente la situación planteada Encuentra una expresión algebraica que modele la situación Realiza una tabla que modele la situación

Se promueve que los estudiantes den sus argumentos y evoquen distintas representaciones semióticas de las funciones involucradas. Se procura que cada cuestionario tenga no más de 10 preguntas.

Tercera fase. Validación del cuestionario, se valida ante expertos del área de didáctica de la matemática, para que revisen su pertinencia y sugieran eventuales mejoras. Asimismo se aplica una prueba piloto por cada cuestionario a ocho estudiantes (con características similares a los de la muestra de participantes) con el propósito de calibrar los instrumentos. La situación problema enunciada anteriormente corresponde al cuestionario de una prueba piloto ya ajustada parcialmente y justamente los hallazgos de ella son los que se comparten en este reporte. Las consignas planteadas acerca de este cuestionario están dadas en la Tabla 1 de acuerdo a sus categorías de análisis.

Fases por venir:

Cuarta fase. Aplicación del cuestionario, los estudiantes resolverán de manera individual cada cuestionario durante una hora de clase (55 minutos) en el aula donde habitualmente trabajan, con el fin de recoger los argumentos que dan sobre las transformaciones semióticas. En el cuestionario se evalúa la capacidad de interpretar una situación particular que contenga inicialmente un registro semiótico y los argumentos empleados para hacer transformaciones en las funciones.

Quinta fase. Observación de clase, las realizará el docente investigador en dos momentos distintos: cuando están resolviendo el cuestionario y cuando se está socializando. Están enfocadas a hacer evidente el grado de participación, aportes, comentarios, intercambios de ideas entre pares, que se sugieren en la realización de cada situación problema, se puede tardar dos horas más de clase, incluida la aplicación del cuestionario.

Sexta fase. Entrevista abierta, a partir de la solución del cuestionario y la observación participante mientras se socializa la situación problema, el investigador interviene con preguntas a los estudiantes de la forma en que conciben los problemas, ayudando a clarificar procesos y métodos de solución.

La entrevista se hace de manera individual teniendo en cuenta criterios de participación, agilidad o dificultad al resolver situaciones de variación y cambio. El tiempo de duración depende de las preguntas y profundidad con que se hagan, además que pueden variar debido a las explicaciones y razones que el estudiante emplee en la solución al problema.

Séptima fase. Análisis del cuestionario, la información será tratada mediante la técnica de análisis de contenido. De acuerdo con lo planteado por Bernárdez (1995), se harán segmentaciones y agrupamientos sobre la base de las categorías definidas (Tabla 1), identificando distintas modalidades. Posteriormente se describirán cualitativamente las características de los procesos argumentativos.

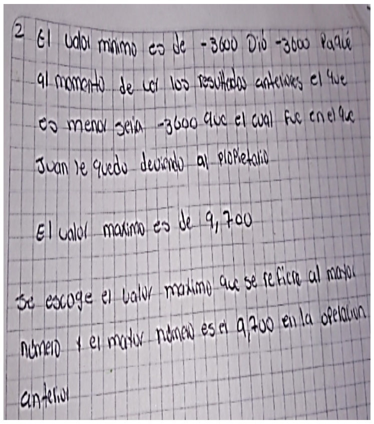
Resultados esperados

La presente investigación en curso hace parte de una tesis doctoral en la Universidad Nacional de Rosario (Argentina) en la que todavía no se tienen resultados completos del proceso investigativo. Sin embargo, se proyecta analizar los procesos argumentativos de los estudiantes de noveno grado, al hacer transformaciones semióticas en relación funcional.

De los estudiantes que hagan transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento al intentar responder los cuestionarios, y que argumenten al comunicar sus respuestas, se espera que expliquen y justifiquen o den razones de su actuar al hacer transformaciones de las representaciones de una función. Básicamente se prevé fundamentar el análisis en la calidad de las transformaciones y en las congruencias que los estudiantes logren hacer en los elementos de las representaciones de las relaciones funcionales puestas en juego.

Sin embargo algunos resultados preliminares, producto de la observación a los estudiantes de la muestra, evidencian serias dificultades en la comprensión y aplicación de los conceptos de variación y cambio, ya que no hacen transformaciones adecuadas de las representaciones semióticas que logran producir y, al describir los procesos realizados, solo dan explicaciones de estos sin razones de su actuar. De este modo es posible reconocer que los estudiantes participantes no han tenido suficientes experiencias de argumentación en las clases de matemática. Asimismo, el tenor de las dificultades permite inferir que es un problema tanto en la matemática como en la escuela. También, de las implementaciones áulicas diarias y las precipitaciones de los docentes: muchas veces son ellos mismos los que argumentan, en lugar de habilitar a los alumnos (Castellanos, 2011). De la prueba piloto se puede inferir que los estudiantes deducen las cantidades que intervienen en el problema y de allí pueden hallar el valor mínimo y el máximo.

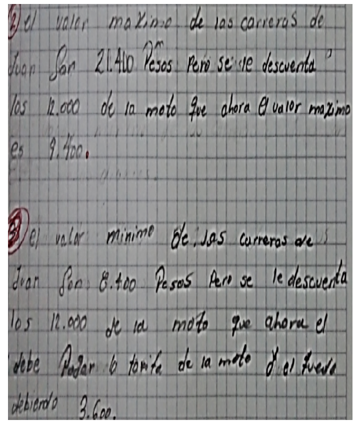
Asimismo, al analizar la estructura de los argumentos se deduce que el estudiante 3 (Fig. 1) da la explicación y razona, pero explica algo incorrecto. El estudiante 4 (Fig. 2) brinda las explicaciones, pero no las razona y el estudiante 6 (Fig. 3) ofrece una explicación y razón de manera adecuada. En particular, los hallazgos encontrados en la prueba piloto indican una falta de oportunidad en el discurso argumentado de los estudiantes para solucionar problemas, ya que predominan procesos algorítmicos, de ensayo error y de visualización, que conllevan a explicaciones descriptivas sin justificación de sus procedimientos (observado prioritariamente en seis de los ocho estudiantes).


2 El valor minimo es de -3600 Dió -3600 porqué al momento de ver los resultados anteriores el que es menor sería -3600 que el cual fue en el que Juan le quedó debiendo al propietario

El valor maximo es de 9,700

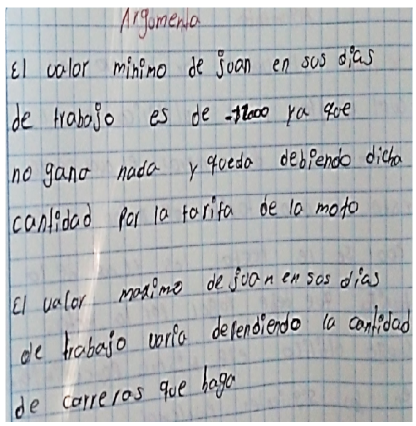
Se escoge el valor maximo que se refiere al mayor número y el mayor número es el 9,700 en la operación anterior

Figura 1. Manuscrito de la solución de estudiante 3


2) el valor maximo de las carreras de Juan son 21.400 pesos pero se le descuenta los 12.000 de la moto que ahora el valor maximo es 9.400.

3) el valor minimo de las carreras de Juan son 8.400 pesos pero se le descuenta los 12.000 de la moto que ahora el debe pagar la tarifa de la moto y el queda debiendo 3.600.

Figura 2. Manuscrito de la solución de estudiante 4


Argumento

El valor minimo de Juan en sus dias de trabajo es de -12000 ya que no gano nada y quedo debiendo dicha cantidad por la tarifa de la moto

El valor maximo de Juan en sus dias de trabajo varia dependiendo la cantidad de carreras que haga

Figura 3. Manuscrito de la solución de estudiante 6

Acorde a lo reportado por Aldana (2014), estos problemas de la argumentación se deben seguramente a que esta no ha sido puesta al servicio del proceso de aprendizaje con los estudiantes, en cuya mejora sugieren que ellos los expongan con más claridad en las clases. La pertinencia de los resultados en este trabajo está delimitada por el interés de la comunidad académica, orientada a conocer cómo el conocimiento matemático se construye, mientras se resuelve una situación que simula una actividad cotidiana del contexto donde se desenvuelven los estudiantes (Dolores, 2010) y, por otra parte, a caracterizar la elaboración de los argumentos que utilizan al intentar comunicar sus respuestas cuando solucionan estas situaciones. Al resolver y analizar cada situación, se pretende que el estudiante consolide y valide su conocimiento, a partir de argumentos razonados que den cuenta de su actuar, en tanto que la construcción de sus argumentos develan el nivel de comprensión de las distintas representaciones semióticas de una función, de ahí la importancia de analizarlos.

A modo de cierre

Las observaciones preliminares hechas a los estudiantes de la muestra permiten concluir que a estos, al parecer, no se los suele convocar a explicar los procesos realizados y justificarlos o a que valoren las actividades propuestas para las que necesitan de un trabajo más colaborativo que genere discusiones de los participantes en un marco donde cada uno pueda defender su idea. Además, se espera que con la implementación de las actividades se lleve a los estudiantes a obtener soluciones que les permitan mostrar un tipo de estrategias y producir diversas representaciones semióticas de una función, así como coordinar sus elementos y comunicar de la mejor manera los resultados de sus soluciones argumentando los procesos realizados, es decir, el ejercicio argumentativo es posible en general en cualquier circunstancia, siempre que se genere el ambiente apropiado (Barros, 2013).

Referencias bibliográficas

Aldana, B. (2014). La argumentación como estrategia de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Científica: Universidad Distrital Francisco José de Caldas*, *3*(20), 37-45.

Amaya, T. & Mesa, F. (2017). Conflictos epistémicos al hacer transformaciones con las representaciones de una función. En V. Meriño, (Ed.), *Gestión del conocimiento* (pp.267-293). Santa Ana de Caro: Unión global.

Amaya, T., Pino-Fan, L. & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Barros, J. (2013). La interacción en el aula y el discurso argumentativo en un proceso de aprendizaje de las ciencias. *XII Jornadas del maestro investigador*. Medellín: Universidad Pontificia Bolivariana.

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Brousseau, G. (1995). Elementos para una didáctica de la argumentación en la escuela primaria. *Revista comunicación, lenguaje y educación, 26*, 41-50.

Castellanos, A. (2011). *Procesos de argumentación en la resolución de problemas con ecuaciones de algebra de noveno de la Institución Educativa la Milagrosa*. Tesis de Maestría no publicada. Bogotá: Universidad Santo Tomás.

Crespo, C., Farfán, R. & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(3), 283-306.

Dolores, C. (2010). El lenguaje variacional en el discurso de la información. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 241-254.

Durango, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso*. Tesis de Doctorado no publicada. Medellín: Universidad de Antioquia.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Vega, M. Trad). Cali: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1995).

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. (Vega, M. Trad). Cali: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1999).

Hernández-Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

León, O. & Calderón, D. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas: ¿una relación necesaria?, hacia una comprensión del desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas*. Cali: Universidad del Valle.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, *20*, 165-193.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Molina, N. (2015). Sujeto argumentativo, desprecio y reconocimiento: el caso del profesor universitario afrodescendiente. En D. Calderón (Coord.). *Lenguaje, cultura e investigación: problemas emergentes en educación* (pp.11-44). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Muller, N. & Perret-Clermont, A. (2009). *Argumentation and Education. Theoretical Foundations and Practices*. Berlín: Springer.

Perelman, C. (1997). *El imperio retorico: retórica y argumentación.* (Gómez, A.L. Trad.). Bogotá: Norma. (Trabajo original publicado en 1977).

Pizarro, F. (1996). *Aprender a razonar.* México: Alhambra.

Planas, N. & Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (Coord.). *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (pp.275-300). Mérida: Universidad de los Andes.

Vasco, C. (2007). Análisis semiótico del álgebra elemental. En A. Gómez. *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas* (pp.107-136). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José De Caldas.

Villa-Ochoa, J.A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, *8*(16), 133-148.

Vrancken, S., Engler, A., Giampieri, M. & Müller, D. (2015). Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación en una secuencia de actividades. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *15*(1), 1-20.

COMPARANDO PROBABILIDADES: O PAPEL DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

COMPARING PROBABILITIES: THE ROLE OF PROPORTIONAL REASONING

Rita Batista, André Pereira da Costa, Maria das Dores de Morais
Universidade Federal de Pernambuco (Brasil)
rica.basil@gmail.com, andre.pcosta@outlook.com, dora.pe@gmail.com

Resumo
O presente estudo foi realizado com estudantes do último ano de escolaridade da Educação Básica do Brasil com o objetivo de analisar compreensões acerca da comparação de probabilidades, considerando a influência do raciocínio proporcional, em duas situações inspiradas no PISA (2004). Os resultados apontaram que os estudantes quase nunca fazem uso da proporcionalidade para estabelecer comparações em situações probabilísticas. As justificativas se apoiaram em comparações de "mais e menos", e em uso de linguagem e expressões que estão associadas à probabilidade intuitiva.

Palavras-chave: probabilidade, comparação de probabilidade, raciocínio proporcional

Abstract
The present study was carried out with Basic Education final-year students, with the aim to analyze understandings about the comparison of probabilities, considering the influence of proportional reasoning, in two situations inspired by PISA (2004). The results showed that students rarely use proportionality to establish comparisons in probabilistic situations. The justifications were based on "more and less" comparisons, and on the use of language and expressions that are associated with intuitive probability.

Key words: probability, probability comparison, proportional reasoning

Introdução

Optou-se neste estudo por discutir acerca da importância do raciocínio proporcional para a compreensão tanto da quantificação quanto da comparação de probabilidades, por se compreender que este é um tema de permanente discussão e que necessita de olhares multifacetados. A proporcionalidade é considerada pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2017) como uma das ideias fundamentais que possibilitam articulação entre as distintas áreas do conhecimento atreladas à Matemática: números, medidas e grandezas, geometria, álgebra, estatística e probabilidade. Neste documento, a proporcionalidade é vista como elemento importante e necessário para o desenvolvimento do pensamento matemático e, por esta razão, deve se converter, na escola, em objeto do conhecimento.

Assim,

> deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (Brasil, 2017, p. 264).

Costa e Allevato (2015) julgam que apesar dos estudantes da educação básica terem contato quase que diariamente com situações proporcionais, eles tendem a apresentar dificuldades em compreender o conceito. Desse modo, ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem se configurado em um grande desafio para a escola, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas do Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Apesar da observância, quase unânime, da importância do desenvolvimento do raciocínio proporcional como suporte à compreensão de objetos matemáticos em muitas unidades temáticas da área, bem como em outros componentes curriculares, como biologia, física e química, parece haver um entrave no seio escolar que não possibilita o avanço na consolidação integral dos objetivos de aprendizagem concernentes à proporcionalidade.

Godino e Batanero (2002) consideram que

> a aquisição de habilidades de raciocínio proporcional é insatisfatória na população geral. Essas habilidades se desenvolvem mais lentamente do que se supunha anteriormente; existe até evidência de que uma grande parte das pessoas nunca as adquire. Estas questões não são bem ensinadas nas escolas, que muitas vezes apenas estimulam a manipulação de símbolos e fórmulas sem sentido. (Godino, Batanero, 2002, p. 431)

Para estes pesquisadores, o esquema proporcional considerado por Piaget como um elemento básico do raciocínio formal, é fundamental para a compreensão de conceitos como probabilidade e correlação. Entretanto, afirmam os estudiosos, isso não significa que as crianças não possuam uma percepção progressiva das proporções e, nesta concepção, o desenvolvimento dessa ideia, não segue os estágios da teoria de Piaget, que estudaram como as crianças a utilizam quando têm que estimar a probabilidade de um evento.

Dessa forma, entende-se que o desenvolvimento do raciocínio proporcional não deve repousar unicamente na fase formal do desenvolvimento, e sim, ir progressivamente sendo construído para consolidação posterior desta ideia fundamental, como defende a BNCC (Brasil, 2017). Nesta ótica, a compreensão da probabilidade também se dá de forma progressiva e poderá ser redimensionada por meio do entendimento e uso do raciocínio proporcional.

Marco teórico

Muito tem se falado da importância da probabilidade na vida dos cidadãos (Batanero e Diaz, 2007; Gal, 2004), e, consequentemente, da relevância de seu ensino nas escolas. É um movimento mundial. Os currículos têm ampliado a inclusão de elementos que dão sustentação ao pensamento probabilístico desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como a aleatoriedade, a incerteza, o acaso, as chances, o espaço amostral.

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) propõe o desenvolvimento do raciocínio probabilístico a partir do 1º ano envolvendo a noção de aleatoriedade, evoluindo para o espaço amostral e o cálculo de probabilidades, no 5º ano. Nos anos Finais (6º aos 9º anos), amplia-se para o trabalho com probabilidade frequentista, soma de probabilidades e análise de eventos dependentes e independentes.

Bryant e Nunes (2012) consideram a probabilidade como um conceito muito complexo que necessita o desenvolvimento de quatro demandas cognitivas necessárias à sua compreensão. São elas:

1- Compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade;
2- Formar e categorizar espaços amostrais;
3- Comparar e quantificar probabilidades;
4- Entender correlações (relações entre eventos).

As exigências intelectuais de cada uma dessas demandas são diferentes umas das outras, no entanto, elas se inter-relacionadas. Na ótica dos autores para a compreensão de situações probabilística é importante coordenar a compreensão da aleatoriedade, levantar os possíveis eventos ou sequências de eventos (espaço amostral) e realizar a comparação ou a quantificação de probabilidades, bem como relacionar os eventos entre si.

Bryant e Nunes (2012) defendem que as três primeiras exigências são etapas básicas que se deve levar em conta para a resolução de problemas de probabilidade. No entanto, a quarta demanda (entender correlações) nem sempre é necessária para todas as situações. Na primeira etapa, necessita-se reconhecer que o problema é sobre resultados que são incertos, aleatórios; na segunda, é preciso trabalhar com os possíveis eventos que compõem o espaço amostral; e, na terceira etapa, é necessário calcular e comparar probabilidades e tais probabilidades são quantidades baseadas em proporções que podem ser expressas em decimais, porcentagens ou razões. A quarta demanda, nem sempre é necessária e exige o olhar às três etapas anteriores.

Como nosso foco, neste texto, incide sobre a comparação de probabilidades, não discutiremos as demandas relacionadas à aleatoriedade nem ao espaço amostral. No que diz respeito à quantificação e comparação de probabilidades, Bryant e Nunes (2012) alertam que a maior parte dos problemas de probabilidade repousa sobre o cálculo de uma ou mais proporção. Entretanto, o raciocínio proporcional, é difícil para as pessoas e, em probabilidade, esta dificuldade parece mais acentuada quando há a necessidade de comparar duas ou mais probabilidades diferentes que possuem espaços amostrais distintos. Contudo, há algumas situações que podem ser resolvidas com base nas relações simples como 'mais' e 'menos' a partir da análise das possibilidades de formação dos eventos, quando se compara probabilidades envolvendo um mesmo espaço amostral.

A probabilidade é uma quantidade proporcional, uma quantidade intensiva. No contexto da matemática escolar as quantidades extensivas como massa, altura, distância ou número de objetos de um conjunto são as mais utilizadas pelas crianças e essas quantidades obedecem às leis aditivas simples, como, por exemplo, se for adicionado um quilograma de peras a uma sacola de compras, aumenta a massa de seu conteúdo em um quilograma. No caso das quantidades intensivas, a relação estabelecida é outra. Por exemplo, se a temperatura da água é de 25ºC e for adicionado mais um litro de água com a mesma temperatura, a quantidade de água aumentará (quantidade extensiva), mas a temperatura (quantidade intensiva) permanecerá a mesma (Bryant e Nunes, 2012).

Gal (2004), considera que, para a apropriação da probabilidade, são indispensáveis alguns conhecimentos, denominados por ele como *elementos disposicionais* e *elementos cognitivos*. Tais elementos precisam ser desenvolvidos e são necessários aos cidadãos para que sejam considerados letrados probabililisticamente no mundo real. Essas ideias envolvem o pensamento e o comportamento das pessoas em situações probabilísticas que são orientados por várias bases de conhecimentos e disposições. O *letramento probabilístico* se relaciona à capacidade das pessoas para uso de conhecimentos inerentes à probabilidade, considerando um amplo conjunto de conhecimentos factuais e habilidades formais, bem como crenças, atitudes e hábitos da mente e uma perspectiva crítica.

Assim os *elementos disposicionais* abraçam crenças, atitudes e hábitos de mente, enquanto os *elementos cognitivos* dizem respeito a cinco bases de conhecimentos, quais sejam, conhecimento dos grandes tópicos/temas, cálculos probabilísticos, linguagem; contextos e perguntas (questões) críticas.
Os elementos disposicionais desempenham um importante papel na forma como as pessoas pensam sobre a informação probabilística ou agem em situações que envolvem a oportunidade e a incerteza, em contextos do mundo real e em sala de aula.

Para Gal (2004) os elementos cognitivos interagem entre si de forma complexa durante o processo de aprendizagem. Assim,

1- Grandes tópicos/temas da probabilidade – envolvem bases fundamentais do conhecimento probabilístico, como: aleatoriedade, independência de eventos, variação, previsibilidade, as noções de segurança e estimativa (margem de erro e significância)
2- Calcular/comunicar probabilidades – para gerar estimativas sobre probabilidade de eventos e poder comunicar tais dados, é imprescindível a familiarização com maneiras distintas de encontrar/calcular probabilidades, por isso é importante saber que existem muitas formas de estimar probabilidades.
3- Linguagem – é importante compreender a “linguagem do acaso”, ou seja, as variadas formas de representar e comunicar possibilidades e probabilidades, por isso é necessário a familiarização com termos da probabilidade: variabilidade, aleatoriedade, independência, (im)previsibilidade, (in)segurança, acaso, risco – que nem sempre possuem definições claras, bem como expressões que podem traduzir situações probabilísticas como: “muito provável”, “certamente”, “impossível”, “com certeza”, “boa chance
4- Contexto – o conhecimento de contexto está associado ao *conhecimento de mundo*, que envolve os grandes tópicos, o cálculo de probabilidades e também a linguagem. Contextos socialmente relevantes são apontados para ilustrar a importância da aleatoriedade, variação, probabilidade e risco: o mundo físico e natural, processos tecnológicos, comportamento humano, medicina e saúde pública, justiça e crime, finanças e negócios, pesquisas e estatística, previsão pública e política, jogos de azar e apostas e decisões pessoais, dentre outros.
5- Questões críticas – as pessoas devem desenvolver a capacidade consciente de questionar dados veiculados nos mais variados meios com o objetivo de avaliar a finalidade do escritor, a objetividade e o raciocínio utilizados.

Nesta perspectiva, Gal (2004, p.50) defende que “as pessoas precisam de alfabetização probabilística para lidar com a ampla gama de situações do mundo real que envolvem interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, bem como a tomada de decisão”.

O segundo elemento cognitivo defendido por Gal (2004) que se relaciona a cálculos probabilísticos faz referência à importância de saber que existem muitas formas de calcular e analisar probabilidades. Por sua vez, Batanero e Diaz (2007) sintetizam os diferentes significados da probabilidade dos quais, elencaremos apenas os quatro primeiros, em função da proximidade com nosso objeto de estudo e com o público envolvido.

Para estes autores há: i) o *significado intuitivo* que se relaciona a ideias que aparecem desde cedo nas crianças e estão ligadas ao uso de expressões qualitativas como provável, possível, impossível e são imprecisas e usadas para expressar graus de crença sobre eventos aleatórios; ii) *significado clássico* que diz respeito à razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis, corresponde ao tipo mais utilizado na escola; iii) *significado frequentista* que parte do processo de experimentação (probabilidade *a posteriori*) e resulta da expressão aproximada da frequência relativa aos eventos resultantes de sequências de ensaios aleatórios realizados em condições idênticas e iv) *significado subjetivo* que considera graus de crença com base em julgamento pessoal relacionado a um sistema de conhecimentos que pode variar de pessoa para pessoa.

Percurso metodológico

Para o estudo foi realizado um teste individual escrito com estudantes do 3º ano da última etapa de escolaridade da educação básica brasileira de uma escola pública no primeiro semestre de 2018. Os participantes da pesquisa (n=18) responderam a dois itens inspirados numa questão do PISA (Programme for International Student Assessment, 2004) citado nos estudos de Bryant e Nunes (2012). Os itens exigiram uma justificativa das respostas.

A questão do PISA versava sobre comparação de probabilidades envolvendo espaços amostrais distintos: *A caixa A contém 3 bolas das quais 1 é branca e 2 são pretas. Na caixa B há 7 bolas, das quais 2 são brancas e 5 pretas. Você tem que retirar uma bola de uma das caixas, com os olhos cobertos. De qual caixa você deve retirar se você quer uma bola branca?"*.

Os resultados do PISA apontaram que 73% dos estudantes europeus de 15 anos não conseguiram fazer as escolhas corretas, embora eles pudessem estabelecer uma comparação sem determinar o cálculo de probabilidades nos dois casos (caixa A e caixa B) por meio de raciocínio de relação: há exatamente o dobro de bolas pretas em relação às bolas brancas na caixa A e na caixa B há mais que o dobro de bolas pretas, então proporcionalmente haveria mais chances de pegar bola branca na primeira caixa (A).

Os itens inspirados no PISA e utilizados no teste estão especificados no Quadro 1 a seguir. Em cada situação foi solicitado que os estudantes efetuassem os registros e justificassem suas respostas.

***Quadro 1*:** Especificações das situações probabilísticas utilizadas no estudo

SITUAÇÃO A	SITUAÇÃO B
Há duas caixas: a Caixa 1 contém 3 bolas brancas e 6 bolas pretas e a Caixa 2 possui 5 bolas brancas e 11 bolas pretas. Felipe pretende tirar uma bola branca de uma das caixas. Ele vai retirar a bola com os olhos fechados, de forma aleatória. Qual caixa ele deverá escolher para ter maior chance? Justifique sua resposta	Há duas caixas: a Caixa 1 contém 1 bola branca e 2 bolas pretas e a Caixa 2 possui 2 bolas brancas e 4 bolas pretas. Felipe pretende tirar uma bola branca de uma das caixas. Ele vai retirar a bola com os olhos fechados, de forma aleatória. Qual caixa ele deverá escolher para ter maior chance? Justifique sua resposta

***Fonte*:** Acervo da pesquisa

A situação A envolve a comparação de probabilidades em que a maior probabilidade de pegar a bola branca está em uma das caixas, especificamente na Caixa 1, enquanto na situação B as probabilidades são iguais.

Após a aplicação do teste, os dados foram catalogados e analisados à luz dos aportes teóricos citados com foco no olhar proporcional que foi nosso objetivo de estudo.

Resultados

Se na análise do estudo fossem considerados apenas os acertos e erros, sem considerar a justificativa dada pelos participantes, os resultados seriam animadores, ao menos para a Situação A em que aproximadamente 78% dos alunos avaliados acertaram e informaram que a melhor escolha seria a Caixa 1.

No entanto, na apresentação das justificativas, apenas dois alunos mostraram algum entendimento da relação proporcional presente na situação. A tabela 1 a seguir apresenta os resultados referentes à situação A.

Tabela 1: Resultados das respostas dos alunos referentes à Situação A

SITUAÇÃO A	Resposta correta Caixa 1	Resposta errada Caixa 2	Justificativa correta
Valores absolutos	14	4	2
Percentuais	78%	22%	11%

***Fonte*:** Acervo da pesquisa

Observou-se que 78% acertaram a resposta (Caixa 1), mas apenas dois estudantes apresentaram justificativas consistentes que apontavam algum entendimento da relação proporcional presente na situação: *"porque a probabilidade de Felipe tirar uma bola branca é maior que na caixa 2"* informou o aluno que efetuou os cálculos para apresentar a justificativa e *"porque uma probabilidade de 3\6 é mais vantajosa que uma probabilidade 5\11"*, informou outro aluno que estabeleceu a relação entre bolas brancas e bolas pretas.
Os demais alunos apresentaram argumentos sem coerência do ponto de vista probabilístico, optando por justificativas comparativas envolvendo relações comparativas das quantidades e justificando em termos de mais e menos, como por exemplo: *"porque tem menos bolas que a 2ª caixa. Acho que seria mais fácil" e "porque na caixa 1 tem menos bolas e só uma branca. Ele tem que tentar a sorte e tem mais possibilidade, eu acho".*

A seguir apresentaremos os resultados referentes à situação B que está sintetizado na Tabela 2.

***Tabela 2*:** Síntese das respostas dos alunos referentes à Situação B

SITUAÇÃO B	Resposta errada Caixa 1	Resposta errada Caixa 2	Resposta correta Ambas	Justificativa correta
Valores absolutos	6	9	3	3
Percentuais	33%	50%	17%	17%

Fonte: Acervo da pesquisa

Na situação B, apenas três estudantes julgaram que qualquer caixa haveria as mesmas chances, justificando: *"independente da caixa que ele escolher ele terá a mesma porcentagem de chance de tirar a bola preta. Então* *escolher a caixa não faz diferença"*; "*porque as duas caixas têm a mesma probabilidade*" e "*porque tanto faz a caixa, as chances são as mesmas para tirar a bola branca"*.

Cinquenta por cento dos alunos optaram pela Caixa 2, dizendo: *"a caixa 2 teria uma bolinha a mais para ele pegar a bolinha branca"; "tem duas chances de sair branca"; "porque possui 2 brancas e 4 pretas. 2 e 4 são primos e formam 6, primo de ambos"*.

Dos 33% que optaram pela Caixa 1, informaram: *"porque tem menos bolas aí a probabilidade é maior dele acertar uma bola branca"*; "pode apresentar apenas uma bola branca, mas tem menos pretas" (E11); "quanto menos bolas, menos chance de errar" (E15).

As justificativas equivocadas que dão suporte às respostas dos estudantes tanto da situação A, quanto da situação B, apontam para uma incompreensão acerca das relações proporcionais existentes na probabilidade. Como citado, Bryant e Nunes (2012) informam que o caráter proporcional da probabilidade é uma fonte de verdadeira dificuldade para crianças, jovens e até estudantes mais velhos. Não foi diferente neste estudo.

Os participantes desta pesquisa eram adolescentes do último ano de escolaridade da educação básica com idade entre 15 e 17 anos, logo, se encontravam cronologicamente na fase formal de Piaget. No entanto, os argumentos apresentados por eles se pautaram quase sempre na relação entre a caixa que tem mais (brancas ou pretas) e a caixa que tem menos que é um pensamento presente em concepções de crianças, que se utilizam da intuição para estabelecer relações comparativas de probabilidades. Por falta de um maior arcabouço de conhecimentos, as crianças recorrem aos julgamentos que possuem em sua vivência, independente de instrução - são as intuições primárias (Fischbein, 1987).

Observou-se ainda justificativas considerando sorte ou azar, que é uma característica de linguagem presente na probabilidade intuitiva (Batanero e Diaz, 2007). O uso da linguagem proposto por Gal (2004) diz respeito a um dos cinco aspectos cognitivos concernentes ao letramento probabilístico. No entanto, apenas a linguagem não torna uma pessoa letrada probabilisticamente é necessário o desenvolvimento dos demais *aspectos cognitivos:* grandes tópicos, cálculo e comunicação de probabilidades, contexto e questões críticas, além dos *aspectos disposicionais* (Gal, 2004) que não foram explorados neste texto.

Nesta ótica, considerando este estudo, não podemos afirmar que os participantes desenvolveram habilidades referentes ao letramento probabilístico, ao longo de sua jornada na escola, para resolução de situações diversas envolvendo comparação de probabilidades em conformidade com os pensamentos de Gal (2004).

Conclusões

O presente estudo confirmou as dificuldades dos estudantes em relação ao raciocínio proporcional em situações probabilísticas (Bryant e Nunes, 2012), apontando as fragilidades dos participantes em refletirem sobre situações comparativas aparentemente simples, mas que envolvem o raciocínio proporcional. Apesar desta pesquisa representar uma pequena amostra, a impressão que se tem é que parece que estamos estagnados no que diz respeito especificamente à comparação de probabilidades se formos comparar com os resultados do PISA de 14 anos atrás. A ideia que se tem é que não avançamos, neste sentido. Ao menos, este grupo não avançou.

Considerando o percurso escolar de, ao menos 11 anos, dos estudantes pesquisados esperava-se, que os adolescentes tivessem compreensões mais elaboradas e apresentassem argumentos mais consistentes que as crianças geralmente o fazem e tivessem avançado em suas compreensões proporcionais e, consequentemente, probabilísticas. Mas isto não foi observado neste grupo.

Por isso, julgamos importante estudos interventivos a fim de apontar caminhos para minimizar o atual quadro: o que fazer no chão da escola para que os estudantes avancem em suas compreensões no tocante à probabilidade e se tornem letrados probabilisticamente? A compreensão da proporcionalidade é um caminho, mas não o único. E como fazer?

Espera-se que, com as alterações curriculares, a partir da homologação da BNCC no Brasil, os avanços sejam mais significativos, uma vez que o documento exige que os objetos do conhecimento relativos à probabilidade sejam vivenciados desde o primeiro ano de escolaridade da criança no Ensino Fundamental.

Referências

Batanero, C. Diaz, C. (2007). Meaning and understanding of mathematics. The case probability. In JP.Van Bendengen y K. François (Eds); Philosophical Dimmensions in Matehematics Education. New York: *Spinger.* 107-128.

Brasil (2017). Ministério da educação básica. Base nacional curricular comum. Brasília, DF: *MEC*. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br/download-da-bncc/.

Bryant, P. e Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review*. University of Oxford: Nuffield Foundation. ISBN: 978-0-904956-86-3

Costa, M S e Allevato, N. S. G. (2015). Proporcionalidade: eixo de conexão entre conteúdos matemáticos. *Em Teia*, 6 (1). Recuperado de https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2263

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*: *an educational approach.* Netherlands: D. Reidel Public, Mathematics Educational Library.

Gal, I. (2004). Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones (ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning, 43-7. *Kluwer Academic Publishers.*

Godino, J. Y Batanero, C. (2002). *Proporcionaliad y su didáctica para maestros*. Projecto Edumat-maestros. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/3_Proporcionalidad.pdf

NIVELES DE COMPRENSIÓN DE UNA TABLA ESTADÍSTICA Y UN GRÁFICO DE COLUMNAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

COMPREHENSION LEVELS OF A STATISTICAL TABLE AND A GRAPH OF COLUMNS IN UNIVERSITY STUDENTS

Elizabeth-H. Arredondo, Nicolás A. Fernández Coronado, Isaac A. Imilpán Rivera, Jaime I. García-García
Universidad de Los Lagos (Chile)
elizabeth.hernandez@ulagos.cl, nicolasalonso.fernandez@alumnos.ulagos.cl, isaacalejandro.imilpan@alumnos.ulagos.cl, jaime.garcia@ulagos.cl

Resumen
Esta investigación analiza los niveles de comprensión que muestran estudiantes universitarios a través de sus respuestas a la tarea de leer e interpretar información estadística representada en una tabla y un gráfico de columnas; aunado con identificar cuál de los dos tipos de representación promueve niveles superiores. Las respuestas se analizaron bajo una jerarquía propuesta mediante la condensación de los niveles de Curcio y colaboradores, y la jerarquía de Aoyama, que las organiza en cinco niveles: perspectiva personal (nivel 0), lectura literal (nivel 1), comparativo (nivel 2), predictivo (nivel 3) e integrativo (nivel 4). En general, los estudiantes presentan el nivel 2, al realizar una comparación de los datos, y el nivel 4, al establecer una conexión de la información con el contexto. Además, la lectura e interpretación de la tabla estadística propició a que más jóvenes alcanzaran los niveles superiores 3 y 4, al realizar predicciones e integrar el contexto.

Palabras clave: comprensión gráfica, valoración crítica, cultura estadística

Abstract
This research analyzes the comprehension levels that university students show through their answers to the task of reading and interpreting statistical information represented in a table and a graph of columns; coupled with identifying which of the two types of representation promotes higher levels. The answers were analyzed under a hierarchy proposed by the condensation of the levels of Curcio and collaborators and the Aoyama's hierarchy, that organizes them into five levels: personal perspective (level 0), literal reading (level 1), comparative (level 2), predictive (level 3) and integrative (level 4). In general, the students present level 2, when making a comparison of the data, and level 4, by establishing a connection of the information with the context. Additionally, the reading and interpretation of the statistical table led to more young people reaching the upper levels 3 and 4, by making predictions and integrating the context.

Key words: graphic comprehension, critical assessment, statistical literacy

Planteamiento del problema

La cultura estadística es considerada como parte de las competencias que hoy debe poseer un ciudadano del mundo (NCTM, 2000); misma que se debe impulsar en la escuela en todo nivel educativo. De manera más puntual, esta idea se apoya en la capacidad que poseemos para valorar la información contenida en representaciones estadísticas que nos son accesibles por diferentes medios (Friel, Bright y Curcio, 1997; Gal, 2002; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015).

Este estudio se inserta en la incipiente línea de investigación que explora una competencia necesaria en la cultura estadística, lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos (Gea, Arteaga y Cañadas, 2017), apoyados por el Proyecto de Mejoramiento Institucional PMI-ULA: 1503. Nos interesamos en explorar una competencia estadística de estudiantes universitarios en Chile, en particular, la correspondiente a la lectura e interpretación de una tabla y un gráfico de columnas; ambas representaciones condensan la información de una nube de datos estadísticos. Para este trabajo tomaremos la postura de Gal (2002), quien considera la cultura estadística en relación con el desarrollo de dos capacidades:

> a) capacidad de interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante (p. 2-3).

Así como lo que establecen Estrella y Olfos (2012), quienes manifiestan que la comprensión gráfica implica la lectura e interpretación de este tipo de representaciones estadísticas.

Revisión de literatura

Una de las premisas, que se propone en este estudio, es que, para la lectura e interpretación de datos estadísticos representados en tablas o gráficos en la vida cotidiana, no hay apoyo (preguntas) que oriente este proceso. Para esto, se desarrolló una pequeña revisión de literatura, clasificando cada una de las investigaciones en tres rubros de acuerdo con la forma de analizar los niveles de lectura de tablas y gráficos estadísticos, la cual se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Clasificación de algunas investigaciones sobre niveles de lectura e interpretación de gráficos y tablas

Análisis del contenido de libros de texto	Análisis de la lectura de gráficos y tablas apoyada con preguntas orientadoras	Análisis de la lectura de gráficos y tablas con interpretación libre, es decir, sin preguntas orientadoras
1. Díaz-Levicoy, Pino y Ramos-Rodríguez (2016) 2. Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín y Piñeiro (2016) 3. Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga, y López-Martín (2015) 4. Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2015) 5. Díaz-Levicoy, Arteaga y Batanero (2015) 6. Díaz-Levicoy y Arteaga (2014) 7. Sánchez y Arteaga (2013)	1. Arteaga, Vigo y Batanero (2017) 2. Vigo (2016) 3. Fernandes y Morais (2011) 4. Eudave (2009) 5. Pagan, Leite, Magina y Cazorla (2008) 6. Monteiro y Ainley (2007) 7. Lisboa (2002)	1. García-García, López y Arredondo (2018) 2. Gea, Arteaga y Cañadas (2017) 3. Arteaga (2011)

La revisión de literatura nos pone de manifiesto la necesidad de explorar los niveles de comprensión de tablas y gráficos estadísticos de estudiantes, cuando no se cuenta con apoyo para la lectura e interpretación. Nuestro estudio se centra en esta vertiente, por lo que se establecen las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué nivel de comprensión poseen estudiantes universitarios cuando se enfrentan a una tarea de lectura e interpretación de un gráfico de columnas y una tabla estadística? ¿El tipo de representación estadística influye para alcanzar un nivel de comprensión diferente? Enseguida se exponen los referentes teóricos que apoyan este trabajo de investigación.

Fundamentos teóricos

Nuestro estudio se fundamenta bajo dos marcos de referencia, a saber: los niveles de Curcio y colaboradores (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001), para examinar las lecturas e interpretaciones de los estudiantes; y la jerarquía de Aoyama (2007) para analizar la valoración crítica cuando hacen una conexión con el contexto.

Curcio (1989) y Friel et al. (2001) distinguen cuatro niveles de lectura de gráficos que permiten describir las diferencias en sus habilidades para interpretarlas: *nivel 1, leer los datos*, implica la lectura literal de la información representada en el gráfico; *nivel 2, leer dentro de los datos*, implica la comparación de datos que incluye el gráfico haciendo uso de otros conceptos y procedimientos matemáticos; *nivel 3, leer más allá de los datos*, implica la extensión de la información del gráfico al realizar predicciones e inferencias a partir de los datos; y finalmente, *nivel 4, leer detrás de los datos*, implica una valoración crítica del uso del gráfico o una conexión de la información con el contexto. Inicialmente, estos niveles fueron establecidos para lectura de gráficos; sin embargo, también pueden aplicarse para lectura de tablas (Batanero, 2001).

Dentro de nuestro estudio surge la necesidad de analizar la valoración crítica en la interpretación de los estudiantes, por lo que nos apoyamos en los niveles superiores de Aoyama (2007) para categorizar el nivel 4 de Curcio y colaboradores: *racional/literal*, lectura adecuada del gráfico, que incluye comparaciones, tendencias y predicciones, y la explicación literal de significados contextuales en términos de los rasgos mostrados en un gráfico, pero sin un cuestionamiento de la información, ni la sugerencia de alguna interpretación alternativa; *crítico*, lectura del gráfico en la que se comprenden las variables contextuales presentadas y se evalúa la fiabilidad de la información; e *hipotético*, se lee, aceptan y evalúa alguna información presentada, formando hipótesis o modelos explicativos.

Metodología

Nuestro estudio está enmarcado bajo una metodología cualitativa de tipo descriptiva; ya que se analizan las lecturas e interpretaciones de una tabla y un gráfico de columnas por estudiantes universitarios, utilizando los niveles de Curcio y la jerarquía de Aoyama.

Participantes

Participaron dos grupos de estudiantes universitarios. El primer grupo estaba formado por 9 estudiantes de la carrera de Ingeniería en Alimentos, y el segundo por 9 alumnos de la carrera de Pedagogía en Educación Media en Matemática y Computación, de la Universidad de Los Lagos. Los estudiantes, cuyas edades oscilaban entre 19 y 34 años, no recibieron información respecto del propósito del estudio. Además, participó el profesor titular, quien colaboró con la aplicación de las tareas.

Instrumento

Se diseñaron dos tareas de lectura e interpretación de datos estadísticos referentes a la evolución de titulados de carreas de pregrado por género en la Universidad de Los Lagos. La primera tarea presenta la información en una tabla estadística, y la segunda en un gráfico de columnas. Cabe mencionar que ambas representaciones se tomaron del Anuario Estadístico Institucional 2016; además, en las dos tareas se les solicitó realizar la lectura de los datos, comparar datos, observar tendencias, proporcionar predicciones, generar conclusiones y realizar críticas, en general, redactar varios enunciados donde interpretaran la información presentada. En la Tabla 2 se presentan ambas tareas del estudio:

Tabla 2. Tareas del estudio

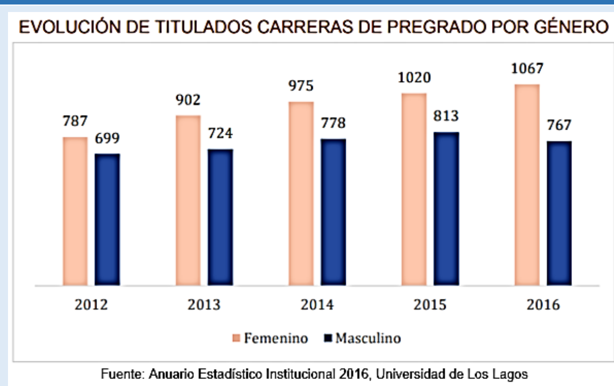
Tarea 1: Lectura de una tabla estadística

EVOLUCIÓN DE TITULADOS CARRERAS DE PREGRADO POR GÉNERO

Género	2012	2013	2014	2015	2016
Femenino	787	902	975	1020	1067
Masculino	699	724	778	813	767
Total general	1486	1626	1753	1833	1834

Fuente: Anuario Estadístico Institucional 2016, Universidad de Los Lagos

Tarea 2: Lectura de una gráfico de columnas



Procedimientos

El estudio consistió en dos sesiones: en la primera, los estudiantes realizaron la lectura e interpretación de la tabla estadística, y en la segunda, la del gráfico de columnas. Se consideraron dos sesiones por dos objetivos: evitar la influencia de la lectura e interpretación de la tabla en la del gráfico, e identificar si el tipo de representación afecta en el nivel de comprensión que presenta el estudiante. Las sesiones se realizaron con una semana de diferencia, y tuvieron una duración de 20 minutos aproximadamente.

Análisis y resultados

Las respuestas de los estudiantes se organizan de acuerdo con la comprensión gráfica y valoración crítica en su interpretación. Para hacerlo se ha tenido como guía los niveles descritos en los fundamentos teóricos, condensándolos en una sola jerarquía (ver Tabla 3).

Tabla 3. Jerarquía propuesta condensado los niveles de Curcio y la jerarquía de Aoyama

Nivel de comprensión	Descripción
Nivel 0. Perspectiva personal	La lectura e interpretación se basa en perspectivas personales del estudiante.
Nivel 1. Lectura literal	La lectura e interpretación presenta palabras referentes al título o a la(s) variable(s) del gráfico; o bien, frecuencias correspondientes a los valores de la(s) variable(s) del gráfico; sin realizar interpretaciones.
Nivel 2. Comparativo	La lectura e interpretación presenta comparaciones de datos: de manera horizontal, al considerar como referente la variable 'año'; de manera vertical, al considerar como referente la variable 'genero'; o bien, de ambas maneras.
Nivel 3. Predictivo	La lectura e interpretación presenta predicciones de: tendencias del comportamiento de los datos; o de frecuencia correspondiente a los valores de la(s) variable(s) del gráfico.
Nivel 4. Integrativo	La lectura e interpretación presenta una valoración crítica de la información al integrar una conexión con el contexto, de manera: racional/literal, al explicar significados contextuales literalmente en términos de los datos mostrados en un gráfico, pero sin cuestionar la información, ni se sugerir alguna interpretación alternativa; crítico, al evaluar la fiabilidad de la información y/o la forma en que se recolecta u ordena; e hipotético, al aceptar y evaluar alguna información formando hipótesis explicativas.

Durante el análisis de los datos, identificamos una lectura enfocada en la perspectiva personal del estudiante, sin leer valores o tendencias en el gráfico; por lo que hemos agregado un *nivel 0, perspectiva personal*, considerando el nivel 1, idiosincrático, de la jerarquía de Aoyama (2007).

En la Tabla 4 se presentan la transcripción y clasificación de algunas respuestas (lecturas e interpretaciones) dadas por los estudiantes de acuerdo con el nivel(es) de comprensión que alcanzan, seguida de una breve justificación sobre esta clasificación.

Tabla 4. Ejemplificación de acuerdo con nivel de lectura

Tipo de representación y respuesta del estudiante	Nivel(es) de comprensión	Descripción
Gráfico de columnas: *La mujer está más estudiosa con el paso de los años. El hombre se está dejando llegar en sus estudios. La mujer tiende a progresar.*	Nivel 0. Perspectiva personal	La lectura e interpretación del estudiante sólo se basa en su perspectiva personal, sin interpretar la información representada en el gráfico
Tabla: *La información de la evolución de titulados se encuentra en forma detallada, proporcionando datos detallados del total del género femenino y masculino y el total de ambos.*	Nivel 1. Lectura literal: título y variable	La lectura e interpretación del estudiante presenta las palabras *'evolución de titulados'* y *'género femenino y masculino'*, lo que nos da indicios que observa el título y la variable.

Gráfico de columnas: *En el gráfico podemos notar una clara tendencia hacia el número de titulados del género femenino, pero no solo crece el número del género femenino, sino también el del total de titulados durante los años 2012, 2013, 2014, 2015 y 2016. A pesar de que el grafico femenino va en una creciente el número que aumenta año tras año es inferior (2012 al 2013 fueron de +115 luego del 2013 al 2014 solo fue de +73 y del 2014 al 2015 fue de +45 y un leve aumento del 2015 al 2016 que fue de +47) por ende genera una predicción no me parece muy óptima. Nota: En el gráfico presenta cálculos de cantidad total de egresados por año, variaciones de un año con el año anterior y de comparación (hombres/mujeres).*	Nivel 1. Lectura literal: título, variable y frecuencias Nivel 2. Comparativo: comparación horizontal	La lectura e interpretación del estudiante presenta las palabras *'titulados'* y *'género'*, lo que nos da indicios que observa el título y la variable, además de las frecuencias de los valores de la variable; esto debido a que muestra cantidades, como *'+115'*, obtenidas a partir de realizar un cálculo matemático (resta). Además, presenta comparaciones de manera horizontal, al indicar expresiones como *'…no solo crece el número del género femenino…'*, es decir, toma como base la variable 'tiempo'.
Tabla: *Lo que se puede interpretar por parte de estos datos estadísticos es un incremento que existe por parte del género femenino en relación a los años transcurridos por los hombres, se establece una diferencia gradual desde 2012 al 2016. Las predicciones que podrían obtener a futuro que el incremento de mujeres como para el 2017 podría aumentar 2 personas, como también disminuir una pequeña, pero se puede inferir que la tendencia continuará en ascenso para el caso del género femenino y género masculino. Para el género masculino se evidencia un aumento significativo los tres primeros años (2012-2014), lo cual el 2015 hubo un pequeño incremento y para el 2016 hubo una cierta disminución de egresado. Pero haciendo un análisis cuantitativo probablemente para el 2017 puede que nuevamente la cifra vaya en crecimiento.*	Nivel 1. Lectura literal: título, variable y frecuencias Nivel 2. Comparativo: comparación horizontal Nivel 3. Predictivo: predicción de una tendencia y de un valor.	La lectura e interpretación del estudiante presenta palabras alusivas al título y la variable; además, lee frecuencias de los valores de la variable para realizar comparaciones: *'Para el género masculino se evidencia un aumento significativo los tres primeros años…'.* También, presenta predicciones sobre la tendencia de los datos: *'se puede inferir que la tendencia continuará en ascenso para el caso del género femenino y género masculino'*; y acerca de un valor de aumento: *'…para el 2017 podría aumentar 2 personas…'.*
Gráfico de columnas: *En estos gráficos se puede inferir lo mismo que en el anterior, donde hay mayor titulación de mujeres que de hombres, una de las mayores críticas que se puede hacer sobre esto es que hay menos hombres egresando porque realmente quieren trabajar antes de estudiar, por mantener familias o falta de ambición, es difícil estudiar cuando no tienes recursos y familia.*	Nivel 1. Lectura literal: título y variable Nivel 2. Comparativo: comparación vertical Nivel 4. Integrativo: hipotético	La lectura e interpretación del estudiante presenta palabras alusivas al título y la variable; así como una comparación de tipo vertical al identificar la mayor frecuencia en los valores de la variable: *'…hay mayor titulación de mujeres que de hombres…'* Además, presenta una integración con el contexto, dando hipótesis alternativas sobre el comportamiento de los datos: *´…hay menos hombres egresando porque realmente quieren trabajar antes de estudiar…'*
Tabla: *A partir de la tabla se puede inferir que se titulan más mujeres que hombres, también que las mujeres cada año representan más del 50% del total de titulados al año.* *Además cada año se presenta un mayor número de titulados respecto al año anterior.*	Nivel 1. Lectura literal: título y variable Nivel 2. Comparativo: comparación	La lectura e interpretación del estudiante presenta palabras alusivas al título y la variable; comparaciones de manera vertical: *'…se titulan más mujeres que hombres...'*, y horizontal: *'…cada año se presenta un mayor número de titulados respecto al año anterior'*; predicción acerca de la tendencia de los datos: *´Se podría inferir que el*

Se podría inferir que el próximo año 2017 serán más los titulados en general. *Los datos deberían haber estado separados por carrera para ver cada sector más específicamente y ver si efectivamente se mantiene el orden de que sean más mujeres que hombres titulados por año, ó de si en cada carrera el número de titulados va aumentando.*	horizontal y vertical Nivel 3. Predictivo: predicción de una tendencia Nivel 4. Integrativo: crítico	*próximo año 2017 serán más los titulados en general'.* Aunado a lo anterior, muestra una integración con el contexto de manera crítica; es decir, realiza una crítica por la forma en que se presenta la información en la tabla.

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias de las respuestas clasificadas por nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes en cada tarea del estudio.

Tabla 5. Clasificación de acuerdo con el nivel de comprensión alcanzado

Nivel de comprensión	Tarea 1: Lectura e interpretación de una tabla estadística	Tarea 2: Lectura e interpretación de un gráfico de columnas
Nivel 0. Perspectiva personal	0	1
Nivel 1. Lectura literal	1	0
Nivel 2. Comparativo	7	9
Nivel 3. Predictivo	3	3
Nivel 4. Integrativo	7	5

Analizando los niveles, se observa que la mayor parte de las respuestas de los estudiantes se reflejan en el nivel 2 (39% y 50%, en la tarea 1 y 2, respectivamente) y 4 (39% y 28%, en la tarea 1 y 2, respectivamente); en particular, podemos establecer que la lectura e interpretación de la tabla propició que más jóvenes alcanzaran el nivel 4, al realizar una conexión con el contexto.

En la Tabla 6, se presenta un análisis más minucioso de los aspectos o elementos característicos que los estudiantes consideraban en su lectura e interpretación. Cabe destacar que el total de frecuencias de las respuestas clasificadas por nivel en la Tabla 6, no corresponden a las presentadas en la Tabla 5, ya que, al analizarlas y clasificarlas, estas mostraban rasgos no sólo un nivel de comprensión, sino que, en su mayoría, de dos o más niveles; como se mostró en algunas respuestas de la Tabla 4.

Tabla 6. Clasificación de acuerdo con el nivel de comprensión y aspecto/elemento característico

Nivel de comprensión	Aspecto o elemento característico	Tarea 1: Tabla estadística	Tarea 2: Gráfico de columnas
Nivel 1. Lectura literal	Variable y título	1	12
	Variable y frecuencia	1	1
	Variable, frecuencia y título	16	4
	Manera vertical	0	1

Nivel 2. Comparativo	Manera horizontal	7	10
	Ambas maneras	10	6
Nivel 3. Predictivo	Predicción de tendencia	5	5
	Predicción de tendencia y valor	1	1
Nivel 4. Integrativo	Racional/literal	0	2
	Hipotético	4	2
	Crítico	1	1
	Hipotético y crítico	2	0

Al analizar los aspectos/elementos característicos de cada uno de los niveles, presentes en las respuestas de los estudiantes, podemos observar que: en el nivel 1, los estudiantes integran un mayor número de elementos en la lectura de la tabla que en la del gráfico, en especial al incorporar la frecuencia de los valores de la variable; en el nivel 2, al leer el gráfico, los estudiante tienden a comparar de manera horizontal al identificar un aumento o decremento en las frecuencias, en cambio, al leer e interpretar la tabla efectúan la comparación de ambas maneras al detectar incrementos/decrementos e identificar el valor de la variable con mayor frecuencia; en el nivel 3, no se presentan diferencias sustanciales, los estudiantes tienden a dar predicciones sobre tendencias en el comportamiento de los datos; y en el nivel 4, al leer e interpretar la tabla predominan los aspectos crítico e hipotético, mientras que en el gráfico aparece una integración con el contexto de manera racional/literal.

Conclusiones

Las siguientes conclusiones se encuentran en función del objetivo de investigación, y dan respuesta a las preguntas que guiaron este estudio; así que se dividen en dos puntos, 1) analizar el nivel de comprensión obtenido de las respuestas de los estudiantes y, 2) identificar si el tipo de representación estadística influye para alcanzar un nivel de comprensión diferente. Con respecto al primero, la mayoría de los estudiantes alcanzan el nivel 2, comparativo, al efectuar una comparación entre los datos estadísticos, primordialmente de manera horizontal; y el nivel 4, integrativo, al establecer una conexión de la información con el contexto. Además, pudimos constatar que algunos jóvenes establecen predicciones sobre la tendencia de los datos, alcanzando el nivel 3, predictivo. Sólo un estudiante realiza la lectura literal de la variable, y otro se basa en sus perspectivas personales, siendo este último caso preocupante por su nivel académico. Considerando el segundo, identificamos que la tabla estadística propició que más jóvenes alcanzaran los niveles superiores 3 y 4, al realizar predicciones sobre la tendencia de los datos e integrar el contexto en sus interpretaciones.

Por otro lado, en este estudio se pueden apreciar los aspectos o elementos característicos que consideran los estudiantes universitarios cuando realizan la lectura e interpretación de una tabla estadística y un gráfico de columnas. Uno de los puntos más notorios es que los estudiantes logran hacer un análisis más detallado de los datos estadísticos representados de manera tabular que de forma gráfica; esto se manifestó tanto en el nivel 2 como en el nivel 4. En el nivel 2, en ambas representaciones, realizan comparaciones con los datos; sin embargo, en la representación gráfica se presentan cálculos aritméticos (resta o sustracción). En el nivel 4, en la tabla, se establecen hipótesis explicativas ligadas al contexto, mientras que en el gráfico, conclusiones racionales/literales asociadas a la información.

Como una línea futura, se propone llevar a cabo nuevas pesquisas sobre niveles de comprensión de tablas estadísticas y otros tipos de gráficos, por ejemplo, de líneas o de sectores, en diversos niveles educativos, donde se ponga de manifiesto la relevancia del contexto, como lo sugiere Aoyama en sus estudios (Aoyama y Stephen, 2003, Aoyama, 2007).

Agradecimientos

Este trabajo se ha llevado a cabo en el contexto del Proyecto de Mejoramiento Institucional PMI-ULA: 1503, bajo la tutela de los Postgrados en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos, Chile.

Referencias bibliográficas

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 298-318.

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective, *Mathematics Education Research Journal, 15*(3), 3-22.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis de Doctorado). Universidad de Granada, España.

Arteaga, P., Vigo, J. M. y Batanero, C. (2017). Niveles de lectura de gráficos estadísticos en estudiantes de formación profesional. En J. M. Muñoz, A. Arnal, P. Beltrán, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 229-238). Zaragoza: SEIEM.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2014). Análisis de gráficos estadísticos en textos escolares de séptimo básico en chile. *Revista Electrónica Diálogos Educativos, 14*(28), 21-40.

Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Batanero, C. (2015). Gráficos estadísticos y niveles de lectura propuestos en textos chilenos de Educación Primaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 229-238). Alicante: SEIEM.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 44*, 90-112.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educaçao Matematica Pesquisa*, *17*(4), 715-739.

Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B., López-Martín, M y Piñeiro, J.L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 20*(1), 133-156.

Díaz-Levicoy, D., Pino, C. y Ramos-Rodríguez, E. (2016). Niveles de lectura y semióticos de gráficos estadísticos en textos escolares de Ciencias Naturales en Educación Primaria chilena. *II Jornada Internacional y IV Nacional de Enseñanza de las Ciencias* (pp. 146-153) Valparaiso: Universidad de Playa Ancha.

Estrella, S. y Olfos, R. (2012). La taxonomía de comprensión gráfica de Curcio a través del gráfico de Minard: una clase en séptimo grado. *Educación Matemática*, *24*(2), 123-133.

Eudave, D. (2009). Niveles de comprensión de información y gráficas estadísticas en estudiantes de centros de educación básica para jóvenes y adultos de México. *Educación Matemática, 21*(2), 5-37.

Fernandes, J. A. y Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 95-115.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

García-García, J.I., López, C y Arredondo, E-H. (2018). Interpretación de una tabla y una gráfica circular por estudiantes de licenciatura. *Tangram, Revista de Educação Matemática*, *1*(3), 24-39.

Gea, M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 19-37.

Gea, M., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 19-37.

Lisboa, G. (2002). *Interpretando e construindo gráficos de barras* (Tesis de Doctorado). Universidade Federal de Pernambuco. Brasil.

Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 188-207.

NCTM (2000). *Principles and standards for schools mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Pagan, A., Leite, A. P., Magina, S. y Cazorla, I. (2008). A leitura e interpretação de gráficos e tabelas no Ensino Fundamental e Médio. *2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT)*. Recife, Brasil.

Sánchez, T. y Arteaga, P. (2013). Los gráficos estadísticos en las directrices curriculares para la Educación Primaria en España y Colombia. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 397-404). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Vigo, J. (2016). *Comprensión de gráficos estadísticos por alumnos de formación profesional* (Tesis de maestría). Universidad de Granada. España.

MODELACIÓN MATEMATICA DE RELACIONES FUNCIONALES CONTEXTUALIZADAS

MATHEMATICAL MODELING OF CONTEXTUALIZED FUNCTIONAL RELATIONS

Tulio Amaya de Armas
Universidad católica de la Santísima Concepción (Chile)
tuama1@hotmail.com

Resumen
Aquí se reportan los hallazgos de una investigación cuyo objetivo fue analizar los procesos de modelación de relaciones funcionales de estudiantes de noveno grado, como estrategia de enseñanza para favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos. Se trabajó con 93 estudiantes de una escuela pública colombiana. Los resultados evidencian que la mayoría de los estudiantes operaron por tanteo. Un grupo muy pequeño de estudiantes siguieron un patrón, el que utilizaron para encontrar una expresión algebraica. El único modelo que reconocen como representación de la situación es el algebraico. Se concluye que estos estudiantes presentan serias dificultades al modelar relaciones funcionales, lo que puede afectar la matematización de situaciones contextualizadas.

Palabras clave: modelación matemática, relación funcional, representación semiótica, tratamiento, conversión

Abstract
Here it´s report the findings of a research whose objective was to analyze the modeling processes of functional relationships of ninth grade students, as a teaching strategy to favor the learning of mathematical concepts. It´s worked with 93 students of a Colombian public school. The results show that most of the students operated by trial and error. A very small group of students followed a pattern, which they used to find an algebraic expression. The only model that they recognize as a representation of the situation is the algebraic one. It's concluded that these students present serious difficulties in modeling of functional relationships, which may affect the mathematization of contextualized situations.

Key words: mathematical modeling, functional relation, semiotic representation, treatment, conversion

Introducción

El trabajo con relaciones funcionales, según Meza y Amaya (2017) permite a los estudiantes relacionar los elementos del objeto matemático función, con elementos del contexto sociocultural donde habitan, lo que le facilita a los estudiantes asignar significados y sentidos al objeto estudiado. Tigreros (2009) señala que en la enseñanza de las matemáticas es importante que los conceptos se introduzcan de manera contextualizada; argumenta que éstos se aprenden más significativamente de esa manera, debido a que los estudiantes manifiestan interés por responder a los cuestionamientos originados en un contexto, donde se utilicen ideas muy cercanas a ellos, con procesos y reflexiones de forma individual y grupal, que permitan emprender un proceso de modelación que posibilite la descripción de la construcción de modelos matemáticos de la situación planteada. Según Ezquerra, Iturrioz y Díaz (2011), a los actores de la enseñanza y aprendizaje de la matemática se les ha olvidado incluir el contexto en el aula, como si el conocimiento matemático sólo existiera de forma acabada como se presenta en los libros o en el discurso de algunos profesores, donde lo algorítmico prevalece por encima de los acercamientos verbales, numéricos o gráficos.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2005) expresa que el estudio de las funciones es de suma importancia en el desarrollo de una comunidad, ya que las funciones conectan modelos y patrones con otros para producir estructuras matemáticas perdurables en el tiempo; sin embargo, Amaya, Pino-Fan y Medina (2016) reportan que hay un distanciamiento bien marcado entre la comprensión de la noción función a nivel escolar y su necesidad de uso consciente a nivel social, lo que podría estar inhibiendo la comprensión de este concepto, que según Hitt (2003) es indispensable para el acceso al cálculo. Por lo que un aprendizaje inadecuado de la noción función, pudiera generar problemas de aprendizajes de conceptos más avanzados.

En este trabajo se tuvo como objetivo analizar los procesos de modelación de relaciones funcionales de estudiantes de noveno grado, como estrategia de enseñanza para favorecer el aprendizaje de conceptos matemáticos, buscando que los estudiantes al hacer transformaciones en los registros de representación de una función, reflexionaran sobre la relación funcional utilizada y pudieran asignar significado y sentido a los elementos de las representaciones analizadas, al establecer congruencias entre elementos de las representaciones involucradas (Meel, 2003), con representaciones fenomenológicas, que los llevara a reconocer las funciones en contextos no académicos.

Acercamiento teórico

El Ministerio de educación nacional colombiano (2005) plantea la inclusión de la modelación en el aula de matemáticas, la cual es vista como un proceso indispensable en su aprendizaje, por permitir a los estudiantes observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa. Para Búa, Fernández y Salinas (2016, p.137) “la modelización matemática se refiere al proceso, representado usualmente mediante esquemas descriptivos, que relacionan una situación real con las matemáticas”, lo que permite afirmar que la modelación matemática incluye la descripción de los distintos procesos, métodos, caminos y alternativas que usan y ponen a prueba los estudiantes para dar a conocer una solución a una problemática dada. Según Brousseau (2007) el recurso a procesos de modelación en los procesos de enseñanza y aprendizaje potencian las habilidades y las actitudes de los estudiantes hacía la matemática, es decir, actúa como un facilitador de condiciones que genera en los estudiantes competencias matemáticas.

Por un lado, el acercamiento del estudiante a un escenario matemático, partiendo de una situación auténtica y cotidiana, permite que él construya un modelo que representa un sistema, desarrollando un trabajo sobre él, obteniendo así una solución que necesita ser confrontada con el sistema inicial. Una vez que se ha construido el modelo y se ha encontrado la solución, el sistema desaparece, el modelo se convierte en parte de la herencia matemática del estudiante y comienza un nuevo proceso de modelado, que puede o no estar conectado con el anterior (García et al. 2006).

Y según Hitt (2000), a través de las funciones se puede “modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos descritos” (P. 81). De lo que se puede inferir que una actividad en una situación problema que involucre el contexto donde se desarrollan los estudiantes, motiva la potencialización de las habilidades y las actitudes de los mismos hacían la comprensión del objeto matemático estudiado. Y además que usar la modelación a través de las funciones provee al estudiante alternativas para llegar a la solución de un problema, teniendo en cuenta que con el solo hecho de describir y analizar un acontecimiento del contexto o reproducir una representación de un objeto matemático, se está modelando matemáticamente.

Visto de esta manera, las funciones y la modelación matemática están íntimamente relacionadas, lo cual permite obtener aprendizajes óptimos reflejados en las habilidades de los jóvenes cuando estos plantean cálculos no muy complicados pero llenos de validez. Además de esta relación, hay que tener en cuenta las representaciones que permita reproducir el objeto matemático que se estudia. Una representación semiótica es descrita por Duval (2004) como la forma que tienen las personas de externalizar sus representaciones mentales, y es el dominio adecuado de las transformaciones entre las representaciones lo que lleva a los estudiantes a comprender un concepto matemático (Oviedo, et al., 2012). Y si se tiene en cuenta que no es posible acceder a un objeto matemático a través del análisis de una sola de sus representaciones, ya que esto lleva al estudiante a confundir el objeto representado con su representante, se requiere tener actividad con diversas representaciones del objeto estudiado para que se llegue a comprenderse su funcionalidad (Duval, 2004). Lo que significa que el estudiante debe explorar distintas representaciones de una función para relacionar sus elementos con elementos del contexto sociocultural, poder asignarle significado y sentido a este objeto.

Además, el objeto función concebido como un objeto matemático que representa una relación de magnitudes variables (Pecharroman, 2014) y como una herramienta eficaz para modelar situaciones de variación y cambio, que lleva implícita la idea de que un cambio en una de las variables tendrá efecto sobre las otras (Ospina 2012), es la herramienta perfecta para presentar al estudiante a situaciones contextualizadas que involucren relaciones funcionales. Esto tiene mucho sentido, pues según D' Amore, Font y Godino (2007) al orientar el proceso de enseñanza y aprendizaje, el profesor debe proporcionarle al estudiante situaciones diseñadas de tal forma que el conocimiento sea necesario para su solución y donde el estudiante aprenda a defenderse en un contexto con algún tipo de dificultades que le generen algún desequilibrio. En este sentido, las relaciones funcionales emergen como hilo de enlace entre el objeto matemático función y el contexto de desempeño de los aprendices, ya que “una función no es ninguna estadística de valores ni una representación gráfica ni un objeto de cálculo ni una formula, sino todo ello al mismo tiempo” (Rey et al., 2009, p.122), y una relación funcional es también todo ello al mismo tiempo en un contexto determinado donde cada elemento identificable de la función en la relación funcional, tiene un significado y un sentido también identificable en el contexto donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje.

En el mismo sentido de lo anterior, Brousseau (2007), considera como una alternativa para lograr que los estudiantes den lo máximo de sí para comprender los conceptos, que las actividades que se les propongan estén relacionadas con el contexto sociocultural donde se desempeñan. Y propone el uso de situaciones didácticas, las cuales considera como fundamentales en el proceso de formación matemática de una persona, ya que permiten controlar la coherencia del proceso de modelación de los estudiantes.

Por otro lado, según Duval (2004) no se puede acceder al concepto de función a través del análisis de una sola de sus representaciones, se requiere tener actividad con las diversas representaciones: con las expresiones algebraicas, tablas, números, gráficas y lenguaje natural. Esa actividad involucra transformaciones tipo tratamiento y tipo conversión entre registros y representaciones semióticas. Podría decirse de lo planteado por Duval que si no se dispone de al menos dos formas distintas de expresar y representar contenidos matemáticos, no parece posible aprender y comprender dicho contenido. A su vez, Streun (2000) afirma que transformar un problema de un modo de representación a otro, es una de las heurísticas de mayor importancia en matemática educativa. También menciona que comprender un problema correctamente está relacionado con la formación de una representación mental adecuada de la situación, en donde todas las componentes relevantes pueden ser relacionadas con el conocimiento que el resolutor tiene. Adicional al conocimiento requerido para entender el problema, debe existir también un conocimiento algorítmico (habilidad para llevar a cabo métodos definidos de resolución de problemas) y un conocimiento estratégico (habilidad para aproximarse al problema).

Los registros semióticos de representación son fundamentales en el trabajo con funciones, ya que el dominio de estas son en sí un aprendizaje que genera significados y competencia en quien aprende (Duval, 2017, 2004). De este modo, es fundamental que los estudiantes relacionen los elementos de diferentes representaciones de una función y puedan ponerlos en paralelo, para que puedan lograr un mejor aprendizaje de este concepto.

El recurso a las representaciones semióticas en el aprendizaje en educación matemática es fundamental (Duval, 2004). En este sentido, Duval (2017) considera que no hay noesis sin semiosis, esto es, no hay forma de comprender los objetos matemáticos sin hacer uso de sus representaciones, y esto porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, es decir, “el acceso a los objetos matemáticos se hace únicamente por medio de la producción de representaciones semióticas” (Duval, 2012, p. 15). Lo que permite hacerse una idea de la importancia de las representaciones en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

De lo anterior se puede inferir que para llegar a comprender en matemáticas se requiere de la integración sinérgica de dos o más registros del objeto estudiado (Duval, 2004), quizás en razón a que la actividad matemática requiere de un modo específico de funcionamiento cognitivo, por la forma en que se accede a los objetos estudiados (Duval, 2012). Según este autor, el rol central que juegan las representaciones semióticas en el desarrollo de los conocimientos matemáticos modifica completamente el funcionamiento cognitivo que se requiere para comprender en matemáticas, diferente de los requerimientos para el aprendizaje en otras áreas del conocimiento. Por lo que se pueden ver las representaciones semióticas como un medio de expresión que se caracteriza por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan, cada uno de los cuales tiene sus propias reglas (Duval, 2017).

Las transformaciones las hay de tipos conversión y tipo tratamiento. Las transformaciones tipo tratamiento consisten en decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlo en el mismo registro, mientras que las transformaciones tipo conversión son las que se hacen al decodificar los elementos de una representación en un registro y recodificarlo en otro. Los elementos de dos representaciones se pueden coordinar, de tal forma que se identifiquen algunos elementos comunes entre diferentes representaciones. Además, ninguna representación representa al objeto en su totalidad, ellas se complementan.

Aspectos metodológicos

Se planteó un trabajo netamente cualitativo, de tipo estudio de casos (Servan y Servan, 2010). A los estudiantes se les propuso tres instrumentos, tipo cuestionario abierto, compuestos por algunas indicaciones por escrito y algunos requerimientos propios de cada registro utilizado como registro principal, donde se proponen algunas variaciones estructurales, se asocian a otras representaciones de otros o del mismo registro, para observar si las variaciones en el registro principal o de partida, son percibidas como tal en el registro de llegada, que permitieran hacer un análisis cognitivo de dichas representaciones.

Los instrumentos fueron aplicados a 93 estudiantes de noveno grado, con edades entre 13 y 15 años, provenientes de una institución pública colombiana, buscando analizar sus fortalezas o dificultades de aprendizaje al hacer transformaciones con las representaciones de una función.

Se reportan los resultados de una sola de las actividades consistente en la historia de Juan, un mototaxista, quien realiza cierto número de carreras por día entre dos veredas de la costa atlántica colombiana; cobra por cada carrera un valor de $700, pero la moto no es suya y tiene que entregar al dueño una tarifa diaria de $12.000. Se pidió a los estudiantes:

1) Encontrar los salarios diarios de Juan cuando realiza 12, 15, 20, 21, 24 o 31 carreras en cada uno de los seis días. Argumenta la forma como obtuviste los resultados.
2) Determinar las cantidades que intervienen en la situación ¿Cuáles varían y cuáles permanecen fijas?
3) El salario de cada día de trabajo de Juan, entre qué valores oscila (cambia) ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo?
4) Encontrar una expresión matemática que modele la situación.

La información se obtuvo de las producciones escritas de los estudiantes y por observación directa de su actuar, al dar sus respuestas, luego se hizo un proceso de triangulación de datos y de observadores, lo que según Cisterna (2005) proyecta un proceso que se realiza una vez concluido el trabajo de la recopilación de la información, tomando lo pertinente y relevante en relación con la temática de investigación. El análisis de la información se hizo utilizando la técnica análisis de contenido (Bernárdez, 1995), donde se hizo segmentación en unidades por criterios temáticos y temporales, identificando las distintas modalidades y finalmente agrupamientos sobre la base de las categorías de análisis previamente definidas.

Resultados preliminares

Los resultados evidencian que la mayoría de los estudiantes (82,7%), al intentar resolver la situación, encontraron un patrón aritmético, el cual describieron e hicieron funcionar como una expresión algebraica (ver figura 1) y a partir de esto, dieron sus respuestas; esta secuencia les permitió realizar un acercamiento a los procesos de modelación con lo que se aproximaron a la construcción de expresiones analíticas, que los llevó a identificar la presencia de las funciones en su contexto de desempeño. No obstante, les costó aceptar otras representaciones diferentes des analíticas como representación de una función, es más, esta representación es según los estudiantes, la función. Confundiendo el objeto representado con su representante (Duval, 2004), ninguno dio como respuesta una tabla, una gráfica u otra representación. Sin embargo, un grupo reducido (20.4%) de estudiantes encontró una representación algebraica para la relación funcional ($f(x) = 700x - 12000$) y al reemplazar x por cada número de carreras realizada, obtuvieron el salario diario.

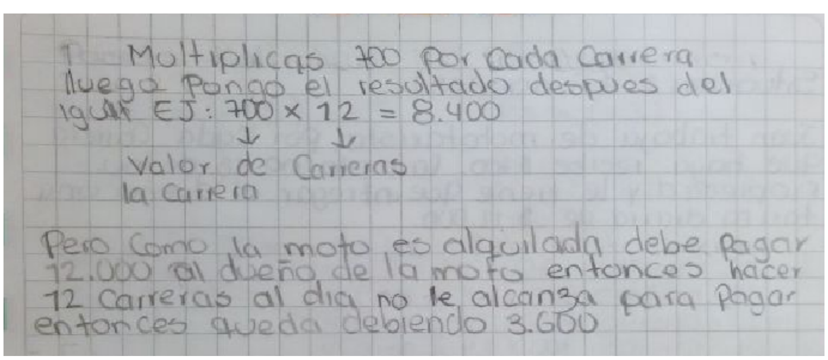


Figura 4. Manuscrito presentado por E_{12} al intentar explicar su respuesta.

Además, con mucha fluidez describieron los procesos realizados, como puede apreciarse en la respuesta dada por E_5 (figura 2), quien muy a su modo, pero de muy buena manera, argumenta sobre el proceso realizado para obtener su respuesta. En el manuscrito de E_5 se muestra mucha facilidad al extraer la información de la relación funcional utilizada en la situación problema, es decir, identificó con facilidad los elementos de una función en la relación funcional utilizada para contextualizar la situación y describe la forma en la que logró hacerlo.

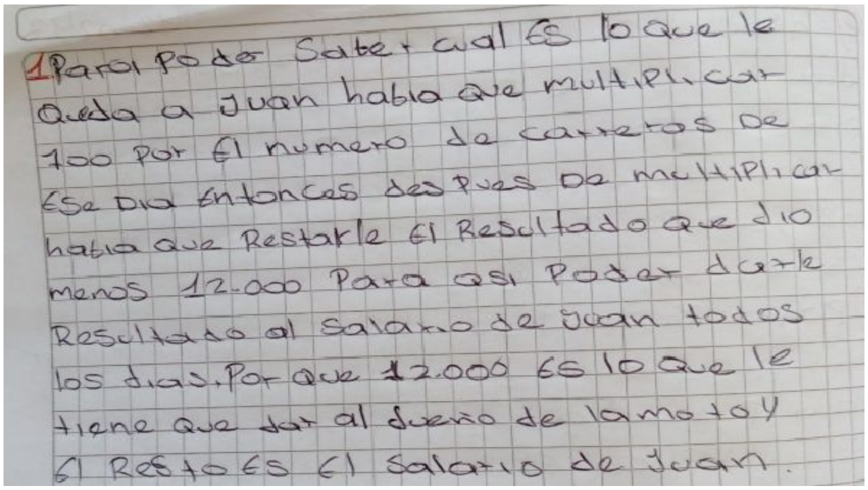
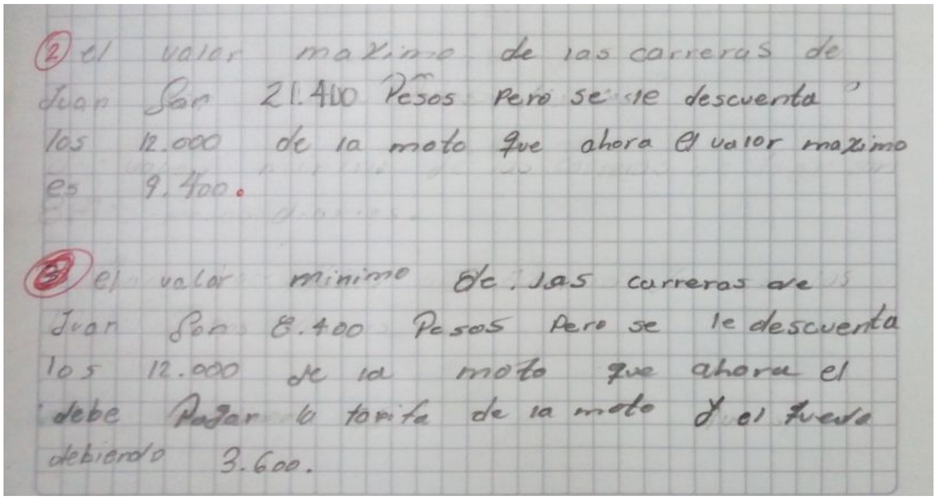


Figura 5. Respuesta dada por E_5, al argumentar la forma cómo obtuvo su respuesta a la pregunta 1.

Por otra parte, se encontraron dificultades en los estudiantes para realizar transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento entre las representaciones de las funciones involucradas, y relacionar sus elementos con los de la representación fenomenológica utilizada en la situación. El 46,2% de los estudiantes cometen errores de escritura (Carrión, 2007), lo que se evidencia en sus soluciones al escribir $700 \times 12000 = 8400 \times 6 = 50400$, donde la secuencia de expresiones no son equivalentes. No obstante Carrión (2007, p.21) considera que “el error es requerido para afianzar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada” es decir que el estudiante necesita muchas veces errar para aprender y distinguir entre lo que es válido o no hacer, en un determinado contexto. Según Ruano, Socas y Palarea (2008) este tipo de errores aparecen en el trabajo de los alumnos sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben. Por lo que los errores que cometen los estudiantes son muy buenos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Y el análisis y tratamiento de estos errores puede ser un fuerte potencializador de las habilidades matemáticas de los estudiantes.

El análisis visual parece haberles jugado una mala pasada a estos estudiantes, y similar a lo reportado por Amaya et al., (2016) en sus respuestas no fueron más allá de lo visual, de aquello que tenían en su hoja y al comunicar el dominio y el rango de la relación funcional, sólo consideraron valores que tenían entre los elementos de las representaciones que habían producido; como se evidencia en el manuscrito de E_{37} (figura 3), quien da como salarios máximos y mínimo, los valores máximos y mínimos correspondientes a los encontrados en el proceso realizado hasta entonces, por ejemplo, da como salario máximo 9.400 pesos y como mínimo -3.600, sin considerar que cuando no se hace ninguna carrera la pérdida es mayor (12.000) y que el salario diario de Juan dependen del número de carreras que se puedan llegar a hacer en un día que acaba luego de 24 hora, por lo que esa es una limitante para que las ganancias sean infinitas o muy grandes; esto es, no se hizo un análisis a profundidad de los intervalos de variación de esta relación funcional.


2 el valor maximo de las carreras de Juan Son 21.400 Pesos pero se le descuenta los 12.000 de la moto que ahora el valor maximo es 9.400.

3 el valor minimo de las carreras de Juan Son 8.400 Pesos pero se le descuenta los 12.000 de la moto que ahora el debe Pagar la tarifa de la moto y el queda debiendo 3.600.

Figura 6. Respuesta dada por E37 al reportar los salarios máximo y mínimo del mototaxista.

■ Conclusión

Los resultados permiten concluir que, aunque los alumnos participantes ya habían tenido numerosas experiencias que involucraban conversiones y tratamientos entre registros de una función, se pueden destacar tres aspectos específicos en sus soluciones: 1) el uso y la manipulación de relaciones funcionales facilitó a los estudiantes identificar los elementos de una función, es decir, el trabajo con funciones a través de relaciones funcionales contextualizadas, facilitó la identificación y uso de las funciones en contexto, por lo que es importante que desde el aula se propicie el análisis de diferentes registros y representaciones de los conceptos estudiados. 2) Los produjeron muy buenas y variadas representaciones, pero tuvieron dificultades para establecer congruencias entre sus elementos, y para coordinarlos con elementos de representaciones del registro fenomenológico y 3) la familiaridad con los elementos de la relación funcional les facilitó a los estudiantes encontrar y describir un patrón aritmético y utilizarlo para dar sus respuestas. Sin embargo, les costó aceptar representaciones diferentes de las analíticas, como representación de una función.

La facilidad en la identificación y clasificación de los elementos de la relación funcional, facilitó un acercamiento bastante adecuado, al concepto de variable y al análisis de elementos de una función lineal, tales como pendiente, intercepto al origen; así como hacer un acercamiento a procesos de modelación utilizando representaciones analíticas como secuencias, polinomios aritméticos o patrones de regularidad. Este ambiente en condiciones de variación y cambio facilitó un acercamiento muy importante a la noción de función.

Sin embargo, los procesos de modelación matemática en los estudiantes son muy incipientes ya comienzan a reconocer patrones de regularidad y a establecer conjeturas que pueden comprobar o refutar, por lo tanto, las interacciones promovidas en el ejercicio de la práctica de modelación, permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre sus ideas y conjeturas iniciales, de tal forma que mediante argumentaciones y explicaciones pudieran cuestionar su concepciones iniciales y darle así nuevos y más consistentes significados a su conocimiento.
Finalmente, se puede observar que los argumentos planteados en la situación, permiten al estudiante resignificar la noción de función mediante un nuevo uso y significado de la modelación. Esto porque le puede permitir al estudiante tomar decisiones, asignar significados y generar procedimientos en pro del desarrollo de habilidades de pensamiento matemático.

Referencias bibliograficas

Amaya, T., Pino-Fan, L. y Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Revista Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zarzal.

Búa, J., Fernández, M. & Salinas, M. (2016). Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 19(2), 135-163.

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoria, 14(1):* 61-71.

D' Amore, B., Font, V. & Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, (2),* 49-77.

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2012). Preguntas y desafíos de la enseñanza de las matemáticas para todos: implicaciones para la investigación en didáctica. En U. Malaspina (Coord.). *Resúmenes del VI Coloquio Internacional de Didáctica de las Matemáticas: avances y desafíos actuales* (pp.3-6). Lima: Pontificia Universidad Católica del Perú.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Ezquerra, Á., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias. 9 (2), 252-264.* 2012.

García, F., Gascón, J., Ruiz, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38 (3), 226-246.

Hitt, F. (2000). Representations and mathematics visualization. En M.L. Fernández (Ed.). *Proceedings, PME-NA 22* (pp.131-147). Tucson: ERIC Publications.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática, 6*(3), *221-271*.

Meza, F. & Amaya, T. (2017). Conflictos epistémicos al hacer transformaciones en las representaciones de una función. *Revista Entornos*, 29(1), 43-53.

Ministerio de Educación Nacional. (2005). Potenciar el pensamiento matemático: un reto escolar. Estándares básicos de competencias en matemáticas. Recuperado el 21 de septiembre de 2018, de http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

Oviedo, L. Kanashiro, A. Bnzaquen, M. & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Revista Aula Universitaria (13), 29-36.*

Pecharroman, C. (2014). El aprendizaje y la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva ontológica. *Revista Educación Matemática*, 26(2), 111-133.

Rey, G., Boubée, C., Vazquez, P. & Cañibano., A. (2009). Ideas para enseñar, aportes didácticos para abordar el concepto de función. *Revista iberoamericana de educación matemática (20)*, 153-162.

Ruano, R., Socas, M. & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), *61-74*.

Servan, P. y Servan, I. (2010). Intervención en la familia. Estudio de casos. En G. Serrano (Coord.) *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp. 221-252). Madrid: Narcea.

Tigreros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Innovación Educativa, 9(46),* 75-87.

Streun, A. (2000). Representation in applying function. *International journal of mathematical education in science and technology,* 31(5). 703 – 725.

NIVELES DE ALGEBRIZACIÓN QUE ALCANZAN LOS ESTUDIANTES DE PRIMER GRADO DE SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA ESTRUCTURAL DE NÚMEROS RACIONALES

ALGEBRAIC SENSE THAT FIRST-YEAR SECONDARY SCHOOL STUDENTS REACH IN THE SOLUTION OF STRUCTURAL TASKS OF RATIONAL NUMBERS

Flor Carrillo, Cecilia Gaita, Johana Garcia
Pontificia Universidad Católica del Perú, Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP (Perú)
f.carrillo@pucp.edu.pe, cgaita@pucp.edu.pe, a20144218@pucp.pe

Resumen
El presente artículo tiene como objetivo analizar los rasgos de los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de una tarea que involucra operaciones y propiedades de los números racionales, actividad considerada como tarea estructural en el marco del Razonamiento Algebraico Elemental. La actividad demanda la elaboración de conjeturas y de su validación, lo que a su vez exige que se pongan en marcha procesos de generalización. Para el diseño y análisis de la actividad matemática desarrollada se emplean elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y de la investigación cualitativa. Se concluye que los rasgos identificados en el trabajo de los estudiantes corresponden, predominantemente, al nivel de razonamiento algebraico 1, pues se identificó que trabajan con valores particulares cercanos y realizan operaciones de tipo aritmético, pero no identifican una relación que permita la generalización, lo que explica que tampoco empleen expresiones algebraicas para denotar variables.

Palabras clave: tarea estructural, razonamiento algebraico, ontosemiótico

Abstract
The objective of this article is to analyze the characteristics of the algebraic sense of first-year secondary school students in the solution of a task that involves operations and properties of rational numbers, an activity considered as a structural task in the framework of Elementary Algebraic Reasoning. The activity demands the elaboration of conjectures and their validation, which, in turn, demands generalization processes. For the design and analysis of the mathematical activity developed, we used elements of the Onto-Semiotic Approach and of the qualitative research. We concluded that the traits identified in the students' work correspond predominantly to the level of algebraic reasoning 1, since we could identify that they work with specific close values and perform arithmetic operations, but they do not find a relationship that allow the generalization, nor use algebraic expressions to denote variables.

Key words: structural task, algebraic reasoning, ontosemiotic.

Introducción

La presente investigación muestra un análisis de los rasgos de los niveles de algebrización de estudiantes de primer grado de educación secundaria en la resolución de una tarea estructural. La tarea estructural propuesta tiene como objetivo analizar de qué manera los estudiantes realizan conjeturas y validaciones, de modo que estas a su vez generen procesos de generalización que demanden el empleo de variables. Como base teórica se toman aspectos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) y del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE). En particular se considera la noción de idoneidad didáctica para el diseño de tareas, concepto fundamental del EOS tal como señala Godino (2013). Además, para el análisis de los resultados se consideran características de los rasgos del RAE, propuestas por Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012).

En este trabajo presentamos la tarea propuesta, las soluciones esperadas de esta tarea, así como las características de los sujetos que participaron de la experimentación. Se describen los resultados de los 15 estudiantes que participaron en el estudio y se analizan empleando los elementos teóricos considerados.

Aspectos teóricos y metodológicos

Nuestro trabajo emplea aspectos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, centrados en la dimensión personal. En el marco de la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, definida por Godino, Batanero y Font (2007) como la articulación coherente y sistémica de seis componentes (Idoneidad epistémica, Idoneidad cognitiva, Idoneidad interaccional, Idoneidad mediacional, Idoneidad emocional e Idoneidad ecológica), analizamos específicamente la idoneidad cognitiva, la cual se refiere al entendimiento del conocimiento de los estudiantes antes y después del aprendizaje de los contenidos de la tarea propuesta.

Algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática

Siguiendo a Godino (2011), se realiza un análisis didáctico-matemático de la tarea estructural propuesta, la que desencadena la actividad matemática en la que emergen objetos matemáticos primarios, tales como:

- Elementos lingüísticos: Se utilizan al resolver problemas matemáticos para generalizar su solución o para describirlos. Para esto, se utiliza elementos del lenguaje, tales como términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros.
- Conceptos y definiciones: Son nociones matemáticas que son necesarias para resolver una tarea mediante definiciones o descripciones características.
- Propiedades: Se manifiestan en las definiciones que se deben utilizar para la resolución de una tarea. Las propiedades son condiciones de realización de las acciones a características específicas de las situaciones y relaciones entre objetos.
- Procedimientos: Se emplean al resolver tareas propuestas a través de operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y estrategias que los estudiantes deben conocer para resolver las diferentes tareas.
- Argumentos: Son enunciados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, en la solución de tareas. Estas justificaciones, para nuestra investigación, pueden ser deductivas o empíricas.

Se considera además la dimensión dualidad extensivo-intensivo que permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general, que es una cuestión clave en la construcción y aplicación del conocimiento matemático (Godino, 2002). Del trabajo de García (2018), se ha tomado la siguiente tarea:

Encontrar una secuencia geométrica: $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ para un término cercano, luego encontrar un patrón específico $t_{n=}\ 2.\,(\frac{1}{3})^{n-1}$.

A partir de los 3 términos dados en la secuencia geométrica, se debe hallar el término n-ésimo. Esto se llevará a cabo si se inicia identificando el primer término: $t_1 = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}$, luego se tiene el segundo término: $t_2 = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^{2-1}$ y así sucesivamente, hasta que podemos encontrar un término genérico para la secuencia geométrica, representando por $t_{n\,=}\ t_1.\,q^{n-1}$, donde t_1 es el primer término y $q = \frac{1}{3}$ es la razón.

Por otro lado, una herramienta fundamental para el análisis de los resultados considerada en este trabajo son los niveles de algebrización descritos en Godino, Castro, Ake y Wilhelmi (2012), en donde además se describen las características asociadas a tales niveles. La asignación de un nivel está estrechamente relacionada con el tipo de actividad matemática desarrollada.

De acuerdo a Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014), se describen los siguientes niveles:
Nivel 0: Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. Nivel 1: Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. Nivel 2: Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma. Nivel 3: Es el nivel consolidado de algebrización, ya que supone la intervención de objetos intensivos de grado 2 representados de manera simbólico-literal y se opera con ellos.

La investigación desarrollada es de tipo cualitativa y experimental; se empleó un instrumento que permitió reconocer la práctica operativa y discursiva desarrollada por los estudiantes en torno a los números racionales. Así mismo, se muestra un diseño estructural como el que propone Pino-Fan y Godino, (2014) con las cuatro fases que un diseño instruccional debe tener: Estudio preliminar, Diseño, Implementación y Evaluación.

Realizamos un análisis detallado de los rasgos que presentan las resoluciones dadas por los estudiantes; en particular, nos centramos en la dualidad extensivo-intensivo la cual indica rasgos característicos del razonamiento algebraico asociados a la generalización. Con esa información pretendemos responder a la pregunta: ¿Qué niveles de razonamiento algebraico predominan en la resolución de tareas estructurales sobre números racionales en estudiantes de primer grado de secundaria?

Experimentación y análisis de la tarea propuesta

Se ha considerado una de las tareas propuestas en el trabajo de García (2018), cuyo objetivo es que el estudiante analice inicialmente casos particulares con procedimientos aritméticos, pero luego debe realizar conjeturas, generalizar y verificarlas para valores cercanos.

Para esta experiencia, se consideró una muestra de 15 estudiantes de 12 a 13 años de edad, que cursaban el primer año de secundaria de un colegio particular de Lima, Perú, donde 10 estudiantes eran alumnos nuevos, que vienen de distintas instituciones, y solo cinco estudiantes eran alumnos antiguos, por lo que podemos decir que estos últimos tienen los conocimientos previos. La profesora era parte de equipo de esta investigación.

Se debe tener en cuenta que, en la institución particular, donde fue aplicado el experimento, se había enseñado los siguientes contenidos en el curso de razonamiento matemático sobre el tema de los números racionales partiendo desde la definición y continuando con su clasificación, operaciones (cálculos), propiedades, representaciones, entre otros, que fueron necesarios, como conocimiento previo, para el desarrollo de las tareas.

En la institución particular donde aplicamos el experimento se abordaron previamente los siguientes contenidos: Planteo de ecuaciones: Simbolización, problemas de ecuaciones y factorización. Progresiones aritméticas. Sucesiones. Razonamiento inductivo. Además del estudio de Perímetros. Áreas de regiones cuadrangulares y triangulares. Resolución de problemas de áreas usando ecuaciones y números racionales.

Los estudiantes recibieron las siguientes indicaciones antes de iniciar el trabajo:

- Debían mostrar todo su trabajo; los intentos de soluciones aunque fueron erróneos serían considerados como parte de la evaluación.
- El trabajo debería desarrollarse individualmente; para ello contarían con una hoja donde debían resolver cada pregunta; todas las hojas empleadas deben ser entregadas al finalizar la evaluación.
- El tiempo asignado sería de 12 minutos.

A continuación, presentamos el enunciado de la tarea propuesta.

Si al numerador de la fracción $\frac{19}{5}$ *se suma un número natural y se resta el mismo número al denominador, por ejemplo, si el número natural es 1 ¿qué sucede?, o si el número natural es 2 ¿qué sucede?, y si pruebas con otros números naturales ¿qué resulta? Entonces a partir de esto, ¿será cierto que* $\frac{19+n}{5-n}$ *siempre es número natural?*

Soluciones esperadas

Se esperan soluciones para casos particulares y conclusiones del tipo "siempre resultará un número natural", así, por ejemplo, se pueden mostrar los siguientes cálculos.

$\frac{19+1}{5-1} = \frac{20}{4} = 5$ es un número natural
$\frac{19+2}{5-2} = \frac{21}{3} = 7$ es un número natural
$\frac{19+3}{5-3} = \frac{22}{2} = 11$ es un número natural

Y partir de esos resultados, concluirán que $\frac{19+n}{5-n}$ resultar ser un número natural.

También pueden aparecer respuestas donde, además de lo anterior, obtengan que con el número 5 se obtiene $\frac{19+5}{5-5} = \frac{24}{0}$ la cual es una división imposible de resolver en $\mathbb{N}$ y por lo tanto sería falso.

Otra posible solución de un estudiante es que reemplace un número mayor a 6 obteniendo:

$\frac{19+6}{5-6} = \frac{25}{-1} = -25$, el resultado ya no es un número natural.

Por lo que podrá concluir que $\frac{19+n}{5-n}$ será un número natural cuando $n = 1; 2; 3; 4$

Por último, también podemos suponer que un estudiante que manifieste que como "n" es un número natural, entonces el numerador siempre será positivo, así que como lo que piden que el resultado sea natural, el denominador debe ser mayor que 0, con denominador distinto de cero ya que sería indeterminado. Debido a que los estudiantes resuelven inecuaciones de primer grado, se plantea la siguiente resolución esperada:

$5 - n > 0$, donde n es un número natural
$(5 + -5) - n > 0 + -5$ …………………… suma "-5" a cada miembro
$-n > -5$ ………………………………….. multiplica por -1 a cada miembro
$5 > n$

Así el estudiante concluye que "n" toma el valor del 1 al 4.

A continuación, en la tabla 1, tomado de García (2018) presentamos el análisis de las respuestas dadas por los 15 estudiantes, en el que se identifican rasgos característicos de los niveles de algebrización.

Tabla 1. Análisis y rasgos de nivel de 15 estudiantes respecto a la tarea propuesta

Estudiante	Procedimiento de la tarea propuesta	Análisis e Identificación de rasgos de los niveles de algebrizacion.
1	Consideró $n=1$, justificando que si suma el 1 al numerador y resto 1 al denominador resulta un número natural, luego reemplazó $n=2$ justificando que si suma el 2 al numerador y resta 2 al denominador resulta un número natural, seguidamente reemplazó $n=3$ justificando que si suma el 3 al numerador y resta 3 al denominador resulta un número natural. Finaliza declarando que no siempre $\frac{19+n}{5-n}$ saldrá un número natural, ya que a veces resulta fracciones.	Declaró el término general, lenguaje simbólico-literal, el cual se basó para decir que no siempre resulta un número natural, además de realizar correctamente las propiedades del conjunto numérico de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 2.
2	Consideró $n=1$ y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó $n=2$ y al resultado le colocó que es un número natural. Finaliza declarando que no siempre saldrá un número natural y colocó un ejemplo con $n= 10$ colocando la respuesta como -5,8.	Aparecieron los objetos intensivos, esto quiere decir que los objetos de generalidad serán reconocidos de manera explícita en tareas estructurales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
3	Consideró $n=1$ y al resultado le colocó que es un número natural y luego declara que siempre saldrá un número natural.	Intervinieron objetos extensivos, manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice, pero aplicó adecuadamente la operación. Por lo anterior, el estudiante presenta en su solución rasgos de algebrización referente al nivel 0.
4	No entiende al inicio la tarea, ya que adicionó el número 1 a toda la fracción $\frac{19}{5}$ y luego le resta 1 al denominador por lo que obtiene 6 y de la misma forma aplica para el valor de 2. Luego se da cuenta y reemplaza correctamente para los números 1, 2 y 3 declarando que, para el valor de 5, no es número natural.	Se generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.

5	Respondió las dos primeras preguntas de *n= 1* y *n= 2* colocando que resulta números naturales, seguidamente da valor *n= 5* obteniendo como resultado algo no definido. Por último, reemplaza *n=6 y n=7* resultando números enteros, por lo que finaliza diciendo que no siempre resulta número natural	Generalizó a partir de casos particulares y movilizó las propiedades de los números racionales. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
6	Respondió para *n= 1* obteniendo el número 5 pero no declara nada.	Manipuló los objetos particulares sin encontrar una regla que generalice. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
7	Consideró *n=1, n=2, n=3 y n=4* mencionando que no siempre resulta un número natural, ya que si, por ejemplo, *n = 6* no un número natural ya que resulta un número negativo.	Generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
8	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=2* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=3* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=4* y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó *n=7* y al resultado le colocó que es un número entero, por lo que finaliza declarando que $\frac{19+n}{5-n}$ no siempre saldrá un número natural, ya que si coloca un número mayor que 5 es entero.	Declaró el término general al finalizar como lenguaje simbólico-literal, ya que, a partir de casos particulares, realizó conclusiones, en el que se basó para decir que no siempre resulta un número natural. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 2.
9	Consideró *n=1* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=2* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=3* y al resultado le colocó que es un número natural, reemplazó *n=4* y al resultado le colocó que es un número natural, luego reemplazó *n=5* y al resultado le colocó como no definido, luego reemplazó *n=6* y al resultado le colocó que es un número entero, por lo que finaliza declarando que no siempre saldrá un número natural, ya que si coloca un número mayor que 5 es entero.	Generalizó a partir de casos particulares. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
10	Consideró *n=1, n=2, n=3* luego reemplazó *n=5* y al resultado le colocó que no existe y termina reemplazando *n= 7.*	Realizó operaciones adecuadas de tipo aritmético y no encontró algo en común para finalizar, pero sí aplicó adecuadamente las propiedades en los números racionales (Denominador de la fracción distinto de cero) y números enteros (Adición de números enteros). Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
11	No entendió la tarea y operó incorrectamente.	Tuvo errores en las operaciones y, por ende, no llegó a encontrar algún término general.

		Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.
12	No entendió la tarea y dejó en blanco la hoja.	
13	No entendió la tarea, ya que colocó números diferentes al sumar y restar al numerador y denominador respectivamente.	
14	Consideró *n=1* y *n=2* declarando que no siempre saldrá un número natural mencionando un ejemplo con *n = 6*.	Se generaliza a partir de casos particulares y aplicó correctamente las propiedades. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 1.
15	Consideró *n=1, n=2, n=3 y n=4* mencionando que siempre resultará un número natural porque todos son naturales.	Realizó correctamente las operaciones, pero no consideró más casos para generalizar y encontrar un patrón. Por lo anterior, el estudiante presenta en sus soluciones rasgos de algebrización referente al nivel 0.

Ahora, presentamos el análisis detallado de la solución de la tarea resueltas por algunos estudiantes.

La solución del estudiante 3 presentada en la figura 1, muestra que su estrategia inicial fue reemplazar algunos números naturales y verificar si se obtenían números naturales; o hizo para $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$, realizando correctamente las operaciones de adición en los números naturales, lo que corresponde a un conocimiento previo.

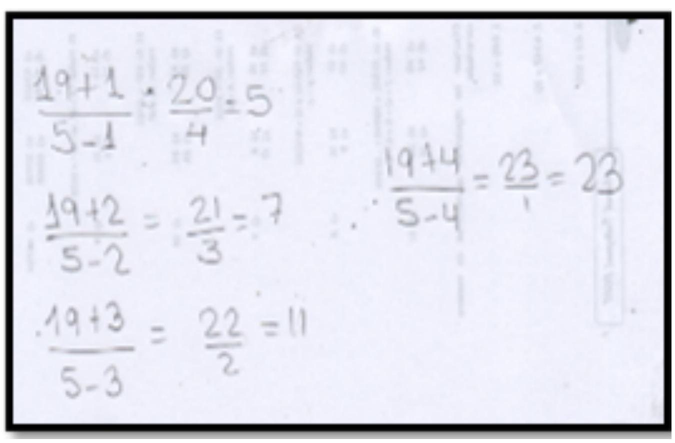


***Figura** 7.* Solución del Estudiante 3-tarea 1
Fuente: (García, 2018, p. 68)

Dado que la actividad del estudiante solo se limita a la realización de cálculos aritméticos y no presenta ninguna conjetura, no se identifican rasgos correspondientes a los niveles de algebrización en su solución.

De otro lado, en la solución del estudiante 1, además de realizar operaciones para valores específicos $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ n = 4$ y n=7, concluye que, si bien para valores de n entre 1 y 4 se obtiene un número natural, para $n = 7$

resulta un número entero. Reconocemos el uso de conceptos y propiedades en su procedimiento; por ejemplo, identifica los conjuntos numéricos como los naturales, enteros y racionales. Se pone de manifiesto la dualidad extensivo-intensivo cuando señala que el resultado de $\frac{19+n}{5-n}$ no siempre será un número natural, ya que argumentó que si el "n" mayor a 5 resulta un número entero y no un número natural.

Además, el empleo de expresiones simbólicas como la variable "n" y elementos lingüísticos como "número natural" de manera general, denota una actividad de generalización. Así, la generalización a partir de casos particulares y la obtención de un término general expresado empleando variables, permiten reconocer rasgos del nivel 2 de razonamiento algebraico en el trabajo de este alumno.

Algunos resultados

Después del análisis de las soluciones de los 15 estudiantes a la tarea propuesta, concluimos que son los rasgos del nivel 1 de razonamiento algebraico los que predominan; fueron 7 estudiantes los que dieron valores a "n" entre 1 y 10, es decir, estudiaron casos particulares, utilizando propiedades de la adición en números naturales y números enteros. En las configuraciones cognitivas construidas se reconoce que los estudiantes emplearon adecuadamente conceptos, propiedades y procedimientos. Luego, estos estudiantes generalizaron los resultados, pero no los simbolizaron (dualidad extensivo-extensivo Los estudiantes argumentaron (elemento del EOS) que para todos los valores mayores a cinco ya no se cumple que sea natural y terminan generalizando para un término general.

El nivel 2 de algebrizacion sólo se evidenció en las soluciones de dos estudiantes los que emplearon expresiones simbólicas para representar las variables. Se identifica el nivel 0 de algebrización en 4 estudiantes, ya que realizan algunos cálculos solo del tipo aritmético, pero no encontraron relación alguna que les permitiera generalizar. Estos estudiantes solo consideraron casos particulares. Finalmente, hubo dos estudiantes que no respondieron la tarea; al parecer no recordaban el concepto y las operaciones en el conjunto numérico de los números racionales.

Conclusiones

Del análisis realizado encontramos que predominan las generalizaciones para valores cercanos, a través de la aplicación de procedimientos aritméticos. Por ello, el nivel de algebrización predominante identificado es el nivel 1. Además, en cada solución de cada tarea, se encontró que predomina el lenguaje verbal, simbólico y en el caso de medida (Gráfico), realizando correctamente las propiedades y operaciones fundamentales de los números racionales.

Por otro lado, podemos resaltar que los argumentos emplean las dualidades extensivos- intensivos y podemos rescatar que la mayoría de estudiantes, a partir de este tipo de tareas, recién muestran argumentos para justificar sus soluciones. También hay que resaltar que algunos estudiantes están en proceso de pasar a un siguiente nivel.

Con esta información, se pueden diseñar actividades que permitan a los estudiantes avanzar a otro nivel de razonamiento algebraico en las que el énfasis esté puesto en el empleo de variables, así como en que cuenten con medios de control que les permitan verificar si sus conjeturas respecto a un patrón general son ciertas.

Finalmente, en base a esta propuesta de tarea estructural de números racionales, se espera que se produzcan más tipos de tareas que requieran de conjeturas, donde las generalizaciones lleven a realizar representaciones simbólicas y obtener procedimientos algebraicos.

Agradecimientos

Agradecemos al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas a la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP), específicamente a la línea investigación Desarrollo de la competencia didáctico matemático en profesores de matemática por el apoyo brindado para llevar a cabo la presente investigación.

Referencias bibliográficas

García, J. (2018). *Niveles de algebrización que alcanzan los estudiantes de primer grado de secundaria en la resolución de tareas estructurales de números racionales*. Perú. Pontificia Universidad Católica del Perú.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2/3), 237–284

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Obtenido el 20 de abril del 2017 de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Revista de didáctica de la Estadística, 2*, 1-15.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education,* 39 (1-2), 127-135.

Godino, J., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletín de Educación Matemática,* 26(42 B), 483-511. Obtenido el 30 de abril del 2017 de: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574005

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Enseñanza de las Ciencias, 32 (1), 199-219. Obtenido el 02 de mayo del 2017 de: http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Pino-Fan, L., y Godino, J. (2014). *Perspectiva ampliada del conocimiento-didáctico matemático del profesor*. Manuscrito enviado para su publicación. Obtenido el 23 de mayo del 2019 de: http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/07/2662-6235-1-PB.pdf

PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS EN LA ENSEÑANZA DEL EJE DE MANEJO DE LA INFORMACIÓN EN 6° GRADO DE PRIMARIA

PEDAGOGICAL PRACTICES IN THE TEACHING OF THE INFORMATION MANAGEMENT AXIS IN SIXTH-GRADE OF PRIMARY SCHOOL

Evelia Reséndiz Balderas, Julio César Contreras Reyes
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México)
erbalderas@docentes.uat.edu.mx, julio_43@live.com.mx

Resumen
Esta investigación consistió en dar a conocer las prácticas pedagógicas de los docentes específicamente en el eje temático "manejo de la información" del plan de estudios de matemáticas en sexto grado de primaria, se llevó acabo por medio de una investigación cualitativo-etnográfica, realizando observaciones de sesiones de clase, considerando las distintas interacciones entre docente-alumno. Se analizó el discurso empleado por el docente mediante el uso de registros de grabación en audio, posteriormente se realizaron transcripciones y se hizo un análisis de la práctica docente y de los recursos discursivos empleados para la enseñanza de los temas correspondientes al eje temático.

Palabras clave: manejo de la información, discurso en el aula

Abstract
This research consisted of identifying the pedagogical practices of the teachers with respect to handling the information, in accordance with the study program axis, in the sixth grade of elementary education. This was performed trough qualitative-ethnographic research consisting of class observations to monitor the interactions between the teacher and the students as well as recording the teacher's speech. These recordings were analyzed and transcribed to explore the way these teachers teach the students the information management axis.

Key words: information management, speech in the classroom

Introducción

En este artículo se presentan algunos de los resultados, obtenidos en la investigación de las prácticas pedagógicas en la enseñanza del eje temático “manejo de la información” y el discurso usado durante la interacción del docente-alumno, dentro del aula. Esto a partir de la observación de distintas sesiones de clase y considerando el enfoque por competencias señalado en el plan de estudios de sexto grado de primaria. Ésta investigación se realizó de acuerdo al plan de estudios de la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011).

En las prácticas pedagógicas se establecen diferentes niveles de creencias. En Vila y Callejo (2005), hacen mención de distintos tipos de curriculum: el currículo normativo, el currículo impartido y el currículo logrado. En el currículo normativo o pretendido prevalecen las creencias teóricas explícitas sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, presentes en los diseñadores del currículo. Este curriculum se puede detectar en los programas, planeaciones y materiales de apoyo, todo ello atribuible a la Secretaría de Educación Pública.

Dentro de las prácticas educativas se llevan procesos muy complejos que involucran diversos elementos con características únicas y particulares cada uno. Entre ellos, podemos citar a los alumnos, maestros, autoridades educativas, padres de familia, procesos metodológicos (métodos y técnicas), recursos (materiales, tecnológicos) e interacción con el contexto. No obstante, la presente investigación centrará particularmente la atención en el docente el cual consideramos es el principal actor y el responsable de dirigir el proceso de enseñanza-aprendizaje en el aula, junto con sus prácticas pedagógicas. En la investigación también estarán envueltos los alumnos y su participación en el proceso de enseñanza.

Al analizar el papel que desempeña el profesor en el aula, se pueden considerar múltiples variables que inciden en los procesos de enseñanza-aprendizaje, como lo puede ser: su perfil académico, actualización docente, características personales, creencia, inclusive sus valores personales. Sin embargo, sería complicado incluir todos estos factores, por lo que en la investigación se limitó a analizar las practicas pedagógicas de los profesores en la enseñanza del eje temático “manejo de la información”, dentro de la asignatura de Matemáticas, enunciadas a través del discurso empleado en el aula, en los grupos de sexto año de primaria en una escuela pública urbana.

Para la investigación se considera el programa de estudios de Matemáticas, implícito en Programas de Estudio 2011, Guía para el Maestro, diseñado por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011), único organismo federal en México que tiene la responsabilidad y obligación de diseñarlos y darlos a conocer, en el cual se ven influidos la educación preescolar, primaria y secundaria, con aplicación para escuelas de índole público y privado.
En el programa se organizan los temas de acuerdo a tres ejes temáticos: *Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico* (SNP); *Forma, Espacio y Medida* (FEM) y *Manejo de la Información* (MI). El libro de texto agrupa las lecciones de cinco bloques, cada bloque se desarrolla en un lapso bimestral dado que las evaluaciones formales sumativas con fines de acreditación en educación básica tienen establecido este lapso.

Es importante resaltar que los contenidos abordados en el eje temático “manejo de la información”, giran en torno a la variación proporcional y no proporcional, lectura, elaboración y análisis de gráficas, así como nociones de razón y proporción. Se optó por esta forma de organización de los contenidos por considerarse adecuado el establecimiento de nudos conceptuales o núcleos fundentes (D’Amore, Díaz y Fandiño, 2008), como una organización didáctica que permitirá la construcción de competencias. El enfoque que se le dio al plan de estudios SEP (2011) selecciona contenidos clave para la estructuración de la disciplina, en su caso Matemáticas, sin embargo no parte precisamente de éstos, sino que construye una red conceptual, estratégica y lógica, fina e inteligente.

En la investigación se tomó en consideración las *prácticas pedagógicas* como las actividades que los docentes llevan a cabo para la enseñanza, con la intención de mediar entre los alumnos y el conocimiento que se quiere transmitir y desarrollar del curriculum, tomando en cuenta las relacionadas con la planeación, la realización de la clase, y evaluación, con el apoyo de sus propios conocimientos, experiencia e interpretación de la realidad, resultado de sus experiencias personales y contextuales del grupo en que se insertan. Se enfocará la atención en identificar y analizar las prácticas pedagógicas de los profesores en la enseñanza de los temas del eje "manejo de la información".

El estudio será guiado por las siguientes dos preguntas: ¿Cómo son las practicas pedagógicas de los profesores en la enseñanza de los temas del eje temático manejo de la información, desde el enfoque por competencias planteado en el programa de estudios de la SEP en 2011? ¿Cómo es la interacción maestro-alumno, alumno-maestro y alumno-alumno considerando el discurso del aula?

Referente teórico

Lenguaje, comunicación y discurso

El lenguaje verbal usado por el docente será la principal fuente de información para analizar sus prácticas pedagógicas, denominado en este caso como *"discurso"* y por ser usado en el salón de clase, señalado como discurso en el aula, el cual corresponde a una modalidad para poder llevar a cabo la investigación.

En el aula se suscitan conversaciones variadas: entre el docente y el alumno, entre el docente y varios alumnos, o solamente entre alumnos, aunque el término "*análisis del discurso"* tiene muchos sentidos, en este trabajo se considerará el planteado por Van Dijk (2007), quien señala que es el estudio del uso real del lenguaje por locutores reales en situaciones reales.
Cabe destacar que en algunos países anglosajones se considera el análisis del discurso como análisis de conversaciones, por ser el discurso una actividad principalmente interactiva entre los sujetos de estudio. La interacción se tomara en consideración como interacción verba, obligada a reunir ciertos requisitos para serlo verdaderamente y no solo una reunión de personas manteniendo una conversación.

Es necesario que los locutores acepten un mínimo de normas comunes, se comprometan con el intercambio y se aseguren de que sigan produciendo signos que permitan mantener la conversación respetando los turnos del habla.

La corriente sociocultural de Vygotsky

Esta investigación se apoya en la corriente sociocultural de Vygotsky (1995), la cual sostiene que el desarrollo cognoscitivo es influido por el entorno sociocultural del estudiante, por la mediación del maestro y compañeros, así como también por otros adultos con los que interactúa, siendo principales impulsores de la Zona de desarrollo próximo (ZDP), a través de la promoción del desarrollo entre ellos y destacado: *el lenguaje.*

Vygotsky menciona que existen dos tipos distintos de funciones mentales: las inferiores y las superiores. Siendo las primeras aquellas con las que nacemos y que son determinadas genéticamente, mientras que las segundas permiten la enorme oportunidad de que el docente, por medio de una actividad didáctica organizada, planeada y coherente, logre la mediación necesaria para que los alumnos logren alcanzar su "ZDP".

El autor menciona, que las funciones mentales superiores se desarrollan y aparecen en dos distintos momentos: el primero de ellos es manifestado mediante el ámbito social y el segundo, en el individual, lo cual implica que el desarrollo se produce dos veces, en el interior del individuo (intrapsicológico).

Manejo de la información

El uso de la noción de variación comprende varios temas considerados en el programa de Matemáticas de Sexto grado en Educación Primaria. Uno de los temas involucra el uso y lectura de gráficas. Dolores (2007), realizó una investigación para detectar las interpretaciones que hacen los alumnos de primaria y secundaria sobre las gráficas usadas socialmente en medios de comunicación, encontrando que la mayoría de los alumnos identifican lo que cambia, hacen lectura de dato por dato y realizan descripciones cualitativas, pero no establecen relaciones covariacionales, ni calculan los cambios entre variables, y, menos aún, usan las razones de cambio.

Dentro del eje *"Manejo de la información"*, uno de los tres ejes que integran el programa de Matemáticas de sexto grado, se encuentra el tema de proporcionalidad, uno de los más importantes en la enseñanza de esta disciplina. De acuerdo con Mochón (2012), esta noción que tiene presencia en las matemáticas escolares, se aborda, pero en muchas de las ocasiones en forma mecánica, mediante la aplicación de la regla de tres, sin mediar una verdadera comprensión de lo que se busca que el alumno aprenda.

También señala que el razonamiento proporcional juega un papel importante en el desarrollo de las ideas matemáticas que pueda llegar a tener el alumno, y que el docente tendría que iniciar planteando situaciones de razonamiento proporcional y no proporcional, de este modo el alumno tiene ambos ejemplos para aprender a distinguirlas. El autor sugiere proponerle a los alumnos trabajar las situaciones en equipo, de este modo se fomentara la discusión de ideas, siendo el maestro el guía que planteé las preguntas que redirijan la atención a la situación, en caso de ser requerido.

Metodología

Como metodología se utilizó un estudio cualitativo de corte etnográfico interpretando, registrando y describiendo los discursos del docente por medio de la observación, las prácticas pedagógicas y la interacción, con la intención de buscar identificar algún tipo de patrón cultural en los docentes tanto en lo académico como también en la interacción docente alumno, esto para poder tener una idea de cómo interpretar el contexto educativo especifico en este caso.

En esta investigación, a los alumnos se les proporcionaron cinco graficas con la indicación de analizarlas cuidadosa y detalladamente, posteriormente describirlas verbalmente, en las cuales tendría que mencionarse: qué información proporcionaban, siendo grabadas en audio y video para su posterior análisis donde se encontraron los datos anteriormente mencionados.

Se utilizó la etnografía, dado que se pretendía conocer el modo de vida de una unidad social concreta, la de los profesores de sexto año de primaria, recalcando la exploración de un fenómeno social, en la tendencia a trabajar con datos no estructurados, para indagar a profundidad un pequeño número de casos, expresando el análisis de datos a través de descripciones y expresiones verbales (Resendiz, 2004), sin ser obligatorio realizar análisis estadísticos.

Se atendió la recomendación aplicada para la etnografía educativa, la cual señala que uno de los requerimientos es la realización de observación directa, permaneciendo el tiempo necesario en el escenario, que sugiere para el caso de la observación en el aula sea de tres meses. En esta investigación se realizó en diferentes periodos de un año escolar, durante los cuales se recopiló una gran cantidad de información, tanto de lo observado como de documentos recuperados de planeaciones didácticas de los mismos docentes, evidencias de notas y trabajo en los cuadernos de los alumnos, ejercicios en hojas sueltas, pruebas, copias de la resolución de ejercicios en el libro de texto, tareas y exámenes.

Los periodos de observación tuvieron como límite todas las sesiones de los cinco bimestres del ciclo escolar en las cuales se abordaron los temas del Eje temático *Manejo de la Información*, durante las sesiones de la asignatura de Matemáticas, que para sexto grado están marcadas con una duración de una hora diaria, debido a que el currículo lo define con un total de cinco horas a la semana. Los contenidos del eje señalado, se desarrollan a lo largo de tres semanas de cada bimestre. Las sesiones observadas fueron video-grabadas, para posteriormente ser transcritas para su análisis.

Análisis de datos

En cuanto al registro de los diálogos en audio, fueron transcritos y analizados. Las unidades de análisis fueron: registros de clases, planeaciones didácticas, cuadernos de los alumnos, libro de texto, entrevistas a las maestras.

En este escrito se presenta el análisis de las transcripciones en las que se encontraron las siguientes categorías (sólo se reportan dos), que se relacionan con las prácticas pedagógicas en la enseñanza del eje temático *manejo de la información:*

- Tablas de variación proporcional
- Razón (fracciones equivalentes)

Al llevar a cabo el análisis de las prácticas pedagógicas de las maestras se puede apreciar que *tratan de negociar el contrato didáctico* (Brousseau, 1990; García y Fortea, 2006); se observa la existencia de un conjunto de códigos explícitos e implícitos que está inmerso en las interacciones y relaciones entre ambos (profesor-alumno).

Las maestras muestran disposición y apertura para propiciar la autonomía de sus alumnos, accediendo que propongan distintas métodos para la resolución de problemas, lo cual se encuentra planteado en el programa de estudios, lo cual destaca la importancia de permitir a los alumnos la búsqueda de la solución de problemas por medio de diversos métodos informales, que comparen procedimientos y respuestas con sus compañeros *y así finalmente lleguen a la formalización o, en su caso, al uso de algún algoritmo*. Los alumnos aceptan como verdadero lo que el maestro señala, reconocen su autoridad pedagógica y se sitúan como seres susceptibles para aprender

Tabla de variación proporcional

En este segmento podemos observar como la *maestra trata de realizar la devolución del tema* que están viendo (Panizza, 2010); la maestra trata de que los alumnos asuman el compromiso de llenar una tabla de variación proporcional. Para ello desde el inicio explica, describe, trata de moldear, alentando a los alumnos a ir asumiendo responsabilidad, a medida que mejoran el proceso de aprendizaje y se vuelven autónomas para resolver tareas avanzan, en ocasiones retroceden, vuelven a ejemplificar y cuestionan.

> **M:** Bueno, a ver, ya tenemos las dos definiciones, la de razón proporción, vamos a ponerlas en nuestro cuaderno (los alumnos escriben en sus cuadernos). Ahora, vemos en el libro: 1. Calcula los datos que faltan en la primera tabla. Para llenar la tabla que dice “B-A” debes restar a cada cantidad de años de la mamá, la cantidad correspondiente de años de su hijo (lectura del libro de texto). Tenemos aquí estas tablas (refiriéndose a las del libro), ¿quién me puede decir cómo se llaman?
> **Aos:** Tablas de variación proporcional.
> **M:** Tablas de variación proporcional (lo repite). En las tablas ya nos hemos dado cuenta que –a veces– hay proporcionalidad. Aver, ¿quién me puede apoyar con la tabla?
> **Aa:** Yo (pasa una alumna voluntaria al pizarrón).
> **M:** Vamos a ver, la edad de Juan… es de 8 años, y la de su mamá de 35. ¿Qué es B-A?
> **Aa:** Es la diferencia que se llevan Juan y su mamá.
> **M:** Cuando Juan tenga 15 años, ¿cuál será la edad de su mamá?, ¿cómo vamos a hacerle para encontrarlo? (le pasa el marcador a la alumna, para que escriba en el pintarrón).
> **Aa:** (Escribe la operación 15 + 27 = 42).
> **M:** ¿Cómo encontraste el 42?
> Aa: 27 + 15 = 42, porque 27 es lo que no va a cambiar.
> **M:** Como ustedes pueden darse cuenta, la diferencia de la edad de Juan y su mamá es de 27 años, podemos encontrar la edad de su mamá mediante una operación que es… A ver, me gustaría que

hicieran la operación en el pizarrón (pasa una alumna, escribe, se equivoca, borra con la mano). Ahí hay borrador (termina de escribir y pasa a su lugar). Bien, a ver, pásale (se dirige a otra alumna) y ésta pasa al pintarrón y resuelve 24 + 27 = 51. Bien, después de contestar esta tabla de variación proporcional vamos a contestar estas preguntas. A ver Rocío, lee por favor…

El ejercicio consistió en llenar una tabla ya que la maestra dice "calcula los datos en la primera tabla"; sin embargo, les indica que operación realizar en la primer parte del ejercicio, que es restar. Aquí se presenta la noción de variación, aunque la maestra no lo menciona. Aunque la maestra les pregunta: "¿Cómo se llaman las tablas?", a lo que los alumnos a coro responden "Tablas de variación proporcional" mas no se explicita que es la variación proporcional. La noción de variación que se maneja en este ejercicio es la resta (estado final menos un estado inicial)

Razón (fracciones equivalentes):

También podemos apreciar una situación en donde la profesora usa con imprecisión el lenguaje, pues dice: *"Cuando vean 25 centésimos en algún razonado, trabajen mejor con un cuatro, porque es una fracción más pequeña y es exactamente lo mismo, son fracciones equivalentes…"*

Estas características se pueden reconocer en el siguiente fragmente de una clase. Esta práctica coincide con la reportada por Ruiz (2011) , quien señala que la rutina común de los maestros consiste en anunciar el tema, pedir que lean el libro en la lección indicada, preguntar, explicar en el pizarrón y aplicar ejercicios que los alumnos resuelvan en el cuaderno y libro.

M: El punto número 2 de la página 109… Tienen ahí la recta numérica, ¿ya localizaron los puntos?
Ao: Ya.
M: La primera, ¿qué equipo me dice a qué corresponde?, ¿aqué fracción?
Ao: Yo.
M: A ver, atención, alzando la mano… A ver, Alan…
Ao: Es un décimo.
M: Ah, un décimo, ¿en cuántas partes está dividido ese entero? A ver, ¿en cuántas?
Ao: En décimos.
M: En décimos, sí, ¿la segunda? La segunda recta… ¿Nadie? ¿Nadie lo hizo?
Ao: La segunda, yo… En porcentajes.
M: En porcentajes… ¿Cuál sería ahí?
Ao: En décimos, o 10 %
M: Ahorita los tres que me contestaron me dieron la respuesta, pero… ¿Que notan que hay en esas rectas?
Aos: Que tienen mitades iguales…
M: Que son iguales… ¿Qué más? Alguien, con otras palabras, que pueda decir…
Ao: Que tienen la misma cantidad de formas, que fracciones, qué porcentaje.

En este registro podemos observar como la maestra discute con los alumnos las fracciones y sus equivalencias, y los números decimales, los porcentajes, así como también que *la maestra asume un papel de mediadora,* ya que se ve que trata de ofrecer situaciones didácticas significativas para sus alumnos, anima las discusiones, aclara ideas y conceptos, tal y como lo señalan Terán y Pachano (2004).

Conclusiones

Respecto a uno de los cuestionamientos planteados que se hizo al comenzar la investigación el cual fue: ¿Cómo es la interacción maestro-alumno, alumno-maestro y alumno-alumno en el discurso del aula? bien, durante y a lo largo de la investigación se logró apreciar el interés de la maestra en fomentar la participación del alumno, al pedirles que discutan en equipo, que argumenten, y comparen el procedimiento y/o resultado obtenido. La maestra se esforzó por rescatar los conocimientos previos con los que cuentan los alumnos, confrontando lo que ya saben con lo que espera que aprendan, es decir con los aprendizajes esperados los cuales están impuestos y definidos en los planes y programas de estudio de la SEP (2011).

Debería de considerarse reforzar más los aprendizajes del eje manejo de la información ya que en éste se ven las bases con las que se desarrollan conceptos más complejos con relación a las nociones de razón y proporción, tablas de variación, lectura y uso de gráficas, etc. Ya que algunos de los aspectos interesantes encontrados durante la investigación apuntan a que los alumnos saben leer datos de gráficas, identificar los cambios de variable entre cada cantidad presentada, aunque no sepan que aplicación o uso pudiesen tener en su vida cotidiana, es por eso que, desde nuestra perspectiva debería de desarrollarse la aplicación de estos conocimientos, por fuera de la contextualización, puesto que presenta un interés más profundo por el estudiante, ya que estos conocimientos le servirán a aportar una manera más organizada de leer e incluso analizar información de una manera más eficiente debido que es importante a lo largo de su desarrollo académico y personal.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1990). *Le contratdidactique: le milieu. Recherches en didactique des mathématiques,* 9(3), pp. 309-336.

D’Amore, B., Diaz, J. y Fandiño, M. (2008). *Competencias y matemática,*Colombia: Didácticas Magisterio.

Dolores, C. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas,*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10 (1), 69-96.

García, F. y Fortea, M. (2006). *Contrato didáctico o contratos de aprendizaje.*Recuperado el 05 de marzo de 2010 dehttp://www.recursoseees.uji.es/fichas/fm2.pdf

Mochon, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres,*Educación matemática*, 24(1), 133-157.

Panizza, M. (2010). *Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas.* Recuperado el 3 de mayo de 2010 enhttp://www.crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar,*tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Ruiz, D. (2011). Representaciones sociales en el aprendizaje de la matemática,*Educere*, (15), 439-449.

Secretaría de Educación Pública (SEP, 2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria. Sexto Grado,* México.

Terán, S. y Pachano, L. (2004). Relatos descriptivos sobre la enseñanza de la matemática en la primera etapa de la escuela básica,*Educere*, 8(25), 187-195.

VanDijk, T. (2007). *Estructuras y funciones del discurso.* México: Siglo Veintiuno Editores.

Vila, A. y Callejo, M. (2005). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas,* Madrid: Narcea.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas,* Ediciones Fausto. Recuperado el 15 de septiembre de 2017 de http://www.psikolibro.blogspot.com

AS CONCEPÇÕES DE DERIVADA PRESENTES NA IMAGEM DE CONCEITO DE ESTUDANTES DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

THE DERIVATIVE CONCEPTIONS PRESENT IN THE IMAGE OF THE CONCEPT OF MATHEMATICS DEGREE STUDENTS

Roberto Seidi Imafuku, Rosana Nogueira de Lima, William Vieira
Instituto Federal de São Paulo - Campus Guarulhos, Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
robertoseidi@yahoo.com.br, rosananlima@gmail.com, wvieira@ifsp.edu.br

Resumo
Apresentamos uma investigação sobre quais concepções de derivadas estavam presentes na imagem de conceito de catorze estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, que já haviam estudado este conceito. Para o estudo, elaboramos e aplicamos um questionário à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática, da imagem de conceito e das concepções de derivadas. Após as análises dos dados, verificamos a ausência de tais concepções nas imagens de conceito dos participantes, o que evidencia a necessidade de atividades que abordem as concepções de derivada e que permitam aos estudantes transitar pelos Três Mundos da Matemática.

Palavras-chave: conceitos de derivada, três mundos da matemática, imagem de conceito

Abstract
We present an investigation about which conceptions of derivatives were present in the concept image of fourteen students of a degree in Mathematics, who had already studied this concept. For this study, we elaborated and applied a questionnaire in light of the Three Worlds of Mathematics theory, concept image and derivative conceptions. After analyzing the data, we verified the absence of such conceptions in the concept images of the participants, which shows the need for activities that approach the concepts of derivative and that allow students to transit through the Three Worlds of Mathematics.

Key words: derivative concepts, three worlds of mathematics, concept image

Introdução

O trabalho aqui apresentado é um estudo diagnóstico que faz parte de uma pesquisa sobre a aprendizagem do conceito de derivada para estudantes de Licenciatura em Matemática. Avaliamos, mais precisamente, as interpretações dadas pelos participantes da pesquisa para este conceito.

Após uma avaliação de pesquisas sobre os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, constatamos que muitas têm apontando que os índices de reprovação e desistência nessa disciplina são altos (Alvarenga, Dorr & Vieira, 2016; Barufi, 1999; Dall'Anese, 2000; Pereira, 2009; Rezende, 2003; Staron, 2016). Esse problema da não aprovação nas disciplinas de Cálculo é alarmante e tem gerado preocupação de professores, que buscam alternativas para minimizar tal situação, e da sociedade dos educadores matemáticos em geral. Este quadro é o principal motivador de nossa investigação.

A Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no boletim número 21 de 2013, enfatiza que o Cálculo Diferencial e Integral é a porta de entrada para a Matemática Superior na formação de um licenciando. De fato, nas disciplinas de Cálculo são estudados conceitos e ideias fundamentais à formação do futuro professor de Matemática, como os números reais, as funções, as aproximações, o cálculo de variações e as ideias de infinito. Destacam, também, a importância que o tratamento dado a problemas de cunho variacional num curso de Cálculo Diferencial e Integral são fundamentais para o futuro professor compreender o tratamento diferenciado que problemas dessa natureza devem receber nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em que frequentam estudantes de 11 a 17 anos. Também nos inquietaram discussões, em nossas aulas, sobre a relação entre o gráfico de uma função e o de sua respectiva derivada, nas quais pudemos perceber que muitos estudantes não reconheciam a derivada como o limite da taxa de variação de uma função na vizinhança de um ponto.

Tendo em vista a importância do pleno desenvolvimento desses temas, entendemos que "(...) o conceito de derivada é fundamental na Matemática e sua compreensão tem implicações na resolução de problemas em níveis avançados" (Bisognin & Bisognin, 2011, p. 525) e que precisa ser discutido em profundidade em cursos de formação inicial de professores de Matemática, abordando os aspectos analíticos e gráficos desse conceito. Além disso, entendemos ser importante que o estudante de um curso de Licenciatura em Matemática entenda o conceito de derivada não apenas como um conjunto de regras sem significado, mas que compreenda as suas várias concepções: infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa, aproximação e microscópica (Thurston, 1994).

Assim, com o objetivo de elaborar atividades de ensino que ajudassem estudantes a superar dificuldades na compreensão do significado de derivada e na relação entre o gráfico de uma função e o de sua derivada, selecionamos pesquisas que se debruçaram sobre esses temas. Nessa busca, encontramos trabalhos que investigaram os conhecimentos de estudantes sobre o conceito de derivada (Bisognin & Bisognin, 2011; Burns, 2014; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2013), e que apontaram dificuldades dos participantes na compreensão desse conceito e no trabalho com a representação gráfica da derivada de uma função. Também encontramos trabalhos que propuseram sequências didáticas que visam favorecer a superação dessas dificuldades por parte dos estudantes (González & Dolores, 2016), e outros que abordam as múltiplas representações do conceito de derivada e as Concepções de Thurston (Mação, 2014).

Baseados nessas pesquisas e nas inquietações destacadas, estabelecemos como o objetivo de nossa investigação, verificar quais concepções de derivadas estavam presentes na imagem de conceito de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática que já haviam estudado este conceito.

Referencial teórico

A abordagem de um novo conceito não deve se dar apenas por sua definição formal, mas também possibilitar seu reconhecimento em situações reais e sua utilização em contextos apropriados, uma vez que, segundo Tall e Vinner (1981),devemos distinguir entre os conceitos matemáticos definidos formalmente e os processos cognitivos pelos quais estes são desenvolvidos. Esse processo requer um conjunto de ideias sobre esse novo conceito, para que se possa formar a imagem de conceito, que estes pesquisadores definem como

> a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece (Tall & Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa).

(Vinner, 1992) diz que "(...) a imagem de conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito" (Vinner, 1992, p. 68), e pode ser também um conjunto de impressões ou experiências adquiridas pelo sujeito, ou mesmo ser composta por uma representação visual do conceito, caso este tenha representações visuais.

A imagem de conceito de derivada de um indivíduo, por exemplo, pode ter elementos como formas de representação (algébrica, gráfica, tabelas), propriedades (derivada da soma, derivada do produto) e elementos da definição (limite da razão incremental).

Segundo Tall e Vinner (1981), a imagem de conceito não precisa ser coerente o tempo todo, pois, dependendo do estímulo que é dado, um indivíduo pode ativar diferentes partes dessa imagem, desenvolvendo-a de forma a não constituir um todo coerente. Por exemplo, no estudo das derivadas, os estudantes podem ter na imagem de conceito apenas as técnicas de derivação, sem que elas estejam ligadas às concepções de derivada, ou podem não entender a derivada como a inclinação da reta tangente à uma curva em um ponto.

Ao nos depararmos com uma situação em que temos que resolver um problema que envolve um conceito matemático, precisamos ativar uma parte de nossa imagem de conceito associada a esse objeto matemático. A essa parte ativada da imagem de conceito, Tall e Vinner (1981) chamam de imagem de conceito evocada.

Quando a imagem de conceito tem poucos elementos relacionados ao conceito, esta precisa ser enriquecida e/ou modificada. De acordo com Tall e Vinner (1981), "[...] todos os atributos mentais associados a um conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na imagem de conceito" (Tall & Vinner, 1981, p. 152). No caso do conceito de derivada, entendemos que um sujeito tem uma imagem de conceito rica se nela estão presentes as concepções infinitesimal, simbólica, lógica, geométrica, taxa, aproximação e microscópica, propostas por Thurston (1994).

No desenvolvimento de conhecimentos matemáticos em longo prazo, a evolução cognitiva é mais do que uma associação de novas ideias já presentes em uma estrutura de conhecimento fixa de um sujeito, mas uma reconstrução contínua das ideias por meio de reorganizações das conexões mentais entre os elementos da imagem de conceito referentes a um objeto matemático, para formar estruturas de conhecimentos cada vez mais sofisticadas (Tall, 2013). Tall (2013) acredita ainda que há três formas diferentes de conhecimento matemático. A primeira é a corporificada, que vem dos objetos e de suas propriedades, como os entes geométricos, que podem ser manipulados fisicamente e concebidos como objetos mentais; a segunda é a operacional simbólica, que tem origem na representação e na manipulação dos objetos matemáticos por meio dos símbolos, como uma representação algébrica; e a terceira é a formal axiomática, que tem características da matemática formal, composta por axiomas, definições e teoremas. Assim, o desenvolvimento do pensamento matemático se dá de três modos distintos e não disjuntos, e os diferentes tipos de conceitos habitam estes que são os Três Mundos da Matemática, o conceitual corporificado, o operacional simbólico e o formal axiomático e que discutimos brevemente a seguir.

O Mundo Corporificado (ou conceitual corporificado) refere-se às percepções e ações humanas sobre objetos matemáticos, as quais desenvolvem imagens mentais que são verbalizadas de forma cada vez mais sofisticada e se tornam, em nossa imaginação, entidades mentais do objeto matemático. Um exemplo de abordagem da derivada no Mundo Corporificado é a busca da reta que fornece a melhor aproximação dos valores de uma função nas proximidades de um ponto, por meio do *zoom* em um software de geometria dinâmica, até que a reta "pareça" sobreposta à curva. Com essa abordagem, é possível verificar que a reta que fornece a melhor aproximação de uma curva nas proximidades de um ponto é a reta tangente à curva no ponto dado.

O Mundo Simbólico (ou operacional simbólico) trata da necessidade de efetuar ações sobre objetos do Mundo Corporificado. É nesse mundo que encontramos os símbolos matemáticos, que são utilizados para representar as ações pretendidas sobre objetos e/ou realizar cálculos matemáticos. Em algumas situações o estudo das derivadas é feito por meio do cálculo das derivadas de funções a partir de um conjunto de técnicas; estas são características do Mundo Simbólico.

O Mundo Formal (ou formal axiomático) diz respeito à construção do conhecimento formal por meio de sistemas axiomáticos, de acordo com a Teoria dos Conjuntos, isto é, por meio de axiomas, definições e teoremas, de forma que as propriedades de um objeto matemático são deduzidas a partir de demonstrações. No caso das derivadas, pode-se apresentar a definição de derivada em um ponto e, a partir dela, deduzir as regras de derivação.

No desenvolvimento das ideias matemáticas, Thurston (1994) ressalta que existem várias maneiras de se entender uma mesma ideia dentro da Matemática. Segundo este autor, a derivada é "[...] um exemplo que os matemáticos entendem de várias maneiras, mas que vemos nossos alunos com dificuldades" (Thurston, 1994, p. 3). Para corroborar essa perspectiva, Thurston (1994) destaca que há ao menos sete maneiras de se entender o conceito de derivada:

> (1) Infinitesimal: a razão da variação infinitesimal do valor da função para uma variação infinitesimal de variável.
> (2) Simbólica: a derivada de x^né $n.x^{n-1}$, a derivada de $sen(x)$é $cos\,(x)$,a derivada de$f\circ g$é $f'\circ g\,.\,g'$, etc.
> (3) Lógica: $f'(x)=d$ se e somente se para cada ϵexiste um δ tal que quando $0<|x|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-d\right|<\epsilon$.
> (4) Geométrica: a derivada é o coeficiente angular da tangente ao gráfico da função, isto se o gráfico tem uma tangente.
> (5) Taxa: a velocidade instantânea de $f(t)$quando té o tempo.
> (6) Aproximação: A derivada de uma função é a melhor aproximação linear para a função próximo a um ponto.
> (7) Microscópica: A derivada de uma função é o limite que se obtém olhando-a com microscópios cada vez mais poderosos (Thurston, 1994, p. 3).

No que segue, apresentamos os procedimentos envolvidos em nossa investigação.

Procedimentos metodológicos

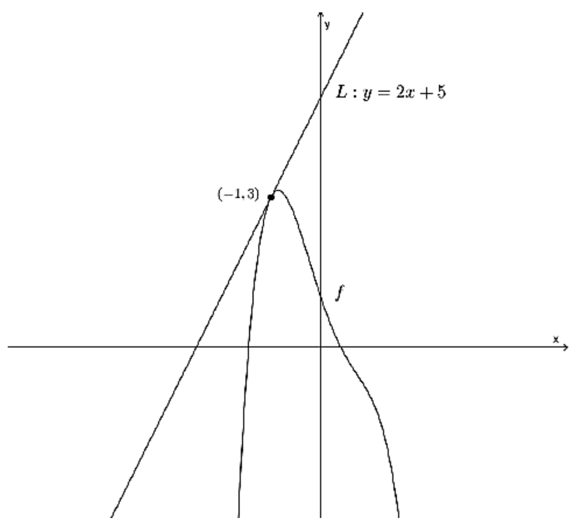
O Questionário elaborado para nossa investigação é composto de sete questões e foi aplicado para um grupo de quatorze estudantes de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública de ensino do Estado de São Paulo. Todos eles assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido e são tratados por pseudônimos nas análises.

A realização do questionário ocorreu no campus onde os participantes estudam e teve duração de 1h30. Não foi permitido nenhum tipo de consulta e o pesquisador não ofereceu nenhum tipo de orientação adicional além das constantes nos enunciados das questões. Seguimos com a análise de uma das questões presentes em nosso Questionário.

Análises dos dados

Apresentamos a análise dos dados coletados com a aplicação da Questão1do Questionário, realizada à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, das Concepções de Thurston e da imagem de conceito. Ao final, ainda com base em nossas considerações teóricas, apresentamos um resumo dos resultados obtidos com todas as questões. Nesta questão, procuramos avaliar a concepção geométrica de derivada dos participantes, isto é, verificar se entendem a derivada como a inclinação da reta tangente à função em um ponto dado.

Questão 1: Suponha que a reta L é tangente ao gráfico da função f no ponto $(-1, 3)$ como indicado na figura. Determine $f(-1)$ e $f'(-1)$.



Verificamos que apenas os participantes Theodoro e Zelda têm a Concepção Geométrica de derivada presente em suas respectivas imagens de conceito, pois entendem a derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto.

No que diz respeito aos Três Mundos da Matemática, apenas o estudante Theodoro (Figura) apresenta, em sua resposta, características do Mundo Formal, relacionando a derivada à inclinação da reta tangente.

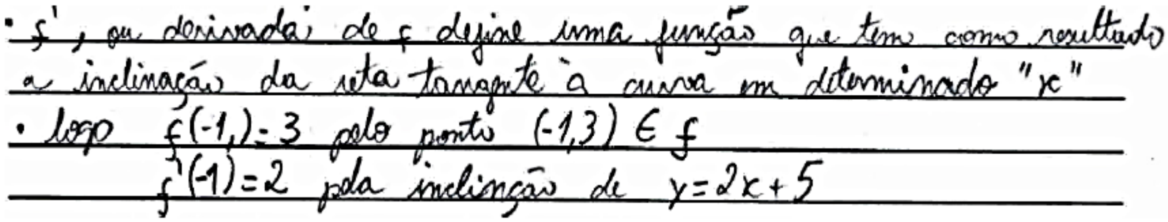

• f', ou derivada de f define uma função que tem como resultado a inclinação da reta tangente à curva em determinado "x"
• logo f(-1) = 3 pelo ponto (-1,3) ∈ f
f'(-1) = 2 pela inclinação de y = 2x + 5

Figura 1. Resposta de Theodoro para o cálculo de f'(-1) na Questão 1
Fonte: Arquivo pessoal

Alemão apresentou características do Mundo Simbólico ao aplicar as técnicas de derivação de uma função potência e de uma constante para derivar a equação da reta L. Com base nos registros apresentados, entendemos que o estudante interpretou a equação da reta como se fosse a lei de formação da função f, como podemos ver na Figura 2.

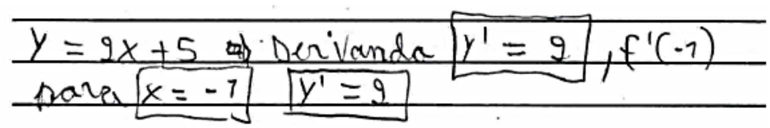

$y = 9x + 5 \Rightarrow$ Derivando $\boxed{y' = 9}$, $f'(-1)$
para $\boxed{x = -1}$ $\boxed{y' = 9}$

Figura 8. Resposta de Alemão para o Cálculo de f'(-1) na Questão 1
Fonte: Arquivo pessoal

Ao concluir, Alemão mostrou não ter a concepção Geométrica de derivada (ver Figura 3), pois interpretou que o coeficiente angular da reta tangente é a ordenada de um novo ponto da função f.

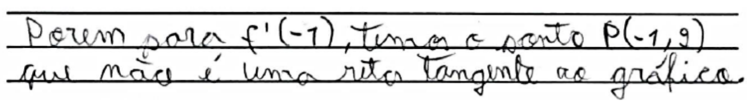

Porem para f'(-1), temos o ponto P(-1,9) que não é uma reta tangente ao gráfico

Figura 9. Conclusão de Alemão para o cálculo de f'(-1) da Questão1
Fonte: Arquivo pessoal

Assim como Alemão, outros participantes interpretaram a derivada de uma função como a reta tangente ao invés de interpretá-la como a inclinação da reta. Cremos que atividades que explorem as características corporificado-simbólicas, por meio do esboço gráfico desse tipo de situação, podem evitar essa confusão na interpretação da derivada, ou seja, entendendo-a como o coeficiente angular da reta tangente e não como a própria reta tangente.

Conforme destacamos acima, em relação aos Três Mundos da Matemática, verificamos que características do Mundo Formal relacionadas à Concepção Geométrica de derivada foram evocadas apenas por Theodoro. Também pudemos constatar que houve predominância de características simbólicas em relação às corporificadas nas respostas apresentadas pelos estudantes.

Na Tabela 1, apresentamos as concepções evocadas da imagem de conceito pelos participantes da pesquisa. Indicamos por SIM, se o participante evocou a concepção de derivada nas respostas apresentadas, e Não, nos casos em que as concepções não foram evocadas.

Tabela 1. Presença ou não das concepções de derivada na imagem de conceito de cada um dos participantes

	Reta tangente	Geométrica	Taxa	Simbólica	Infinitesimal	Lógica	Relação entre os gráficos
Alemão	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Ana	Não	Não	SIM	Não	Não	Não	Não
Apple	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Dada	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Iceman	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Léia	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Lili	SIM	Não	Não	SIM	Não	Não	SIM
Mara	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Não
Mário	Não	Não	SIM	Não	Não	Não	Não
Mat001	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Michael Corleone	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Nelito	Não	Não	Não	SIM	Não	Não	Não
Theodoro	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	Não	SIM
Zelda	Não	SIM	SIM	SIM	Não	Não	SIM

Fonte: Arquivo pessoal

De maneira geral, verificamos que dois participantes apresentaram, em suas respectivas imagens de conceito, a concepção geométrica, três a concepção taxa e um a concepção infinitesimal, e que a concepção simbólica foi utilizada apenas como um conjunto de regras, e não como um proceito, que é o entendimento do uso dos símbolos como procedimento e como conceito, o que nos levou a concluir que os participantes não tinham a concepção simbólica. Nenhum deles apresentou a concepção lógica e que apenas dois relacionaram o gráfico de uma função ao gráfico da primeira derivada.

Considerações finais

Após as análises das respostas apresentadas pelos participantes, entendemos que a ausência das diferentes formas de entender o conceito de derivada e da relação gráfica entre uma função e sua derivada na imagem de conceito dos participantes evidencia a necessidade de abordagens que possibilitem ao estudante realizar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática, em que características corporificadas e simbólicas sejam relacionadas às formais. Nesse sentido, acreditamos ser necessário um trabalho que envolva as várias formas de representação do conceito de derivada de uma função, para que os sujeitos possam utilizá-lo de forma articulada.

Nesse sentido, estamos de acordo com Sánchez-Matamoros, Garcia e Llinares (2013), que defendem que o desenvolvimento desse conceito está relacionado à forma com que os estudantes o constituem e na maneira como são capazes de relacionar as características de uma função às de sua derivada. Entendemos que esse tipo de trabalho e o uso articulado de várias concepções de derivada podem proporcionar uma imagem de conceito rica para os indivíduos.

Referências bibliográficas

Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. D. (out.- dez. de 2016). O ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial. *Revista Brasileira de Ensino, 2*(4), pp. 46-57.

Barufi, M. C. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo.

Bisognin, E., & Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(3), pp. 509-526.

Burns, A. (2014). *Calculus students' understanding of the derivative in relation to the vertex of a quadratic function.* Tese de Doutorado, Georgia State University, Georgia.

Dall'Anese, C. (2000). *Conceito de derivada: uma proposta para seu ensino e aprendizagem.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

González, M. D., & Dolores, C. (2016). Diseño de una situación de aprendizaje para la comprensión de la derivada. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(46), 49-70.

Mação, D. P. (2014). *Uma proposta de ensino para o conceito de derivada.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Pereira, V. M. (2009). *Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Rio de Janeiro.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, São Paulo.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (julho de 2013). La comprensión de la derivada como objeto de investigacion en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sociedade Brasileira de Educação Matemática. (2013). *Sociedade Brasileira de Educação Matemática.* Acesso em 18 de maio de 2017, disponível em Sociedade Brasileira de Educação Matemática: http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf

Staron, F. (2016). O monstro da reprovação em Cálculo Diferencial Integral. *Anais do 14º CONEX*, (pp. 1-7). Ponta Grossa.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* (1ª ed.). New York: Cambridge University Press.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *3*(12), pp. 151-169.

Thurston, W. P. (abril de 1994). On the Proof and Progress in Mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), pp. 161-177.

Vinner, S. (1992). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall, *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-80). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

EL DISCURSO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE QUINTO GRADO, AL RESOLVER SITUACIONES PROBLEMA CONTEXTUALIZADAS, QUE INVOLUCRAN NÚMEROS NATURALES

THE MATHEMATICAL DISCOURSE OF FIFTH-GRADE STUDENTS, WHEN SOLVING CONTEXTUALIZED PROBLEM SITUATIONS, INVOLVING NATURAL NUMBERS

Juan Carlos Rodríguez López, Tulio Amaya de Armas, Natalia Sgreccia
Institución Educativa Diego Echavarria Misas (Colombia), Universidad Católica de la Santísima Concepción (Chile), Universidad Nacional de Rosario (Argentina)
juank2212@gmail.com; tuama1@hotmail.com; nataliasgreccia@gmail.com

Resumen
Aquí se reportan los avances de un trabajo en curso, que se proyecta realizar con 170 estudiantes de quinto grado, con edades entre 9 y 12 años. El objetivo será analizar el discurso matemático utilizado por estudiantes de quinto grado, al resolver situaciones problema contextualizadas que involucren números naturales. Se espera que con el transcurrir de la aplicación de los cuestionarios se vayan mejorando las expresiones discursivas y los argumentos de los estudiantes sean más consistentes, donde incluyan tanto explicaciones, como razones de su actuar.

Palabras clave: discurso matemático, números naturales, situaciones problema contextualizadas

Abstract
This paper presents the progress of an ongoing research work, which is planned to be carried out with 170 fifth-grade students, aged between 9 and 12 years. It´s aimed at analyzing the mathematical discourse used by fifth grade students, when solving contextualized problem situations involving natural numbers. It is expected that with the application of the questionnaires, the discursive expressions start to improve and the students´ arguments be more consistent, including both explanations and reasons for their actions.

Key words: mathematical discourse, natural numbers, contextualized problem situations

Introducción

Tradicionalmente se ha buscado que los estudiantes desde la educación básica asuman roles acordes al discurso matemático usado en su nivel de escolaridad, que les permitan comunicar adecuadamente sus respuestas a una situación problema que se les plantee. Esto se da quizás porque el desarrollo del estudiante en su contexto genera en él un sinnúmero de posibilidades para el aprendizaje, entre ellas, el uso de discursos para expresar o exponer su nivel y capacidad de dar información (Tuyub y Cantoral, 2012). Martínez (2007a) referencia al discurso como una oportunidad para exponer la complejidad de la comunicabilidad desde una enunciación de la dimensión dialógica del mismo discurso.

Para Pimm (2009), el análisis del discurso implica el estudio del habla o la escritura que se produce de forma natural por encima del nivel de la oración. Pero según Foucault (2010, p.141) “la materialidad del discurso obedece a un apriori histórico que le ha dado vida. El sujeto hablante es excluido de la transformación del discurso, ya no es quien constituye la realidad y la dota de sentido”, y según Soto y Cantoral (2014), esta exclusión conlleva a otro ambiente que posibilita el fracaso, por falta de claridad en el significado, es decir el discurso ha sido excluido de los procesos dialógicos de instrucción en el aula de matemáticas, omitiendo que éste tiene su valor en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las mismas.

Teniendo en cuenta lo anterior, hablar de discurso, en específico en las matemáticas, es brindar el espacio a un resultado de expresiones idiomáticas tratando de justificar el sentido asignado a algo, desde una postura de un saber adquirido, al relacionarlo con elementos del contexto donde quien aprende habita, por consiguiente, debería permitir a quien habla o escribe, comunicar la relación entre elementos académicos analizados en la escuela, con elementos equivalentes de la cultura donde se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje y para llegar a ello es indispensable hacer adecuaciones y diversas transformaciones a las ideas originales, centro de la discusión. Por lo que, resulta de importancia que los procesos comunicativos sean adecuados en las interacciones sociales, ya que según Duval (2017, p.58) “no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación”, y los discursos son representaciones coloquiales de los objetos de estudio. Esto permite inferir que es necesario que los estudiantes tengan un desarrollo comprensivo de un lenguaje matemático apropiado que les permita utilizar símbolos que los lleven a resolver situaciones problema y comunicar adecuadamente los resultados obtenidos.

Crespo (2007, pp.9-10) considera que:

> la matemática no es una ciencia que surge aislada de la sociedad, sino inmersa en ella y por lo tanto recibe influencias fuertemente basadas en el pensamiento, las necesidades y características del escenario en que se desarrolla. De esta manera, es que el contexto social, cultural e históricamente determinado actúa como parte indiscutible de este proceso de nacimiento, desarrollo y evolución de la ciencia, debiendo tenerse en cuenta que el conocimiento no surge en escenarios escolares, hecho que por lo tanto, debe tenerse en cuenta en la construcción del discurso matemático escolar.

En lo planteado por Crespo (2007) se infiere que el contexto y las matemáticas hacen parte de esa sinergia para hacer converger una condición de relaciones en los aprendizajes, permitiendo que estas estructuras integradoras posibiliten solidez en una persona, en su interacción consigo mismo y con los demás. Sin embargo el saber sí es susceptible de nacer, desarrollarse y ser potencializado en contextos escolares. Por lo que de no atender elementos característicos que posibiliten un discurso asertivo en una comunicabilidad podría generar barreras ante el aprendizaje y la relación con el otro, y asumir estos acercamientos comunicativos podría facilitar un discurso efectivo que posibilite un crecimiento integral de la persona.

En este trabajo se tiene como objetivo analizar el discurso matemático en estudiantes de quinto grado al comunicar sus respuestas a situaciones problemas contextualizadas que involucran números naturales. Conscientes de que el discurso matemático de los estudiantes al expresar o comunicar su respuesta, puede estar influenciado por expresiones utilizadas en el contexto sociocultural donde habitan.

Encuadre teórico

La utilización de dispositivos lingüísticos como argumentos desde su lenguaje contextual y la forma de asumir una proposición ante la resolución de un problema, enmarca una oportunidad comunicativa para transmitir la severidad o seguridad de identificar particularidades del discurso como medio a la demostración de adquisición cognitiva (Martínez, 2007b). Según Ricoeur (2009) el discurso es un diálogo de sucesos con sentido, de proposiciones y de referentes, donde el referente es quien fundamenta la existencia de la palabra para exteriorizar lo expresado ante pares en un proceso de interacción social.

Atendiendo a lo anterior el discurso en matemáticas, puede entenderse como una relación de expresiones que le permite al que comunica algo relacionado con la matemática hacerse entender por otro, al resolver una situación socialmente compartida. Además, la utilización de dispositivos lingüísticos como argumentos desde su lenguaje contextual y la forma de asumir una proposición ante la resolución de un problema, marcan una oportunidad comunicativa para transmitir la severidad o seguridad de identificar particularidades del discurso como medio a la demostración de adquisición cognitiva.

En este sentido, la comunicación matemática es parte integrante del conocer, así que usar un discurso para expresar una idea matemática significa que se puede usar un lenguaje, con significados asignados con una estructura que permita comunicar, pero sobre todo entender ideas de lo expresado (Sepúlveda, Medina y Sepúlveda, 2009). Y según Duval (2017, p.9) "una explicación da una o más razones para volver comprensible un dato. Estas razones propuestas tienen en realidad una función casi descriptiva (…) Y como en todas las descripciones, el valor epistémico de las razones enunciadas no tienen ningún papel". Por lo que se puede inferir que el discurso y sus argumentos permiten ambientar la exposición del objeto que se quiere mostrar y su relación con lo institucionalizado.

Poniendo en relación lo expresado por Duval (2017), donde se le da importancia al reconocimiento del lenguaje como un medio valioso para sacar al escenario aquellos dispositivos que dan claridad a la idea expuesta ante una comunicación, con lo planteado por Martínez (2007b) quien hace un acercamiento a la relación estrecha que presenta el empoderamiento del dinamismo humano con el lenguaje utilizado ante la identificación y concepción del discurso, y cómo este facilita mediar o relacionar el avance social y el crecimiento de la lengua.

Los caracteres intencionales en los que se encuadra la comunicación y sus canales, permiten el registro con los que se ponen en juego los elementos imaginarios, figurales o fenomenológicos que se desean manifestar en el momento de disponer un discurso, por lo que toman gran importancia las representaciones o fenómenos que sean utilizados al instante de trasmitir una idea o intención de comunicación.

Hay algunos conocimientos o signos semióticos que dan cuenta de un discurso matemático en el momento de poner en escena la transmisión de las representaciones y cómo se ajustan estas a los saberes; al respecto Soto y Cantoral (2014) exponen que estos conocimientos se centran en la práctica material y están sujetos a características del contexto, raza e idiosincrasia, desde allí se construyen históricamente las normas, representaciones y las diferenciaciones como las divisiones en los grupos sociales al referenciarse sus acciones.

El uso del lenguaje contextual condiciona la comunicabilidad matemática y está dado desde determinados factores en la ecología de quien lo transmite. Dentro de este marco ha de considerarse la postura de Duval (2017):

> Las expresiones del lenguaje natural de una explicación así como las de un razonamiento, presentan una considerable variable discursiva. También es importante no confundir las características discursivas superficiales en los discursos explicativos, argumentativos o demostrativos con los funcionamientos cognitivos que los sostienen. En realidad, lo que distingue radicalmente al razonamiento y a la explicación es que lo primero tiene por objetivo la modificación del valor epistémico de un enunciado-objetivo y la determinación de su valor de verdad en el momento en que se satisfacen ciertas condiciones particulares de organización, pero no es así con la segunda la explicación no tiene el mismo objetivo: de ninguna manera se apoya en los valores epistémicos de las proporciones usadas, sino sólo en su contenido (p.12-13).

Los estudiantes se encuentran permeados por la idiosincrasia de su contexto social y familiar, lo que le ha de facilitar hacer uso de elementos lingüísticos para las explicaciones o sustentaciones de posicionamientos ante la resolución planteada de un problema. El lenguaje resulta la mejor opción o lo más pertinente y la única forma para establecer comunicaciones entre pares y estos con su medio. Vasco (2007) expone que los sistemas simbólicos no son solo un posicionamiento del pensar, tampoco ofrecen únicamente cálculos simbólicos eficaces; cuentan también o sirven para generar un paso de lo delimitado o concreto a lo abstracto y de lo general a lo particular.

Todos estos elementos comunicativos enmarcan una intención en encuadrar ideas hasta llegar a una conclusión aprehensiva del conocimiento, soportando la calidad en ese discurso sin delimitar ese conocimiento a un lenguaje propio de las matemáticas. El discurso como medio o herramienta para soportar la intención de exponer, describir una resolución a un problema, permite plantear ideas que amplían en su estado las formas de aprendizaje como la enseñanza misma.

Desde lo planteado por Schneuwly (1992) las expresiones están determinadas por una razón la cual genera variaciones en el discurso, por lo que la apropiación del conocimiento no es únicamente real desde la perspectiva que el maestro ha tratado de generar en el estudiante, sino que las expresiones están mediadas por los estados de ánimo en que se encuentre el que lo hace. Atender sus expresiones o discursos y su apropiación da evidencia del avance y la posibilidad de construir un currículo abierto al aprendizaje del estudiante, esto facilita la inclusión y motivación al aprendizaje, la relación del conocimiento con su espacio de vida y sus acciones cotidianas y la aplicabilidad de este a su propia realidad.

Los discursos manifiestan un estilo según el individuo y su rigor como la proyección que tenga intencionalmente o lo que se desea poner en contexto y estos son de suma importancia en el desarrollo del ideal expuesto por el educando hablante en el momento necesario. Martínez (2007) menciona algunos estadios que propone Badjin como géneros discursivos, refiere los primarios también llamados simples y se componen de diálogos familiares, relatos cotidianos, estos se muestran de manera espontánea; y los secundarios también denominados complejos de las vivencias sociales, enfocan diálogos cotidianos, el saber. Su dispositivo literal implica suficientes grados de producción: pedagógicos, literarios, científicos, jurídicos.

Marco metodológico

Se proyecta una metodología eminentemente cualitativa, materializada en un estudio descriptivo de casos (Servan y Servan, 2010). Se plantea enfrentar a los estudiantes a seis cuestionarios donde, en cada uno deben resolver una situación problema contextualizada que involucre números naturales. Esto permitirá analizar las estrategias de solución y los discursos utilizados al comunicar sus respuestas y argumentar sus procedimientos.

Se prevé una muestra de informantes compuesta por 170 estudiantes con edades entre 8 a 12 años del grado quinto; son estudiantes provenientes de estratos socioeconómicos 1 y 2 (el estrato socioeconómico hace referencia a una clasificación hecha por el estado, de acuerdo al grado de vulnerabilidad socioeconómica; donde los estratos 1 y 2 son aquellos que presentan mayor grado de vulnerabilidad), ubicada en la comuna 5 y 6 de la ciudad de Medellín zona noroccidental de la ciudad.

Se escogerán, se diseñarán o se adaptarán seis cuestionarios con preguntas abiertas. Los cuestionarios son comparables entre sí y responden a las mismas categorías de análisis previamente definidas, es decir, las cuestiones por las que se indaguen en cada cuestionario correspondan a las mismas categorías de análisis. Por lo que puede suponerse que las respuestas dadas a todos los cuestionarios deberán ser comparables entre sí para facilitar su análisis. Con las respuestas dadas a los cuestionarios se pretende analizar los discursos de los estudiantes al resolver problemas con los números naturales y sus diferentes representaciones semióticas los cuales se verificarán en sus producciones al resolver las situaciones planteadas de los cuestionarios.

Los cuestionarios se validarán según criterios de expertos, así mismo se hará un pilotaje a 8 o 10 estudiantes, ambas estrategias con el fin de buscar mayor consistencia y claridad en los cuestionarios, tratando de minimizar las dificultades comprensión textual, al leer los cuestionarios. El tiempo de aplicación de cada cuestionario será de 50 minutos correspondiente a una hora de clase.

Se harán entrevistas por grupos focales por sesión de trabajo, se realizarán preguntas secuenciales con mayor profundidad de acuerdo al nivel de respuesta presentada por el estudiante interviniente en la investigación. Y se hará un proceso de observación participante durante la aplicación de los cuestionarios como proceso complementario que permita registrar en detalle dicho proceso.

Luego de aplicados los cuestionarios, la información se procesará utilizando la técnica análisis de contenido (Bernárdez, 1995). Los cuestionarios se expondrán a estudio para considerarlos por segmentos y agrupaciones de acuerdo a las categorías de análisis previas y las emergentes o inductivas.

Resultados esperados

Con la aplicación de los dos primeros cuestionarios se pretende identificar el estado inicial del discurso matemático de los estudiantes del grado quinto al dar respuesta a las situaciones problema contextualizadas con números naturales que se les planteen. Y se espera que el contexto donde se plantean las situaciones puedan favorecer los procesos interpretativos y eso les permita aflorar su discurso al comunicar las estrategias utilizadas en sus procesos de solución. Es aquí donde se espera que aparezcan las características a través de las cuales se pueda clasificar el estado inicial del discurso matemático de los estudiantes, que permitan, desde el análisis de su lenguaje o su oralidad hacer un caracterización de los elementos lingüísticos que sea posible identificar (Pimm, 2004), que facilite determinar la postura que asumen frente a una situación específica e identificar la influencia de elementos contextuales en su discurso. Además los grupos focales y la observación participante deben aportar información cualitativa del estado inicial del discurso de los estudiantes de la muestra.

En la información obtenida de todos los instrumentos y técnicas de recolección de la información se pretende establecer relaciones entre las expresiones discursivas utilizadas por los estudiantes. Además, se espera tener evidencia del papel que asume el estudiante en la comunicación de su respuesta a una situación problema que involucra números naturales, ¿Cómo se evidencia esto en el discurso del estudiante? ¿Qué elementos del contexto sociocultural permean el discurso de los estudiantes al comunicar sus respuestas a las cuestiones que se les planteen?

Estos mismos elementos servirán de insumo para el análisis de los argumentos en las expresiones discursivas de los estudiantes. Se esperan expresiones discursivas muy mediadas por el contexto sociocultural donde habitan los estudiantes, con argumentaciones pobres, donde primen las explicaciones con pocas justificaciones. En el análisis de los argumentos en las expresiones discursivas de estudiantes de quinto grado se espera poder identificar y analizar la postura que asume un estudiante al comunicar un procedimiento realizado para dar respuesta a una situación problema que involucra números naturales. ¿Cómo se inmiscuye el estudiante en sus propios procesos discursivos?, es decir, cómo se referencia el estudiante a sí mismo en su discurso.

Deben aparecer algunos patrones discursivos donde predominen las explicaciones sobre las justificaciones de lo que se hace. Sin embargo, inicialmente, se esperan justificaciones o razones del actuar con poca autonomía, donde la verdad la determina el docente, pero que con el paso del tiempo, por la aplicación de los instrumentos y la interacción en el proceso, se gane mucha autonomía en las argumentaciones que se hagan de lo que se haga.

Conclusiones

Se espera que el contexto donde se plantearán las situaciones problema propuestas en los cuestionarios puedan favorecer que los argumentos sean más ricos, así mismo, que con el transcurrir del proceso de aplicación de los instrumentos de recolección de la información, estos se vayan convirtiendo en un proceso interventivo, donde el estudiante gane autonomía y pueda creerse sus propias justificaciones, sin tener que acudir al profesor como validador de lo que se dice. Así que la expectativa es que en los cuestionarios finales se obtengan expresiones discursivas mucho más robustas, acordes a lo esperado en estudiantes de esas edades, donde se estimulan estos procesos desde temprana edad. En definitiva, por la corta edad y la poca experiencia de los estudiantes con este tipo de procesos, se espera que sus discursos estén en una etapa naciente, que por lo absorbente de su edad también, puedan superar con facilidad en el proceso.

Referencias bibliográficas

Bernárdez, E. (1995). *El papel del léxico en la organización textual.* Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. Tesis de Doctorado no publicada. México: Instituto Politécnico Nacional / Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.

Foucault, M. (2010). *La arqueología del saber*. México: Siglo XXI.

Jiménez, E., Jiménez, E. & Jiménez, J. (2014). Estrategia Didáctica para Desarrollar la competencia "Comunicación y Representación" en Matemática. *Revista Escenarios*, *12*(1), 17-33.

Martínez, M. (2007a). La construcción de los sujetos discursivos o la argumentación den la dinámica enunciativa del discurso. En A. León (2007). *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas* (pp.29-62). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Martínez, M. (2007b) La orientación social de la argumentación en el discurso: una propuesta integrativa. *Parlamento*, 1-32.

León, O. (2007). Las experiencias con el registro figural y la constitución de argumentos demostrativos. En A. León. *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas* (pp.87-106). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Pimm, D. (2009). Method, certainty and trust across disciplinary boundaries. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, *41*(1–2), 155-159.

Pimm, D. (2004). Discourse analysis and mathematics education: An anniversary of sorts. In M. Niss (Ed.), Proccedings of the 10th International Congress on Mathematics Education (pp. 1- 11). Roskilde, Denmark: ICMI.

Ricoeur, P. (2009). *Tiempo y narración*. México: Siglo XXI.

Schneuwly, B. (1992). La concepción Vigotskiana del lenguaje escrito. *Revista comunicación lenguaje y educación, 16, 49-59.*

Sepúlveda, A., Medina, C. & Sepúlveda, D. (2009). La resolución de problemas y el uso de tareas en la enseñanza de las matemáticas. *Revista Educación Matemática, 21(2),* 79-115.

Servan, P. & Servan, I. (2010). *Intervención en la familia. Estudios de caso*. En G. Serrano (Coord.), *Modelo de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: animaciones prácticas* (pp.221-252). Madrid: Narcea.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Revista Bolema*, *28*(50), 1525-1544.

Tuyub, I. & Cantoral, R. (2012). Construcción social del conocimiento matemático durante la obtención de genes en una práctica toxicológica. *Revista Bolema*, *26*(42A), 311-328.

Vasco, C. (2007). Análisis semiótico del algebra elemental. En A. León (2007). *Argumentación y semiosis en la didáctica del lenguaje y las matemáticas* (pp. 107-136). Bogotá: Fondo de Publicaciones de la Universidad distrital Francisco José de Caldas.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

UN ESTUDIO SOBRE EL PAPEL DE LA COMPARACION EN GEOMETRIA

A STUDY ON THE ROLE OF COMPARISON IN GEOMETRY

Selvin Nodier Galo-Alvarenga, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Honduras, México)
selvin.galo@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen
Nuestra investigación parte de la hipótesis de que la comparación vive entre diversas formas de pensamiento. Con base en ello, realizamos un estudio de dos obras: los *Elementos* de Euclides –Geometría Clásica– contrastado con un texto escolar de Geometría Plana –parte del discurso Matemático Escolar– para confrontar la forma de presentar los conocimientos geométricos y las prácticas emergentes entre ambos, es decir, la confrontación de sus racionalidades. Como resultado se hace evidencia de que la *comparación* es una práctica que sustenta el sistema axiomático deductivo presente en ambas obras.

Palabras clave: pensamiento geométrico, comparación, prácticas

Abstract
The present study is guided on the hypothesis that the comparison lives between several thinking ways. Based on it, we made a study on two works: the Euclid´s Elements, as Classical Geometry, contrasted with a school text of Plane Geometry, part of School Mathematical discourse, to compare the way of presenting the geometric knowledge and the emerging practices in both contexts, that is, the contrast between both approaches. As a result, we give evidence that the comparison is a practice that sustains the deductive axiomatic system present in both works.

Key words: geometrical thinking, comparison, practices

Introducción

Partimos de una premisa básica: el conocimiento matemático se construye socialmente y está asociado a un conjunto de prácticas humanas, con un origen y función social determinados. En su proceso de difusión institucional se los modifica (Cantoral, 2013), y en muchas ocasiones se los desliga de las prácticas asociadas en su construcción. Se van olvidando aspectos esenciales de su proceso de construcción y se potencian significados que en la mayoría de los casos se orientan a las últimas prácticas asociadas a este proceso, tales como la aritmetización que reporta Montiel (2005) para el caso de la trigonometría y Reyes-Gasperini (2016) para el caso de la proporcionalidad.

La Geometría desde sus inicios –de acuerdo con la evidencia con la que se cuenta, por ejemplo, el papiro de Rhind (Chace, Manning y Archibald, 1927)– surge vinculada con la agrimensura egipcia, develando enigmas o problemas prácticos (Struik, 2002), ligada también a la astronomía y la construcción, entre otras ramas del quehacer humano. Los *Elementos* de Euclides, por ejemplo, son producto de una racionalidad griega basada en la argumentación del pensamiento mediante primeros principios. Esto se infiere de las discusiones, diálogos y debates, que surgían en torno al pensamiento filosófico que se observan en obras como los diálogos de Platón, por lo que se volvía necesario el convencimiento de la audiencia o interlocutor por medio de argumentos sólidos, irrefutables. Recordemos su tradición por pensar en los primeros principios del universo y de todo cuanto existe, el *arjé*, ya desde la época de Tales de Mileto. En comentarios de algunos estudiosos de los griegos clásicos como Proclo citado por Vega (1991) se muestra su opinión acerca de que “sólo si se cuenta con unos elementos de geometría, cabe entender el resto de esta ciencia” (p. XXII). En el mismo sentido, Heath (1921) menciona que los Peripatéticos decían que “la retórica, la poesía y la música popular podían ser entendidas sin un curso de instrucción, pero no se puede adquirir conocimiento de unos temas llamados con un nombre especial *matemáticas*” (p. 3). A lo que Boyer (1994) agrega: “los Elementos: se trataba claramente de un libro de texto... un texto introductorio que cubría toda la matemática elemental” (p. 145). Entonces, los *Elementos* son un texto dirigido a un principiante en Geometría y los problemas que esta disciplina matemática resuelve están relacionados con otras ramas, como es el caso de la trigonometría que surge para resolver problemas astronómicos de la época, o la Óptica donde se usa una geometría para estudiar del fenómeno visual en aquel contexto griego (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017).

Por otro lado, como menciona Jan Struik (2002): “la mayor parte de nuestra geometría escolar está tomada, a menudo literalmente, de ocho o nueve de los trece libros”. Pero en ese proceso de introducción a la escuela se olvida la racionalidad con la cual fue escrita la obra y la naturaleza de ese conocimiento; en la escuela actual se orienta a aspectos como lo algorítmico, pues la mayor cantidad de problemas están relacionados con encontrar áreas, volúmenes, relaciones proporcionales aritméticas, o en otros casos; la mayor importancia se le dedica al método deductivo, sin estudiar su uso, ni razón de ser de esta forma de razonamiento. La cual es relativa a la época donde se construye, con criterios de validez y rigor diferentes a los que tenemos hoy en día.

Pretendemos entonces un estudio sobre la Geometría Clásica plasmada en los *Elementos* de Euclides, buscando develar la racionalidad detrás de esta obra, la forma de concebir la Geometría y las prácticas asociadas a la construcción de este conocimiento matemático; posteriormente contrastando con un texto escolar de Geometría como parte del discurso Matemático Escolar actual, para confrontar el papel de las prácticas, significados y usos asociados en ambos casos.

Por otra parte, de acuerdo con lo reportado en algunas investigaciones, postulamos que la comparación es una de las prácticas presentes en la construcción de conocimientos geométricos, además de otros campos del conocimiento matemático; por lo que iniciamos describiendo algunos antecedentes referentes a esta noción. Dichos antecedentes forman parte de dos grupos de investigaciones: por un lado, aquellas relacionadas con las ideas variacionales desde la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV); por el otro, ubicamos algunos estudios que aluden a la comparación dentro de una variedad de disciplinas de la matemática, como ser la Geometría o el Álgebra.

Salinas (2003) postula como idea central en el Pensamiento y Lenguaje Variacional a la comparación; asociada a la "acción de establecer diferencias entre estados" (p. 5). Al respecto, Caballero (2013) agrega la especificación acerca de esos estados, caracterizando a la comparación como:

> "la acción de establecer diferencias entre estados, uno anterior y uno posterior, o bien, dos estados de dos fenómenos diferentes, lo que permite identificar si hubo un cambio y poder analizarlo con base en las características de esos cambios y la variación en esos estados" (p. 33).

Uno de los propósitos de la investigación de Salinas (2003) es estudiar nociones variacionales desde etapas escolares tempranas, caracterizando su evolución para plantear una secuencia didáctica que fortalezca las estrategias variacionales que son base para la construcción de la noción de máximos y mínimos; encontrando que la comparación esta en la base del PyLV.
Siguiendo esta misma idea el trabajo de Fernández (2004) argumenta que en la optimización de funciones se pone en juego la práctica de comparación. Agregando que una característica trascendental que deberán abordar los jóvenes en la secuencia didáctica que propone para el Método de Multiplicadores de Lagrange es "la comparación de las alturas [imágenes] en el punto de restricción… parte vital en la construcción del método" (p. 134).

Trabajos posteriores como el de Caballero (2013) centrado particularmente en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato, se interesa por las dificultades alrededor del desarrollo de este pensamiento, analizando las prácticas propias del estudio de la variación. Para alcanzar tal fin diseña un conjunto de actividades en las que analiza las estrategias de respuesta de los profesores. Aportando para dicho análisis una caracterización de las estrategias –prácticas– variacionales.

En cuanto al otro grupo de investigaciones que forman parte de los antecedentes, están las aportaciones de Guacaneme (2012) quien, en su examen del libro V de los *Elementos* de Euclides considera la comparación de magnitudes, en tanto, procedimiento matemático; describiendo que para "parejas de magnitudes homogéneas aparece el proceso general de comparación para establecer cuándo una excede, es igual o resulta inferior que la otra. A través de estas comparaciones se colige cuándo una magnitud es igual, desigual, mayor o menor que otra" (p. 111). Haciendo alusión a la actividad de comparación para inferir o deducir acerca de la relación –igualdad o desigualdad– que guardan las magnitudes homogéneas. En cuanto a la proporción Guacaneme (2012) argumenta que "las razones se pueden comparar para establecer si están en la misma razón, o si una es mayor o es menor que otra, de manera análoga a como se hace con los números y las magnitudes" (p. 114). Siguiendo la misma idea, en su trabajo sobre la proporcionalidad Reyes-Gasperini (2016) refiere a la proporción como una relación de relaciones, donde se comparan dos relaciones –razones–. Reporta la evolución pragmática (una anidación de prácticas) *comparar–equivaler–conmensurar*, que acompaña la evolución conceptual *razón–proporción–proporcionalidad*. La autora ubica a la comparación en el nivel de *acción* –en el modelo de anidación de prácticas–, como el acto de "elegir y relacionar las magnitudes" (p. 269). Igualar–equivaler como la actividad de "construir una unidad de medida" y medir–conmensurar como la práctica socialmente compartida de "aritmetizar la relación" (p. 540). Además, agrega que la comparación en torno a la proporcionalidad "es intrínseca a la idea de razón" (p. 550). Argumenta que la "acción de *comparar* es intuitiva, deliberada, pues no precisa explicación que fundamente su accionar". Por otro lado, describe que "*equivaler* es una actividad ya que precisa de una mediación, la igualdad de comparaciones, en la acción de construir una unidad de medida". Además, afirma que "*medir* es determinar por comparación una longitud (extensión, volumen, o capacidad), se compara una magnitud con un patrón de referencia". (p. 552)

En torno a otro estudio donde interviene la comparación –en este caso orientado a la generalización de patrones con base en el PyLV– se considera esta en el sentido que: "corresponde a la identificación de la transformación que un valor sufre para convertirse en otro. Implica reconocer la variación que existe entre dos valores" (López-Acosta, 2016, p. 29). Además, alude a que la comparación entre un estado y otro (una figura y otra) del patrón permite identificar el cambio de un caso a otro en la secuencia. Añadiendo que, en el caso numérico, la comparación se hace con base en diferencias y en el caso visual sobre la agrupación de elementos.

Después de lo mencionado anteriormente, donde resaltamos investigaciones en las cuales se hace explícitamente alusión a la comparación, desde diferentes puntos de vista, ubicados en disciplinas diferentes, que van desde la aritmética, el álgebra, la geometría y el cálculo; nos disponemos a estudiar las prácticas presentes en la construcción del conocimiento geométrico desde los *Elementos* de Euclides en el libro I, en contraste con las presentadas en el discurso Matemático Escolar expresadas en el texto escolar de Geometría de la autoría de Wentworth y Smith. Pretendemos identificar las prácticas asociadas a la construcción social del conocimiento geométrico, los usos y significados asociados a las nociones geométricas en los Elementos y contrastar con los usos y significados promovidos en el texto escolar, parte de la ideología del discurso Matemático Escolar actual.

Consideraciones teóricas

Desde nuestra postura teórica, la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa –TSME– nos ocupamos por el estudio de la construcción social del conocimiento y su difusión institucional (Cantoral, 2013), asociada a un conjunto de prácticas alrededor de dicha construcción que dan sentido y significado a dicho conocimiento mediante el uso –saber–. Se considera al saber en sus cuatro dimensiones: didáctica, referente a cómo se produce la difusión institucional del saber matemático; cognitiva, relativa a la apropiación del saber y a la forma en cómo se desarrolla el pensamiento matemático; epistemológica, que trata sobre la naturaleza del saber; y sociocultural concerniente al estudio situado del saber, histórica, contextual y funcionalmente (Cantoral, 2013; Reyes-Gasperini, 2016).

Respecto al estudio en cuestión, consideramos estas dimensiones del saber centrándonos en una obra original –los *Elementos* de Euclides– y en un texto escolar de Geometría plana (Wentworth y Smith, 1913). El primero por ser una de las primeras obras en Geometría, además de ser la base, no solo de los conocimientos geométricos, sino de la matemática en general y la enorme influencia que ha tenido en la enseñanza de la Geometría hasta nuestros días. El segundo por ser un texto muy utilizado en las décadas anteriores y que aún forma parte de la bibliografía en varias universidades mexicanas.

Aunado a la contemplación del saber en todas sus dimensiones antes mencionadas, se encuentran los principios de la TSME que rigen las consideraciones en torno al estudio de la construcción social del conocimiento matemático: la racionalidad contextualizada, el relativismo epistemológico, la normatividad de la práctica social y la resignificación o significación progresiva (Cantoral, 2013; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014; Reyes-Gasperini, 2016).

Como ya hemos resaltado, también prestaremos particular interés a las prácticas asociadas a la construcción del conocimiento geométrico y su difusión institucional; ya en el apartado anterior se mencionó la postulación de la comparación como una práctica en la base de los mencionados conocimientos. Al respecto, (Salinas, 2003) resalta que esta práctica puede tener manifestaciones diferentes dependiendo el contexto donde se encuentre, así su naturaleza puede variar, manteniendo su esencia.

Aspectos metodológicos

Desde la TSME se considera que el saber es una construcción social, que se significa y resignifica, en un tiempo y espacio; para estudiarlo se debe explorar desde la mirada de quien lo construye, quien lo usa, quien lo aprende, desde la perspectiva histórica, cultural e institucional (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Cómo ruta metodológica realizamos una problematización alrededor de la génesis de los conocimientos geométricos, para responder a las preguntas ¿Cuáles son las prácticas asociadas a la génesis del conocimiento geométrico y en su difusión institucional?, ¿qué usos y significados de las nociones geométricas se promueven en los *Elementos* y en el texto escolar? Realizamos un análisis de contenido basado en las consideraciones de Mayring (2000) y Cáceres (2003), entre otros. Este es explicitado en una componente contextual donde estudiamos los *Elementos* de Euclides situado histórica, contextual y funcionalmente, con la intención de conocer la naturaleza de la construcción de los conocimientos geométricos compilados en la obra; y de igual manera en el texto escolar de Geometría de Wentworth y Smith. La primera obra por ser el primero con el que contamos en cuanto a conocimiento geométrico estructurado, que como es sabido, ha marcado la tendencia de enseñar y concebir la Geometría por más de dos milenios; la segunda obra por ser un texto extensamente utilizado en el siglo pasado y en el actual –forma parte de la bibliografía para Geometría en algunas universidades mexicanas–.

Aunado a un análisis textual, proponemos una dialectización –la confrontación– de los *Elementos* con el texto escolar de Geometría plana. Analizamos de forma global cada obra, su intencionalidad, la forma en que desarrollan las proposiciones. Posteriormente se estudian de manera detallada los procedimientos descritos en cada una de las proposiciones del primer libro de los *Elementos*, colocando a la par la proposición homóloga del texto escolar; cada una de estas proposiciones representa una unidad de análisis. Luego de la descripción, se intenta develar aquellas prácticas detrás de los procesos argumentativos en las respectivas construcciones y demostraciones de cada proposición, atendiendo a preguntas del tipo. ¿que y como lo hacen?, ¿para qué lo hacen? Posteriormente se agrupan las proposiciones en categorías de análisis emergentes del mismo análisis; esto es, con base en las herramientas geométricas puestas en juego y la intencionalidad que observamos de un conjunto de proposiciones. Esto permitirá una discusión alrededor de usos y significados de nociones geométricas presentes en la obra de Euclides y que se han opacado por el discurso Matemático Escolar actual; además de reportar una categorización más específica de las proposiciones de los Elementos, esto con base en la puesta en juego de herramientas y nociones geométricas.

■ Ejemplos del análisis y resultados

Para ejemplificar nuestro análisis presentaremos algunos esbozos del trabajo realizado con las proposiciones de ambas obras relativas a Geometría.

Ubicándonos en el libro primero de los Elementos, se trabaja alrededor de métodos y herramientas que le posibiliten la demostración de proposiciones; por ejemplo, el triángulo equilátero que construye en la proposición 1 permite trasladar distancias iguales sobre el extremo de un segmento y posteriormente usar la propiedad de la congruencia entre sus lados para encontrar segmentos congruentes que posibilitaran el establecimiento de la congruencia de un triángulo. Para designar las proposiciones se una la letra “P” seguida del número de la proposición y “Prob.” o “T” si es un problema de construcción o un teorema como tal, seguido del número de los mimos. Las imágenes son construidas mediante el software Geogebra y las proposiciones y su demostración tomadas de la triangulación entre la traducción anotada por Puertas (1991), la versión en castellano antiguo de Zamorano (1576) y la versión en inglés por Fitzpatrick (2008) para el caso de los *Elementos* de Euclides; y por el lado del texto escolar de Wentworth y Smith se consideran las versiones en inglés de 1913, la edición mexicana de 1979 y 2001.

Proposición en los Elementos
P1 Prob. 1

Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada.
Sea AB la recta finita dada.
Así pues, hay que construir sobre la recta AB un triángulo equilátero.

Descríbase con centro en A y la distancia AB el círculo BCD (Post. 3) y con centro en B y a la distancia BA descríbase otro círculo ACE (Post. 3) y a partir del punto C donde las circunferencias se cortan, trácese las rectas CA y CB hasta los puntos A y B (Post. 1).

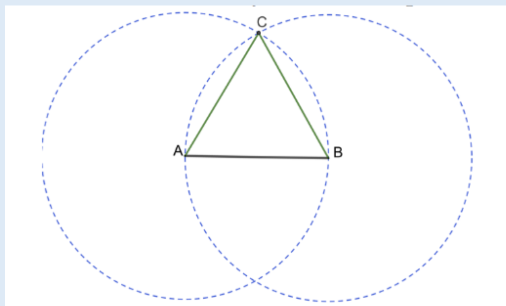


Figura 1. Construcción del triángulo equilátero (elaboración propia a partir de Puertas, 1991)

Y porque A es el centro del círculo CBD, AC será igual a AB (D15), puesto que el punto B es a su vez el centro del círculo CAE, BC es igual que AB (D15); luego CA y CB son iguales a AB; las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí (NC1); por lo tanto, CA es también igual a CB; luego las tres CA, AB y BC son iguales entre sí.
Por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero y ha sido construido sobre la recta finita dada AB. Que es lo que había que hacer.

En esta primera proposición hace uso de la circunferencia para construir u obtener segmentos iguales, esto por la propiedad de la circunferencia que permite la obtención de una infinidad de segmentos congruentes que llamamos radios. En la definición de circunferencia, Euclides utiliza la propiedad: todas las rectas que caen sobre ella desde un punto dentro de ella son iguales entre sí. Una vez construidas las circunferencias, traza los segmentos AC y BC, formando el triángulo ABC, seguido de la argumentación del por qué el triángulo que se construyó es equilátero. Se toman dos de los segmentos –a saber, AC y AB– y se comparan, como ambos son radios de la misma circunferencia, entonces son iguales. Seguidamente se toman otros dos segmentos –esta vez BC y AB– se comparan y se concluye que son iguales, por ser también radios de una misma circunferencia. Ahora bien, falta establecer la relación entre los tres segmentos; entra en juego la transitividad de la relación de igualdad, expresada en los elementos mediante la noción común NC1: “cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí” (Puertas, 1991, p. 13). Como dos de los segmentos son igual a otro, entonces son iguales entre sí. De este modo se llega a la igualdad –congruencia– entre los tres segmentos. Argumentando de esta manera, que la construcción realizada es un triángulo equilátero.

Proposición homóloga en el texto escolar

E.4. Construir un triángulo cuyos lados sean todos iguales.
Sea AB la recta dada.
Se trata de construir un triángulo cuyos lados sean iguales a AB.

Haciendo con centro en A y en B, y con radio AB, descríbanse arcos que se corten en C. Trácese las rectas AC y BC.

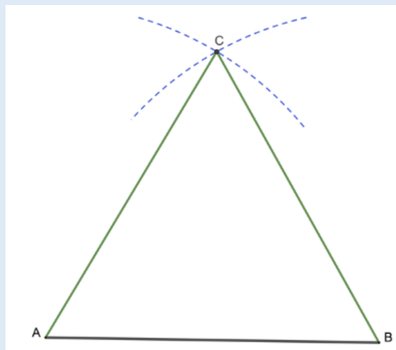


Figura 2. Construcción del triángulo equilátero (elaboración propia a partir de Wentworth y Smith, 2001)

El triángulo ABC es el pedido.

Como se observa en el texto escolar, se trazan arcos y no circunferencias, además de que solamente se presenta el procedimiento de construcción de un triángulo equilátero. Es importante recalcar que se hace mención explícitamente de la construcción de arcos mediante el uso del compás actual.

En esencia los procedimientos son similares, pues se hace uso de la circunferencia para obtener o construir segmentos iguales. Sin embargo, en la escuela solamente construimos arcos, lo que no permite observar claramente las circunferencias, de las cuales si sabemos explícitamente que los radios son iguales; con los arcos no se ve tan claramente este hecho.
Esta proposición y las dos siguientes en los *Elementos*, conforman la primera categoría, están dedicadas a la construcción de segmentos congruentes. En las tres se encuentra el invariante del uso de la circunferencia, y se utilizan para la construcción de segmentos congruentes que posibilitará en proposiciones posteriores la congruencia de triángulos que a su vez conlleva a la congruencia de los elementos de este, a saber, lados y ángulos, además de la congruencia de áreas.

De manera similar se estudian las 48 proposiciones del primer libro de los Elementos, confrontadas con su homóloga en el texto escolar –en el caso que exista–, agrupándolas en categorías de con base en el uso y significado de las nociones geométricas involucradas y la finalidad que cumplen en el compendio de proposiciones que conocemos como libro primero de los *Elementos.*

De manera general, hemos encontrado evidencia de la puesta en juego de la práctica de comparación desde las definiciones, nociones comunes hasta las proposiciones relativas a la congruencia y aplicación de áreas; en el sentido de comparar dos magnitudes homogéneas para determinar su relación de igualdad o desigualdad.

Discusión

Como describimos en el apartado anterior, las tres primeras proposiciones de los Elementos están dedicadas a la construcción de segmentos iguales, con el invariante uso de la circunferencia para este hecho. Postulamos entonces que la construcción de iguales es una de las primeras tareas en los Elementos, la construcción de iguales, en un nivel posterior está la comparación, esta para argumentar la relación entre elementos geométricos. Además, vemos la comparación, en dos sentidos: por un lado, en cuanto a la relación de igualdad entre segmentos en el caso de las proposiciones descritas; por el otro, cuando se realiza la transitividad entre las relaciones, como cuando compara las dos igualdades entre segmentos. Llamaremos a estas, comparación del tipo I y de tipo II respectivamente; un tercer tipo no es tratado en este ensayo. La comparación del tipo I es la comparación entre magnitudes homogéneas, ya sean segmentos, ángulos, áreas, volúmenes. Por otra parte, la comparación del tipo II, que es necesaria para el establecimiento de relaciones entre elementos geométricos, propiedades como el paralelismo, la perpendicularidad o relaciones de relaciones.

Para Salinas (2003), la comparación no siempre se utiliza de la misma manera; esta puede tener naturalezas diferentes dependiendo el contexto. En nuestro caso, vemos puesta en juego la comparación como práctica necesaria para establecer o argumentar la relación de igualad o desigualdad entre elementos geométricos, a saber, segmentos, ángulos, figuras. Que justamente contrasta con los resultados planteados por Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017) donde reportan el carácter comparativo en la geometría de la *Óptica* de Euclides, donde se estudia el fenómeno de la percepción visual de los objetos. Declarando que la heurística comparativa está presente en toda la *Óptica* de diversas formas: “desde relaciones de igualdad, de diferencias, de orden y fundamentalmente, desde la transitividad de las relaciones de orden” (p. 28-29).

Estamos reportando en este escrito que la comparación en el contexto de Geometría permite analizar la relación existente entre elementos geométricos para establecer de manera argumentada la relación entre otros elementos geométricos de los cuales no podíamos asegurar su relación.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática*. Tercera reimpresión. Madrid. Alianza editorial

Caballero, M., y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1197-1205.

Cáceres (2003). Análisis cualitativo de contenido: una alternativa metodológica alcanzable. *Revista de la escuela de psicología facultad de filosofía y educación Pontificia Universidad Católica de Valparaíso,* 2, 53-82.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Un estudio sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7(3*) 91-116.

Chace, A., Manning, H. y Archibald, R. (1927). The Rhind mathematical papyrus. Volume I. Mathematical Association of America. Ohio, USA.

Çamorano, R. (1576). *Los seis libros primeros de la geometría de Euclides*. Traducción a la lengua española. Sevilla, España.

Espinoza, L., Vergara, A. y Valenzuela D. (2017). La geometría escolar en crisis: una confrontación con la olvidada “óptica de Euclides”. *Revista Premisa, 19 (74)*

Fernández, (2004). *El Método de Multiplicadores de Lagrange*. Tesis de maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México

Fitzpatrick, R. (2008) Euclid´s Elements of Geometry. Edited and provide with the modern English translation of: The Greek Text of J. L. Heiberg (1883-1885).

Guacaneme, E. (2012). *Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Heath, T. (1921). A History of Greek mathematics. Volume I. Oxford, USA: At the Clarendon Press.

Jan Struik, D. (2002). *Historia concisa de las Matemáticas*. Tercera reimpresión. México: Instituto Politécnico Nacional.

López-Acosta, L. (2016). *Generalización de patrones. Una trayectoria hipotética de aprendizaje basada en el pensamiento y lenguaje variacional*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Mayring, P. (2000). Qualitative Content Analysis. *Forum Qualitative Sozialforschung/Forum: Qualitative Social Research, 1(2).* Disponible en: http://nbn-resolving.de/urn: nbn:de:0114-fqs0002204.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. Tesis doctoral no publicada*. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México.

Puertas, M. (1991). *Elementos. Libros I-VII* (traducción anotada). Madrid: Gredos.

Reyes-Gasperini (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo*. Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Wentworth, G., y Smith, D. (1913). Plane Geometry. Bostón, USA: The Atheneum Press.

Wentworth, G y Smith, D. (1979). Geometría Plana y del Espacio. Porrúa: México

Wentworth, G y Smith, D. (2001). Geometría Plana y del Espacio. Vigesimotercera edición. Porrúa: México.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

LA PROPORCIONALIDAD EN LIBROS DE TEXTO MEXICANOS DE EDUCACIÓN BÁSICA. ASPECTOS CONCEPTUALES

PROPORTIONALITY IN BASIC EDUCATION MEXICAN TEXTBOOKS: CONCEPTUAL ASPECTS

Gerardo Amaro Macuil, Lidia Aurora Hernández Rebollar, Josip Slisko Ignjatov
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
gerardo_1.9@hotmail.com, lhernan@fcfm.buap.mx, jslisko@fcfm.buap.mx

Resumen
La proporcionalidad es uno de los contenidos tradicionales en educación básica que puede generar dificultades en los estudiantes si no se trata adecuadamente. Este trabajo consiste en analizar el tratamiento dado al tema de proporcionalidad en 25 libros de texto mexicanos de matemática usados en la educación básica (primaria y secundaria). En particular, se revisaron los aspectos conceptuales siguientes: La caracterización de la proporcionalidad, los tipos de problemas, los métodos de resolución, las justificaciones y las definiciones. Exponemos, también, algunas implicaciones que este tratamiento podría tener sobre la enseñanza y el aprendizaje de este tema relacionadas con el fenómeno conocido como "ilusión de la linealidad".

Palabras clave: proporcionalidad, libros de texto de matemática, ilusión de la linealidad

Abstract
Proportionality is one of the traditional contents in basic education that can generate difficulties in students if it is not treated properly. This work consists of analyzing the treatment given to the topic of proportionality in 25 Mexican mathematics textbooks used in basic education (primary and secondary schools). In particular, the following conceptual aspects were reviewed: The characterization of proportionality, types of problems, resolution methods, justifications and definitions. We also expose some implications on the teaching and learning of this subject related to the phenomenon known as the illusion of linearity.

Key words: proportionality, mathematics textbooks, illusion of linearity

Introducción

La proporcionalidad es uno de los contenidos tradicionales en Educación Básica, que históricamente no ha recibido mucha atención en textos destinados a la enseñanza de las matemáticas. Block, Borch y Ramírez (2010) son de los pocos que han publicado un libro sobre este tema dirigido a profesores del nivel básico. En su publicación revisan a la proporcionalidad desde el punto de vista matemático y didáctico.

Otro grupo de investigadores que han señalado la importancia del tratamiento dado a la proporcionalidad en el aula es el integrado por De Bock, Van Doreen, Janssens y Verschaffel (2007) quienes asocian este tema con el fenómeno conocido como "Ilusión de la linealidad". El enfoque algorítmico y la repetición que busca más la memorización que la reflexión es uno de los causantes de que los estudiantes intenten aplicar la "regla de tres" en problemas cuyos datos no guardan una relación lineal. Ellos mencionan que los factores que provocan la existencia y persistencia de este fenómeno provienen principalmente del proceso de enseñanza de la proporcionalidad en el aula. También afirman que existen tres factores que se combinan para que persista la ilusión de la linealidad: (1) La manera en que participa la intuición en las relaciones lineales, (2) los hábitos y creencias inadecuadas acerca de la resolución de problemas verbales de matemáticas y (3) los elementos específicos del contenido (de la proporcionalidad).

El segundo factor tiene que ver con el tipo de problemas que se acostumbra usar en un contexto clásico escolar. Estos autores no mencionan explícitamente a los libros de texto como un elemento que participa en este segundo factor, pero podrían considerarlos implícitamente cuando se refieren al contexto escolar. Cramer, Post y Currier (1993, citado en De Bock et al., 2007, p. 8) sí los mencionan explícitamente, y determinan que "los libros de texto no hacen suficiente hincapié en la habilidad de discriminar situaciones lineales de las no lineales".

Por lo anterior, consideramos importante dirigir la mirada a los libros de texto y estudiar de qué manera están contribuyendo al aprendizaje de la proporcionalidad. Selander (1995) propone reflexionar sobre la investigación centrada en libros de texto, especialmente en los de matemáticas, prestando especial atención a dos argumentos. El primero es que, para toda sociedad es primordial la transmisión de su cultura, los libros han sido una de las vías principales que han socializado la cultura matemática y han contribuido a su difusión, transmitiendo conocimientos e información con cierta intencionalidad. El segundo considera que, en la construcción de nuevos conceptos, particularmente matemáticos, el lenguaje asume un papel mediador cuyo referente es el lenguaje textual, de ahí la importancia epistemológica del análisis de los libros de texto de matemáticas.

Varios investigadores han coincidido con las razones expuestas arriba y por ello han realizado estudios amplios sobre los libros de texto de matemáticas de diferentes niveles educativos. Algunos ejemplos son los trabajos de Fan, Zhu y Miao (2013) y Occelli y Valeiras (2013) quienes reportan los diferentes tipos de estudios que se han publicado en los últimos años sobre libros de texto en revistas relacionadas con la educación matemática. Algunos de estos trabajos se han enfocado en la forma como se presentan uno o varios aspectos de la proporcionalidad en los libros o manuales escolares. Se ha analizado, por ejemplo, el discurso, los tipos de problemas y las técnicas de resolución de los problemas, unos para la proporcionalidad simple directa y la inversa, otros para la compuesta como es el caso de Martínez, Muñoz, Oller y Ortega (2017).

En el currículo de la educación básica de México, el contenido relacionado con la proporcionalidad ocupa varios espacios, desde el cuarto grado de la primaria hasta el tercer grado de la educación secundaria. Este contenido se ve reflejado en los libros de texto oficiales de este nivel educativo.

Es por todo lo anterior que nos planteamos como objetivo de este estudio: analizar el tratamiento que se le da a la proporcionalidad en distintas colecciones de libros de texto mexicanos de educación básica.

Marco conceptual

Fan, Zhu y Miao (2013) distinguen tres grandes tipos de trabajos relacionados con libros de texto: trabajos centrados en el análisis, en la comparación y en el uso de los libros de texto. Dentro de los trabajos orientados hacia el análisis de libros de texto, estos autores identifican cinco subcategorías:

- El contenido matemático y temas.
- La cognición y la pedagogía.
- El género, el origen étnico, la equidad, la cultura y el valor.
- Comparación de diferentes libros de texto.
- La conceptualización y cuestiones metodológicas.

Maz y Rico (2015) coinciden parcialmente con Fan, Zhu y Miao (2013) cuando mencionan que “el análisis de textos escolares proporciona información sobre los contenidos, los conocimientos tratados y también sobre aspectos pedagógicos, curriculares y sociales” (p. 643).

En este trabajo nos interesó el análisis de contenido propuesto por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), en el cual diferencian tres componentes de análisis: la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación.

La estructura conceptual la entendemos como el sistema organizado de conceptos y procedimientos que contempla tres niveles para el conocimiento conceptual: hechos, conceptos y estructuras; y otros tres para el conocimiento procedimental: destrezas, razonamientos y estrategias. Gómez (2011) señala que en la estructura conceptual se distinguen las descripciones de los conceptos, las interrelaciones entre estos y la estructura matemática que los organiza y justifica.

En el análisis fenomenológico se determinan las situaciones y contextos con los que se presentan los contenidos en estudio. Es decir, la modelización de fenómenos sociales, naturales y matemáticos a través de la estructura matemática reconocida en el texto (Puig, 1997).

Los sistemas de representación son todas aquellas expresiones, signos, símbolos o gráficos a través de los cuales se hace presente un contenido matemático, permitiendo la comunicación de ideas matemáticas. Rico (2012) señala “conocer un contenido se sustenta en el dominio de sus sistemas de representación y de los modos de expresar una misma propiedad mediante diversos sistemas” (p. 58).

Metodología

Se han analizado 7 colecciones completas de libros de texto de primaria y secundaria con un total de 25 libros que pertenecen a las editoriales Trillas, Pearson, Castillo, Patria, Santillana, Conecta Estrategias y la Dirección General de Materiales Educativos. La decisión de considerar colecciones completas se sustenta en el hecho de que el tema de proporcionalidad aritmética es un contenido que aparece a lo largo de la educación básica en los primeros tres años de primaria de forma implícita y en los siguientes años de primaria y secundaria de manera explícita (SEP, 2011). De primaria se revisaron los libros de cuarto, quinto y sexto grado y de secundaria los de los tres grados. Los textos analizados cumplieron con el criterio de tener la secuencia completa de primaria a secundaria y pertenecen al periodo 2010-2016.

El método de investigación es de tipo exploratorio y toma como base el análisis de contenido, propuesto por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008), mismo que ya se ha explicado en el marco conceptual. Reportamos aquí los resultados del análisis realizado a las siguientes subcategorías pertenecientes a los aspectos conceptuales de la proporcionalidad: La caracterización de la proporcionalidad, los tipos de problemas, los métodos de resolución, las justificaciones y las definiciones. En Amaro (2017) se expone el análisis de contenido completo que incluye, además de los aspectos conceptuales, los aspectos fenomenológicos y los sistemas de representación.

Resultados

Caracterización de la proporcionalidad

Se detectó que la gran mayoría de los libros coinciden en presentar a la proporcionalidad desde un punto de vista aritmético, definiendo a las situaciones de proporcionalidad como aquellas en la que las magnitudes involucradas tienen relación de proporcionalidad directa, inversa o en relación funcional, dependiendo del nivel, primaria o secundaria. Únicamente un libro la presenta como un método para la resolución de problemas que involucren cuatro datos, tres de los cuales están dados y en los que se pretende hallar el valor del cuarto. El que sigue es un ejemplo de una definición presentada en un libro de segundo grado de segundaria.
Hay muchas formas en que las cantidades de un conjunto dependen de las de otro. Si una cantidad de un conjunto aumenta dos veces, tres veces o *n* veces, y la correspondiente del otro conjunto aumenta ese mismo número de veces, se dice que las cantidades de un conjunto son directamente proporcionales a las del otro conjunto (García & Block, 2013).

Tipos de problemas

Problemas de reparto proporcional

Ejemplo: repartición de ganancias respecto al tiempo de trabajo laborado.

> En una escuela secundaria, por la tarde se dan asesorías. La maestra Claudia trabajó esta semana 10 horas, el maestro Adrián 15 horas y el maestro Víctor, 20. El maestro Ricardo, que es el director, retiró del banco $9000 que debe repartir entre los tres maestros, dependiendo de las horas trabajadas. ¿Cuánto le paga a cada maestro por hora de trabajo?

Este problema aparece en el libro de matemáticas de primer grado de De Icaza (2016, p. 52).
El 40% de los libros analizados presenta este tipo de problemas y la mayoría de ellos son de primer año de secundaria.

Problemas de proporcionalidad directa

Ejemplo:

> Para pintar un edificio se utilizó una mezcla de pinturas: cada 4 litros de pintura verde se mezclan con un litro de pintura blanca. En total se requirieron 95 litros de pintura. ¿Cuántos litros de cada color se habían usado al consumirse 5, 10, 20, 30, 90 y 95 litros?

Este problema plantea una situación de proporcionalidad directa. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad en este caso? (Escareño y López, 2012, p. 71). Todos los libros presentan este tipo de problema.

Problemas de proporcionalidad inversa

Ejemplo:

> Para acomodar el escenario de un concurso de ofrendas se reparte el trabajo equitativamente en 3 alumnos y, para llevarlo a cabo, necesitan 72 horas. Todos los alumnos trabajan al mismo ritmo. Si se conforma un grupo de 18 alumnos, ¿cuántas horas emplearían en realizar la misma actividad?

En este caso, a doble de número de alumnos, la actividad durará la mitad; a triple de alumnos, el trabajo durará la tercera parte, etcétera. Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales (Marván y Bravo, 2010, p. 110). El 80% de los libros analizados de secundaria presentan este tipo de problema. Los libros de primaria no presentan ningún problema de proporcionalidad inversa.

Comparación de razones

Ejemplo (porcentajes):

> En la temporada del "buen fin" del año pasado una tienda ofreció las siguientes promociones:

- Aplicaron 20 % en ropa para caballero.
- ¿Qué cantidad descontaron a un pantalón cuyo precio era $255.00?
- ¿Cuánto se pagó por ese pantalón?
- Mariana pagó con un billete de $1000.00 por dos prendas. El precio original de cada una era $450.00.
- Si le hicieron un descuento de 15%, ¿cuánto le dieron de cambio?
- ¿Cuánto pagó por las dos prendas? (Arriaga, Sesma, Pineda, Zavala, Compañ y Gutiérrez, 2014, p. 44)

Solo el 50% de los libros de texto presentan este tipo de problemas. Los libros de primer año de secundaria no presentan estos problemas.

Proporcionalidad múltiple

Hernández, Jiménez y Solano (2016, p. 256) presentan el siguiente ejemplo:

> Lean la información, observen la figura, completen la tabla y contesten.
> Se requiere construir dos cajas más que sean proporcionales a la imagen. Completen los datos de la tabla.

Tabla 1. Datos del problema de proporcionalidad múltiple tomado de Hernández et al. (2016, p. 256)

Caja	Largo	Ancho	Área de la base	Alto	Volumen
A	40 cm	30 cm	1200 cm^2		72000 cm^3
B	20 cm			30 cm	
C	80 cm	60 cm		120 cm	

Figura 1. Imagen incluida en el problema de proporcionalidad múltiple tomado de Hernández et al. (2016, p. 256)

El 35% de los textos analizados contienen el tema de proporcionalidad múltiple.

Composición de relaciones de proporcionalidad

Ejemplo:

> En las papelerías hay mapas de varios tamaños: carta, mini mapas, en los que cada lado mide la mitad del tamaño carta, y doble carta, en los que cada lado mide el doble de tamaño carta. En el mapa tamaño carta cada centímetro representa, aproximadamente, 100 km. ¿Qué distancia representa ese centímetro en el mini mapa y en el mapa doble carta? (Baltazar, Flores, Ojeda y Guerrero, 2013, p. 146)

Únicamente el 15% de los libros presenta este tipo de problemas, todos son libros de primer grado de secundaria.

Métodos de resolución de problemas

Factor constante

El método del factor constante de proporcionalidad consiste en hallar un número con el que, al multiplicarlo por cualquier valor de uno de los conjuntos, se obtenga el valor que le corresponde en el otro conjunto. El factor constante de proporcionalidad se emplea en el 100% de los libros de texto analizados.

Factor inverso

El método del factor inverso de proporcionalidad consiste en hallar un número tal que éste sea el recíproco del factor constante de proporcionalidad y que al multiplicarlo por cualquier valor de un conjunto, se obtiene el valor que le corresponde en el otro conjunto. Este método se emplea frecuentemente en problemas de proporcionalidad inversa, de escalas (ampliación o reducción de figuras) y de composición de relaciones de proporcionalidad. El 30 % de los libros presentan este método.

Regla de tres:

Ejemplo:

Completa la tabla

Tabla 2. Datos del problema de Regla de Tres tomada de Escareño y López (2012)

Distancia en el mapa(cm)	Distancia Real (Km)
5	90
1	(?)
2	(?)

En la resolución del problema, también puede aplicarse la noción de proporción. Por ejemplo, si se quiere saber cuál es la distancia real que corresponde a 13 cm en el mapa, escribimos la proporción $\frac{90}{5} = \frac{x}{13}$.

Para hallar el valor de x, multiplicamos ambos lados por 5 × 13.

$$5 \times 13 \times \left(\frac{90}{5}\right) = \left(\frac{x}{13}\right) \times 5 \times 13$$

Los productos $13 \times 90 = 5x$ también pueden encontrarse si se multiplica diagonalmente. Ésta se conoce como multiplicación cruzada. Los productos $13 \times 90 = 5x$ reciben el nombre de *productos cruzado.* Esta propiedad de las proporciones es la llamada regla de tres, que en este caso se expresa así:

$$90 \rightarrow 5$$
$$x \rightarrow 13$$

Se aplica la multiplicación cruzada, con lo que se obtiene $13 \times 90 = 5x$.
Ejemplo presentado en Escareño y López (2012, p. 185). Este método se emplea en 90% de los libros de texto.

Valor unitario

> Si el papá de Alberto vende 3 kg de naranja y cobra \$25.50, ¿Cuánto cobrará por 5 kg? ¿Cómo obtuviste el resultado?

En una situación de proporcionalidad, el valor que, en una de las cantidades corresponde al valor “1” en la otra cantidad se llama valor unitario. Por ejemplo, en el problema anterior, para saber cuánto cobró por los 5 kg, seguramente primero calculaste el precio por kg: este valor puede considerarse como el valor unitario (Trigueros, Lozano, Schulmaister, Sandoval, Jinich y Cortés, 2016, p. 127). El 55% de los libros de texto presentan este método de resolución de problemas de proporcionalidad.

Aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad
Al aplicar sucesivamente factores constantes de proporcionalidad en una situación, estos factores se interpretan según el tipo de números que se trate:

- Cuando el factor constante de proporcionalidad es un número mayor que uno, se trata de ampliación con la escala 3 a 1, equivale a multiplicar por 3 el valor original.
- Si el factor constante de proporcionalidad es fraccionario (por ejemplo, 5/4) equivale a multiplicar el valor original por 5 y luego dividirlo entre 4.
- Si el factor constante de proporcionalidad es decimal (por ejemplo, 0.24), equivale a multiplicar el valor original por 24/100, o multiplicarlo por 24 y luego dividirlo entre 100.

El efecto final de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad equivale a la aplicación sucesiva del producto de estos factores. Ejemplo presentado en Escareño y López (2012, p. 152). Solo se presenta en 4 libros de primer año de secundaria, es decir el 15% de todos los libros de texto analizados.

Justificaciones

A continuación se expone un ejemplo de justificaciones que presentan los libros de texto.
Si el grupo de personas fueran del mismo tamaño, para que el reparto fuera justo bastaría con dar la misma cantidad a cada uno. Como los grupos no son del mismo tamaño, una manera de que el reparto sea justo es que las cantidades sean proporcionales al tamaño de cada grupo, es decir que, si un grupo de dos, tres o n veces mayor que otro, reciba una cantidad ese mismo número de veces mayor. Cuando esto ocurre, se dice que el reparto es proporcional. Este ejemplo es de Trigueros et al (2016, p. 156)

Definiciones

Ejemplo 1:

> Se llama factor constante de proporcionalidad al valor que multiplica a otro valor dado. Cuando a un valor se aplica un factor de proporcionalidad mayor que 1, el efecto es un aumento y cuando el factor es menor que 1, el efecto es reducción (Hernández et al., 2016, p. 110)

Ejemplo 2:

> La regla de tres es un procedimiento que se emplea para determinar el cuarto valor de una proporción, cuando se conocen los otros tres elementos. Ejemplo presentado en García y Block (2013, p. 210).

Las justificaciones están presentes en un 88% y las definiciones en un 75% de todos los libros de texto analizados.

Conclusiones

A partir del análisis concluimos que los tipos de problemas que más presentan los libros de texto son: proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa. Los que menos se presentan son: comparación de razones y composición de relaciones de proporcionalidad. Los métodos de resolución que se proponen con mayor frecuencia son: la regla de tres y el de factor constante y los que menos se abordan son: valor unitario y aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad. En la revisión de los tipos de problemas se observó que los autores no mencionan a los problemas pseudo proporcionales, es decir, problemas cuyos datos no guardan una relación proporcional aunque así lo parezca. Si lo hicieran, los estudiantes tendrían la oportunidad de contrastar el tipo de pensamiento y esto contribuiría a una mejor comprensión del mismo. Cuando se presentan los métodos de resolución los autores tampoco señalan que estos métodos no necesariamente se pueden aplicar a todos los problemas con tres datos conocidos y uno desconocido, por lo que quienes usan estos libros podrían caer en el fenómeno de la ilusión de la linealidad.

El desarrollo del tema de proporcionalidad, en los libros analizados, se aprecia limitado por los contenidos propuestos en los planes de estudio. Todos los temas que marca el programa de la Secretaria de Educación Pública (SEP) de México para el nivel básico aparecen en estos libros de texto, pero no ofrecen más allá de los tipos de problemas y métodos tradicionales.

Después de este análisis detectamos la oportunidad de que, en el aspecto conceptual, el tratamiento que se le da a la proporcionalidad se enriquezca; con un aumento en la variedad de tipos de problemas y de métodos de resolución.

Además, sugerimos que los autores y la SEP consideren la necesidad de proponer actividades que contribuyan a romper con la ilusión de la linealidad. Pues, en este aspecto, nuestros resultados coinciden con lo señalado por Cramer et al (1993, citado en De Bock *et al*, 2007, p. 8), "los libros no hacen suficiente hincapié en la habilidad de discriminar situaciones lineales de las no lineales".

Referencias bibliográficas

Amaro, G. (2017). *La proporcionalidad en libros de texto mexicanos de educación básica*. Tesis de licenciatura, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Arriaga, A., Sesma, S.E., Pineda, V.H., Zavala, G., Compañ, M., y Gutiérrez, J. (2014). *MatemáticaMente 2, Desarrollo y fortalecimiento de competencias.* México: Pearson.

Baltazar, C., Flores, E. R., Ojeda, L.F., y Guerrero, J. A. (2013). *Matemáticas 1.* México: Castillo.

Block, D., Borch, T. M. y Ramírez, M. (2010). *¿Al doble le toca el doble? La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica.* México, D.F.: SM.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

De Icaza, A. (2016). *Matemáticas 1.* México: Santillana.

Escareño, F. y López, O. (2012). *Matemáticas 1.* México: Trillas.

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM Mathematics Education*, 45, 633-646.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. 1 Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: Cinvestav, 2001.

García, S. y Block, S. (2013). *Matemáticas 2*. México: Conecta Estrategias.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), 49-65.

Hernández, J., Jiménez, L., y Solano, H. (2016). *Matemáticas 1, Estrategias del pensamiento.* México: Patria.

Martínez Juste, S., Muñoz Escolano, J. M., Oller Marcén, A. M., y Ortega del Rincón, T. (2017). Análisis de problemas de proporcionalidad compuesta en libros de texto de 2º de eso. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *20*(1), 95-122.

Marván, L. M., y Bravo, C. (2010). *Matemáticas 2.* México: Castillo.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. *Revista Suma*, 58, 7-23.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 1, 39-63.

Secretaria de Educación Básica. (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica.

Selander, S. (1995). *Análisis del texto pedagógico. Libro de texto y construcción de materiales curriculares*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Trigueros, M., Lozano, M. D., Schulmaister, M., Sandoval, I. T., Jinich, E., y Cortés, M. (2016). *Matemáticas 1*. México: Santillana.

Valverde, G., Castro, E., y Molina, M. (2013). *Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. [versión digital]. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4919893

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO ACERCA DE LOS VÍNCULOS ENTRE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA ARITMÉTICA, EL ÁLGEBRA Y CÁLCULO

SOCIOEPISTEMOLOGYCAL STUDY ABOUT OF LINKS BETWEEN THE FUNDAMENTAL THEOREM OF ARITHMETICS, ALGEBRA AND CALCULUS

Diana Wendolyne Ríos Jarquín, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
diana.rioz@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

La Socioepistemología, parte de la articulación de aspectos didácticos, epistemológicos, cognitivos y socioculturales relativos al conocimiento matemático. Se presenta la parte inicial de un análisis de los vínculos entre los Teoremas Fundamentales de la Aritmética, el Álgebra y el Cálculo; esto desde el Pensamiento y Lenguaje Variacional en el cual nos ocupamos de la problematización del saber desde formas culturales en las que el cambio y la variación generan argumentos para establecer predicciones, valoraciones, inferencias, entre otros. Nuestro objetivo es encontrar una ruta que nos permita articularlos y, en consecuencia, generar elementos para la mejora de su enseñanza

Palabras clave: teoremas fundamentales del álgebra, aritmética y cálculo, socioepistemología, variación

Abstract

The Socioepistemology considers the articulation of didactic, epistemological, cognitive and sociocultural aspects related to mathematical knowledge. This paper is the initial part of an analysis of the links between the Fundamental Theorems of Arithmetic, Algebra and Calculus; this research is part of the Variational Thinking and Language in which we deal with the problematization of the knowledge from cultural forms in which the change and the variation generate arguments to establish predictions, valuations, inferences, among others. For that reason, our objective is to find a path that allows us to articulate them and, consequently, to generate elements for the improvement of their teaching.

Key words: fundamental theorems of arithmetic, algebra and calculus, socioepistemology, variation

Los teoremas y su importancia en el currículo

Esta investigación se sustenta en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual tiene como objeto de estudio la construcción social del conocimiento matemático (*cscm*) y su difusión institucional. Además, se encuentra dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional, en el cual nos ocupamos de la problematización del saber desde el estudio de las formas socioculturales en las que el cambio y la variación generan argumentos para establecer predicciones, valoraciones, inferencias, entre otros.

En este documento no se reportan resultados sino una hipótesis de investigación en torno a una problemática que surge del análisis de las características de una serie de conocimientos matemáticos que han sido llevados a la escuela de manera fragmentada, carente de relación y de significados robustos.

Los Teoremas Fundamentales del Aritmética, el Álgebra y el Cálculo, así como las nociones matemáticas vinculadas a ellas, son objetos matemáticos que curricularmente son repartidos a lo largo de los distintos niveles educativos en la enseñanza de las matemáticas, no obstante, éstos no son presentados en todos los casos en su expresión formal, pero sí los objetos que giran en torno a ellos, como la división, la resolución de ecuaciones, la derivada y la integral, respectivamente.

Con base en el mapa curricular del Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017) para la Educación Primaria; en el caso del Teorema Fundamental de la Aritmética (TFAr), que consiste básicamente de la descomposición única de un número natural en factores primos, es en 4º grado cuando comienzan a introducirse las nociones de reparto y división, que son la base para la construcción de la idea de divisibilidad la cual es abordada como uno de los aprendizajes esperados en el 3º grado de secundaria, mediante el desarrollo de los mecanismos para la descomposición de un número en primos.

El Teorema Fundamental del Álgebra (TFAl) que tiene como idea central, la descomposición de un polinomio en factores lineales de la forma $(x - a_i)$ donde los a_i son precisamente las raíces de dicho polinomio, así el aprendizaje de las ecuaciones y sus representaciones se encuentra casi al final de la Educación Secundaria en el 3º grado, al introducir la formulación y resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, posteriormente en la Educación Media Superior, se profundiza en la resolución de ecuaciones y aparece como tal, el contenido de factorización como un método para resolver ecuaciones polinomiales.

Por otra parte, aunque el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), por sí mismo articula dos de las ramas más importantes del Análisis matemático, el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral, en esta investigación incluiremos al Teorema de Taylor como un modelo predictivo que permitirá robustecer la comprensión de los significados y procesos que acompañan a este teorema, por ello la nomenclatura que recibirá es TFC-Taylor, aún si desde la secundaria se trabaja la noción de función, es en el bachillerato cuando éstas se formalizan y se establece un procedimiento para tratar con ellas mediante la integración y la derivación.

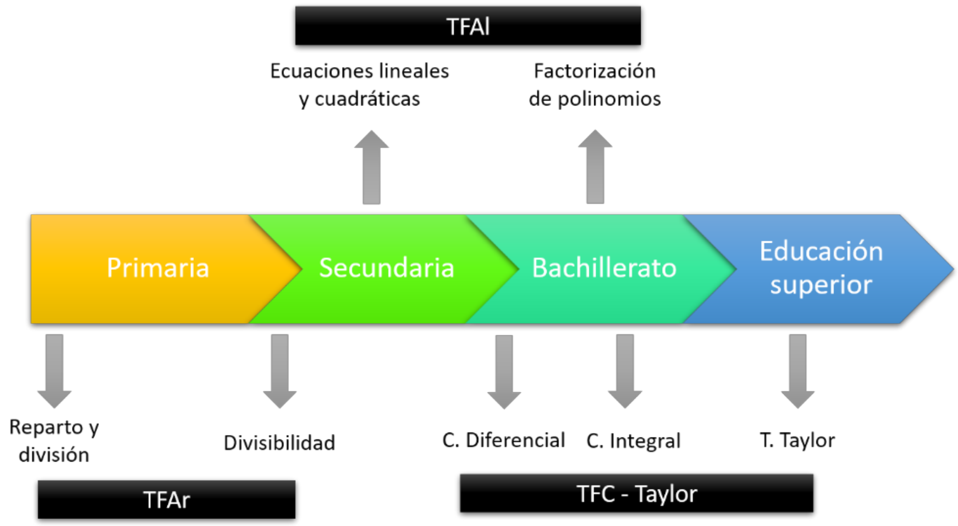


Ilustración 1. Los tres teoremas en el currículo.

De este modo, es posible identificar la desvinculación entre la manera en que estos conocimientos son difundidos institucionalmente [Ver Ilustración 1] pues, explícitamente pareciera no haber una intencionalidad detrás de la forma en que se han ordenado estos contenidos matemáticos.

La cscm y el pensamiento y lenguaje variacional

La TSME sostiene que el conocimiento matemático aún el que es considerado avanzado, se construye socialmente, y que al reconocer su naturaleza sistémica ha de considerarse al saber matemático como el conocimiento puesto en uso. En ese mismo sentido, el Pensamiento y Lenguaje Variacional como línea de investigación, se ocupa del estudio de las formas culturales de tratamiento del cambio, el cual es perceptible por el individuo. Además, éste requiere del desarrollo de la noción de variación para el establecimiento de predicciones respecto a cierto fenómeno en tanto concepto formal: $f\ (x+h) - f\ (x)$. Esta diferencia, que se ha denominado la *diferencia fundamental* (Cantoral, 2013), sirve por igual para describir procesos del Cálculo, como del Álgebra y la Aritmética, en el primer caso da lugar al teorema de Taylor, en otro a la factorización en términos lineales o cuadráticos y a la descomposición de un número en factores primos.

Al ser, la Socioepistemología una teoría de naturaleza sistémica, para estudiar el saber se consideran sus cuatro dimensiones: cognitiva, epistemológica, didáctica y sociocultural. A continuación, mostraremos el caso del TFAr y posteriormente describiremos de manera breve el caso del TFAl y el TFC-Taylor.

Lo cognitivo

Griffiths (2013), en un estudio sobre el mecanismo de la intuición ante situaciones donde el TFAr se pone en juego, reconoce la viabilidad de introducir este teorema a la enseñanza secundaria, puesto que permite el desarrollo del pensamiento intuitivo, reflexivo y formal. Para Griffiths, la intuición juega un papel sumamente importante en el proceso de aprendizaje, pues permite el establecimiento de teorías sobre un proceso, sin que éstas provengan de una enseñanza explícita, es decir, es posible establecer conjeturas que lleven a la formalización del concepto. Esto es evidencia de la posibilidad de una evolución pragmática y conceptual en torno a la noción de divisibilidad, que se encuentra presente en situaciones relacionadas con el TFAr.

Lo epistemológico

De acuerdo con Ağargün, G. y Özkan, M. (2001), la noción de descomposición única tiene su origen en la aritmética griega cuando Euclides en el libro VII de los Elementos, introdujo el estudio de la razón y la proporción, y con ello la discusión sobre la inconmensurabilidad al encontrar magnitudes que no podían ser conmensuradas. Esta idea se desarrolló por mucho tiempo, buscando generalizaciones sobre la descomposición del número, y fue en 1801 que F. Gauss llevó esta idea a la formalización de un teorema, probando que cualquier número no solamente podía ser descompuesto en factores primos, sino que, además, esa descomposición es única, salvo por el orden de los factores. Así, una noción que surge de medir una magnitud mediante un número evoluciona hasta generalizar el proceso de descomposición de cualquier número natural y más aún, da pauta a lo que ahora se conoce como teoría de números, en donde la divisibilidad juega un papel crucial.

Lo didáctico

Una de las dificultades mayormente reportadas alrededor del TFAr es el reconocimiento de la unicidad, respecto a esto Zazkis y Campbell (1996), ya reportaban el hecho de que, para un grupo de profesores de educación básica, escribir a un número en términos de sus factores, en realidad resultaba ser relativo, por ejemplo 96 puede ser factorizado como 16×6 o 8×12, ambas pueden ser totalmente válidas, sin embargo, es hasta que se discute sobre la divisibilidad cuando se encuentra un significado a la unicidad de la descomposición.

En un estudio sobre la forma en que un grupo de profesores utilizan el TFAr, López y Cañadas (2013) reportan que ante una secuencia de actividades en donde se factorizan números naturales, los profesores “utilizaron la descomposición en factores primos como un procedimiento independiente del teorema fundamental de la aritmética y que lo aplicaron de forma mecánica”, es decir, no se enfocaron en la unicidad de la descomposición, pareciera que bastaba con que el número fuera factorizado, aunque los planteamientos en realidad no requerían necesariamente (salvo porque la indicación fuera explícita) del uso de números primos, lo cual nos lleva a los escenarios de significación.

Lo sociocultural

La Socioepistemología, sostiene que el conocimiento matemático se construye socialmente, y más aún, que parte de las prácticas sociales, que norman la actividad humana. En este sentido, el contexto relativo al sujeto que aprende adquiere una importancia singular, pues es mediante el uso que el conocimiento matemático adquiere sentido y significado. En el caso propio del TFAr, son las ideas de composición, descomposición, reparto y partición con y sin exactitud, que se encuentran al comprar en el mercado, al determinar las porciones cuando cocinamos, aquellos escenarios en los cuales la partición óptima es necesaria para resolver un problema. Así pues, consideramos que estos escenarios no se encuentran dentro de la escuela, y por lo tanto los significados que se construyen alrededor de esta noción, son carentes de sentido para la realidad de los estudiantes e incluso de los profesores.

Algunos aspectos generales del TFAl y el TFC-Taylor

En los casos de TFAl y el TFC-Taylor, Bouzas (2010) muestra que, para asumir el significado de las operaciones algebraicas, los estudiantes tienen que superar la fase de las operaciones aritméticas y que la construcción del conocimiento es un proceso de cambio y de reestructuración del modelo conceptual, no de acumulación (Ausubel 1977, citado por Bouzas, 2010). Del mismo modo, Sanabria (2012; 2013) caracteriza el tránsito del álgebra escolar al Cálculo mencionando que “cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, todavía los términos reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico” (p.34) lo cual es de suma importancia en la conceptualización del Teorema Fundamental del Cálculo.

Aunque estos teoremas, tienen orígenes epistemológicos distintos, el TFAl parte de la divisibilidad, es decir, toma como punto de partida una noción que se construye mediante ideas de reparto, de cierto modo es una resignificación de la divisibilidad del número a la divisibilidad del polinomio, cuya naturaleza no es únicamente numérico estática sino una generalización, que fue demostrada por Gauss en 1816. En el caso del TFC-Taylor, fue Arquímedes quien al estudiar el problema de la cuadratura de la parábola, aproximó una curva mediante segmentos poligonales; por otro lado, Viète combina esta forma de aproximar, con el proceso de encontrar geométricamente las soluciones de una ecuación algebraica, lo cual se encuentra en su llamada lógica especiosa en la etapa de porisma, donde discute la construcción de una ecuación algebraica mediante una aproximación geométrica, no es difícil reconocer en los trabajos de Viète una relación directa con el TFAl, si bien tiene los mecanismos variacionales de la aproximación geométrica, también contiene un enfoque geométrico llevado a la generalización, de la partición de una curva.

Finalmente Isaac Barrow en 1669 articula los procesos de aproximación y acumulación, mediante la tangente a una curva y la razón de cambio y con ello construye una herramienta que vincula el Cálculo Diferencial con el Cálculo Integral. Sin embargo, más allá de una aproximación geométrica, se trata de una aproximación variacional, puesto que una función no puede ser vista sólo como una curva, sino como un conjunto de variaciones articuladas mediante una regla, y por ello, en este estudio se ha considerado el Teorema de Taylor, ya que es una herramienta del Análisis Matemático, que permite visibilizar el carácter variacional.

Ahora bien, Ponce (2013) señala que, "desde un punto de vista didáctico, no es necesario presentar el Teorema Fundamental en los cursos de Cálculo, pero que una discusión acerca de su origen y desarrollo puede ser provechosa para comprender las relaciones que establece dicho teorema" esto se debe a que, escolarmente, uno de los conflictos más usuales es la visualización del Teorema, ya que por un lado, la noción de derivada se asocia a la razón de cambio y por otro, la integral al área bajo la curva, entonces, entender estas nociones como procesos inversos, debido al tratamiento escolar, genera un conflicto en sí mismo.

En la vida diaria, no usamos explícitamente el TFAl o el TFC-Taylor, pero sí predecimos, estimamos comportamientos y conjeturamos en la acción, cómo sabemos cuánto tiempo permanecerá caliente nuestro café, en cuánto tiempo llegaremos al trabajo, si estamos llenando un recipiente cómo sabemos cuánto tardará en llenarse o cuánto debemos modificar el flujo de la llave para que se llene más rápido, cómo es que al aproximar, nos anticipamos a los hechos, esta es una característica de la actividad humana, que desde tiempos remotos dio pauta a la elección de las temporadas de cosecha, la predicción del movimiento de los astros, entre otros escenarios.

Una ruta de investigación

Reconocemos que la diferencia fundamental $f\ (x+h) - f\ (x)$ a la que alude Cantoral (2013), como mecanismo de comparación de estados en modelos predictivos y de aproximación tiene un papel articulador en los diferentes procesos asociados al TFAr, TFAl y TFC-Taylor. Por tal razón, nos proponemos realizar un análisis en donde se consideren de manera articulada los aspectos epistemológicos, didácticos, cognitivos y socioculturales, vinculados a los teoremas fundamentales correspondientes.

La importancia de esta investigación se encuentra en la posibilidad de construir una ruta que no solamente relacione conocimientos matemáticos de distintas áreas de la matemática, sino que, además, articule aprendizajes de distintos niveles educativos.

Referencias

Agargün, G. y Özkan, M. (2001). A Historical Survey of the Fundamental Theorem of Arithmetic. *Historia Mathematica* 28, 207-214. https://doi.org/ 10.1006/hmat.2001.2318

Bouzas, P. (2010). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el Aprendizaje Cooperativo? *Revista de Investigación en la escuela*, 73, 95-108.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Griffiths, M. (2013). Intuiting the fundamental theorem of arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 75-96. DOI 10.1007/s10649-012-9410-1

López, A. y Cañadas, M. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds*.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada, Editorial Comares.

Ponce, J. C. (2013). Isaac Barrow y su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 83 123-130.

Sanabria, G. (2012). Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En A. Molina, et al. (Eds.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 13-42). *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Colombia, ISBN: 978-958-8782-21-8.

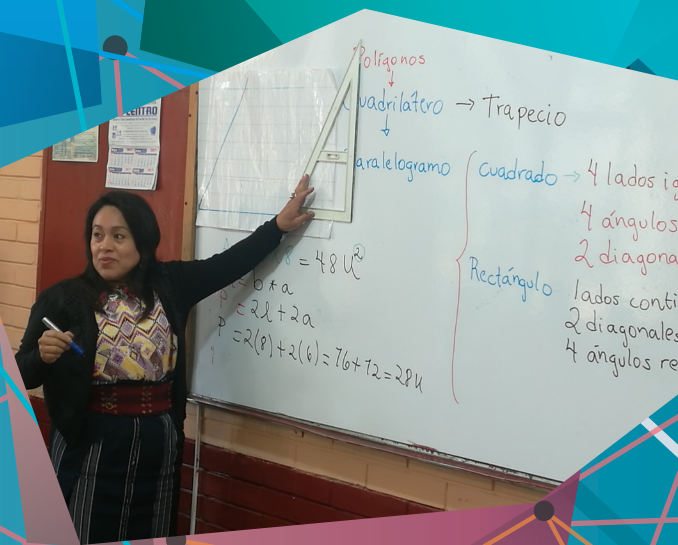
Sanabria, G. (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Revista Infancias Imágenes* 12*(1)*, 44-50.

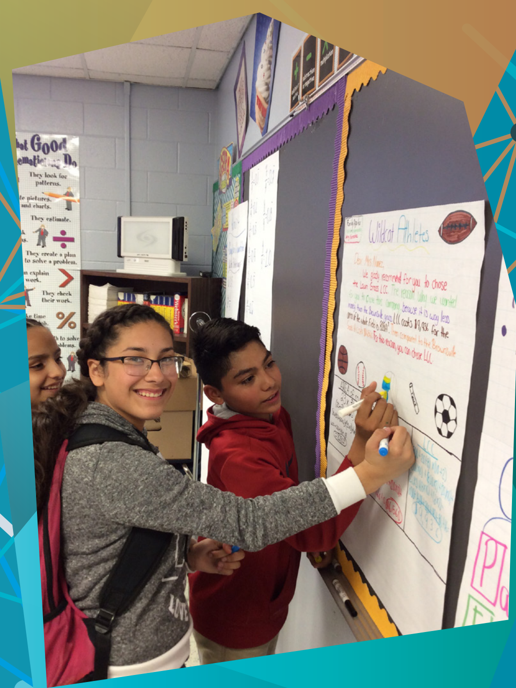
Secretaría de Educación Pública. (2017). Aprendizajes Clave para la Educación Integral. SEP – México, 419 pp.

Zazkis, R. y Campbell, S. (1996). Prime Decomposition: Understanding Uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 207-218.

SECCIÓN 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS





SITUACIONES A-DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO MEDIANTE EL USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA

A-DIDACTIC SITUATIONS FOR THE TEACHING ABOUT DERIVATIVE LIKE CHANGE RATE USING DYNAMIC GEOMETRY SOFTWARE

Jorge Enrique Fiallo Leal, Giovanni Rodríguez Santamaría
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
jfiallo@uis.edu.co, grodriguez349@unab.edu.co

Resumen
Diversas investigaciones muestran que la enseñanza de la derivada sigue siendo un compendio de desarrollos algebraicos y memorísticos que no están ligados a la comprensión del concepto fundamental como la razón de cambio de una magnitud de interés. Presentamos una propuesta de investigación cuyo interés es favorecer la enseñanza de la derivada como razón de cambio explorando diferentes representaciones simuladas por software de geometría dinámica (SGD). Diseñamos bajo la teoría de las situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 2007), actividades en Geogebra, con las cuales los estudiantes interactúan para lograr aprendizaje por adaptación. Utilizamos el análisis a priori como una de las fases de la (TSD) para evidenciar actividades programadas en javascript que generan retroacciones basadas en el uso del cociente de diferencias.

Palabras clave: razón de cambio, derivada, software de geometría dinámica (SGD)

Abstract
Research shows that the teaching of the derivative remains a compendium of algebraic and rote developments which are not linked to the understanding of the fundamental concept as the rate of change of a magnitude of interest. We present a research proposal whose interest is to encourage the teaching of the derivative as a rate of change by exploring different representations simulated by SGD. The Geogebra activities were designed under the theory of didactic situations (TDS) (Brousseau, 2007), in which students interact in order to achieve learning by adaptation. Using a priori analysis as one of the phases of TDS for show activities programmed in Javascript that generate feedbacks based on the use of the difference's quotient.

Key words: Rate of change, derivative, dynamic geometry software (DGS)

Introducción

Presentamos en este documento parte de una propuesta de investigación que tiene como interés favorecer el aprendizaje de la derivada como razón de cambio explorando diferentes representaciones mediante el diseño, aplicación y validación de situaciones a-didácticas simuladas por el software de geometría dinámica. El objetivo principal de la investigación es el de diseñar y aplicar situaciones a-didácticas que permitan el aprendizaje por adaptación de la noción de derivada.

Actualmente el trabajo de investigación se encuentra en la fase del análisis a priori contemplado en el marco de la TSD. En esta fase hemos anticipado las posibles acciones que un estudiante puede realizar sobre un medio digital previamente preparado para que este actúe de manera autónoma con diferentes retroacciones.

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional contempla el pensamiento variacional dentro de sus lineamientos curriculares y estándares básicos del conocimiento, con el fin de fortalecer el desarrollo del pensamiento matemático a partir de la solución de situaciones problema que provengan del entorno sociocultural o que provengan de disciplinas afines a las matemáticas, sin embargo la enseñanza de las matemáticas y particularmente del cálculo diferencial sigue siendo un compendio de desarrollos algebraicos, procedimentales y memorísticos que no están ligados a la comprensión de conceptos fundamentales de la derivada entendida como la razón de cambio de una magnitud de interés. Al respecto Vasco (2006) plantea que el objetivo del pensamiento variacional es entonces la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo.

Por otra parte, Tall (2013) plantea que las reformas del cálculo han hecho uso de la computadora para mostrar gráficas dinámicas y así poder ofrecer el poder de la computación numérica y simbólica, más aún, la tecnología disponible permite tanto a estudiantes como a matemáticos dar sentido a las ideas de variación y cómo medir dicha variación.

Hitt (2013) analiza los ejemplos que utiliza un libro de texto guía para introducir la noción y concepto de derivada, así como la manera en que los profesores se apropian de estos ejemplos para exponerlos en el aula de clase de un Colegio de enseñanza general y profesional en Québec (Canadá). Plantea a su vez que la consideración de todas las representaciones de un concepto son importantes y no se debe priorizar una de ellas en detrimento de las demás. Así pues, creemos que es posible ayudar a los estudiantes a construir una mejor noción de la derivada a través de diferentes representaciones presentes en actividades elaboradas por el SGD dentro del marco teórico de las situaciones didácticas.

Flores (2013) realiza un trabajo con profesores de nivel medio superior para que puedan adquirir una mejor comprensión de los conceptos del cálculo y así hacerlos enseñables. Las actividades que se exploran con los docentes incluyen el concepto de la derivada, donde se hace un enfoque gráfico de funciones trabajando con la herramienta zoom del software Graphing Calculator para visualizar cuáles son localmente rectas además del uso de los cocientes de incrementos para hallar aproximaciones a la función derivada.

Siguiendo estas líneas de pensamiento junto con el aprendizaje por adaptación a un medio, mostraremos avances de una investigación en términos del diseño de actividades simuladas por computador bajo el marco teórico de las situaciones didácticas que permitan una aproximación de la derivada como razón de cambio sin el uso de procedimientos algebraicos.

Marco teórico

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) desarrollada por Guy Brousseau se centra en la enseñanza de conocimientos matemáticos desde una concepción constructivista, afirmando que estos conocimientos no se construyen de manera sencilla.

> Asumimos como supuesto que el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso. Los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control de las situaciones (Brousseau, 2007, p.18).

Así pues, el conjunto de todas las relaciones establecidas explícitamente o implícitamente entre un alumno o conjunto de alumnos, un determinado medio (que involucra herramientas y conceptos a enseñar) y un sistema educativo (el maestro) que tienen como finalidad que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución, se denomina situación didáctica.

Situación a-didáctica

Brousseau (2007, p.31) define una situación a-didáctica así:

> Los problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer… el alumno no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada situación a-didáctica.

Se trata entonces de que el estudiante aprenda mediante adaptación a un medio pensado y propiciado por el profesor. Tal medio debe ser fuente de contradicciones, desequilibrios, dificultades, pero también puede estar cargado de refuerzos positivos que motiven al estudiante a no abandonar el problema al cual se enfrenta. Los resultados de la adaptación del estudiante serán el saber adquirido, puesto en manifiesto por sus respuestas nuevas que son la evidencia del aprendizaje.

El profesor pone en marcha una situación a-didáctica; el producto de la interacción entre el estudiante y el medio en esa situación a-didáctica es un conocimiento (personal y contextualizado); luego el profesor debe explicitar las relaciones entre el saber oficial y el conocimiento personal de los estudiantes con el fin de que no banalice ese conocimiento en la medida que no tenga con quién o qué comparar sus respuestas. Este último proceso recibe el nombre de institucionalización.

El papel del estudiante y del profesor es importante durante el desarrollo de la situación a-didáctica. Empero, nuestro trabajo pretende que el profesor se inmiscuya lo menos posible en las tareas que realizará el estudiante con el fin de evitar fenómenos que entorpezcan la actividad de enseñanza tales como el efecto Topaze y el efecto Jourdain (ver Brousseau, 1986).

La validación

Una de las características que define el rasgo a-didáctico de una situación es que el alumno tenga la posibilidad de decidir la validez de las acciones que realiza. Todo el ciclo de interacción de los estudiantes con el medio contribuye a satisfacer esta condición de validez. Para Brousseau (1986), las pruebas y validaciones explícitas se supone que se apoyan unas sobre otras hasta la evidencia, pero la articulación de estas no es siempre automática, los saberes y conocimientos se están actualizando en una constante actividad de búsquedas o pruebas. Esto quiere decir que no puede haber validación, si no se realizan acciones y si no se identifican e interpretan las retroacciones del medio. Acosta (2010, p.133) resalta el concepto de validación en un entorno donde se usa el software de geometría dinámica como medio:

> El sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Esta validación puede tomar dos valores. Cuando la acción realizada le permite alcanzar su intención, la validación es positiva.

La devolución

Para Brousseau (1986), el estudiante no puede resolver de un primer golpe el problema, no importa qué situación a-diáctica el maestro prepare o arregle para los fines didácticos. Luego el profesor busca devolver al alumno una situación a-didáctica que provoque en él la interacción más independiente y fecunda posible. Las intervenciones del profesor durante una situación a-didáctica deben ser cuidadosas, puesto que podrían afectar el carácter a-didáctico de la situación. La TSD diferencia dos tipos de intervenciones, las que refuerzan el ciclo de interacción, y otras que lo interrumpen. A las intervenciones del primer tipo Brousseau las llama devolución.

Margolinas (2009) considera la devolución como un proceso que perdura durante toda la situación a-didáctica, donde el profesor es responsable de la relación a-didáctica del alumno con el problema. Nuestra investigación, posee un carácter empírico, por lo tanto, estamos interesados en observar los procesos de validación y devolución. Para que tales procesos sean observables contemplamos el uso del software Geogebra en el cual mediante programación Guión-script crearemos situaciones problema que apuestan a la validación y devolución de manera automatizada.

El medio

El medio es fundamental, puesto que el aprendizaje por adaptación está determinado por las acciones y retroacciones que este pueda ofrecer, por ende, el medio debe poseer intenciones didácticas que induzcan en el estudiante los conocimientos que se desea que adquiera. Entonces el medio también debe inquietar al estudiante aportando aprendizajes que lo modifican a él.

El medio es un sistema autónomo, configurado para lograr objetivos de aprendizaje. Para que la interacción del alumno con tal medio sea a-didáctica, Brousseau considera indispensable que el alumno reconozca en él una existencia tanto objetiva como ente autónomo independiente de la intención del profesor objetiva; y material teniendo en cuenta que el alumno debe interactuar con él mediante acciones.

En nuestro trabajo haremos uso de Geogebra como un medio físico con el cual los estudiantes interactúan para lograr aprendizaje por adaptación. Geogebra es ya un software muy conocido y difundido por ser de libre acceso, y que además de poseer una interface geométrica también posee una algebraica y numérica (hoja de cálculo), interfaces adecuadas para que el objeto matemático que deseamos abordar (la derivada) pueda ser asimilado por el estudiante. Por otra parte, existen opciones de programación (guión-script) bajo el lenguaje JAVA que permiten desencadenar una o varias acciones al momento de interactuar con algún objeto dentro de una construcción, pretendemos bajo este lenguaje de programación crear los procesos de validación y devolución implícitos en la situación a-didáctica.

Las retroacciones generadas por el software se manifestarán de manera visual en la pantalla del computador, será el caso por ejemplo de ingresar datos y operaciones entre estos para una determinada tarea con la posibilidad de que aparezcan mensajes que afirmen o refuten si los cálculos son correctos. Puede ocurrir también que, mediante una acción realizada por el estudiante, la construcción diseñada con el software responda mediante una animación, un zoom, un arrastre, una colección de puntos o una gráfica.

Metodología

Por ser nuestra investigación de corte cognitivo, se utilizará una metodología cualitativa de tipo fenomenológico-experimental ya que las experiencias del estudiante sirven como guía y refuerzo del conocimiento que se va construyendo a medida que se ve inmerso en la situación didáctica.

Población y muestra de estudio

Para lograr el objetivo de la investigación se hará un estudio de casos con dos estudiantes de un curso de Precálculo adscrito a la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. La investigación tendrá como organismo metodológico la ingeniería didáctica, la cual se fundamenta en las siguientes fases a saber.

Análisis preliminar: En Artigue (1995) se contemplan tres facetas desde las cuales se debe realizar el análisis preliminar: la epistemológica, la cognitiva y la didáctica; las cuales están asociadas al saber, al estudiante y al sistema de enseñanza respectivamente.

La literatura revisada previamente en los antecedentes da cuenta de las facetas consideradas anteriormente en especial cuando los autores exponen diferentes obstáculos para el aprendizaje y la enseñanza de la derivada tales como que el predominio algebraico restringe la dimensión epistemológica, la dificultad en la transición de diferentes representaciones se vincula a la dimensión cognitiva, y por último el enfoque tradicional de la enseñanza sin el uso de tecnología computacional afecta la dimensión didáctica.

Análisis a priori: La intervención del investigador sobre algunas variables implícitas en la investigación, y dada una secuencia didáctica; se pretende "precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores" (Artigue, 1995, p.12).

Artigue (1995) también considera que el análisis a priori está basado principalmente en un conjunto de hipótesis descriptivas y predictivas enfocadas en las características de la situación a-didáctica diseñada para llevar a los alumnos. Por consiguiente, en esta fase se analizarán las posibles acciones, selecciones y decisiones del estudiante al interactuar con el medio preparado, así como los mecanismos de control y validación de las cuales dispondrá éste.

Experimentación: Esta fase se destaca por la aplicación de las situaciones a-didácticas diseñadas que atañen a los estudiantes, a observar sus respuestas y justificaciones durante el desarrollo de las mismas, que permitan la recolección de datos a partir del estudio de casos.

Análisis a posteriori: A partir de la base de datos recolectada en la fase de experimentación, se hace la confrontación con el análisis a priori para rechazar o confirmar hipótesis planteadas en la investigación y por otra parte determinar si se han alcanzado los objetivos trazados.

La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de investigación (Artigue, 1995).

Avances de la investigación

En esta investigación se han elaborado cinco actividades mediadas por SGD. En la primera actividad se dispone de una tortuga que debe recorrer un camino quebrado compuesto por segmentos horizontales y verticales.

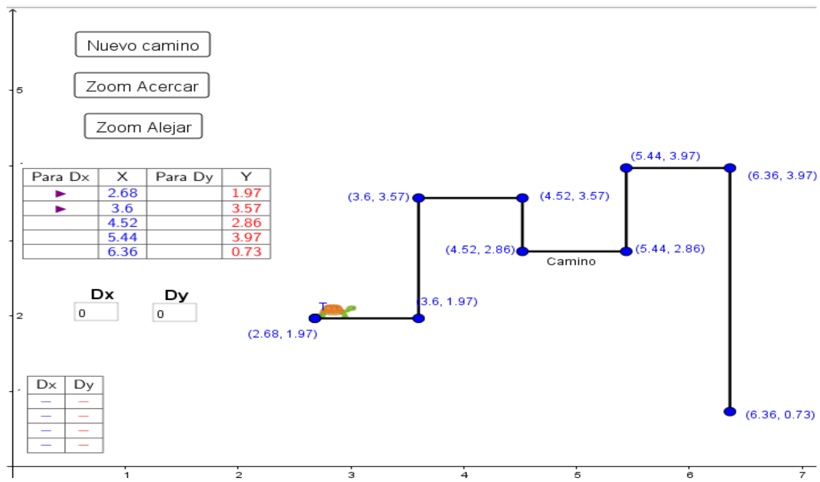


Figura 1. Actividad 1 - Camino generado con distancias aleatorias

El propósito de la actividad es que el estudiante reconozca la variación ya sea de una variable independiente o dependiente como una diferencia, y que a partir de estas pueda reconocer y formular el cociente de estas diferencias como una manera de resolver retos posteriores.

Para las actividades dos y tres se disponen dos móviles A y B que deben recorrer una distancia rectilínea de 15 unidades de distancia en 15 unidades de tiempo, uno de los móviles se mueve con rapidez constante mientras que el otro lo hace con rapidez variable, pero ambos recorren las 15 unidades de distancia en las mismas 15 unidades de tiempo, el reto consiste en lograr que los dos móviles completen el recorrido mediante diferentes retroacciones programadas en el medio en las que se deberán evaluar velocidades medias de cada móvil. Así mismo la actividad 3 requerirá evaluar velocidades medias de cada móvil, pero con cambios de tiempo "pequeños" que permiten empezar a hacer alusión al concepto de infinitesimal.

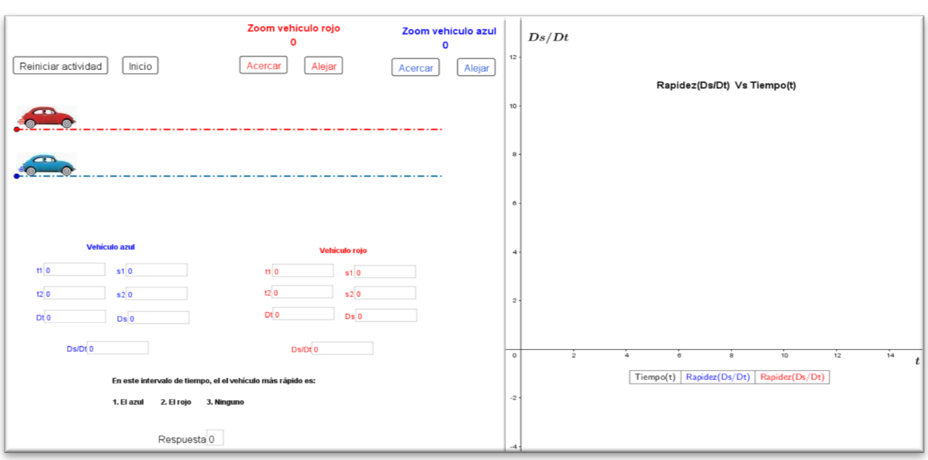


Figura 2. Actividad 2 y 3 – Móviles con rapidez constante y variable

La actividad cuatro se centrará en el móvil de velocidad variable usado en la actividad dos y tres, buscando una aproximación a la velocidad instantánea disponiendo de 1500 subintervalos de tiempo igualmente espaciados de una centésima que permiten generar una sucesión para el tiempo y para el espacio recorrido. Se deberá hacer avanzar el móvil en el recorrido usando el cociente de diferencias por medio de información obtenida a partir de representaciones numéricas y visuales del desplazamiento. Igualmente se propone un rompecabezas que permite generar aproximadamente la gráfica de rapidez del móvil.

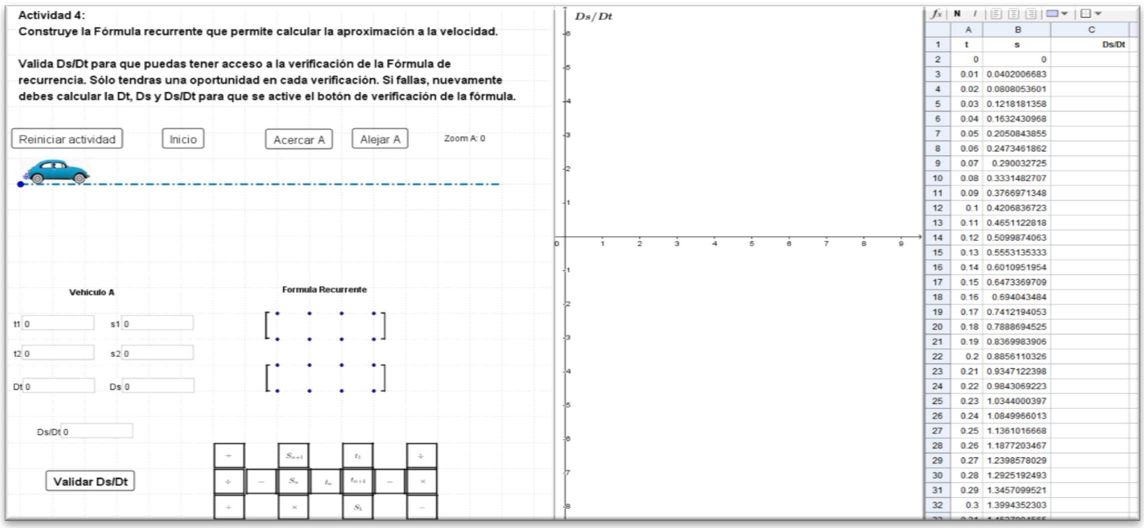


Figura 3. Actividad 4 – Móvil de rapidez variable

La solución de la actividad genera la gráfica de la rapidez del móvil, la cual es una aproximación a la función derivada. En la figura 4 se muestra el contraste entre la función derivada que utiliza el móvil (velocidad instantánea) y la que se obtiene por medio de las tasas de cambio medias a través de la actividad 4.

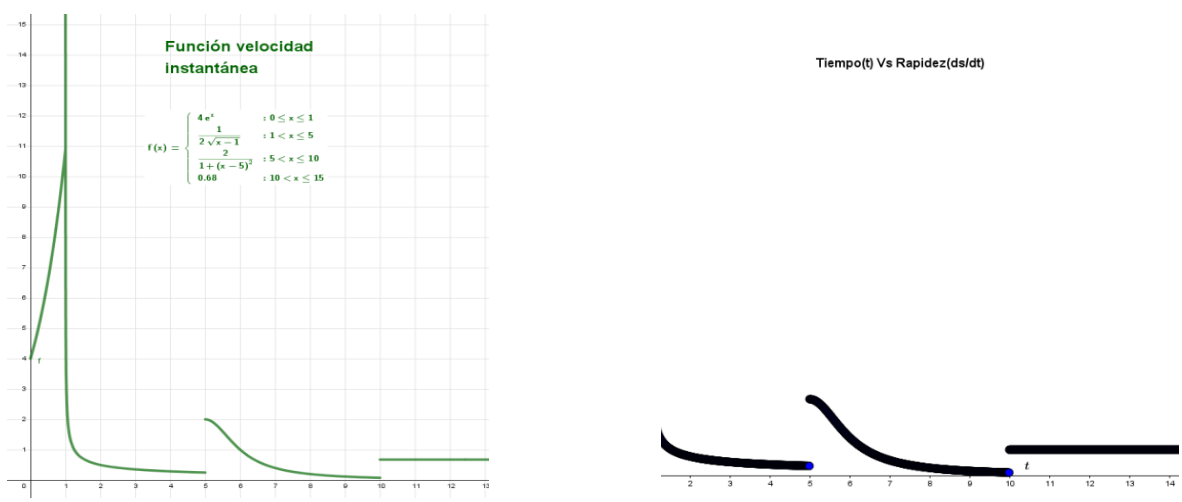


Figura 4. Velocidad instantánea versus tasas de cambio medias

La quinta actividad propone determinar las gráficas de rapidez con la que salen cuatro líquidos diferentes de un grifo en un lapso de tiempo, dando como información, gráficas del flujo de cada líquido de manera aleatoria. Cada flujo está representado por colores verde, naranja, azul y rojo; a su vez cada flujo está sujeto a una única función de tipo constante, lineal, cuadrática o cúbica. Para lograr este reto el estudiante reutilizará estrategias aprendidas en las actividades anteriores junto con las retroacciones proporcionadas por el medio. El objetivo es reforzar el hecho de que la rapidez instantánea de una magnitud de interés se puede obtener de manera aproximada mediante un cociente de diferencias (tasa de cambio media con denominador "pequeño") y por otra parte deducir la relación que hay entre una función polinómica y su derivada.

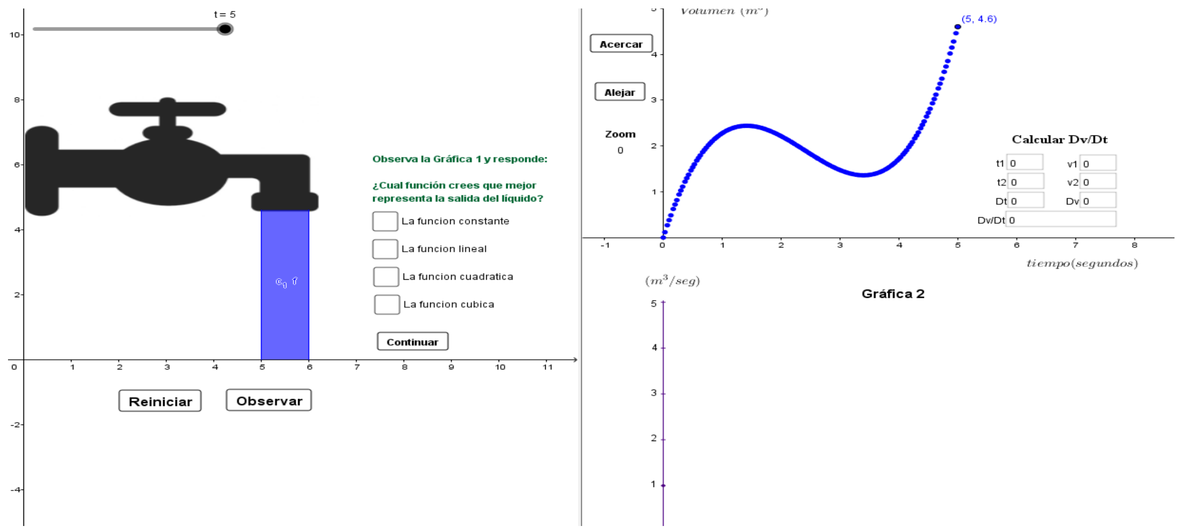


Figura 5. Actividad 5 – Flujo de líquidos aleatorios

Conclusiones

En general, hemos logrado desarrollar situaciones a-didácticas creando un medio que permite diferentes tipos de acciones y retroacciones como una manera no convencional de enseñar la derivada como razón de cambio y que deberían repercutir en un mejor aprendizaje. También se han integrado diferentes representaciones del mismo ente matemático en las que no priorizamos el uso de la representación algebraica y las reglas de derivación para resolver problemas.

La dificultad de integrar la TSD con el problema de la derivada y sus diferentes representaciones e interpretaciones radica en que la teoría y los medios computacionales funcionan muy bien bajo representaciones geométricas, más el uso y sincronización de otras representaciones es bastante escaso. Hemos conseguido en gran parte, mediante programación en Javascript el funcionamiento de la TSD con representaciones no solo geométricas sino también con las de tipo numérico y algebraico, aunque estas últimas no se muestran de manera explícita en las actividades.

Referencias bibliográficas

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 132-142). Universidad Industrial de Santander.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59), Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: Didactico (Vol. 7)*. Buenos Aires: Zorzal.

Flores, A. (2013). Ayudando a futuros profesores a mejorar la comprensión conceptual del cálculo. La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa (pp. 43-82). México: Pearson.

Hitt, F. (2013). Un análisis sobre la enseñanza del concepto de derivada en el nivel preuniversitario, del rol de un libro de texto y su posible conexión con el uso de tecnología. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa (pp. 19-40). México: Pearson.

Margolinas, C. (2009*). La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander Ediciones.

Tall, D. (2013). Una aproximación sensible al cálculo. Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa (pp. 127-157). México: Pearson.

Vasco, C. E. (2006). Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos. Bogotá, Colombia: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

ÁREA DE FIGURAS PLANAS NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DO BRASIL: UM ESTUDO SOB A ÓTICA DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

AREA OF PLANE FIGURES IN THE 8TH YEAR OF FUNDAMENTAL TEACHING OF BRAZIL: A STUDY UNDER THE OPTICS OF THE ANTHROPOLOGICAL THEORY OF THE DIDACTIC

André Pereira da Costa, Rita Batista, Maria das Dores de Morais
Universidade Federal de Pernambuco. (Brasil)
andre.pcosta@outlook.com, rica.basil@gmail.com, dora.pe@gmail.com

Resumo
Esta pesquisa buscou analisar a abordagem do conceito área de figuras planas presente em um livro didático do 8º ano do ensino fundamental, aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD do Brasil, sobretudo, os tipos de tarefas evidentes. Para isso, usamos como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, construída por Chevallard (1999). Com uma análise qualitativa, este estudo apresenta uma abordagem documental. No geral, foram investigados 78 itens, sendo identificados 09 tipos de tarefas, das quais, verificamos uma frequência de 78,21% da tarefa *determinar a medida da área de uma figura ou região* (T_M). A apreciação do capítulo relacionado ao conceito área possibilitou verificar uma forte tendência de apresentar tal objeto matemático enquanto medida, contribuindo para um ensino de área com ênfase nos aspectos numéricos, o que pode acarretar dificuldades conceituais de aprendizagem aos estudantes brasileiros.

Palavras-chave: área, teoria antropológica do didático, livro didático

Abstract
This research sought to analyze the approach of the concept of plane figures area present in a textbook of the 8th year of the fundamental teaching, approved by the National Program of Didactics Books – PNLD of Brazil, especially, the types of evident tasks. For this, we use as theoretical framework the Anthropological Theory of the Didactic – ATD, constructed by Chevallard (1999). With a qualitative analysis, this study presents a documentary approach. In general, 78 items were investigated, identifying 9 types of tasks, of which we noticed a frequency of 78.21% of the task *determine the measurement of the area of a figure or region* (T_M). The analysis of the chapter related to the area concept made it possible to verify a strong tendency to present such a mathematical object as a measure, contributing to an area teaching with emphasis on numerical aspects, which can lead to conceptual difficulties of learning for Brazilian students.

Key words: area, anthropological theory of the didactic, textbook

Introdução

A presente pesquisa busca discutir sobre os tipos de tarefas referentes ao conceito área de figuras planas, evidenciados em um livro didático brasileiro do 8º ano do ensino fundamental. Tal livro foi aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2017 e recentemente é utilizado em várias escolas públicas brasileiras para o triênio 2017/2018/2019.

O nosso interesse em desenvolver esse estudo deriva, em um primeiro momento, da função do livro didático como o principal recurso ao ensino da Matemática, sendo, geralmente, o único suporte à prática pedagógica dos professores. Em segundo momento, o conceito de área ocupa um relevante lugar na Matemática Escolar, estando presente na prática social, em articulação com outros campos matemáticos e com outras disciplinas do currículo da escola brasileira.

Por um longo período, o conceito área de figuras planas era explorado nas escolas do Brasil como um tópico do Ensino de Geometria, todavia, essa perspectiva oculta um ponto essencial, que é a abordagem da área como uma grandeza relacionada à figura geométrica. Desse modo, consideramos que as grandezas são atributos de objetos que podem ser comparados a outros similares por meio da igualdade ou desigualdade (Baltar Bellemain e Lima, 2002). Nessa direção, a abertura de ângulo, a área, o comprimento e o volume podem ser reconhecidos como grandezas geométricas.

Ainda relativamente ao conceito de área, concordamos com Teles (2007), ao afirmar que a área de figuras geométricas planas é uma característica de uma superfície plana ou região, então, é uma grandeza que pode ser comparada ou medida, embasando, nesse sentido, o nosso interesse em considerarmos área como grandeza geométrica autônoma, vinculada ao campo das Grandezas e Medidas.

Conforme alguns documentos curriculares brasileiros, entre eles, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) e os Parâmetros Curriculares para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (Pernambuco, 2012), a abordagem do conceito área deve ser introduzida desde os anos iniciais do ensino fundamental, mas sua sistematização deve ocorrer no sexto ano desse nível escolar, para que o aluno tenha uma maior compreensão desse objeto matemático.

Em vista disso, o livro didático possui uma função de grande relevância ao professor de Matemática, sobretudo, com relação à sua prática pedagógica, no gerenciamento e na composição de situações didáticas. Também é uma importante fonte de produção de conhecimento para os estudantes.

Portanto, nesta pesquisa, buscamos analisar a abordagem do conceito área presente em um livro didático atribuído ao oitavo ano do ensino fundamental, aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD do Brasil, sobretudo, os tipos de tarefas evidentes. Para isso, usamos como quadro teórico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, construída por Chevallard (1999), que apresentamos brevemente na sequência desse texto.

Marco teórico

É indiscutível o uso do conceito de área nas práticas sociais, seja para estabelecer a medida ou estimativa de terrenos, paredes, pisos, seja também na rotina de atividades profissionais, entre elas, engenheiros, arquitetos, agricultores, pedreiros, costureiras, entre outras. Além disso, esse conceito promove a conexão com outros campos da Matemática, tais como o campo geométrico, favorecendo ainda a articulação com outros conceitos matemáticos, como por exemplo, volume, fração, números irracionais, produtos notáveis, etc. (Lima e Baltar Bellemain, 2010).

Na escola, podemos verificar o caráter interdisciplinar desse conceito, como, por exemplo, no ensino de escalas, pressão em Física, superfície de contato em Química, densidade demográfica em Geografia, desmatamento em Biologia, entro outros (Rosa dos Santos e Câmara dos Santos, 2015). Dessa forma, área de figuras planas pode favorecer no entendimento de cenários ou problemáticas de outros campos do conhecimento.

O conceito de área, além de ser um conteúdo que motiva bem os alunos nas aulas de Matemática, devido à possibilidade de contextos diferenciados, seja no resgate dos conhecimentos prévios oriundos da presença na prática social, seja na abordagem de outras disciplinas ou em outros conteúdos da própria Matemática, também motiva diversos pesquisadores a se debruçarem sobre questões relativas tanto ao processo de ensino e da aprendizagem, quanto de resultados de avaliações institucionais referentes a esse conceito (Rosa dos Santos, 2015, p. 68).

Diante dessas circunstâncias, por hipótese, poderíamos admitir que a abordagem desse saber em sala de aula é explorada com tranquilidade e sem maiores problemas, possibilitando, nessa direção, que o aluno construa o conceito de área com sucesso. Todavia, várias pesquisas em Educação Matemática têm mostrado problemas diversos relacionados ao ensino e à aprendizagem dessa grandeza geométrica (Teles, 2007; Silva, 2011; Carvalho, 2012; Costa e Rosa dos Santos, 2015).

Essas pesquisas mostram que nos livros didáticos de Matemática e nas aulas ministradas na escola básica há um grande destaque no ensino de área enquanto medida, eliminando o tratamento desse conceito como grandeza. Tal abordagem tem causado o surgimento de dificuldades conceituais de aprendizagem pelos alunos de diferentes níveis da educação básica, tais como confusão entre área e perímetro, utilização inadequada de unidades de medida e uso de fórmulas errôneas (Rosa dos Santos, 2015).

Nessa direção, Douady e Perrin-Glorian (1989) sinalizam que ao se estabelecer a autonomia da grandeza área, faz-se necessário diferenciar evidentemente, superfície e área, pois duas superfícies de forma diferente podem possuir a mesma área e número e área, pois unidades de medida de área, distintas, adquirem valores numéricos distintos, porém, não ocorre mudança da área.

Segundo essas autoras, se faz necessário diferenciar os três campos: o das figuras, que é o geométrico, o das grandezas, referente à área, e o das medidas, relacionado ao numérico. Ainda, é importante ressaltar que é a análise das dificuldades de entendimento do conceito de área e o estudo dos erros apresentados pelos alunos que sinalizam a necessidade de se abordar esse saber na educação básica como grandeza (Douady e Perrin-Glorian, 1989).

Nessas circunstâncias, com relação à abordagem do conceito área em um livro didático, optamos por utilizar como marco teórico a Teoria Antropológica do Didático – TAD, a qual foi desenvolvida por Chevallard (1999).

Nessa direção, […] a TAD localiza a atividade matemática e, em consequência, a atividade de estudo da Matemática no grupo das atividades de origem humana e das instituições de gênese social. Por exemplo, discutir a regularidade dos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática demanda a discussão de certos elementos distintos: a Matemática, os alunos, os professores, os livros didáticos, entre outros (Costa e Rosa dos Santos, 2018, p. 358).

De acordo com a TAD, toda atividade humana pode ser explicada por uma praxeologia, que é composta por quatro elementos: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Os dois primeiros itens têm por função caracterizar o *saber-fazer*, daí a relação com o prefixo *práxis*. Já os dois últimos referem-se ao *saber*, ou seja, ao radical *logos* (Chevallard, 1999).

Segundo Rosa dos Santos (2015), a noção tipos de tarefa refere-se ao termo antropológico da teoria, tendo em vista que envolve exclusivamente as ações desenvolvidas pelo ser humano. Comumente, esse termo praxeológico está relacionado a um objetivo claro e coerente, que é caracterizado por um verbo de ação e pelo complemento da frase.

Por exemplo, se considerarmos apenas o verbo, tal como “construir”, desse modo, trata-se de um gênero de tarefas, porque não está explícito o que será construído.

Chevallard (1999) sinaliza que os termos *tipos de tarefa* e *tarefas*, mesmo apresentando evidentes aproximações entre si, têm importantes distanciamentos. O tipo de tarefa corresponde à reunião de tarefas que incluem várias tarefas que dispõem das mesmas propriedades. Como exemplo disso, podemos considerar T_M – *Determinar a medida da área de uma figura ou região*, T_{M1} – *Determinar a medida da área de um quadrado inscrito numa malha triangular* e T_{M2} – *Determinar a medida da área de um triângulo inscrito numa malha quadricular*, sabendo que T_{M1} e T_{M2} são tarefas de T_M. Nesse cenário, podemos concluir que o tipo de tarefa T_M é formada pelas tarefas T_{M1} e T_{M2}.

Para tanto, para que uma técnica exista é necessário que um argumento, responsável pela análise e justificativa dessa técnica no que se refere a sua prática e sua confirmação, também exista. Dessa forma, a tecnologia não tem por finalidade apenas fazer com que o tipo de tarefa seja entendido, mas, ainda, explicitar a técnica. A tecnologia é uma proposição, um enunciado relativamente compreensível. Perante determinadas situações, faz-se necessário que a tecnologia seja justificada, transpondo para uma fase mais ampla de explicitação, desse modo, alcançamos a fase da teoria. Isto significa que a teoria procura construir um argumento holístico, cujo fim é a interpretação e justificativa da tecnologia (Costa e Rosa dos Santos, 2015, p.1014).

Em geral, qualquer tipo de tarefa pode ser resolvido de diferentes maneiras, do mesmo modo, para explicar uma técnica, diferentes justificativas podem ser produzidas. Todavia, além dos elementos tecnologia e teoria, que são específicos nas instituições, o foco também é a identificação de técnicas, para a Teoria Antropológica do Didático.

Portanto, tendo por base que o saber matemático é resultado da atividade humana, logo, ele pode ser explicado por meio de uma praxeologia, isto é, por uma organização praxeológica. Nesse sentido, nesse trabalho optamos por analisar os tipos de tarefas evidentes no capítulo de um livro didático do 8º ano do ensino fundamental do Brasil, voltado para o conceito de área de figuras planas, pois os demais elementos praxeológicos (técnica, tecnologia e teoria), nem sempre, são explícitos e simples de serem identificados.

Percurso metodológico

Nesta investigação, analisamos o livro didático de Matemática pois é um recurso didático de grande relevância tanto para professores como para alunos do ensino básico do Brasil. No caso dos docentes, o livro didático é um importante apoio às práticas pedagógicas, enquanto que para os estudantes, geralmente, é a fonte mais segura informação e de produção de conhecimentos.

Este estudo possui uma abordagem qualitativa com cunho documental, no qual analisamos o capítulo destinado ao objeto matemático área de figuras planas. Provavelmente, em outros capítulos da obra, ocorre a articulação do conceito área com outros conteúdos da Matemática, porém, optamos por dedicar apenas o seu estudo como foco, buscando desenvolver uma análise com mais rigor.

Desse modo, a análise do livro didático foi organizada em um único momento, no qual realizamos o levantamento e a identificação dos tipos de tarefas evidentes no capítulo relativo ao ensino de área. Tal livro didático foi aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD de 2017 e utilizado por várias escolas públicas do Brasil, a partir do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE, para o triênio 2017/2018/2019.

Aqui, é importante salientar que na definição do quantitativo de tarefas foram avaliados os exercícios sugeridos, e nas circunstâncias que apresentavam vários itens, cada item foi analisado como uma tarefa.

Resultados

O conceito de área de figuras planas é abordado sistematicamente no décimo segundo capítulo do livro didático investigado (que possui ao todo, 12 capítulos). Além do mais, são oferecidas dezoito páginas no livro para a abordagem desse objeto matemático, sendo identificados 78 itens (espécimes de tarefas) no geral, que categorizamos em nove tipos de tarefas. A tabela 1 apresenta a distribuição quantitativa de tarefas identificadas.

Tabela 1: Tipos de tarefas verificados no livro didático analisado

	Tipos de Tarefas	Quantidade
T_M	Determinar a medida da área de uma figura ou região	61
T_G	Determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área	06
T_C	Comparar áreas de figuras planas	04
T_E	Estimar uma área	04
T_A	Escrever uma expressão algébrica da área de uma figura	01
T_P	Produzir figura dada a área	01
T_N	Nomear polígono a partir da área	01
	Total	78

Fonte: Acervo da Pesquisa

Conforme o levantamento apresentado na tabela, percebemos que *determinar a medida da área de uma figura ou região (T_M)* é o tipo de tarefa mais presente no capítulo do livro, com 78,21% do total, ou seja, frequente em 61 dos 78 itens identificados. Neste tipo de tarefa, constatamos que existe um realce do conceito de área enquanto medida. A Figura 1, relativa à Atividade 1 sugerida no capítulo, apresenta uma ilustração desse caso.

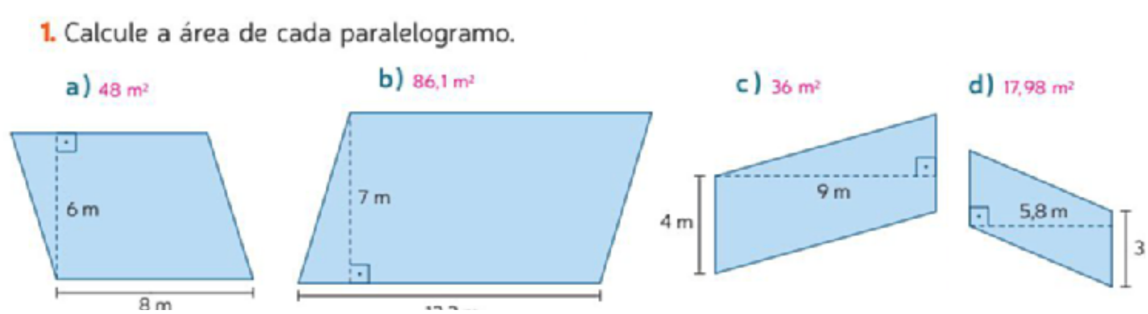


Figura 1. Atividade sugerida nº 1, na qual é evidenciada a tarefa T_M.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.263.

Em seguida, evidenciamos que *determinar o valor de uma grandeza diferente da área, em problema cujo enunciado comporta dados relativos à área (T_G)* foi o segundo tipo de tarefa mais frequente no capítulo analisado, com 7,69% do geral, o que corresponde a 06 das 78 tarefas levantadas. Assim como no caso anterior, esse tipo de tarefa também realça o conceito área como medida, conforme ilustra a seguir pela Figura 2.

3. Qual a altura de um paralelogramo que tem 290 dm² de área e 20 dm de base? 14,5 dm

Figura 2. Atividade sugerida nº 3, na qual é evidenciada a tarefa T_G.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.263.

Logo depois, em terceiro lugar, os tipos de tarefa mais evidentes no capítulo do livro foram *comparar áreas de figuras planas (T_C)* e *estimar uma área (T_E)*, cada um com 5,13% do total, o que equivale a 04 dos 78 itens analisados para cada tipo de tarefa. Mais uma vez, nesses dois tipos de tarefas, observamos que o objeto área é considerado enquanto medida, como ilustrado pelas Figuras 3 e 4 que seguem.

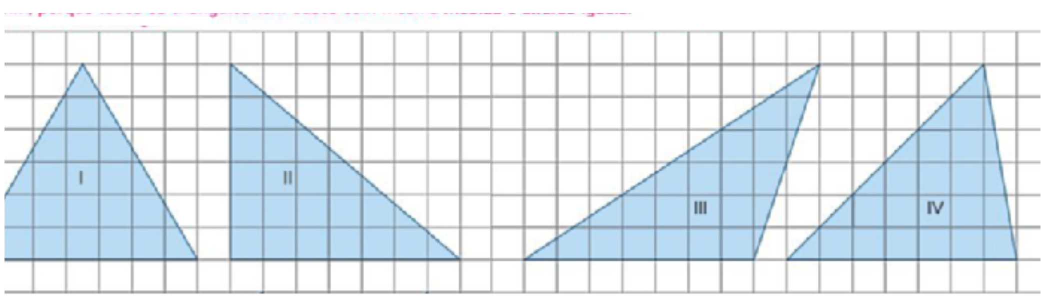


Figura 3. Atividade sugerida nº 11, na qual é evidenciada a tarefa T_C.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.265.

Ainda, em T_C, observamos uma ênfase na comparação das áreas de triângulos, enquanto que em T_E, percebemos uma distribuição equilibrada entre a estimativa das áreas de figuras poligonais (paralelogramo, triângulo, trapézio e losango).

25. Sobre quatro figuras idênticas com 58 cm² de área cada, Leonel construiu um paralelogramo, um triângulo, um trapézio e um losango.

Sem efetuar cálculos, estime qual dos polígonos possui a área mais próxima da área da figura. Resposta esperada: losango.

Agora, efetue os cálculos necessários e verifique se sua resposta está correta.
Resposta no final do livro.

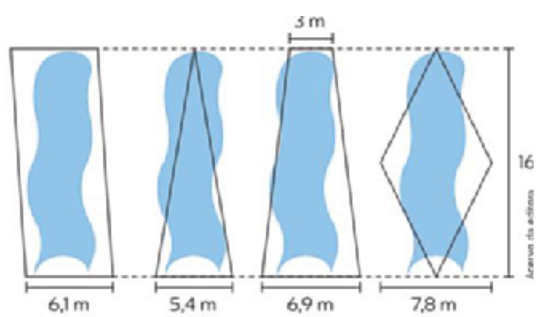


Figura 4. Atividade sugerida nº 25, na qual é evidenciada a tarefa T_E.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.265.

Por fim, em quarto lugar, como os tipos de tarefa mais evidentes, encontramos *escrever uma expressão algébrica da área de uma figura (T_A)*, *produzir figura dada a área (T_P)* e *nomear polígono a partir da área (T_N)*, todos com 1,28% de presença entre o total de itens analisados. As Figuras 5, 6 e 7 ilustram esse caso.

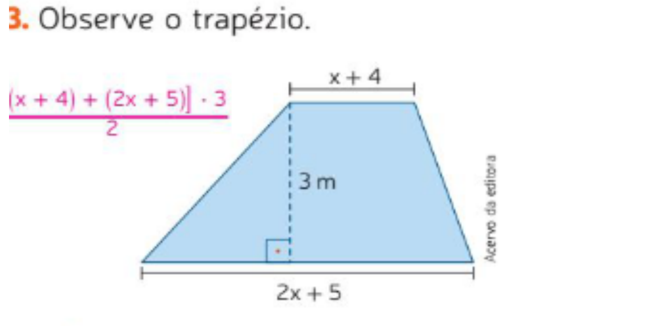


Figura 5. Atividade sugerida nº 13, na qual é evidenciada a tarefa T_A.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.267.

Em todos os tipos de tarefas ilustrados nesse artigo, verificamos uma tendência em articular as Grandezas e Medidas com o campo geométrico. Já em T_A, evidenciamos uma conexão do conceito de área com a Geometria (por meio da figura geométrica, isto é, o trapézio) e com a Álgebra (com as equações do primeiro grau com uma incógnita).

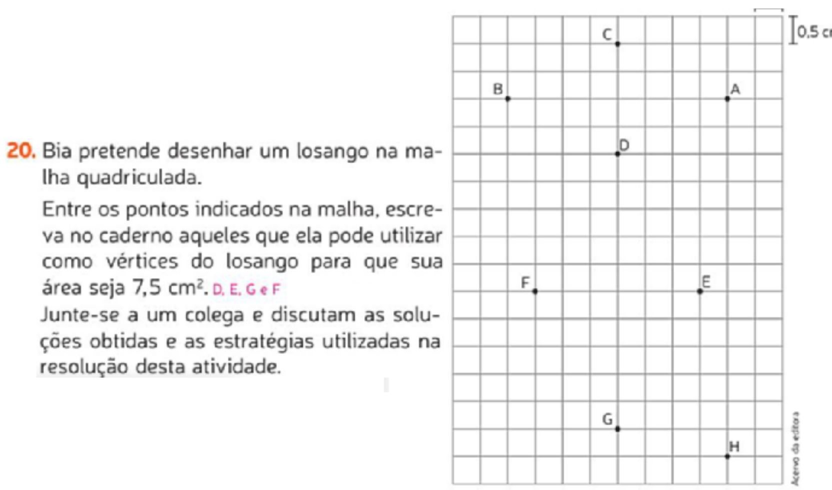


Figura 6. Atividade sugerida nº 20, na qual é evidenciada a tarefa T_P.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.269.

Apesar dessa conexão entre os campos da Matemática, constatamos que entre as tarefas investigadas há um grande foco na abordagem numérica do conceito área de figuras planas, isso pode ser verificado em todos os tipos de tarefas. Dessa forma, o ensino desse saber enquanto grandeza autônoma não é explorado, o que pode contribuir no surgimento dificuldades conceituais de aprendizagem aos estudantes brasileiros do ensino básico.

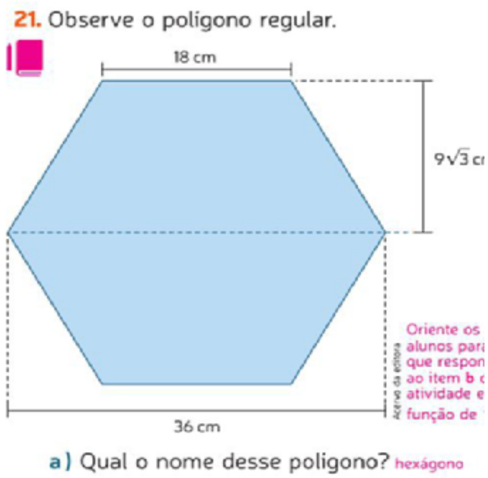


Figura 7. Atividade sugerida nº 21, na qual é evidenciada a tarefa T_P.
Fonte: Souza e Pataro, 2015, p.269.

É importante ressaltar que além das tarefas mencionadas nesse trabalho, realizamos a identificação de 5% de tarefas que não apresentam relação com o estudo de área de figuras planas, desse modo, as desconsideramos na análise do capítulo do livro didático.

Conclusões

O estudo realizado sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, em particular, o reconhecimento dos tipos de tarefas torna possível a caracterização da abordagem do conceito área de figuras planas no livro didático de Matemática do 8º ano do ensino fundamental do Brasil, que foi analisado nessa pesquisa. Nessa direção, foi possível constatar o que é enfatizado desse objeto matemático.

A apreciação do capítulo relacionado ao conceito área possibilitou verificar uma forte tendência de apresentar tal objeto matemático enquanto medida, contribuindo para um ensino de área com ênfase nos aspectos numéricos, como evidenciado em todos os tipos de tarefas identificados.

Esse cenário pode produzir um obstáculo epistemológico para a aprendizagem dos alunos brasileiros. Então, a abordagem relacionado ao objeto área, identificada na obra analisada, não favorece a compreensão desse conceito enquanto grandeza, sobretudo, como grandeza geométrica.

Diante desses obstáculos, o professor de Matemática deve elaborar intervenções de natureza pedagógica que favoreçam o ensino do saber matemático área enquanto grandeza geométrica autônoma, de forma articulada com os outros campos matemáticos.

Referências bibliográficas

Baltar Bellemain, P. M., Lima, P. F. (2002). *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental.* (1. ed.). Natal, Editora da SBHMat, 2002.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática (3a ed.). Brasília: MEC/SEF, Brasil.

Carvalho, D. G. (2012). *Uma análise da abordagem da área de figuras planas no guia de estudo do PROJOVEM URBANO sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Chevallard, Y. (1999). L‟Analyse de Des Pratiques Enseignantes en Théorie Anthropologique Du Didactique. *Recherches em Didactiques des Mathématiques,* Paris, p. 221 – 266.

Costa, A. P., Rosa dos Santos, M. (2015). Análise praxeológica relativa ao objeto área de figuras planas em um livro didático do 6° ano do ensino fundamental. En *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Ilheus-BA. pp. 1010-1021.

Costa, A. P., Rosa dos Santos, M. (2018). Os quadriláteros notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. *Revista de Educação Matemática*, 15(19), 353-372.

Douady, R., Perrin-Glorian, M.-J. (1989). Unprocessus d'apprentissageduconcept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics.* Springer, 20(4), 387-424.

Lima, P. F., Baltar Bellemain, P. M. B. (2010). Grandezas e medidas. En J. P. F. Carvalho (Ed.), *Matemática:* ensino fundamental – coleção explorando o ensino (pp.167-200). Brasília: MEC/SEB.

Pernambuco. (2012). *Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:* Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. Juiz de Fora: UFJF.

Rosa dos Santos, M. (2015). *A transposição didática do conceito de área de figuras planas no 6º ano do ensino fundamental:* um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Tese de Doutorado, Universidade Federal Rural de Pernambuco: Recife, Brasil.

Rosa dos Santos, Câmara dos Cantos, M. (2015). O conceito de área de figuras geométricas planas no livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 6 (2), 1-22.

Silva, J. V. G. (2011). Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Teles, R. A. M. (2007). *Imbricações entre campos conceituais:* um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

A NOÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES NA TRANSIÇÃO ENTRE OS ENSINOS FUNDAMENTAL, MÉDIO E SUPERIOR

THE NOTION OF SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS IN THE TRANSITION BETWEEN ELEMENTARY, SECONDARY AND HIGHER EDUCATION

Marlene Alves Dias, Valdir Bezerra dos Santos Júnior, Miriam do Rocio Guadagnini, Sirlene Neves de Andrade
Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade Federal de Pernambuco, Universidade Federal de Goiás, Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (Brasil)
maralvesdias@gmail.com, valdir.bezerra@gmail.com, miriamguadagnini@gmail.com, sirlene-neves@hotmail.com

Resumo
Tratamos neste artigo da noção de sistemas de equações lineares na transição entre o Ensino Fundamental, o Médio e o Superior. O referencial teórico central é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e seus colaboradores e, como apoio consideramos as abordagens teóricas sobre níveis de conhecimento esperados dos estudantes, segundo Robert; quadro, conforme Douady e pontos de vista definidos por Rogalski. A análise das relações institucionais esperadas e existentes, assim como das relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes de um curso de formação inicial de professores indica coerência entre as relações institucionais esperadas e existentes, mas aponta relações pessoais que não estão em consonância com as expectativas institucionais. O estudo indica a necessidade de considerar os sistemas possíveis, indeterminados e impossíveis desde a sua introdução de forma articulada com noções intra e extramatemáticas em diferentes contextos.

Palavras-chave: sistemas lineares, transição, relações institucionais e pessoais

Abstract
In this paper, we discuss the notion of linear equation systems in the transition between Elementary, Secondary and Higher Education. The main theoretical reference is the Anthropological Theory of The Didactic by Chevallard and collaborators. We also consider as support: the theoretical approaches on the levels of knowledge expected from the students, according to Robert, the framework, according to Douady, and points of view defined by Rogalski. The analysis of expected and existing institutional relationships and of the personal relationships developed by the students of an initial teacher training course indicates coherence between expected and existing institutional relationships, but it shows personal relationships that are not aligned with institutional expectations. The study indicates the need to consider possible, indeterminate and impossible linear systems from its introduction in an articulated way with intra- and extra-mathematical notions in different contexts.

Key words: linear systems, transition, institutional and personal relationships

Introdução

Na passagem de uma etapa da escolaridade a outra, os professores, em geral, reclamam que os estudantes não dispõem dos conhecimentos necessários para que possam introduzir e desenvolver os conteúdos matemáticos indicados para aquela determinada etapa escolar. No Brasil, a noção de sistemas de equações lineares é introduzida no Ensino Fundamental anos finais (alunos de 11 a 14 anos), ampliada e aplicada em diferentes contextos no Ensino Médio (estudantes de 14 a 17 anos) e revisitada e utilizada como ferramenta para a resolução de problemas matemáticos e extramatemáticos nos cursos superiores de Matemática e Licenciatura em Matemática, assim como nos cursos em que a Matemática é ferramenta para a resolução de problemas específicos.

Sendo assim, as dificuldades em relação à noção de sistemas de equações lineares tendem a agravar-se no Ensino Superior, pois é neste momento que a referida noção torna-se uma das ferramentas importantes para a introdução de novos conhecimentos, que precisam estar disponíveis para que os estudantes possam aplicá-la nas diversas tarefas que encontrarão em seus respectivos cursos.

Partindo da problemática que consiste em considerar que, em geral, nossos estudantes do Ensino Superior encontram dificuldades para utilizar de forma correta e adequada a noção de sistemas de equações lineares, nos colocamos as seguintes questões: *Como é introduzida e desenvolvida a noção de sistemas de equações lineares na Educação Básica (alunos de 11 a 17 anos)? O estudo proposto é compatível com as necessidades dos estudantes que iniciam o Ensino Superior em cursos de ciências exatas, em particular, em cursos de Licenciatura em Matemática (formação inicial de professores de Matemática)?* e *Os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática dispõem dos conhecimentos necessários, quando chegam ao Ensino Superior?*

A partir da problemática e das questões que formulamos, consideramos como objetivo da nossa pesquisa o estudo da transição entre os Ensinos Fundamental, Médio e Superior, quando se considera a noção de sistemas de equações lineares.

Para tal, escolhemos como referencial teórico central da pesquisa a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e seus colaboradores, em particular os trabalhos de Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (1994, 1999, 2007, 2015), e as abordagens teóricas em termos de: níveis de conhecimento esperado dos estudantes, segundo definição de Robert (1997, 1998); quadro e mudança de quadros, conforme Douady (1984, 1992) e pontos de vista segundo definição de Rogalski (2001). Na sequência, apresentamos brevemente elementos desses referenciais que nos auxiliaram no desenvolvimento da pesquisa.

Referencial teórico

Iniciamos pela TAD, observando que as noções particularmente utilizadas nessa pesquisa foram as de relação institucional e pessoal, praxeologia e ostensivos e não ostensivos.

Chevallard (2015) define relação pessoal a um objeto o como sendo o sistema mais ou menos integrado, mais ou menos rico, de todas as maneiras que x pode conectar-se com o. O autor observa que a relação pessoal de x com o, indicada por R (x, o), reúne o que x sabe (ou crê saber) sobre o, o que ele pode dizer, como ele pode usá-lo ou manuseá-lo, o que ele sente em face de o, suas emoções, o conteúdo de seus sonhos em que o objeto o aparece etc. Da mesma forma, o autor ressalta que uma posição p em uma instituição I pode, num determinado momento, não ser ocupada ou ser ocupada por várias pessoas. Quando uma pessoa x ocupar a posição p de I, esta pessoa se tornará sujeito de I em posição p, o que indica que ela se sujeitou a ocupar a posição p na instituição I, indicada RI (p,o), que corresponde à relação institucional ao objeto o em uma posição p de I.

Outra noção por nós utilizada é a de praxeologia que, segundo Bosch e Chevallard (1999) e Chevallard (2007), corresponde aos tipos de tarefas (T) que, para serem executadas, necessitam de uma maneira de fazer que o autor denomina técnica (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um saber fazer que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico, que significa um saber formado por uma tecnologia (θ), ou seja, um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria $[T, \tau, \theta, \Theta]$ constitui o que Chevallard denomina praxeologia, sendo ela que articula uma parte prático-técnica, que equivale ao saber fazer, a uma parte tecnológica-teórica, que corresponde ao saber.

Para o autor, é a noção de praxeologia que nos auxilia a melhor compreender os problemas associados ao saber a ensinar sob o modo como é proposto para ser desenvolvido.

Outras ferramentas de análise consideradas na pesquisa são as noções de ostensivos e não ostensivos segundo Chevallard (1994) e Bosch e Chevallard (1999) que, ao ponderarem que em toda atividade humana somos chamados a realizar diferentes tipos de tarefas e que para cada uma delas existe uma técnica, formularam as seguintes questões: De que é feita uma técnica? De que ingredientes se compõe? Em que consiste a "execução" de uma técnica?

Para respondê-las, eles distinguem dois tipos de objetos: os ostensivos e os não ostensivos. Os primeiros são objetos que têm para nós uma forma material, sensível. Exemplos: objetos materiais (caneta, compasso etc.); gestos (ostensivos gestuais); palavras, e mais genericamente o discurso (ostensivos discursivos); esquemas, desenhos, grafismos (ostensivos gráficos); escritas e formalismos (ostensivos escriturais).

Eles ressaltam ainda que a característica dos ostensivos é que eles podem ser manipulados, não só no sentido tátil estrito (como um compasso, uma caneta etc.), mas também em sentido amplo (pela voz, pelo olhar etc.). Ao contrário, os objetos não ostensivos, que denominamos usualmente noções, conceitos, ideias etc. não podem ser manipulados, mas só evocados por manipulação dos ostensivos associados. Assim, sendo a manipulação dos ostensivos regrada com a ajuda dos não ostensivos e estes evocados com a ajuda dos ostensivos, os pesquisadores observam que existe uma dialética necessária entre eles.

Como já anunciado, consideramos ainda a noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes, segundo definição de Robert (1997, 1998). Conforme Robert (1997), os níveis de conceituação são os marcos que podemos identificar ao longo do ensino das noções de determinado campo conceitual. Após considerar que o ensino das noções matemáticas associadas a um campo conceitual depende da escolha da ordem de apresentação, Robert (1998) define os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes.

O nível técnico corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplo: Resolver um sistema linear dado pelo método do escalonamento.

O nível mobilizável corresponde a um início de justaposição de saberes de determinado quadro, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e o objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido. Se um saber é identificado, ele é considerado mobilizado se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Exemplo: Determinar as condições sobre um parâmetro para que um sistema linear dado tenha uma única solução, infinitas soluções ou não tenha solução.

O nível disponível corresponde a saber responder corretamente o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro (fazer relações), aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que conhece (servem de terreno de experimentação), ao fato de dispor de referências, de questionamentos, de uma organização. Pode funcionar para um único problema ou possibilitando fazer resumos. Exemplo: Determinar o número de átomos no início e no final de uma reação (transformação) química ($xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$).

Consideramos ainda a noção de quadro e mudança de quadros segundo Douady (1984, 1992). A autora define objeto matemático como parte de um edifício mais amplo, que é o saber matemático, constituindo assim o que ela denomina quadro, que corresponde a um ramo da Matemática, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais que lhes são associadas. As imagens mentais são essenciais, pois funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos, mas diferirem pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas. Os exemplos apresentados para os três níveis de conhecimento são desenvolvidos no quadro algébrico, mas a equação química dada necessita de uma passagem do quadro da Química para o quadro algébrico para sua resolução. O exemplo é simples e podemos representá-lo por um sistema de duas equações lineares e três incógnitas, mas outras transformações exigem sistemas com um número maior de equações e de incógnitas.

Ressaltamos aqui que Douady (1984, 1992) define as mudanças de quadros como meios para se obterem formulações diferentes de um problema, que podem ou não ser equivalentes, mas que possibilitam um novo acesso às dificuldades encontradas e permitem utilizar novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial. As traduções de um quadro em outro terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, possibilitando assim a criação de novos objetos matemáticos, enriquecendo tanto o quadro original como os quadros auxiliares de trabalho.

Consideramos ainda a definição de pontos de vista apresentada por Rogalski (2001), que corresponde a diferentes maneiras de observar os objetos matemáticos, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los, o que permite identificar dois pontos de vista diferentes. Nesse sentido, observar um objeto em diferentes quadros é considerar diferentes pontos de vista. Mas podem-se considerar vários pontos de vista em um mesmo quadro. Por exemplo: o sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ é a representação algébrica das soluções para a transformação $xH_2 + yO_2 \rightarrow zH_2O$, o que se coaduna com o ponto de vista cartesiano. A terna ordenada $\left(z, \frac{z}{2}, z\right)$ é a representação algébrica das soluções algébricas da mesma transformação, o que corresponde ao ponto de vista paramétrico.

A seguir, apresentamos a metodologia da pesquisa.

Metodologia

Para o desenvolvimento da pesquisa, o método utilizado para a análise da relação institucional esperada e existente foi o da pesquisa documental, de acordo com Lüdke e André (2013), que a conceituam como um método de pesquisa qualitativa, em que se analisam documentos contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos.

A análise dos documentos foi realizada por meio de uma grade de análise construída para esse fim. Nessa grade, consideramos: o tipo de tarefa, as técnicas previstas, as tecnologias das técnicas e a teoria que justifica a tecnologia, o nível de conhecimento esperado dos estudantes, os ostensivos e não ostensivos em jogo, o quadro em que a tarefa é enunciada, as mudanças de quadros necessárias e as mudanças de pontos de vista. Observamos aqui que os quadros considerados são: algébrico, geométrico e das outras ciências; os pontos de vista são o cartesiano e o paramétrico.

Foram analisados livros didáticos dos Ensinos Fundamental e Médio e, para este trabalho, consideramos as obras de Dante (2017) e Dante (2017a), que são indicadas há vários anos por avaliadores do Ministério da Educação. Para a análise da relação pessoal dos estudantes, quando se considera a noção de sistemas de equações lineares, foi construído um teste diagnóstico com base na identificação das relações institucionais esperadas e existentes. Esse teste foi passado a um grupo de 37 estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática (formação inicial de professores).

Exemplo de aplicação da grade de análise
Tipo de tarefa: Balancear uma reação química.
Exemplo: Balancear a seguinte transformação: $H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$.

- Técnica(s): 1) Resolver mentalmente, igualando a quantidade de hidrogênio e oxigênio dos dois lados da equação ou 2) Utilizar a noção de sistemas lineares;
- Tecnologia(s): 1) Fazer a correspondência entre a quantidade de hidrogênio e oxigênio nos dois membros da equação química (Números reais e suas propriedades); 2) Escrever o sistema linear correspondente e resolvê-lo;
- Teoria(s): Transformações Químicas, Números reais e suas propriedades e sistemas de equações lineares, um método de resolução de sistemas lineares e estudo das condições de solução;
- Nível de conhecimento esperado dos estudantes: disponível;
- Ostensivos: algébricos, sistemas lineares, gestuais, equação química, e escriturais;
- Não ostensivos: transformações químicas, números reais e suas propriedades e sistemas de equações lineares.
- Quadro em que a tarefa é enunciada: quadro da Química;
- Mudança de quadros: para a técnica 2, é preciso realizar a passagem ao quadro algébrico;
- Mudança de ponto de vista: Passagem do ponto de vista cartesiano para o ponto de vista paramétrico (generaliza as possibilidades de solução).

Resultados

As relações institucionais indicadas para os Ensinos Fundamental e Médio

A análise dos livros didáticos, em particular os de Dante (2017) e Dante (2017a), possibilitou observar que no Ensino Fundamental e Médio (alunos de 11 a 17 anos), a ênfase é dada aos métodos de resolução de sistemas de equação lineares, sem preocupação em trabalhar as possibilidades de solução do sistema, mesmo sendo estas tratadas explicitamente, em particular, quando da introdução dos sistemas de equações lineares 2x2. A articulação entre o quadro algébrico e geométrico é feita por meio da representação gráfica das equações no plano cartesiano ortogonal e da visualização da interseção das retas dadas no sistema, o que proporciona observar que o sistema pode ter: 1) uma única solução, ou ainda, o sistema é possível e determinado, logo as retas são concorrentes; 2) infinitas soluções, ou ainda, o sistema é possível e indeterminado, logo as retas são coincidentes e 3) o sistema não tem solução, ou ainda, o sistema é impossível, logo as retas são paralelas. Este estudo fica a cargo da escolha do professor em função dos conhecimentos prévios de seus estudantes e da necessidade de considerar aplicações intra e extramatemáticas, isto é, o nível de conhecimento esperado dos estudantes não atinge o nível disponível, o que dificulta aplicação da noção de sistemas lineares em outras ciências e na própria matemática, como por exemplo no estudo dos espaços vetoriais em Álgebra Linear no Ensino Superior.

Sendo assim, em geral, a ênfase é dada na utilização da noção de sistema de equações lineares enquanto ferramenta explícita para modelar problemas matemáticos, de outras ciências e do cotidiano. Em geral, como indicamos acima, as tarefas propostas aos estudantes do Ensino Fundamental comportam sistemas de equações lineares com uma única solução, o que parece conduzir os estudantes a privilegiarem o método da substituição para a resolução desses sistemas e a enfrentarem dificuldades para reconhecer os sistemas indeterminados ou impossíveis.

No Ensino Médio (alunos de 15 a 17 anos), após a introdução das noções de matrizes, suas operações e propriedades e determinantes de matrizes de ordem 2 e 3, são revisitados os sistemas de duas equações lineares e duas incógnitas. Nessa revisão, é dada ênfase ao método da adição, que pode auxiliar na introdução do método do escalonamento, e ao estudo das condições de solução de um sistema linear. As soluções são representadas por meio de pares ordenados, para os quais se utiliza um parâmetro, quando o sistema linear é possível e indeterminado, o que indica que se usa implicitamente o ponto de vista paramétrico.

Na sequência, são introduzidos os sistemas lineares com m equações e n incógnitas e o método de resolução privilegiado é o método do escalonamento. Ressaltamos aqui que o método é aplicado diretamente no sistema linear dado, sem a utilização da matriz dos coeficientes, o que consideramos uma escolha que facilita o estudo das condições de solução. O conjunto solução é dado por meio de pares, ternos ou quádruplas ordenadas, nas quais as coordenadas são representadas por parâmetros, significando um tratamento implícito do ponto de vista paramétrico.

Após esse desenvolvimento teórico com exemplos e tarefas de treinamento das novas técnicas, são introduzidas novas tarefas que privilegiam o nível mobilizável, mesmo tratando de situações intra e extramatemáticas, ou seja, associadas a outras noções matemáticas, a outras ciências ou ao cotidiano. A articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico fica a cargo do professor e as praxeologias propostas privilegiam os sistemas com uma única solução, pois dão ênfase às aplicações de problemas intra e extramatemáticos para os quais o sistema linear tem uma única solução.

Desse modo, observamos que em termos de relações pessoais esperadas dos estudantes, ao terminarem o Ensino Médio, podemos considerar que eles dispõem dos métodos da adição, comparação e substituição desenvolvidos no Ensino Fundamental e do método do escalonamento introduzido no Ensino Médio para desenvolver tarefas, em particular as associadas à aplicação em problemas intra e extramatemáticos, sendo ainda capazes de representar o conjunto solução por meio de pares, ternos e quádruplas, uma vez que são considerados apenas sistemas lineares com no máximo quatro equações e quatro incógnitas. É importante observar que no caso dos sistemas lineares possíveis e indeterminados, o conjunto solução é representado por meio de representações paramétricas, o que equivale a um primeiro contato com o ponto de vista paramétrico, mesmo que de forma implícita, ou seja, as relações institucionais existentes, analisadas por meio dos livros didáticos indicam que o estudante deveria ser capaz de aplicar a noção de sistemas lineares, saber analisá-los e representá-los por meio dos ostensivos pares, ternos e quádruplas ordenadas.

Os resultados acima indicam que, ao iniciarem o Ensino Superior, espera-se que os estudantes disponham do método do escalonamento para resolver sistemas lineares mxn e que sejam capazes de determinar o conjunto solução para os sistemas possíveis e determinados e indeterminados, tendo ainda uma noção implícita da representação paramétrica desses sistemas lineares, o que pode auxiliar na articulação dos pontos de vista cartesiano e paramétrico no estudo da Álgebra Linear e a aplicar em tarefas específicas de outras ciências, ou seja, dispor da noção de sistemas lineares, sabendo utilizá-la quando necessário.

A relação pessoal de um grupo de estudantes do primeiro ano de Licenciatura em Matemática

A partir de um teste diagnóstico realizado com 37 estudantes de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública que iniciavam o Ensino Superior, foi possível observar que, ao contrário das expectativas associadas à relação institucional, os estudantes tendem a privilegiar o método da substituição e apresentam dificuldades em reconhecer os sistemas lineares possíveis e indeterminados e impossíveis. Além disso, o método do escalonamento, em geral, é desenvolvido sobre a matriz dos coeficientes, utilizando apenas as operações de adição e multiplicação sobre as linhas dessa matriz. O desenvolvimento do método do escalonamento sobre a matriz dos coeficientes, além de limitar as operações do método do escalonamento, pode dificultar a recuperação dos resultados encontrados, mas é importante observar que no livro didático analisado, o autor carrega as incógnitas ao aplicar o método do escalonamento; e os outros livros didáticos seguem a mesma orientação, o que parece mostrar que no Ensino Médio ainda existem professores que não se adaptaram as expectativas institucionais, lembrando que o livro didático no Brasil é avaliado e distribuído pelo Ministério da Educação, ou seja, o livro didático é institucionalizado em toda Educação Básica (alunos de 6 a 17 anos).

A seguir, apresentamos extratos representativos de protocolos de respostas dadas por estudantes ao teste diagnóstico, mostrando as dificuldades por eles encontradas.

Na figura 1, é possível observar que o estudante utilizou o método da substituição para resolver os sistemas 1 e 2 do teste diagnóstico e não visualizou que os sistemas são: possível e determinado e impossível respectivamente, ou seja, ele procurou a solução do sistema linear, o que mostra a importância de um trabalho específico sobre o estudo das condições de solução de um sistema linear.

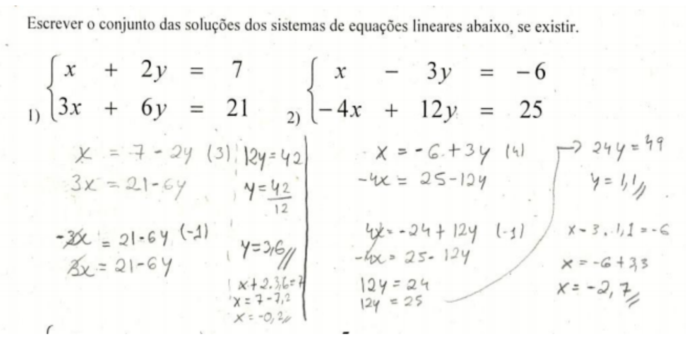


Figura 1. Protocolo de uma resposta errada para o primeiro e segundo sistema do teste diagnóstico.

Na figura 2, observamos que o sistema linear 3x3 dado é possível e indeterminado e sua resolução é simples, pois basta observar que a terceira equação é -2 vezes a primeira. O estudante utilizou o método da substituição, porém parece só ter reconhecido sistemas lineares com uma única solução e não foi capaz de terminar a última equação que daria $0 = 0$, o que permitiria encontrar o conjunto solução escrevendo a terna ordenada em função de um parâmetro qualquer. Para este caso, seria ainda possível observar que cada equação representa um plano no espaço e que a interseção dos três planos é uma reta (infinitas soluções e duas equações independentes). Esse exemplo indica a possibilidade de utilizar outros casos para discutir a solução algébrica e representá-la usando, por exemplo, o software Geogebra 3D, o que pode ser tratado já no Ensino Médio.

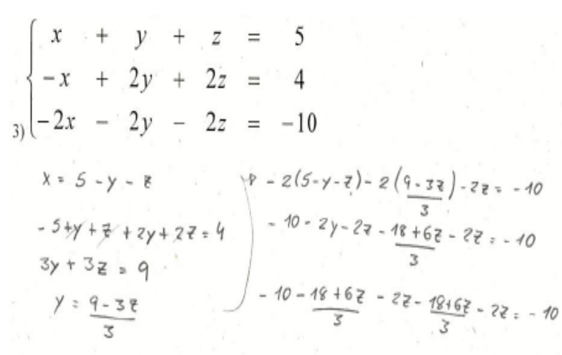


Figura 2. Protocolo de uma resposta errada para o terceiro sistema do teste diagnóstico.

Na figura 3, observamos que o sistema linear 4x4 dado é possível e determinado, logo possui uma única solução e bastava aplicar o método do escalonamento sobre as linhas apenas uma vez para encontrar o resultado e escrever a quádrupla que corresponde à solução do sistema dado; contudo o que visualizamos são indícios da aplicação do método da adição sem uma organização prévia, pois as equações foram tomadas de forma aleatória, o que parece indicar a procura de uma solução única. Observamos ainda que ao adicionar a primeira com a segunda equação, o estudante cometeu um erro associado à resolução de equações do primeiro grau, não dividiu os dois membros por dois.

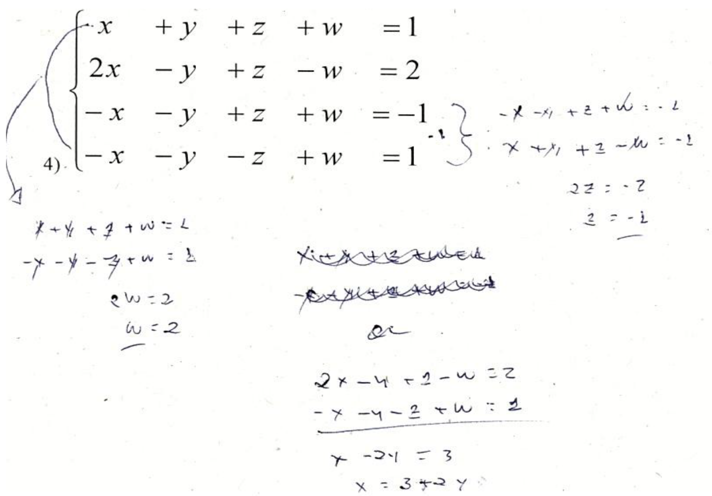


Figura 3. Protocolo de uma resposta errada para o quarto sistema do teste diagnóstico.

Apesar de os sistemas lineares do teste diagnóstico não apresentarem grandes dificuldades para suas resoluções, observamos que dos 37 estudantes que responderam ao teste, apenas 9 resolveram corretamente os sistemas 1 e 2, utilizando em geral o método da substituição. Entre os 5 estudantes que solucionaram corretamente o sistema 3, apenas 2 utilizaram o método do escalonamento e os 2 estudantes que acertaram o sistema 4 utilizaram o método da substituição.

■ Conclusão

Os resultados encontrados indicam que a noção de sistemas de equações lineares, apesar de ser tratada desde o Ensino Fundamental, parece ainda um conhecimento que precisa ser trabalhado com os estudantes que iniciam o Ensino Superior. É preciso estar atento para o estudo das condições de solução desses sistemas e da representação do conjunto solução, pois se trata de um conhecimento muito importante para o desenvolvimento de disciplinas como Geometria Analítica e Álgebra Linear no Ensino Superior.

O estudo realizado mostra que as relações institucionais indicadas são coerentes com estudos atuais e tentam tratar as dificuldades encontradas pelos estudantes que participaram do teste diagnóstico, sendo compatível com as necessidades dos estudantes que iniciam o Ensino Superior

No entanto os resultados do teste diagnóstico mostram que os estudantes ficam confinados aos sistemas 2x2, os quais comportam uma única solução, o que pode ser o resultado da contextualização de situações muito simples que podem ser resolvidas sem a necessidade do tratamento algébrico por meio de sistemas de equações lineares, portanto é preciso estar consciente que as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes brasileiros não está em conformidade com as relações institucionais preconizadas, o que exige uma atenção especial para o estudo dos sistemas lineares possíveis e indeterminados e os sistemas impossíveis.

A existência de softwares livres como o Geogebra possibilita o estudo das condições de solução de sistemas lineares, articulando conhecimentos algébricos e geométricos no plano e no espaço, o que pode auxiliar a criar as imagens mentais necessárias para o estudo das condições de solução para sistemas de m equações e n incógnitas, por meio da representação visual das mudanças de quadros proporcionadas pela visualização das interseções de retas no plano e retas e planos no espaço. Além disso, é importante que os estudantes desenvolvam o nível disponível por meio de situações contextualizadas intra e extramatemáticas, o que pode motivar o estudo dos sistemas lineares no Ensino Superior por meio de uma nova forma de estudo.

Referências

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques 19(1),* 77-123.

Chevallard, Y. (2015). *Pour une approche anthropologique du rapport au savoir*. Recuperado em 05 de agosto de 2018 de http://www.gfen.asso.fr/fr/dial155

Chevallard, Y. (2007). *Le développement actuel de la TAD: pistes et jalons.*Recuperado em 05 de agosto de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recuperado em 4 de agosto de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Recuperado em 06 de maio de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/

Dante, L. R. (2017). *Matemática: Projeto Teláris*. São Paulo: Editora Ática.

Dante, L.R. (2017a). *Matemática: Contexto & Aplicações*. São Paulo: Editora Ática.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM 6*, 132-158.

Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques*. Tese de Doutorado publicada, Université Dennis Diderot - Paris VII. França.

Lüdke, M.; André, M.E.D.A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 18(2),* 139-190.

Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualisation et enseignement secondaire. En J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et al. (Eds), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 149-157), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. En Equipe Didirem (Eds), *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (pp. 13-30), Paris: Didirem.

EVOLUCIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. ANÁLISIS HISTÓRICO A PARTIR DEL SIGLO XVI

EVOLUTION OF MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING; HISTORICAL ANALYSIS FROM THE XVI CENTURY

Luis Fernando Plaza Gálvez, José Rodrigo González Granada
Unidad Central del Valle del Cauca, Universidad Tecnológica de Pereira. (Colombia)
lplaza@uceva.edu.co, jorodryy@utp.edu.co

Resumen
A través de una revisión de literatura, en este documento se pretende hacer un análisis, de las contribuciones a los conceptos de la Resolución de Problemas Matemáticos (RPM, en adelante), desde el año 1500 hasta hoy. En tales conceptos han intervenido filósofos, pedagogos y matemáticos, quienes han hecho aportes con metodologías y enfoques diversos tales como la intuición, deducción, el pensamiento creativo, metacognitivo, heurístico y reflexivo, que como reporte de investigación permitió evidenciar que la Resolución de Problemas es vista como estrategia para la creación de matemáticas y como instrumento de su enseñanza.

Palabras clave: heurística, historia, matemáticas, resolución de problemas

Abstract
Through a literature review, this paper is aimed at making an analysis of the contributions to the concepts of Mathematical Problems Solving (MPS, from now on), from the year 1500 up to now. Philosophers, pedagogues and mathematicians have intervened in such concepts. They have contributed with methodologies and diverse approaches such as intuition, deduction, and creative, meta-cognitive, heuristic and reflective thinking, all of what, as a research report, made it possible to show that problem solving is seen as strategy for the creation of mathematics and as an instrument of its teaching
Key words: heuristics, history, mathematics problem solving

Introducción

Es importante destacar los esfuerzos que han hecho grandes matemáticos y pensadores a través de la historia, por intentar y/o hacer aportes al resolver problemas matemáticos. Se ofrece un análisis comparativo, respecto a la evolución de los diversos enfoques dados por algunos pensadores a la forma cómo se aborda la RPM desde el siglo XVI hasta la fecha. Hoy en día, se hace el reconocimiento, del cómo ha evolucionado la RPM, como aporte de la Educación Matemática, permitiendo conocer derroteros y estrategias que conlleven a la solución rápida y más eficaz de problemas matemáticos en diferentes contextos. Se partirá de una necesidad social del uso de la matemática en el escenario comercial, tal como sucedió a mediados del siglo XVI, y se llegará a metodologías especificas planteadas por varios autores en el siglo XX, permitiendo la identificación de las diferentes fases, y reglas o marcos teóricos tratando de resolver cualquier tipo de problema matemático. Algunos documentos respecto a la caracterización y análisis histórico que se hallan en la literatura son los expuestos por Alonso y Martínez (2003), Mazarío (2009) y Palacios y Solarte (2013).

Metodología

Esta revisión siguió las orientaciones de una revisión sistemática de literatura (Andrews, 2005). Se delimitaron los términos de búsqueda que incluyeron palabras como Resolución, Problemas, Matemáticos e Historia en el motor de búsqueda Google Académico. Se ubicaron textos que dieran cuenta de los desarrollos entre el siglo XVI y la actualidad. La investigación fue del tipo cualitativa y exploratoria. El análisis se centró en identificar metodologías por medio de estrategias de enseñanza en la RPM.

Hallazgos en la revisión. análisis histórico

Teniendo en cuenta que, en el siglo XVI, el dinero jugó un papel importante como motor de la economía, es el momento donde las matemáticas sirven de soporte para la RPM de la aritmética comercial por la diversidad de negocios y obedeciendo a una necesidad de la sociedad por la compra y venta de mercancías, el intercambio de moneda extranjera, agrimensura y la financiación de proyectos. Para lo anterior, se contó con los aportes entre otros de Juan Pérez de Moya, en su obra *Arithmetica practica y especulativa,* publicada en 1562, aprovechando el desarrollo de la imprenta moderna (Madrid, Maz- Machado, León – Mantero y López – Esteban, 2017), por medio de la aplicación de las matemáticas en el uso de la regla de tres o de la falsa posición especialmente, pero no se presenta un modelo o una metodología base a seguir en la RPM.

Millán (2003), expone la obra del matemático francés François Viète, quien introdujo la anotación para los datos de un problema (a parte de las incógnitas), argumentando que todos los problemas matemáticos podrían ser resueltos con el apoyo del álgebra. En 1591, se dan sus aportes en su obra matemática denominada (o arte del cálculo mediante símbolos), la cual quedó consignada en *In artem analyticem isagoge.* Dicha logística procedía en tres tiempos o etapas, de la siguiente manera:

1. Se toma nota de las magnitudes presentes, así como sus relaciones entre sí, por medio de símbolos adecuados en una ecuación. Etapa llamada zetética.
2. Se transformaba y discutía la anterior expresión matemática, por medio de una característica del problema. Dicho análisis recibía el nombre Porístico.
3. Se regresa al problema inicial, en el que se expone una solución por medio de una construcción geométrica. Este es un análisis rético.

En el año de 1637, el filósofo y matemático francés Rene Descartes, con su obra *Discurso del Método* (1999)*,* expone por medio de cuatro reglas simples, los pasos mediante los cuales se debe articular cualquier proceso investigativo. Afirma que la intuición y la deducción son las principales operaciones de la mente, permitiendo que éstas en el método indiquen la mejor manera de seguir el orden, es decir, en guiar las proposiciones de lo más simple a lo más complejo. En la regla 1, no se debe asumir nada verdadero, sino se tiene la evidencia respectiva. En la segunda regla, aduce que todo problema debe dividirse en tantas partes como sea posible, porque cuando se disgrega lo complejo en sus partes más sencillas, el intelecto se hace más claro. La regla No. 3, conduce bajo un orden de dificultad los pensamientos. Y en la última regla, se llevan a cabo las enumeraciones y revisiones tan complejas y normales que permita la seguridad de no haber obviado algún detalle.

En el año 1908, se publica el trabajo del matemático francés Henri Poincaré (1994), quien, a partir del pensamiento evolutivo, plantea 4 fases para la solución crítica y creativa de los problemas, y de las que se tiene:

- Saturación: Trabajar el problema hasta donde se pueda, con sus dificultades y bloqueos.
- Incubación: El subconsciente es el que trabaja, donde se ordenan las ideas presentes.
- Inspiración: La idea surge de repente. La que nos coge mientras se hace otra actividad.
- Verificación: Se debe corroborar la certeza de la solución planteada.

Es importante mencionar que autores como Sigarreta, Rodríguez y Ruesga (2006), rescatan aportes de la obra de Descartes y de Poincaré, desde una perspectiva histórica y didáctica para la RPM.

El psicólogo inglés Graham Wallas, quien a través de su obra (1926), planteó el primer modelo relevante que pretendía explicar la creatividad de forma de los *Insight* creativos, siendo aquellas ideas que gráficamente se pueden representar como la bombilla que se enciende sobre la cabeza del pensador, siendo el resultado final de un proceso complejo. Dicho pensamiento consta de las siguientes fases, las cuales son descriptivas:

- Preparación. Hace el mayor énfasis en el problema y se recauda la información que sea útil para su solución.
- Incubación. El problema pasa a ser procesado, se plantean de manera más rigurosas las posibles soluciones consideradas en la fase anterior.
- Insight o iluminación. En esta fase comienzan a emerger las ideas e intuiciones que nos conducen a la solución.
- Verificación. Una vez que la idea se ha confeccionado, la solución hallada es evaluada y se comprueba su viabilidad acorde con el objetivo buscado.

El matemático francés Jacques Hadamard, en su obra (1945), plantea que para describir el proceso mental matemático se debe utilizar la introspección (por medio de la observación a partir de su propia conciencia), describiendo el suyo propio: sin palabras, acompañado de imágenes mentales. Recomienda un bosquejo más exigente, que permita explicar el proceso de creación matemática (apoyándose en los estudios de Poincaré y Wallas), por medio de las siguientes fases:

- Documentación: Se debe informar, leer con anterioridad, escuchar y discutir al respecto.
- Preparación: realizar una prueba de ensayo y error de diferentes maneras, contemplando un cambo ocasional de acción en caso de no obtener ningún proceso.
- Incubación: al cambiar de acción.
- Iluminación: la idea se presenta de forma imprevista.
- Verificación: la idea se debe someter al análisis y a la prueba, al juicio crítico.
- Conclusión: organización y formulación de los efectos.

Hadamard planteaba que la resolución en general de los problemas, debía ser también abordada por los psicólogos, tal como se expone en Arreaza y Valencia (2015) y en Ayllón, Gómez y Ballesta-Claver (2016).

Simultáneamente, en el mismo año de 1945 se dan los estudios del matemático húngaro George Pólya (2011), quien es considerado el pionero en una metodología para la RPM, mediante un enfoque heurístico y con una perspectiva global y no exclusivamente matemática. Sostuvo, que para que un alumno pudiera resolver un problema planteado y acorde a sus conocimientos, el profesor le debía recomendar 4 fases, las cuales serían logradas a partir de unas preguntas del tipo estimulante, de tal manera que despertara en ellos un gusto por el pensamiento independiente. Las fases son las siguientes, con las respectivas preguntas:

- Comprender el problema. Ver claramente lo que se pide. Para ello son importantes preguntas como: ¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente, o redundante, o contradictoria para determinar la incógnita?
- Concebir un plan. Aquí se determina la relación entre los datos y la incógnita y si fuese necesario apoyarse en problemas auxiliares. Para ello son importantes preguntas como: ¿Se ha encontrado con problema semejante?, ¿Ha visto el problema planteado en forma ligeramente diferente?, ¿Conoce un problema relacionado con este?, ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- Ejecutar un plan. Es trascendental, examinar todos los detalles y reiterar la diferencia entre percibir que un paso sea el debido y, por otro lado, demostrar que un paso es el debido. Ósea, tener clara la diferencia que hay entre un problema por resolver y un problema por demostrar. Al ejecutar el plan de la solución, se debe comprobar cada uno de los pasos y verificar que sean los correctos. Para ello son importantes preguntas como: ¿Puede ver claramente que el paso sea el correcto?, ¿Puede demostrarlo?
- Visión retrospectiva. Examinar su solución. Es muy significativo detenerse a observar que fue lo que se hizo, pues se necesita verificar el resultado y el razonamiento, luego
- de preguntarse: ¿Puede comprobar la solución?, ¿Puede verificar el razonamiento?, ¿Puede obtener la respuesta en forma inmediata?, ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

La importancia de los aportes de Pólya, mediante la inducción, la analogía y patrones heurísticos son tenidos en cuenta por Barrantes (2006a). El método de Pólya, ya ha sido puesto en práctica por varios académicos (Boscán y Klever, 2012), en procesos de enseñanza, después de identificar algunas dificultades en la forma en la que un grupo de alumnos, abordaban la solución de un conjunto de problemas. Finalmente, por medio de una reflexión se evidenció en dichos alumnos, el reconocimiento de errores propios cometidos debidos a una mala comprensión inicial de los problemas en cuestión. Además, se encuentran reportes como los de Konstantinidou y Cuesta (2012), en los que se resalta los aportes de Pólya por medio del razonamiento heurístico en patrones como prueba y error, analogías, esquemas, dibujos, etc., pues la idea es ayudar al estudiante a pensar por sí mismos y a construir conocimiento.

En el año de 1967, se publica la obra *The use of lateral thinking*, del psicólogo maltés Edward de Bono (2006), en la que se plantea una técnica, la cual es basada en provocaciones del pensamiento, que haría posible un desvío del camino o patrón habitual del pensamiento. Según esta estrategia, la aplicación del pensamiento natural a la vida cotidiana, así como la técnica de iluminar los problemas desde varias ópticas, permitiría encontrar diferentes, novedosas e innovadoras respuestas a problemas ya conocidos. Dicha técnica permite la resolución de problemas en general de una manera indirecta y con un enfoque creativo. Al evaluar un problema existiría la tendencia a continuar con un patrón natural o habitual de pensamiento, lo cual restringiría las posibles soluciones. Con el pensamiento lateral sería posible romper con este patrón rígido, lo que permitiría alcanzar ideas mucho más creativas e innovadoras para representar todos esos caminos alternos. Hay cuatro elementos clave en el proceso de pensamiento lateral para resolver problemas, los cuales son:

- Comprobación de suposiciones: Al encauzar un problema con un pensamiento vertical es posible que no se halle su solución.

- Hacer las preguntas correctas: Se debe iniciar con preguntas generales para enmarcar apropiadamente el problema.
- Creatividad: La costumbre de ver los problemas siempre desde un mismo punto de vista no siempre contribuye a su solución. La idea es verlo creativamente desde otro ángulo.
- Pensamiento lógico: Es importante para el estudiante porque le permite ordenar sus ideas, a expresarlas con claridad, a realizar deducciones correctas, a revelar falacias, así como a tomar posiciones críticas ante algunas realidades.

Algunos autores se han especializado en el enfoque creativo y promueven la técnica planteada por De Bono en la Resolución de problemas, tal como sucede con Arteaga (2008).

Estudios de Alan Schoenfeld (1985) en educación matemática y quien retoma algunos planteamientos de Pólya (aunque difiriendo en el hecho de que la heurística no puede ser aplicada a toda situación), hace reflexiones sobre Inteligencia Artificial y en la Teoría Psicológica del procesamiento de la información. Justifica la dimensión cognitiva. Para ello se identifica con las mismas cuatro fases de Pólya, pero las llamó: Análisis, Exploración, Ejecución y Comprobación. Y para ello, propone tomar en cuenta otros factores tales como:

- Recursos: como los conocimientos anteriores que posee la persona, refiriéndose entre otros, a nociones, formulas, algoritmos, y en general todos los conceptos que se consideren necesarios saber para enfrentarse a un problema.
- Heurísticas: (Estrategias cognitivas) Schoenfeld asevera que hay una problemática con las heurísticas en el trabajo de Pólya yes que prácticamente cada tipo de problema necesita de ciertas heurísticas particulares.
- Control: (Estrategias metacognitivas) Donde el alumno controla su proceso, concibiendo de que trata el problema, considera varias formas de solución, seleccione una en particular, monitoreo de su proceso para comprobar su beneficio y revisa que sea la estrategia adecuada. Es la capacidad de utilizar lo que sabemos para lograr un objetivo.
- Sistema de creencias: las creencias van a afectar la manera en la que el estudiante, incluso los docentes, se enfrentan a un problema matemático.

Algunos autores han retomado las ideas de Schoenfeld (Callejo y Zapatera, 2014), en procesos de flexibilización, entendiéndose como la habilidad de un estudiante para modificar la estrategia de solución de un problema, por medio de reconocimiento de patrones. Además, en otras obras como en Barrantes (2006b) y en Murcia y Valdivieso (2013), se hace una reflexión sobre las creencias en matemáticas, como factor influyente en la RPM.

En 1986, Bransford y Stein publican los aportes del grupo IDEAL, inspirados en Pólya, con una perspectiva psicológica, para reconocer e identificar las distintas partes a tener en cuenta durante la RPM, donde las letras de la palabra indican los elementos del método. Sus fases son:

- **I:** Identificación del problema. Reconocer los diferentes elementos necesarios para la resolución del problema. En general, los libros pasan por alto esta fase y cargan el acento a los problemas prefabricados, en lugar de detectar y utilizar problemas cotidianos
- **D:** Definición y representación del problema. Representar el problema, con la mayor exactitud, claridad y atención posibles, evitando errores en el manejo de los datos.
- **E:** Exploración de posibles estrategias. Explorar los distintos métodos de resolución de problemas, lo cual requiere razonar cómo se reacciona en ese instante ante el problema y la consideración de que otras estrategias se podrían valer. En esta etapa, el resolutor puede valerse de estrategias heurísticas tales como abreviar, empezar desde atrás, etc.

- **A:** Actuación, fundada en una estrategia. Basándose en la estrategia elegida, se debe actuar siempre conforme a un plan, lo que implica tomar decisiones.
- **L:** Logros, Observación y evaluación de los efectos de las actividades. Si no se analizan los resultados ganados, no se estará realmente seguros de que la definición de problema fue la adecuada.

Las dos últimas fases son las que permiten al resolutor actuar y comprobar los logros alcanzados.

Mason, Burton y Stacey (1989), en su obra establecen estados emocionales y del cómo se aprende de la experiencia, mediante un enfoque reflexivo. Describen varias maneras de especializar y generalizar los problemas, como entrar, atacar y revisar lo que se hace. Los autores se inspiraron en Pólya y en Schoenfeld. Lo anterior se lleva a cabo por medio de tres fases, así:

- Abordaje. Está encaminada a comprender, y familiarizarse con el problema. Después de leer cuidadosamente el problema es necesario contestar las preguntas: ¿Qué es lo que se?, ¿Qué es lo que quiero?, ¿Qué es lo que puedo usar?
- Ataque. Es la fase más compleja ya que en ella se desea asociar y disponer de toda la información de la fase anterior. Es aquí donde participan las estrategias heurísticas que permiten acercarse a la solución del problema. Los procesos matemáticos, que aparecen en esta fase son: 1. La inducción que se plasma al hacer conjeturas encaminadas a conseguir la solución del problema, asociadas a estados emocionales, 2. La deducción que pretende justificar dichas conjeturas mediante las leyes lógicas a través de los teoremas matemáticos.
- Revisión. Cuando se logra la solución es útil revisarla e intentar generalizarla a un contexto más amplio, siendo necesario: 1. Comprobar la solución, los cálculos, el razonamiento y que la solución ataña al problema, 2. Reflexionar en las ideas, en los instantes clave, en las conjeturas y en la resolución, 3. Generalizar a un contexto más amplio, buscar otra manera de resolverlo o modificar los datos iniciales, 4. Redactar la solución dejando claro qué es lo que se ha hecho y porqué.

En obras como las de Mazarío (2009), se ha evidenciado que el trabajo de Mason, Burton y Stacey busca en los estudiantes el razonamiento matemático, el cual se mejorará mientras más se practica y se trabaja sobre un problema, pero que es primordial que dicho razonamiento esté dado por el interés y la motivación del estudiante, teniendo en cuenta que se debe realizar una construcción propia de conceptos. Consideran que la actividad central donde se formulan, se comprueban y se modificar conjeturas, conforman la columna vertebral del razonamiento matemático y la espina dorsal de la RPM, el cual se concibe como un proceso dialéctico, donde las tareas pueden sufrir altibajos, es decir, también retroceder.

Pozo y Postigo (1994), hacen un análisis con enfoque técnico y estratégico en la RPM. Para que un alumno complemente las fases antes vistas de Pólya, necesitará adquirir procedimientos concretos para cada una de las áreas del saber, bien sea: Ciencias o Matemáticas, y entre los procedimientos se pueden distinguir cinco tipos, así:

- Obtención de la información. Observación, Selección, Búsqueda, Repaso y memorización de la información
- Interpretación de la información. Decodificación de la información, Aplicación de modelos para interpretar contextos, Uso de analogías para interpretar la información
- Análisis de la información y realización de conclusiones. Análisis y comparación de información, Realización de inferencias, Investigación.
- Comprensión y disposición conceptual de la información. Comprensión del discurso (escrito/oral), Establecimiento de relaciones conceptuales, Organización conceptual.
- Divulgación de la información. Expresión verbal, Expresión cifrada, Otros tipos de expresión.

Finalmente, se analiza el trabajo de Santos (2007), quien retoma a Pólya y Schoenfeld (su maestro). El uso de instrumentos para la RPM facilita la creación de estrategias heurísticas, el desarrollo de competencias matemáticas, formas de pensar, con ayuda de conjeturas, contraejemplos y aproximaciones. Como estrategias se tendrán el Método de los dos caminos, El método de la cancelación, apoyo en problemas más simples y mirar la correspondencia con la información dada. Para lo anterior se usarán perspectivas de marcos teóricos a saber:

1. Visión Matemática: Demanda la formulación de peguntas, conjeturas y el empleo de distintos argumentos.
2. Tipo de problemas: Rutinarios y no rutinarios de diferente grado de dificultad, planteándose varias incógnitas.
3. Procesos de Aprendizaje: Relación con competencias en la RPM, recursos básicos, estrategias cognitivas, metacognitivas y creencias.
4. Ambientes de Instrucción: Comunidad matemática para discusión en grupo con el profesor como guía.
5. Formas de Evaluar: Las competencias en la RPM, requiere uso de representaciones, formulación de preguntas, y la comunicación de resultados.

Hacer o desarrollar matemáticas incluye resolver problemas, abstraer, inventar, probar y encontrar el sentido de las ideas matemáticas. Identificar la RPM como una propuesta para aprender matemáticas implica relacionar los aspectos asociados a la naturaleza misma de esta disciplina. La propuesta de aprender matemáticas que identifica la Resolución de Problemas como importante, reconoce a las matemáticas como un cuerpo de conocimientos no terminado. Retomando palabras de Schoenfeld, aprender matemáticas significa que el estudiante identifique, seleccione y use estrategias comúnmente usadas por la matemática al resolver problemas.

Conclusiones

El anterior análisis, permite la reconstrucción de la evolución de los conceptos, acerca del cómo se ha abordado la RPM desde diferentes puntos de vista, así como los respectivos contextos. Después de haber hecho el análisis histórico desde el año 1500, se concluye que hay dos tipos de comprensiones en la educación matemática para la RPM: Una tomada como medio para la creación de matemáticas y la otra vista como instrumento de enseñanza de la matemática. Ambas vistas desde la didáctica, y donde se evidencia la diferencia en las estrategias y alcances para la RPM, definidas para tal fin.

Se mostró el desarrollo del razonamiento matemático y el uso de metodologías especializadas, siguiendo procedimientos como fases, momentos, reglas o marcos teóricos tratando de resolver cualquier tipo de problema. Pero en ambos se manejan enfoques en el pensamiento, tales como el análisis creativo, reflexivo psicológico y heurístico.

En esta última parte, es importante considerar, que la RPM, vista como estrategia, ha mostrado claramente dos tendencias referentes bien marcadas, desde una mirada histórica en el tiempo y por los enfoques dados, pudiéndose asimilar que la temática tiene dos escenarios: antes y después de los aportes de George Pólya, pues los investigadores posteriores a él, siempre lo tomaros como referente en sus análisis y aportes, específicamente.

Referencias bibliográficas

Alonso, I. y Martínez, N. (2003). La Resolución de Problemas Matemáticos. Una caracterización histórica de su aplicación como vía eficaz para la enseñanza de la Matemática. *Revista Pedagogía Universitaria*. 8(3). 81 – 88. Disponible en: http://cvi.mes.edu.cu/peduniv/index.php/peduniv/article/view/255.

Andrews, R. (2005). The place of systematic reviews in education research. *British Journal of Educational Studies*. 53 (4): 399–416.

Arreaza, T. y Valencia, I. (2015). La Resolución de problemas matemáticos: Una estrategia en el aula de clase. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28,* 553 – 560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Arteaga, E. (2008). Aproximación teórica al concepto de creatividad: un análisis creativo. *Revista Paideia Puertorriqueña*. 3(1). Disponible en: http://paideia.uprrp.edu/wp-content/uploads/2013/11/Aproximaci%C3%B3n-te%C3%B3rica-al-concepto-de-creatividad.pdf.

Ayllón, M., Gómez, I. y Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones.* 4(1). 169 – 218. Disponible en: http://revistas.usil.edu.pe/index.php/pyr/article/view/89.

Barrantes, H. (2006a). Matemáticas y Razonamiento Plausible. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 1 (1). Disponible en: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/761/showToc.

Barrantes, H. (2006b). Resolución de Problemas. El trabajo de Allan Schoenfeld. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* 1 (1). Disponible en: https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/761/showToc.

Boscán, M. y Klever, K. (2012). Metodología basada en el método heurístico de Pólya para el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos. *Escenarios*. 10 (2), 7 – 19. Disponible en: http://ojs.uac.edu.co/index.php/escenarios/article/view/214/198.

Bransford, J. y Stein, B. (1986). *Solución ideal de problemas. Guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona: Labor.

Callejo, M. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la Resolución de Problemas de Identificación de Patrones Lineales en Estudiantes de Educación Secundaria. *Bolema*, 28 (48). 64-88. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v28n48/04.pdf.

De Bono E. (2006). *El Pensamiento Lateral*. Barcelona: Editorial Paidós Ibérica S.A.

Descartes, R. (1999). *Discurso del método. Seguido de la búsqueda de la verdad mediante la luz natural* (Víctor Florián, trad.) Bogotá: Panamericana Editorial.

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton: Ed. Princeton University Press.

Konstantinidou, A. y Cuesta, P.L. (2012). La resolución de problemas y la enseñanza de la matemática elemental. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 32, 63 - 70. Disponible en: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/32/revista32.pdf#page=62.

Madrid, M. J., Maz- Machado, A., León – Mantero, C. y López – Esteban, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la Vida Diaria en los Libros de Aritmética Españoles del Siglo XVI. *Bolema*, 31(59). 1082 – 1100. Disponible en: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-1082.pdf.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor.

Mazarío, I. (2009). La Resolución de problemas: un reto para la educación matemática contemporánea. En I. Mazarío, T. Sanz, R. Hernández, M. Yll, M. Horta y A. Mazarío (Eds.), *Reflexiones sobre un tema polémico: La Resolución de Problemas* (pp. 4 - 19). La Habana: Editorial Universitaria.

Millán, A. (2003). Viète, Cremona y Von Newmann**.** *Revista SUMA.* 44. 113 - 115. Disponible en: http://revistasuma.es/IMG/pdf/44/113-115.pdf.

Murcia, S. y Valdivieso M. (2013). Aspectos a considerar en la Resolución de un Problema. En *II Encuentro Internacional de Matemáticas, Estadística y Educación Matemática*. Tunja, Colombia. Disponible en: http://www.uptc.edu.co/eventos/2013/cf/eime/memorias/.

Palacios, A. y Solarte, S. (2013). *Estudio de la Resolución de Problemas Matemáticos no rutinarios de docentes de Matemáticas en formación: Una aproximación a las estrategias heurísticas.* Tesis de pregrado no publicada, Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

Poincaré, H. (1944). *Ciencia y método*. Buenos Aires: Espasa Calpe.

Pólya, G. (2011). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas.

Pozo, J. y Postigo, Y. (1994). La solución de problemas como contenido procedimental en la educación obligatoria. En: J. Pozo (Ed.) *Solución de problemas* (180 – 224). Madrid: Santillana/Aula XXI.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem Solving*. Orlando, V.A.: Academic Press.

Sigarreta, J.M., Rodríguez, J.M. y Ruesga, P. (2006). La resolución de problemas: una visión histórico-didáctica. *Boletín de la Asociación Matemática venezolana*. 13 (1). 53 – 66. Disponible en: https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol13/pruesga.pdf.

Wallas, G. (1926), *The art of thought*. J. Cape: London.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EN UNA VARIABLE MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL

METHODOLOGICAL PROPOSAL FOR THE TEACHING OF THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS IN A VARIABLE THROUGH PROBLEM SOLVING FOR FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS DURING THEIR INITIAL TRAINING

Christian Alfaro Carvajal, Jennifer Fonseca Castro
Universidad Nacional. (Costa Rica)
cristian.alfaro.carvajal@una.cr, jennifer.fonseca.castro@una.cr

Resumen
El objetivo principal de este trabajo fue elaborar una propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable, mediante la resolución de problemas para la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica. Para ello se realizaron tres fases: (1) en la primera, se indagó sobre la perspectiva de las autoridades de las escuelas de matemáticas de las universidades públicas costarricenses, de su personal docente de matemática y del estudiantado avanzado de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional, sobre los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo en la preparación de docentes de matemática en formación inicial, (2) en la segunda, se investigó el uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica y (3) en la tercera se diseñaron actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para la enseñanza de sucesiones, límites y derivadas.

Palabras clave: formación de profesores, cálculo

Abstract
The main objective of this work was to develop a methodological proposal for the teaching of differential and integral calculus in a variable through problem solving for the teaching mathematics' career at the National University in Costa Rica. For this, three phases were carried out: (1) in the first one, it was inquired about the perspective of authorities of the mathematics schools of the Costa Rican public universities, its teaching staff of mathematics, and advanced students of the career of teaching mathematics at the National University, on the purposes, the approach, the methodology, and the contents of greater difficulty in the teaching and learning of calculus in the initial training of the teachers of mathematics; (2) in the second, the use of problem solving as a methodological strategy for higher education in Costa Rica was investigated; and (3) in the third, methodological activities were designed based on problem solving for the teaching of successions, limits, and derivatives.

Key words: teacher training, calculus

Introducción

En la actualidad, el desarrollo del conocimiento científico y tecnológico requiere de la formación de profesionales con altas capacidades matemáticas y científicas para afrontar las exigencias de un mundo cada vez más globalizado y más competitivo. Particularmente, la Educación Matemática tiene una responsabilidad fundamental en la formación de estudiantes cada vez más reflexivos y analíticos. Desde esta perspectiva, es necesario que la educación superior contribuya con la formación de profesores de matemáticas altamente calificados, con sólidos conocimientos matemáticos y con herramientas pedagógicas y tecnológicas adecuadas que permitan el desarrollo de las habilidades cognitivas y el desarrollo integral en sus estudiantes.

En Costa Rica, la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional (UNA), como formadora de docentes de matemática, ha asumido el reto de coadyuvar en la formación idónea de profesionales en la enseñanza de la matemática, por tal razón, desde el año 2010 inició un proceso de revisión del plan de estudios de la carrera de enseñanza de la matemática para elaborar una nueva propuesta de currículo por competencias. Como parte de las acciones de mejora en el año 2015 inició el proyecto de investigación denominado *La Resolución de Problemas como estrategia metodológica en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en una variable en la Carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional* sobre el que se presentan los resultados en este artículo.

Este proyecto se desarrolló de enero de 2015 a diciembre de 2017 con dos objetivos básicos: uno explícito, que fue la elaboración de una propuesta metodológica basada en la resolución de problemas para el abordaje de la línea del cálculo diferencial e integral en una variable y otro implícito, que era servir como modelo para la elaboración de propuestas para el abordaje de otras áreas disciplinarias tales como álgebra, geometría, estadística, probabilidades y teoría de números.

El trabajo tuvo tres fases. Las dos primeras fueron investigaciones empíricas para determinar la perspectiva de las autoridades de las escuelas de matemáticas de las universidades públicas costarricenses, de su personal docente de matemática con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y del estudiantado avanzado de la carrera de enseñanza de la matemática de la Universidad Nacional, sobre los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo en la preparación de docentes de matemática en formación inicial y el uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica. La tercera fase fue el diseño de actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para los temas de sucesiones, límites y derivadas.

Marco teórico

La enseñanza del cálculo diferencial e integral en la formación inicial de profesores de matemáticas

La enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo principal la preparación de los individuos para la vida en sociedad, para el estudio de carreras universitarias en ciencias y tecnología y para estimular la creatividad (D´Ambrósio, 2002). Específicamente, el cálculo diferencial e integral es un área que favorece la formulación de conjeturas, el razonamiento inductivo, la argumentación y los procesos deductivos (Fischbein, 1994).

El cálculo fue desarrollado fundamentalmente alrededor de dos ideas: variación y acumulación. Durante los siglos XVII y XVIII, fue central en el desarrollo de las ciencias. No obstante, a inicios del siglo XIX, se dio una mayor preocupación por el rigor, de forma tal que en la actualidad los enfoques se preocupan más por la formalización que por el desarrollo de las ideas y métodos genuinos que van dirigidos a la resolución de problemas científicos (Ímaz y Moreno, 2009). De esta manera, su enseñanza ha estado tensada entre dos extremos: una enseñanza muy formal que apela a definiciones, teoremas y problemas estándar o el abandono de lo conceptual tanto en los cursos como en los libros de texto, los cuales se restringen solamente a un elenco de ejercicios (Cuevas y Pluvinage, 2009; D´Ambrósio, 2002).

Con base en lo anterior, se requiere que la enseñanza del cálculo diferencial e integral en la formación inicial de profesores de matemáticas favorezca la adquisición de competencias para su desarrollo profesional. Para ello, es necesario el planteamiento de problemas de aplicación, de forma que se utilice, se descubra, se explore y se desarrolle por parte de los futuros docentes. Se trata de tener un equilibrio entre lo formal y lo intuitivo (Ball, Thames y Phelps, 2008; Cuevas y Pluvinage, 2009).

La resolución de problemas

Existen diferentes concepciones sobre lo que es un problema y la resolución de problemas. Stanic y Kilpatrick (1989) reconocen tres propósitos de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas: (a) como contexto, para estimular y motivar al estudiante y lograr el aprendizaje de conceptos; (b) como una habilidad en sí misma que se debe enseñar en el currículo; o (c) como medio para "hacer matemática". Puig caracteriza el proceso de resolución como "la actividad mental y manifiesta que desarrolla el resolutor desde el momento en que, presentándosele un problema, asume que lo que tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que da por acabada la tarea" (Puig, 1998, p. 31).

Según Lesh y Zawojewski (2007) la resolución de problemas se entiende como el "proceso de interpretar una situación matemáticamente, la cual involucra varios ciclos interactivos de expresar, probar y revisar interpretaciones y de ordenar, integrar, modificar, revisar o redefinir grupos de conceptos matemáticos desde varios tópicos dentro y más allá de las matemáticas" (citado por Santos-Trigo, 2008, p.161). Lo anterior sugiere ciclos de reflexión, definición y revisión de ideas y conceptos por parte de los estudiantes. Para estos autores, la meta final de resolver el problema no es la respuesta, sino "identificar y contrastar diversas maneras de representar, explorar y resolver el problema" (Santos-Trigo, 2008, p. 161). Por otro lado, la resolución de problemas es la actividad que "conlleva al desarrollo o construcción de un pensamiento inquisitivo donde el conocimiento matemático se conceptualiza en términos de dilemas o preguntas que demandan el uso y formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina" (Santos-Trigo, 2008, p. 176).

La resolución de problemas debe permitir a los estudiantes formular preguntas, identificar conjeturas o relaciones, y sustentar y comunicar resultados. Estas actividades deben desarrollarse dentro de una comunidad de aprendizaje donde el trabajo individual y colaborativo es valorado.

Marco metodológico

La investigación constó de dos fases empíricas y una fase de construcción de la propuesta metodológica. A continuación, se detalla cada una de ellas.

La fase 1. Los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable en la preparación de docentes de matemática en formación inicial

Esta primera fase consistió en una investigación cualitativa con carácter descriptivo para determinar la perspectiva sobre los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo de tres grupos de sujetos:

(a) Autoridades administrativas de las escuelas de matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR), la Universidad Nacional (UNA), el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) y la Universidad Estatal a Distancia (UNED): participaron seis autoridades administrativas (dos de la UCR, dos de la UNA, uno del ITCR y uno de la UNED) con puestos tales como dirección de escuela o coordinación de departamento o área.

(b) Personal docente de matemática con experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable de dichas instituciones: se contó con 58 personas de las cuatro universidades participantes. Para la escogencia de este grupo académico, se consultó a las autoridades de cada universidad participante. Los participantes han impartido al menos un curso en la línea del cálculo diferencial e integral en una variable para servicio o para la carrera de Enseñanza de la Matemática en alguna de las universidades antes mencionadas.

(c) Estudiantes avanzados de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA: participaron 25 estudiantes de cuarto o quinto año del plan de estudios de la carrera que habían aprobado los cursos en la línea del cálculo diferencial e integral en una variable de su plan de estudios.

La recolección de datos se llevó a cabo durante el segundo semestre del 2015 y se emplearon tres técnicas que se describen a continuación:

(a) una entrevista a las autoridades administrativas de las escuelas de matemática de las universidades estatales participantes: los temas tratados fueron el objetivo del cálculo diferencial e integral y la metodología empleada en los cursos de formación de futuros docentes de matemática y para otros grupos profesionales. Además, se consultó sobre la utilización de resolución de problemas como metodología de enseñanza en los cursos de cálculo diferencial e integral; y los temas que presentan mayor dificultad en la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral. Las entrevistas fueron grabadas con el objetivo de complementar y triangular la información obtenida.

(b) un cuestionario dirigido al personal docente de matemática de las escuelas de matemática: constaba de cinco apartados: (a) información general del sujeto encuestado, (b) resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática, (c) propósitos y enfoques en la enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable, (d) tipos de dificultades y errores en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable, (e) temas y contenidos de mayor dificultad en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable. Cada apartado estaba constituido de preguntas cerradas y una o dos preguntas abiertas. Los ítems incluyeron escalas de Likert y de ordenación. El cuestionario se aplicó de forma digital utilizando la plataforma de la Universidad Nacional y el software LimeSurvey con la licencia respectiva de dicha institución.

(c) un taller con estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UNA: se elaboró una lista de preguntas generadoras sobre los propósitos del cálculo diferencial e integral en la formación de futuras generaciones de docentes de matemáticas, sobre el enfoque de enseñanza y la metodología recibidos en los cursos de cálculo y los que consideraban más apropiado.

La fase 2. El uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica

Esta segunda fase consistió en una investigación cualitativa de carácter descriptivo para determinar la perspectiva de los 58 docentes de las Escuelas de Matemáticas de la UCR, UNA, ITCR y UNED que se mencionaron en la fase 1 anterior sobre el uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable a nivel de la educación superior. La información se recolectó con el cuestionario que se les administró en la fase 1, específicamente, los datos se tomaron del apartado *(b) resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática*. Para el análisis de la información, se crearon dos categorías: (a) Perspectivas de docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características; (b) Perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

La fase 3. El diseño de actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para la enseñanza de sucesiones, límites y derivadas para la carrera de formación de profesores de matemáticas en la Universidad Nacional

Para el diseño de las actividades se realizó una recopilación de problemas históricos que hayan potenciado el desarrollo de la línea de cálculo diferencial e integral en una variable. Se decidió abordar los temas de sucesiones, límites y derivadas. Cada tema fue subdivido en subtemas y para cada uno de ellos se planteó una situación problema que contemplaba los siguientes elementos: el objetivo general, los elementos asociados a la institucionalización, las subcompetencias a desarrollar, los conocimientos previos necesarios, las consideraciones para abordar la situación problema y el desarrollo teórico del concepto o teorema que se pretendía explorar con la situación problema.

Resultados

A continuación, se presentan los principales resultados de cada fase de la investigación.

La fase 1. Los propósitos, el enfoque, la metodología y los temas de mayor dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable en la preparación de docentes de matemática en formación inicial

Los resultados de esta fase se presentan en tres categorías: (a) los propósitos, (b) el enfoque y la metodología y (c) los temas de mayor dificultad. A continuación, se detallan brevemente.

(a) Perspectivas de las autoridades, personal docente y estudiantes de la carrera sobre los propósitos de la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable para la preparación de docentes de matemática en formación inicial.

Para los sujetos de la investigación los principales propósitos del cálculo diferencial e integral en una variable en la formación de futuro personal docente de matemática son: (a) desarrollar habilidades y competencias específicas, (b) establecer bases teóricas para cursos posteriores, (c) desarrollar herramientas para la resolución de problemas, y (d) desarrollar herramientas para una mejor labor de aula. Además, debe permitirles abstraer propiedades estructurales de objetos matemáticos de manera que puedan comprenderlas mediante una demostración o refutarlas con contraejemplos, los contenidos deben favorecer los procesos demostrativos, deductivos y de abstracción mediante el análisis del comportamiento de funciones reales de variable real, el estudio del infinito, entre otros aspectos. Estos deben facilitar la comprensión y uso del lenguaje matemático al estudiantado, y para que este proponga, analice e interprete modelos de situaciones reales utilizando los conocimientos adquiridos. Además, manifiestan que el cálculo es fundamental para la comprensión de otros temas matemáticos de las distintas áreas disciplinarias de los planes de estudios de preparación de docentes de matemática en formación inicial (Fonseca y Alfaro, 2018).

(b) Perspectivas de las autoridades, personal docente y estudiantes de la carrera sobre el enfoque y la metodología de la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable en la formación de futuras generaciones de docentes de matemática.

Respecto al enfoque, los estudiantes manifestaron que en la formación se presentaron dos posiciones opuestas. Por una parte, un enfoque práctico centrado en la resolución de ejercicios rutinarios y teoremas sin demostraciones; por otra, un enfoque teórico en donde lo central era la demostración de resultados con poca aplicación de la teoría. Además, indicaron que la metodología predominante fue la clase magistral con poca participación estudiantil (Fonseca y Alfaro, 2018).

Las autoridades manifestaron que existe poca diversidad de estrategias metodológicas, coincidieron con los estudiantes en que la clase magistral es lo que más se presenta. Ambos grupos, autoridades y estudiantes, señalaron que la resolución de problemas podría ser una valiosa metodología para el abordaje de los cursos, para ello sugirieron el planteamiento de problemas no rutinarios (Fonseca y Alfaro, 2018).

En el caso de los docentes, la mayoría coincidió en que los contenidos se deben impartir en secuencia lógica y con rigurosidad matemática. Una minoría manifestó que deben desarrollarse alrededor de un problema matemático. Coinciden en que la metodología debe incluir: sesiones de resolución de problemas, sesiones de discusión y reflexión, presentaciones magistrales por parte del personal docente, sesiones de laboratorio y presentaciones magistrales por parte de estudiantes (Fonseca y Alfaro, 2018).

(c) Perspectivas de las autoridades, personal docente y estudiantes de la carrera sobre los temas de mayor dificultad en el aprendizaje del cálculo diferencial e integral en una variable en la formación de futuro personal docente de matemática.

Sobre las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial e integral en cursos de enseñanza de la matemática, las autoridades las asocian principalmente a dificultades debidas al desarrollo teórico de los contenidos, dificultades asociadas a la comprensión e interpretación y dificultades asociadas a la identificación de patrones. Por su parte, los docentes las atribuyen a la poca comprensión de parte del estudiantado del lenguaje matemático, la deficiencia en el manejo de los conocimientos previos, la falta de habilidades matemáticas tales como observar patrones, conjeturar, generalizar e inferir; y la falta de abstracción y visualización del estudiantado. Finalmente, los estudiantes mencionaron que los contenidos que mayores dificultades les presentaron en su proceso de aprendizaje fueron los problemas de optimización y de razones de cambio relacionadas, series y sucesiones, la continuidad de funciones reales de variable real y los sólidos de revolución. Atribuyen dichas dificultades al enfoque del curso y a las estrategias metodológicas utilizadas por el personal docente (Fonseca y Alfaro, 2018).

La fase 2. El uso de la resolución de problemas como estrategia metodológica para su enseñanza a nivel superior en Costa Rica

Los resultados de esta fase se presentan en dos categorías: (a) perspectivas de los docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características y (b) perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

(a) perspectivas de los docentes de matemática sobre qué es un problema matemático, sus objetivos en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable y sus características.

Esta categoría se analiza en tres subcategorías: (a1) qué es un problema matemático, (a2) los objetivos de un problema matemático y (a3) las características de un problema matemático. A continuación, se detallan brevemente.

(a1) Qué es un problema matemático.

Con respecto a esta categoría, 42 docentes de matemática participantes consideran la siguiente definición como la que más se aproxima a su concepción: *"Una situación que provee al estudiante la posibilidad de discusiones y descubrimientos relacionados con algún tema"*, no obstante, 14 docentes no estuvieron de acuerdo con esta definición. Además, propusieron algunas definiciones alternativas tales como: "*una situación que motiva al estudiante a aprender nuevos conceptos o procedimientos"* y *"una situación contextualizada en la que el estudiante puede aplicar un concepto o un procedimiento matemático a una situación real"*. Por otra parte, 36 docentes estuvieron en desacuerdo en que un problema matemático es "*una situación que le permite al estudiante demostrar si ha aprendido un concepto o un procedimiento"*. Estuvieron también en desacuerdo con la siguiente definición: "*una situación que le permite al estudiante desarrollar nuevas habilidades"* (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

(a2) Los objetivos de un problema matemático.

En esta categoría 46 docentes manifestaron que deben utilizarse para el desarrollo de habilidades para formular conjeturas y resultados matemáticos además de fungir como un elemento motivador para el desarrollo de un tema. Además, consideraron que es importante la pluralidad de soluciones para promover la discusión entre estudiantes, y el desarrollo de habilidades en la demostración de resultados utilizando la teoría estudiada (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

(a3) Las características de un problema matemático.

Los docentes indicaron que el problema debe ser una situación contextualizada en la que el estudiantado no puede encontrar la respuesta inmediatamente y le implique un esfuerzo cognitivo para la construcción de nuevos conocimientos. Por lo tanto, debe tener sentido para el estudiante y dentro de la temática en la que se inserta, debe ser diferente a un ejercicio rutinario en donde se aplican algoritmos de forma mecánica. Además, debe favorecer el trabajo cooperativo y colaborativo de los estudiantes y el desarrollo de habilidades matemáticas, es deseable que permita la integración de diferentes áreas del conocimiento matemático (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

(b) Perspectivas de docentes de matemática sobre el uso de la resolución de problemas en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en una variable.

Los docentes afirman que han utilizado la resolución de problemas en sus clases de cálculo diferencial e integral en una variable: (a) 58 docentes afirman utilizarla al finalizar el desarrollo de un concepto matemático para la aplicación de la teoría: mencionaron a los problemas de optimización al finalizar el tema de la derivación o los problemas de sólidos de revolución al finalizar el tema de integración; (b) 57 la utilizan antes de desarrollar un concepto matemático como motivación: mencionaron el cálculo de áreas bajo curvas como tema que podría generar problemas para motivar e introducir a la integral, no obstante, no brindaron ningún ejemplo concreto; y (c) 40 la usan para construir o ilustrar algún concepto matemático. Además, 14 docentes afirman no dar ningún papel a la resolución de problemas dentro de sus cursos, seis mencionaron otros usos de la resolución de problemas en sus lecciones, pero no brindaron detalles o ejemplos de cómo lo hacen (Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro, 2018).

La fase 3. El diseño de actividades metodológicas basadas en la resolución de problemas para la enseñanza de sucesiones, límites y derivadas para la carrera de formación de profesores de matemáticas en la Universidad Nacional

Se diseñaron actividades para los temas de sucesiones, límites y derivadas. Para el primer tema se realizaron seis actividades: concepto y definición de sucesión numérica, la convergencia de una sucesión numérica, la convergencia monótona, las subsucesiones, las sucesiones de Cauchy y las sucesiones numéricas propiamente divergentes. Para el segundo tema se hicieron cinco actividades: el concepto de límite, los límites laterales, los límites trigonométricos, los límites infinitos y los límites al infinito. Finalmente, para el tercer tema se elaboraron tres actividades: la definición de derivada, la optimización y; la convexidad y concavidad.

Conclusiones

Los profesores de matemática en formación inicial no son matemáticos, ni ingenieros ni didactas generales, por lo tanto, su formación matemática es muy particular y debe ser enfocada en función de su desarrollo profesional. Con base en los resultados de las dos fases empíricas de esta investigación se puede acotar que el cálculo diferencial e integral debe aportar, en la formación de docentes de matemática, conocimientos, habilidades y competencias acordes con su quehacer, tales como el desarrollo del pensamiento lógico-matemático, la abstracción, la comprensión, el análisis de modelos matemáticos, el uso del lenguaje matemático, la deducción y la demostración, entre otros.

Las autoridades, los docentes y estudiantes consultados concuerdan que en la formación inicial de profesores de matemáticas predominan los cursos de cálculo diferencial e integral con un enfoque teórico y formalista con poca aplicabilidad, además, predomina la clase magistral con un rol pasivo en el estudiante. La resolución de problemas es considerada dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje en la solución de ejercicios posterior al desarrollo de la clase.

Las actividades metodológicas elaboradas para el abordaje de los temas de sucesiones, límites y derivadas para la formación inicial de profesores de matemática pretenden ser una propuesta que genere otra dinámica en la clase, en donde el estudiante sea gestor de su conocimiento y aprecie al cálculo como una línea matemática que puede enriquecer de manera sustantiva su proceso formativo y coadyuvar a su desarrollo profesional.

Referencias bibliográficas

Alfaro-Carvajal, C. & Fonseca-Castro, J. (2018). Problem solving in the teaching of differential and integral calculus in one variable: Perspective of mathematics teachers. *Revista Uniciencia*, *32*(2), 42-56. Doi http://dx.doi.org/10.15359/ru.32-2.3

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Cuevas, C. y Pluvinage, F. (2009). Cálculo y tecnología. *Revista el Cálculo y su Enseñanza*, 1, 45-59. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=1&index_web=7&index_mgzne.

D'Ambrósio, U. (2002). A matemática nas escolas. *Educação Matemática em Revista*, *9*(11), 29-33.

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. En R. Biehler., R. Scholz., R. Strässer y B. Winkelmann (Eds.), Didactics *of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Rudolf_Straesser/publication/227113904_Cultural_Framing_of_Teaching_and_Learning_Mathematics/links/0deec5231ab119d511000000.pdf#page=242

Fonseca, J y Alfaro, C. (2018). El cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación*, *42*(2), 289-305.

Ímaz, C y Moreno, L. (2009). Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza. *Revista el Cálculo y su Enseñanza*, *1*, 99-112. Recuperado de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=1&index_web=7&index_mgzne.

Puig, L. (1998). Réplica a elementos de resolución de problemas, cinco años después de Ma Luz Callejo y José Carrillo. En J. R. Pascual (Ed.), *Actas del Segundo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 107-112. Pamplona: Universidad Pública Navarra.

Santos, L. M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Investigación en Educación Matemática, xii,* 159-192.

Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. *The teaching and assessing of mathematical problem solving, 3*, 1-22.

ELABORAÇÃO DE EVENTOS CONTEXTUALIZADOS PARA AULAS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM DIFERENTES CURSOS DE GRADUAÇÃO

ELABORATION OF CONTEXTUALIZED EVENTS FOR DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS CLASSES IN DIFFERENT UNDERGRADUATE PROGRAMS

Gabriel Loureiro de Lima, Barbara Lutaif Bianchini, Eloiza Gomes
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Instituto Mauá de Tecnologia. (Brasil)
gllima@pucsp.br, barbara@pucsp.br, eloiza@maua.br

Resumo
O objetivo deste artigo é apresentar a análise da implementação de uma atividade de formação docente, elaborada a partir dos preceitos teóricos da Matemática no Contexto das Ciências (MCC) e da estratégia metodológica *Jigsaw* de aprendizagem cooperativa. Tal formação foi planejada tendo como público-alvo professores que lecionam disciplinas matemáticas, especialmente Cálculo Diferencial e Integral, em diferentes cursos de graduação. A intenção foi proporcionar aos participantes a compreensão dos principais aspectos da MCC e, posteriormente, a vivência do processo de elaboração de um evento contextualizado (EC). O objetivo principal da formação foi parcialmente atingido. Embora os participantes não tenham efetivamente elaborado um EC, os procedimentos necessários para tal elaboração foram explicitados e profundamente discutidos durante a atividade realizada.

Palavras-chave: matemática no contexto das ciências, método jigsaw, cálculo diferencial e integral

Abstract
The objective of this paper is to present the analysis of implementation of an activity of teacher training, created based on the precepts of Mathematics in the Context of Sciences (MCS) and the strategic methodology Jigsaw of cooperative learning. This training was planned to have its target audience aimed at teachers who teach courses of Mathematics, specially Differential and Integral Calculus in different undergraduate programs. The intention was to offer the participants comprehension on the main aspects of MCS and ultimately, the experience of the elaboration process of a contextualized event (CE). The main objective of the training was partially met. Although the participants did not effectively create an EC, the necessary procedures for this elaboration were clarified and profoundly discussed during the activity.

Key words: mathematics in the context of sciences, jigsaw method, differential and integral calculus

Introdução

Pesquisas referentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática em cursos universitários, como Alpers, Demlova, Fant, Gustafsson, Lawson, Mustoe, Olsson-Lehtonen, Robinson, Velichova (2013), Camarena (2017) e Bianchini, Lima, Gomes (2017), indicam que, um aspecto desencadeador de dificuldades e, consequentemente, evasão e reprovação por parte de estudantes de cursos de graduação, nos quais a Matemática está presente como disciplina de serviço, é a desvinculação entre o trabalho com os conteúdos dessa área e aqueles relativos ao campo de conhecimento de suas futuras esferas de atuação profissional. Tendo em mente essa questão, a pesquisadora mexicana Patricia Camarena organizou a teoria denominada *A Matemática no Contexto das Ciências* (MCC), contemplando o *Modelo Didático da Matemática em Contexto* (MoDiMaCo), cuja ideia central é o ensino contextualizado da Matemática, tanto a partir de sua vinculação com a futura área de atuação profissional do graduando, quanto com as disciplinas não matemáticas do curso superior em que o docente está atuando.

A principal ferramenta de trabalho do MoDiMaCo são os *eventos contextualizados* (EC), que, segundo Camarena (2013) apud Lima, Bianchini, Gomes (2016, p. 8), podem ser "problemas ou projetos que desempenham o papel de entes integradores entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, convertendo-se em ferramentas para o trabalho interdisciplinar no ambiente de aprendizagem". Tais eventos podem ser empregados com diferentes funções, como, por exemplo, diagnóstica, motivadora, para introduzir um conceito novo, para construir conhecimentos ou para avaliação.

O propósito deste artigo é apresentar uma atividade de formação docente e análises a respeito de sua primeira realização. Tal formação foi planejada tendo como público-alvo professores que lecionam disciplinas matemáticas, especialmente Cálculo Diferencial e Integral, em diferentes cursos de graduação. A intenção foi proporcionar aos participantes a compreensão dos principais aspectos da MCC e, posteriormente, a vivência do processo de elaboração de um EC, processo este que, posteriormente, poderá ser reproduzido pelos professores em suas práticas docentes com o objetivo de motivar os estudantes dos diferentes cursos em que atuam e oferecer a eles um ensino contextualizado da Matemática.

Em termos de método de trabalho, a formação, realizada em uma sala com acesso à internet, foi organizada a partir das seguintes etapas:

1. Familiarização com a teoria MCC, com a metodologia *Dipcing* e, consequentemente, com a noção de EC e como elaborá-lo. Esta etapa foi desenvolvida recorrendo-se a um método de aprendizagem cooperativa denominado *Jigsaw*.
2. Análises de materiais didáticos, usualmente adotados em disciplinas não matemáticas de diferentes cursos de graduação, buscando situações que podem dar origem a EC.
3. A partir da análise realizada na etapa 2, construção de um EC.
4. Socialização e discussão dos eventos produzidos.

Maiores detalhes a respeito de cada uma das etapas e da metodologia empregada durante a referida atividade de formação docente são apresentados ao longo do texto. Na próxima seção, detalhamos a etapa 1 e, simultaneamente, apresentamos os principais aspectos do referencial que a embasou: a Matemática no Contexto das Ciências (MCC), e também a estratégia adotada para que os participantes se familiarizassem com tal referencial: o método *Jigsaw* de aprendizagem cooperativa.

Etapa 1: familiarização com a MCC via método *Jigsaw*

A primeira etapa da atividade de formação docente realizada teve por objetivo possibilitar aos participantes que se familiarizassem com os principais aspectos da teoria MCC. Nesta seção, tanto descrevemos como tal etapa foi organizada, quanto apresentamos os principais preceitos da teoria em questão.

Esta etapa foi realizada recorrendo-se a uma adaptação de um método de aprendizagem cooperativa denominado *Jigsaw*. A partir de Gomes (2015), ressaltamos que *aprendizagem cooperativa* é um termo genérico que se refere a numerosas técnicas de organizar e conduzir as atividades em sala de aula. Consiste principalmente na organização de pequenos grupos para desenvolver um trabalho com objetivos comuns. Esse trabalho em conjunto propicia aos estudantes criarem formas de interdependência que os tornam responsáveis pelo sucesso de sua aprendizagem e também pela dos outros (Vieira, 2000). Na aprendizagem cooperativa, os grupos de estudantes desenvolvem um trabalho organizado de forma a maximizar a aprendizagem de cada indivíduo (Santos, 2011).

Diferentes técnicas referentes à utilização da aprendizagem cooperativa vêm sendo desenvolvidas desde os anos sessenta. Dentre elas o Método *Jigsaw*, que foi elaborado por Elliot Aronson, professor da Universidade do Texas, na década de 70, na tentativa de minimizar os conflitos em sala de aula gerados pela diversidade de raças e etnias presentes. Para Aronson (2000), três princípios são fundamentais para o trabalho com o *Jigsaw*:

1. O processo de aprendizagem deve ser estruturado de modo que a competitividade individual seja incompatível com o sucesso;
2. Só haverá sucesso se os estudantes colaborarem entre si;
3. Todos os estudantes, individualmente, poderão contribuir com algum conhecimento, que é só seu, e, portanto, só ele poderá levar ao grupo. (Aronson, 2000, p. 325).

A característica predominante neste método de ensino é a interdependência positiva (Serra, 2007). O trabalho que cada aluno realiza é essencial para o sucesso final do grupo. O processo se assemelha à montagem de um quebra-cabeça (daí a origem do nome: *Jigsaw*) em que todas as peças são fundamentais para a conclusão da montagem (Teodoro, 2011).

Durante a primeira etapa da atividade de formação docente que realizamos, os participantes foram organizados em quatro pequenos grupos e receberam textos previamente selecionados por nós proponentes, de tal forma que, em cada grupo, houvesse um participante responsável por uma pequena parte do assunto a ser estudado, que foi dividido em quatro temas, a saber:

- Tema 1: As ideias gerais referentes à Matemática no Contexto das Ciências;
- Tema 2: As cinco fases da Matemática no Contexto das Ciências;
- Tema 3: A metodologia *Dipcing*;
- Tema 4: O Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo) e a noção de eventos contextualizados.

Os participantes responsáveis pelo Tema 1 estudaram a partir de trechos de Camarena (2010), artigo por meio do qual a autora apresenta a problemática que desencadeou a construção da MCC. No trecho selecionado, Camarena ressalta que para uma formação sólida e integral de um estudante universitário, não são suficientes apenas conhecimentos de ciências básicas, como por exemplo, Física, Matemática e Biologia, e aqueles específicos das áreas em que estão se formando. É necessário, segundo Camarena (2010, p. 2), que o graduando "resolva problemas reais que requerem a integração de todos esses conhecimentos, isto é, que desenvolva um bom nível de habilidades para transferi-los" de suas áreas de estudo para suas áreas de aplicação. Com o propósito de investigar, tendo inicialmente como foco os cursos de Engenharia, "como desenvolver [por meio de aulas de Matemática] as habilidades de 'transferência' de conhecimento para que as competências laborais e profissionais fossem favorecidas", é que Camarena passou a estruturar a teoria educacional MCC.

Na construção de tal teoria, busca-se refletir a respeito da "vinculação que deve existir entre a Matemática e as ciências que a requerem, entre a Matemática e as competências laborais e profissionais, e a vinculação com as atividades da vida cotidiana" (Camarena, 2010, p. 6). A autora afirma ainda que, usualmente a desarticulação que existe entre as disciplinas de Matemática e as demais que compõem os currículos dos cursos de ciências exatas, como por exemplo, as engenharias se convertem em um conflito cotidiano para os alunos. A MCC está baseada em três paradigmas, a saber: (i) A Matemática é uma ferramenta de apoio e uma disciplina formativa; (ii) A Matemática tem uma função específica no nível universitário; (iii) Os conhecimentos nascem integrados.

Tal referencial estrutura-se em cinco fases. É a respeito delas que tratam os trechos de Camarena (2008) estudados pelos participantes responsáveis pelo Tema 2. Tal texto aborda as principais características de cada uma das fases da teoria: *curricular, didática, epistemológica, docente e cognitiva.* Essas fases não são isoladas umas das outras e tampouco independentes das condições sociológicas dos atores do processo educativo. Elas interatuam e consequentemente, nas salas de aula estão presentes aspectos de cada uma delas. Na *fase curricular* o principal objetivo é a construção, por meio da metodologia *Dipcing*, que detalhamos posteriormente, de um currículo de Matemática para a graduação em questão que seja objetivo e valorize a vinculação curricular interna (entre as disciplinas matemáticas e não matemáticas do curso), a vinculação curricular externa (entre a educação básica e a graduação e entre a graduação e a pós-graduação), assim como a vinculação entre a universidade e o futuro cotidiano profissional do estudante. A *fase didática* contempla o Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo), que tem como principal ferramenta de trabalho os eventos contextualizados, a respeito dos quais tratamos mais adiante. Na *fase epistemológica* o objetivo principal é compreender como, do ponto de vista epistemológico estão relacionados a Matemática e problemas específicos de outras áreas do conhecimento que necessitam das ferramentas dessa ciência. Também no âmbito desta fase considera-se aquilo que Camarena (2001) denomina de *transposição contextualizada*, constructo teórico por meio do qual busca-se analisar como a Matemática aprendida pelos estudantes sofre transformações para adaptar-se ao que é requerido por outras ciências. Na *fase docente* busca-se estruturar como formar o professor para trabalhar com o currículo construído na fase curricular. Na *fase cognitiva* a sustentação teórica principal é a Aprendizagem Significativa de Ausubel (1990), mobilizada para analisar, sob o ponto de vista cognitivo, o trabalho dos estudantes no MoDiMaCo.

Os participantes responsáveis pelo Tema 3 estudaram, a partir de trechos de Lima, Bianchini, Gomes (2016), os aspectos principais referentes à metodologia *Dipcing* (***Di****seño de* ***p****rogramas de estudio de matemáticas en* ***c****arreras* de ***ing****eniería)* proposta por Camarena (2002) com o objetivo de, dentre outros, por meio da análise de livros didáticos, compreender a vinculação entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas de cursos de Engenharia e, a partir de tal compreensão detectar situações que podem originar EC. Com o passar do tempo, tal metodologia se expandiu para além dos cursos de Engenharia, podendo ser aplicada a todos aqueles que contemplam disciplinas matemáticas em seus currículos, mas que não têm como objetivo a formação de matemáticos. A *Dipcing* se divide em três etapas: central, precedente e consequente. Na *etapa central* o objetivo principal é detectar o quê de Matemática deve ser trabalhado em cada curso de graduação, o que é realizado por meio de uma análise dos conteúdos matemáticos, tanto implícitos, quanto explícitos mobilizados pelas disciplinas não matemáticas presentes na grade curricular do curso em questão. Essa análise é realizada a partir dos "livros didáticos ou referências bibliográficas mais utilizadas nas disciplinas não matemáticas, buscando em tais materiais quais os conteúdos matemáticos requeridos, observando o enfoque, a profundidade e a notação com que cada um deles é descrito e suas aplicações" (Lima, Bianchini, Gomes, 2016, p. 4). A partir da etapa central da *Dipcing*, é possível compreender em quais situações não matemáticas os conceitos matemáticos são mobilizados, se tal uso se dá como ferramenta ou como fundamentação teórica, se as notações empregadas são semelhantes àquelas utilizadas nas disciplinas matemáticas, dentre outros aspectos.

Como ressaltam Lima, Bianchini, Gomes (2016, p. 5), "a segunda etapa da *Dipcing*, denominada *precedente*, tem por objetivo [por meio de um instrumento de avaliação construído para esse fim] diagnosticar o nível de conhecimentos matemáticos apresentados pelos estudantes ao ingressarem na universidade". A partir dos resultados obtidos por meio da avaliação diagnóstica, Camarena (2002) apud Lima, Bianchini, Gomes (2016, p. 6), classifica da seguinte forma os conceitos nos quais a maioria dos alunos apresentou dificuldades:

a) Temas que o estudante deve conhecer e que é capaz de estudá-los por si mesmo, com uma simples orientação bibliográfica por parte do professor.
b) Temas que devem ser conhecidos e manipulados com habilidade pelo aluno e que devem ser incluídos como parte propedêutica na elaboração dos programas de estudo das disciplinas matemáticas presentes no início do curso.

Na última etapa da *Dipcing*, denominada *consequente*, estão previstas entrevistas com profissionais já atuantes egressos da graduação em análise, com o objetivo de perceber como estes mobilizam a Matemática em suas atividades laborais. De acordo com Lima, Bianchini, Gomes (2016, p. 6) fundamentados em Camarena (2002), os dados coletados por meio desta etapa possibilitam "uma melhor hierarquização em termos da importância que deve ser dada aos temas da Matemática" em cada curso de graduação. Os autores ressaltam que os programas das disciplinas matemáticas não poderão ser construídos levando-se em consideração apenas aqueles que efetivamente serão requeridos nas disciplinas não matemáticas ou nas futuras atividades laborais dos egressos. É necessário preservar a estrutura lógica do conhecimento, agregando "em maior ou menor medida, outros temas aos conceitos matemáticos obtidos por meio das etapas da *Dipcing*" (Lima, Bianchini, Gomes, 2016, p. 7).

A partir da análise de materiais didáticos utilizados em disciplinas não matemáticas de diferentes cursos de graduação, realizada na etapa central da *Dipcing* é que se dá a construção de EC. Os elementos essenciais do MoDiMaCo e a noção de EC foram estudados pelos participantes dessa atividade de formação docente, responsáveis pelo Tema 4, a partir de trechos de Lima, Bianchini, Gomes (2018). A ideia principal do MoDiMaCo é "estimular a construção do conhecimento por parte do graduando e o desenvolvimento de habilidades para vinculá-lo às suas futuras áreas de atuação profissional" (Lima, Bianchini, Gomes, 2018, p. 118). Tal modelo, segundo Camarena (2017), foi concebido tendo por base alguns pilares construtivistas, como o enfoque Psicogenético de Piaget, o enfoque Sociocultural de Vigotsky e o enfoque Cognitivo de Aprendizagem Significativa de Ausubel. "Em linhas gerais, as estratégias de ensino contempladas em tal Modelo consistem em apresentar ao estudante, a Matemática de forma interdisciplinar, contextualizada nas áreas de conhecimento de sua futura profissão, por meio de eventos contextualizados" (Lima, Bianchini, Gomes, 2018, p. 119) que, conforme mencionamos, configuram-se como problemas ou projetos que, como ferramentas para o trabalho interdisciplinar em sala de aula, exercem a função de entes integradores entre as disciplinas matemáticas e as não matemáticas de determinado curso de graduação.

O MoDiMaCo estrutura-se em dois eixos: *contextualização* e *descontextualização*. O primeiro constitui-se no trabalho interdisciplinar com a resolução de EC; já no segundo, a abordagem dada à Matemática é disciplinar, recorrendo-se ao grau de formalismo consonante ao exigido pela futura profissão do graduando. Busca-se "evidenciar que o conceito trabalhado por meio de determinado evento contextualizado pode também ser aplicado em outras situações" (Lima, Bianchini, Gomes, 2018, p. 119). O docente, ao optar por atuar em acordo com o MoDiMaCo, assume uma série de tarefas essenciais para que possa desenvolver suas aulas. Destacamos, a seguir, algumas delas diretamente relacionadas aos processos de construção e análise de um EC, que foram exploradas no decorrer da atividade de formação. A primeira delas é selecionar um conteúdo matemático possível de ser trabalhado por meio de um evento ou de um conjunto deles. Em seguida:

I. Identificar situações, presentes nas disciplinas que compõem a matriz curricular do curso de graduação em questão ou no futuro exercício profissional do estudante em formação, a partir das quais os eventos contextualizados podem ser construídos.

II. Analisar as situações identificadas para: verificar se, nestas, de fato estão presentes os conteúdos matemáticos com os quais se deseja trabalhar; identificar se os estudantes possuem os conhecimentos prévios necessários para trabalhar com o evento a ser proposto, e se tal situação realmente tem potencial para possibilitar que os graduandos estabeleçam uma vinculação entre os conhecimentos prévios e os emergentes, gerando uma aprendizagem significativa.

III. Estabelecer a função do evento contextualizado que está sendo construído, isto é, se ele será utilizado para diagnóstico, motivação, construção de conhecimentos, reforço de conhecimentos, avaliação, superação de obstáculos, entre outros.

IV. Dar início à elaboração da *história do evento contextualizado*. Nesse momento, as informações possíveis de serem explicitadas são: a descrição do evento, sua função, os conhecimentos matemáticos nele envolvidos, os conhecimentos matemáticos prévios requeridos e os conhecimentos do contexto presentes no evento. O docente deverá também refletir a respeito das possíveis maneiras de resolução do evento, dos obstáculos que os alunos poderão enfrentar para resolvê-lo, as possíveis questões a serem colocadas pelos estudantes e as respostas, em forma de perguntas, que poderão auxiliá-los a avançar na resolução do evento (Lima, Bianchini, Gomes, 2018, pp. 122-123).

Apresentados os conteúdos presentes nos textos selecionados pelos proponentes da atividade de formação para os responsáveis por cada um dos temas, retomamos alguns aspectos a respeito da dinâmica empregada. Os participantes que receberam o mesmo tema, se reuniram em grupos de quatro pessoas e prepararam uma breve exposição, de tal forma que, quando retornaram aos seus grupos originais, puderam explicar o tema do qual se tornaram “especialistas”, para aqueles que realizaram o mesmo trabalho com os outros temas. Por meio desta estratégia (Método *Jigsaw*) de aprendizagem cooperativa, ao final da primeira etapa da atividade de formação, todos os participantes construíram os conhecimentos teóricos e metodológicos para o desenvolvimento das etapas subsequentes, que passamos a relatar.

Etapas 2, 3 e 4: processo de construção de eventos contextualizados

A segunda etapa da atividade de formação docente realizada foi destinada à análise de materiais didáticos utilizados em disciplinas não matemáticas de diferentes cursos de graduação que mobilizam conceitos da Matemática. Para isso, disponibilizamos aos participantes uma série de livros e apostilas digitais com temáticas como análise e dimensionamento de estruturas, ciências biológicas, circuitos elétricos, elementos de máquinas, hidráulica e resistência dos materiais. Os participantes então realizaram uma leitura flutuante desses materiais e indicaram situações nas quais conceitos matemáticos eram requeridos.

Devido à complexidade da tarefa de elaborar um EC, as duas últimas etapas planejadas para a atividade de formação docente, construir eventos contextualizados (etapa 3) e posteriormente socializá-los (etapa 4), tiveram de ser adaptadas. Não houve tempo suficiente para que, de fato, os eventos fossem construídos. Optamos então por refletir, em conjunto com os participantes, a respeito de uma situação do contexto da Engenharia Elétrica presente em um dos materiais que disponibilizamos e, por meio de tal análise, identificar conceitos matemáticos requeridos e que poderiam, portanto, ser trabalhados por meio de EC tomando por base aquela situação, e também os conceitos específicos da Engenharia dos quais, de alguma forma, os docentes de disciplinas matemáticas, que optarem por trabalhar com tais eventos, deverão apropriar-se.

A situação por nós escolhida para discussão é apresentada no livro *Circuitos Elétricos* de Nilsson, Riedel (2009, p. 138) no capítulo tratando de *Indutância, Capacitância e Indutância Mútua*. Ressaltamos que o problema tratado não constitui-se em um EC, mas sim uma situação com potencial de gerar vários eventos para trabalhar com diferentes conceitos matemáticos.

O pulso de tensão descrito pelas seguintes equações está aplicado nos terminais de um capacitor de $0{,}5\mu F$:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0s \\ 4t\ V, & 0s \leq t \leq 1s \\ 4e^{-(t-1)}\ V, & t \geq 1s \end{cases}$$

a) Deduza as expressões para a corrente, potência e energia do capacitor.
b) Faça os gráficos da tensão, corrente, potência e energia em função do tempo. Alinhe os gráficos na vertical.
c) Especifique o intervalo de tempo em que a energia está sendo armazenada no capacitor.
d) Especifique o intervalo de tempo em que a energia está sendo fornecida pelo capacitor.
e) Avalie as integrais a seguir e comente seus significados.

$$\int_0^1 p\,dt \qquad \text{e} \qquad \int_1^\infty p\,dt$$

A partir dessa situação, passamos a, juntamente com os participantes, identificar os conceitos matemáticos e aqueles da Engenharia nela presentes. Em relação à Matemática, já no enunciado, na descrição do pulso de tensão aplicado nos terminais do capacitor, o conceito de função real de uma variável real é mobilizado; requer-se, especialmente, a noção de função definida por várias sentenças, sendo, no caso, uma delas uma função exponencial. No item (a), a dedução da expressão que descreve matematicamente a corrente, indicada por i, exige a mobilização das ideias de proporcionalidade direta e de derivada como taxa de variação instantânea, uma vez que a corrente é proporcional à taxa de variação da tensão do capacitor em relação ao tempo. Obtém-se então a equação diferencial ordinária $i = C\frac{dv}{dt}$ e, ao se calcular, para cada sentença que define $v(t)$, o termo $\frac{dv}{dt}$, utilizam-se técnicas de derivação.

Ainda no item (a), para a obtenção da expressão para a potência em função do tempo, mais uma vez é necessário recorrer à ideia de derivada como taxa de variação instantânea: a potência (p) é a taxa de variação em relação ao tempo do gasto ou da absorção da energia (w), isto é, $p = \frac{dw}{dt}$, a corrente é a taxa de variação em relação ao tempo da variação de carga (q), isto é, $i = \frac{dq}{dt}$, e a tensão é a taxa de variação do gasto ou da absorção da energia em relação à variação da carga, ou seja, $v = \frac{dw}{dq}$. Recorre-se então à ideia de taxas relacionadas e obtém-se, finalmente, que $p = \frac{dw}{dt} = \left(\frac{dw}{dq}\right) \cdot \left(\frac{dq}{dt}\right) = v \cdot i$. Como, no caso da situação em destaque, as funções que descrevem, respectivamente, v e i em função do tempo já terão sido explicitadas, a expressão da potência poderá ser diretamente obtida recorrendo-se a um produto de funções reais de uma variável real. Finalmente, a energia é uma função quadrática da tensão, $w = \frac{1}{2}Cv^2$ sendo, tanto w quanto v, funções do tempo.

No item (b), em relação à matemática, demanda-se a análise, por meio de suas representações gráficas, do comportamento das funções v, i, p e w em relação ao tempo. Nos itens (c) e (d), é preciso analisar os sinais da função p, a partir de sua representação gráfica, uma vez que a energia é armazenada no capacitor sempre que a potência for positiva e é fornecida pelo capacitor sempre que a potência for negativa. Finalmente, no item (e) são requeridos os cálculos de uma integral definida e de uma integral imprópria; para esse último mobiliza-se a noção de limite no infinito. As representações gráficas solicitadas no item (b) permitem explorar a ideia de continuidade de funções (i é descontínua em $t = 0$ e $t = 1$, p é descontínua em $t = 1$).

Em relação aos conceitos do contexto da Engenharia Elétrica, estão presentes na situação os de capacitância, condutores elétricos, materiais dielétricos, materiais isolantes, carga elétrica, tensão, potência, corrente de deslocamento e corrente de condução. Ressaltamos, durante a atividade de formação docente, a importância do estabelecimento de diálogo entre os professores de disciplinas matemáticas e aqueles de disciplinas específicas, como Circuitos Elétricos, por exemplo, para que os EC possam ser adequadamente construídos e trabalhados em sala de aula, uma vez que, obviamente, não se espera que o professor de Matemática domine, com profundidade, esses conhecimentos do contexto, mas que conte com auxílio de profissionais da área específica do curso de graduação em que estão atuando, para que possam lecionar em consonância ao MoDiMaCo.

Embora não tenha sido objetivo da atividade de formação realizada – e, consequentemente também não seja deste texto – ressaltamos que realizamos algumas reflexões a respeito de aspectos matemáticos que, na situação em destaque, são apresentados com um nível de rigor aquém do desejável. Por exemplo: (i) o fato de se usar $\leq$ em todos os extremos dos intervalos de definição de cada uma das sentenças que compõem $v(t)$; (ii) a não discussão ou, sequer, menção, ao fato de v não ser derivável em $t = 0$ e em $t = 1$ e, portanto, não ser possível definir a corrente i nesses pontos; (iii) o fato de, na definição das funções, serem inseridas unidades de medidas das grandezas.

Considerações finais

Ao analisarmos globalmente o que ocorreu durante a atividade de formação, pudemos notar que o nosso objetivo central foi parcialmente atingido pois, apesar de os participantes não terem elaborado EC, como havia sido originalmente planejado, o que se deu em razão do tempo de duração da atividade e das dificuldades inerentes à tarefa de construir um problema integrando disciplinas matemáticas e não matemáticas em um determinado curso de graduação, o envolvimento no aprendizado foi notado. Proporcionamos a compreensão dos elementos basilares da MCC e pudemos, juntamente aos participantes refletir a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática em cursos nos quais essa ciência está a serviço e sobre o processo de elaboração de um EC. A relevância da atividade foi ratificada pelos participantes por meio dos seus depoimentos ao seu término.

Destacaram que, se o professor não estabelecer conexões entre as diferentes disciplinas que compõem um curso de graduação, por exemplo, as matemáticas e as específicas de determinada habilitação da Engenharia, o estudante, por conta própria, também não as estabelecerá.

Além disso, o domínio de estratégias para a construção de EC foi ressaltado como fundamental pelos participantes, já que, nos materiais usualmente empregados em cursos que não visam formar matemáticos, quando presentes, os exemplos de aplicações da Matemática em diferentes áreas de conhecimento, são muitas vezes muito genéricos e distantes dos problemas que efetivamente serão estudados nas disciplinas específicas de cada curso universitário ou enfrentados no futuro cotidiano profissional dos egressos.

Os professores participantes da formação ressaltaram também que as ferramentas trazidas pela MCC para a identificação de aplicações da Matemática em disciplinas não matemáticas de cursos universitários, especialmente a etapa central da metodologia *Dipcing*, se constituem como conhecimentos valiosos para os docente que atuam em tais cursos, uma vez que, sem o auxílio de uma estratégia sistematizada, é muito difícil identificar exemplos dessas aplicações em diferentes áreas.

Referências bibliográficas

Alpers, B., Demlova, M., Fant, C-H., Gustafsson, T., Lawson, D., Mustoe, L., Olsson-Lehtonen, B., Robinson, C. e Velichova, D. (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education.* Report of the Mathematics Working Groups. Bruxelas: Sociedade Europeia de Ensino de Engenharia (SEFI).

Aronson, E. (2000). *Jigsaw in 10 Easy Steps*. Recuperado em 10 dezembro 2013 de http://www.jigsaw.org/steps.htm.

Ausubel, D. P., Novak, J.D. e Hanesian H. (1990). *Psicología Educativa, un punto de vista cognoscitivo*. México, D. F.: Editorial Trillas.

Bianchini, B. L., Lima, G. L. e Gomes, E. (2017). Competências matemáticas: perspectivas da SEFI e da MCC. *Educação Matemática Pesquisa* 19(1), 49-79.

Camarena, P. G. (2001). Contextualización de las Series em Ingeniería (Estrategia Didáctica). *Científica: the Mexican Journal y of Electromr chanical Engineering Esime*, 5(4).

Camarena, P. G. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa*, 2(10), 22-28, 2(11) 4-12.

Camarena P. G. (2008). Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. *Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 83-107). Conferencia Magistral, Perú.

Camarena, P. G. (2010). *Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería.* Recuperado em 28 de janeiro de 2016 de <http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf>.

Camarena, P. G. (2013). A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Innovación Educativa*, México, 13(62) 17-44.

Camarena, P. G. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 19(2) 1-26.

Gomes, E. (2015). *Contribuições do método* jigsaw *de Aprendizagem Cooperativa para a mobilização dos Estilos de Pensamento Matemático por estudantes de Engenharia*. Tese de Doutorado publicada, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Lima, G. L., Bianchini, B. L. e Gomes, E. (2016). Dipcing: uma metodologia para o planejamento ou redirecionamento de programas de ensino de matemática em cursos de engenharia. XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (pp. 1-10). Natal, RN.

Lima, G. L., Bianchini, B. L. e Gomes, E. (2018). Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática e Debate*, 2(4).

Nilsson, J. W e Riedel, S. A. (2009). *Circuitos Elétricos*. São Paulo: Pearson, Prentice Hall.

Serra, A. P. L. B. N.(2007). *Uma oficina de formação de aprendizagem cooperativa — aspectos da leccionação da matemática.* Dissertação de Mestrado em Ensino das Ciências na Universidade Aberta, Lisboa.

Teodoro, D. L. (2011). *Aprendizagem cooperativa no ensino de química: investigando uma atividade didática elaborada no formato jigsaw.* Dissertação de Mestrado em Química na Universidade de São Paulo, São Carlos.

Vieira, P. N. B.(2000). *Estratégias Alternativas de Ensino-Aprendizagem na Matemática: estudo empírico de uma intervenção com à aprendizagem cooperativa, no contexto do ensino profissional.* Dissertação de Mestrado em Psicologia na Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto.

O PROCESSO DE AQUISIÇÃO DO CONCEITO DA EQUAÇÃO DO PRIMEIRO GRAU A PARTIR DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

THE PROCESS OF ACQUISITION OF THE CONCEPT OF THE FIRST LEVEL EQUATION FROM SIGNIFICANT LEARNING

Sonner Arfux de Figueiredo, Mariana Aguiar da Silva
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS. (Brasil)
sarfux@uems.br, mari_facul@hotmail.com

Resumo
Neste artigo investigamos, num experimento de ensino, como alunos do 7º ano da Educação Básica, consolidam o processo de aquisição do conceito da equação do primeiro grau a partir da aprendizagem significativa, fundamentada em Ausubel. Para explicar o processo resolutivo da equação utilizamos uma Balança confeccionada de material alternativo, nos fundamentamos em Vergnaud que traz como contribuição a Teoria dos Campos Conceituais. A metodologia foi o da pesquisa-ação, e os sujeitos foram 18 alunos. Os resultados indicam que os recursos utilizados favoreceram o processo metacognitivo facilitando as abstrações do aluno com a experiência, algo essencial para o entendimento dos conceitos algébricos.

Palavras-chave: balança como material concreto, equação do 1º grau, experimento de ensino

Abstract
In this article we investigate, in a teaching experiment, as students 7th year of Basic Education, consolidate the process of acquisition of the concept of the first-grade equation from the meaningful learning, based on Ausubel. In order to explain the process of the equation, we use a Scale made up of alternative material, based on Vergnaud that brings as contribution the Theory of Conceptual Fields. The methodology was that of action research, and the subjects were 18 students. The results indicate that the resources used favored the metacognitive process facilitating student's abstractions with experience, which is essential for the understanding of algebraic concepts.

Key words: scales as concrete material, equation of the first degree, teaching experiment

Introdução

A motivação para o desenvolvimento desta pesquisa decorre pelos estudos constantes sobre teorias de aprendizagem conceitual, que retratam o processo de ensino e aprendizado. A Equação do Primeiro Grau detém o fascínio da iniciação do aluno na parte algébrica, ao mundo das equações parte fundamental da matemática, é por este deslumbre que foi escolhido como o tema de nossa sequência didática, embora ensinar este conteúdo seja um desafio e muito maior quando se objetiva uma aprendizagem significativa. Pensou-se nesta pesquisa como uma possível situação que favorecesse a aprendizagem significativa da Equação do Primero Grau. Pesquisas educacionais recentes sobre aprendizagem têm se baseado em teorias cognitivas, muitas das quais com foco Vygotskyano acerca da interação social.

Teorias dessa natureza têm fornecido subsídios significantes e promissores para o desenvolvimento de metodologias, na busca por avanços na compreensão sobre a evolução do conhecimento humano. Ausubel (1976) é um dos representantes do cognitivismo, como tal, propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem segundo um ponto de vista cognitivista. Essas teorias e pesquisas podem embasar tomadas de decisão no dia-a-dia da sala de aula.

Assim, neste artigo, a partir da ideia da aprendizagem significativa investigamos em um experimento de ensino, como os alunos do 7º ano da Educação Básica da rede Pública de Ensino do Estado de Mato Grosso do Sul – Brasil desenvolvem o processo de aquisição do conceito de equação do primeiro grau num experimento de ensino que contempla uma caracterização do mecanismo cognitivo de forma a tornar possível a aquisição, retenção e aparecimento de conceitos na estrutura cognitiva.

Marco teórico

O marco teórico desta investigação se apresenta e faz uma análise sob o ponto de vista das teorias de Ausubel acerca da Aprendizagem significativa da educação, gerando como consequência do desenvolvimento do projeto a discussão com alunos e educadores sobre as inovações e benefícios dessa proposta metodológica.

A aprendizagem significativa fundamenta e indica condições para a melhoria do ensino e aprendizagem de matemática em sala de aula em todo o seu processo. É uma proposta educativa que apoia a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos, promovendo a construção de estruturas mentais a fim de buscar novos conhecimentos. Esta aprendizagem significativa tem como principal teórico David Paul Ausubel. Para Ausubel, Novak e Hanesian (1980), A essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas, sejam relacionadas de maneira substantiva (não-literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe ou seja, há um aspecto de sua estrutura cognitiva relevante a essas ideias. Este aspecto especificamente relevante pode ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma proposição, já significativo (p.34), ou seja, o que ele já sabe é o ponto de partida para a incorporação, compreensão e fixação de novos conhecimentos. Neste sentido o subsunçor diz respeito a estrutura capaz de ancorar a nova informação que o estudante vai lhe atribuir significado. Já a substantividade é o que é incorporado na estrutura cognitiva do aprendiz, tornando-se substância do novo conhecimento por intermédio do estabelecimento de variadas representações para um único significado. Portanto, para a aprendizagem significativa, as ideias e os conceitos não podem depender exclusivamente do uso de signos específicos, mas de uma variedade deles.

Para que a aprendizagem seja significativa existem duas condições necessárias: a primeira é a que o estudante deve ter adquirido vivências e que essas sejam vivências referenciais e experiências da realidade objetiva adquiridas em seu cotidiano, permitindo assim que o novo conhecimento a ser aprendido seja relacionável ou incorporável na sua própria estrutura cognitiva de maneira substantiva e não arbitral. E a segunda diz respeito aos materiais utilizados em sala de aula no processo de ensino aprendizagem, estes devem ser potencialmente significativo, capaz de propiciar ao estudante condições para relacionar os novos conhecimentos com o material já existente em sua própria estrutura cognitiva.

A teoria Ausubeliana faz a ressalva dizendo que quando um conhecimento não é aprendido de forma significativa, ele é aprendido de forma mecânica, que podem ser expositivas verbais. A aprendizagem mecânica é o caminho de aprendizagem de muitos conhecimentos inteiramente novos, está caracteriza-se por ser arbitrária e literal. “Tanto dentro como fora de classe, a aprendizagem verbal significativa é o meio principal de aquisição de grande parte do conhecimento” (Ausubel et al, 1980, p.23), a aprendizagem acontece dentro e fora da escola e deve ser levada em consideração nesses dois aspectos, não é porque o professor só expôs o conhecimento que o aluno não pode aprender significativamente, uma aula com uma boa exposição verbal que é capaz de ativar os subsunçores, de fazer conexões entre o que o aluno já sabia, de alterar sua estrutura cognitiva também pode gerar a aprendizagem significativa.

Na aprendizagem significativa preconizada por Ausubel, o lema é fazer com que o aluno aprenda utilizando os conhecimentos existentes em sua estrutura cognitiva, estabelece no conhecimento prévio a sua referência sendo este o elemento básico e determinante na organização do ensino. Utilizando a relação entre o que se sabe e o novo conteúdo, dando-se a compreensão do assunto estudado com significado e não apenas memorização mecânica. Existindo o elo entre a integração do novo conhecimento ao que se sabe, está inter-relação possibilita a transformação de novas ideias em informação por meio de associações, trazendo significado ao novo.

Os organizadores prévios são os materiais introdutórios que são apresentados antes do material a ser aprendido, do conteúdo desejado para a aprendizagem, sua principal função segundo Ausubel (1976), é servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa, são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como “pontes cognitivas”. Os organizadores prévios são uma estratégia de manipulação da estrutura cognitiva, a fim de serem um facilitador no processo de aprendizagem significativa.

No estudo do processo de aquisição da aprendizagem, é imprescindível considerar o mundo onde o aluno se situa, sua sociedade, onde ele vive, sendo as características sociais o ponto de partida para uma aprendizagem significativa. A aprendizagem escolar não acontece num vácuo social, é somente com a relação aos outros indivíduos que se pode gerar a cultura, as experiências. Não se pode desconsiderar o aprendiz como um ser social, ele é de fato um ser social que sofre influência da sociedade, que tem suas experiências particulares que muda de aprendiz para aprendiz, um pode estar mais familiarizado com determinado assunto e outro não, as características e peculiaridades do aprendiz depende do meio social em que ele está inserido.

O valor social da ciência aplicada que cria condições para a aprendizagem significativa dá-se num duplo sentido: “1º) lida com pessoas num contexto social, respeitando seus significados, e não com leis abstratas gerais de aprendizagem; 2º) dá condições para que as pessoas participem ativamente de seu processo de aprendizagem e colaborem de forma consciente para as necessidades sociais que passam a perceber (Moreira, 1983, p. 88).

Dentro do contexto da aprendizagem significativa que envolve uma interação entre novas informações e ideias preexistentes na estrutura cognitiva, temos a aprendizagem subordinada e a aprendizagem superordenada. A primeira diz respeito a parte de conceitos gerais até chegar no conceito específico; já a segunda é o contrário, ela parte de conceitos específicos para chegar no conceito geral. Na matemática um bom exemplo de aprendizagem subordinada é mostrar que da soma podemos partir para um conceito de multiplicação ou partir de um conceito de triângulos para partir dos diferentes tipos de triângulo e mostrar que isso depende do conceito de ângulo, do tamanho de lado. Já de aprendizagem superordenada seria explicar os conjuntos numérico dos naturais, inteiros, racionais, irracionais para dizer que esses conceitos em específico resultam no conjunto mais amplo dos números reais.

A maioria dos conceitos é adquirida por: assimilação, diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. Na aquisição de conhecimentos pelo processo de diferenciação progressiva, atribui-se um novo significado a um dado subsunçor, através de sucessivas interações um subsunçor vai adquirindo novos significados, com isso, ele é capaz de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas. Já na reconciliação integrativa, é considerada um processo na dinâmica da estrutura cognitiva, que consiste em integrar significados, eliminar diferenças aparente, ou seja, realizar uma aprendizagem superordenada.

A aquisição de conhecimentos referente as novas informações que serão incorporadas dependem amplamente das ideias relevantes que já fazem parte da estrutura cognitiva, a interação que ocorre entre o novo material e a estrutura cognitiva existente, é dita de assimilação, a assimilação dos significados velhos e novos, dão a origem a uma estrutura mais altamente diferenciada. O exemplo mais comum de assimilação pertinente à matemática é o aluno poder relacionar e sempre que o professor falar meio, o aluno entender e lembrar que pode ser representado por 0,5 e ou ½, ou seja, a nova informação se relaciona com o subsunçor e forma-se o novo conceito de aprendizagem, mas a aproximação com o objeto leva a uma melhor aprendizagem modificando a estrutura cognitiva do sujeito.

Na aprendizagem significativa: segundo Moreira os conhecimentos adquiridos significativamente ficam retidos por um período maior de tempo; as informações assimiladas resultam num aumento da diferenciação das ideias que serviram de "âncoras", aumentando assim, a capacidade de uma maior facilitação da subsequente aprendizagem de materiais relacionados; as informações que não são recordadas (são esquecidas) após ter ocorrido a assimilação ainda deixam um efeito residual no conceito assimilado e, na verdade em todo o quadro de conceitos relacionados, e por fim as informações apreendidas significativamente podem ser aplicadas numa enorme variedade de novos problemas e contextos. Portanto a aprendizagem significativa nada mais é do que uma teoria que enfoca a aprendizagem a partir da interação com os conhecimentos prévios do indivíduo por meio do processo de assimilação.

Conjecturando este processo de assimilação organizamos uma sequência didática baseada nos estudo Vergnaud (1982) que desenvolveu a teoria dos campos conceituais que utilizamos nesta pesquisa como o aporte teórico matemático, ou seja, um aporte teórico que contribuísse ao processo aquisitivo das especificidades Matemáticas de forma a procurar em nossa investigação a resposta para: Como ocorre a aprendizagem mais humana e significativa da Equação do Primeiro Grau?

Neste sentido destacamos que o ensino nunca se desenvolve de modo intransitivo, o ensino é sempre por si o ensino de um determinado conteúdo, que tende a se desenvolver considerando as relações estabelecidas no processo, as relações entre professor e aluno, para que por fim os conteúdos sejam ensinados e aprendidos pelos alunos. O desenvolvimento cognitivo do aluno é influenciado pelo conteúdo do ensino, o conhecimento está organizado em campos conceituais, o domínio do conhecimento por parte do aluno vai acontecendo ao longo de sua vida.

Segundo Fioreze (2016), sobre os seus estudos a respeito de Vergnaud (1982) e a sua teoria dos campos conceituais, "O campo conceitual é definido como um conjunto de situações" (p. 29), quando ele propõe o estudo desta teoria, que é o estudo de um campo conceitual e não somente de um conceito, ele estava considerando que, em uma situação problema dada, o conceito não aparece de forma isolada da situação, mais sim em conjunto.

Vergnaud procura relacionar o desenvolvimento cognitivo dos alunos com as tarefas que ele é levado a resolver, pois, para resolver uma tarefa ou um problema o aluno necessita nessa situação saber mais de um conceito, ele precisa correlacionar tudo o que sabe para resolver a determinada situação, portanto, ele precisa dominar vários conceitos de natureza distintos para resolver um único problema.

Faz a relação segundo Moreira (2013, p.26) com a teoria da aprendizagem significativa, destacando que um "aspecto importante da teoria de Vergnaud, compatível com a de Ausubel, é que ele considera que a aquisição de conhecimentos, ou o domínio de um campo conceitual, é moldada pelas situações previamente dominadas, quer dizer, pelo conhecimento prévio". Ele também destaca que Vergnaud reconhece igualmente que sua teoria dos campos conceituais foi desenvolvida também a partir do legado de Vygotsky [...]. Para o professor, a tarefa mais difícil é a de prover oportunidades aos alunos para que desenvolvam seus esquemas na zona de desenvolvimento proximal (Moreira, 2013, p. 206).

Falar sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal, requer falar a interação professor e aluno ou aluno e aluno, pensar nessa interação, na troca de experiências propiciadas pela interação, e em todas as ações que envolvam o ato de aprender e de ensinar. É nesta direção que Vergnaud (1982) deixa evidente em suas teorias que o conhecimento se organiza em campos conceituais e que o seu domínio está ligado diretamente à aprendizagem e a experiência.
Vergnaud considera o campo conceitual como uma unidade de estudo para dar sentido às dificuldades observadas na conceitualização do real e, como foi dito antes, a teoria dos campos conceituais supõe que a conceitualização é a essência do desenvolvimento cognitivo (Moreira, 2002, p.10).

Neste sentido, Vergnaud como salienta Moreira (2002) ao formular a teoria dos campos conceituais leva em consideração que um conceito em si não se forma de um só tipo de situação, e sim de várias situações; uma situação não é analisada com um só conceito, mais sim com vários e suas variáveis; a construção e apropriação de uns conceitos e de todas as suas propriedades ou aspectos de uma situação, isto pode demorar anos pois envolve vários aspectos.

Fioreze (2016) ao falar de função preconiza que, há a necessidade de trabalhar-se problemas práticos e teóricos, pois, o deste conceito comporta várias propriedades, cuja relevância vária de acordo com a situação que o aluno vai aprender naquele momento, ela ainda destaca que as propriedades podem ser aprendidas de maneira imediata ou não, pode ocorrer no decorrer da aprendizagem. Pois, um conceito é um conjunto de invariantes utilizáveis na ação. A definição pragmática de um conceito recorre, portanto, ao conjunto das situações que constituem a referência de suas diversas propriedades, e ao conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações (Verganud, 1993, p.8).

Ela ainda faz a ressalva que diante das ideias de Vergnaud (1993), a necessidade de considerar um conceito como um elo de 3 elementos, um tripé de 3 conjuntos, então o conceito seria

$$C = (S, I, R)$$

Sendo: S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito; R é um conjunto de representações simbólicas que representam o conceito.

Os invariantes podem ser entendidos como objetos, propriedades e relações, nos quais estão na operacionalidade do conceito; já as representações simbólicas são a linguagem natural, os gráficos e os diagrama, etc., ou seja, tudo que pode ser usado para indicar e representar os invariantes. Neste sentido "O primeiro conjunto – de situações – é o referente do conceito, o segundo – de invariantes operatórios – é o significado do conceito, enquanto o terceiro – de representações simbólicas – é o significante." (Moreira, 2002, p. 10).

Vergnaud serviu de inspiração para a elaboração da sequência deste estudo. Por exemplo, um conjunto de situações do campo conceitual da equação do primeiro grau poderia ser uma sequência de situações compostas de diversas atividades propostas aos estudantes, todas exigindo que ele soubesse resolver a equação do primeiro grau, mas cada uma utilizando uma característica diferente. Como o que foi proposto na nesta pesquisa, e para a concepção do campo da equação do primeiro grau deve se também ter domínio do campo aditivo e multiplicativo, ou pelo menos uma ideia das operações que constam neles, ou seja, o estudante deve compor o seu conjunto de situações, o conjunto de operações aditivos e multiplicativos.

Jenske (2011) explica que segundo Vergnaud o campo conceitual das estruturas aditivas seria compreender o conjunto de situações que se utilizem de uma ou mais adições ou subtrações para a sua, ou a combinação dessas operações e o conjunto de conceitos utilizados para a resolução de problemas; para o campo conceitual das estruturas multiplicativas é o mesmo entendimento só que utilizando uma ou mais multiplicações ou divisões. Nota-se que é a utilização de um conjunto de conceitos ou teoremas que possam a vir a permitir a analisar matematicamente as situações problemas dadas.

Vergnaud corrobora (corrobora com Jenske (2011) 1993, p.1) dizendo que é, "é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança" (1993, p. 1), o conceito de situação não é o de uma situação didática, mais sim o de uma tarefa. Toda situação que seja complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas, que podem ter graus de dificuldades conhecidos ou não. Segundo Jenske "As situações são responsáveis pelo sentido atribuído ao conceito, pois é através de uma variedade de situações que um conceito torna-se significativo. " (2011, p. 35), é através da resolução de situações que o sujeito vai formando conceitos operatórios, o que lhe permite posteriormente tentar resolver diversas situações.

Participantes e desenho do experimento de ensino

A pesquisa classifica-se como qualitativa de natureza descritiva e interpretativa com características da pesquisa-ação. No tocante à pesquisa-ação, destacamos que ela tem por pressuposto que os sujeitos que nela se envolvem compõem um grupo com objetivos e metas comuns interessados em um problema que emerge num dado contexto no qual atuam desempenhando papéis diversos Thiollent (1994). Assim, podemos explicar a relação entre a aprendizagem conceitual e atividades matemáticas. No experimento de ensino organizado consideramos para explicar o processo resolutivo da equação utilizando uma Balança confeccionada de material alternativo e nos fundamentamos em Vergnaud (1982) que traz como contribuição a Teoria dos Campos Conceituais onde fica evidente que o ensino não se desenvolve de modo intransitivo, esta sempre ligado a conteúdos que tendem a se a se desenvolver considerando as relações estabelecidas no processo de ensino. O conhecimento esta organizado em campos conceituais, cujo domínio do conhecimento por parte do aluno tende a acontecer ao longo da vida.

Dezoito alunos desta turma participaram da pesquisa em aulas regulares, sendo que 39% dos alunos, estão fora da faixa etária/ano escolar, ou seja, alguns repetiram no 7º ano pela segunda vez seguida e enfatizam não terem estudado o conteúdo de equação do primeiro grau pela ótica da balança, foi simplesmente "passa para o outro lado e troca o sinal", sem ao menos saber o que estavam fazendo. Para a construção da balança foram usados: cola quente, régua de 30 cm, copo descartável de café, apontador. Inicialmente foi colado nas pontas da régua dois copinhos de café descartáveis e colocada a régua em cima de um apontador quadrado como na figura abaixo, o apontador estabilizou o equilíbrio, observou-se que o ponto de equilíbrio era eixar a régua em cima do apontador exatamente na marca de 15 centímetros. Ao confeccionarmos a balança com material alternativo, como pesos da balança foram utilizados bolitas (Bolas de gude). Foram dadas 10 bolitas a cada dupla e foi deixado um saquinho de bolitas no meio da sala, caso alguma dupla precisasse pegar mais, procuramos selecionar bolitas cujas medidas e pesos fossem equivalentes para não interferir na atividade.

As Atividades envolvendo a balança

A utilização da balança ajuda a favorecer o desenvolvimento das noções de igualdade nos dois membros da equação do primeiro grau, ainda ajuda a manter a ideia de equilíbrio, ou seja, adicionando ou retirando a mesma quantidade dos dois lados.
Para a construção da balança foram usados: cola quente, régua, copo descartável de café, apontador. Inicialmente foi colado nas pontas da régua dois copinhos de café descartáveis e colocada a régua em cima de um apontador quadrado como na figura abaixo, o apontador estabilizou o equilíbrio, observou-se que o ponto de equilíbrio era eixar a régua em cima do apontador exatamente na marca de 15 centímetros.

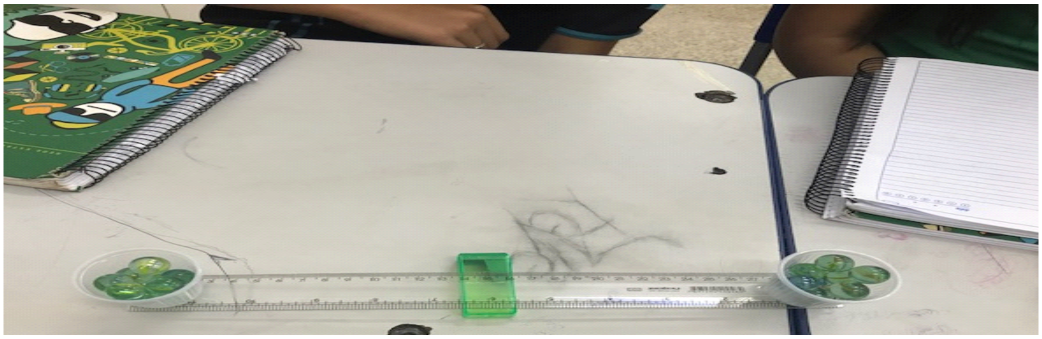


Figura 1: Balança prática adaptado de http://matematicapibidfaccat.blogspot.com/2013/12/equacoes.html
Fonte: Elaborado pelos autores

A balança como é mostrado na foto a cima, foi confeccionada com material alternativo, como pesos da balança foram utilizados bolitas (Bolas de gude). Foram dadas 10 bolitas a cada dupla e foi deixado um saquinho de bolitas no meio da sala, caso alguma dupla precisasse pegar mais, procuravam selecionar bolitas cujas medidas e pesos fossem equivalentes para não interferir na atividade.

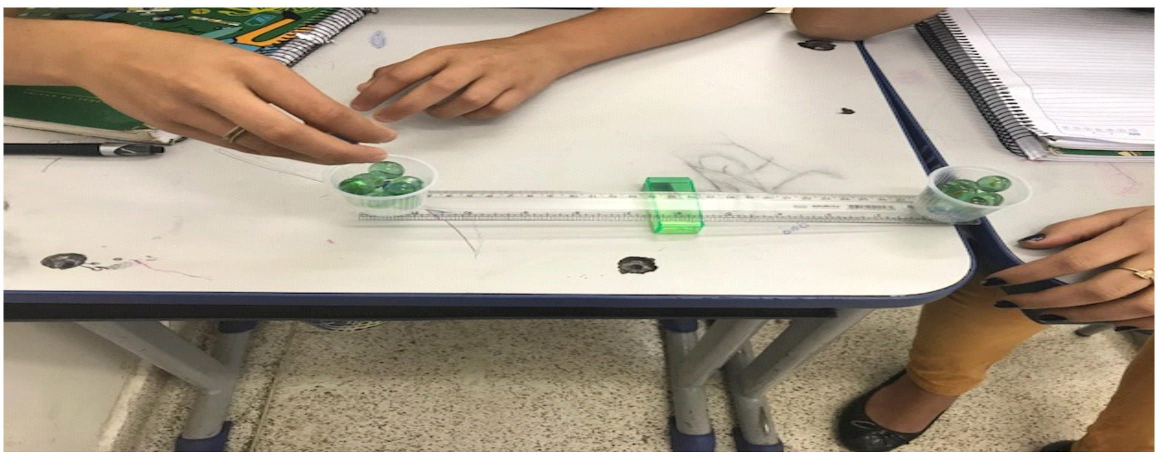


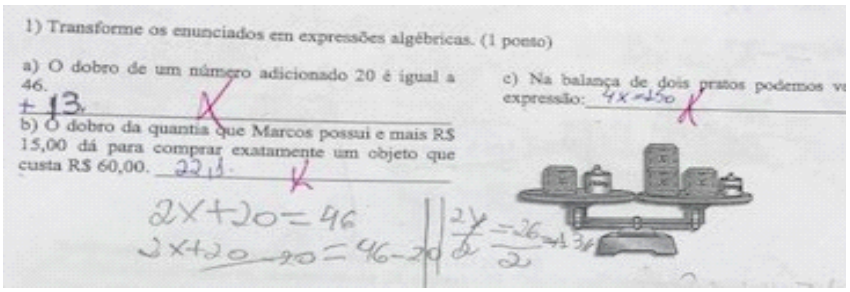
Figura 2: A manipulação das bolitas
Fonte: Elaborado pelos autores

Observamos a interação dos alunos com a balança na resolução da atividade, destacamos a ludicidade da atividade e como Vygotsky em seus estudos salienta, que estas atividades lúdicas atuam diretamente na zona de desenvolvimento proximal, a utilização de signos e símbolos no processo de ensino aprendizagem é de fundamental importante.

A manipulação dos objetos foi bastante proveitosa, pois os alunos puderam trocar conforme a professora ia colocando os desafios. Eles pensavam na resolução, testavam se ia dar certo e logo em seguida compartilhavam as respostas uma vez que estavam dispostos em duplas o que facilitou a interação entre si e com o próprio material. Ausubel (1980) sugere que a estrutura cognitiva deve ser instigada substantivamente por meio de materiais educativos e estratégias de ensino que auxiliem na conexão e na unificação de conceitos.

Ao iniciar a atividade com os alunos, foi proposto uma equação do primeiro grau, e fomos comentando os seus detalhes da equação e indagando como a resolveríamos, assim ao escreverem a equação “x+3 = 5”, com a utilização das bolitas eles notaram que se colocassem 5 bolitas de um lado e três do outro, que a balança estava em desequilíbrio e que consequentemente colocando mais duas bolitas no lado desigual a balança voltaria ao equilíbrio, assim o valor de X só poderia ser 2. Perceberam também que o apontador se comportava como o sinal de igual, que tem na equação do primeiro grau tem, e que então o valor que forma um lado da equação também será formado no outro, “5=5”.

Com o auxílio da balança foi proposto a resolução de algumas atividades. Por exemplo o exercício 1 da prova exigia a habilidade de transformação do enunciado para a linguagem matemática.


1) Transforme os enunciados em expressões algébricas. (1 ponto)

a) O dobro de um número adicionado 20 é igual a 46.
+ 13

b) O dobro da quantia que Marcos possui e mais R$ 15,00 dá para comprar exatamente um objeto que custa R$ 60,00.
22,1.

c) Na balança de dois pratos podemos ve... expressão: 4x=450

$2X+20=46$
$2x+20-20=46-20$

Figura 3: Questão 1das atividades
Fonte: Elaborado pelos autores

Um fato interessante demonstra na atividade, é que o aluno em questão não entendeu ou não leu a questão em 1, ele em vez de formular a expressão para o enunciado, fez apenas chutes do que poderia ser o valor correto da incógnita, um erro na leitura do enunciado.

O aluno deveria compreender por exemplo que na alternativa a, era somente traduzir para a linguagem matemática associando ao valor desconhecido uma incógnita:

O dobro de um número adicionado a 20 é igual a 46. $2x + 20 = 46$. Assim na alternativa b.
O dobro da quantia que Marcos possui e mais R$15~~,00~~ da para comprar exatamente um objeto que custa R$60~~,00~~.
2X + 15 = 60
Na alternativa c pediu-se para observar a balança e escrever a expressão, atividade semelhante a realizada na introdução do conteúdo com a balança de bolitas.

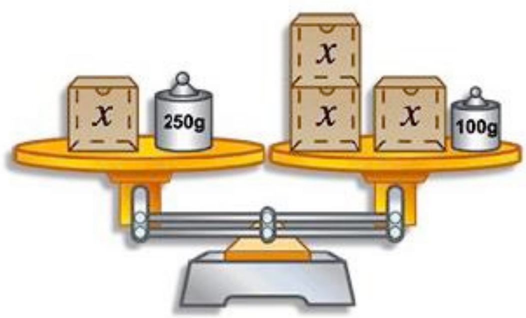


Figura 4: Balança ilustrativa para a atividade
Fonte: Elaborado pelos autores

Observando os pratos da balança, o aluno pode perceber que eles estão equilíbrio demonstrando igualdade, então era somente escrever a expressão:

$$X + 250 = 3X + 100.$$

No exercício 2 exigia-se a habilidade do aluno em fazer a tradução do enunciado e em resolver o problema, utilizando os campos conceituais na resolução. Um fato interessante, foi percebido na correção conjunta com os alunos, após a prova sobre o exercício dois, os alunos alegaram em sua grande maioria não ter consegui resolver os exercícios por causa do enunciado "eu e meu irmão", pois, não haviam trabalhado com enunciados no caderno que se utilizavam de nomes.

Por exemplo, no exercício 2 alternativa b:

Eu e meu irmão temos juntos 27 anos, mas a idade dele é o dobro da minha idade. Qual é a idade de cada um de nós?
Fazendo a tradução algébrica ficaria assim:
Eu: $X = 9$ anos
Irmão: $2X = 2.9 = 18$ anos
Como nós dois juntos temos 27 anos: $x + 2x = 27 \rightarrow 3x = 27 \rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{27}{3} \rightarrow x = 9$
Logo $X = 9$. Voltando na parte de cima.

Este exercício utilizou-se dos campos conceituais aditivos e multiplicativos, ele é um problema básico que pode ser resolvido utilizando a equação que exige uma correta tradução algébrica por parte do aluno.

Discussão

Os resultados indicam que as interações dinâmicas com a manipulação dos objetos foram significativas na assimilação dos conceitos abordados, pois os alunos puderam trocar conforme a professora ia propondo os desafios por meio das atividades matemáticas no experimento de ensino. Eles pensavam na resolução, testavam se ia dar certo e logo em seguida compartilhavam as respostas uma vez que estavam dispostos em duplas o que facilitou a interação entre si e com o próprio material. Ausubel (1980) sugere que a estrutura cognitiva deve ser instigada substantivamente por meio de materiais educativos e estratégias de ensino que auxiliem na conexão e na unificação de conceitos indicaram também que o processo de construção descrito na investigação proporciona uma fina descrição da maneira que os alunos realizavam as operações, por meio das operações concreto-abstrato do desenvolvimento cognitivo.

Considerações finais

Os resultados indicaram ganhos progressivos do nível abstração, no qual o processo de aquisição de conceitos que emergiram deste experimento bem como na abstração e complexidade na sistematização do conceito e equação proporcionando uma aprendizagem significativa no estudo de equação do primeiro grau. Por fim notou-se que com a ajuda do experimento os alunos conseguiram assimilar os conceitos da equação do primeiro grau, assim como suas estratégias de resolução.

No decorrer da pesquisa percebeu-se que o objetivo principal, a aprendizagem significativa de Equação do Primeiro Grau, foi alcançado, o que ficou evidente nos dados referente à prova integrada, prova mensal e na fala dos alunos construídos no decorrer de 24 aulas. Ao final, foi possível evidenciar que as práticas pedagógicas referentes a álgebra são muito importantes, uma vez que seu ensino começa no sétimo ano e, para alguns alunos, terminam no Ensino Médio ou na Faculdade, o exemplo da cantina da Escola foi pertinente aos alunos, proporcionando a eles uma concepção clara do uso das letras. Desta maneira, esse estudo sugere uma reflexão sobre a prática pedagógica do docente no ensino das Equações do Primeiro Grau, proporcionando lhes uma visão sobre a aprendizagem significativa e sua aplicabilidade em sala de aula.

Agradecimentos

A FUNDECT pelo financiamento do Projeto nº59/300.304/2016, CIAFEM 26150, ao qual se refere este artigo.

Referências bibliográficas

Ausubel, D.P. (1976). Psicología educativa: um punto de vista cognoscitivo. México, Editorial Trillas. Traducción al español de Roberto Helier D., de la primera edición de *Educational psychology*: a cognitive view.

Ausubel, D.P.; Hanesian, H.; Novak, J.D. (1980). *Psicologia educacional.* Rio de Janeiro: Editora Interamericana.

Jenske. G. (2011). A Teoria de Gérard Vergnaud como aporte para a superação da defasagem de aprendizagem de conteúdos básicos da matemática: um estudo de caso. Porto Alegre: PUCRS. *Dissertação* (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Moreira, M.A. (2002). *A teoria dos campos conceituais:* o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. Porto Alegre: Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p.7-29.

Moreira, M.A. e Masini, E.A.F.S. (2006). *Aprendizagem significativa:* a teoria de David Ausubel. São Paulo, Centauro. 2ª ed.

Moreira, M. A. (2013). Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa. In *Workshop sobre Mapeamento Conceitual*, realizado em São Paulo, Brasil, na USP/Leste. Publicado na série Textos de Apoio ao Professor de Física, Vol. 24, N. 6, do PPGEnFis/IF-UFRGS, Brasil.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (1982). *Addition and subtraction. A cognitive perspective.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. pp. 39-59.

Thiollent, M. (1994). *Metodologia da pesquisa-ação.* São Paulo: Cortez.

MOBILIZAÇÃO DO PENSAMENTO ESTATÍSTICO NO ENSINO EXPLORATÓRIO

MOBILIZATION OF STATISTICAL THINKING IN EXPLORATORY TEACHING

Everton José Goldoni Estevam, Maria Ivete Basniak
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR. (Brasil)
evertonjgestevam@gmail.com, basniak2000@yahoo.com.br

Resumo
Admitindo o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração como dimensões fundamentais do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), este trabalho tem por objetivo analisar o potencial do EEM para a mobilização do pensamento estatístico (PE) na Educação Básica. Para tanto, um quadro é elaborado, considerando aquelas dimensões e categorias específicas do PE, a partir da análise de gravações em vídeo de uma aula, envolvendo medidas de tendência central (em particular, a média) e realizada com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, no Brasil. Este quadro sugere o alinhamento entre as dimensões do EEM e as demandas evidenciadas para a mobilização do PE e pode orientar ações e análises assentes nestas temáticas.

Palavras-chave: educação estatística, média, educação básica

Abstract
Inquiry, reflection, communication, and collaboration are fundamental aspects in Exploratory Mathematics Teaching (EMT). For this reason, in this work we investigate the potential of EMT for the mobilization of statistical thinking (ST) in Basic Education. For this purpose, we organize a framework considering EMT's dimensions and ST's specific categories from the analysis of class video recordings, involving measures of central tendency (particularly mean), performed with an elementary school 9th grade, in Brazil. Such framework suggests the alignment between the aspects of EMT and the demands related to the mobilization of ST, which can guide actions and analyses based on these issues.

Key words: statistics education, mean, basic education

Introdução

O Ensino Exploratório de Matemática (EEM) tem ganhado proeminência nas pesquisas porque, em uma perspectiva alargada de *inquiry-based teaching* (Oliveira e Cyrino, 2013), admite como dimensões fundamentais o *inquiry* (cuja tradução gera dubiedades), a reflexão, a comunicação e a colaboração (Chapman e Heater, 2010). Isto porque considera-se que os processos de ensino e de aprendizagem devem ser ancorados na inquirição, construída e cultivada de forma dialógica e situada, integrando a ação com outros e a reflexão sobre o que se aprende (Wells, 2004).

Por outro lado, a mobilização do pensamento estatístico (PE), apesar de essencial ao ensino e à aprendizagem de Estatística, mostra-se desafiadora e complexa (Wild e Pfannkuch, 1999). Neste sentido, o presente trabalho tem por objetivo analisar o potencial do EEM para mobilização do PE na Educação Básica. Com isso, busca articular uma perspectiva promissora de ensino a uma expectativa de aprendizagem exigente, evidenciando modos de se efetivar e articular em sala de aula os apontamentos das pesquisas. Para tanto, o texto apresenta um quadro teórico sobre o EEM e o PE, seguido dos aspectos do contexto e metodológico. Os resultados constituem a seção seguinte e são assentes na análise de gravações em vídeo de uma aula de Estatística realizada com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental. Por fim, as conclusões apresentam um quadro que articula EEM e PE.

Ensino exploratório de matemática e pensamento estatístico

A abordagem exploratória pressupõe que a aprendizagem decorre do trabalho que os alunos realizam a partir do engajamento em tarefas desafiadoras, para as quais não possuem um método imediato de resolução (Canavarro, 2011). Com ações consonantes do professor, os alunos são conduzidos a comunicar suas ideias e (in) compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (Chapman e Heater, 2010). Deste modo, faz sentido admitir o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração como dimensões fundamentais do EEM.

Entendido como conceito pedagógico, o *inquiry* tem origem nos trabalhos de Dewey (1938), para quem compreende o processo que permite reconhecer e abordar uma situação desconhecida, considerada desafiadora ou intrigante, a partir daquilo que já é conhecido. Trata-se, portanto, de um ensino orientado para a utilização de experiências e conhecimentos anteriores para abordar e construir novos. A interação entre conhecimentos e desconhecimentos sugere, assim, hipóteses e inferências sobre a questão investigada e, deste modo, fomenta e cultiva atitude inquiridora no processo de aprendizagem.

A *reflexão* significa a chave para ir além da distinção entre o conhecer e o fazer (Dewey, 1938). A inquirição reflexiva salienta a premissa de que a ação não é suficiente para a aprendizagem, enquanto avanços cognitivos significativos são percebidos, quando as ações são admitidas como objetos de (re) pensamento (Wheatley, 1992). Enquanto o *inquiry* permite a abordagem inicial do problema ou da situação, para a(o) qual não se dispõe de uma estratégia imediata de resolução, gerando hipóteses e conjecturas, a *reflexão* permite questionar essas ideias iniciais a partir do (re)pensar constante sobre sua validade e adequabilidade, em processos de interação e negociação de significados.

O EEM é alicerçado em um processo em que os alunos interagem entre si e com o professor para construir e compartilhar significados, ressaltando outras duas dimensões: a *comunicação* e a *colaboração*. Guerreiro, Ferreira, Menezes e Martinho (2015, p. 286) sublinham a importância de se compreender a "comunicação assente na interação social". As diferentes interações sociais entre alunos e professor refletem *comunicações* de natureza diversa, sendo quatro as ações que o professor deve desenvolver em aula na perspectiva exploratória: explicar, questionar, ouvir e responder. Normas sociais e sociomatemáticas regem ações semelhantes, as quais buscam promover a interação entre os alunos, estabelecendo conexões e contrapontos sobre ideias e pensamentos emergentes no grupo. Trata-se, portanto, de considerar a inquirição dialógica como orientação do processo pedagógico, a qual está situada na atividade e no discurso que os participantes produzem juntos. Nesse sentido, a *colaboração* articula-se às demais dimensões para evidenciar o caráter interdependente das atividades e compreensões matemáticas. Ao mesmo tempo em que as atividades matemáticas individuais podem ser limitadas pela participação na constituição interativa de uma base compartilhada, essa base é interativamente constituída, à medida que se tenta coordenar a atividade matemática de cada um com a dos outros (Cobb, Yackel, e Wood, 1992). Admite-se, portanto, a sala de aula como um ambiente de interação entre os alunos, entre o professor e os alunos, e entre estes e o conhecimento matemático, na busca de um entendimento comum a partir de seus conhecimentos e experiências prévias. Por conseguinte, o significado do conhecimento matemático é partilhado e assumido pelos intervenientes quando estes concordam com a validade dos referentes, dos exemplos, das analogias e das conexões apresentadas pelos interlocutores (Bishop e Goffree, 1986).

Para tanto, propõe-se a dinâmica de aulas em fases, as quais são associadas às práticas componentes da ação do professor, destacadas por Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), nomeadamente: i) proposição e apresentação da tarefa (AT), apoiada na prática de propor a tarefa aos alunos; ii) desenvolvimento da tarefa (DT), associada à prática de monitorar a resolução dos alunos, apoiá-los e identificar resoluções interessantes para discussão com toda a turma; iii) discussão coletiva da tarefa (DC), relacionada à apresentação das resoluções selecionadas, contraposição de diferentes ideias e estratégias, bem como discussão de suas potencialidades e limitações; e iv) sistematização das aprendizagens (SA), com a formalização das ideias discutidas no decorrer da aula, aproximando-as daquelas prescritas nos currículos. Stein et al. (2008), assim como Canavarro (2011), salientam ainda que a efetivação dessas práticas exige, necessariamente, um planejamento, o qual envolve a prática de *antecipar* as ações de professor e alunos no desenvolver das atividades previstas para a aula.

No que se refere ao pensamento estatístico (PE), Wild e Pfannkuch (1999) propõem uma estrutura que se relaciona com a forma como uma pessoa atua e o que pensa durante o curso de uma investigação estatística. Ela pressupõe o envolvimento em um processo investigativo que perpassa por quatro dimensões: ciclo investigativo, tipos de pensamento, ciclo interrogativo e dispositivos. O ciclo investigativo remete à ideia de o ensino de Estatística aproximar-se do modelo científico investigativo pautado no esquema Plano, Problema, Dados, Análise e Conclusões - PPDAC. Quanto aos pensamentos envolvidos nesse modelo, os autores citam categorias que vão dos pensamentos gerais - estratégico, explicativo, modelar e procedimental - aos específicos, particularmente relevantes para este trabalho: reconhecimento da necessidade dos dados, transnumeração, onipresença da variação, modelos estatísticos, conhecimentos estatísticos, do contexto e de síntese.

O reconhecimento da necessidade dos dados permite compreender que apenas as experiências vivenciadas não são suficientes para a tomada de decisão e revela, deste modo, a importância da coleta e da análise adequada dos dados. A transnumeração possibilita às pessoas raciocinar sobre representações de dados, compreendendo-os e interpretando-os.

Destarte, alude a condições para determinar, dentre representações diversas, a mais adequada aos dados e ao contexto que circunda a situação. A percepção da variabilidade envolve a capacidade de buscar e descrever padrões na variação, interpretando-os em contextos determinados, com vistas ao estabelecimento de estratégias para a investigação. O raciocínio com modelos considera que todo pensamento gera modelos, de representações e procedimentos, que não seguem um padrão pré-determinado, mas são definidos pelo estudante. Por fim, o conhecimento do contexto e o conhecimento estatístico admitem que os dados devem ser observados considerando os conceitos estatísticos, porém, com consciência de que pertencem a um contexto, o qual permite sua significação.

As duas últimas dimensões, a do ciclo interrogativo e os dispositivos, retratam as ações necessárias à análise de dados, visando à formação de uma postura crítica em meio ao processo de uma investigação estatística. Envolvem, portanto, a definição de hipóteses para possíveis causas, as origens delas, a interpretação compatível e, por fim, o confronto dos resultados.

Aspectos metodológicos e de contexto

O trabalho consiste na análise de gravações em vídeo de uma aula (que consistiu em duas aulas conjugadas, de cinquenta minutos cada) realizada com uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental, composta por 32 alunos com idades entre 13 e 17 anos, de uma escola pública, no Brasil. Para tanto, foi utilizada uma tarefa envolvendo as medidas de tendência central, em particular a média aritmética, a partir da distribuição de brigadeiros entre um grupo de colegas (Figura 1). Em síntese, considerando que em aulas anteriores os alunos haviam estudado as medidas de tendência central (média, moda e mediana), seus significados e processos de cálculo, a aula provocou os alunos a aprofundarem o significado procedimental da média, bem como compreendê-la como medida que torna a distribuição equitativa. Os itens b e c envolviam propriedades particulares associadas a influência do valor nulo no cálculo da média, bem como o fato de a média estar compreendida necessariamente entre os limites superior e inferior da distribuição de dados. A aula foi iniciada com a leitura da tarefa por uma das alunas, seguida de sua resolução em grupos compostos de três ou quatro alunos. Três destes grupos foram selecionados para a fase de DC, cujas apresentações foram sequenciadas considerando: i) uma resolução que não explicitava o conceito de média e utilizava cálculo no item c; ii) uma que articulava o conceito de média aos cálculos e utilizava o item b para responder o item c; e iii) que explicitava a ideia de distribuição equitativa relacionada à media. Na SA o professor elaborou um pictograma na lousa para auxiliar na sistematização dos sois significados e das duas propriedades da média, referidos anteriormente (ver Estevam, 2016).

Cinco colegas de turma combinaram de levar brigadeiros para o recreio do dia seguinte. Paulo levou 3, Aline levou 6, André levou 8, Juliana 3 e Jonas não levou brigadeiros.
a) Como repartir os brigadeiros de maneira que cada um dos colegas receba a mesma quantidade?
b) Se Jonas fosse excluído do grupo por não ter levado nenhum brigadeiro, haveria alteração na quantidade de brigadeiros recebida por cada colega do grupo? Explique a sua resposta utilizando cálculos e desenhos.
c) Em outro dia eles resolveram levar brigadeiros novamente. Paulo levou 3, Aline levou 4, André levou 1, Juliana 3 e Jonas levou 4. Alguém afirmou que a quantidade média de brigadeiros recebida no grupo era maior que 4. Sem realizar o cálculo da Média, explique se isso é possível.

Figura 1. Tarefa “Brigadeiros”, explorada na aula analisada

O material analisado abarca as produções escritas dos alunos na resolução, as transcrições de videogravações das aulas e anotações do caderno de campo do professor, o qual acumulou a função de pesquisador (primeiro autor).

A busca por elementos que apontassem as contribuições do EEM para a mobilização do PE consistiu em assistir aos vídeos das aulas, fracionados em episódios, identificando elementos relacionados às quatro dimensões fundamentais do EEM. De posse deste quadro, cada elemento que o compunha foi analisado, com o intuito a identificar evidências de relações com as componentes do pensamento específico de estatística (Wild e Pfannkuch, 1999). Dessa forma, a seção de resultados e análises aponta os aspectos relacionados a cada uma das quatro dimensões do EEM em relação aos componentes específicos do PE, a partir da análise qualitativa e interpretativa dos elementos e episódios identificados inicialmente.

Resultados e análises

O *inquiry*, compreendido como processo que permite lidar com o desconhecido a partir de experiências e conhecimentos anteriores, fomenta atitude investigativa dos alunos, que se evidenciou em diversos momentos na aula analisada. Considerar o *inquiry* como orientador da prática pedagógica promoveu que os alunos questionassem, a si próprios e uns aos outros, por exemplo, sobre os dados existentes na situação (brigadeiros e colegas) em relação às questões a serem respondidas, pensando as diferentes representações (e mudanças nessas representações) que poderiam auxiliar na resolução da tarefa. Um exemplo desta atitude se evidenciou quando, na fase de DC, um dos grupos selecionados resolveu o item *c* da tarefa a partir do cálculo da média, desencadeando o questionamento por outro aluno da turma, conforme episódio a seguir:

Professor:	Porque, pelo que entendi, você está dizendo que a média é três, não é isso?
Alumno 1:	Isso!
Professor:	E como é que vocês chegaram nesta três aí?
Professor	Vai lá... Explica para gente... Aluno 1, explica pra gente!
Alumno 2:	(Interpõe-se) Aluno 1, você pegou todos os brigadeiros...
Professor	Pessoal, vamos ouvir.
Aluno 2:	E dividiu pela quantidade de pessoas.... Daí deu três para cada um. Não é isso?
Professor:	Então, qual era o problema disso, Aluno 2?
Alumno 2:	Como assim problema?
Professor:	Você está falando.... Teve um problema na resolução deles. A situação pedia para explicar sem fazer o cálculo da média... Daí vocês (o grupo que apresentou a resolução) explicaram, mas fizeram o cálculo da média.
Alumno 2:	Está errado.
Professor:	Não está errado, só está resolvido diferente daquilo que foi pedido.

Ao mesmo tempo em que evidencia uma preocupação em atender ao que foi solicitado na tarefa, o episódio problematiza a identificação da natureza dos erros cometidos, os quais nem sempre são conceituais. O grupo (assim como outros grupos da sala) utilizou uma estratégia que feria as condições (intencionais) estabelecidas na tarefa. A identificação por outro colega evidencia a atenção da turma às apresentações dos grupos, já que para além de apresentar diferentes resoluções, o foco deste momento de aula consiste em contrapô-las, diferenciá-las, relacioná-las e discutir seu potencial, limitações e possíveis equívocos. Neste sentido, o *inquiry* promove a busca por fundamentos e explicações para as resoluções durante todas as fases da aula, bem como favorece a colaboração, a reflexão e a comunicação. Outros aspectos relacionados ao *inquiry* e a dimensões do PE, emergentes na aula, estão sintetizados no Quadro 1:

Necessidade dos dados	**Transnumeração**	**Variação**	**Raciocínio com modelos**	**Estatística e contexto**
Professor salienta aos alunos os dados existentes na situação e as questões a serem respondidas (AT)	*Professor destaca que a estratégia de resolução do item c não deve recorrer a cálculos (AT)* *Alunos discutem e articulam diferentes representações para as ideias relacionadas à média e suas propriedades (DT)*	*Alunos identificam nas situações presentes na tarefa o que varia: quantidade de brigadeiros ou de pessoas, e as influências dessas variações na média (DT)*	*Alunos pensam e fundamental a medida de tendência central mais apropriada para lidar com a situação (DT)*	*Alunos relacionam procedimentos de cálculos das medidas de tendência central ao contexto da situação (DT e DC)*

Quadro 1. Aspectos relacionados ao *inquiry* emergentes na aula associados ao PE

Aspectos *reflexivos* foram evidenciados em diversos momentos da aula, sobressaindo a fase de DT e DC. Um exemplo da fase de DT está expresso no episódio a seguir, que mostra a interação entre professor e alunos de um grupo, na busca por estabelecer relações entre os registros utilizados e as compreensões diversas dos alunos do grupo:

Professor:	Explica, para mim, como é que você está pensando?
Aluno 3:	Isso aqui são as pessoas (desenhos de bonecos), cinco, daí cada um tem quatro brigadeiros. Aí o Jonas saiu, e cada um ficou com cinco, sobrou quatro.
Professor:	Cada um ficou com cinco. E por que cada um ficou com cinco?
Aluno 3:	Porque o Jonas saiu!
Professor:	Mas você consegue explicar, como é que o quatro "virou cinco"?
Aluno 3:	Sim, porque se vinte dividido por cinco...
Aluno 4:	O Jonas saiu e ele tinha quatro, daí deu um para cada um.
Aluno 5:	Você adiciona cada um desse quatro para cada um do grupo.
Aluno 3:	Tem vinte brigadeiros, daí tinha cinco pessoas, você divide por 5 é quatro.... Aí inverteu. Vinte por quatro dá cinco.
Professor:	Mas olha, ouve o que os meninos estão falando... Repete?
Aluno 4:	O Jonas tinha quatro, como cada um do grupo. Se o Jonas fosse excluído, esse quatro seria distribuído, um para cada um!
Aluno 3:	É isso que eu te falei velho!
Aluno 4:	E aí eles ficariam com cinco.
Aluno 3:	É a mesma coisa, mas diferente. Eu só estou pensando na divisão, né. Vocês estão distribuindo os brigadeiros do Jonas. Entendi.

O episódio mostra que a dimensão *reflexiva* permite articular diferentes ideias, questionando inclusive as soluções corretas, na busca por compreender e articular processos resolutivos. Embora o Aluno 3 tivesse apresentado resultados coerentes para o item *b* da tarefa, sua solução pautava-se apenas no quociente envolvido nas situações representadas nos itens *a* e *b* da tarefa, e as representações pictóricas era essencialmente ilustrativas. Os Alunos 4 e 5, por sua vez, apresentavam sua estratégia assente na (re)distribuição dos brigadeiros que sobravam com a saída de Jonas aos demais colegas da turma, evidenciando o princípio equitativo. Suas explicações auxiliam o Aluno 3 a repensar e ressignificar sua resolução. Outras evidências relacionando processos reflexivos emergente na aula estão sintetizadas no Quadro 2.

Necessidade dos dados	Transnumeração	Variação	Raciocínio com modelos	Estatística e contexto
Alunos questionam resolução do item c com cálculos, diferente do que foi solicitado. Alunos limitam a ideia à situação ao invés de buscar também outras situações semelhantes (DC)	*Alunos explicam, articulando diferentes representações (desenhos, aritmética, gráficos, álgebra, etc.) como a média 4 do item a se altera para 5, no item b (DT)*	*Professor questionar se as ideias e representações apresentadas são válidas para outras situações semelhantes (DC)*	*Alunos relacionam as três medidas de tendência central, contrapondo e repensando seus significados. Diferenciam modelos procedimentais de significados (DT e DC)*	*Professor questiona o significado do valor 4 (média) encontrado no item a da tarefa e os alunos buscam elementos da situação para explicar que cada colega receberia 4 brigadeiros (DT)*

Quadro 2. Aspectos relacionados à reflexão emergentes na aula associados ao PE

Estes aspectos sobressaíram quando os alunos buscavam relacionar suas representações, estratégias e modelos aos conceitos e procedimentos, com vistas a significar, por exemplo, o procedimento de cálculo da média e suas propriedades, considerando inclusive a variabilidade e, suspendendo, por algum momento, suas crenças e (des) conhecimentos prévios. Assim, provocações que intentem evidenciar outras situações semelhantes, com níveis mais complexos, podem favorecer a contraposição a estes conhecimentos e experiências e, articuladas às demais dimensões do EEM, favorecer o desenvolvimento do PE.

A *comunicação* mostra-se particularmente relevante para o ensino de Estatística, especialmente quando advogamos que os conceitos e procedimentos estatísticos envolvem representações e constructos matemáticos sem, contudo, serem limitados a eles. Para tanto, torna-se fundamental a inquirição dialógica na busca por relacionar diferentes representações ou interpor outras com vistas à compreensão das ideias em questão. O pictograma da Figura 1 significa uma dessas representações interpostas pelo professor, na fase de SA, para elucidar a média como medida que torna a distribuição equitativa.

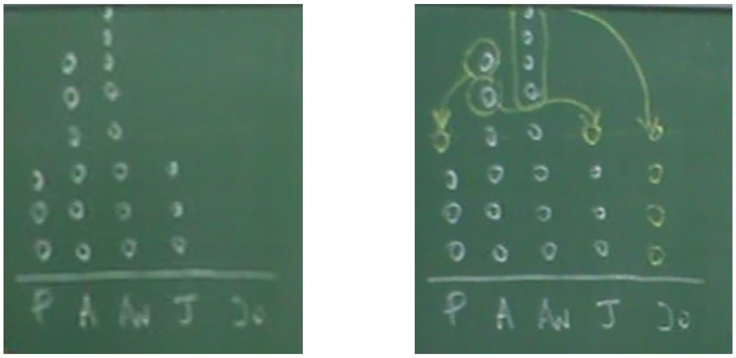


Figura 2. Pictograma da distribuição de brigadeiros, interposto pelo professor na SA

A representação permitiu estabelecer uma discussão com os alunos para entender a média para além de seus algoritmos de cálculo, articulando representações diversas e o contexto da situação. Isto possibilitou, inclusive, a problematização de outras situações semelhantes, a partir de interposições como: *E se fossem 30 brigadeiros?... E se fossem 100?... E 1000?* Ou, *e se fossem 10 colegas?... ou 50? Ou 300?* O Quadro 3 sintetiza os aspectos comunicativos emergentes na aula em relação às componentes do PE.

Necessidade dos dados	Transnu-meração	Variação	Raciocínio com modelos	Estatística e contexto
Alunos negociam no grupo possibilidades para abordar os itens da tarefa (DT)	*Professor elabora um pictograma para representar a ideia de média como equidade e o relaciona às representações dos alunos (SA)*	*Professor e alunos buscam identificar a diferença entre reconhecer o 4 como limite superior da distribuição (variável) ou considerar o 5 como valor superior ao da média (determinismo). (DC)*	*Professor e alunos negociam a compreensão do fundamento para utilizar o 5 como valor para limitar a média. O professor pensando como o limite superior da distribuição, e a aluna pensando no valor maior do que 4, a média indicada na tarefa (DC)*	*Alunos explicam e argumentam uns com os outros sobre as compreensões e justificativas que sustentam suas resoluções (DC) Professor questiona o significado de representações e procedimentos em relação à situação. Alunos negociam esclarecimentos (DT)*

Quadro 3. Aspectos relacionados à comunicação emergentes na aula associados ao PE

Inquirir e identificar a relação entre os dados e a situação, bem como relacionar diferentes representações e interpor representações não emergentes nas resoluções dos alunos, mas com potencial para a compreensão da ideia em questão, são aspectos fundamentais para que a ação pedagógica tenha como foco o aluno e a aprendizagem, em detrimento do ensino. Dessa forma, a comunicação é fundamental para a negociação de significados, elaboração de conjecturas, explicações, e fundamentos para as estratégias empregadas, questionando e complementando ideias uns dos outros e as relacionando ao contexto da situação.

Por fim, todas as ações aqui identificadas portam, implícita ou explicitamente, a dimensão colaborativa. A síntese dos aspectos emergentes no decurso da aula, complementares aos já discutidos, constitui o Quadro 4.

Necessidade dos dados	Transnumeração	Variação	Raciocínio com modelos	Estatística e contexto
Alunos questionam o que é para ser feito e o professor retoma a tarefa chamando a atenção para os elementos nela presentes e o que é solicitado em cada item (DT)	*Professor questiona o que há de semelhante e de diferente nas resoluções dos três grupos que apresentaram suas resoluções, e conjuntamente com os alunos, busca articulá-las e diferenciá-las (DC)*	*Alunos discordam de abordagens e buscam negociar a estratégia a ser utilizada. Professor provoca-lhes a pensar outras situações, considerando a variação dos dados (DT e DC)*	*Alunos apresentam explicações diferentes para uma mesma representação. Professor provoca interação para que entendam as ideias uns dos outros e verifiquem como resolver a questão (DT)*	*Professor questiona o significado dos valores e das representações utilizadas em relação à situação. Alunos negociam "o que refere o que" e elaboram ajustes e esclarecimentos (DT)*

Quadro 4. Aspectos relacionados à colaboração emergentes na aula associados ao PE

Articulando estas diferentes dimensões, podemos sintetizar que, com relação à *necessidade dos dados*, o *inquiry* provoca os alunos a pensar sobre os dados presentes na situação, cuja dimensão reflexiva possibilita identificar e problematizar crenças relacionadas a isso. A comunicação se evidencia em discussões e argumentações sobre o processo de obtenção dos dados e sobre termos presentes na situação, os quais são coletivamente negociados. A *transnumeração* é favorecida quando os alunos são provocados a pensar sobre as (mudanças nas) representações que auxiliam na resolução da tarefa e, por meio de processos reflexivos, fundamentam ou justificam suas estratégias e procedimentos. Especialmente na fase de discussão coletiva, discutem e contrapõem essas representações diversas, cuja negociação permite evidenciar potenciais e limitações e as necessidades de complementações ou ajustes. No que se refere à *variação*, a atitude inquiridora e reflexiva promove o reconhecimento da variabilidade como onipresente em processos estatísticos (em detrimento de restringi-la à situação em análise), cuja compreensão das diferenças entre situações determinísticas e incertas promovem o desenvolvimento de linguagem e argumentação estatísticas coerentes.

Para tanto, é fundamental o papel do professor e dos colegas de questionar e de apontar as implicações desta (des) consideração. O *raciocínio com modelos* é fomentado pela busca por compreender o que deve ser realizado e os modelos que podem auxiliar nisso, a partir dos dados e da situação apresentada, relacionando o que é solicitado a outros conhecimentos prévios. As ações comunicativas de explicar, fundamentar, argumentar e clarificar modelos mostram-se fundamentais, cuja contestação, complementação ou corroboração do outro – seja ele aluno ou professor – permitem compreensões significativas. Por fim, a *integração da estatística ao contexto* se revela na busca por compreender e explicar as influências da situação para o processo de resolução e, igualmente, a plausibilidade das soluções para o contexto da situação. Nesse sentido, revelam-se e negociam-se normas sociais e sociomatemáticas que relacionam o ensino de estatística e a situação, as quais são fundamentais para validação dos significados e conclusões negociados coletivamente.

A análise transversal destes resultados ofereceu elementos para estruturar um quadro ampliado de referência para aulas assentes no EEM e que visem à mobilização do PE, o qual se esteia nas dimensões fundamentais do primeiro e categorias específicas de pensamento que alicerçam o segundo. Este quadro é, portanto, apresentado na seção de conclusões que a seguir.

Conclusões

O quadro elaborado sugere contribuições proeminentes do EEM ao PE, porque a dimensões fundamentais do EEM - o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração – mostram-se igualmente fundamentais e alinhadas àquelas demandadas para mobilização dos pensamentos específicos relacionados ao desenvolvimento do PE, particularmente na Educação Básica. Essas ideias são sistematizadas no Quadro 5 que, com base na experiência analisada, busca apresentar aspectos gerais que relacionam as dimensões do EEM às categorias específicas do PE.

		Categorias do Pensamento Estatístico				
		Necessidade dos dados	*Transnumeração*	*Variação*	*Raciocínio com modelos*	*Estatística e contexto*
Dimensões do Ensino Exploratório de Matemática	Inquiry	Promove a compreensão acerca dos dados presentes na situação e das questões a serem respondidas	Salienta a possibilidade de diferentes representações e seus fundamentos	Favorece a compreensão da variação entre as grandezas envolvidas e ao abordar a situação de forma determinística	Permite relembrar modelos já conhecidos, bem como seus fundamentos	Motiva relações entre procedimentos e conceitos já conhecidos e a situação em questão, na busca por evidenciar possibilidades e equívocos
	Reflexão	Desperta relações entre estratégias, dados e questões envolvidas na situação e outras mais amplias, com vista a conferir-lhes consistência ou provocar a identificação de limitações e equívocos	Favorece relações entre cálculos e procedimentos matemáticos e diferentes representações, buscando sublinhar as relações e diferenças entre representações e significados	Provoca a transcendência de ideias determinísticas para outras que consideram a variabilidade e a incerteza	Permite contrapor, relacionar e (re)pensar modelos procedimentais e significados de conceitos e ideias estatísticas	Significa valores e procedimentos em relação ao contexto da situação e busca generalizar a ideia para outras situações semelhantes e/ou mais amplas
	Comunicação	Incentiva a inquirir e identificar relações entre os dados e a situação presente na tarefa	Possibilita relacionar diferentes representações e interpor representações não emergentes, com potencial para a compreensão da ideia em questão	Estimula a negociação de significados para termos desconhecidos ou incomuns e a busca por compreender se e como as resoluções contemplam a variabilidade	Promove explicações sobre os fundamentos para o modelo utilizado, questionando e complementand o ideias uns dos outros	Contribui para relacionar ideias e termos do contexto da situação com ideias, procedimentos e termos formais da Estatística
	Colaboração	Estimula a contraposição e o estabelecimento de relações entre diferentes interpretações e abordagens dos dados	Favorece a contraposição e o estabelecimento de relações entre diferentes representações	Contrapõe e relaciona abordagens que consideram e que desconsideram a variabilidade	Favorece a negociação de explicações para algoritmos e representações utilizadas	Promove discussões sobre diferentes resoluções e o contexto e os condicionantes da situação

Quadro 5. Mobilização do Pensamento Estatístico em práticas assentes no EEM

Neste sentido, ao mesmo tempo em que sugere o EEM como perspectiva promissora ao ensino de Estatística, o Quadro 5 pode orientar práticas que busquem articular estas duas perspectivas, bem como orientar investigações no campo dessa temática. A continuidade dos estudos orientados por estes elementos, e envolvendo outras experiências e contextos diversos, pode validar esta tese e, portanto, justifica nossa intenção de trabalhos futuros.

Agradecimento

Agradecemos à Fundação Araucária e à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UNESPAR pelo financiamento para realização da pesquisa.

Referências

Bishop, A., e Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson, e M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Chapman, O., e Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(6), 445-458.

Cobb, P., Yackel, E.; Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), 99-122.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry.* New York: Henry Holt and Company.

Estevam, E. J. G. (2016). Desafios e possibilidades em uma aula de Estatística na perspectiva do Ensino Exploratório. In M. C. C. T. Cyrino (Ed.), *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática:* elaboração e perspectivas (pp. 173-202). Londrina, Brasil: EDUEL.

Guerreiro, A., Ferreira, R. A. T., Menezes, L., e Martinho, M. H. (2015). Comunicação na sala de aula: a perspectiva do ensino exploratório de matemática. *Zetetiké*, 23(2), 279-295.

Oliveira, H., e Cyrino, M. (2013). Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: one study with prospective mathematics teachers. *SISYPHUS – Journal of Education, 1*(3), 214-245.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., e Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Wells, G. (2004). *Dialogic inquiry:* Towards a sociocultural practice and theory of education. Cambridge: Cambridge University Press.

Wheatley, G. H. (1992). *The role of reflection in mathematics learning*. Educational Studies in Mathematics, v. 23, p. 529-541.

Wild, C., e Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

ANÁLISE DO PERCURSO DE UM ESTUDO E PESQUISA (PEP) PILOTO EM GRANDEZAS E MEDIDAS EM UMA ESCOLA DE ENSINO MÉDIO EM SÃO PAULO – BRASIL

ANALYSIS OF A PILOT "STUDY AND RESEARCH PATH" (SRP) ABOUT QUANTITIES AND MEASURES AT A MIDDLE SCHOOL IN SÃO PAULO – BRAZIL

José Valério Gomes da Silva, Marianna Bosch i Casabò, Marlene Alves Dias
Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco (Brasil), Universitat Ramon Llull (España), Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
valerio.gomes@yahoo.com.br, marianna.bosch@iqs.edu, maralvesdias@gmail.com

Resumo
Apresentamos neste artigo um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) piloto implementado para identificar as possibilidades de desenvolvimento dessa metodologia com estudantes do Ensino Médio (15 - 17 anos) de cursos técnicos. O referencial teórico foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD). A metodologia é da pesquisa qualitativa realizada através da análise da intervenção por meio de um PEP. Os resultados mostram que os estudantes ficaram motivados, o que ampliou a mesogênese, modificou na topogênese, mas indicou problemas com a cronogênese, pois seriam necessárias mais sessões para os próprios estudantes tentarem sanar suas dificuldades. O Modelo Epistemológico de Referência (MER) desenvolvido como suporte teórico para a implementação, observação e análise da evolução e resultados do PEP auxiliou também na identificação das intervenções necessárias realizadas pelo pesquisador durante as seis sessões do PEP.

Palavras-chave: PEP, TAD, mesogênese, topogênese, cronogênese

Abstract
In this article we present a pilot Study and Research Path (SRP) implemented to identify the possibilities of developing this methodology with high school students (15 to 17 years) of technical courses. The theoretical reference was the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). The methodology is a qualitative research carried out through the analysis of the intervention through an SRP. The results show that students were motivated, which increased the mesogenesis, modified the topogenesis, but indicated problems with the chronogenesis, as more sessions would be needed for students to try to heal their difficulties. The Epistemological Model of Reference (EMR) developed as a theoretical support for the implementation, observation and analysis of the evolution and results of the SRP also helped to identify the necessary interventions carried out by the researcher during the six sessions of the SRP.

Key words: SRP, ATD, mesogenesis, topogenesis, chronogenesis

Introdução e problemática

A presença da matemática na escola, segundo Chevallard (1992), é consequência de sua utilização na sociedade, ou seja, a matemática não é algo feito exclusivamente para ser ensinado na escola. Seu valor social não se reduz a um mero valor escolar e o ensino da matemática não deve ser encarado como um fim em si mesmo. Cada sujeito deve saber um pouco de matemática para resolver ou, simplesmente, reconhecer os problemas com os quais se depara na convivência social. Considerando esta matemática numa dimensão ampla, e após o estudo das praxeologias existentes sobre as noções de área e perímetro em livros didáticos brasileiros (Silva, 2011) para o ensino Fundamental (alunos entre 11- 14 anos), e em função dos resultados encontrados, nos pareceu importante saber como os estudantes dos cursos de ensino médio e técnicos utilizam esses conhecimentos e quais as dificuldades que encontram. Diante do exposto será que é possível aplicar um percurso de estudo e pesquisa (PEP) relacionado com as noções de área e perímetro, construídas a partir das necessidades do campo da construção civil, como situação motivadora para o desenvolvimento dessas noções com estudantes do ensino médio?

Este estudo trata-se de uma experimentação piloto do PEP desenvolvido na tese de doutorado finalizada em 2016. O objetivo da pesquisa foi identificar como os estudantes do ensino médio e do ensino técnico (15 – 17 anos) utilizavam as noções de área e perímetro nesses níveis da Educação Básica. Para este artigo analisamos um percurso de estudo pesquisa (PEP), desenvolvido com um grupo de estudantes do 1º ano do ensino médio (14 – 15 anos), ou seja, estudantes que terminaram o ensino fundamental (6 – 14 anos) e iniciam o ensino médio.

Revisão de literatura

Ressaltamos que dentre as pesquisas mais significativas que discute as grandezas e as medidas está a de Douady & Perrin-Glorian (1989) cujo objetivo da investigação foi elaborar um processo de aprendizagem da noção de área, relacionando-a com o lugar ocupado por uma superfície no plano. As autoras identificaram três dificuldades recorrentes, por elas apresentadas, no desenvolvimento de tarefas que envolvem as noções de área e perímetro. Uma das dificuldades observada pelas autoras está associada às tarefas em que é preciso ladrilhar superfícies, cuja forma difere do quadrado, por exemplo, um triângulo, as pesquisadoras apontam a dificuldade de expressar a área dessas superfícies, em particular do triângulo, em cm^2, justificando que esta dificuldade está associada à impossibilidade de cobrir superfícies não quadradas com uma unidade quadrada.

Ao identificar tais erros e dificuldades, Douady e Perrin-Glorian (1989) os classificam em duas concepções: uma concepção geométrica, na qual o aluno associa a área à superfície de uma figura plana e uma concepção numérica, na qual o estudante associa a área ou o perímetro ao número resultante dos cálculos.

Em função destas duas concepções, as pesquisadoras concluíram que os estudantes, em geral, utilizam, seja o quadro geométrico, seja o quadro numérico, não considerando a relação entre estes dois quadros, ou seja, não são capazes de efetuar a articulação entre estes dois quadros. Além disso, a identificação dos erros e dificuldades dos alunos e a classificação desses enquanto concepções geométrica e numérica auxiliaram as pesquisadoras a formularem duas hipóteses didáticas que destacamos a seguir. (1) O desenvolvimento no ensino da noção de área enquanto grandeza permite que os alunos estabeleçam a relação necessária entre os quadros geométrico e numérico. (2) Uma identificação muito precoce entre grandezas e números favorece o amálgama das diferentes grandezas. A partir dessas hipóteses, Douady e Perrin-Glorian (1989) desenvolveram uma engenharia didática que foi experimentada em duas turmas da escola elementar da França.

A partir das observações anteriores, Perrin-Glorian (1992) introduz a problemática matemática da sua pesquisa, apresentando suas opções. Assim, para a pesquisadora, a noção de superfície corresponde a uma parte do plano, mesmo que na sequência será necessário se referir a outros usos deste termo. Ainda na ótica de Perrin-Glorian

(1992), o problema matemático de interesse para a pesquisa é a *comparação do lugar ocupado pelas superfícies no plano, e como facilitador dessa comparação a possibilidade de associar a uma superfície um número que permita compreender o lugar por ela ocupado de forma a substituir a comparação das superfícies pelos números.* Assim, o problema matemático se traduz pela definição de *uma função medida (μ) do conjunto das superfícies planas em IR+* (para o qual é preciso acrescentar um valor infinito quando não nos limitamos a superfícies limitadas), que verifica "boas propriedades" da aditividade e de invariância quando do deslocamento.

Fundamentação teórica

O referencial teórico da pesquisa foi a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e seus colaboradores. Em particular, foi explorada a noção de Modelo Epistemológico de Referência (MER), segundo os estudos de Bosch & Gascón (2010), para fundamentar o PEP. Segundo os pesquisadores, o MER terá que partir de um modelo de atividade que precisa ser explicitado e interpretado para, a partir dele, formular um problema didático que será transformado num problema científico. Na ação de explicitação desse modelo surgirá a dimensão epistemológica do problema, para, em seguida, aparecer a dimensão básica do problema didático que finalmente se materializará no MER. Segundo Lucas (2015) o objetivo de um MER é analisar e interpretar a justificativa "oficial" para a eleição de determinados conteúdos no ensino.

O modelo dessa pesquisa, sobre as grandezas área, perímetro e suas relações, foi inspirado no MER de Sierra (2006) e na organização conceitual de Douady & Perrin-Glorian (1989). Desse modo, apresentamos (Figura 1) o MER da pesquisa, construído por Silva (2016).

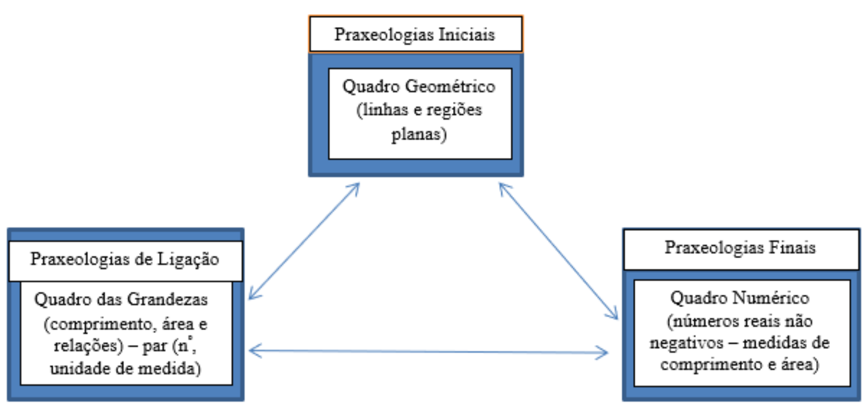


***Figura 1*: MER da pesquisa.**

O MER em torno das grandezas geométricas área, perímetro e suas relações, nos guiaram na definição da questão inicial e das questões e respostas (dialética pergunta resposta) que poderiam surgir durante a experimentação do PEP, que foi arquitetado para ser desenvolvido com estudantes do Ensino Médio.

Desse modo, o PEP foi fundamentado levando-se em conta as pesquisas de Chevallard (2009) e Bosch (2010). O PEP é uma nova engenharia didática introduzida por Chevallard como "didática da investigação codisciplinar", que é esquematizado pelo autor a partir da noção de sistema didático $S(X;\ Y;$□□$)$, no qual a instância estudantes será indicada por X , a instância ajuda ao estudo será indicada por Y, e o desafio didático ♥ é a obra designada para ser estudada (por *X*) e a fazer estudar (por *Y*). No PEP o desafio didático □é substituído por uma questão geradora Q_0, formando assim o sistema didático $S(X;\ Y;\ Q_0)$ para o qual se procura uma resposta $R^{\square}$.

O pesquisador explica que, para desenvolver tal investigação, é preciso utilizar um conjunto de ferramentas praxeológicas originárias de diversas disciplinas, ou seja, engajar-se em tal investigação implica trabalhar em um percurso de estudo e de pesquisa (PEP) motivado por esta mesma investigação.

Assim, para elaborar $R^{\square}$, é conveniente juntar e organizar um meio de trabalho *M*, reunindo um conjunto de recursos antigos e novos, que serão empregados por *X*. Entre esses recursos, alguns serão repostas “prontas” para Q_0, validadas por determinada instituição e que são indicadas por: $R^{\lozenge}$ (« *R* punção»), uma vez que essas respostas podem ter recebido um “rótulo” institucional. A análise dessas respostas fornecerá materiais para a construção da resposta *R*, indicada $R^{\heartsuit}$ (*R* coração). Outras respostas correspondem às obras *O* da cultura, qualquer que seja o “sentido” cultural, que fornecerão as ferramentas de análise das respostas $R^{\lozenge}$ e da construção da resposta esperada $R^{\square}$. As obras *O* fazem parte das diversas disciplinas estabelecidas, mesmo de algumas que se revelam como não reconhecidas, porque nasceram ou são culturalmente difamadas.

Chevallard (2009) resume esse trabalho de investigação por meio do que ele nomeia “esquema herbatiano”, que é indicado da seguinte forma condensada: $[S(X;\ Y;\ Q) \rightarrow M] \rightarrow R^{\square}$ e em sua forma desenvolvida por: $[S(X;\ Y;\ Q) \rightarrow \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{m+1}, \ldots, O_m\}] \rightarrow R^{\square}$.

Para as análises dos resultados encontrados, utilizamos as seguintes ferramentas: os descritores mesogênese, cronogênese e topogênese, que segundo Chevallard (1991) correspondem, respectivamente, à: descrição da construção do meio, ou da sucessão dos meios na classe; descrição do avanço dos saberes na classe, isto é, o funcionamento do tempo didático; e a descrição das responsabilidades a serem assumidas pelo professor e pelo estudante quando se trata dos saberes em jogo, ou seja, a divisão epistêmica.

A mesogênese será estudada usando a dialética mídias e meios, conforme definição de Chevallard (2007). Para o pesquisador, a noção de mídia designa todo sistema de representação de uma parte do mundo natural ou social endereçado a um determinado público, por exemplo: o "curso" do professor de Matemática, um tratado de química, o diário de um apresentador de TV, um jornal regional ou nacional, um site de internet, entre outros, constituem algumas das mídias que podemos encontrar atualmente no nosso cotidiano. A noção de *meio* (“milieu”), segundo Chevallard (2007), é considerada por associação a um sentido vizinho ao de “meio” adidático, definido na Teoria das Situações Didáticas (TSD). Desse modo, o autor designa como sendo um meio todo sistema que pode ser visto como desprovido de intenção para a resposta que pode ser dada, de maneira explícita ou implícita, a uma determinada questão. O sistema considerado se comporta, sob este olhar, como um fragmento "natural". Em contraste, a propósito de numerosas questões que pretendemos apresentar, as mídias são, em geral, movidas de uma determinada intenção, por exemplo, a intenção de “informar”. Certamente, uma mídia pode, a propósito de uma questão particular, ser vista como um meio, e ser utilizada como tal.

O PEP experimentado parte da questão Q_0: Deseja-se construir uma edícula, sem custo de mão de obra, nos fundos de um terreno. A obra será composta de três ambientes: uma cozinha, um quarto e um banheiro. Qual a quantidade mínima de materiais de construção que podem ser usados nessa obra para um custo total entre R$ 45.000,00 e R$ 50.000,00?

Percurso metodológico

A primeira etapa do PEP aconteceu por meio do seu desenho em torno da análise *a priori* com a dialética de perguntas e respostas apresentadas e organizadas num mapa conforme Silva (2016). Nesse mapa, surgiram cinco questões decorrentes da questão geradora (Q_0): Q_1 – Qual a forma do terreno?; Q_2 – Qual o "pé direito" da edícula?; Q_3 – Qual a disposição dos 3 ambientes da edícula?; Q_4: Qual o modelo de edícula adequado para nosso custo?; Q_5 – Quais são as quantidades mínimas de materiais necessários e seus respectivos custos para a construção da edícula? Essas questões geradas a partir de Q_0 também serviram de questões geradoras de outras pequenas questões na composição do mapa.

Após a definição da questão Q_0 e da construção do mapa de perguntas e respostas, a questão foi aplicada a um grupo de 12 estudantes voluntários do 1º ano do ensino médio de uma escola pública de tempo integral da cidade de São Paulo – Brasil. A experimentação do PEP, ou seja, o percurso foi realizado em seis encontros de 1h e 40 minutos em horários diferentes (manhã e tarde), no laboratório de informática da escola. Os estudantes foram organizados espontaneamente em duplas (cada dupla dispunha de um computador). Além dos estudantes, estavam presentes durante os encontros: o professor mediador (o pesquisador), uma professora da regional da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo que atuou como observadora, uma estagiária de informática e um profissional em filmagem. Os dados foram coletados por meio de filmagens, áudios e material escrito. A dinâmica dos seis encontros era composta de momentos iniciais/apresentação com uma pergunta para os alunos refletirem, de pesquisa na internet, de estudo dirigido quando se tinha alguma questão a ser discutida para o desenvolvimento do PEP e, no final, a apresentação diária da produção por cada dupla do que havia realizado e na última sessão a apresentação da resposta coração para a questão geradora.

Desenvolvimento do PEP

A 1ª sessão (28/05) iniciou-se com a apresentação do observador e do pesquisador (mediador) do PEP. Na apresentação dos estudantes levamos um chocolate e uma pergunta para cada um sobre as grandezas e medidas. Cada estudante se apresentava, pegava o chocolate na mesa e lia a pergunta para todos, podendo responder ou pedir ajuda aos colegas do grupo. Tais perguntas tiveram o objetivo de iniciar as interações entre todos do grupo: aluno/pesquisador/observador, como também avaliar os conhecimentos prévios dos estudantes relacionados ao ensino fundamental (alunos de 6 – 14 anos). As perguntas eram, por exemplo, "se fosse possível cercar a cidade de São Paulo, qual a unidade de medida adequada iriamos utilizar? " ou "Qual a largura e comprimento do seu quarto, aproximadamente?".

Na sequência, perguntamos ao grupo o que era comum em todas as perguntas? E algumas respostas sugiram como: "construção civil"; "unidades de medida" etc. Depois explicamos a organização do trabalho, as datas das próximas sessões e a dinâmica do estudo. Pedimos para um aluno ler a questão geradora, e veio a pergunta: "entenderam a questão?" e dois alunos responderam que não. Um aluno questionou o que era "edícula"? e o outro queria saber o que significava "quantidade mínima de materiais"?

Nesse momento, nosso mapa já começava a ser modificado, pois não contemplava a questão: "o que é edícula?" Esclarecidas as dúvidas do enunciado da Q_0 passamos para o PEP propriamente dito, os alunos discutiam em pares e pesquisavam na mídia internet, o que oportunizou momentos de discussões e pesquisas ao longo de toda a sessão. Finalizamos a primeira sessão com a apresentação de cada dupla sobre suas respectivas produções naquele dia.

Observamos que as discussões giraram em torno de: o que é uma edícula; a forma e as medidas do terreno e da edícula; a disposição dos três cômodos da edícula; a construção de uma planta baixa; como decidir se a edícula iria ocupar todo o terreno ou parte do terreno.

Ao escolherem a forma do terreno as seis duplas optaram pela forma retangular, isto é, as formas menos tradicionais não foram pesadas (formas como: triângulo, trapézio, losango etc.). Ao percebermos certa dificuldade de algumas duplas em organizar o trabalho, ou seja, em estabelecer o papel de cada componente na dupla. Na sequência, combinamos que o custo do terreno e da mão de obra não estava incluso no valor estipulado para construção da edícula, ou seja, de 45 – 50 mil reais.

Nas 2ª, 3ª, 4ª e 5ª sessões (01/06; 02/06; 08/06; 10/06) a frequência dos alunos não foram 100%, ou seja, a cada sessão pelo menos um aluno faltava, o que pode ter prejudicado a compreensão de algumas noções em torno das grandezas e medidas. Para evitar problema de continuidade, entregávamos uma nova ficha e as fichas das sessões anteriores, pois dessa maneira os estudantes podiam consultar as fichas anteriores, e assim não correríamos o risco de alguma dupla ter dificuldades associada à falta de informações sobre o trabalho já realizado.

Em cada ficha entregue constava da parte de identificação, do número da sessão, do enunciado da questão geradora e uma folha sulfite em branco para as futuras anotações e cálculos. Em cada sessão liamos o enunciado de Q_0 no início e antes das apresentações da produção do dia no final da sessão. Ao perceber o leque amplo de materiais na construção da edícula, propomos terceirizar a instalação elétrica, hidráulica, as louças, as madeiras, portas, janelas e as ferragens pagando pelo serviço 10 mil reais.

Desse modo, apenas areia, “brita”, cimento, barro, tijolos, tintas, azulejos, lajotas para os pisos, lajotas para o “rodapé”, gesso, “moldura de gesso do teto”, telhas, argamassa, e lajes para o teto foram os materiais considerados nos orçamentos para a construção da edícula no decorrer das quatro sessões. O custo desses materiais não poderia ultrapassar de 40 mil reais. Observamos aqui a importância do MER, que serviu de suporte nos auxiliando a restringir o encaminhamento do PEP em função do tempo que dispúnhamos.

Após a reorganização do PEP em função do tempo que dispúnhamos e considerando as dificuldades dos estudantes, pudemos destacar como principais pontos discutidos pelas duplas nas quatro sessões foram: comparação entre as áreas de cômodos da edícula; comparação entre perímetros dos cômodos; se a mudança da forma de um cômodo iria ou não mudar sua área; se a mudança da forma do cômodo mudava ou não seu contorno (perímetro); a necessidade de identificar a unidade adequada de perímetro e/ ou de área; a importância da noção de escala para a construção da planta baixa e da maquete; o questionamento que é “pé direito” e sua importância na construção civil; a existência de um comprimento adequado do pé direito da edícula; se a mudança da unidade da medida de área, em termos de quantidade, implicaria na mudança da medida da área de um mesmo cômodo, ou seja, se mudamos o tamanho das lajotas para revestir um cômodo da edícula, a quantidade de lajotas também muda, o que corresponde ao questionamento sobre a invariância da área em relação à medida; qual a unidade de medida para comprarmos uma quantidade de areia? Alguns desses pontos foram dúvidas de todas as duplas, logo necessitou de um estudo mais detalhado, como por exemplo, na elaboração da planta baixa e da maquete da edícula, foi preciso uma abordagem expositiva e uma mediação sobre o trabalho de cada dupla, o que mostra ser um conhecimento prévio ainda não mobilizado pelos estudantes mesmo tendo sido introduzido no ensino fundamental (alunos de 6 – 14 anos).

Alguns questionamentos das duplas eram discutidos no grande grupo (decisão do pesquisador), pois poderiam ajudar a todos, como por exemplo, quantos tijolos necessito para construir 1 m^2? Quantos m^3 de tinta são necessários para pintar 1m^2 de parede se consideramos apenas uma mão?

Em função das dificuldades em visualizar as paredes para calcular a área de cada uma, mesmo já tendo definido o “pé direito” da edícula, surgiu a ideia entre as duplas de construir uma maquete. Ressaltamos que o cálculo das áreas das paredes da edícula era necessário para pintá-las ou revesti-las com azulejos. Mais uma vez o MER nos auxiliou a propor novos rumos para o desenvolvimento do PEP.

Sendo o grupo de alunos do ensino médio, em função da idade e da falta de experiência e de desconhecerem as práticas do campo da construção civil, alguns termos e práticas sobre esse campo necessitaram de esclarecimento. Isso nos conduziu a finalizar as sessões realizando uma sistematização para a organização das falas: o que vocês avançaram na sessão de hoje? O que ainda é dúvida? O que foi discutido hoje, vocês já sabiam? Quais os termos técnicos que foram pesquisados hoje?

Esta sistematização se mostrou necessária, uma vez que as duplas discutiam diversas ideias, faziam muitas pesquisas, porém, tinham dificuldades de sistematizar e organizar essas ideias, para realizar os cálculos e efetuar o orçamento adequado considerando os diferentes materiais.

Por sugestão do pesquisador, nos últimos 20 minutos da 5ª sessão, antes da apresentação do dia, foi pedido para o grupo que desligassem os computadores e escrevessem os pontos importantes observados durante as cinco sessões, pois na 6ª sessão (do dia 15/06), ou seja, a última, cada dupla deveria apresentar sua resposta para a questão geradora.

Iniciamos a 6ª sessão deixando 20 minutos para as duplas realizarem uma última discussão e fazerem os ajustes finais. Enquanto as duplas finalizavam suas respostas para a questão geradora, organizamos na lousa a forma de apresentação, ou seja, as duplas iriam mostrar a planta baixa e/ou a maquete, informar o custo de alguns materiais, apresentar os cálculos e o custo de outros materiais, e finalmente, informar o custo total para a construção da sua maquete. Reduzimos os cálculos e o custo para apenas quatro materiais, a saber: as cerâmicas do piso, os azulejos das paredes, a cerâmica do rodapé e a "moldura" de gesso no teto.

Resultados e conclusões

O MER pensado para este artigo foi elaborado em Silva (2016) a partir de adaptações de Sierra (2006) e da organização conceitual de Douady & Perrin-Glorian (1989), serviu de base para o desenho e a experimentação do PEP piloto apresentado nessa pesquisa envolvendo um grupo de alunos do 1º ano do ensino médio. As praxeologias (iniciais, de ligação, finais) representadas na *figura 1*, foram identificadas nas seis sessões do PEP piloto, porém, com intensidades diferentes. A escolha do terreno ou a construção da planta baixa, por exemplo, estão inseridos nas ações de manipulação e de comparação de objetos (desenhos), ou seja, nas praxeologias iniciais. Nessas ações contém elementos do quadro geométrico.

Na busca de algebrizar as relações entre as grandezas geométricas comprimento, área e perímetro, os alunos pesquisados passavam para a 2ª etapa do MER, que era o momento das praxeologias de ligação, no qual os estudantes trabalharam com várias unidades de medida, vários conjuntos numéricos e várias escritas simbólicas, por exemplo, na escolha das lajotas adequadas (custo, tamanho, forma etc) para cobrir o piso do quarto da edícula. As ações envolvendo as praxeologias de ligação dispõem de elementos que estão contidos no quadro das grandezas. E por fim, na busca de unificar as unidades de medida e os conjuntos numéricos os estudantes elaboram praxeoloxias finais e apresentam elementos que pertencem ao quadro numérico, por exemplo, quando o estudante definiu o tamanho, a quantidade, a forma e o custo das lajotas adequadas para revestir o piso da edícula.

Em relação às articulações entre os quadros e as praxeologias no desenvolvimento do PEP piloto, observamos que algumas atividades que contribuíram para a resposta coração. Algumas ações das praxeologias iniciais passavam diretamente para as praxeologias finais sem considerar as praxeologias de ligação, ou seja, as ações de experimentação de várias unidades de medida antes de definir a unidade de medida adequada eram inexistentes. Mesmo identificando ações que se desenvolve rapidamente, de um modo geral, consideramos que o PEP piloto estudado contribuiu na interação entre as praxeologias e os quadros.

Ao longo da experimentação do PEP o mapa de perguntas e respostas foi sendo modificado, pois foram surgindo questões que o pesquisador não havia pensado antes, por exemplo, O que é edícula?

No transcorrer dos encontros já era possível identificar as dificuldades associadas à compreensão das noções de: ordem de grandeza; escala; relacionar área ou perímetro com unidades adequadas; distinção entre o cálculo de área e o de perímetro. Os gestos didáticos pensados durante a elaboração do projeto contribuíram para auxiliar os estudantes a chegarem a uma resposta para a questão geradora. Dentre esses gestos destacamos: abordagens expositivas para o grande grupo, mediação das discussões de uma dupla por meio de questionamentos de outras duplas, validação de respostas diferentes para uma mesma questão, confrontando e envolvendo todos na discussão. Estes gestos estavam associados a três dimensões: o professor/investigador, os estudantes e o meio e as mídias presentes. Nas seis sessões utilizamos a mídia internet que em alguns momentos fez parte também do meio, pois ao funcionar como meio de execução e controle, revelou-se importante no desenvolvimento do PEP, permitindo que os estudantes encontrassem a resposta 'coração', superando a expectativa do pesquisador.

Ao longo do trabalho, surgiram questões não previstas, cujas respostas foram pesquisadas pelos estudantes, em particular, na mídia internet, e quando as respostas encontradas não eram por eles compreendidas, a mediação pelo pesquisador possibilitou a ampliação da mesogênese.

Foi possível observar ainda que a questão geradora era muito ampla, exigindo um tempo maior, ou seja, houve interferência na cronogênese, o que levou a uma nova questão após este piloto.

No decorrer do PEP ficou clara a transferência de responsabilidades ao grupo de estudantes, uma vez que estes se apropriaram da questão e se propuseram a encontrar uma resposta para Q_0. Apesar de apresentarem algumas dificuldades, os estudantes utilizaram métodos não escolares para os cálculos de área e perímetro, o que nos auxiliou na reconstrução de algumas praxeologias matemáticas junto aos estudantes do ensino médio, considerando mais especificamente o estudo das noções de área, de perímetro e suas relações. Além disso, por se tratar de estudantes do ensino médio, constatamos que algumas duplas já tinham naturalizado conhecimentos sobre as noções de área e de perímetro, inclusive considerá-las enquanto grandezas, o que facilitou o trabalho em termos de topogênese e cronogênese.

Em relação às dificuldades para o desenvolvimento da questão geradora, apareceram, em função da falta de mobilização e disponibilidade de conhecimentos prévios, supostos disponíveis, o que interferiu na cronogênese, exigindo um maior número de intervenções do mediador/pesquisador, ou seja, grande parte da topogênese foi discutida pelo mediador. Certamente, este trabalho também influiu na mesogênese, pois as abordagens expositivas desenvolvidas pelo mediador interferiram na sucessão dos meios.

Mas precisamos articular os conhecimentos encontrados nessa aplicação para melhor compreendermos as novas condições necessárias para a implementação e gestão de PEP, bem como seus efeitos na aprendizagem do tratamento das áreas e perímetros em matemática.

Ressaltamos finalmente que o MER enquanto modelo teórico do domínio da matemática serviu como quadro de referência para as ações e as mudanças necessárias realizadas durante o desenvolvimento do PEP, assim como para a análise e interpretação dos resultados.

Referências

Bosch, M. (2010). Plans d'épargne et modélisation algébrique. Vers une ingenierie didactique des PER.

Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bonner, (Éds.), Diffuser les mathématiques (et lesautres savoirs) comme outils de connaissance et d'action (p. 1-10). Montpellier, Francia : IUFM.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER : problèmes et avancées. UMRADEF. Toulouse. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milleux. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportees par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématiques (73-112). Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, Francia: La Pensée sauvage.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères *IREM 6* (132-158).

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics *20*(4), 387-424.

Lucas, C. O. (2015). Una Posible "Razão de Ser" del Cálculo Diferencial Elemental en el Ámbito de la Modelización Funcional. Tesis de doctorado. Universidade de Vigo.

Sierra, T. A. (2006). Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes. Tesis de doctorado. Universidad Complutense de Madrid.

Silva, J. V. G. (2016). Grandezas e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo.

Silva, J. V. G. (2011). Análise da abordagem de Comprimento, Perímetro e Área em livros didáticos de Matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE DE LA INTEGRAL DEFINIDA DESDE UN ENFOQUE SOCIOEPISTEMOLÓGICO

THE RESOLUTION OF PROBLEMS AS A STRATEGY OF LEARNING THE INTEGRAL DEFINED SINCE AN SOCIOEPISTEMOLOGICAL APPROACH

Cristhian López Leyton, Eliécer Aldana Bermúdez, Jhon Darwin Erazo Hurtado
Universidad del Quindío. (Colombia)
leyton3991@gmail.com, eliecerab@uniquindio.edu.co, jderazo@uniquindio.edu.co

Resumen
Esta comunicación pretende compartir un proceso de investigación que tiene como propósito fortalecer el concepto de integral definida desde un enfoque socioepistemológico, y la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje en la formación de estudiantes para profesor del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Quindío (Colombia). Para ello, establece la resolución de problemas como finalidad de las practicas matemáticas educativas (Stanic y Kilpatrick, 1989), y la necesidad de acudir a la relación entre sujeto y saber en función del contexto (Cantoral, 2011). Este estudio, se centra en la investigación-acción como vehículo para crear impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Latorre, 2007) de estudiantes de un curso de cálculo integral. Dado que esta comunicación hace parte de un proceso de investigación a nivel de maestría, se realiza todo el enfoque epistemológico para realizar trabajo de campo y comunicar los resultados en una próxima publicación.

Palabras clave: cálculo, resolución de problemas, socioepistemología

Abstract
This communication pretends to share a research process that has as purpose strengthen the concept of defined integral from a socioepistemological approach and the resolution of problems as a strategy for learning in the student's formation for degree program teachers in mathematics from the University of Quindío (Colombia). To do this, it established the resolution of problems as the purpose of educational mathematics practices (Stanic and Kilpatrick, 1989), and the need to resort to relationship between subject and knowledge in function to context (Cantoral, 2011). This study focuses on research-action as a vehicle to create impact in the theaching and learning processes (Latorre, 2007) of the students of a course integral calculus course since this communication is part of process of investigation to level of master´s degree is done all the focus epistemological to do work of countryside and communicate the results in a next publication.

Key words: cálculus, resolution of problems, socioepistemological

Introducción

La educación matemática pone a disposición estudiar desde las nociones más básicas hasta las matemáticas que se enseñan y se aprenden en la educación superior, a partir de sus rasgos epistémicos, didácticos, cognitivos, todos ellos tendientes a la preparación de un ciudadano competente para resolver los problemas que emergen de sus prácticas profesionales. Muchos planes de estudio a nivel de la educación superior plantean la resolución de problemas (RP) como eje articulador transversal y como estrategia para el aprendizaje de los ejes conceptuales que contempla el proyecto curricular del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Quindío (PEP, 2010).

En este sentido, los profesores en su proceso de planificación y diseño de clase, en el caso particular de la enseñanza de las matemáticas, realizan procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1991) para la consecución de su praxis educativa. Esta transposición didáctica emerge de los saberes colectivos y personales (Godino, Batanero, Rivas, y Arteaga, 2013) que cada profesor tiene asociado a una creencia o concepción de como utiliza la RP como: contenido, aplicación después de haber terminado un tema o una unidad didáctica, o como estrategia de enseñanza y aprendizaje, y como un proceso ligado al uso sentido y significado de los objetos matemáticos del conocimiento desde posturas sociales y culturales que ponen los saberes matemáticos en la dinámica de las actividades humanas (López y Aldana, 2018).

Es por ello que, la enseñanza mediada por la RP en torno a los de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral (CI), está asociada al ser y saber personal que tienen los profesores y estudiantes, porque están vinculadas a prácticas institucionales, personales, epistemológicas, didácticas, instruccionales y cognitivas, desligadas de contextos reales y situaciones problema, lo que hace necesario sea objeto de estudio por parte de los investigadores (Serrano, 2010). En este sentido, esta propuesta de investigación tiene como fin particular comprender y asociar el concepto de la integral definida a prácticas sociales que configuren una construcción social de conocimiento matemático mediante la resolución de problemas en contexto como vehículo para el aprendizaje. Sin embargo, es necesario establecer algunas dificultades de los estudiantes en torno a la resolución de problemas y el concepto de integral definida.

Para Schoenfeld (1992), Enright y Choate (1993) la problemática más común referente a las dificultades de los estudiantes para resolver problemas, es que estos no dominan cuando aplicar los conocimientos que poseen, y solo hacen uso de estos cuando los problemas requieren de ellos explícitamente, siendo incapaces de evaluar la utilidad de sus recursos dentro y fuera del contexto académico. Esta situación tiene una estrecha relación con los procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1991) realizadas por el docente, así como las estrategias metodológicas que permean su preparación.

En el caso del uso de integrales Aldana y González (2016) aseveran en su investigación que los estudiantes que tienen dificultades al momento de resolver correctamente tareas asociadas a funciones valor absoluto y el desarrollo del esquema de la integral definida, puesto que asocian esta última explícitamente con el área, sin suponer que existen formas más simples de calcular áreas cuando no se conoce la antiderivada de una función, o se conoce una formula netamente algebraica que represente al área a calcular.

En síntesis, de acuerdo con las dificultades encontradas para la comprensión y construcción social del conocimiento en torno al objeto matemático "Integral Definida" y desde el encuadre epistemológico, la experiencia personal y la literatura expuesta en los planteamientos anteriores, se asevera la necesidad de analizar desde una postura investigativa el siguiente cuestionamiento:

¿Cómo la resolución de problemas en contexto fortalece el aprendizaje del concepto de integral definida en la formación de estudiantes para profesor de matemáticas del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Quindío mediante un enfoque socioepistemológico?

Objetivos

Objetivo general

- Fortalecer el concepto de integral definida desde un enfoque socioepistemológico y la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje en la formación de estudiantes para profesor de matemáticas del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Quindío

Objetivos específicos

- Identificar elementos epistemológicos, didácticos, y cognitivos alrededor del concepto de Integral Definida en un curso de cálculo integral de la licenciatura en matemáticas de la Universidad del Quindío.
- Resignificar mediante la resolución de problemas en contexto y prácticas sociales asociadas, el uso y significado del concepto de integral definida desde un enfoque socioepistemológico.
- Generar el aprendizaje del concepto de Integral Definida desde la socioepistemología y la resolución de problemas como estrategia para la construcción social del conocimiento alrededor de este objeto matemático en estudiantes de un curso de cálculo integral del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Quindío.
- Validar la arquitectura del aprendizaje obtenido por los estudiantes sobre el concepto de integral definida desde el desarrollo socioepistemológico y la resolución de problemas en contexto.

Marco teórico

En la literatura existente, se encuentran algunas investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje del esquema de la Integral Definida desde diferentes enfoques, este es el caso de Aldana y González (2016) en donde presentan las diferentes falencias que presentan estudiantes universitarios de Licenciatura en Matemáticas de contexto colombiano en el aprendizaje del concepto de integral definida. Para ello, basan su marco de referencia en la teoría APOE con el propósito de estudiar el desarrollo del esquema de los objetos matemáticos. Este referente centrado en el aprendizaje y el análisis matemático para la compresión, utiliza cuestionarios, entrevistas, y mapas conceptuales en función de establecer la unidad de análisis que permite concluir sobre las diferentes dificultades conceptuales de los estudiantes en cálculo.

Para la metodología los autores parten de un estudio bibliográfico del concepto de integral definida configurando elementos que dan la estructura al concepto: el área como aproximación (ACA), el área como límite de una suma (ALS), la Integral Definida (LID), las propiedades de las integrales (PID), los teoremas fundamentales y del valor medio (TFV), descomposición genética del concepto (sistemas de representación gráfico (G), algebraico (A) y analítico (AN) ligados a dichos elementos matemáticos). Posteriormente se elaboró un precuestionario que fue sometido a validación por expertos en didáctica y aplicado de forma experimental. Después de la construcción del cuestionario definitivo, este fue aplicado a once estudiantes de licenciatura en matemáticas.

El análisis de los cuestionarios aplicados, se reconocieron elementos matemáticos que intervinieron en la resolución de tareas y se desarrolló el guion para las entrevistas a los estudiantes. Para facilitar la triangulación de la información, los estudiantes entrevistados realizaron un mapa conceptual sobre el concepto de integral definida. Por último, se seleccionaron las respuestas dadas a esta tarea por seis estudiantes teniendo en cuenta el manejo del concepto de función valor absoluto.

Para la discusión de resultados, los autores presentan las soluciones propuestas y realizadas por 6 estudiantes a la siguiente tarea:

- *Calcular el área limitada por la gráfica de la función* $f(x) = |2x - 1|$, *en el intervalo* $[0,2]$ *y el eje. Justificar la respuesta.*

Esta unidad de análisis se organiza de manera escalonada de acuerdo con el desarrollo del esquema de comprensión del concepto: estudiantes que *no pueden representar la función y no resuelven correctamente la tarea*; estudiantes que hacen una *representación gráfica incorrecta y los cálculos que presentan también son erróneos*; estudiantes que realizan una *representación gráfica correcta, pero cálculos incorrectos* y quienes muestran una *representación gráfica y unos cálculos correctos.*

En primer lugar, se examina la respuesta de un estudiante que *no puede representar la función y no resuelve correctamente la tarea* puesto que no tiene los conceptos previos necesarios para enfrentar la tarea dado que desconoce la función valor absoluto (concepto de valor absoluto, representación gráfica) y el cálculo de la antiderivada (asociada solo al cálculo de áreas), en este sentido, como no puede representar la función, no tiene elementos que le permitan calcular el área que indica el problema.

En segundo lugar, se analiza la respuesta de estudiantes que hacen una *representación gráfica incorrecta* pues asocian de forma errónea la función valor absoluto con una función lineal, además, *los cálculos que presentan también son erróneos* pues calculan la integral dada una función lineal que finalmente no le permite hallar correctamente la antiderivada.

En tercer lugar, se estudia la solución de un estudiante que hace una *representación gráfica correcta* de acuerdo con la definición de valor absoluto, construye el área solicitada, encuentra puntos de corte, y plantea desigualdades correctamente, pero sus *cálculos algebraicos son incorrectos* y no logra resolver la tarea, puesto que no le es posible calcular el área de las regiones al recurrir a la Integral Definida.

Por último, los autores presentan la solución de un estudiante que realiza una *representación gráfica* correcta puesto que en primer lugar utiliza una función lineal y posteriormente la de valor absoluto, a partir de esa representación gráfica le es posible establecer relaciones entre los dos tipos de representación (gráfica y algebraica), aplica la fórmula de área de un triángulo y sus *cálculos son correctos* obteniendo el área solicitada en el intervalo pedido. Sin embargo, cuando el estudiante intenta utilizar el concepto de integral definida presenta inconvenientes porque, aunque sus límites de integración son correctos, no tiene en cuenta que debe integrar una función valor absoluto.

Los autores concluyen en su escrito, que los estudiantes tienen dificultades para comprender y utilizar las propiedades de la integral definida cuando este objeto matemático está asociado a una función valor absoluto. Desconocen la definición de la función valor absoluto y sus tipos de representación (gráfica y algebraica) presentando dificultades como; vacíos epistemológicos entre la función lineal y la función valor absoluto y el tratamiento inadecuado de desigualdades. En este sentido, manifiestan que uno de los problemas más destacados en el aprendizaje de las matemáticas es la falta de un aprendizaje significativo y duradero en los conceptos previos posiblemente como resultado del privilegio de aspectos procedimentales y algorítmicos que relegan la construcción de real del concepto (Valor Absoluto e Integral Definida).

La socioepistemología

La Teoría de la Socioepistemología de acuerdo con Cantoral, Reyes-Gasperini, y Montiel, (2014) asume como idea fundamental que; para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas es necesario acudir a un examen minucioso del saber, a su problematización. La Socioepistemología tiene una contribución importante: modeliza las dinámicas del saber o "conocimiento puesto en uso". Para lograrlo, fue indispensable introducir la noción de uso, en contraste con la noción psicológica de adquisición por aprendizaje; se pasó del conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso, es decir, al estudio del saber. Es importante precisar que en este enfoque asumimos la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto, pues en su conjunto constituyen la sabiduría humana (figura 1).

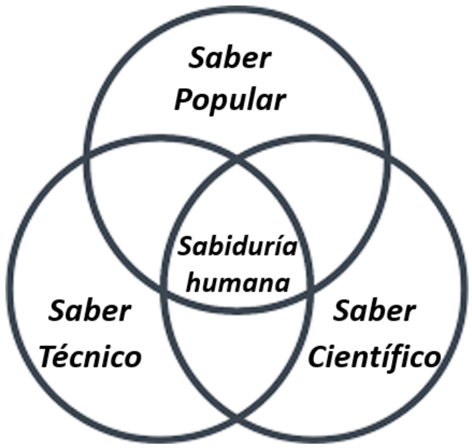


Figura 1 Constitución de la sabiduría humana
Fuente: Elaboración propia

Este enfoque inicia entonces con este particular tratamiento del saber. Se lo construye, reconstruye, significa y resignifica, se lo ubica en el tiempo y el espacio, se lo explora desde la óptica de quien aprende, de quien inventa, de quien lo usa: se posiciona a la opción constructiva desde la perspectiva histórica, cultural e institucional para que, en definitiva, se lo rediseñe con fines didácticos. Esto es en definitiva que el saber se problematiza.

La Socioepistemología se fundamenta en cuatro pilares fundamentales (Cantoral, 2011) formando una red nodal; *el principio de la racionalidad contextualizada,* este principio alude a que la relación del sujeto al saber es una función del contexto. Los estudios empíricos de la psicología experimental insisten en que debemos entender los principios normativos del razonamiento dentro de los contextos específicos bajo los que se realiza una inferencia. *El principio del relativismo epistemológico*, el relativismo es el concepto que sostiene que los puntos de vista no tienen verdad ni validez universal, sino que, en todo caso, sólo poseen una validez subjetiva y relativa a los diferentes marcos de referencia. *El principio de la resignificación progresiva* se focaliza en la epistemología genética, donde la acción es la base del desarrollo del conocimiento, la acción del sujeto sobre el objeto, de ahí derivan los significados construidos. De modo que el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción, del empleo de símbolos se personaliza y despersonaliza la apropiación, se significa al objeto. Y finalmente el *principio normativo de la práctica social*. Este principio es el eslabón fundamental para el funcionamiento de la teoría. Se asume que las *prácticas sociales* son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, se constituyen, por así decirlo, como las generadoras del conocimiento. (Figura 2)

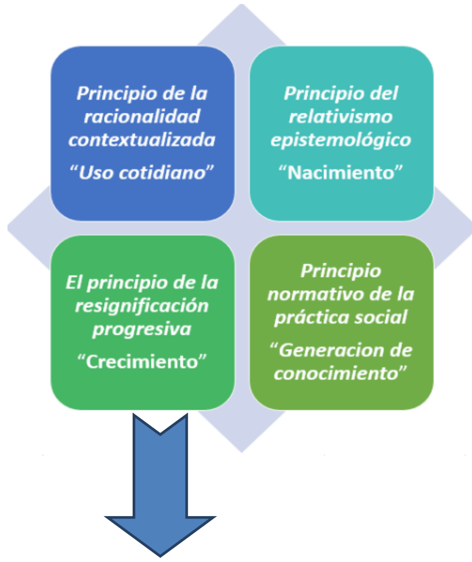


Figura 2: Pilares de la Socioepistemología
Fuente: Elaboración propia

La propia vida del estudiante como fuente del conocimiento en la búsqueda de contextos y situaciones que generen la necesidad del saber matemático

La resolución de problemas (RP)

La educación matemática ha tenido como fin primordial que los estudiantes aprendan las matemáticas a partir de la resolución de problemas, las reformas educativas a través de los estándares por competencias ponen como telón de fondo la resolución de problemas para que un estudiante logre ser matemáticamente competente. Efectivamente, gran parte de las investigaciones en Educación Matemática llevadas a cabo en diferentes partes del mundo, tienen que ver con la resolución de problemas como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas.

En este sentido, según Stanic y Kilpatrick (1989), afirman que los problemas han ocupado un lugar central en el currículo matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no. Sólo recientemente los que enseñan matemáticas han aceptado la idea que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención. Junto con este énfasis en la resolución de problemas, sobrevino la confusión. El término "resolución de problemas" se ha convertido en un slogan que acompañó diferentes concepciones sobre qué es la educación, qué es la escuela, qué es la matemática y por qué debemos enseñar matemática en general y resolución de problemas en particular. De acuerdo con estos autores la resolución de problemas ha adoptado diferentes significados en función del uso que se les ha dado:

- Resolver problemas como contexto para: enseñar matemática, crear motivación por algunos temas, recrear, desarrollar habilidades, y práctica.
- Resolver problemas como habilidad: rutinarios (habilidades básicas), no rutinarios (de nivel superior), y técnicas de resolución como contenido para aplicar lo aprendido.
- Resolver problemas es "hacer matemática": creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones (Pólya, 1954).

Diseño metodológico

En este apartado el lector encontrará en este anteproyecto el enfoque de la investigación, el tipo de metodología, el ámbito, la muestra, y las fases del diseño metodológico.

Enfoque de investigación

El tipo de investigación que se pretende realizar es una investigación cualitativa que propone estudiar la construcción de conocimiento en contexto, aquel que tiene que ver con las realidades y los escenarios socioculturales específicos, caracterizándolo como el resultado de la interacción entre la epistemología y los factores sociales donde los saberes toman sentido y significado (problematización del saber matemático) (Cantoral, 2002). En este sentido, se busca comprender como los estudiantes construyen/comprenden el concepto de Integral Definida, es decir, cómo se desarrolla el esquema de Integral Definida en estudiantes de tercer año de Licenciatura de Matemáticas de la Universidad del Quindío.

Método de investigación

El presente estudio se centra en la investigación-acción como vehículo para crear impacto en una realidad social y/o educativa, y en el mismo proceso propiciar una mejor comprensión del contexto. Además, se procura vincular participativamente la investigación, la acción y la formación haciendo a la muestra protagonista del proceso de indagación (Latorre, 2007).

En este sentido Martínez (2009, p. 240) propone la investigación-acción como un método donde:

> … los sujetos investigados son auténticos coinvestigadores, participando activamente en el planteamiento del problema que va a ser investigado (que será algo que les afecta e interesa profundamente), en la información que debe obtenerse al respecto (que determina todo el curso de la investigación), en los métodos y técnicas que van a ser utilizados, en el análisis y en la interpretación de los datos y en la decisión de qué hacer con los resultados y qué acciones se programarán para su futuro.

Ámbitos de investigación

Esta investigación se realizará en la Universidad del Quindío, en el Programa de Licenciatura en Matemáticas con estudiantes del curso de Calculo Integral. Este espacio académico (Variable de formación en Calculo II) está ubicado en cuarto semestre con una intensidad horaria de 4 horas semanales por un periodo de 16 semanas para un total de 64 horas. Teniendo en cuenta que, la estrategia metodológica en el programa para el desarrollo del enfoque pedagógico es la resolución de problemas, entonces se trata de identificar aquellos significados y procesos de significación propios del saber en la organización de lo humano, es decir, aquellos procesos humanos de los que emerge el conocimiento matemático, el paso del conocimiento estático al estudio del conocimiento en uso, al estudio del saber en su problematización (Cordero, 2006). Se trata de una investigación centrada en el proceso de enseñanza/aprendizaje mediante un estudio de casos, que "involucra aspectos descriptivos y explicativos de los temas objeto de estudio" (Bernal, 2006, p. 116).

Población y muestra

En este caso la muestra de la población será un promedio de 15 a 22 estudiantes del espacio académico de Cálculo Integral que constituirán la unidad de análisis para el proceso de investigación.

Diseño metodológico

Para este apartado se tendrán en cuenta las siguientes fases de la investigación sociepistemológica en una adaptación de Montiel y Buendía (2011) (Figura 3):

1. Planteamiento de una problemática o fenómeno didáctico

- Tratamiento escolar de la integral definida
- Dificultades de los estudiantes referentes a los conceptos básicos del cálculo

2. Acción relacionante: Análisis Socioepistemológico

- Usos del saber
- Qué lo caracteriza
- Naturaleza del objeto matemático
- Significados según su contexto
- Procesos didácticos de trasmisión en el aula

3. Epistemología de las practicas (Construcción de secuencias didácticas)

- Naturaleza epistemológica, histórica y genética del objeto matemático
- Resignificación del saber (Escenarios escolares, profesionales y cotidianos)
- Transmisión del saber "proceso de institucionalización" (discurso matemático escolar)
- Construcción alternativa del fenómeno didáctico

4. Intencionalidad en las prácticas como acción relacionante hacia situaciones problema

- Asociación de prácticas y el conocimiento matemático mediante la problematización del saber
- Validación de los significados construidos, contextos culturales, contextos históricos, y la intensión del aprendizaje.

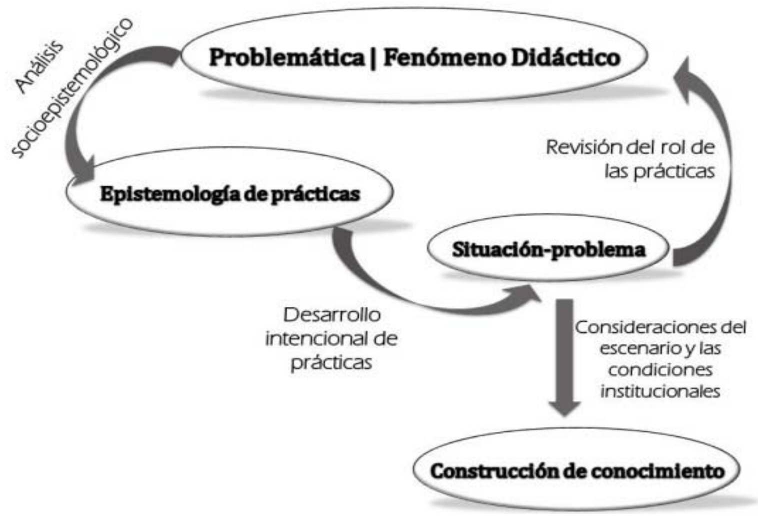


Figura 3: Esquema metodológico
Fuente: Montiel y Buendía (2011)

Resultados

Los resultados de esta investigación permiten establecer una ruta de investigación en la cual el planteamiento y la resolución de problemas constituyen el eje vertebral para la construcción de las entidades matemáticas. En este sentido, se propone guiar al estudiante dentro de contextos específicos bajo los que se realiza una inferencia, se proponen conjeturas, pensamientos, se crean posibles escenarios y se establece una problemática que es resuelta mediante de la comprensión de un nuevo concepto (Cantoral, 2011). El trabajo de campo de esta investigación a nivel de maestría está programado en el primer semestre del 2019.

Referencias bibliográficas

Aldana, E. y González, M. T. (2016). *La función valor absoluto y el desarrollo del esquema de la integral definida.* Artículo de investigación Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (REIEC) ISSN 1850-6666. Volumen 11 No 1 Mes Julio, pp. 8-17.

Bernal, C. A. (2006). Metodología de la Investigación (2ª ed.). México: Prentice Hall.

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 15 (1), 35-42. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2011). *Fundamentos y Métodos de la Socioepistemología.* 1er Simposio en Matemática Educativa, CICATA del IPN, Ciudad de México, D.F., México.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R. Covián, O., Farfán, R., Lezama, J., Romo, A. (Eds.) Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte latinoamericano, (p. 265-286). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y Díaz de Santos.

Chevallard, Y. *(*1991*).* La *transposición didáctica:* del *saber sabio* al *saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Enright, B. E.; Choate, J. S. (1993): «Mathematical Problem Solving: The Goal of Mathematics», en J. S. CHOATE (ed.): Successful Mainstreaming. Proven ways to detect and correct special needs, pp. 280-303. Needham Heights, Massachusetts, Allyn and Bacon, pp. 280-303.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. Madrid.

Latorre, A. (2007). La investigación- acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. Barcelona, España: Grao.

López Leyton, C., Aldana Bermúdez, E., & Erazo Hurtado. Universidad del Quindio, Colombia, J. (2018). Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas en cálculo diferencial e integral. [Conceptions of teachers on the resolution of problems for the teaching of concepts of differential and integral calculus: ethnographic study]. *Revista Logos Ciencia & Tecnología, 10*(1), 145-157. doi:http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v10i1.448

Martínez, M. (2009). Ciencia y arte en la metodología cualitativa. México: Trillas

Montiel G. y Buendía, G. (2011) Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En Sosa, Rodriguez y Aparicio (eds) Memorias de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 443-454) México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC.

PEP (2010). Proyecto educativo de programa. Código ICFES: 120845103706300111201 registro calificado: no. 2043 de marzo 25 de 2010. MEN.

Pólya, G. (1954). How to solve it, Princeton:Princeton University Press.

Serrano, R. C. (2010). Pensamientos del profesor: un acercamiento a las creencias y concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior. *Revista de Educación, 352*, 267-287.

Schoenfeld, A. (1992): «Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics», en. En Grouws (ed*.): Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning,* (pp.334-370)..New York, Macmillan.

Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989), Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles&Silver (Eds.) The teaching and assesing of mathematical problem solving, pp.1-22 Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

UNA CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA A UNA SITUACIÓN PROBLEMA, DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

AN EPISTEMIC CONFIGURATION TO A PROBLEM SITUATION, FROM THE ONTOSEMIÓTIC APPROACH IN THE DIDACTICS OF MATHEMATICS

Eliecer Aldana Bermúdez, Francisco Antonio Gutiérrez Cardona, Jaime David Grisales Dávila
Universidad del Quindío, Universidad Tecnológica de Pereira. (Colombia)
eliecer@uniquindio.edu.co, frankgutierrez87209@hotmail.com david.grisales4444@gmail.com

Resumen
Este artículo centra su atención en la composición y configuración desde lo epistémico de una situación problema, para fortalecer las prácticas matemáticas en estudiantes de educación básica secundaria, en la aplicación de las medidas de centralización y de dispersión a partir de las actividades de trabajos de campo, en distintos contextos desde el enfoque ontosemiótico. La investigación se centra en el estudio de los problemas relativos al proceso de aplicabilidad, puesto que toma como punto de referencia las dificultades que tienen los estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas como la interpretación y el razonamiento en el pensamiento aleatorio desde los conceptos de dispersión y tendencias. Esta es una investigación que está enfocada al campo de la Educación Matemática, situados en la didáctica de la matemática. La metodología implementada en esta investigación para el desarrollo de aprendizaje del objeto matemático requiere de realizar una investigación académica, descriptiva, cuantitativa y cualitativa.

Palabras clave: dispersión, centralización, enfoque ontosemiótico, prácticas matemáticas, epistemología

Abstract
This article focuses on the composition and configuration from the epistemic of a problem situation, to strengthen mathematical practices in students of secondary basic education, in the application of measures of centralization and dispersion from the activities of field work, in different contexts from the ontosemiotic approach. The research focuses on the study of problems related to the process of applicability, since it takes as a point of reference the difficulties that students have in the development of mathematical skills such as interpretation and reasoning in random thinking from the concepts of dispersion and trends. This is an investigation that is focused on the field of Mathematics Education, located in the didactics of mathematics. The methodology implemented in this research for the development of mathematical object learning requires conducting an academic, descriptive, quantitative and qualitative research.

Key words: dispersion, centralization, ontosemiotic approach, mathematical practices, epistemology

Introducción

Por mucho tiempo, la palabra *estadística* se refería a información numérica sobre los estados o territorios políticos. La palabra viene del latín "*statisticus*" que significa "del Estado". Las estadísticas como las conocemos hoy día, tomaron varios siglos en desarrollarse y marcaron muchas mentes privilegiadas (Vallecillos, Castro Martinez, Florés Martinez, y Fernando García, 2001).

La estadística es una colección de métodos para planificar y realizar experimentos, obtener datos y luego analizar, interpretar y formular una conclusión basada en esos datos. La estadística se puede definir como la ciencia que recopila, organiza, analiza e interpreta la información numérica o cualitativa, mejor conocida como datos, de manera que pueda llevar a conclusiones válidas (Vallecillos, Castro Martinez, Florés Martinez, y Fernando García, 2001). En el campo de la educación matemática, para la enseñanza de los conceptos estadísticos, uno de los métodos que se sugiere a partir del marco teórico son las prácticas matemáticas, que surgen como una herramienta metodológica para la enseñanza y el aprendizaje de objetos matemáticos.

Las prácticas matemáticas se caracterizan mediante los objetos que intervienen en ellas, que pueden ser de diferente naturaleza como la situación-problema, su lenguaje, los conceptos, las proposiciones y procedimientos y argumentos. Todos estos objetos están relacionados, entre sí, formando configuraciones, que serán *epistémicas* si son propias de una institución matemática o de enseñanza y cognitivas si son específicas del alumno.

A partir de ello, la finalidad de este trabajo de investigación, es reportar y analizar los resultados obtenidos del desarrollo de prácticas matemáticas para el aprendizaje de parámetros, estadígrafos y medidas usadas en la estadística descriptiva, como son las medidas de centralización y dispersión, realizada en estudiantes de básica secundaria bajo el marco de un enfoque ontosemiótico.

A través de esta investigación, se logró realizar la configuración de estas prácticas para el aprendizaje del objeto matemático que son las medidas de dispersión y variabilidad en el pensamiento aleatorio y sobre las dificultades que presentan los estudiantes de educación básica, al trabajar sobre el cálculo, análisis e interpretación de estas medidas.

Marco teórico

Como se ha mencionado anteriormente, el marco teórico en el cual se apoya y se muestra como pilar de esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Es un marco teórico que ha surgido en el seno de la Didáctica de las Matemáticas con el propósito de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. También permite dar las orientaciones fundamentales de un conocimiento de contenido específicamente pedagógico; y es a partir de estos conocimientos y capacidades que los profesores trasladan su conocimiento de la materia en representaciones instructivas. (Godino J. , Enfoque Ontosemiotico, 2014). Este marco teórico trata de articular distintas aproximaciones a la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de supuestos de tipo antropológico y semiótico sobre la actividad matemática y los procesos de estudio correspondientes.

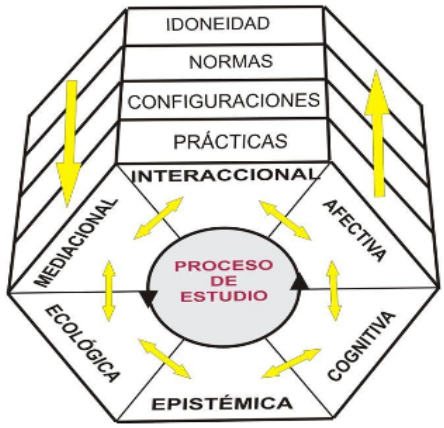


Figura 1. Dimensiones y niveles del análisis didáctico (Godino, 2014)

El punto de partida del EOS es la formulación de una ontología de objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. Tomando como noción primitiva la de situación-problemática, se definen los conceptos teóricos de práctica, objeto (personal e institucional) y significado, con el fin de hacer patente y operativo, por un lado, el triple carácter de la matemática a que hemos aludido, y por otro, la génesis personal e institucional del conocimiento matemático, así como su mutua interdependencia (Godino J. , Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática; Motivación, sustentación, 2014).

Noción de idoneidad didáctica

Consideremos que el EOS, en particular la noción de idoneidad didáctica, puede aportar elementos originales y significativos para elaborar una teoría de diseño instruccional, apropiada para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y otras áreas curriculares. En este sentido Godino, comparte la noción de idoneidad didáctica, con sus dimensiones, criterios, y un desglose operativo de dicha noción y que ha sido introducida en el EOS, como herramienta que permite el paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención efectiva en el aula. (Nieto, 2017).

Consideramos que esta noción puede servir de punto de partida para una teoría de diseño instruccional (Teoría de la Idoneidad Didáctica) que tenga en cuenta, de manera sistémica, las dimensiones epistémica – ecológica, cognitiva – afectiva, interaccional – mediacional implicadas en los procesos de estudio de las áreas curriculares específicas. (Nieto, 2017).
Como hemos indicado, la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores empíricos, ha sido introducida a partir de un modelo explícito sobre el conocimiento matemático sobre bases pragmatistas - antropológicas. La introducción de la dualidad personal - institucional de los sistemas de prácticas y de las configuraciones de objetos y procesos permite aplicar sistemas de categorías similares para describir el conocimiento de los sujetos individuales y el conocimiento institucional, para el cual se postula un tipo de realidad objetiva, aunque culturalmente relativa (Godino J. , Síntesis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas, 2014).

Otra noción clave del EOS es la de significado, entendido como contenido de las funciones semióticas, relaciones entre objetos, configuraciones y sistemas de prácticas, la cual permite concebir el aprendizaje en términos de apropiación de significados.

Con la noción de idoneidad didáctica, tratamos de desarrollar algunas consecuencias del marco epistemológico y cognitivo del EOS para el diseño, implementación y evaluación de intervenciones educativas, lo que requiere asumir nuevos presupuestos relativos a las interacciones entre los sujetos, el uso de recursos tecnológicos y las relaciones ecológicas con el entorno. Las nociones de conflicto semiótico y la negociación de significados se adoptan como criterio principal de optimización de las interacciones. En la práctica no todos los objetivos de aprendizaje matemático se pueden lograr mediante procesos de adaptación en situaciones a-didácticas, hipótesis fundamental de la teoría de situaciones. Esto es así, no sólo porque la re-invención de todos los conocimientos matemáticos por parte de los alumnos requeriría un tiempo didáctico ilimitado, o porque exigiría unas capacidades intelectuales excepcionales por parte de los alumnos, sino porque el componente discursivo, normativo y cultural de los conocimientos matemáticos requiere la implementación de momentos de institucionalización, en los que la enseñanza directa del profesor juega un papel esencial. La articulación entre las situaciones a-didácticas y didácticas, entre los conocimientos y saberes que pueden ser estudiados mediante una "enseñanza directa" y los que podrían ser abordados mediante una construcción a-didáctica está lejos de ser obvia.

Nosotros consideramos que el EOS proporciona un marco, en el que es posible estudiar la articulación de diversas teorías y analizar la interacción entre las funciones del profesor y los alumnos, como propósito de un contenido matemático específico.

Para ello, ha sido necesario desarrollar nuevas herramientas e incorporar otras nociones de marcos teóricos relacionados, que permitan describir de una manera detallada las interacciones que ocurren en la clase de matemáticas.

A partir de este marco, se trabaja bajo las idoneidades del aprendizaje, enfocadas en la idoneidad didáctica que se compone de 6 dimensiones y traeremos a colación, cuáles de estas hemos empleado. Idoneidad Cognitiva: Expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos (Wertsch, 1978), así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. Idoneidad Ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Como se puede deducir de los ejemplos propuestos, la idoneidad de una dimensión no garantiza la idoneidad global de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Idoneidad Emocional: grado de implicación (interés, motivación) de los alumnos y alumnas en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del estudiante y de su historia escolar previa (Ramos, 2009). Idoneidad Epistémica: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de unos significados de referencia (Ramos, 2009).

Consideramos *práctica matemática* a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino J. , Síntesis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas, 2014).

Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una *institución* está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento (Godino J. , Síntesis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas, 2014).

Metodología

Para dar cumplimiento al desarrollo de aprendizaje del objeto matemático, se requiere realizar investigación académica, descriptiva, documental y trabajos de campos. Para esto se tendrán en cuenta los siguientes aspectos: Investigación Descriptiva: Permite describir las situaciones, los fenómenos o los eventos que nos interesan, midiéndolos y evidenciando sus características.

Fases de la investigación: El desarrollo de la investigación estará dada por las siguientes fases: Fase 1: Revisión bibliográfica, Fase 2: Diseño de taller evaluativo, Fase 3: Elección de la muestra, Fase 4: Aplicación del Taller evaluativo, Fase 5: Trabajos de campo, Fase 6: Identificar, Analizar y Comparar, Fase 7: Informe final.

Los resultados esperados de esta investigación buscan el desarrollo del pensamiento aleatorio en la competencia de razonamiento e interpretación de resultados, generar y fortalecer las prácticas matemáticas en los estudiantes de básica secundaria para su aprendizaje y aplicabilidad de las medidas de dispersión en contexto para determinar el impacto puede generar el turismo y sus diferentes actividades en el sector económico y social.

Ejemplo 1:

Para hallar la desviación media de la siguiente tabla referida a las edades de los 100 turistas que ingresaron en la temporada de vacaciones de junio del año 2016 a la región cafetera en el municipio de Quimbaya:

Tabla 1. Intervalo de clases – edades

Clase	ni
16-20	2
20-24	8
24-28	8
28-32	18
32-36	20
36-40	18
40-44	15
44-48	8
48-52	3

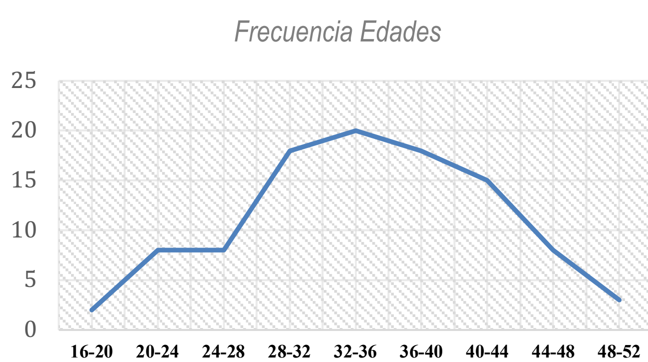


Gráfico 1. Polígono de frecuencias edades – turistas

Veamos cómo se procede:

Tabla 2. Distribución de frecuencias – Edades

lase	*fi*	Y_I	*fi* $\cdot Y_I$	$\lvert Y_i - \bar{x} \rvert$	*fi* $\cdot \lvert Y_i -$
6-20	2	18	36	16,72	33.44
0-24	8	22	176	13.98	111.84
4-28	8	26	208	9.98	79.84
8-32	18	30	540	5.98	107.64
2-36	20	34	680	1.98	39.6
6-40	18	38	684	2.02	36.36
0-44	18	42	756	6.02	108.36
4-48	8	46	368	10.02	80.16
8-52	3	50	150	14.02	42.06
	100		$\sum(n_i.x_m) = \bar{x} =$ $35,98 \sim 36$ *años*		639.3

$DM = \frac{\sum f_{i.|Y_i - \bar{x}|}}{N}$; DM = 6, 39

La desviación media viene a indicar el grado de concentración o de dispersión de los valores de la variable. Si es muy alta, indica gran dispersión; si es muy baja, refleja un buen agrupamiento y que los valores son parecidos entre sí. Por lo que podemos apreciar, que ingresan turistas de todas las edades y no hay un patrón o una edad común entre los turistas.

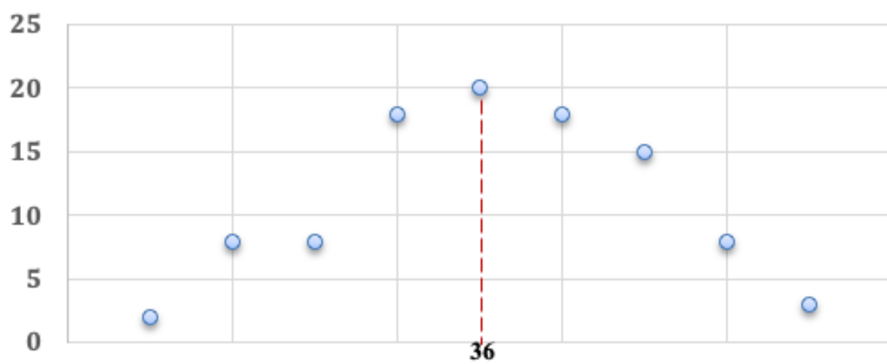


Gráfico 2. Dispersión de los datos con respecto a la media.

La desviación media se puede utilizar como medida de dispersión en todas aquellas distribuciones en las que la medida de tendencia central más significativas haya sido la media.

Sin embargo, para las mismas distribuciones es mucho más significativa la desviación típica, que estudiaremos a continuación, y eso hace que el uso de la desviación media sea cada vez más restringido.

Resultados

El observatorio turístico de Quimbaya (GIOTUQ), realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), un registro a 8 establecimientos de alojamiento y hospedaje indicando su capacidad de huésped y cuantas habitaciones o cuartos tienen para atender la demanda de turistas que ingresan a la región. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

Tabla 3. Resultado capacidad - habitaciones.

NOMBRE DEL ESTABLECIMIENTO	CAPACIDAD	HABITACIONES
Hostal los nuevos almendros	24	8
Hotel Central	30	15
Hotel Poporo Quimbaya	60	23
Hospedaje el cafetero	40	28
Hotel las torres	46	11
Hotel la terraza	58	15
Hotel Quimbaya plaza	38	20
Hotel Los Faroles	32	9

A partir de los datos anteriores responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el número medio (promedio) de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos de Quimbaya? Rta. ______________________

b. ¿Cuál es el número medio de habitaciones que tienen los 8 establecimientos de hospedaje en Quimbaya? Rta. ______________________

c. Explica que significa para ti las dos cifras anteriores. Rta. ____

d. Si se eligen otros 8 establecimientos de hospedaje y el número promedio de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos es de 41 huéspedes por establecimiento. El hotel "La Terraza" tiene capacidad para 28 y el hotel "Mi Pueblo" 34. ¿Cuántos huéspedes podrán alojar los otros 6 establecimientos para que el promedio de huéspedes en los 8 establecimientos sea 41? Justifica tu respuesta.

____

e. ¿Cuál es la capacidad de huéspedes del hotel mediano si incluimos en la lista otro hotel con capacidad para 140 huéspedes? Rta. ______________

f. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 9 hoteles? Razona la respuesta. ____

Desarrollo de la situación:

1. Complete la siguiente tabla:

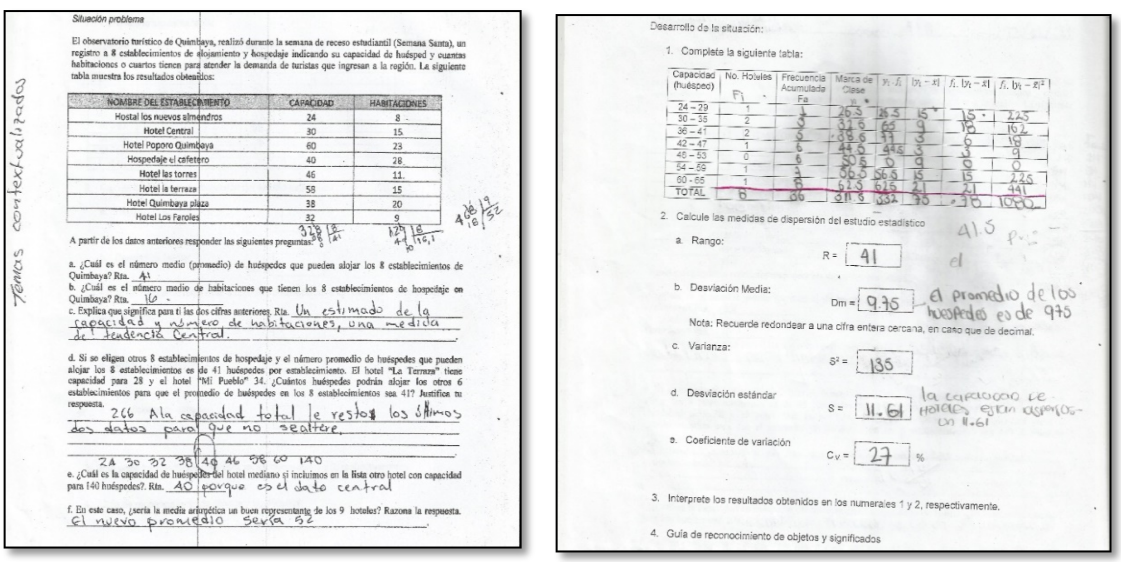
Tabla 4. Tabla de distribución de frecuencias y medidas de dispersión.

Capacidad (huésped)	No. Hoteles	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \,.\, f_i$	$\lvert y_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \,.\, \lvert y_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \,.\, \lvert y_i - \bar{x} \rvert^2$
24 – 29	1						

30 – 35	2
36 – 41	2
42 – 47	1
48 – 53	0
54 – 59	1
60 - 65	1
TOTAL	

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

   a. Rango:
      R =
   b. Desviación Media:
      Dm =
   c. Varianza:
      S^2 =
   d. Desviación estándar
      S =


Situación problema

El observatorio turístico de Quimbaya, realizó durante la semana de receso estudiantil (Semana Santa), un registro a 8 establecimientos de alojamiento y hospedaje indicando su capacidad de huésped y cuantas habitaciones o cuartos tienen para atender la demanda de turistas que ingresan a la región. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

NOMBRE DEL ESTABLECIMIENTO	CAPACIDAD	HABITACIONES
Hostal los nuevos almendros	24	8
Hotel Central	30	15
Hotel Poporo Quimbaya	60	23
Hospedaje el cafetero	40	28
Hotel las torres	46	11
Hotel la terraza	58	15
Hotel Quimbaya plaza	38	20
Hotel Los Faroles	32	9

A partir de los datos anteriores responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el número medio (promedio) de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos de Quimbaya? Rta. 41

b. ¿Cuál es el número medio de habitaciones que tienen los 8 establecimientos de hospedaje en Quimbaya? Rta. 16

c. Explica que significa para ti las dos cifras anteriores. Rta. Un estimado de la capacidad y número de habitaciones, una medida de tendencia Central.

d. Si se eligen otros 8 establecimientos de hospedaje y el número promedio de huéspedes que pueden alojar los 8 establecimientos es de 41 huéspedes por establecimiento. El hotel "La Terraza" tiene capacidad para 28 y el hotel "Mi Pueblo" 34. ¿Cuántos huéspedes podrán alojar los otros 6 establecimientos para que el promedio de huéspedes en los 8 establecimientos sea 41? Justifica tu respuesta.
266 A la capacidad total le restos los últimos dos datos para que no se altere.

24 30 32 38 40 46 58 60 140

e. ¿Cuál es la capacidad de huéspedes del hotel mediano si incluimos en la lista otro hotel con capacidad para 140 huéspedes?. Rta. 40 porque es el dato central

f. En este caso, ¿sería la media aritmética un buen representante de los 9 hoteles? Razona la respuesta.
El nuevo promedio sería 52

Temas contextualizados

Desarrollo de la situación:

1. Complete la siguiente tabla:

Capacidad (huésped)	No. Hoteles Fi	Frecuencia Acumulada Fa	Marca de Clase y_i	$y_i \cdot f_i$	$\lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i . \lvert y_i - \bar{x}\rvert$	$f_i . \lvert y_i - \bar{x}\rvert^2$
24 – 29	1	1	26.5	26.5	15	15	225
30 – 35	2	3	32.5	65	9	18	162
36 – 41	2	5	38.5	77	3	6	18
42 – 47	1	6	44.5	44.5	3	3	9
48 – 53	0	6	50.5	0	9	0	0
54 – 59	1	7	56.5	56.5	15	15	225
60 - 65	1	8	62.5	62.5	21	21	441
TOTAL	8	36	311.5	332	75	78	1080

2. Calcule las medidas de dispersión del estudio estadístico

a. Rango: R = 41

b. Desviación Media: Dm = 9.75 El promedio de los huespedes es de 975

Nota: Recuerde redondear a una cifra entera cercana, en caso que de decimal.

c. Varianza: S^2 = 135

d. Desviación estándar S = 11.61 la capacidad de hoteles estan dispersos en 11.61

e. Coeficiente de variación Cv = 27 %

3. Interprete los resultados obtenidos en los numerales 1 y 2, respectivamente.

4. Guía de reconocimiento de objetos y significados

Figura 2. Resultado estudiante 1 Parte 1 y 2

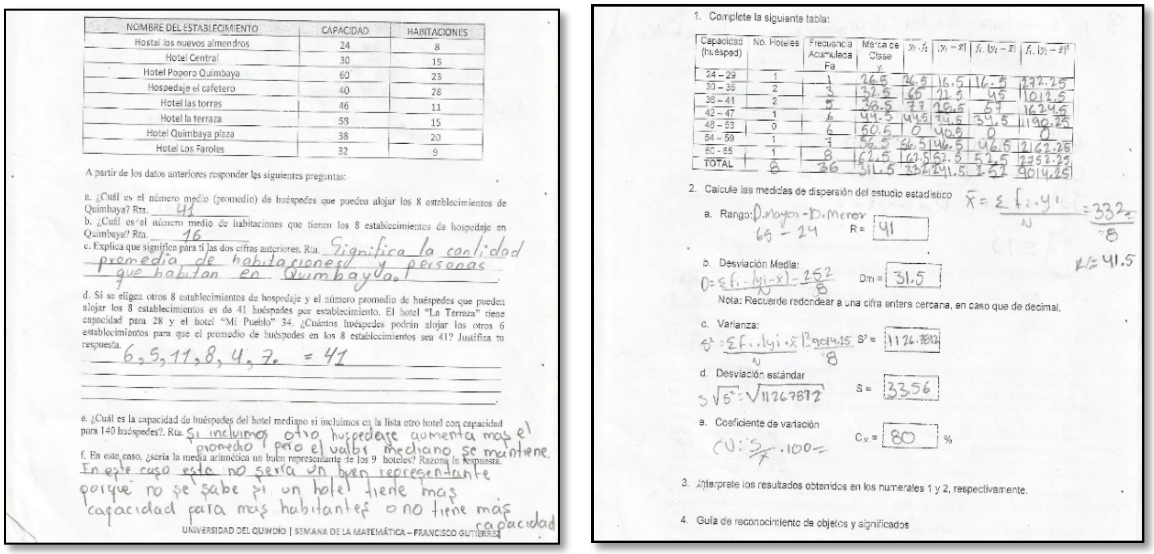


Figura 3. Resultados estudiantes 2 parte 1 y 2.

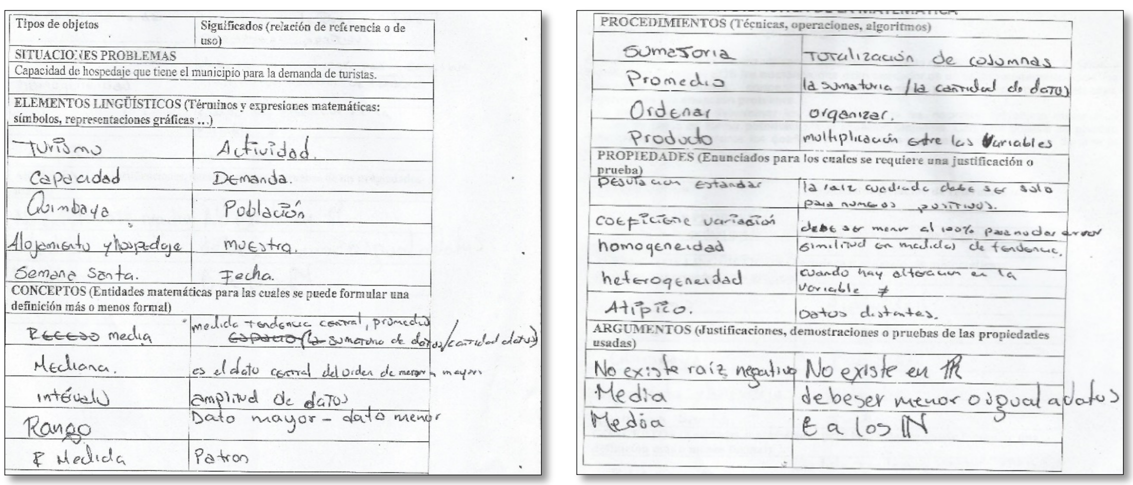


Figura 4. Configuración epistémica usando la Gros.

Conclusiones

La finalidad de una investigación en didáctica de la matemática es llegar a la institucionalidad del objeto matemático. El docente investigador, luego de hacer el diseño y las implementaciones de las prácticas matemáticas en el aula y fuera de ella, recopila los resultados y los somete a un análisis descriptivo – cualitativo – cuantitativo, para obtener resultados que lo llevan a sacar conjeturas y conclusiones sobre el aprendizaje obtenido por los estudiantes.

Las prácticas matemáticas para el aprendizaje de las medidas de dispersión desde el enfoque ontosemiótico, nos ha llevado a la interpretación del concepto en contextos sociales y económicos, al cálculo de estos indicadores o parámetros de variabilidad desde situaciones utópicas y su respectiva interpretación.

Vemos entonces, cómo a través de las configuraciones aportadas en cada faceta de la idoneidad de la didáctica, se fue construyendo la institucionalidad del concepto del objeto matemático, bajo el foco de una trayectoria didáctica y así lograr la fenomenología del objeto matemático.

Desde la mirada de la faceta epistémica, en las ejecuciones de situaciones problemas, resultaron apropiadas en tanto que han permitido contextualizar la mayoría de los conceptos, procedimientos, propiedades, lenguajes y argumentos de la estadística elemental abarcando aspectos del conocimiento común y avanzado (Godino J. , 2010). A partir de los resultados obtenidos, los estudiantes junto con el profesor, logran configurar la epistemología del concepto del objeto matemáticos, logrando así la finalidad en esta faceta.

Referencias bibliográficas

Godino, J. (2010). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. pag. 1-10.

Godino, J. (2014). Enfoque Ontosemiotico. *Revista Educacion Matemática*, 5.

Godino, J. (2014). *Síntesis del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas.* Granada: Universidad de Granada.

Godino, J. (2014). Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática; Motivación, sustentación. pág 313.

Gutierrez, F., y Aldana, E. (2017). *Practicas en el Apredizaje de la medidas de dispersión en un contexto turistico.* Armenia.

Nieto, A. (2017). *Una idoneidad didáctica para la formacion de profesores que atienden poblaciones con deficit cognitivo, desde el desarrollo del pensamiento aleatorio.* Investigacion, Universidad del Quindio, Quindio, Armenia. Recuperado el 7 de Enero de 2018

Ramos, A. B. (2009). Los criterios de idoneidad y propuestas de cambios institucionales en el ámbito universitario. *Investigación y Postgrado*, pág. 115-139.

Vallecillos, .., Castro, Florés, y Fernando. (2006). *Didactica de la Matemática en la Educación Primaria.* Granada, España: Proyecto Editorial.

Vallecillos, A., Castro Martinez, E., Florés Martinez, P., y Fernando García, F. (2001). *Didactica de la Matemática en la Educación Primaria.* Granada, España: Proyecto Editorial.

Wertsch, J. V. (1978). Vygotsky y la formación social de la mente. En J. V. Wertsch, *El método Vygotsky* (págs. 83-92). Sevilla: Paídos.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ANÁLISIS DE CIRCULACIONES PARA EVALUAR EL DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA EL CONCEPTO DE FRACCIÓN

CIRCULATION ANALYSIS FOR THE EVALUATION OF A TEACHING DESIGN ON THE CONCEPT OF FRACTION

Elizabeth Vásquez Tirado, César Fabián Romero Félix, Maricela Armenta Castro
Universidad de Sonora. (México)
ely.vasquez.tirado@gmail.com, cesar.romero@unison.mx, maricela@mat.uson.mx

Resumen
Se presentan resultados preliminares de un proyecto de tesis de Maestría sobre el diseño, implementación y evaluación de actividades didácticas sobre significados de las fracciones para niños de sexto grado de primaria. El diseño de las actividades parte de la propuesta de *estructuras centrales* de Lamon (2007, 2012), centrándonos aquí en dos significados: medida y operador. Así mismo, las tres etapas del trabajo fueron guiadas por el modelo de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) y, en términos de las circulaciones observadas, presentamos el análisis de la implementación de las actividades y la valoración de éstas.

Palabras clave: fracciones, diseño de enseñanza, espacios de trabajo matemático, circulaciones

Abstract
In this article we present preliminary results from a master’s thesis project about the design, implementation and evaluation of teaching activities for certain meanings of fractions, aimed at elementary school students. The design of the teaching activities follows Lamon’s proposed *central structures* (2007, 2012), focusing in two meanings: measure and operator. Likewise, the three stages of the project were guided by the model of Mathematical Working Spaces (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) and, in terms of the observed *circulations,* we present the analysis of the implementation of the activities and their evaluations.

Key words: fractions, teaching design, mathematical working spaces, circulations

Introducción

En el sistema educativo mexicano, de manera similar a otros países, el concepto de fracción se plantea a lo largo de la educación obligatoria. En particular, al finalizar la primaria (12 años), se espera que los alumnos resuelvan problemas que impliquen leer, escribir, comparar, sumar, multiplicar o dividir números en representación fraccionaria y decimal; calculen porcentajes e identifiquen distintas formas de representación de las fracciones. Sin embargo, diversos resultados de investigación y las varias evaluaciones estandarizadas muestran deficiencias en el desempeño de los estudiantes para resolver tales problemas. Ante esta problemática, se desarrolló como proyecto de tesis de maestría el diseño, implementación y evaluación de una serie de actividades de enseñanza para apoyar a los estudiantes de sexto grado de primaria en el aprendizaje de algunos significados de fracción.

Para la etapa de diseño, nos apoyamos principalmente en la categorización de Lamon (2007, 2012) de *estructuras centrales del concepto de fracción*, ya que evaluamos que ésta permite un acercamiento compatible con los requerimientos del Sistema Educativo Mexicano. Llegamos a este supuesto tras analizar la descripción de las siete estructuras: *medida, cantidad y covariación, pensamiento relativo, planteamiento de unidades, reparto y comparación, razonamiento ascendente y descendente, interpretación de números racionales*; y los argumentos de Lamon sobre cómo "la comprensión de los niños que tuvieron enseñanza enfocada en todas las estructuras 'aumentó' de manera conjunta, y aunque no recibieron enseñanza específica en otras interpretaciones, al final de sexto grado, ellos usaban múltiples interpretaciones y se involucraron en razonamientos que no había observado previamente en niños de tan corta edad" (2012, p. 258).

De tal manera, la propuesta de enseñanza está conformada por una serie de actividades didácticas para favorecer la comprensión de la fracción como medida, como operador y como razón, en el sentido de Lamon (2012). Son el resultado de una fase de diseño, tanto de hojas de trabajo como de recursos de apoyo (material concreto y applets en GeoGebra), una fase de implementación y otra de análisis de estas.

Mostramos en este reporte la definición del método y los resultados del análisis de las actividades didácticas diseñadas para favorecer la comprensión de la fracción como medida y como operador. Para comprobar la eficacia de nuestros diseños, y de manera indirecta de la categorización de Lamon (2012), analizamos la puesta en escena de nuestras actividades a partir del modelo de Espacios de Trabajo Matemático, conocido por sus siglas *ETM* (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016).

Elementos teórico-conceptuales

Ya que el presente artículo se desprende del proyecto de tesis declarado arriba, los referentes teóricos incluyen la categorización de significados de fracción, usados principalmente para la etapa de diseño, y el modelo teórico de los espacios de trabajo matemático, utilizado para la etapa de análisis que describimos en las siguientes secciones.

Estructuras centrales del concepto de fracción

La fracción como *medida* es la medida asignada a un intervalo o región. En el caso de la recta numérica, la unidad es siempre un intervalo de longitud *1*, que cuando es partido en b subintervalos iguales, cada subintervalo es de longitud $\frac{1}{b}$ (de *l*), así que la fracción $\frac{a}{b}$ representa a intervalos de longitud $\frac{1}{b}$. Como *operador* se trata de una función de un conjunto o región en otro conjunto o región, o bien, como un conjunto de instrucciones que conforman un proceso. Mientras que como *razón* es una relación de comparación entre dos cantidades cualesquiera, con características especiales (según Lamon, 2012).

Espacios de trabajo matemático – ETM

El modelo de los ETM está diseñado para funcionar como una herramienta en el estudio del trabajo matemático de profesores y estudiantes dentro de la clase de matemáticas. Sus autores describen este espacio abstracto como “una estructura organizada de manera que permite el análisis de la actividad matemática de individuos lidiando con problemas matemáticos” (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 1). Este modelo no propone directamente qué actividad realizar en la clase de matemáticas, sino que se enfoca en analizar el desarrollo de significados en los estudiantes, resaltando las relaciones entre la actividad realizada y el significado construido.

De tal manera, para analizar el trabajo de los estudiantes se plantea analizar la relación entre dos planos ideales, el epistemológico y el cognitivo, durante el desarrollo del trabajo matemático. El plano epistemológico se describe en relación con el contenido matemático del campo de estudio, mientras que el plano cognitivo es en relación con el pensamiento del individuo al resolver problemas. Así, como una metáfora geométrica, estos planos permiten concebir un “espacio abstracto como una estructura organizada de tal manera que permite el análisis de la actividad matemática de individuos que se enfrentan a problemas matemáticos” (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 5). se consideraron las componentes del ETM que permiten evaluar el diseño de las actividades didácticas según el desempeño de los estudiantes al intentar resolverlas.

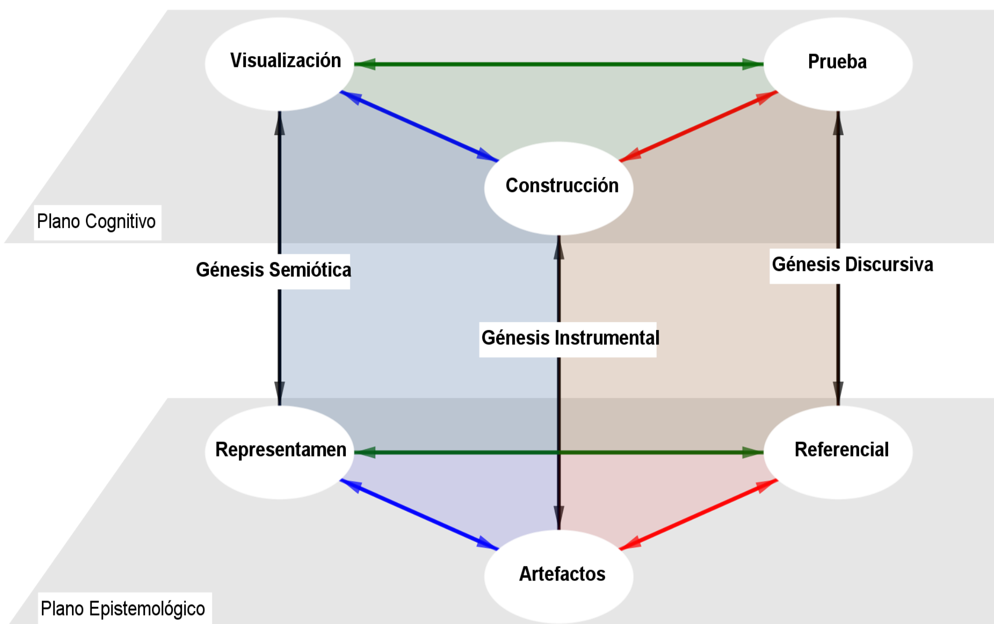


Figura 5. El espacio de trabajo matemático y sus génesis (Kuzniak & Richard, 2014, p. 9)

En el plano epistemológico, para analizar lo referente al contenido matemático, se encuentran tres elementos: signos, artefactos y la teoría matemática de referencia (etiquetados en la figura anterior como Representamen, Artefactos y Referencial).

Viendo a los signos en el sentido de Pierce, se analiza el conjunto de objetos concretos y tangibles que representan a otra cosa o al objeto mismo; “los signos podrán ser dibujos geométricos, símbolos algebraicos o gráficas, incluso fichas, maquetas o fotos” (Kuzniak & Richard, 2014 p. 8). En el presente trabajo el representamen está conformado por: lenguaje natural, diagramas, esquemas, expresión simbólica, expresión numérica, fracción común, fracción unitaria, significados de fracción: medida, operador, razón, cociente y parte-todo.

Los artefactos son aquellos que permiten al usuario manipular los objetos matemáticos (Montoya, Mena, Mena, 2014, p. 186). De acuerdo con Rabardel (según Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) estos pueden ser de tipo material o simbólico, como compás, regla, calculadora, algoritmos, rutinas, herramientas, software. Algunos artefactos considerados para estas actividades son: material concreto, regla, algoritmo de la suma, multiplicación y herramientas digitales en este caso applets elaboradas en GeoGebra.

El elemento referencial está conformado por un conjunto de propiedades, definiciones, teoremas y axiomas que se refieren a la parte teórica del trabajo matemático, que da soporte al discurso deductivo de prueba. (Kuzniak, Tanguay, Elia, 2016, p. 5). En este caso, en el referencial encontramos relaciones de equivalencia, comparación de fracciones, inverso multiplicativo, densidad de los racionales, etc.

Por otro lado, el plano cognitivo está determinado por tres procesos mentales: visualización, construcción y prueba. Arcavi (2003, p. 217) define la visualización como:

> La capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar, desarrollar ideas y avanzar a la comprensión.

La construcción está relacionada con las acciones generadas a partir del uso de herramientas, las acciones que no necesariamente resulten en producciones tangibles como dibujos o escritos, pero pueden incluir observación, exploración o incluso experimentación. Finalmente, la prueba que consiste en argumentaciones deductivas organizadas, afirmaciones que involucren definiciones, hipótesis, conjeturas, que se basa en el proceso discursivo y de validación a partir del referencial (Kuzniak, 2016).

El plano epistemológico y el cognitivo se vinculan a través de tres tipos de *génesis*: *semiótica, instrumental* y *discursiva*. La génesis semiótica está relacionada con signos de codificación e interpretación, que puede partir de un representamen y tomar una representación visual, o bien, iniciar en la mente desde el objeto para después ser evocado un signo. La génesis instrumental habilita a los artefactos para procesos de construcción que contribuyan al logro del trabajo matemático. Llamaremos herramienta a aquel artefacto con utilidad potencial para resolver la tarea propuesta. La génesis discursiva tiene como finalidad enlazar un discurso de prueba apoyado en las propiedades que conforman el referencial, en algunos casos el discurso puede estar basado mayormente en el instrumento y en otros en el representamen. De tal manera, el trabajo matemático se considera como el resultado de un proceso continuo de génesis que permiten que estos dos planos se articulen.

Siguiendo con la metáfora geométrica, al conectar los planos horizontales, las génesis generan planos verticales, cada uno resaltando un tipo de trabajo matemático (ver siguiente figura). El trabajo de *comunicación* se asocia a las génesis semiótica y discursiva (plano Sem-Dis), el de *razonamiento* (Ins-Dis) a las génesis instrumental y discursiva; y finalmente el de *descubrimiento* (Sem-Ins) con lo referente a las génesis semiótica e instrumental.

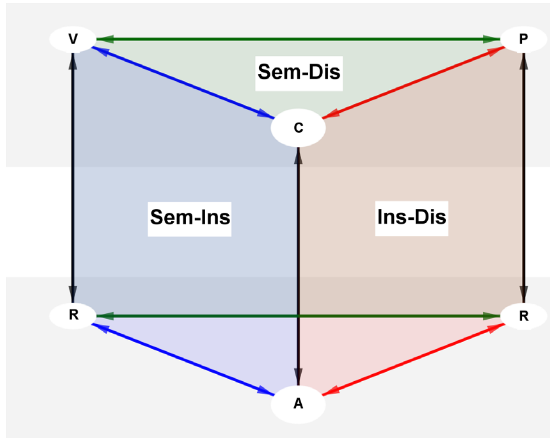


Figura 6. Los tres planos verticales del modelo ETM (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 7)

Finalmente, para valorar las actividades diseñadas consideramos el término *trabajo matemático completo* introducido por Kuzniak, Nechache y Drouhard (según Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) que se cumple cuando:

- Existe una relación genuina entre los planos horizontales. Esto significa que los estudiantes son capaces de seleccionar una herramienta y utilizarla de manera apropiada como instrumento para resolver una tarea.
- Se presenta una diversidad entre las génesis y los planos verticales del modelo. (Herramientas, técnicas, propiedades y circulaciones por el modelo).

Tomando esto en cuenta, nos enfocamos en los componentes del ETM que nos permiten evaluar el diseño de las actividades didácticas según el desempeño de los estudiantes al intentar resolver problemas. Inicialmente, analizamos el contenido del plano epistemológico y posibles *ETM's idóneos,* vistos como los adecuados según la institución educativa involucrada y el conocimiento que quiere ser enseñado (Ver Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016, p. 9) para cada significado de fracción, y posteriormente, estudiamos las circulaciones mostradas por los estudiantes participantes; de manera semejante al análisis de *tareas emblemáticas* descritas en este marco (Kuzniak & Nechache, 2016).

Descripción del diseño de las actividades y análisis a priori

El contenido de las actividades sigue una evolución ideal del trabajo matemático en el ETM idóneo en tres etapas, favoreciendo el trabajo en cada plano vertical.

- *Exploración*: planteamiento de una problemática inicial, que pueden intentar resolver con sus conocimientos previos, pero que requieren el uso del significado específico para completar su solución.
- *Construcción*: familiarización con nuevas herramientas para la resolución de los problemas.
- *Validación*: resolver el problema inicial y un problema más general, incorporando el trabajo de las etapas previas.

Además, se favorecen transiciones entre trabajo individual, en equipo y discusión grupal, para el trabajo en el plano de la comunicación.

Antes de implementar las actividades diseñadas, se analizaron para evaluar el posible conocimiento favorecido y su relación con el currículo en términos de ETM's idóneos. En estos, se organizan los elementos propuestos por Lamon

(2012) en el plano epistemológico y se describe en cada etapa de las actividades las génesis y/o planos verticales que se espera favorecer. Por ejemplo, para la etapa del significado de medida, donde se desarrolla la técnica de partición sucesiva para medir segmentos se resaltaron los siguientes elementos:

Actividad 1 Medida Página 2	➢ **Uso de GeoGebra**	**Actividad en equipo**
ETM Idóneo En esta actividad se hace uso de herramientas tecnológicas, específicamente el applet Act.M1 donde aparece un segmento de recta que tiene marcado un punto asociado a la posición de una tortuga. El applet solicita una fracción que indique la posición de la tortuga mediante la manipulación de los deslizadores n y m que hacen particiones en la recta, incluso es posible ingresar valores de respuesta sin utilizar los deslizadores. El applet incluye evaluación, esto permite al equipo saber que la fracción propuesta es una respuesta correcta. En esta actividad se espera activar la génesis semiótica e instrumental, favoreciendo el plano de descubrimiento, en el referencial tenemos la partición sucesiva que se espera sea parte de los artefactos disponibles para las siguientes actividades.		

Tabla 5 Ejemplo de ETM Idóneo

Al evaluar las actividades, a priori, se concluyó que sí se podrían favorecer las tres génesis de los planos verticales y se prosiguió con su implementación. Sin embargo, en retrospectiva se pudo identificar que algunas de las génesis no se favorecieron adecuadamente, describimos estas diferencias en la sección de análisis y resultados.

■ Metodología

Las actividades didácticas se implementaron en un grupo de sexto grado de primaria, 32 estudiantes de una escuela privada, dentro del horario escolar; cada niño contó con un juego completo materiales y las hojas de trabajo que se proporcionaban al inicio de cada sesión. Se formaron 8 equipos de 3 integrantes cada uno y 2 equipos de 4 integrantes cada uno. Se dispuso de una computadora para el uso de applets disponibles en la plataforma en línea de GeoGebra.

El trabajo matemático de los estudiantes es evaluado a partir de notas de observación tomadas durante las sesiones de clase por un observador participante y al finalizar la clase por la profesora de la clase, así como también de las respuestas dadas por los alumnos en las hojas de trabajo. El análisis se realizó en dos fases, considerando los elementos de Lamon (2012) que caracterizan a cada significado, primero se realizó una descripción del trabajo de los estudiantes en cada una de las actividades. En la segunda fase, considerando los elementos del plano epistemológico y del plano cognitivo de los ETM, se identificaron las circulaciones presentes al resolver las actividades y según la *completez* del trabajo matemático y la certeza de las soluciones a los problemas, se categorizaron casos de éxito, desempeño regular y fracaso.

■ Análisis y resultados

El análisis se realizó en dos fases, por un lado, considerando los elementos de Lamon (2012) que caracterizan a cada significado, primero se realizó una descripción del trabajo de los estudiantes en cada una de las actividades. Por otro lado, considerando los elementos del plano epistemológico y del plano cognitivo de los ETM, se

identificaron las circulaciones presentes al resolver las actividades, esta segunda fase es la que reportamos aquí. En ambas fases se clasificaron las respuestas de los estudiantes en niveles de desempeño bajo, regular y alto.
Por ejemplo, en el análisis de *partición sucesiva,* elemento del significado de medida, observamos los siguientes niveles de trabajo matemático (A: bajo, B: medio, C: alto)

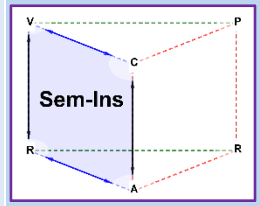
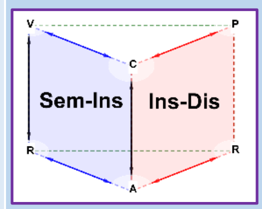
Tarea	Circulación	Diagrama
Hoja 2 Uso de GeoGebra Medición de segmentos por partición sucesiva	B. A partir del uso del applet (artefacto) algunos estudiantes manipulan los deslizadores para explorar y lograr proponer una fracción para la posición de la tortuga (instrumentación) activando la génesis instrumental al ser necesario utilizar los dos deslizadores porque en algunos casos un deslizador no es suficiente para proponer la fracción, entonces es necesario manipular el segundo deslizador para partir la partición inicial, además realizan un dibujo como una representación icónica de lo presentado en el applet activando la génesis semiótica, por lo tanto favorece el plano Sem-Ins.	
	C. Otros estudiantes manipulan los deslizadores para explorar el efecto que producen, Sem-Ins, a partir de la instrumentación asignan valor al deslizador n y de acuerdo a la partición obtenida, identifican la partición sucesiva para asignar el valor al deslizador m con la intención de coincidir con la posición de la tortuga, activando el plano Ins-Dis, en esta circulación se identifican propiedades de la partición sucesiva, como que el segmento que necesita volver a partir puede ser el nuevo entero y a partir de donde esté localizado el punto decidir la nueva partición, además del trabajo en el plano de exploración.	

Tabla 6 Análisis de circulaciones en la etapa de construcción

En la tabla anterior se muestra el análisis correspondiente a la etapa de construcción, por lo que está centrada en la génesis instrumental. En los casos de alto desempeño los estudiantes mostraron trabajar en los planos de *exploración* y *validación,* mientras que los de desempeño medio sólo en el de exploración. En general, para la mayoría de los elementos de significado propuestos por Lamon, se observó este tipo de trabajo en la etapa de construcción, mientras que en las etapas de exploración se centró el trabajo en la génesis semiótica y en la de validación en la génesis discursiva.

Un ejemplo donde se observa principalmente la génesis semiótica es en las etapas de exploración del significado de medida, en particular del elemento de partición sucesiva.

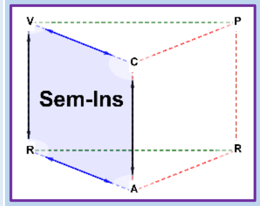
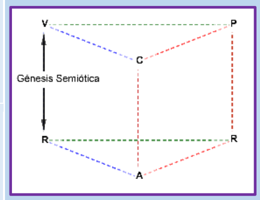
Tarea	Circulación	Diagrama
Hoja 1 Representa cada fracción sobre la recta dada.	A. A partir de las fracciones propuestas (representamen) algunos estudiantes recurren a la visualización y a la utilización de una técnica que les permite partir el segmento en el número que indica el denominador y señalar la partición que corresponde al numerador (instrumentalización), esta técnica se relaciona con el significado parte-todo ya que parten el entero y entonces pueden marcar la fracción solicitada. En esta tarea se activan la génesis semiótica y la instrumental favoreciendo el plano Sem-Ins.	
	B. Algunos estudiantes visualizan la posición de la fracción solicitada a partir del representamen $\frac{1}{2}$, activando la génesis semiótica.	
	C. Otros estudiantes a partir de la visualización "estiman" la posición de las fracciones y marcan únicamente la representación solicitada, activando la génesis semiótica.	

Tabla 7 Análisis de circulaciones en la etapa de exploración

En el caso anterior, aunque se identificó trabajo en el plano Sem-Ins, se clasificaron algunas respuestas como de bajo desempeño debido a que no se utilizaron los elementos del ETM idóneo de medida, sino de sus ETM personales del significado parte-todo. Es decir, las génesis observadas no se refieren al elemento de partición sucesiva, aunque pudieron representar la fracción dada.

Finalmente, la génesis discursiva fue notoriamente la más difícil de favorecer, lo cual observamos por la poca presencia del plano Sem-Dis en las circulaciones analizadas. Atribuimos esto a la falta de tareas accesibles de comunicación, en las que fuera necesario argumentar sus construcciones. Uno de estos casos se observa en el trabajo con el elemento de *suma de fracciones*, para el significado de medida. Aunque se identifican respuestas de alto nivel, los estudiantes mostraron dificultades para argumentar y describir sus métodos.

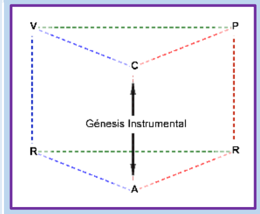
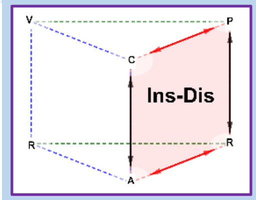
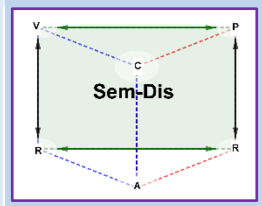
Tarea	Circulación	Diagrama
Hoja 11 Suma de fracciones individual.	A. Algunos estudiantes generan fracciones equivalentes, pero no logran concluir de manera correcta las operaciones propuestas, activando la génesis instrumental.	
	B. Otros estudiantes logran resolver de manera correcta las operaciones propuestas activando la génesis instrumental, hacen sugerencias acerca de la posibilidad de restar en el applet activando el plano Ins-Dis.	
	C. Algunos estudiantes resuelven de manera correcta las operaciones propuestas (instrumentación) y las sugerencias para que sea posible resolver restas en el applet se basan en la dirección de los vectores activando el plano Sem-Dis.	

Tabla 8. Análisis de circulaciones en la etapa de validación

Señalamos en la tabla anterior el plano Sem-Dis para las respuestas de alto desempeño, aunque fue una génesis discursiva que evaluamos como pobre. Los estudiantes comunican claramente sugerencias viables para modificar la herramienta, a partir del conocimiento sobre su uso y funcionamiento, para resolver otros problemas; sin embargo, no argumentaron en términos de propiedades de los objetos matemáticos, la validez de las modificaciones.

Conclusiones

Los resultados preliminares, sugieren que favorecer el trabajo con cada significado sí genera ETM's compatibles con los idóneos previstos. Sobre la sugerencia de Lamon de privilegiar un significado particular y establecer relaciones con los demás (2007, p. 661), parece ser que el significado de medida se puede tomar como principal, ya que los estudiantes muestran intentar usar herramientas, representaciones y argumentos de ese significado al iniciar la solución de un problema de un significado nuevo. Por otro lado, la descripción de niveles de desempeño a partir del análisis de circulaciones permitió a la profesora titular del curso diseñar actividades complementarias para apoyar a los estudiantes en las génesis específicas en las que haya mostrado dificultades.

Finalmente, parece ser necesaria una etapa en las actividades específica para la génesis discursiva y la comunicación; aunque en cada hoja de trabajo se incluían preguntas para que los estudiantes mostraran sus argumentos, éstas no fueron suficientes para que todos los estudiantes desarrollaran una buena génesis discursiva. De tal manera, para futuras revisiones de la secuencia de enseñanza, se reestructurará en cuatro etapas para incluir un espacio de argumentación y comunicación; y así tener mejores posibilidades de generar trabajo matemático completo.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics. April 2003, vol.52, Issue 3, pp. 215-241

Kuzniak, A. & Nechache, A. (2016). Tâches emblématiques dans l'étude des ETM idoines: existence et usages. Cinquième symposium des Espaces de Travail Mathématiques, Florina, Grèce, juillet 2016.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. ZDM Mathematics Education, 48, 721–737.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester, Jr. (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national teachers of mathematics (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lamon, S. (2012). Teaching Fractions and ratios for understanding. Nueva York y Londres: Routledge Taylor & Francis Group.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON USO DE SOFTWARE ANALLOGICA Y RENDIMIENTO ACADÉMICO EN LÓGICA PROPOSICIONAL

APPLICATION OF THE PROBLEM SOLVING METHOD WITH USE OF ANALOGIC SOFTWARE AND ACADEMIC PERFORMANCE IN PROPOSITIONAL LOGIC

Flaviano Armando Zenteno Ruiz, Haydee Quinto Llanos
Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión. (Perú)
armandozenteno77@gmail.com, quinto26@hotmail.com

Resumen

La experiencia desarrollada consideró el objetivo: Demostrar que la aplicación del método de resolución de problemas (MRP) con el uso del software Anallogica (SA) mejora el rendimiento académico (RA) en lógica proposicional en la asignatura de matemática básica (LPMB) de los estudiantes del primer semestre, Facultad de Ciencias de la Educación (FCE), Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria (EFPES); Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión (UNDAC), 2018. Se usó el método científico, el diseño cuasi experimental y el pretest y postest, válidos y confiables mediante métodos: juicio de expertos y Alfa de Cronbach, se obtuvieron resultados como: media aritmética en el grupo experimental 12, y del grupo de control 06; coeficiente de variación del grupo experimental 28% y del grupo control 46%.; que comprobó las hipótesis de investigación mediante el uso de la T de Student.

Palabras clave: resolución de problemas, rendimiento académico, lógica proposicional, software Anallogica

Abstract

This study was aimed at showing that the application of problem solving method (PSM) with the use of Anallogica software (AS) improves the academic performance (AP) of first-semester students on propositional logic in the subject of Basic Mathematics at the Faculty of Education Sciences, the Vocational Training School of Secondary Education (EFPES); and Daniel Alcides Carrión National University (UNDAC), in 2018. We used the scientific method, the quasi-experimental design and the pre-test and post-test, which are valid and reliable through the methods: expert's criteria, and Cronbach's Alpha. We obtained results such as: arithmetic mean in the experimental group 12, and control group 06; coefficient of variation of the experimental group 28% and of the control group 46%; what tested the research hypotheses by using the Student's T test.

Key words: problem solving, academic performance, propositional logic, Anallogica software

Introducción

El presente aporte es también una revisión de la literatura en metodología de resolución de problemas y lógica proposicional, para luego construir una propuesta metodológica para abordar el tema de lógica proposicional y desarrollarlo con el método de resolución de problemas, usando el software Anallogica, para tal fin se presentó la propuesta, se desarrolló la experiencia y se exhibieron los resultados y conclusiones al respecto

El presente trabajo también sirve para hacer viable el aprendizaje de la lógica proposicional en educación superior universitaria frente a las dificultades que tienen los estudiantes de las facultades de ciencias de la educación en su comprensión y aplicación durante su formación profesional y ejercicio de la carrera profesional en diferentes instituciones públicas y privadas de nuestro país.

Marco teórico

Respecto al método de resolución de problemas y el uso del software Anallogica, se sostiene: El aprendizaje y la enseñanza de la matemática desde la concepción basada en la resolución de problemas, se vuelve difícil pero no imposible por las siguientes razones:

1° Matemáticamente, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los alumnos, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no, y qué podrían hacer en lugar de eso.

2° Pedagógicamente, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, dar sugerencias que ayuden a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar esto para cada alumno o grupo de alumnos de la clase.

3° Personalmente, porque el docente estará a menudo en posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de no saber. Trabajar bien sin saber todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima.

Asimismo, es fundamental seguir desarrollando la propuesta de la enseñanza-aprendizaje de la ALM, por medio del MRP, destacándose aspectos principales a profundizar en la investigación:

- El rol del docente en una clase, centrada en la resolución de problemas.
- Lo que realmente ocurre en las clases centradas en la resolución de problemas.
- La investigación debe centrarse en los grupos y las clases como un todo, y no en los individuos aislados.

Con todo lo sustentado anteriormente es de suma importancia seguir tomando en consideración la propuesta que realiza Eduardo Mancera, respecto al método de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, que también resulta ser válido en la enseñanza-aprendizaje de la lógica matemática. Veamos los procedimientos que considera (Mancera, 2000) para el MRP:

Las partes que componen dichas propuestas se basan en la experiencia con maestros y estudiantes del nivel medio y tratan de concentrar los consensos que se pueden detectar entre investigadores y estudiosos del tema. La propuesta consta de las siguientes etapas.

- Planteamiento de un problema.
- Pedir estimaciones de la solución.
- Discutir con el grupo para determinar cuáles son las más viables.
- Solicitar que se resuelva el problema.

- Solicitar que se presenten algunas formas para resolver el problema.
- Presentar, si es necesario, una solución que se vincule con el contenido a tratar del temario.
- Solicitar que se modifiquen los datos del problema y que se analice si las formas planteadas para resolver el problema siguen siendo válidas.
- Plantear una solución y pedir todos o algunos de los datos que se ajusten a la solución planteada.
- Solicitar que se planteen problemas.
- Utilizar una de las soluciones al problema, la que se ligue con la teoría, para introducir conceptos y nociones del temario por cubrir. (p. 31-32).

El uso del software Anallogica es un medio para facilitar la comprensión de la lógica proporcional, que permite hacer viable los diversos conceptos, axiomas y teoremas de la lógica proposicional, se emplea como un medio y no un fin establecido.

Respecto a la lógica matemática y en especial a la lógica proposicional. Piscoya (2001), refiere a la necesidad de informarse sobre la lógica en la cita siguiente: "... dentro del ámbito de la ciencia y de la tecnología lo único que existe, desde hace más de un siglo, para decidir la validez de los argumentos y de las pruebas son los sistemas de lógica matemática". (p.13).

Así, continúa (Piscoya, 2001).

Dichos sistemas lógicos, creados inicialmente por George Boole y desarrollados posteriormente con diversidad, profundidad y complejidad crecientes, se han convertido en el sector del conocimiento teórico que ha dado lugar a las más impresionantes y eficientes aplicaciones tecnológicas durante los últimos 60 años, a ello debe añadirse sus aplicaciones en la matemática, en el análisis, construcción y reconstrucción de teorías científicas, en el diseño experimental de simuladores de las funciones del cerebro y de la mente, en el conocimiento metodológico, entre otras. (p.13).

Metodología

Las variables que se trabajó en la investigación se definen en seguida:

El método propuesto es: *metódo de resolución de problemas con uso del software Anallogica,* cuyos procedimientos detallamos en seguida:

I. Formulación de problemas.
II. Estimación de soluciones.
III. Socialización de la solución más viable.
IV. Resolución de problemas.
V. Exposición de soluciones de los problemas.
VI. Selección de una o varias soluciones vinculadas al tema.
VII. Presentación de nuevos conceptos.
VIII. Formulación de nuevos problemas.

Que se aplica en el proceso enseñanza–aprendizaje con la finalidad de lograr los objetivos deseados. Y donde el software Anallogica se usa en forma transversal en cada uno o en todos los procedimientos mencionados, de acuerdo a requerimiento de cada estudiante.

Rendimiento académico

Resultado del proceso de enseñanza–aprendizaje en función de los objetivos previstos, en el periodo de tiempo. El resultado expresa una calificación cuantitativa o cualitativa. En el sistema vigesimal, las calificaciones menores que once son desaprobatorias y los calificativos iguales o mayores que once expresan resultados aprobatorios.

Medios y materiales educativos

Son ayudas para la mejora del proceso enseñanza aprendizaje, del tipo estructuradas y no estructuradas.

Diseño de investigación

Cuasiexperimental, PRETEST – POSTEST con equipo de control.
Esquema.

E G1:	01	X	02
E G2:	01	-	02

Donde.

E	Emparejamiento
O1	PRETEST
O2	POSTTEST
G1	Grupo Experimental
G2	Grupo de Control
X	Método de resolución de problemas con uso de software Anallogica
-	Cualquier otro método que no sea X

Población y muestra

La población lo constituyeron todos los alumnos del I semestre de la Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria, la muestra fue representativa, estratificada y emparejada considerando el dominó 30, cuyo número está determinado en función a la fórmula: ($n= (n^*/ (1+n^*/N))$ y $n^*=s^2/v^2$), con confiabilidad del 95% y error estándar de 0,01.
Dónde: n representa la muestra real, n* representa la muestra aproximada, N representa la población, s^2 representa la varianza, dada por: p (1-p), p es el nivel de confianza de la muestra, es decir: p = 0.95 y v^2 representa el error estándar, para este caso se considera v = 0.01
Los mismos que presentamos en el siguiente cuadro siguiente.

Cuadro 1. Población y muestra de estudiantes, facultad de ciencias de la educación, escuela de formación profesional de educación secundaria, universidad nacional daniel alcides carrión

PROGRAMAS DE ESTUDIO	POBLACIÓN	MUESTRA
Ciencias Sociales, Filosofía y Psicología Educativa	19	
Matemática - Física	19	19
Biología y Química	10	
Comunicación y Literatura	20	20
Tecnología Informática y Telecomunicaciones	12	12
Historia, Ciencias Sociales y Turismo		
Lenguas Extranjeras: Ingles Francés	10	
	22	22
TOTAL	112	73

Fuente: registros académicos, fce, undac.

Además:

G1: Programas de: Matemática Física y Tecnología Informática y Telecomunicaciones
G2: Programas de: Comunicación y Literatura y Lenguas Extranjeras: Ingles Francés, selección, validación y confiabilidad de los instrumentos de investigación.

Dominó 30

Empleamos para emparejar los grupos de la muestra, se administró el dominó 30 a los diferentes programas de estudios de la Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria de la Facultad de Ciencias de la Educación, cuyos resultados se encuentran en el intervalo de 22 a 23; cuya validez se dio por medio del juicio de expertos (Dr. Armando Isaías Carhuachin Marcelo y Dr. Germán Anco Torres) y la confiabilidad en una prueba piloto, con un coeficiente de 0.90, empleando el método de Alfa de Cronbach, cuyos resultados se encontraron con la ayuda del software SPSS, versión 24.0.

Pretest y posttest

Se diseñó y elaboró 13 ítems con diferentes grados de dificultad y variedad, cuya validez se logró mediante el juicio de expertos (Dr. Arnulfo Ortega Mallqui y Mg. Werner Surichaqui Hidalgo) y la confiabilidad en una prueba piloto, con un coeficiente de 0.80, empleando el método Alfa de Cronbach, cuyos resultados se encontraron con la ayuda del software SPSS, versión 24.0.

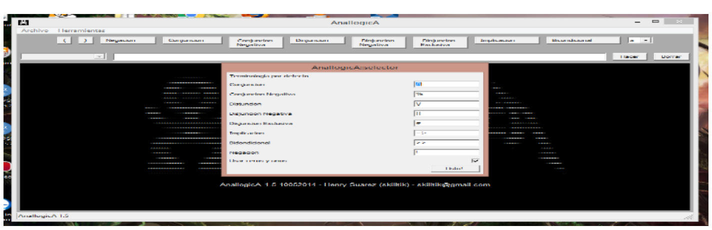
La propuesta se trabajó en un módulo de “lógica matemática fácil”, que desarrollo al largo de sesiones de aprendizaje, por ejemplo, se presenta secuencias del módulo en el caso de la conjunción.

I. Resuelva los siguientes problemas:

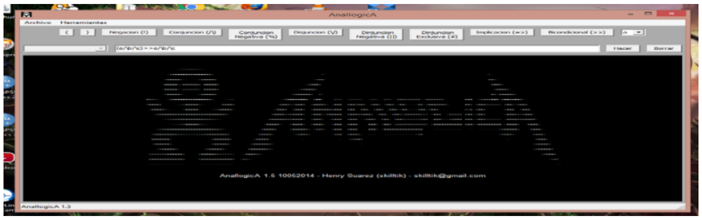
1.1 ¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones? (12 Puntos)
a) 2^n es una potencia par, pero 3^n es una potencia impar.
b) Cerro de Pasco es la capital de Pasco y Lima es la capital del Perú.
c) El Mono desnudo escribió Luís Piscoya sin embargo Denis Morris escribió Lógica General.
d) La suma es igual que adición, aunque la resta es diferente que sustracción.
1.2 ¿Cuántos valores de verdad tiene tres proposiciones y cuáles son? (3 puntos).
1.3 ¿La propiedad conmutativa se cumple, tanto en la conjunción lógica como en la conjunción en el lenguaje natural? Presente un ejemplo. (5 puntos)

II. Socialización de soluciones

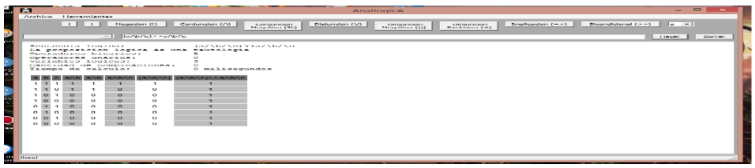
2.1. Ingreso al software Anallogica y determino la notación de proposiciones y de conectivos lógicos



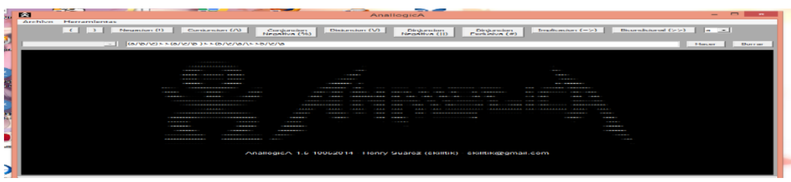
2.2. Ingreso de tres proposiciones (a, b y c) al software Anallogica y luego ver la conjunción de ellas: Es decir:



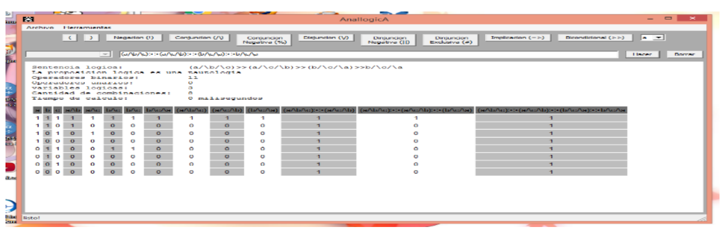
2.3. Pido evaluar las tres proporciones ingresadas con conjunción. Esto es:



2.4. Ingreso indistintamente las 3 proposiciones, cambiándolos de orden. Es decir:



2.5. Pido el resultado. Es decir:



Como se observa, el resultado se mantiene, luego se puede deducir que la conjunción de proposiciones es conmutativa, para cualquier número de proposiciones participantes.

III. Nuevos conceptos

Socialización de soluciones

a. Variables proposicionales:

Son variables preposicionales, aquellos que tienen la función de representar a cualquier proposición no especificada y se denota por: p. Q, r, s, ….

B. Conjuncion:

Si las variables proposicionales p y q representan cualquier par de proposiciones, luego la proposición conjuntiva de la forma p ^ q es verdadera solamente en el caso que p sea verdadera y q también sea verdadera. En cualquier otro caso la proposición es falsa.

c. Nocion:

La conjunción lógica lo relacionamos con la intersección de conjuntos.
d. Tabla de valores de verdad:

p	q	p ^ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

IV. Solucionario
1.1.
a) Falso b) Verdadero c) F a l s o d) Falso
1.2. Tiene 8 posibles valores de verdad y son:

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

1.3. En el lenguaje lógico se cumple: p^q es equivalente a q^p.
En el lenguaje natural no se cumple:
Armando Viajó a Lima y asistió a sus clases de portugués, no es equivalente a: Armando asistió a sus clases de portugués y viajó a Lima.

V. Nuevos problemas

1. ¿Cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?
a) César Vallejo escribió los Heraldos Negros y Ciro Alegría escribió Los Perros Hambrientos.
b) El agua del mar es salada y Cristóbal Colón no descubrió América.
c) Las gallinas son mamíferas y 12 es un número par.
d) Huancayo es la capital de Junín y Daniel Carrión es una provincia de Pasco.
e) Víctor Raúl Espinoza Soto es presidente regional de Pasco y Amanda López Gamarra es alcaldesa de la municipalidad de Yanacancha.
f) 2 + 2 = 4 y 3 + 3 = 6
g) Las rosas son rojas y las violetas son azules.
h) 12 es múltiplo de 4 pero 5 no es mayor que 7.
i) El triángulo tiene tres aristas, pero la pirámide tiene cinco aristas.
j) El oro es un metal sin embargo la plata también lo es.
k) César Vallejo escribió el Tungsteno y Rosa merino canto el Himno Nacional.
l) El olluco es un tubérculo sin embargo Venus es un planeta.
ll) El lago Chinchaycocha está en Lima y el lago Titicaca en Puno.

m) El pentágono tiene 18 lados, aunque el triángulo tiene 3 lados. n) $6 > 7$ y $15 < 8$.

Resultados

Presento los resultados obtenidos de la aplicación del posttest en los elementos de la muestra:
Posttest en el grupo experimental
Grupo experimental

Cuadro estadístico

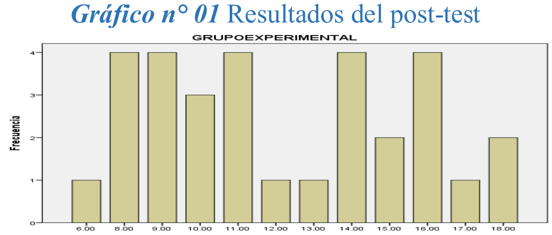
Cuadro n° 02 Resultados del post-test

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válido	6,00	1	3,2	3,2
	8,00	4	12,9	16,1
	9,00	4	12,9	29,0
	10,00	3	9,7	38,7
	11,00	4	12,9	51,6
	12,00	1	3,2	54,8
	13,00	1	3,2	58,1
	14,00	4	12,9	71,0
	15,00	2	6,5	77,4
	16,00	4	12,9	90,3
	17,00	1	3,2	93,5
	18,00	2	6,5	100,0
	Total	31	100,0	

Fuente: Pretes-Postest del 2018

Gráfico estadístico

Gráfico n° 01 Resultados del post-test



Fuente: Cuadro N° 02

Descripción e interpretación

El 61% de los estudiantes Del grupo experimental aprueban el post test con notas de 11 a 18 respectivamente, mientras que el 39% de los estudiantes del grupo experimental desaprueban el posttest con notas de 10 hasta 06 inclusive. Aquí la metodología usada fue la del método de resolución de problemas, que consiste en presentar ejercicios y problemas iniciales a los estudiantes, para que con sus saberes previos los resuelvan, primero en forma individual y luego en grupos de discusión, luego socializan las estrategias empleadas, para tratar el tema relacionado a los ejercicios y problemas en forma de seminario y finalmente se proponen nuevos ejercicios y problemas; todo ello ayudado con el software Anallogica.

Estadísticas Básicas

GRUPO EXPERIMENTAL		
N	Válido	31
	Perdidos	0
Media		12,1290
Mediana		11,0000
Moda		8,00[a]
Desviación estándar		3,40335
Varianza		11,583
Asimetría		,142
Error estándar de asimetría		,421
Curtosis		-1,186
Error estándar de curtosis		,821
Mínimo		6,00
Máximo		18,00
Percentiles	25	9,0000
	50	11,0000
	75	15,0000

Como se aprecia el promedio del grupo experimental es de 12, con coeficiente de variación de (3.40/12, 13=28.02) 28 %, que indica un rendimiento académico en proceso y con cierta homogeneidad. Asimismo, es una distribución positiva tendiente a una mesocúrtica y con modas de 08, 09, 11, 14 y 16.

Posttest en el grupo de control
Grupo de control
Cuadro estadístico

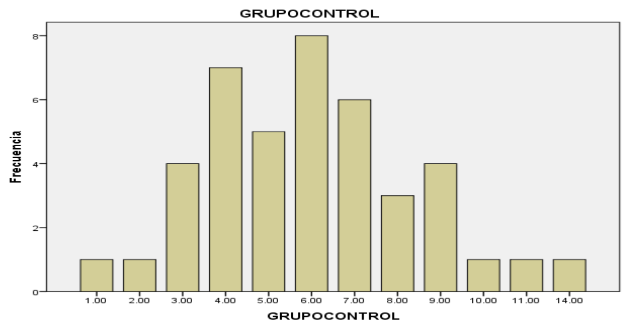
Cuadro n° 03 Resultados del post-test

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válido	1,00	1	2,4	2,4
	2,00	1	2,4	4,8
	3,00	4	9,5	14,3
	4,00	7	16,7	31,0
	5,00	5	11,9	42,9
	6,00	8	19,0	61,9
	7,00	6	14,3	76,2
	8,00	3	7,1	83,3
	9,00	4	9,5	92,9
	10,00	1	2,4	95,2
	11,00	1	2,4	97,6
	14,00	1	2,4	100,0
	Total	42	100,0	

Fuente: Pretes-Postest del 2018

Gráfico estadístico

Gráfico n° 02 Resultados del post-test



Fuente: Cuadro N° 03

Descripción e interpretación

El 5% de los estudiantes del grupo de control aprueban el posttest con notas de 11 y 14 respectivamente, mientras que el 95% de los estudiantes del grupo de control desaprueban el posttest con notas de 10 hasta 01 inclusive.

Estadísticas básicas

GRUPO CONTROL		
N	Válido	42
	Perdidos	0
Media		6,0238
Mediana		6,0000
Moda		6,00
Desviación estándar		2,56133
Varianza		6,560
Asimetría		,704
Error estándar de asimetría		,365
Curtosis		1,118
Error estándar de curtosis		,717
Mínimo		1,00
Máximo		14,00
Percentiles	25	4,0000
	50	6,0000
	75	7,2500

Como se aprecia el promedio del grupo de control es de 06, con coeficiente de variación de (2,56/6,02=0.425) 43%, que indica un rendimiento académico en inicio y con heterogeneidad. Asimismo, es una distribución positiva tendiente a una leptocúrtica y con moda de 06.

Prueba de hipótesis

Para contrastar nuestra hipótesis de investigación, seguimos los pasos establecidos por diversos estadísticos, en especial el propuesto por Manuel Córdova Zamora. Esto es:

Hipótesis de investigación (HI)

Si se aplica el método de resolución de problemas con uso de software Anallogica, entonces mejora el rendimiento académico de lógica proposicional de la asignatura de matemática básica, de los estudiantes del primer semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco.

Hipótesis nula (H0)

Si se aplica el método de resolución de problemas con uso de software Anallogica, entonces no mejora el rendimiento académico de lógica proposicional de la asignatura de matemática básica, de los estudiantes del primer semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco.

Modelo
H1: $U1 > U2$ H0: $U1 \leq U2$

Estadístico
T-Student
Nivel de significancia

$\alpha = 5\% = 0{,}05$; entonces $\alpha = 0{,}05$; luego: $1 – 0{,}05 = 0{,}95 = 1 - \alpha$, que nos permite afirmar que la hipótesis se probará con el 95% de confiabilidad y un error de 5%.

Grados de libertad
$V = n1 + n2 – 2 =31 + 42 – 2 = 71$
Luego: buscando en la tabla estadística el punto crítico, con 95% de confianza y 71 grados de libertad, esto es: [t (0,95; 71)] en filas y columnas, hallamos a “1,66”; el mismo que divide a la región en dos zonas: la de aceptación y la de rechazo.

Cálculo del estadístico
Para determinar el valor de “T”, consideraremos los valores de las medias aritméticas, varianza, grados de libertad y tamaños de la muestra; el mismo que consideramos en el siguiente cuadro:

Cuadro nº 8 Valores estadísticos del posttest

Grupos	Número	Promedio	Varianza
Experimental	31	12	11.58
Control	42	06	6.56

Fuente: posttest

Sustituyendo valores en la fórmula:
T = 8,6

Decisión
Como 8,6 cae en la zona de rechazo, aceptamos la hipótesis alterna (H1), así como la hipótesis de investigación y rechazamos la hipótesis nula (Ho), por lo tanto, la hipótesis de investigación es válida.

Conclusiones

- La aplicación del método de resolución de problemas con uso del software Anallogica mejora el rendimiento académico en lógica proposicional de la asignatura de matemática básica, de los alumnos del primer semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria, de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión, tal como lo muestran las diferentes estadísticas expuestas en el presente trabajo y la contratación de la hipótesis de investigación.

- La aplicación del método de resolución de problemas con uso del software Anallogica fue favorable en el rendimiento académico en lógica proposicional de la asignatura de matemática básica, de los alumnos del primer semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria, de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión, porque los resultados del pretest en el grupo experimental fueron de 07 la media aritmética y 48% el coeficiente de variación y en el grupo de control, la media aritmética fue también de 05 y 46% el coeficiente de variación, mientras que: los resultados del posttest fueron; la media aritmética en el grupo experimental de 12, la media aritmética en el grupo de control 06; así también, el coeficiente de variación en el grupo experimental fue de 28% y en el de control fue de 43%.

- Durante La aplicación de la propuesta del método de resolución de problemas con uso del software Anallogica para estudiantes del primer semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, Escuela de Formación Profesional de Educación Secundaria, de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión, respecto a la enseñanza aprendizaje de los contenidos de lógica proposicional, se comprobó que los estudiantes tienen más dificultad en los procedimientos: dos, que se refiere a la estimación de soluciones; tres, entendida como socialización de la solución más viable; y cuatro, que se refiere a resolución de problemas. Mientras, en el procedimiento cinco, exposición de soluciones, los estudiantes manifiestan tener menos dificultad.

Referencias bibliográficas

Carranza, C. (2003). *Matemática I*. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú y Ministerio de Educación.
Copi, I. (2000). *Introducción a la Lógica*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Eudeba.
Córdova, M. (2000). Estadística descriptiva e inferencial. Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú y Ministerio de Educación.
Mancera, E. (2000). *Saber Matemáticas es Saber Resolver Problemas*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
Piscoya, L. (2001). *Lógica General*. Lima, Perú: Pool Producciones.
Pólya, G. (1989). *¿Cómo Plantear y Resolver Problemas?*. México: Editorial Trillas.
Suarez H. (2010). *Anallogica, Software para crear tablas de verdad.* Argentina. Universidad Nacional del Litoral.
Velásquez, R. (1996). *Organización y Métodos de la Enseñanza de la Matemática.* Lima, Perú: Pontificia Universidad Católica Del Perú.

RAZONAMIENTO COMBINATORIO DEL TRENZADO ARTESANAL: UNA INNOVACIÓN CON FUTUROS PROFESORES

COMBINATORIAL REASONING OF CRAFT BRAIDING: AN INNOVATION WITH PROSPECTIVE TEACHERS

Veronica Albanese, Carmen Batanero, Juan Jesús Ortíz
Universidad de Granada. (España)
vealbanese@ugr.es, batanero@ugr.es, jortiz@ugr.es

Resumen
Se presenta una experiencia de innovación docente que promueve el razonamiento combinatorio a partir del estudio del trenzado artesanal y se encuadra en el programa de formación de profesores en Etnomatemática. Participan en el estudio un grupo de futuros profesores que aprenden a realizar trenzas de 4 hilos y a modelizarlas usando grafos, para después inventar nuevos grafos de trenzas de 16 hilos a partir de patrones combinatorios identificados en las trenzas de 8 hilos. Se observa el uso de diferentes modelos combinatorios y que todos los grafos construidos representan efectivamente trenzas, aunque raramente se identifican todos los posibles.

Palabras clave: etnomatemática, combinatoria, grafos, formación de profesores

Abstract
We present an innovative teaching experience that promotes combinatorial reasoning based on the study of artisan braiding and focuses on the teacher education program in Ethno-mathematics. The participants in the study are a group of prospective teachers who learn to make braids of 4 threads and to model them by using graphs. Then, they invent new graphs of 16-strand braids from combinatorial patterns identified in 8-strand braids. The use of different combinatorial models is observed, and all the graphs constructed effectively represent braids although all the possible ones are rarely identified.

Key words: Ethnomathematics, combinatorics, graphs, teacher education

Introducción

Presentamos una experiencia de innovación docente que promueve el razonamiento combinatorio a partir del estudio de un elemento cultural. La experiencia se enmarca en el programa de Etnomatemática. Este nace del encuentro de estudiosos interesados en las diversas formas de hacer matemáticas y realizar prácticas matemáticas de grupos culturales diversos.

Las reflexiones epistemológicas dentro de esta línea de investigación llevan a aceptar la existencia de diversas formas de hacer matemáticas, que no tienen por qué tener una jerarquía de validez, ya que cada una adquiere sentido y efectividad en un contexto cultural específico (Barton, 1999). Asimismo, el programa de Etnomatemática se interesa en las implicaciones pedagógicas de estas reflexiones (Albanese, Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2017).

La innovación que presentamos se enmarca en este programa, en cuanto propone la construcción de un concepto matemático, el de grafo, y la promoción del razonamiento combinatorio, conectándolo con varios conceptos matemáticos que quedan implícitos, pero intervienen en la innovación (partición, patrón, permutación, entre otros), a partir de una práctica cultural específica que realiza un gremio de artesanos argentinos. Esta práctica artesanal consiste en la realización de trenzas utilizadas después para distintos usos en las labores campesinas.

Se trata de un contexto motivador para los participantes en el estudio al hacerles reflexionar sobre la matemática implícita en artesanías de su entorno próximo.

Marco teórico y antecedentes

La razón de enfocarnos en el razonamiento combinatorio es su importancia como componente del pensamiento formal y por su relación con el muestreo, base de la inferencia estadística (Lockwood y Gibson, 2016). En Batanero, Godino y Navarro-Pelayo (1997) se enumeran otras razones para estimular el desarrollo del razonamiento combinatorio, ya que ayuda a superar errores frecuentes en el recuento y enumeración de problemas probabilísticos, aportando estrategias para su sistematización, entender cuándo y cómo considerar el orden, y evitar confusiones cuando hay (o no) elementos equivalentes.

Las implicaciones educativas del programa de Etnomatemática siguen dos vertientes (Albanese, Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2017). Por un lado se propone rescatar las matemáticas implícitas en algunas prácticas culturales extraescolares para contextualizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el entorno cercano al estudiante. Por otro, se plantea reflexionar sobre la pluralidad de matemáticas existentes ligada al desarrollo de las mismas en el seno de las culturas y la consecuente oportunidad de introducir en el aula técnicas, herramientas, conceptualizaciones y visiones diversas de las tradicionales escolares, no solo respecto a las propias matemáticas que vayan más allá de las curriculares, sino también respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma.

La experiencia aquí descrita intenta abarcar ambas vertientes ya que partimos de una práctica extraescolar del entorno socio-geográfico de los participantes para construir los conceptos matemáticos –lo que responde a la primera vertiente-, por otro lado planteamos la experiencia de manera que responda a la reflexión sobre la existencia de matemáticas al plural, y formas de hacer matemáticas al plural, de hecho se deja abierta la posibilidad de encontrar modelizaciones que difieran de la artesanal y se abre un espacio de reflexión sobre las diversas formas de pensar de cada uno y cada grupo cultural.

En este documento dejamos constancia de los resultados con respecto a la primera vertiente (la segunda se destaca en otros trabajos como Albanese y Perales, 2017). Para ello es determinante hacer referencia a cómo la práctica artesanal de realización de trenzas está impregnada de conceptos combinatorios como el de grafos, partición, permutación, patrón, etc.

Investigaciones anteriores (Albanese, Oliveras y Perales, 2012, 2014) han mostrado cómo los artesanos manejan y utilizan estos conceptos combinatorios al intercambiar información sobre el trenzado manifestando sus habilidades en modelizarlo empleando grafos orientados. En los grafos orientados los vértices representan las posiciones de los hilos en un pequeño telar de madera llamado "carta" (Figura 1) y las aristas representan los movimientos de los hilos que intercambian sus posiciones para realizar la trenza.

Figura 1. Telar de madera llamado "carta", para la realización de las trenzas.
En el caso mostrado en la foto se trata de una trenza de 8 hilos.

Los artesanos razonan sobre las posibles particiones de los hilos, indicando los movimientos de los hilos como permutaciones y reconociendo los patrones que los grafos tienen que cumplir para que sí modelicen trenzas que se pueden realizar en la práctica artesanal.

Una observación relevante para el posterior análisis concierne la estructura de los grafos que sí representan trenzas. Estos están constituidos por circuitos que cumplen las siguientes características:

1. Todos los circuitos son cerrados
2. Todos los circuitos son disjuntos
3. Todos los circuitos unen el mismo número de vértices

Además, la estructura del grafo tiene ciertas regularidades:

4. El grafo es invariante por rotación de 90 grados (lo cual implica que tiene varios ejes de simetría).
5. Se trata de grafos orientados, y la orientación de los circuitos es alternada (uno es en sentido horario y otro en sentido anti horario)

Por tanto, si queremos realizar una trenza de 16 hilos, el grafo que la representa tendrá 2 circuitos de 8 vértices, o 4 circuitos de 4 vértices, o 8 circuitos de dos vértices. Lo que determina una partición del conjunto de vértices.

Contexto y metodología

La experiencia de innovación se realizó con un grupo de13 participantes, 11 de los cuales son estudiantes de una Carrera de la Universidad de Buenos Aires que los habilita para ser profesores de matemática en el nivel Secundario y que cursan la asignatura optativa *Taller de Modelización y Producción Matemática*. Las otras dos participantes son las docentes universitarias que actúan como profesoras de la asignatura.

La idea es mostrar a los participantes como los artesanos realizan trenzas simples de 4 hilos, dejar que ellos mismos las hagan y guiarlos después a que representen el proceso de realización de las trenzas a través de modelizaciones con diversos niveles de abstracción (verbal, icónico y simbólico). El modelo que de hecho utilizan los artesanos es icónico y se puede fácilmente identificar con un grafo (Figura 2).

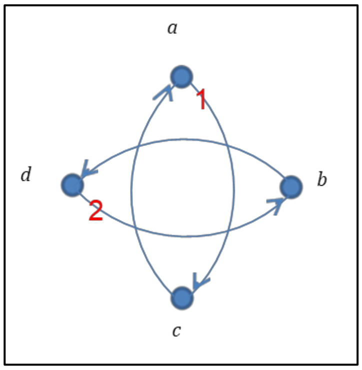


Figura 2. Grafo de la trenza de 4 hilos.

En un segundo momento, se espera que los participantes reconozcan las reglas, los patrones, para construir grafos que sean modelos de trenzado a partir de la observación de todos los grafos de 8 vértices que representan todas las posibles trenzas de 8 hilos –cabe destacar que no cualquier grafo es modelo de una trenza-. En la siguiente figura 3 se muestran todos los grafos que modelizan las posibles trenzas de 8.

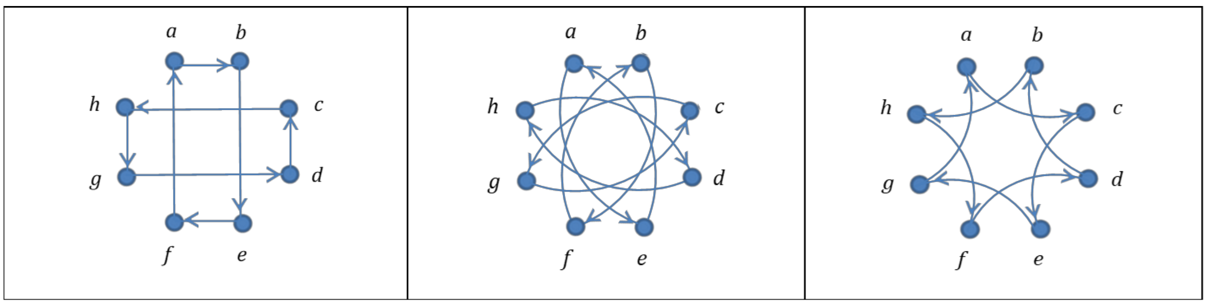


Figura 3. Grafos que representan todas las trenzas posibles de 8 hilos, que se proporcionan a los participantes para reflexionar sobre los patrones que tiene que cumplir un grafo para modelizar una trenza.

Finalmente se pide a los participantes que construyan todos los posibles grafos de 16 vértices que representan trenzados de 16 hilos. Durante el cierre de la actividad se realiza una reflexión sobre la naturaleza de las matemáticas y el proceso de enseñanza y aprendizaje que se vivencia a lo largo de toda la innovación. Una descripción más detallada de la experiencia realizada se encuentra en Albanese, Perales y Oliveras (2014) y Albanese y Perales (2017).

Los datos a analizar se recogen en fichas preparadas para guiar toda la actividad, que los participantes van rellenando. En particular el análisis que presentamos a continuación concierne la enumeración de los grafos de 16 vértices. Los participantes dibujan estos grafos en las fichas.

Decidimos primero realizar un recuento de grafos propuestos por participantes. Después clasificamos los grafos propuestos: primero, según si representaban o no una trenza y, segundo, por la partición de sus vértices (en 2 conjuntos de 8 vértices, en 4 conjuntos de 4 vértices, o en 8 conjuntos de 2 vértices).

Resultados

Los 13 participantes propusieron un total de 40 grafos. De ellos solo dos no responden a los patrones que permiten que se realice el trenzado. Esta observación es relevante si se considera que los participantes no conocían lo que era un grafo (excepto las dos docentes universitarias) antes de esta experiencia ya que en sus trayectorias de estudios anteriores no se había presentado tal concepto.

De los grafos que sí representan un posible trenzado, se muestra en la Figura 4 la distribución por participante. Cabe destacar que la mayoría de participantes (11 de los 13) propone más de un grafo, siendo 3 la moda de la distribución y 3,3 la media.

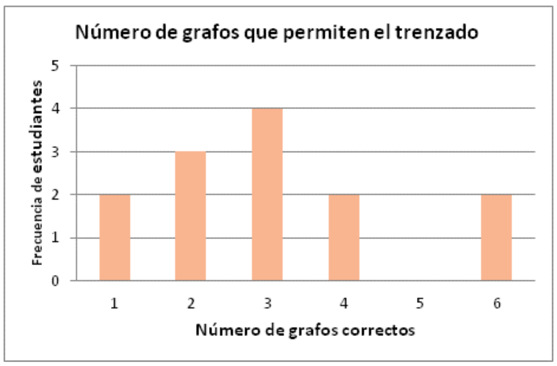


Figura 4. Número total de grafos que permiten el trenzado por participante.

Respecto a las características de la partición de los grafos propuestos, los participantes proponen una sola variante de grafo con 8 conjuntos de 2 vértices, esta se muestra en la Figura 5.

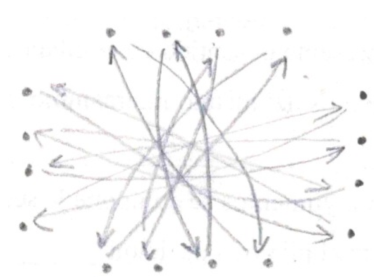


Figura 5. Grafo cuya partición es constituida por 8 conjuntos de 2 vértices. Extraído de la ficha de un participante.

De grafos que presentan una partición con 4 conjuntos de 4 vértices, los participantes presentan muchas variantes. Se pueden contar hasta 6 topológicamente distintas. A continuación, se muestra una de ella en la Figura 6.

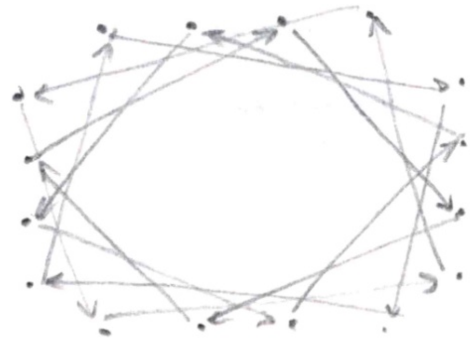


Figura 6. Grafo cuya partición es constituida por 8 conjuntos de 2 vértices. Extraído de la ficha de un participante.

También de los grafos con partición de 2 conjuntos de 8 vértices se presentan diversas variantes. En particular, se contaron 3 topológicamente diferentes, una de las cuales se muestra en la siguiente Figura 7.

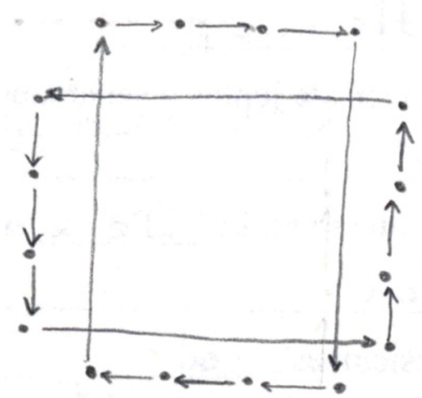


Figura 7. Grafo cuya partición es constituida por 8 conjuntos de 2 vértices. Extraído de la ficha de un participante.

Además 8 de los 13 participantes proponen 2 grafos distintos por al menos una misma partición. Para valorar esta afirmación es relevante recordar que entre las trenzas de 8 hilos propuestas en la actividad anterior a la analizada aquí se proponen dos grafos con una misma partición de 2 conjuntos de 4 vértices. Esto puede haber influido en que más de la mitad de los participantes buscaran más grafos distintos por cada partición posible.

Es notable destacar que solo tres de los 13 participantes proponen por lo menos un grafo por cada partición, y en cada caso proponen más de un grafo por al menos un tipo de partición entre las de 4 conjuntos de 4 vértices y la de 2 conjuntos de 8 vértices (por ellos estos 3 están incluidos entre los 8 mencionados anteriormente). Uno de ellos es una de las dos docentes universitarias.

Asimismo, cabe destacar que solo en dos casos hay evidencias de que los participantes identificaron primero las posibles particiones y después construyeron grafos para cada una de ellas.

Conclusiones

Los resultados muestran que todos los participantes consiguen encontrar por lo menos un grafo que permite el trenzado, y que la mayoría encuentra más de uno. Asimismo, cabe destacar que son muy pocos los grafos propuestos que no permiten el trenzado, lo cual es relevante si se considera que casi todos los participantes no tenían conocimiento previo sobre grafos antes de esta experiencia.

Son escasos los participantes que consiguen sistematizar tal enumeración basándose en otros conceptos matemáticos, por ejemplo, el de las posibles (y permitidas) particiones de los vértices del grafo.

Como valor añadido de la actividad propuesta se destaca su valor formativo para los futuros docentes por la metodología propuesta que implica de la construcción de un concepto matemático a partir de un artefacto concreto.

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20, Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER), y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Albanese, V., Adamuz-Povedano, N., & Bracho-López, R. (2017). Ethnomathematics: Two theoretical views and two approaches to education. En: M. Rosa, L. Shirley, M. E. Gavarrete, & W. V. Alangui (Eds.), *Ethnomathematics and its diverse approaches for mathematics education* (pp. 307-328). Berlin: Springer.

Albanese, V., & Perales, F. J. (2017). Una experiencia en la formación de profesores sobre concepciones desde una perspectiva Etnomatemática. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 49,* 73-83.

Albanese, V., Oliveras, M. L., & Perales, F. J. (2014). Etnomatemáticas en artesanías de trenzado: aplicación de un modelo metodológico elaborado. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 1-20. doi: 10.1590/1980-4415v28n48a01

Albanese, V., Perales, F. J., & Oliveras, M. L. (2014). Actividad reflexiva sobre modelización etnomatemática del trenzado. En P. Lestón. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 27 (567-574). México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Albanese, V., Oliveras, M. L. & Perales F. J. (2012). Modelización matemática del trenzado artesanal. *Epsilon*, *29*(81), 53-62.

Barton, B. (1999). Ethnomathematics and philosophy. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *31*(2), 54-58.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro-Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239-252). Amsterdam: International Statistical Institute. E I.O.S. Press.

Lockwood, E. & Gibson, B. R. (2016). Combinatorial tasks and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 247-270.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ANÁLISIS DE TAREAS PROPUESTAS EN UN CUADERNO DE TRABAJO DE NIVEL PRIMARIO

ANALYSIS OF TASKS PROPOSED IN A PRIMARY LEVEL WORKBOOK

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente, Rosa Cardoso Paredes, Norma Rubio Goycochea
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
eadvincula@pucp.edu.pe, rcardoso@pucp.edu.pe, nrubio@pucp.edu.pe

Resumen
Este trabajo mostrará el análisis realizado a tareas que involucran contenidos estadísticos, que se presentan en un cuaderno de trabajo de educación primaria, de uso obligatorio; donde se identifican situaciones problema que generan conflictos semióticos en el desarrollo del pensamiento estadístico y la alfabetización estadística que todo ciudadano debe tener. Este análisis se realizará desde el enfoque ontosemiotico en la faceta epistémica de la idoneidad didáctica (Godino, 2011) y el pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999), a través de respuestas de estudiantes universitarios en formación en la carrera de Educación Primaria a las tareas del cuaderno de trabajo mencionado.

Palabras clave: pensamiento estadístico, idoneidad didáctica, análisis de tareas

Abstract
This work will show the analysis of tasks that involve statistical contents, which are presented in a workbook, of mandatory use, in primary education. In this workbook, we identified problem situations that generate semiotic conflicts in the development of statistical thinking and statistical literacy that every citizen should have. This analysis will be carried out from the onto-semiotic approach in the epistemic facet of the didactic suitability (Godino, 2011) and the statistical thinking of Wild and Pfannkuch (1999), through the answers to the tasks, from the workbook, by university students majoring in Primary Education.

Key words: statistical thinking, epistemic suitability, task analysis

Introducción

Uno de los fines de la educación básica, tanto en el mundo como en el Perú, es formar ciudadanos que puedan enfrentar con éxito problemas cotidianos. Al respecto, Rico (2007) señala que desde los 15 años y al finalizar la educación básica, las personas deben estar preparados para satisfacer los desafíos que la sociedad exige actualmente. Para esto, por ejemplo, se recomienda alfabetizar estadísticamente a los estudiantes desde los primeros grados de la educación básica. En esta línea, por ejemplo, desde el espacio europeo con el proyecto "Early Statistics de la Unión Europea (Paparistodemou y Meletiou-Mavrotheris, 2008)", se indica que para que los estudiantes progresen hacia el pensamiento estadístico y desarrollen una alfabetización estadística, es necesario hacer cambios importantes en los métodos y herramientas empleados usualmente en las aulas. Asimismo, se sugiere incluir investigaciones abiertas, el uso de datos reales, simulaciones, visualizaciones, la colaboración y la reflexión sobre las ideas propias y las ideas y experiencias de otros, con el fin de que los profesores ayuden realmente a sus estudiantes a construir su razonamiento estadístico; razón por la cual decidimos realizar el presente estudio.

En ese sentido, según los informes emitidos por los organismos nacionales como el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) o internacionales como el Tercer Estudio Regional Comparativo (TERCE, (2016) y especialmente el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA), los estudiantes peruanos siguen ubicados en los últimos lugares de las evaluaciones que se aplican (MINEDU, 2015, 2016). Es decir, los estudiantes no están con las condiciones de alfabetización para afrontar los desafíos que indica Rico (2007) ni preparados para enfrentar situaciones que impliquen el uso de herramientas que evidencien competencias matemáticas suficientes para resolver sus problemas, por ejemplo, haciendo uso de la estadística o del pensamiento estadístico; lo que puede, entre otras cosas, prevenir riesgos por su aporte predicativo. Además, a esto se suma la situación actual de la formación del profesor de educación primaria en relación al porcentaje de contenidos matemáticos que recibe en su formación y que de alguna manera explicaría las dificultades que presentan los docentes en sus desempeños, por ejemplo, no poder realizar un análisis del contenido disciplinar o de las situaciones problema que se presentan en los textos escolares obligatorios que ellos deben trabajar con sus estudiantes.

El contexto descrito anteriormente ha ocasionado que el MINEDU (2018) tenga que tomar medidas como las de implantar el uso obligatorio de textos escolares en instituciones educativas nacionales del país, con la intención de ayudar a superar las brechas educativas que hay en las escuelas que carecen de las condiciones necesarias para ofrecer una educación de calidad, en particular, en el área de matemática. Esta condición hace que los textos sean de uso obligatorio no solo para los estudiantes de la educación básica sino también para los docentes, lo que implica el utilizar sus contenidos y desarrollarlos en las clases. Para garantizar la equidad e idoneidad de sus contenidos, la misma institución, se encarga de supervisar su elaboración. Sin embargo, no siempre esta intención se cumple y es posible encontrar en dichos textos situaciones problema que presentan errores conceptuales relacionados con contenidos que, por ejemplo, forman parte de la competencia Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. Cabe destacar que estos textos son elaborados, en muchos casos, también por consultores externos al MINEDU, los mismos que en su mayoría son profesionales que no están vinculados directamente y necesariamente con los espacios de educación matemática. De acuerdo al nivel educativo, los contenidos que incluyen estos textos se conforman por Números y operaciones, Medición, Geometría, así como, Gestión de datos e incertidumbre.

En ese sentido, ante la preocupación por el desarrollo de un pensamiento estadístico en los estudiantes que les brinde la oportunidad de estar alfabetizados estadísticamente, surge nuestro interés por investigar cómo se están abordando los contenidos de dicha área en la educación primaria. Por ello, nos propusimos revisar los cuadernos de trabajo de educación primaria distribuidos para todos los estudiantes del mismo. Sin embargo, en este documento nos interesa mostrar solamente el análisis de actividades relacionadas con contenidos estadísticos, presentados en el cuaderno de trabajo Matemática 5, donde encontramos una tarea cuyo enunciado generaba dificultades para ser resuelto por los estudiantes que la enfrentaron. Situación que nos ocasionó la siguiente pregunta: ¿Cuál es la idoneidad epistémica y cómo subyace el pensamiento estadístico a través de tareas que involucran contenidos estadísticos en los cuadernos de trabajo editados y distribuidos por el MINEDU que deben resolver los estudiantes y profesores? Para ello, nos fijamos como objetivo general: Estudiar la contribución de los cuadernos de trabajo de Matemática 5 en la alfabetización estadística y como específicos los siguientes:

1. Analizar la idoneidad epistémica de una tarea que involucra contenidos estadísticos en el cuaderno de trabajo de educación primaria Matemática 5.
2. Identificar las fases del ciclo de investigación para el desarrollo del pensamiento estadístico según Wild y Pfannkuch.

Nuestro trabajo, también busca analizar como resuelven una tarea que involucra contenidos estadísticos los fututos profesores de educación primaria de una universidad privada, que cursan el quinto semestre, así como, cuáles son sus justificaciones para la solución mostrada desde una mirada que nos proporcionan los criterios de idoneidad didáctica del Enfoque Ontosemiotico de la Cognición Matemática (Godino, 2011) y las fases del ciclo de investigación propuesto por Wild y Pfannkuch (1999).

Marco teórico

Como sabemos, los textos escolares siempre se han constituido como uno de los materiales educativos más empleados en el ámbito escolar de cualquier nivel y, a veces, incluso los únicos. Por ello, según Villella (2002) para muchos docentes la elección de un texto es muy importante, por lo que es un instrumento con un efecto poderoso sobre sus enfoques de enseñanza y también sobre las estrategias de aprendizaje de los estudiantes. Es por eso que analizarlos implica observar la organización textual, la trama conceptual y las orientaciones para la construcción de los significados pretendidos. El mismo autor indica que el texto sirve de mediador entre un docente y sus estudiantes y, entre un docente y el currículo; así como también, sirven de fuente de información y consulta. Además, favorecen la integración de conocimientos y experiencias sin crear falsos objetos de conocimiento y producen con ellos una sustitución patológica del conocimiento erudito; la formación integral del estudiante, especialmente en valores (el caso de la estadística) y en los primeros grados de formación; y propician el primer contacto con textos expositivos, como es el caso de las matemáticas.

Por ello, en esta investigación consideramos la importancia que tiene realizar un análisis de los contenidos de los textos utilizados en el sistema educativo estatal del Perú, y ver si ellos garantizan la idoneidad de los aprendizajes de los estudiantes. Para tal fin, nos ayudamos en los aportes del Enfoque ontosemiotico de la cognición e instrucción matemática (EOS) en la faceta epistémica de la idoneidad didáctica (Godino, 2011) presentada en la Fig.1.

Figura 1. Facetas de la Idoneidad Didáctica Godino (2011)

El EOS propone que la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción constituye el punto de partida de una teoría para el diseño instruccional. Define como el grado en que dicho proceso, o una parte del mismo, reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional (Godino, Batanero, y Font, 2007; Godino, 2013). Está compuesto a su vez por seis componentes, relacionados de forma sistémica: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Cada uno de estos componentes hace referencia a aspectos concretos de un proceso instruccional (Godino, 2013). Además, tomaremos en cuenta el pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) descrito en la Fig.2.

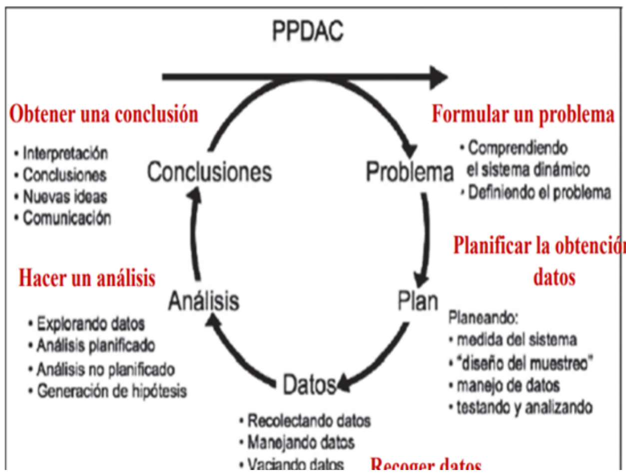


Figura 2. Ciclo del pensamiento estadístico Wild y Pfannkuch (1999)

El ciclo de investigación propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) consta de cinco etapas: problema, plan, datos, análisis y conclusión (PPDAC). Desde este enfoque, la enseñanza de la Estadística abandona el uso de fórmulas, uso de datos hipotéticos y le da protagonismo a la solución de problemas en donde los estudiantes se involucran y utilizan la Estadística como una herramienta para encontrar respuestas a diversas situaciones problema que se les plantea o se plantean ellos mismos.

En nuestro trabajo, tomamos en cuenta algunas herramientas propuestas por el EOS para valorar la idoneidad epistémica de una tarea en un cuaderno de trabajo de matemática escolar "Matematica 5". Esta idoneidad es una de las facetas de la idoneidad didáctica y se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. Cabe resaltar que para Godino (2011) el análisis de libros de texto es una de las competencias que deben ser consideradas en la formación de profesores. Por otro lado, como los autores lo indican, todo concepto matemático tiene asociados muchos objetos matemáticos, como registros semióticos (lenguajes), argumentos, proposiciones, definiciones y situaciones. Al tratarse de entes abstractos, la única manera de evaluar el aprendizaje de dicho concepto por parte de los estudiantes implica constatar la correcta movilización articulada de todos los objetos asociados. Así, no puede decirse que un estudiante haya aprendido un concepto simplemente porque sepa enunciar la definición del mismo que aparece escrita en un libro de texto, sino que es necesario que sepa interpretar, por ejemplo, una gráfica y también argumentar en torno a ella o saber traducir del lenguaje natural al algebraico y de este al gráfico, entre otros. Es decir que, la relación entre la idoneidad epistémica de los textos escolares (sobre todo) deben garantizar los aprendizajes pretendidos por el sistema que los propone.

Otro de los temas que nos aporta este enfoque es que, atribuye a las situaciones problemas un papel central, pues considera una concepción antropológica de la matemática, donde los objetos matemáticos emergen de las prácticas de los sujetos al enfrentarse a determinados problemas, situación que el docente debe tener presenta para ayudar a esos aprendizajes. Así mismo, también indica que el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas adecuadas ya que ella requiere atención, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas y deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones.

Metodología

La metodología utilizada en este trabajo se enmarcó en el paradigma cualitativo, ya que para el análisis usamos las facetas que proponen la idoneidad didáctica del EOS, específicamente la epistémica, así como las fases del ciclo de investigación PPDAC. En esta investigación también se aplica la técnica de un estudio de caso, pues los participantes fueron elegidos por los profesores investigadores y ellos fueron 70 estudiantes universitarios del quinto ciclo de formación en la carrera de educación primaria de una universidad privada de Lima. Una característica de los participantes es que parte de ellos son estudiantes que tienen la condición de becarios del estado peruano con la beca “Vocación Maestro” y, por ello, provienen de condiciones económicas diferentes; así también, realizaron sus estudios primarios y secundarios en diferentes instituciones educativas de gestión estatal del país. Tanto en el nivel primario como en el secundario, ellos han llevado como parte de su formación básica, entre otros contenidos, los de estadística descriptiva y temas relacionados con probabilidad. Así mismo, en este estudio también se considera a un docente del nivel primario, con maestría en enseñanza de la matemática en el mismo nivel y con experiencia de aula en primaria de más de 20 años, también consigna en su currículo el ejercicio de la docencia a nivel universitario.

Del mismo modo, para complementar el estudio se realizó una entrevista no estructurada a una de las alumnas del curso, cuyas respuestas fueron registradas mediante audio y video de un celular. Debemos indicar que, a dicha estudiante, se le informó que sus declaraciones serían registradas en este reporte. Registramos los documentos escritos que ella nos muestra, pero mantenemos la confidencialidad de su nombre; por ello, la codificamos como A1. Su selección fue a elección de las investigadoras, considerando su trayectoria académica y su formación personal, lo que nos garantizaría conocer de buena fuente los conocimientos que posee el profesor de primaria respecto al tema tratado en la tarea planteada a los estudiantes.

El instrumento que utilizamos para recoger información fue una tarea seleccionada del Cuaderno de trabajo de Educación Primaria “Matemática 5” por el profesor de educación primaria en ejercicio que formaba parte del grupo de profesores que dictaron el curso denominado “Didáctica de la Geometría, Medición y Estadística”, y que fue el espacio que elegimos para recoger la información. En los contenidos del sílabo del curso se consideran los temas de estadística descriptiva, así como la didáctica de su enseñanza. Asimismo, para el análisis de las respuestas de los estudiantes de educación primaria en formación a la tarea propuesta, se aplicó la técnica de análisis de contenido considerando los indicadores que proporciona el EOS y una entrevista no estructurada. La intención de esta entrevista fue conocer las respuestas y consignas que dio el profesor del curso para el desarrollo de la tarea a otro grupo de estudiantes a los cuales las investigadoras no tuvieron acceso, a fin de conformar nuestros supuestos sobre el conocimiento del profesor de primaria en general.

A continuación, mostramos la situación-problema motivo del análisis, tomado de Matemática 5 - Cuaderno de trabajo para quinto grado de educación primaria (Minedu, 2017, p.22):

"Ante la proximidad de las olimpiadas escolares, el colegio va a contratar entrenadores para diferentes deportes. Para formar los equipos, se necesita conocer las preferencias de los estudiantes. ¿Qué conclusiones se pueden obtener de esta encuesta?

a. Elaboren una ficha similar a la mostrada y realicen una encuesta a varios estudiantes de los niveles primario y secundario sobre su deporte favorito.
b. Organicen la información obtenida en una tabla de doble entrada.
c. Represente los datos de la tabla obtenida a través de un gráfico de barras.
d. Formulen una conclusión a partir de la tabla y del gráfico de barras agrupadas.
e. Comenten, ¿qué les recomendarían a los organizadores de las olimpiadas para planificar las actividades deportivas con mayor participación en cada nivel?"

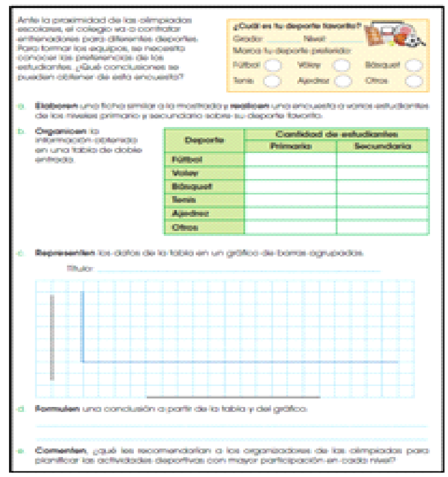


Fig. 3. Tarea tomada del texto de Matemáticas 5 (p.22)

Análisis de los resultados

Como parte de este trabajo, nos abocaremos a mostrar el análisis realizado aplicando los aportes del EOS. Para ello, la presentación de los hallazgos se divide en dos subsecciones correspondientes a las preguntas de investigación y los objetivos del estudio: una que incluye el análisis de la tarea propuesta y la otra, conformada por parte de la entrevista realizada a la estudiante.

A continuación, mostramos los componentes e indicadores de idoneidad epistémica asociados a la tarea propuesta.

Tabla 1. Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

Componentes	Indicadores
Situaciones-problemas	• Se presenta una situación contextualizada, que permite ejercitación y aplicación: "Ante la proximidad de las olimpiadas escolares, el colegio va a contratar entrenadores para diferentes deportes. Para formar los equipos, se necesita conocer las preferencias de los estudiantes". • Se proponen situaciones de generación de problemas: "¿Qué conclusiones se pueden obtener de esta encuesta?"

Lenguajes	La tarea solicita lo siguiente: • Diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica): “Elaboren una ficha similar a la mostrada y realicen una encuesta a varios estudiantes de los niveles primario y secundario sobre su deporte favorito” • Traducciones y conversiones entre los diferentes lenguajes: “Organicen la información obtenida en una tabla de doble entrada”. “Represente los datos de la tabla obtenida a través de un gráfico de barras” • El nivel del lenguaje de las consignas es adecuado a los estudiantes de la a que se dirige (9 y 10 años de edad). • Proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos no son claros y correctos, a pesar de que están adaptados al nivel educativo al que se dirigen: No se indica un elemento fundamental para realizar adecuadamente la tarea que es la caracterización de la muestra, situación que genero el conflicto al resolver la tarea con las preguntas: ¿Cuántos estudiantes de cada nivel debemos considerar? Y por tanto no se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema. Sin embargo, se pudo generar las situaciones donde los estudiantes podían elegir sus datos.
Argumentos	Las explicaciones en la situación-problema, no son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen pues para el nivel no está considerado el muestreo estratificado, es por ello que a pesar de que esta promueve situaciones donde el estudiante tiene que argumentar, estos no contribuyen a lograr competencias adecuadas para la solución de la tarea. El hecho de que la muestra no esté bien definida ocasiona que las decisiones tomadas y argumentadas son inadecuadas.
Relaciones	A pesar de que los objetos matemáticos se relacionan y conectan entre sí, si el docente no gestiona adecuadamente la idoneidad epistémica de la clase, esta no contribuye a lograr un aprendizaje idóneo. Sin embargo, al negociar la independencia en la elección de la muestra se pudo identificar que los estudiantes articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en la actividad.

Fuente: Creación propia

A continuación, mostramos las respuestas de dos estudiantes, donde se muestra la baja idoneidad epistémica de la tarea.

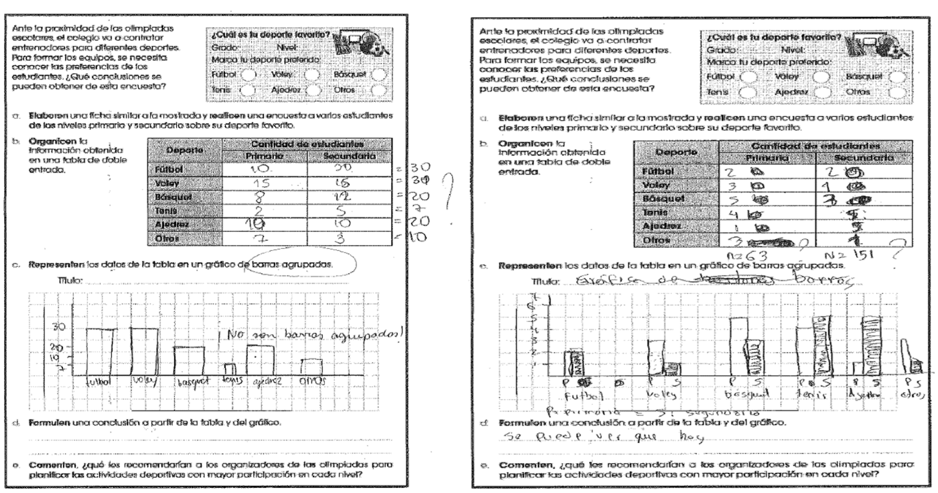


Fig. 3: Registro de la solución de dos estudiantes.

Aunado a este análisis se muestra la respuesta que nos proporcionó la entrevistada A1, sobre el conocimiento del pensamiento estadístico del docente del nivel primario que impartía el curso. Mostramos parte de la entrevista realizada por una de las investigadoras (I):

I: Puedes relatarme que indicaciones dio el profesor para desarrollar la práctica. ¿Qué paso, por ejemplo, al responder la situación-problema sacada del cuaderno de trabajo Matemática 5 de los estudiantes?

A1: "*El profesor no dio indicaciones personales pero si a nivel general. Uno de mis compañeros preguntó cómo se debía resolver el ejercicio 5* [refiriéndose a la situación problema de la Fig.3]*… puesto que él no sabía cuántos estudiantes había en el colegio o eran, y no sabía qué opciones los estudiantes habían elegido, entonces, preguntó si él podía elegir los números. Ante esta situación el profesor, leyó la actividad y después de 5 minutos el escribió los números en la pizarra y los ordenó tal como está en el la tabla de doble entrada… pero no nos preguntamos por qué esos números, cuál fue la forma de elegir esos números, simplemente el profesor dijo que en todos los colegios de primaria, porque él es profesor de primaria, en todos los colegios hay una tendencia a elegir más el fútbol y el vóley por eso él puso… es la única explicación que el dio, en esos deportes mayor cantidad de estudiantes… yo iba a poner otros números basada en mi experiencia escolar pero como el impuso… y yo dije él va a revisar la práctica, entonces, entonces, mejor uso esos números…*"

I: ¿Una vez que el profesor dio los números, tú ya no leíste la pregunta? Solamente desarrollaste…

A1: "*Solo le di una leída rápida… pero como el profesor impuso los números, si volví a leer la pregunta porque al final había que resolver una parte de reflexión y critica…*"
I: ¿El profesor dio alguna otra aclaración el día que entregó la práctica corregida? ¿Hizo algunas aclaraciones?
A1: "*No hizo, solo nos entregó la prueba.*"

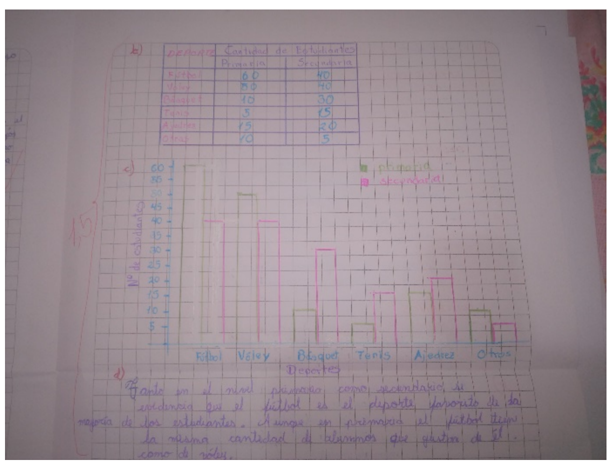


Fig. 4: Solución de la estudiante A1, realizada con las cantidades dadas por el profesor.

Como se puede deducir de los documentos, uno de los ítems de la tarea del texto Matemática 5, no especifica la muestra en la que se tenía que aplicar la encuesta dada, dejando de esta manera que cada estudiante recoja datos según su criterio y que los resultados carezcan de validez para poder describir y comparar a la población mencionada en el enunciado de la situación-problema, es decir, todos los resultados posteriores no serían válidos pues el estudio no cuenta con datos procedentes de una muestra representativa o confiable. Esta situación también se nota en las representaciones gráficas que realizan los estudiantes que tuvieron la oportunidad de elegir a los entrevistados, como lo pensó hacer la estudiante entrevistada.

Conclusiones

Consideramos que el tipo de situaciones-problema como el mostrado a los estudiantes en el texto Matemática 5, ocasiona conflictos de significados para posteriores estudios relacionados con el tema en cuestión. Además, este tipo de tareas no favorece a que los estudiantes respondan preguntas que tengan relación con la toma de decisiones como la que requiere la situación planteada, dando una idea distorsionada del uso o aplicación de los contenidos estadísticos y distorsionando el pensamiento estadístico, tan necesario en estos días para lograr una eficiente la alfabetización estadística de los ciudadanos del siglo XXI.

Conocida la importancia que el profesorado concede a los textos de uso obligatorio, los investigadores de educación matemática y estadística prestan particular atención al análisis de los mismos, mucho más si estos van a tener una difusión masiva por parte del estado, como es el caso peruano; a fin de garantizar la idoneidad epistémica de las tareas presentadas a los estudiantes de los niveles básicos, sobre todo si se pretende que ellos sirvan como conocimientos o aprendizajes previos para sus estudios posteriores.

Como bien lo indican los estudiantes participantes en la investigación, la tarea si involucra los elementos del ciclo que proponen Wild y Pfannkuch (1999); sin embargo, no garantiza que las decisiones que aconsejaran para que tomara el director fueran las más adecuadas.

Referencias bibliográficas

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la Estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. *Actas del XI Simposio de la SEIEM*, 121-140. ISSN: 1888-0762, ISBN: 84-7985-261-5. Recuperado de http://web.udl.es/usuaris/z4084849/es/publicaciones1.html

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife (Brasil)*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Ministerio de Educación de Perú. (2017). *Matemática 5*. Cuaderno de trabajo para Quinto grado de Educación Primaria.

Paparistodemou, E., y Meletiou-Mavrotheris, M. (2008). Developing Young Students' Informal Inference Skills in Data Analysis. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 83-106.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

UNESCO para América Latina Y el Caribe (2016) Tercer Estudio Regional Comparativo (TERCE). Aportes para la enseñanza de las Ciencias Naturales. Oficina Regional para la Educación. Chile. http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002447/244733s.pdf

Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry *En International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, 67(3), 223-248.

Villella, J., Contreras, J.C. (2005) La selección y uso de libros de texto: un desafío para el profesional de la enseñanza de la matemática. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 8.2 (2005), Págs. 419–433.

SITUACIONES DIDÁCTICAS Y APRENDIZAJE COLABORATIVO EN LA ENSEÑANZA DE CONCEPTOS DE TRIGONOMETRÍA: EXPERIENCIA AÚLICA

DIDACTIC SITUATIONS AND COLLABORATIVE LEARNING IN THE TEACHING OF TRIGONOMETRY CONCEPTS: CLASSROOM EXPERIENCE

María del Carmen De Luna Flores, Juan José Díaz Perera, Heidi Angélica Salinas Padilla, Hipólito Hernández Pérez
Universidad Autónoma del Carmen, Universidad Autónoma de Chiapas. (México)
carmendeluna@hotmail.com, jjdiaz23@gmail.com, salinas_heidi@yahoo.com.mx, polito_hernandez@hotmail.com

Resumen
El presente trabajo fue desarrollado a lo largo de la unidad temática de elementos de trigonometría con estudiantes de segundo semestre de bachillerato general, tiene como objetivo la generación de una situación didáctica utilizando como metodología el aprendizaje colaborativo para lograr el aprendizaje significativo; la descripción del trabajo fue divido en tres etapas: planeación y calendarizaron de actividades; puesta en marcha del proyecto y recolección de calificaciones. Se compararon las calificaciones obtenidas por los mismos estudiantes en un periodo anterior siendo el promedio grupal de 7.4 y el promedio grupal en la secuencia en donde se aplicó la situación didáctica obteniendo un incremento a 7.6.

Palabras clave: aprendizaje, trigonometría, situación problema

Abstract
The present work was developed along the thematic unit of elements of trigonometry with students of second semester of general baccalaureate, has like objective the generation of a didactic situation using like methodology the collaborative learning to achieve the significant learning; the job description was divided into three stages: planning and scheduling of activities; start-up of the project and collection of qualifications. The grades obtained by the same students in a previous period were compared with the group average of 7.4 and the group average in the sequence where the didactic situation was applied obtaining an increase to 7.6.

Key words: learning, trigonometry, problem situation

Introducción

Hablar de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva del docente es lograr que el estudiante desarrolle la habilidad y al mismo lo disfrute de forma lúdica. Una de las estrategias de la educación matemática para lograr que el estudiante sea partícipe de su aprendizaje, es que éste haga uso de los conceptos matemáticos a través de situaciones problemáticas en contextos variados, siendo guiado u orientado por el profesor; como es de imaginarse lograr esta combinación de características es sumamente complicado ya que es necesario que el estudiante no solo debe tomar el control de su aprendizaje, sino que al hacerlo debe estar convencido de todo lo que ello representa.

Por otra parte, es innegable que el uso de la tecnología en el ámbito de las matemáticas como menciona De la Villa, Lois, Milevicich, y Rodríguez (2013, p.1882) *"ha significado la liberación de los trabajos repetitivos, y que le permite pensar y crear nuevas ideas para expandir su creatividad y su imaginación* "provocando que el estudiante evite la realización de cierto número de repeticiones que le permitan estimular su memoria. Logrando con ello que mediante el uso frecuente de la tecnología sus procesos de aprendizaje se vean afectados. Es por eso que las repeticiones que favorecen la memoria son necesarias realizarlas para lograr entender las diversas situaciones que se pueden presentar en el aprendizaje de las matemáticas.

Consecuentemente podemos mencionar que los estudiantes tratan de evitar la realización de las repeticiones, haciendo uso ya sea de herramientas en línea que les resuelva los ejercicios con todo y su respectivo procedimiento o simplemente se dediquen a copiar las tareas de aquellos que las realizaron o de las de las aplicaciones mencionadas, todo esto en detrimento de su aprendizaje; siendo esto posiblemente una de las causas del incremento en el índice de reprobación en las aulas.

Fundamento teórico

Con la aparición de las tecnologías de información según Cabero (1998), se rompen las barreras espacio temporales de la enseñanza tradicional posibilitando la comunicación sincrónica y asincrónica entre los participantes del acto de aprendizaje; siendo necesario que el docente adopte nuevas prácticas, incluyendo el uso de tecnologías, metodologías y materiales didácticos que permitan al estudiante mantener el interés en el tema abordado. Para Zamora (2013), la adopción de nuevos métodos de enseñanza aprendizaje, basadas muchas de ellas no solo en la explicación dada por el profesor, sino que también con la inclusión de diferentes técnicas; como el aprendizaje colaborativo y las situaciones didácticas favorecen el logro del aprendizaje significativo.

La estrategia de trabajo colaborativo adquiere importancia debido a la construcción positiva de relaciones sociales entre los integrantes o elementos de un grupo, promoviendo la comunicación que permite mejorar las interacciones en pro de la mejora académica de los estudiantes que lo integran. Por ende, el profesor-facilitador del curso requiere diseñar actividades en las que mediante el aprendizaje colaborativo se logren los aprendizajes esperados; dejando de lado el reconocimiento individual y priorizando los logros colectivos.

Por su parte, Calzadilla (2002) menciona que el aprendizaje colaborativo está sustentado en las teorías cognitivistas de Piaget, así como en la modificación de estructuras cognitivas y la transmisión social; la teoría constructivista de Vygotsky y en la teoría de la zona de desarrollo próximo. Una de las ventajas de utilizar el trabajo colaborativo como herramienta, es que los participantes asumen su propio ritmo de aprendizaje comprendiendo la necesidad de aportar lo mejor de sí para lograr el resultado esperado, de esta forma se incrementa la productividad y la responsabilidad.

Por otro lado, Collazos y Mendoza (2006) destacan que *"el profesor quien diseña y mantiene casi por completo el control de la estructura de interacciones y de los resultados que se han de obtener…"*, el uso instruccional de pequeños grupos de forma tal que los estudiantes trabajen juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás" p. (62), ya que el éxito depende de la aceptación de los integrantes y lograr de esta una comunicación aceptable y confianza que permitan dar, recibir y participar en el logro de sus conocimientos. De igual forma es importante destacar que el docente transmuta de su función de poseedor del conocimiento a la función de facilitador o mediador estimulando al estudiante en sus procesos de aprendizaje, potenciando sus aciertos y corrigiendo los errores que pudiese llegar a cometer.

El aprendizaje significativo de acuerdo a Moreira (1997) se entiende como: "*es el proceso a través del cual una nueva información (un nuevo conocimiento) se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no-literal) con la estructura cognitiva de la persona que aprende*" (, p.2). Para lograr lo anterior en los estudiantes se debe generar actividades lo suficientemente atractivas para que estos se motiven e intenten realizar los trabajos correspondientes, sin recurrir o hacer uso de herramientas que perjudican o bloquean la construcción de sus estructuras mentales, desacelerando el proceso de aprendizaje. Zamora (2013), afirma que *"el interés y la participación de los alumnos en su trabajo escolar aumenta significativamente cuando ellos "ven" por qué están aprendiendo esos conceptos y cómo se pueden usar los mismos para resolver problemas que trascienden el ámbito del aula"* (p.8-9). Aunado a lo anterior, la estrategia de trabajo colaborativo favorece la formación integral, mediante el aprendizaje transversal de valores como la solidaridad, respeto, cooperación, responsabilidad individual y colectiva, además de favorecer el desarrollo de la escucha, la participación, la coordinación y la evaluación.

Ahora bien, cuando se habla de la enseñanza de las matemáticas, una de las teorías que mejor se adaptan a esta conceptualización de la enseñanza mediante trabajo colaborativo, es la teoría de las situaciones didácticas desarrollada por Guy Brousseau (1986), quien fue analizado por Chavarría en el 2006 y quien destaca que en el proceso de enseñanza-aprendizaje, intervienen tres elementos fundamentales: el profesor; el estudiante y el medio didáctico, éste último entendido como:

> el proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y que le permitirán generar, además, hipótesis y conjeturas que asemejan el trabajo que se realiza en una comunidad científica. (Chavarría 2006, p.3)

En función de lo anteriormente expuesto, se toma de referencia para efectos de la intervención educativa que se analiza en éste documento, el aprendizaje colaborativo mediante el diseño de secuencias didácticas para la adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos trigonométricos en estudiantes de nivel medio superior.

Metodología

El desarrollo de la intervención educativa fue dividido en tres momentos: la planeación y calendarización de las actividades; la puesta en marcha del proyecto y la recolección de la información generada. A su vez cada una de las etapas se conformó por diversas actividades moduladas de acuerdo con el tema y al momento de la secuencia didáctica.

El trabajo se realizó durante una secuencia de didáctica correspondiente al tema elementos de trigonometría en un colegio particular de Ciudad del Carmen Campeche, México, durante el ciclo escolar 2016-2017, con un grupo de 25 estudiantes de segundo semestre de bachillerato, cuyas edades oscilan entre los 15 y los 16 años; la secuencia didáctica tuvo una duración de 20 horas clase, dividida en dos sesiones de dos horas y una sesión de una hora a la semana.

Planeación y calendarización de las actividades

Antes de iniciar la planeación de la secuencia didáctica fue necesario tomar en cuenta los contenidos temáticos por abordar durante esta unidad; los cuales están dictados por el Colegio de Ciencias y Humanidades, la cual incluye los siguientes temas:

Tabla 9. *Contenido temático de la secuencia*

Elementos de trigonometría (20 horas)
• Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para ángulos agudos. • Valores recíprocos de las razones seno, coseno y tangente. • Solución de triángulos rectángulos: a) Conociendo un ángulo y un lado. b) Conociendo dos lados. • Razones seno, coseno y tangente de los ángulos de 15°, 30°, 45°, 60° y 75°. • Las razones recíprocas del seno, coseno y tangente. • Resolución de Problemas. a) Ángulo de elevación, b) Ángulo de depresión c) c) Problemas de aplicación • Identidades trigonométricas fundamentales: a) Las recíprocas. b) Las de división. c) Las pitagóricas. • Resolución de triángulos oblicuángulos. a) Ley de los senos y cosenos. Problemas donde intervienen triángulos oblicuángulos

Fuente: Extracto de la secuencia didáctica del curso de Trigonometría

Para este primer momento de la secuencia didáctica, se realizó un cronograma de actividades a desarrollares durante las 12 sesiones de trabajo; dicho cronograma se socializó con los estudiantes, informándoles las consignas que se realizarían en este periodo de tiempo, para ello se incluyeron las fechas de entrega y el valor asignado a cada actividad (Ver figura 1).

CRONOGRAMA DE SECUENCIA DE APRENDIZAJE												
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	SEMANAS											
	SESIÓN: MAYO											
Previas :	1 (5M)	2 (9M)	3 11M	4 12M	5 16M	6 18M	7 19M	8 23M	9 25M	10 26M	11 30M	
Creación de equipos y explicación de forma de trabajo												
Introducción al tema												
Sobre los contenidos:												
Exposición de razones trigonométricas seno, coseno, tangente para ángulos agudos												
Profesor Explicación de las conversiones de radianes grados haciendo uso de calculadora												
Alumno realizar actividades de triángulos rectángulos y solución problemas												
Explicación por el profesor razones seno, coseno y tangente de los ángulos de 15°, 30°, 45°,60° Y 75°												
Alumno solución de problemas												
Examen escrito del unidad 4 y 5												
Profesor explicar sobre triángulos oblicuángulos.												
Resolución de problemas												
Alumno resuelve colección de problemas												
Cierre de portafolio y periodo												
Domino trigonométrico												
De integración/aplicación:												

Figura 1. Cronograma de actividades.
Tomado de la Primera Secuencia Didáctica del Curso Trigonometría.

Para la realización de las actividades enlistadas en el cronograma, se dispuso la conformación de equipos de trabajo generados por el docente bajo los siguientes criterios: se formaron cuatro equipos con cuatro integrantes cada uno y uno equipo con cinco elementos, debido al que el grupo estaba integrado con número impar de estudiantes.

Como primer criterio de selección, se solicitó a los estudiantes elaboraran una lista de tres personas con las que les gustaría trabajar durante este periodo, esto con la intención de identificar a los estudiantes con mayor aprecio por parte de sus compañeros, así como a los alumnos que no estaban tan integrados al grupo. Otro criterio implementado fue que los equipos de trabajo debían integrar a un compañero seleccionado por ellos para trabajar y otro con el que nunca hubieran trabajado o tenido contacto. Lo anterior permitió cumplir con uno de los principios del trabajo colaborativo, el respeto, la tolerancia y la solidaridad.

Otro criterio para la conformación de los equipos fue la revisión de las calificaciones obtenidas con anterioridad, se buscó nivelar en base a promedios la conformación de los equipos de tal manera que cada uno de ellos contaran de forma global con notas similares; buscando en todo momento que dicha conformación fuera acorde a las características propias de cada estudiante, esto debido a que la conformación adecuada de los equipos dependería en gran medida los resultados de la experiencia.

Las actividades planeadas se dividieron básicamente en cuatro categorías basadas en su contenido.

a) *Situación problema:* fue trabajada como un proyecto a realizar en el equipo asignado fungiendo como trabajadores del Ayuntamiento de la localidad, esta situación problema se planteó textualmente de la siguiente forma:

> *Eres un trabajador del ayuntamiento y el área a la que fuiste asignado se especializa en la regulación de alturas de edificios y espectaculares de Ciudad del Carmen, tu trabajo es verificar el cumplimento de las especificaciones permitidas dada las condiciones laborales y climáticas de la isla otorgando permisos o sanciones según sea el caso. Para la realización de dicha consigna fue necesario conseguir el reglamento vigente del ayuntamiento.*

La consigna de esta situación problema, fue la selección de un anuncio espectacular y uno de los edificios más altos de la ciudad para realizar las mediciones correspondientes, cotejarlas con lo reglamentado por el ayuntamiento, y emitir el dictamen correspondiente basado en la medición realizada. Cabe mencionar que se hizo hincapié en salvaguardar su integridad en todo momento de la realización de la consigna y la resolución de la situación problema.

Figura 2. Evidencia de edificios a medir. Tomada de las fotografías de estudiantes del curso

b) *Actividades de refuerzo de conceptos:* dentro de los temas vistos en esta secuencia de aprendizaje se encuentran las razones trigonométricas, las razones trigonométricas inversas, ley de senos, y de cosenos; por lo que para cada uno de estos temas se realizó una selección de ejercicios para su solución de forma individual o en pares, los cuales fueron ejecutados en el aula. Éstos ejercicios, tuvieron un incremento paulatino de dificultad, para ayudar al estudiante a efectuarla relación y utilización de conceptos vistos en secuencias anteriores, como por ejemplo el teorema de Pitágoras o el teorema de Tales, entre otros conceptos.
c) *Se planeó la elaboración de una herramienta conocida como Teodolitoque* es un instrumento de medición formado por un transportador, un popote o cuerpo de una pluma, una goma como pesa y cinta adhesiva. El instrumento creado sirve para realizar mediciones de inclinación, además de la elaboración de la herramienta, como parte del material para esta actividad fue necesario solicitar a los estudiantes que también llevaran al aula una cinta métrica o flexómetro, para poder realizar mediciones de distancias, y alturas de diferentes estructuras dentro del plantel, seleccionando diversas zonas con estructuras accesibles e inaccesibles para prever cualquier situación a la que pudieran enfrentarse en el momento de realizar la consigna (ver figura 3).

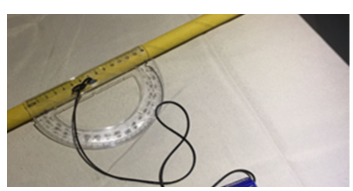


Figura 3. Teodolito elaborado por los estudiantes. Fotografía tomada en sesión de clases

d) *Resolución de problemas de aplicación:* esta categoría fue planteada para ser elaborada a lo largo de la secuencia de forma especializada dependiendo el tema abordado; ya fuera las razones trigonométricas o la ley de senos o de cosenos o bien el desarrollo de todos los conceptos aplicados de forma simultánea, de tal forma que el estudiante demostrara su competencia. Estas actividades fueron planeadas para ser desarrolladas en los mismos equipos generados para abordar la situación problema; dentro de la actividad los estudiantes debían resolver los ejercicios, asegurándose que todos los integrantes del equipo comprendieran los conceptos y situaciones expuestas en las actividades a desarrollar para que de esta manera lograran enfrentar de manera sólida la siguiente actividad diseñada en la secuencia didáctica (ver figura 4).

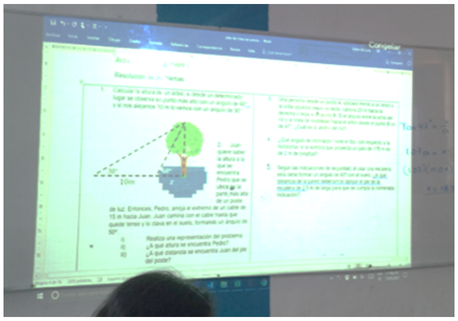


Figura 4. Evidencia del tipo de ejercicios asignados. Fotografía tomada en sesión plenaria del curso.

e) *Concurso de participaciones:* como consecuencia del reforzamiento de la categoría anterior, de forma aleatoria se seleccionó a un miembro del equipo para resolver en el pizarrón alguno de los ejemplos asignados anteriormente. El puntaje de la actividad lo obtenía el equipo que lograba su correcta solución, incentivando al equipo a mantener un nivel mínimo de entendimiento del tema y no dejar rezagado a ninguno de sus integrantes, ya que del éxito de uno dependería el éxito de todo el equipo (ver figura 5).

Figura 5. Trabajo en equipo. Fotografía tomada en sesión plenaria del curso

f) *Tareas para realización en casa:* para esta actividad se generaron un total de cuatro archivos en formato pdf. con una selección de ejercicios de diferentes grados de dificultad acorde a cada tema expuesto durante la semana; el estudiante tenía acceso a un archivo a la semana, el cual se hacía llegar en formato electrónico a través de la utilización de la *plataforma aula escolar* suministrada por el colegio. Cada archivo se ponía a disposición de los estudiantes los días martes de cada semana, de tal forma que pudieran resolver cualquier duda que les surgiera durante el desarrollo de esta actividad, ya que para entregarlo resuelto contaban con un lapso de una semana para su realización.

El total de las actividades aquí descritas tuvieron un valor total de 60% sobre 100%, de la calificación correspondiente a la secuencia, fue dividida de la siguiente manera: situación problema con un valor del 15%, actividades de clase 15%, concurso y participaciones 10%, tareas de casa 20%, haciendo un total del 60% de la calificación arriba mencionado. Finalmente, el 40% restante de la evaluación dela secuencia, comprende un examen escrito, cabe aclarar que este valor no es posible modificarlo debido a que es política de evaluación de la institución.

Puesta en marcha del proyecto. Una vez planeadas las actividades se comenzó la secuencia didáctica el 5 de mayo de 2017, teniendo clases con el grupo los martes (1 hora), jueves (2 horas) y viernes (2 horas) y se terminó el día 30 del mismo mes; cabe mencionar que durante este periodo no hubo suspensión de clases por días festivos.

La primera actividad realizada fue la descripción y entrega del cronograma, las políticas que se llevarían a cabo durante el periodo en el que se efectuó el proyecto, para asegurarse que los estudiantes estuvieran consientes de las actividades y fechas de compromiso establecidas en el mencionado cronograma.

a) *Situación problema:* fue desarrollada como un protocolo de laboratorio en el formato establecido para estas actividades por la institución, en donde debían llenar varios campos como: enumeración de los integrantes, planteamiento del problema; basado en el supuesto de que eran trabajadores del ayuntamiento y debían realizar un inspección, marco teórico el cual se fue desarrollando conforme se fueron abordando los temas durante la secuencia didáctica, elaboración de una hipótesis basada en la situación problema, realizar un plan de investigación en el cual debían poner fechas a cada una de las actividades que realizarían, mencionar el material y el equipo que utilizarían, toma de mediciones y cálculos necesarios, análisis de los resultados; comparando los resultados obtenidos de los cálculos anteriores, ver si dicho resultado son coherentes, compararlo con los estatutos establecidos por el Ayuntamiento y emitir una conclusión.
Toda actividad debía ir acompañada por evidencia fotográfica, así como la bibliografía consultada; para la revisión de esta actividad se establecieron dos fechas, una de entrega parcial para verificación de información y avance del proyecto y una segunda entrega considerada como definitiva.
b) *Actividades de refuerzo de conceptos vistos*: se efectuaron un total de cuatro actividades de este tipo ya que son introductorias, es decir se presenta la información sin contexto ni aplicación, únicamente se elaboraron ejercicios sin ningún tipo de contextualización.
c) *Mediciones con teodolito:* Esta actividad fue planeada como apoyo a la realización de la situación problema, para que el estudiante tuviera una herramienta útil y tangible para poder efectuar sus mediciones,

Pese a que esta actividad fue planeada dentro del cronograma de actividad fue imposible su realización debido a actividades extracurriculares programadas por la institución en el horario correspondiente a la clase. Fue necesario hacer un ajuste a la planificación, suplir dicha práctica con un tutorial encontrado en internet que contenía la explicación del uso de la herramienta, además de informarles a los estudiantes que de ser necesario contarían con apoyo adicional por parte del profesor en caso de que lo requirieran.

Figura 6. Estudiantes realizado mediciones con teodolito. Fotográfica suministrada por los estudiantes

d) *Resolución de problemas de aplicación*: se desarrollaron un total de cuatro actividades de este tipo en donde los estudiantes discutían la mejor forma de resolver el o los problemas solicitados como parte de la secuencia didáctica. En conjunto tomaban una decisión y actuaban en consecuencia, ya que, como se menciona anteriormente, fueron generados por los mismos equipos para este periodo, reforzando de esta manera la interacción del equipo con la ayuda y supervisión del profesor. Se usó como política de actividad el reforzamiento de los conceptos por parte de sus pares, de tal forma que se pudiera hacer uso de esto en la categoría siguiente**,** que corresponde al concurso de participaciones.

e) *Concurso de participaciones:* esta actividad fue utilizada como medio de evaluación formativa; esta fue realizada en equipo de tal forma que los miembros con mayor habilidad y destreza debían apoyar a aquellos miembros que no contaban con el mismo nivel de dominio de competencias algebraicas, ya que dicho concurso consistió en pasar al pizarrón a tres jóvenes seleccionados de manera aleatoria por el docente pertenecientes a diferentes equipos, estos integrantes de equipo, sin ver el procedimiento utilizado, debían resolver un problema similar en el pizarrón, si este estudiante podía resolver el ejercicio, el puntaje asignado para ese problema se daba a todos los miembros del equipo que lo había conseguido, asegurado de esta manera que el éxito de uno dependía el éxito de todos; para evaluar los resultados, no únicamente se evaluó la resolución del ejercicio sino también la interacción y el trabajo entre los integrantes del equipo.

f) *Tareas para realización en casa*: éstas se crearon con la intención de que fueran trabajadas en forma individual, como parte de la evaluación de las tareas realizadas durante la semana. En el salón de clases se seleccionó al azar a estudiantes del grupo, así como uno o varios ejercicios específicos de los contenidos de su tarea para ser solucionado en el pizarrón, y de esta forma exponer el procedimiento que utilizaron. En caso de que algún estudiante no coincidiera con el resultado o procedimiento, estaban en libertad de compartirlo o corregir el procedimiento desarrollado por su compañero, siempre haciendo del conocimiento de los estudiantes que esta actividad no restaba puntaje de la tareas, simplemente sumaba puntos de participación en sus correspondientes asignaciones permitiendo en ocasiones establecer debates sobre las diferentes respuestas obtenidas y consiguiendo una conclusión al ejercicio en cuestión.

g) *Evaluación:* Al final de la secuencia didáctica se llevó una evaluación escrita, la cual debía incluir los conceptos vistos durante el periodo con un valor fijo de 40%, el cual es establecido por la institución.

Implicaciones

Tras la aplicación de los exámenes escritos y haciendo una comparación con los resultados obtenidos por el mismo instrumento en la evaluación anterior, se detectó un incremento en los resultados en el examen, teniendo un incremento en las notas de la evaluación de la secuencia didáctica de un 22% en los estudiantes con respecto al periodo anterior.

Como ya se mencionó anteriormente, el valor del examen es de 40 puntos, el incremento en el promedio grupal fue de 6 puntos con respecto al mismo periodo de comparación equivalente a un 15% proporcional de aumento. Además del cambio positivo en el promedio de las calificaciones obtenido, también es posible mencionar la motivación intrínseca que se manifestó durante la experiencia de aprendizaje; en la que los estudiantes mostraron mayor interés en entender los temas abordados en la experiencia, así como un cambio favorable en su disposición en apoyar a sus pares que tenían desarrollado en menor grado sus competencias matemáticas, logrando un incremento global en calificaciones.

Conclusiones

Es muy común que un estudiante pregunte a su profesor de matemáticas ¿y eso para que me va a servir en la vida?, pregunta muy lógica si hablamos de las nuevas generaciones en las cuales si no ven la utilidad a lo aprendido simplemente este aprendizaje es desechado; es en este punto donde el docente puede hacer uso de situaciones didácticas para generar en el estudiante motivación y curiosidad por aprender y cambiar la percepción que los estudiantes tienen de las matemáticas, transformándolas de una asignatura difícil y muchas veces en opinión de los estudiantes poco útil, a una asignatura contextualizada en su entorno inmediato y evidenciable.

Al contener la secuencia didáctica un proyecto de aplicación en el área de matemáticas, específicamente en el tema de trigonometría, representado como una situación problema de forma versátil por su uso cotidiano en diversos ámbitos, fue aceptada de forma rápida y voluntaria por los estudiantes, quienes se mostraron interesados y entusiastas para aprender el tema.

En cuanto al trabajo realizado mediante la estrategia de trabajo colaborativo, fue evidente el interés y la disposición de los estudiantes con mejores notas de apoyar a sus pares en el momento de realizar las actividades en equipo; ayudando a estos a generar su aprendizaje significativo.

La impresión que este proyecto dejó en los estudiantes a los que se les aplicó, no fue únicamente la generación de un conocimiento el cual fue visible en los resultados obtenidos en la evaluación, sino que también se propició un ambiente cordial, de apoyo, comunicación y pertenencia en el aula, ya que el éxito de uno dependía del éxito de todos.

Finalmente, la metodología aplicada en la intervención didáctica, puede implementarse en otros niveles educativos, también en diferentes áreas del conocimiento, promoviendo de esta forma mayor participación de los estudiantes, así como permitiendo la atención de forma transversal a las competencias genéricas de solidaridad, respeto, responsabilidad y trabajo en equipo.

Referencias bibliográficas

Cabero, J. (1998). Impacto de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en las organizaciones educativas. *Grupo Editorial Universitaria*.

Chavarría, J. (2006). Teoría de las situaciones didácticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 1(2). Recuperado de Http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno2/Cuadernos%202%20c%203.pdf

Collazos, C. A., & Mendoza, J. (2006). Cómo aprovechar el" aprendizaje colaborativo" en el aula. *Educación y educadores*, *9*(2), 61-76.

Crawford, M. (2004). Enseñanza contextual. *Center for Occupational Research and Development, Texas*.

De la Villa, A., Lois, A., Milevicich, L., & Rodríguez, G. (2013). La revolución tecnológica en la enseñanza de las matemáticas: el nuevo paradigma. ¿Es una oportunidad de cambio o un simple engaño? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26,* 1879-1888.

Maure, L. y Marimón, O. (2015). Un aprendizaje basado en proyecto en matemática con alumnos de undécimo grado. *NÚMEROS*, *90*, 21-31

Zamora Cintas, P. J. (2013). La contextualización de las matemáticas. Recuperado de http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2323/Trabajo.pdf?sequence=1

Calzadilla, M. E. (2002). Aprendizaje colaborativo y tecnologías de la información y la comunicación. *Revista Iberoamericana de educación*, *29*(1), 1-10.

Moreira, M. A. (1997). Aprendizaje significativo: un concepto subyacente. *Actas del encuentro internacional sobre el aprendizaje significativo*, *19*, 44.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ALGUNAS SOLUCIONES AL PROBLEMA DE BERNOULLI DE LAS SUMAS DE POTENCIAS

SOME SOLUTIONS TO THE BERNOULLI'S POWER SUM PROBLEM

Juan Carlos Ávila Mahecha, Edward Steven Camelo Castillo
Universidad Sergio Arboleda. (Colombia)
juan.avila@usa.edu.co, edward_scc@hotmail.com

Resumen
Este artículo expone algunos referentes teóricos sobre las matemáticas elementales y la resolución de problemas como método para lograr estudiarlas, hacerlas y generarlas. Se presenta algunas soluciones dadas por el Grupo Yaglom de la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá, Colombia, al *problema de Bernoulli de las sumas de potencias*. El propósito del trabajo es que este tipo de problemas se constituyan en avances para la configuración de cursos del Programa de Talentos de la Universidad Sergio Arboleda y de esta forma contribuyan con la construcción de ejemplos de matemáticas elementales que puedan llevarse a cabo con estudiantes talentosos. Como resultados preliminares de esta construcción nacieron algunas actividades a partir de las soluciones que los integrantes del Grupo, estudiantes y profesor dieron al problema de Bernoulli como rutas de acceso iniciales para el planteamiento de los cursos que se mencionan.

Palabras clave: matemática elemental, resolución de problemas

Abstract
This paper exposes some theoretical referents about elementary mathematics and the problems solving as a method to be able to study it, do it and generate it. It presents some solutions given by the Yaglom Group of the Sergio Arboleda University of Bogotá, Colombia, to the *Bernoulli's power sum problem*. The purpose of this work and this type of problems are to establish an advances configuration of the courses for the Talents Program of the Sergio Arboleda University and in this way contribute with the construction of examples of elementary mathematics that can be applied out with talented students. As preliminary results of this construction some activities were born from the solutions that the members of the Group, students and professor, gave to the problem of Bernoulli as initial access to the approach the mentioned courses.

Key words: elementary mathematics, problem solving

Introducción

En la Universidad Sergio Arboleda de Bogotá Colombia, existe, desde hace más de diez años, el *Programa de Talentos Matemáticos*. Este Programa busca potenciar el talento de niños y jóvenes de educación básica, media y media vocacional interesados por las matemáticas.

Lograr satisfacer las necesidades de conocimientos matemáticos en niños talentosos (de las matemáticas) dentro de una escuela, es en general una tarea difícil. En primer lugar, porque si bien los profesores logran identificar a estos talentos resulta complicado dedicarles una atención especial en clase sin desatender al resto de los estudiantes, y en segundo, debido al avance que muestran los alumnos talentosos, puede que los profesores agoten sus ideas y actividades matemáticas con rapidez. Por eso, en el año 2002 se inició el proyecto llamado *El semicírculo de la Universidad Sergio Arboleda* (Pérez, Núñez, Bustamante, Cortés, Duarte, Losada y Vergara, 2012) el cual buscó mitigar un poco estos problemas en la ciudad de Bogotá; proporcionando a estudiantes, profesores y padres de familia una opción académica a través de la cual enseñar matemáticas a niños talentosos en un contexto universitario. Por tanto, la creación y puesta en marcha de actividades matemáticas fue la tarea principal del proyecto, donde áreas como la teoría de números, la geometría, la teoría de conjuntos, el álgebra, la historia de las matemáticas, entre otras, se constituyeron en fuente de investigación para los docentes involucrados en el proyecto.

Debido al éxito del Programa y de que varios de sus estudiantes comenzaron a interesarse profesionalmente por las matemáticas, ingresando a estudiar la carrera en la Universidad, muchos de ellos sintieron la necesidad de retribuirle a la Universidad y a otros estudiantes la oportunidad brindada por el Programa, con lo cual, en el año 2010 se fundó el semillero de investigación, *Grupo Yaglom* (en honor al profesor Isaak Yaglom (1921-1988)) de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda, conformado por profesores y alumnos de la Universidad interesados en estudiar teorías matemáticas elementales, bajo la dirección de profesores de la Escuela, con el propósito de diseñar y evaluar actividades que pudieran constituirse en cursos para el Programa de Talentos.

En la actualidad, el Grupo Yaglom sigue trabajando bajo sus principios y es por ello que en el presente documento se expone un ejemplo de trabajo desarrollado durante el primer semestre de 2018, alrededor de la solución del problema de Bernoulli de la suma de potencias (Dörrie, 1965). Otros ejemplos de temáticas que se han estudiado y puesto en práctica alrededor de las matemáticas elementales en el Grupo y en los cursos del Programa son:

- Didáctica gaussiana o aritmética modular.
- Didáctica pitagórica.
- Teoría de números: Los números naturales, enteros, teorema fundamental de la aritmética, algunas funciones numéricas como número de divisores de un número, suma de divisores de un número, función ϕ de Euler.
- Combinatoria.
- Teoría de grafos.
- Geometría reticular
- Álgebra finita: grupos.
- Lógica: los 16 conectivos lógicos de Peirce y su relación con la teoría de conjuntos.
- Teselaciones del plano.

En este documento, también se exponen algunos fundamentos teóricos sobre la matemática elemental (Pérez, 2007), que es la desarrollada en los cursos del Programa de Talentos y estudiada en el Grupo Yaglom, así como algunos referentes sobre la metodología adoptada para hacer matemáticas elementales, la resolución de problemas.

Con el propósito de determinar si el problema que se expondrá en el presente artículo es un ejemplo de matemática elemental, es importante, en primer lugar, mostrar los resultados que los estudiantes del Grupo Yaglom lograron alrededor del estudio del problema, esto con el fin de configurar actividades que puedan luego proponerse a los estudiantes de un posible curso del Programa de Talentos Matemáticos. Por tanto, en este documento solo se mostrará esta primera parte, los desarrollos logrados por los estudiantes del semillero.

Marco teórico–metodológico

Cuando se piensa en la palabra “elemental”, generalmente se piensa como sinónimo de fácil, trivial, sencillo, obvio, evidente. En las matemáticas, la palabra “elemental” se puede corresponder, por ejemplo, con los fundamentos de alguna de las áreas que tienen las matemáticas como ciencia: elementos de geometría, teoría elemental de números, teoría elemental de conjuntos, cálculo elemental, entre otras. Entonces, ¿qué es la matemática elemental? El profesor ruso Isaak Yaglom (1921-1988), experto en matemáticas elementales y precursor del proyecto internacional de olimpiadas matemáticas, propone una definición sobre matemática elemental, como aquella que se puede trabajar con estudiantes y profesores de las escuelas y los colegios (Yaglom, 1981). Al analizar esta definición se destaca que:

- La matemática elemental no es necesariamente la que se puede enseñar en las escuelas o colegios, puede ir más allá de las matemáticas escolares.
- La matemática elemental tampoco es, necesariamente, la matemática escolar.
- La decisión de si cierta matemática es elemental o no, depende de la experimentación en un determinado tema, concepto u objeto de las matemáticas. Se dice que es elemental si no surge de una mera especulación o por imposición de los currículos de matemáticas definidos por un país o institución; sino, experimentando con los estudiantes y maestros actividades matemáticas para la construcción de conocimientos matemáticos (Luque, Mora y Torres, 2006).

Esta definición sugiere además las siguientes implicaciones a la hora de hacer exploraciones sobre matemáticas elementales:

- El “se puede trabajar” equivale a expresiones como “se puede construir o reconstruir” (Pérez, 2007), esto quiere decir que se construye conocimiento matemático en conjunto con estudiantes y profesores, no necesariamente inédito.
- El trabajo matemático elemental tiene todas las cualidades del trabajo matemático superior y avanzado: se manejan teorías, se formulan conjeturas, se buscan ejemplos y contraejemplos, se demuestran teoremas, se buscan aplicaciones, se formulan problemas, etc. (Pérez, 2007, p. 122).
- En los procesos de construcción involucrados en las matemáticas elementales, participan estudiantes cuyos prerrequisitos matemáticos no deben ser muchos, por tanto, los objetos o conceptos con los cuales se trabajan, deben poderse introducir con poco, o nada, de conocimientos previos.

El medio a través del cual se ha logrado estudiar, hacer y generar matemática elemental en el Programa de Talentos y en el Grupo Yaglom ha sido a través de la resolución de problemas, ya que catalogar si cierta matemática en estudio es elemental o no, depende en primer lugar de los desarrollos que se pueden hacer sobre la matemática que se constituya en objeto de estudio, y una manera para conseguirlo es proponiendo y resolviendo problemas.

En la literatura se encuentra una extensa bibliografía sobre la resolución de problemas en matemáticas, siendo George Polya (1887-1985) el referente principal; en su libro, Mathematical Discovery afirma que “un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata” (Polya, 1981, p. 117). De este modo, para el Grupo Yaglom un problema es una situación matemática (o una pregunta matemática) que no puede ser contestada de manera inmediata y se caracteriza por:

1. Ser lo suficientemente general y retadora como para considerar casos particulares que la resuelvan parcialmente.
2. No ser evidente el camino a seguir, por lo que hay que apelar a diferentes conocimientos o conceptos matemáticos previamente aprendidos o por aprender.
3. Ser placentera para quien lo resuelve. Tanto los resultados previos como el general, debe proporcionar una sensación de placer y de satisfacción intelectuales.
4. Permitir desarrollar la creatividad al conjeturar posibles soluciones, al descubrir modos de argumentar y proceder, al comunicar ideas.
5. Añadir nuevos conocimientos a quien lo resuelve. En el proceso de búsqueda de la solución del problema, se deben establecer relaciones con los conocimientos previos y los nuevos.
6. Motivar la búsqueda y estudio de bibliografías especializadas que aporten para la resolución del problema.
7. El uso, si es el caso, de herramientas tecnológicas para la conjeturación de resultados y las argumentaciones correspondientes.
8. Permitir el intercambio de ideas con otros para adoptar y descartar ideas, criticar resultados y llegar a acuerdos.
9. Permitir crear conocimiento matemático, esto es, formular y demostrar teoremas, aunque este conocimiento no necesariamente sea inédito.

En este sentido, el problema que se propuso a los estudiantes del Grupo Yaglom fue lograr hallar la siguiente suma:

$$S = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p,$$

donde n y p son números naturales. Este problema, junto con una solución, aparece en el libro de Dörrie (1965) titulado *100 great problems of elementary mathematics* (100 grandes problemas de matemáticas elementales), es el número 11 y se titula *el problema de Bernoulli de las sumas de potencias*. La primera solución general a este problema apareció en el libro Ars Conjectandi (El arte de conjeturar) del matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705), editado en 1713, ocho años después de su muerte. Dicho libro se ha constituido en un hito importante en la historia de la probabilidad.

Con base en las características listadas anteriormente y de las soluciones parciales y generales logradas por los estudiantes del Grupo, esta situación se catalogó como un problema porque:

- Ofreció un alto grado de generalidad, permitiendo obtener soluciones parciales bien fijando n o p y determinando cuál de las dos opciones es mejor.
- No fue evidente la solución general o un único camino a seguir. La situación es tan rica que existen argumentos de tipo algebraicos o geométricos.
- Los estudiantes mostraron un gran interés y emoción al ir hallando soluciones parciales, intentando en cada camino, buscar una general.
- Permitió desarrollos creativos a los estudiantes, ofreciendo para un mismo caso (fijando p) argumentos distintos.
- Los estudiantes encontraron relaciones entre la geometría, el teorema del binomio de Newton (no conocido por algunos) y algunas regularidades geométricas y algebraicas para obtener soluciones parciales del problema.
- Motivó a los estudiantes a buscar fuentes bibliográficas que les aportaran ideas para la solución de la situación y con ello, generar sus propios desarrollos.
- Permitió el intercambio de ideas entre los integrantes del Grupo, logrando algunas soluciones conjuntas.
- Permitió la generación de proposiciones que fueron argumentadas y organizadas en escritos con cierto grado de formalidad matemática de acuerdo al nivel de los estudiantes.

Por otra parte, y siguiendo de nuevo a Polya (1981), las estrategias o heurísticas para la resolución de problemas matemáticos considera cuatro etapas, que en esencia son las que se llevan a cabo por el Grupo como parte del método en el diseño de las actividades:

- Etapa 1: *Comprender el problema*. El problema debe ser lo suficientemente claro para quien lo resuelve, por tanto, proponer actividades en las que el estudiante comprenda a profundidad el problema resulta crucial en esta etapa.
- Etapa 2: *Diseñar un plan*. Para resolver cualquier situación problema, debe diseñarse un plan a partir de preguntas como: ¿se conoce algún problema parecido del cual se tenga respuesta?, ¿cuáles conocimientos previos ayudarían en la solución del problema?, ¿es posible reformular el problema en uno más simple?, ¿es posible introducir nuevos elementos auxiliares?
- Etapa 3: *Poner en práctica el plan*. Ejecutar el plan que se ha concebido, controlando cada paso, comprobando resultados y probando su veracidad.
- Etapa 4: *Examinar la solución*. Determinar si el resultado responde a la solución del problema, si es posible resolverlo de otra manera, si puede usarse para resolver otros problemas.

Con base en estas etapas y de acuerdo a lo que en el Grupo se ha concebido como matemática elemental, se expondrá en la siguiente sección algunos resultados y argumentaciones dadas por los estudiantes sobre el problema mencionado.

Resultados

Al proponerse el problema de Bernoulli de las sumas de potencias y luego del interés mostrado por algunos estudiantes del Grupo, se dio inició a los intentos de solución. En un primer momento, correspondiente a la etapa inicial de las heurísticas propuestas por Polya (1981), los estudiantes entendieron mal el problema confundiéndolo con el de una suma geométrica, a lo que algunos vieron trivial su solución. Sin embargo, al entender la complejidad de la situación y su no tan evidente respuesta, se vieron suficientemente motivados y retados ante la tarea. Una vez entendida la actividad y sin tener un camino claro por dónde continuar, los alumnos preguntaron a algunos de sus profesores de la carrera (no pertenecientes al Grupo) cómo poder iniciar, a lo que una sugerencia fue darle valores a p e ir analizando cada uno de los casos con el propósito de encontrar regularidades. De esta forma, los estudiantes, contaron con un plan inicial.

- Resultados para $p = 1$.

Dado que el resultado para este caso era conocido por la mayoría de los estudiantes, se les propuso buscar otras maneras, distintas a las que ellos sabían, de argumentar el resultado de la suma. Para llenarse de ideas, los estudiantes expusieron las soluciones que conocían y buscaron otras, algunas en libros y otras propias, un ejemplo de esta última fue inspirada por el estilo del libro Proofs whithout words (Nelsen, 1993):

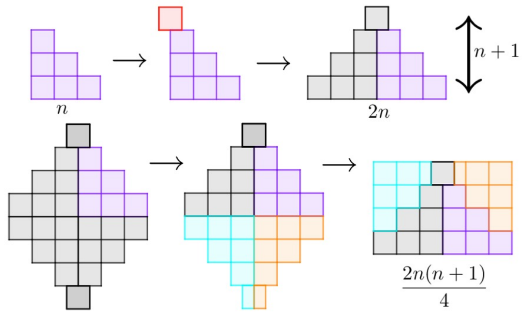


Figura 1. Primera forma para $p = 1$, lograda por Edward Camelo.

Una segunda forma, se obtuvo a partir de la siguiente lista encontrada como un ejercicio en el libro Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir (Luque, Mora y Páez, 2013, p. 106):

$$\begin{aligned} 1\times 8+1 &= 9 = 3^2\\ 3\times 8+1 &= 25 = 5^2\\ 6\times 8+1 &= 49 = 7^2\\ 10\times 8+1 &= 81 = 9^2 \end{aligned}$$

Los estudiantes al reescribirla hallaron que:

$$\begin{gathered} (1)\times 8+1 = 3^2\\ (1+2)\times 8+1 = 5^2\\ (1+2+3)\times 8+1 = 7^2\\ (1+2+3+4)\times 8+1 = 9^2 \end{gathered}$$

Los estudiantes encontraron que hay una relación entre el último número del paréntesis de la izquierda de cada una de las igualdades y el número que está elevado al cuadrado a la derecha de cada igualdad, así, para el n-ésimo renglón hallaron que:

$$(1+2+3+\cdots+n)\times 8+1 = (2n+1)^2,$$

al despejar la suma en paréntesis a la izquierda de esta ecuación, se tiene:

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{(2n+1)^2-1}{8}.$$

Dado el objetivo del Grupo de buscar ejemplos que puedan constituirse en matemáticas elementales y actividades que puedan llevarse a las aulas del Programa de Talentos, entre el mismo estudiante que logró la primera solución y el profesor, hallaron una forma geométrica de expresar la generalidad dada por la lista anterior, una vez más, el estilo de la siguiente solución es a la manera del libro Proofs whithout words (Nelsen, 1993):

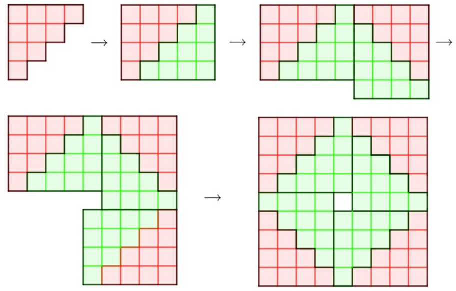


Figura 2. Segunda forma para $p = 1$ y $n = 4$, lograda por Edward Camelo y Juan Carlos Ávila.

- Resultado para $p = 2$.

Para este caso, los estudiantes encontraron, como un ejercicio, en el libro clásico de Cálculo infinitesimal de Spivak (1978, p. 37) lo siguiente:

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1,$$

al evaluar esta expresión para $k = 1, 2, 3, \dots, n$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\text{Para } k = 1,\ 2^3 - 1^3 &= 3(1)^2 + 3(1) + 1 \\
\text{Para } k = 2,\ 3^3 - 2^3 &= 3(2)^2 + 3(2) + 1 \\
\text{Para } k = 3,\ 4^3 - 3^3 &= 3(3)^2 + 3(3) + 1 \\
&\vdots \\
\text{Para } k = n,\ (n+1)^3 - n^3 &= 3(n)^2 + 3(n) + 1,
\end{aligned}$$

al sumar las igualdades anteriores, se obtiene:

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + 3\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) + n,$$

expresión que permite conocer el valor de la suma del problema de Bernoulli para $p = 2$, con base en el caso de $p = 1$.

- Solución general.

La solución del caso $p = 2$, sugirió rápidamente a los estudiantes una manera de hallar el resultado general, por lo cual, tal como sugiere la etapa tres de las heurísticas de Polya (1981), se implementó un plan hallando identidades algebraicas similares a las trabajadas en el caso previo, pero para los casos $p = 3, 4, 5$, reconociendo que en el proceso es necesario conocer los resultados de los casos anteriores y el uso del teorema del binomio de Newton. De esta forma y con base en el hecho de que:

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} k^{m+1-i} - k^{m+1},$$

los estudiantes, lograron obtener el resultado general:

$$1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p = \frac{(n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=2}^{p+1} \binom{p+1}{i} j^{p+1-i}}{p+1}.$$

Conclusiones y reflexiones

En relación con la matemática elemental, la determinación de cuáles matemáticas puede considerarse elementales, requiere necesariamente de ser *experimentales*, en el sentido de que tales matemáticas puedan ser llevadas al aula (escolar o especial, como en el caso del Programa de Talentos) y experimentadas con estudiantes y maestros a través de actividades organizadas y depuradas que permitan la construcción o reconstrucción de conocimientos matemáticos que según el caso, pueden ser nuevos o antiguos. Así, el trabajo con matemáticas elementales, implica, además que los estudiantes, bajo la ayuda y dirección de los maestros, jueguen el rol de un matemático, es decir, maneje teorías, formule conjeturas, busque y construya ejemplos y contraejemplos, demuestre teoremas, formule problemas, etc.

Con respecto a la resolución de problemas, el medio a través del cual el Programa de Talentos y el semillero de investigación Grupo Yaglom de la Universidad Sergio Arboleda ha logrado materializar el desarrollo de matemáticas elementales, ha sido a través de la resolución de problemas, entendiendo que un problema matemático significa buscar de forma consciente una o varias acciones para lograr un objetivo concebido con claridad pero que no es alcanzable de forma inmediata.

El planteamiento y la resolución de problemas resulta coherente con la búsqueda de ejemplos de matemáticas elementales, ya que para el caso del Grupo Yaglom, los estudiantes experimentan la actividad de resolver problemas que o han sido planteados por el profesor que dirige el semillero o por los mismos intereses de los estudiantes. En cualquier caso, las soluciones dadas a los problemas configuran algunas actividades iniciales, que requieren de depuración, escritura y estudio para lograr llevarlas al aula del Programa de Talentos y determinar su carácter matemático elemental.

Por otro lado, un trabajo académico como el expuesto, en donde maestros y estudiantes resuelven problemas de matemáticas elementales, es ideal para los cursos ofrecidos en el Programa de Talentos de la Universidad, ya que, por un lado, se logra satisfacer con éxito las expectativas de los alumnos del Programa y por el otro, se contribuye con la construcción de actividades y ejemplos de matemáticas elementales que pueden llevarse a cabo con estudiantes talentosos.

El hecho de que los estudiantes del semillero vivieran la experiencia de hacer un ejemplo de matemática elemental, permite cumplir el objetivo del Grupo, puesto que al conocer todo el proceso que este conlleva, ubica a los estudiantes en una posición reflexiva a la hora de proponer y ser responsables de un curso del Programa de Talentos de la Universidad, siendo conscientes de que las buenas preguntas y problemas son indispensables al trabajar con matemáticas elementales.

Por último, las soluciones logradas al problema de Bernoulli de las sumas de potencias, constituyen unas primeras actividades que deben organizarse y estudiarse para construir un curso del Programa de Talentos. Por tanto, se debe: formular preguntas de acuerdo con las soluciones alcanzadas, rutas de introducción a los problemas que surgieron en la etapa exploratoria por parte de los estudiantes del Grupo y sistematización de las soluciones sin que se pierdan las ideas y caminos tomados al hallar las soluciones.

Referencias bibliográficas

Dörie, H. (1965). *100 great problems of elementary mathematics*. New York: Dover.

Luque, C., Mora, L. y Páez, J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*. (2ª edición). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2006). ¿Es posible hacer matemáticas en el aula? En *Memorias de Coloquio Investigación e Innovación de la Enseñanza de las Ciencias 1*(1), 69-77. Bogotá, Colombia: Universidad Católica de Colombia.

Nelsen, R. (1993). Proofs without words: exercises in visual thinking. MAA.

Pérez, J. (2007). *Una fundamentación de la historia de las matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Pérez, J., Núñez, R., Bustamante, P., Cortés, C., Duarte, E., Losada, L., y Vergara, J. (2012). El ambiente académico universitario como una de las claves para el desarrollo del talento matemático en el programa el semicírculo de la Universidad Sergio Arboleda: Historias de vida de algunos de sus estudiantes talentosos. En *Memorias II Encuentro Internacional de Meta-Matemáticas*. Bogotá: Universidad Sergio Arboleda.

Polya, G. (1981). *Mathematical discovery*. New York: John Wiley & Sons.

Spivak, M. (1978). *Cálculo infinitesimal*. Bogotá: Reverté.

Yaglom, I. (1981). *Elementary geometry, then and now*. New York: Springer

GESTIÓN Y MEDIACIÓN DE LA ASIGNATURA CÁLCULO INTEGRAL EN UNA EDUCACIÓN A DISTANCIA

MANAGEMENT AND MEDIATION OF THE INTEGRAL CALCULATION IN A VARIABLE IN DISTANCE EDUCATION

Eric Padilla Mora
Universidad Estatal a Distancia. (Costa Rica)
epadilla@uned.ac.cr

Resumen
Se ofrece una descripción de los procesos de gestión y mediación empleados en la Universidad Estatal a Distancia (UNED) de Costa Rica, para impartir Cálculo Integral en una variable bajo el modelo de educación a distancia. Esto a partir del análisis y la descripción de los recursos utilizados en el periodo 2001-2018, además se detalla sobre cómo éstos han incidido en las propuestas de evaluación de los aprendizajes. Se destaca el empleo de plataformas educativas virtuales las cuales han permitido establecer mejores canales de comunicación entre los diversos actores, así como la implementación de talleres o laboratorios que permitan mediante el uso de software, favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje. En la elaboración de este material la metodología empleada fue netamente descriptiva.

Palabras clave: educación a distancia, cálculo integral, gestión académica, plataformas virtuales

Abstract
Provides a description of the management and mediation processes used in the State University a Distance (UNED) of Costa Rica, to teach calculus Integral in a variable under the distance education model. This is based on the analysis and description of the resources used in the period 2001-2018, as well as details on how these have affected the evaluation proposals for learning. Highlights the use of virtual educational platforms which have established channels of communication between the various actors, as well as the implementation of workshops or laboratories that allow through the use of software, promote the teaching and learning processes. In the preparation of this material the methodology used was purely descriptive.

Key words: distance learning, integral calculus, academic management, virtual platforms

Introducción

La aparición de la escritura, la invención de la imprenta y la necesidad de llevar la educación a todos los sectores de una población dispersa, son fundamentalmente, aspectos que contribuyeron con la creación y el desarrollo de la educación a distancia, la cual ha pasado por diferentes generaciones. Caracterizada por el empleo de materiales impresos vía correo y de algunas asesorías por la misma vía; aspectos que obviamente, aunque daban a las personas la posibilidad de formar parte de un proceso de enseñanza y de aprendizaje, presentaba dificultades. Por ejemplo, respecto a la primera generación, finales del siglo XIX y principios del siglo XX, se señala

> Metodológicamente no existía en aquellos primeros años ninguna especificidad didáctica en este tipo de textos. Se trataba simplemente de reproducir por escrito una clase presencial tradicional. La única forma, por tanto, de comunicación entre profesor y estudiantes en esta primera época de la primera generación, era de carácter textual y asíncrona. Tampoco existía posibilidad de comunicación entre los pares. (García, 2002, p.49)

Tiempo después, la aparición de la radio, el teléfono y la televisión lograron ampliar los canales de comunicación, y se convirtieron en grandes aliados para los procesos de enseñanza y de aprendizaje en la educación a distancia que es considerada como una “modalidad que permite el acto educativo, mediante diferentes métodos, técnicas, estrategias y medios, en una situación en que alumnos y profesores se encuentran separados físicamente y sólo se relacionan de manera presencial ocasionalmente” (Florido y Florido, 2003, p.3).

Por su parte García (2002), al realizar un análisis de las diversas concepciones propuestas por varios autores, respecto a la educación a distancia logró determinar que en ellas se establecen cuatro características bien definidas:

> a) La casi permanente separación del profesor/formador y alumno/participante en el espacio y en el tiempo, haciendo la salvedad de que, en esta última variable, puede producirse también interacción síncrona.
> b) El estudio independiente en el que el alumno controla tiempo, espacio, determinados ritmos de estudio y, en algunos casos, itinerarios, actividades, tiempo de evaluaciones, etc. Rasgo que puede complementarse -aunque no como necesario- con las posibilidades de interacción en encuentros presenciales o electrónicos que brindan oportunidades para la socialización y el aprendizaje colaborativo.
> c) La comunicación mediada de doble vía entre profesor/formador y estudiante y, en algunos casos, de éstos entre sí a través de diferentes recursos.
> d) El soporte de una organización/institución que planifica, diseña, produce materiales (por sí misma o por encargo), evalúa y realiza el seguimiento y motivación del proceso de aprendizaje a través de la tutoría. (García, 2002, p.39)

Educación a distancia en Costa Rica y enseñanza de la matemática

En Costa Rica, en 1977, se crea la Universidad Estatal A Distancia (UNED); la cual estaba dirigida a quienes no hubieren podido ser parte del sistema universitario formal. Entre sus fines, está el de incorporarlos a la educación superior, con métodos idóneos y flexibles. Se regiría por el modelo de educación a distancia.

Producto del impacto, alcance, madurez y logros obtenidos en las diversas carreras que ofertaba la Universidad, así como de una necesidad país, en 1992, se decide brindar mediante dicha modalidad la carrera enseñanza de la Matemática

> En los inicios esta modalidad a distancia representaba todo un reto ya que era un campo poco explorado. Los profesionales que laboraban en ese momento reflexionaban constantemente de cómo se podía llevar a cabo el proceso de enseñanza y de aprendizaje (Rojas y Sequeira, 2007, p.166).

Además, señalan que, para entonces la mediación, en las asignaturas de dicha carrera, se fundamentó en: un cronograma de trabajo, un libro de texto, la tutoría presencial y la tutoría telefónica, esto al tomar como referencia lo que se venía haciendo en algunas carreras que presentaban cierta madurez y éxito en la UNED.
La carrera de Enseñanza de la Matemática planteaba la necesidad y el reto de responder a una forma de educación que centra al estudiante como foco de atención, dado que será éste quien debe asumir un rol protagónico para el logro de los objetivos. Además, se debería corresponder al modelo pedagógico adoptado por la institución en el cual se indica

> (…) se han de concretar las concepciones de educación, las intenciones expresadas en la Misión Institucional, las formas en que se entiende el proceso de aprender a distancia y de enseñar a distancia, de manera que […] presida y oriente la estructuración y presentación de los contenidos de formación, las actividades que el estudiante debe llevar a cabo sobre esos contenidos, las funciones de facilitación del aprendizaje, las evaluaciones de los aprendizajes y las formas de apoyo y servicios que hagan posible todo lo anterior, así como los procesos de evaluación de los cursos, carreras o programas (UNED, 2004, pp. 16-17).

De acuerdo con el modelo pedagógico, se necesita establecer un diálogo didáctico mediado entre los diversos recursos que se le brinde al estudiante para que ubicado en espacios diferentes logre, de forma independiente un aprendizaje significativo, por tanto, era necesario proporcionarle las herramientas que le permitan construir sus propios procesos de aprendizaje y lo haga protagonista en la apropiación del conocimiento.

■ Enseñanza del cálculo integral en una variable, en una educación a distancia: recursos y estrategias

La carrera enseñanza de la matemática oferta la asignatura cálculo integral en una variable, la cual dentro de sus fines pretende brindar una formación sólida en cuanto a contenidos relacionados con la integración, sus técnicas y sus aplicaciones. En dicha asignatura, además del desafío de responder al modelo pedagógico de la UNED, el proceso ha conllevado a la investigación continua que contribuya con la toma de decisiones en aspectos como: recursos, mediación y evaluación.

Así empleando una metodología netamente descriptiva se realizará una descripción y análisis de los procesos de gestión y mediación empleados en la Universidad Estatal a Distancia para impartir la asignatura cálculo integral en una variable bajo el modelo de educación a distancia, y as u vez respondan tanto al modelo pedagógico de la institución como a los avances tecnológicos. En la tabla 1 se muestra algunas de las variantes en cuanto a recursos utilizados para el periodo 2001-2005.

Tabla1. Principales recursos utilizados en el periodo 2001-2005, asignatura cálculo integral.

Periodo	Recursos
2001-2002	▪ Orientaciones académicas. ▪ Tutorías presenciales. ▪ Material didáctico. ▪ Atención o tutoría telefónica.
2003-2005	▪ Orientaciones académicas. ▪ Tutorías presenciales. ▪ Material didáctico. ▪ Programa de apoyo didáctico a distancia (PADD) el cual incluía: atención telefónica o TUTOTEL, fax, correo postal (este correo se utilizó solo en el 2003 dado que presentó más desventajas que ventajas) y correo electrónico exclusivo para la asignatura: 178@uned.ac.cr.

Fuente: elaboración propia con datos de la cátedra

A continuación, se detalla cada uno de los recursos

- Las orientaciones académicas: consideradas como uno de los documentos más importantes en la mediación a distancia, dado que orienta al estudiante en su proceso de aprendizaje.

  En ellas se brinda la información general de la asignatura e incluye aspectos como: propósito, materiales y recursos por utilizar, objetivos, contenidos, bibliografía recomendada, cantidad de instrumentos de evaluación y para cada uno de ellos: descripción, objetivos y contenidos por evaluar, así como el porcentaje asignado, entre otros aspectos.

  Contiene un cronograma detallado con las actividades por desarrollar durante el periodo, fechas de entrega y aplicación de instrumentos de evaluación, así como el medio de entrega: sea mediante Centros Universitarios en caso de ser en físico o por medio de la plataforma educativa si es en formato digital.

  También en las orientaciones académicas se contemplan aspectos como: forma de ingreso a la plataforma de la asignatura, sugerencias en cuanto a la forma de estudio y las tareas que debe presentar el estudiante, a lo largo del periodo, con el fin que desde el inicio pueda ir avanzado en la resolución de las mismas.

- Tutoría presencial: es un espacio que la Universidad ofrece al estudiante, en el cual se brinda la oportunidad de realizar, de forma presencial, consultas relacionadas con los contenidos, teoremas, resultados o ejercicios de la asignatura en los que ha tenido alguna dificultad. Además, podrá preguntar sobre aquellos ejercicios del material didáctico u otro adicional que no pudo resolver o no comprendió.

  Como guía, durante una tutoría se recomienda:

  - Revisar la orientación académica.
  - Revisar algunas generalidades de la unidad didáctica, destacando: definiciones, teoremas y ejercicios que brinden aportes importantes al área en estudio. Se debe aclarar que la tutoría no es el equivalente a una clase presencial.
  - Revisar y desarrollar algunos ejercicios, los cuales son preparados por el docente y que podrían no estar en el texto o unidad didáctica.
  - Atención de dudas y consultas específicas de los ejercicios del texto o unidad académica en los cuales han tenido dificultades.

El número de tutorías es determinado por el coordinador de la asignatura (encargado de cátedra), generalmente, son cuatro por cuatrimestre, con una duración de tres horas. En la carrera Enseñanza de la Matemática, la asistencia a las tutorías no es obligatoria.

- Material didáctico: corresponde al libro de texto para la asignatura, éste por lo general, es elaborado por especialistas que trabajan en la Universidad (si es así se le denomina Unidad Didáctica) y en caso de ser un texto comercial (denominado material o libro externo) se debe hacer una revisión tomando como referencia los aspectos: mediación, enfoque y contenido, además se debe valorar la pertinencia de uso para la asignatura en función del modelo pedagógico de la Universidad.

Por lo general, en caso de ser libro externo, se debe realizar una guía de estudio en la cual se oriente al estudiante sobre: cuáles temas corresponden a la asignatura, en cuáles debe dar énfasis al estudiar, se ofrecen más ejemplos de los que se mencionan en el libro y se hace propuestas completas de la solución de los ejercicios del libro, entre otras consideraciones.

Es necesario recalcar que en un proceso de enseñanza y de aprendizaje centrado en el estudiante, los materiales didácticos son los principales aliados en el proceso de formación. Si bien, en el caso del material utilizado en la UNED para dicha asignatura, ha presentado diversas modificaciones tanto en formato como contenidos, los mayores cambios han sido en aspectos de mediación, esto a partir del diseño y rediseño de las descripciones curriculares, así como de la experiencia de los profesores tutores, encargados de cátedra y estudiantes, todo esto ha propiciado que el actual material reúna las condiciones para favorecer el aprendizaje a distancia.

Bien lo señala Gutiérrez y Pietro (1991)

> En los sistemas de educación a distancia la mediación pedagógica se da a través de los textos y otros materiales puestos a disposición del estudiante. Esto supone que los mismos son pedagógicamente diferentes de los materiales utilizados en la educación presencial y, por supuesto, mucho más con respecto a los documentos científicos. La diferencia pasa inicialmente por el tratamiento de los contenidos, que están al servicio del acto educativo. De otra manera: lo temático será válido en la medida en que contribuya a desencadenar un proceso educativo. No interesa una información en sí misma, sino una información mediada pedagógicamente (Gutiérrez y Pietro, 1991, p.1).

- Atención telefónica: este espacio se le ofrece al estudiante con la finalidad que el coordinador de la signatura pueda atender sus consultas o dudas, para ello se establece un horario. Además, dichas consultas podrían abarcar temas de carácter administrativo.

- Programa de apoyo didáctico a distancia (PADD**)**: dicho programa estaba conformado por
- Atención de consultas vía casillero de voz: el estudiante dejaba una pregunta vía telefónica en un casillero destinado para la materia y se le asignaba tiempo académico a un profesor para atenderla y dar la respuesta por el mismo medio. Se debía responder en un plazo no mayor a 24 horas.
- Correo electrónico: corresponde al correo institucional asignado a la asignatura, en el cual los estudiantes pueden hacer diversas consultas.
- Correo postal: el estudiante enviaba consultas o materiales a través del correo postal de Costa Rica. Tal como se indicó, por las diversas dificultades que esto provocó, solo se implementó en el 2003.
- Fax: con la finalidad que el estudiante enviara consultas o dudas y el encargado de la cátedra las atendiera. En ocasiones la retroalimentación se daba vía telefónica.

■ Plataformas educativas virtuales y su aporte a la mediación en la asignatura cálculo integral, en una variable, en una educación a distancia

Las plataformas e-learning, plataformas educativas o entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje de acuerdo con Hiraldo (2013)

> … ha implicado una serie de cambios significativos en el proceso de Enseñanza y Aprendizaje. Dentro de estos cambios significativos puede resaltarse la creación de Entornos Virtuales de Aprendizaje (EVA), los cuales dan la posibilidad de romper las barreras de espacio y tiempo que existen en la educación tradicional y posibilitan una interacción abierta a las dinámicas del mundo educativo.
> La integración de las herramientas tecnológicas ha facilitado de manera significativa los progresos de la educación a distancia, haciendo especial énfasis en el uso de recursos de interacción sincrónica y asincrónica a través de un sistema de administración de aprendizaje que facilita el adecuado desarrollo del currículo propuesto y proporciona grandes ventajas al proceso enseñanza y aprendizaje mediado por tecnologías (Hiraldo, 2013, p.2).

Sin embargo, Belloch (2007) advierte que

> El e-learning no trata solamente de tomar un curso y colocarlo en un ordenador, se trata de una combinación de recursos, interactividad, apoyo y actividades de aprendizaje estructuradas. Para realizar todo este proceso es necesario conocer las posibilidades y limitaciones que el soporte informático o plataforma virtual nos ofrece (Belloch, 2007, p.1).

Por ello ante esta realidad y aunque el desarrollo de plataformas educativas virtuales, así como su uso en el proceso de mediación en la educación a distancia tenía cierto impacto, fue hasta el 2006 cuando en el Programa Enseñanza de la Matemática se decide sobre el empleo (no se habían utilizado, entre otras razones, por la poca interactividad que hasta ese entonces posibilitaban las adquiridas por la Universidad: Micro Campus, WebCity y Blackboard) con el objetivo de establecer más y mejores canales de comunicación tanto sincrónica: chats y videoconferencia; como asincrónica: chats, foros y correos internos, esto mediante el uso de los diversos recursos que ellas ofrecen.

En la tabla 2 se detalla algunos aspectos relacionados con los recursos utilizados en la asignatura en el periodo 2006-2018, en él se destaca el empleo de las plataformas educativas virtuales.

Tabla 2. Principales recursos utilizados en el periodo 2006-2018, asignatura cálculo integral.

<table>
<tr><th>Periodo</th><th>Recursos comunes</th><th>Plataformas educativas</th></tr>
<tr><td>2006</td><td rowspan="4">▪ Orientaciones académicas.
▪ Tutorías presenciales.
▪ Material didáctico.
▪ Programa de apoyo didáctico a distancia (PADD)</td><td>▪ Se incursiona en el uso una plataforma informática, la cual se emplea principalmente para la resolución de ejercicios (actividades en la plataforma).</td></tr>
<tr><td>2007</td><td>▪ Plataforma informática (WebCity): correo interno, foros, materiales y enlaces, así como el diseño de actividades en la plataforma.</td></tr>
<tr><td>2008-2012</td><td>▪ Plataforma informática (Moodle): correo interno, foros, materiales y enlaces, así como el diseño de actividades en la plataforma.</td></tr>
<tr><td>2013-2018</td><td>▪ Plataforma informática (Moodle) la cual se utiliza, entre otras actividades para: correo interno, foros, subir materiales y enlaces, eXeLearning, diseño de actividades en la plataforma, subir tareas y talleres.</td></tr>
</table>

Fuente: elaboración propia con datos de la cátedra.

De acuerdo con lo mostrado en la tabla 2, el empleo de las plataformas se incrementó, así como el empleo eficaz de los diversos recursos con los que se dispone.

Figura 1. Diversos recursos y actividades para una semana. Cálculo Integral, 2018.
Fuente: elaboración propia, I cuatrimestre 2018.

En la sesión de recursos el uso de materiales complementarios, en la plataforma, es uno de los aspectos que se ha considerado como variante, sin embargo, con el paso del tiempo el utilizar archivos en formato Word o pdf se ha reducido dado que con el texto o unidad didáctica esto ha sido solventado. Se publicará aquel material para el cual se ha valorado que aporta al conocimiento del estudiante y permite reforzar los contenidos de la asignatura, además, se recomienda que este no sea muy extenso. Para ello se realiza una exhaustiva revisión en la web del material disponible, la posibilidad de uso, la pertinencia y calidad; luego se valida y se realizan los enlaces correspondientes en caso de ser aprobados o bien son elaborados por alguno de los profesores o el encargado de la cátedra.

En ocasiones se diseñan eXeLearnig con el fin de favorecer los aspectos de navegación y sea más práctico para el estudiante. Otro recurso que ha sido útil, de acuerdo con el criterio de los estudiantes, es el uso de enlaces a videos, por ello se está considerando diseñar, desde la UNED, los que se utilizarán en la plataforma.

■ Medición y evaluación en educación a distancia, plataformas educativas virtuales y la asignatura cálculo integral en una variable

Dado que en el modelo pedagógico de la UNED (2005), se señala

> … un modelo pedagógico centrado en el estudiante, que postula principios de autoaprendizaje y de aprender a aprender durante toda la vida, debe incorporar el concepto de evaluación como regulación y autorregulación de los aprendizajes, de manera que la evaluación llegue a ser integral, durante todo el proceso de aprender, e integrada, es decir, no separada del proceso como momento de comprobación. (UNED, 2005, p.17)

Por tanto, otro aspecto que evidentemente ha presentado variantes está relacionado con la evaluación de los aprendizajes. Un recuento general, sobre los criterios de evaluación sumativa empleados, en los últimos 18 años se muestra en las tablas de la 3 a la 6.

Tabla 3. Criterios de evaluación en la asignatura Cálculo Integral. Periodo 2001-2005

Periodo	Criterios	Porcentaje
2001	Dos pruebas escritas: 45% cada una	90%
	Dos tareas: 5% cada una	10%
2002-2005	Dos pruebas escritas: 40% cada una	80%
	Dos tareas: 10% cada una	20%

Fuente: elaboración propia con datos de la cátedra.

A pesar de que, en el 2006, se inicia con el empleo de las plataformas educativas virtuales, se consideró pertinente validar y analizar su impacto en la población estudiantil, por tanto, se le da la posibilidad de elegir entre dos formas de evaluación, las cuales se denominaban con y sin plataforma. Para ello en la primera semana de clase el estudiante debía enviar un correo al encargado de cátedra en el cual indicada el modelo mediante el cual le gustaría ser evaluado, en el cuadro 4 se detalla los criterios de evaluación empleados de acuerdo con cada uno de los modelos.

Tabla 4. Criterios de evaluación en la asignatura Cálculo Integral. Periodo 2006-2010.

Periodo	Criterios	Porcentaje
2006-2008	Modelo de evaluación 1. Sin plataforma	
	Dos pruebas escritas: 40% cada una	80%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Modelo de evaluación 2. Con plataforma	
	Dos pruebas escritas: 35% cada una	70%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Actividades en plataforma	10%
2009-2010	Modelo de evaluación 1. Sin plataforma	
	Dos pruebas escritas: 40% cada una	80%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Modelo de evaluación 2. Con plataforma	
	Dos pruebas escritas: 30% cada una	60%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Actividades en plataforma	20%

Fuente: elaboración propia con datos de la cátedra.

Por su parte el diseño e implementación de actividades de evaluación y autoevaluación ha permitido al estudiante analizar su avance y considerar en cual tema presenta alguna dificultad lo cual le permite reforzar. Esto ha permitido que la evaluación, siempre en respuesta al modelo pedagógico de la UNED, sea enriquecida a partir de la incorporación de la tecnología y los diversos recursos.

Dentro de los aspectos fundamentales en las actividades de plataforma se recomiendan: dejar claro el periodo durante el cual estará disponible la actividad, indicando día y hora de apertura y cierre, el modo de calificación y la cantidad de intentos.

Otro aspecto por destacar es el auge que han tenido los programas informáticos orientados al trabajo en áreas específicas de la matemática; los cuales a partir de su uso y de una mediación apropiada podría favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje. A partir de esto la cátedra, en el 2011, decidió diseñar un instrumento más de evaluación al cual denominó taller. Dicha actividad se realizaría en las últimas semanas del curso y requiere del empleo de algún software con capacidad para realizar cálculos numéricos, algebraicos, así como la construcción de gráficas, entre otros requisitos, se recomienda: GeoGebra, Winplot y Máxima, aunque se da la posibilidad de utilizar otros programas para la resolución del taller.

Dentro de los fines del taller está dar un repaso general a todos los contenidos tratados en la asignatura, así como analizar el aporte del empleo de software informático en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, sus ventajas y sus desventajas, tomando en consideración los contenidos desarrollados y tratar de reforzar aquellos en los cuales los estudiantes han tenido dificultades o han cometido más errores. Además, se estudia su aporte en la resolución de ejercicios, los posibles errores de interpretación y de construcción de gráficas. También se solicita que realicen alguna propuesta didáctica, a partir del empleo de alguno de los programas, para impartir una lección con alguno de los temas en los Programas de Estudio del III Ciclo y de la Educación General Básica en Costa Rica. En la tabla 5 se muestra las variantes en aspectos de evaluación con la inserción del taller.

Tabla 5. Criterios de evaluación en la asignatura Cálculo Integral, inserción de taller en el 2011.

Periodo	Criterios	Porcentaje
2011	Evaluación 1. Sin plataforma	
	Dos pruebas escritas: 35% cada una	70%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Taller	10%
	Evaluación 2. Con plataforma	
	Dos pruebas escritas: 25% cada una	50%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Actividades en plataforma	20%
	Taller	10%

Fuente: elaboración propia con datos de la cátedra.

A partir del 2011, se toma la decisión de hacer obligatoria la participación en las plataformas, por tanto, se elimina la opción de elección en cuanto a la forma de evaluación. En la tabla 6 se muestra los criterios de evaluación.

Tabla 6. Criterios de evaluación en la asignatura Cálculo Integral. Periodo 2012-2018.

2012	Dos pruebas escritas: 25% cada una	50%
	Dos tareas: 10% cada una	20%
	Actividades en plataforma	20%
	Taller	10%
2013-2018	Dos pruebas escritas: 25% cada una	50%
	Cuatro tareas: 5% cada una (Estas deben subirse a la plataforma)	20%
	Actividades en plataforma	20%
	Taller (Este se debe subir a la plataforma)	10%

Fuente: elaboración propia con datos de la cátedra.

Algunos aspectos por destacar en el periodo 2011-2018 están: se elimina la opción de seleccionar la forma de evaluación y se deja solo con plataforma, esto dado el nivel de aceptación por parte de los estudiantes; se amplió el número de tareas y estas debían ser subidas a la plataforma, para ello en la orientación académica se indica la fecha y hora límite para hacerlo y el espacio para subirlas se habilita con al menos 10 días de antelación a la fecha límite y los talleres como recurso de evaluación, para lo cual deberán presentar en la plataforma un informe detallado de las actividades desarrolladas en el mismo. El taller se habilita en la semana 9 del curso y deberá presentarse el informe con límite en la semana 11 del curso. Son en total 12 semanas.

Conclusiones y recomendaciones

Si bien la educación a distancia conlleva un gran reto, la enseñanza de la Matemática, en particular el cálculo integral en una variable, en dicho modelo aún más. No obstante, en la Universidad Estatal a Distancia en Costa Rica se asume dicho compromiso desde hace más de dos décadas y a partir de un proceso de madurez e investigación se ha logrado que el proceso de aprendizaje sea cada vez más orientado al estudiante.

La experiencia, la investigación y el análisis continuo de los procesos que se han llevado a lo largo de los años han contribuido en el empleo de diversos recursos y estrategias didácticas las cuales en algunos casos no han sido del todo exitosas. Además, la práctica ha propiciado tomar decisiones que han favorecido los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

El avance de la tecnología en particular de las plataformas educativas virtuales ha contribuido a establecer más y mejores canales de comunicación entre estudiantes-docentes, estudiantes- estudiantes, así como el diseño de más estrategias de evaluación, las cuales han posibilitado orientar el proceso a una evaluación más centrada en el estudiante y responder al modelo pedagógico de la Universidad.

Respecto a la evaluación se nota los grandes esfuerzos con el fin de hacer que esta responda al modelo propuesto por la Universidad, esta se concibe como un proceso continuo que permite y fomenta la retroalimentación, donde la sumativa se nutre de actividades de diversa índole.

Referencias bibliográficas

Asamblea Legislativa de la República de Costa Rica (1967). *Ley de creación de la Universidad Estatal a Distancia (UNED)*. Recuperado de: http://www.uned.ac.cr/academica/images/Normativa/Ley_de_creacion.pdf

Belloch, C. (2007). *Entornos virtuales de aprendizaje*. Recuperado de: https://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA3.pdf.

Florido, R. y Florido, M. (2003). *La educación a distancia, sus retos y posibilidades*. Etic@net. España. ISSN: 1695-324X. Recuperado de:http://www.ugr.es/~sevimeco/revistaeticanet/Numero1/Articulos/EaDretos.pdf

García, L. (2002). *La educación a distancia. De la teoría a la práctica.* España: Editorial Ariel, S.A. ISBN: 84-344-2637-4

Gutiérrez, P. y Pietro D. (1991). La mediación pedagógica. Apuntes para una educación a distancia. Recuperado de: http://campusmoodle.proed.unc.edu.ar/file.php/513/Biblioteca/Mediacion_Pedagogica.pdf

Rojas, E. y Sequeira R. (2007). *Nuevas tecnologías en los Cursos Álgebra Básica y Cálculo Diferencial de la carrera Enseñanza de la Matemática de la UNED*. Memorias del quinto Congreso Internacional sobre enseñanza de la Matemática asistida por computadora. ITCR. Costa Rica.

UNED. (2005). *Modelo pedagógico*. Recuperado de: https://www.uned.ac.cr/academica/images/igesca/materiales/24.pdf

UNED. (2018). *Orientaciones académicas de la asignatura cálculo integral en una variable*. Recuperado de: http://orientacionesacademicas.uned.ac.cr/consultas/

Hiraldo, R. (2013). *Uso de los entornos virtuales de aprendizaje en la educación a distancia*. Recuperado de: https://www.uned.ac.cr/academica/edutec/memoria/ponencias/hiraldo_162.pdf

ENSEÑANZA DE CURVAS CÓNICAS CON MATERIALES DIDÁCTICOS

TEACHING OF CONICAL CURVES WITH DIDACTIC MATERIAL

Marcela Villagra, Andrea Antunez
Instituto de Ciencias de la Universidad Nacional de General Sarmiento. (Argentina)
mvillagr@ungs.edu.ar, aantunez@ungs.edu.ar

Resumen
En este trabajo presentamos una propuesta didáctica cuyo objetivo es favorecer el aprendizaje de características geométricas de las curvas cónicas, basada en la Teoría de Situaciones Didácticas, y en fundamentos de la Comunicación Pública de la Ciencia y de la Museología Moderna. La experiencia fue implementada en escuelas de la zona de influencia de la Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina) y consiste de actividades motivadoras con materiales didácticos específicos. En la implementación se evidenció que estas actividades estimularon al estudiante a explorar, descubrir y, en diálogo con sus compañeros y el docente, a construir su propio conocimiento.

Palabras clave: cónicas, divulgación de la ciencia, propuesta didáctica

Abstract
In this article, we present a teaching proposal in orden to facilitate learning of the geometric features of the conics. It is based on the Theory of Didactical Situations and on foundations of science communication and modern museology. The experience was implemented at public schools located in the zone of influence of the Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina) and its activities were designed using specific didactical resources. While the proposal was implemented, students explored, discovered and built their own knowledge through interaction with their classmates and teacher.

Key words: conics, science divulgation, teaching experience

Introducción

En los últimos años, se han incrementado los comentarios de los docentes sobre la falta de interés de los estudiantes por aprender la mayoría de los contenidos que se trabajan en las aulas, y el caso de matemática no ha quedado exento de este hecho. En particular, los docentes de las escuelas en las cuales se implementó esta propuesta, mostraron su preocupación por la falta de motivación y poco entusiasmo que exhiben los estudiantes en las aulas, situación que se encuentra potenciada por el hecho de las concepciones negativas que los estudiantes expresan sobre sus competencias matemáticas. Puntualmente, en el caso del tema matemático abordado en esta propuesta: Curvas cónicas, los docentes mencionaron que la introducción del mismo genera en los estudiantes dificultades en su comprensión y en particular, destacaron que los mayores inconvenientes surgen al momento de relacionar la cónica estudiada con sus características geométricas. Sumado a este hecho, se observa que son pocas las veces que los profesores logran abordar el tema desde un enfoque geométrico, privilegiando el enfoque algebraico por sobre el primero debido al condicionamiento del tiempo. Más aún, se ha notado que las escuelas cuentan con pocos materiales didácticos que atiendan a estos escenarios. Tales situaciones se dan en un contexto escolar que tiene varios problemas socio-económicos, que, entre otras cuestiones, genera en las escuelas una dificultad para acceder a museos interactivos donde existen este tipo de materiales concretos.

Frente a este contexto, la propuesta didáctica aquí presentada se desarrolló en función de atender la problemática planteada mediante la generación de materiales didácticos participativos y sus respectivas actividades. El desarrollo de la misma se realizó en el Museo Interactivo de Ciencia, Tecnología y Sociedad “Imaginario” de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), en el marco del Programa Voluntariado Universitario de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Educación de la Nación Argentina, y se implementó en escuelas de la zona de influencia de la universidad.

El objetivo de esta propuesta es favorecer el aprendizaje de características geométricas de las curvas cónicas desde un punto de vista interactivo, creativo y lúdico, mediante la utilización de materiales didácticos específicos, y vinculándolas con sus usos prácticos en la vida cotidiana. Asimismo, tales materiales y actividades tienen el fin de motivar a los estudiantes tratando de generar una mirada más personal y humana de la Matemática.

En la implementación de la propuesta, observamos que los estudiantes realizaron las actividades con entusiasmo y motivados, y se evidenció una mejora en el aprendizaje.

Referentes teóricos y fundamentación de la propuesta

Los principales referentes teóricos en los cuales se fundamenta la propuesta provienen de la Comunicación Pública de la Ciencia, la Museología Moderna y la Enseñanza de la Matemática.

Según Calvo (2002) una de las funciones de la comunicación pública de la ciencia es constituirse en un complemento de la enseñanza: “La divulgación científica no sustituye a la educación actual, pero puede llenar vacíos en la enseñanza moderna, contribuir al desarrollo de la educación permanente, y ayudar al público a adoptar una determinada actitud ante la ciencia” (p.104). En línea con lo expresado, las actividades desarrolladas en el presente trabajo apuntan a satisfacer tal función. Las mismas llenarían el posible vacío que presenta la enseñanza de las curvas cónicas en las escuelas participantes, generado por la priorización del enfoque algebraico por sobre el geométrico, puesto que el abordaje del tema con la secuencia de actividades que aquí presentamos se realiza desde un enfoque geométrico-sintético dejando las condiciones establecidas para que el docente continúe el desarrollo del mismo desde lo geométrico- analítico y algebraico con mayor facilidad y naturalidad, además de que, por supuesto, contribuyen al desarrollo de la educación. Se tiene también que las actividades promueven el protagonismo del estudiante y la generación de interrogantes, así como la discusión de diferentes hipótesis y conjeturas, motivándolos a conocer más acerca de los fenómenos presentados. De esta manera, se logra que los estudiantes comiencen a vislumbrar a la ciencia matemática ya no desde una concepción de ciencia rígida, exacta, lejana y aburrida, sino desde una representación de una ciencia más experimental, pero, sobre todo, más cotidiana y entretenida.

El autor también menciona que el proceso de comunicación contribuye a atender el problema de la falta de interés de las personas por conocer la base de las políticas relacionadas con el orden público, la sanidad, la educación y otros fenómenos que caracterizan la sociedad que viven, ignorando que la investigación y el desarrollo del conocimiento de tales fenómenos es aquello que permitiría la innovación (Calvo, 2002). En este sentido, consideramos que esta condición es atendida por la propuesta presentada pues la introducción de los temas trabajados en las actividades, busca motivar a los estudiantes desde un punto de vista más amplio que el utilizado usualmente en las escuelas, mediante la experimentación y manipulación de materiales didácticos específicamente diseñados. Además, debido a sus características, los materiales didácticos permiten mostrar aplicaciones inmediatas a tecnologías, algunas de ellas utilizadas en el ámbito cotidiano, que han modificado, ya sea sensiblemente o sustancialmente, alguno de sus quehaceres habituales, y en la actualidad son innovaciones importantes. Más aún, estas actividades posibilitan comprender de manera general el funcionamiento de éstas aplicaciones.

En estos aspectos, encontramos una convergencia de las observaciones que Calvo (2002) describe sobre las funciones de la comunicación pública de la ciencia y lo que refiere De Guzmán (2007) en su trabajo “La enseñanza de las ciencias y la matemática”. De Guzmán (2007) menciona la importancia de evidenciar que “la matemática ha procedido de forma semejante a otras ciencias, por aproximaciones sucesivas, por experimentos, por tentativas, unas veces fructuosas, otras estériles, hasta que va alcanzando una forma más madura…” (p.26), características que, según el autor, ayudan mostrar una mirada más natural y humana de la matemática. La convergencia se evidencia en que ambos autores puntualizan la necesidad de modificar la actitud y la mirada que poseen las personas sobre las ciencias en general (Calvo, 2002) y la matemática en particular (De Guzmán, 2007), orientándola hacia concepciones menos misteriosas y más amigables, lo que, consecuentemente, actúa suscitando un mayor interés en ellas. Se busca generar en los estudiantes una nueva manera de mirar su entorno: el mundo que los rodea deja de ser una realidad externa, ajena y pasa a convertirse en un objeto de estudio sobre el cual se pueda reflexionar.

Teniendo presente que el proyecto del voluntariado se radicó en el Museo “Imaginario” y que las actividades se desarrollaron en ese contexto, entendemos que la fundamentación de las mismas debe satisfacer los principios que aboga el Museo. En consecuencia, además del sustento desde la comunicación pública de la ciencia, también se tomó como referencia para el desarrollo de las actividades, las recomendaciones que presenta Wagnensberg (2004) en su artículo “Principios fundamentales de la museología científica moderna”.

Basándonos en el trabajo de Wagnensberg (2004), podemos decir que poner las manos en acción es una de las herramientas claves para compresión de cualquier principio físico o matemático. Wagnensberg (2004) menciona:

> Los elementos museográficos se emplean, prioritariamente, para estimular según el máximo de las siguientes tres clases de interactividad con el visitante:
> 1) la interactividad manual o de emoción provocadora (Hands On),
> 2) la interactividad mental o de emoción inteligible (Minds On)
> 3) la interactividad cultural o de emoción cultural (Heart On). (p.16)

En la presente propuesta, se busca lograr estos tres tipos de interactividad ya que entendemos la interacción como conversación con lo manual, lo inteligible y lo cultural. Al proponer una actividad en torno a un recurso concreto se logra que el estudiante experimente y pueda “conversar” con el dispositivo propuesto. Esto impulsa a una autorreflexión, es decir, “conversar con uno mismo”. Al mismo tiempo, la actividad de interacción fortalece la relación entre los demás participantes y con el contexto cotidiano.

Finalmente, si bien las actividades fueron desarrolladas en el marco del Museo, las mismas están diseñadas para ser implementadas en las escuelas, por tal motivo, deben también atender objetivos específicos del aprendizaje. En este sentido, tomamos como marco de referencia principal la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD). De acuerdo con la TSD, la interacción entre el estudiante, un cierto medio y un sistema educativo, a partir de la cual el estudiante construye un conocimiento o realiza una producción autónoma como respuesta a una situación problemática, es sustancial. Esta situación se denomina, según la TDS, una situación didáctica. Al respecto Brousseau define las situaciones didácticas como: (Brousseau 1982, cita en Gálvez, 1994)

> Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que corresponde eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (p.42).

Entendemos que los estudiantes mediante la interacción con los dispositivos y la resolución de las actividades planteadas, logran realizar una producción autónoma. En esta actividad, llevan a cabo diversas acciones que son propias del quehacer científico, en ellas surgen hipótesis y conjeturas que los estudiantes intentan probar utilizando diversas estrategias, comparando con otras, intercambiando argumentaciones, tomando decisiones, emulando así el trabajo científico, lo que favorece que las situaciones de acción, formulación y validación surjan en la resolución de la actividad, propiciándose, de esta manera, la construcción del conocimiento. En relación a esto último, esta teoría concibe al juego como una herramienta para la generación de situaciones de aprendizaje. El juego debería favorecer el surgimiento del conocimiento o la producción autónoma por parte del estudiante como solución del mismo, o como recurso para obtener la estrategia óptima. El juego -materiales y reglas- junto con el funcionamiento y desarrollo efectivo del mismo, constituye un medio con el cual el estudiante construye conocimiento y, de esta manera, el juego se transforma en un dispositivo didáctico (Brousseau, 2007).

Son numerosas las publicaciones que proponen al juego como instrumento favorecedor del aprendizaje, y nos hemos sustentado en algunas de ellas, además de la TDS, para diseñar las actividades con características relacionadas con un juego didáctico.

Zelinová (citado en Vankús, 2013) detalla las funciones educativas de un juego. Señala que en el área no cognitiva desarrolla las expresiones emocionales, favorece la motivación, mejora el comportamiento social; y en el área cognitiva, estimula la memoria, propicia el desarrollo de habilidades sensoriales, motoras y de evaluación, como así también, favorece el pensamiento creativo (p.42). Por su parte, Vigostky (2009) también le otorga un valor social al juego y lo consideran como un factor favorecedor del desarrollo mental. De Guzmán (1984) señala la semejanza de la estructura matemática y los juegos, y expresa que el juego (entendido como mencionamos anteriormente) es beneficioso pues permite ejercitar procesos de pensamientos similares a los utilizados en los desarrollos matemáticos (De Guzmán, 2007).

Considerando lo anteriormente expresado, la propuesta didáctica aquí presentada, ha sido elaborada con un marco conceptual que combina fundamentos de la comunicación pública de la ciencia y la museología científica moderna (como actividad impulsada desde un museo de ciencias) con teorías de la didáctica de la matemática (como actividad de aprendizaje).

Metodología

Este proyecto fue llevado a cabo por investigadores docentes, estudiantes voluntarios, un equipo de coordinación del Museo Imaginario, pertenecientes a la UNGS; y los profesores de las escuelas medias donde se implementó la propuesta. Los profesores de las escuelas eligieron la temática “cónicas” para que sea desarrollada en sus aulas con estudiantes de entre 16 y 17 años. Teniendo presente el contexto mencionado en el apartado anterior, se diseñó una secuencia de tres encuentros consecutivos con actividades lúdicas donde se manipula material concreto con el fin de atender la problemática antes planteada.

Las características generales de las distintas consignas fueron:

- Las actividades principales de cada encuentro fueron planteadas de forma lúdica, con reglas de competencia entre equipos y utilizando el material didáctico concreto previamente diseñado.
- La dinámica de cada encuentro consistió en momentos de interacción con el dispositivo y momentos de debate grupal guiados por el docente, con anotaciones intermedias sobre las conclusiones abordadas. En los momentos de debate se estableció la definición y el nombre de los objetos estudiados a partir de sus propiedades geométricas.
- Las observaciones de los elementos geométricos de las cónicas se realizaron sin especificar el nombre particular del objeto, aunque al finalizar cada actividad se mencionó el nombre que recibe el objeto analizado.
- El momento de cierre de todos los encuentros consistió en el análisis de aplicaciones tecnológicas que utilizan las propiedades de las curvas estudiadas.

En el primer encuentro, las actividades consistieron en un análisis cualitativo de las propiedades geométricas de las parábolas. En particular, se les solicitó a los estudiantes interactuar con el dispositivo y tomar mediciones para lograr describir estas características.

Los objetivos de aprendizaje que se esperó que alcancen los estudiantes fueron:

- Conocer y comparar parábolas con un mismo vértice, pero con curvaturas diferentes.
- Tomar conciencia del comportamiento de la ubicación del foco respecto a la curvatura en una parábola.
- Utilizar las características de las parábolas para ubicar la posición del eje de simetría, estimar la posición del foco y de la directriz.
- Conocer algunas aplicaciones de las propiedades físicas de las parábolas en la tecnología.

Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos con un dispositivo que consiste en un módulo diseñado con una base rectangular de corcho y un cilindro parabólico construido con un material reflectante (Fig. 1). Se acompañó el dispositivo con un puntero láser al que se le ha adherido un suplemento para sujetarlo a la base en el lugar que se desea, al mismo tiempo que permite su rotación.

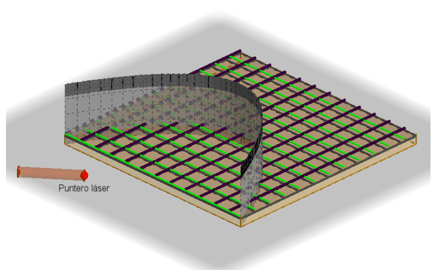


Fig.1: Diagrama del dispositivo.

En la actividad principal del encuentro, los estudiantes trabajaron en grupos con la consigna de ubicar el foco desconocido de una curva parabólica, proyectando rayos de luz sobre una superficie del dispositivo entregado (Fig. 2). Luego de estimar la posición del foco, iniciaron una investigación guiada sobre las características geométricas de los demás elementos de la parábola (Fig. 3 y 4), tomando mediciones y completando tablas, con el fin de poner en evidencia la simetría de la curva respecto a un eje y la igualdad de la distancia entre un punto de la curva y el foco con la distancia entre el punto de la curva y la directriz.

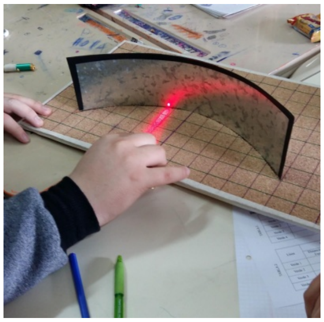


Fig. 2: Búsqueda foco

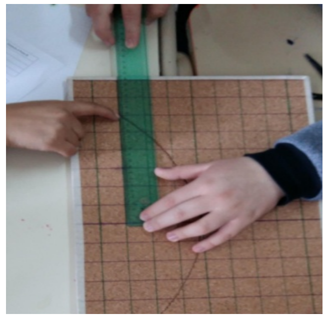


Fig 3: Mediciones en dispositivo

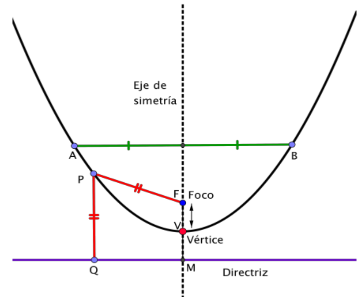


Fig 4: Elementos de la parábola

A continuación, con la información obtenida, se estableció un último juego donde el objetivo fue el de encontrar los elementos faltantes en gráficos de parábolas (Fig.5).

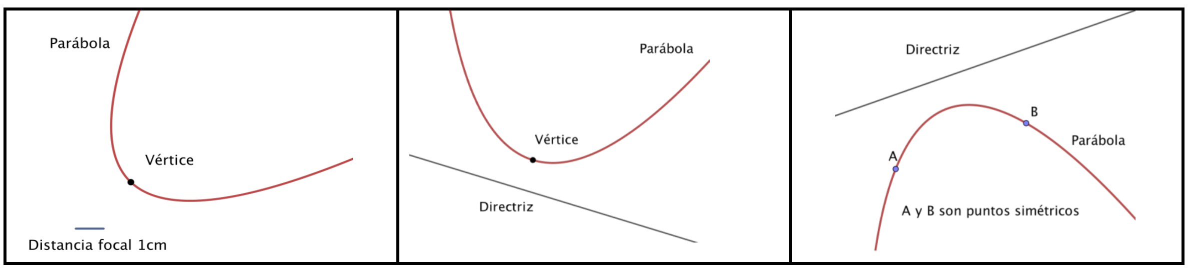


Fig 5. Gráficos usados en la actividad de parábolas.

Por último, se repartieron láminas con fotos de aparatos tecnológicos que en su construcción se utilizan curvas parabólicas, para que cada grupo expusiera una explicación de la relación entre el funcionamiento de estos y las curvas vistas.

En el segundo encuentro, los objetivos de aprendizaje se centraron en el estudio cualitativo de circunferencias y elipses. En particular, se pretendió que los estudiantes pudieran:

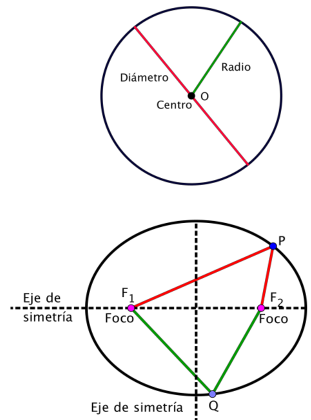
- Identificar el lugar geométrico de una circunferencia y de una elipse.
- Conocer los elementos de la circunferencia y de la elipse.
- Utilizar las características de la circunferencia y la elipse para ubicar la posición de eje de simetrías y estimar la posición de los focos o del centro de una circunferencia.
- Identificar formas circulares y elípticas en la naturaleza.

En el encuentro, los estudiantes trabajaron en grupos en torno a un conjunto de elementos, tales como una placa de telgopor, hojas de papel, útiles escolares, entre otros, de los cuales algunos podrían ser utilizados para alcanzar el objetivo del juego.

La primera actividad consistió en lograr graficar en una hoja una circunferencia con alguno de los objetos del conjunto de elementos, entre los cuales, cabe destacar, no se encontraba ningún compás. A continuación, se realizaron varias mediciones en los gráficos obtenidos y en otros gráficos aportados por el docente. Entre los propósitos de algunas de las actividades se encontraban el de caracterizar el diámetro de una circunferencia y hallar una aproximación de π mediante el cociente de entre las medidas del diámetro y la longitud de cada circunferencia analizada (Fig 6).

Fig 6: Mediciones en circunferencias.

Fig.7: Método del jardinero



Elementos de circunferencia y elipse

En la siguiente actividad se trabajó con elipses. La actividad se planteó de manera análoga a lo realizado en la construcción de la circunferencia, y con los mismos elementos, se les pidió a los estudiantes que trazaran elipses. El docente intervino en aquellos casos en los que la curva no pudo ser construida, mostrando, sin realizar una explicación explícita del procedimiento, cómo se traza la misma, mediante el método del jardinero (Fig. 7). La demostración no determinó los pasos ni las precauciones necesarias para que la curva elíptica quedase contenida la hoja de papel. Esto constituyó una dificultad en la construcción de las curvas. Luego de mediciones y observaciones del procedimiento se discutió sobre similitudes y diferencias entre una circunferencia y una elipse respecto a los elementos que las caracterizan, así como sus respectivas construcciones (Fig. 8). Por último, y a modo de cierre, se realizó un brindis con vasos y copas cilíndricas donde se observaron circunferencias y elipses como contorno de las superficies generadas por el líquido.

En el tercer encuentro, los estudiantes abordaron el análisis de curvas hiperbólicas y se estableció el cierre del tema con actividades que permiten definir a las parábolas, las circunferencias, las elipses y las hipérbolas como secciones cónicas. En particular, los objetivos centrales que se pretendió que alcancen los estudiantes fueron:

- Identificar similitudes y diferencias entre parábolas, círculos y circunferencias.
- Identificar propiedades de una hipérbola y sus elementos.
- Reconocer las curvas cónicas como curvas obtenidas a partir de secciones cónicas.
- Conocer métodos (manuales) de construcción de curvas vía sus propiedades (sin ordenador).

En este encuentro los estudiantes interactuaron con dos dispositivos: un bicono seccionado y una máquina eléctrica que genera un bicono de rayos de luz.

En la primera actividad se presentaron gráficos de hipérbolas con focos, asíntotas y ejes establecidos para realizar mediciones y comparaciones.

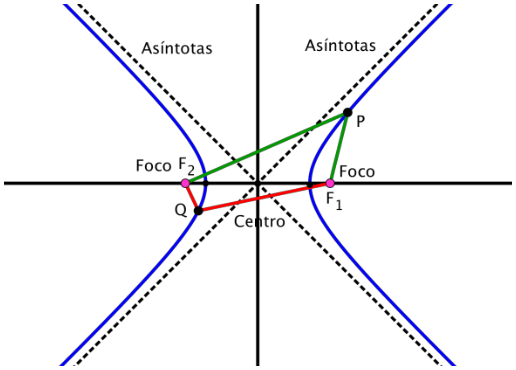


Fig. 9: Elementos en hipérbola.

Fig 10: Cono seccionado y dispositivo eléctrico.

La siguiente actividad consistió en realizar un cuadro comparativo entre las curvas estudiadas en los encuentros anteriores y las hipérbolas. Luego, se trabajó con un cono telgopor y se analizaron posibles secciones del mismo para obtener las distintas curvas cónicas estudiadas. Con estas actividades iniciales se comenzó la actividad central que consistió en interactuar con una máquina eléctrica que rota un puntero láser doble generando, de esta manera, una superficie de rayos en forma bicónica. El objetivo fue, por medio del posicionamiento de una placa de telgopor de manera apropiada y la intersección de la misma con el bicono de luz, generar las curvas cónicas. (Fig. 11, Fig. 12 y Fig. 13)

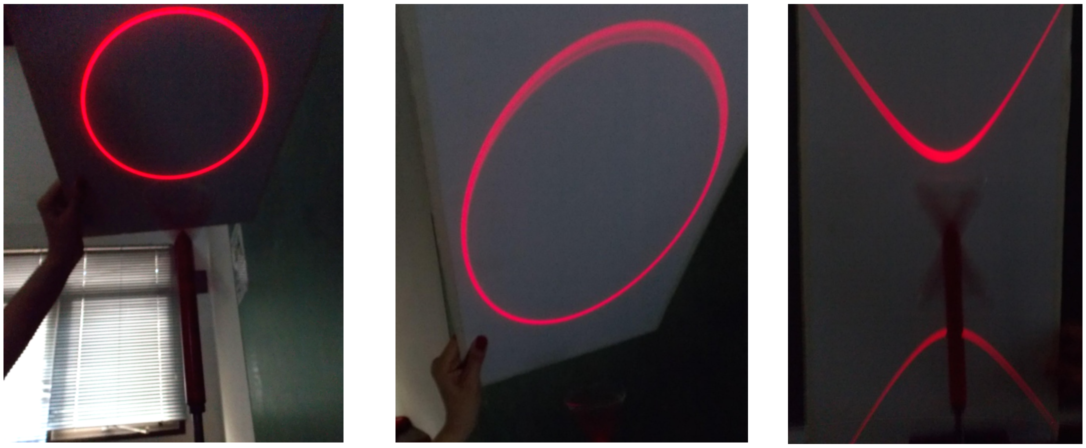


Fig. 11,12 y 13: Curvas cónicas obtenidas con el dispositivo eléctrico.

Resultados

Mediante la interacción con los dispositivos, los estudiantes experimentaron una manera de aprender las secciones cónicas con recursos distintos a los utilizados usualmente en las escuelas. Más aún, estos recursos -diseño y planificación- quedaron como materiales didácticos en las escuelas participantes y actualmente, forman parte de las actividades que el Museo Interactivo de Ciencia, Tecnología y Sociedad “Imaginario” (UNGS) ofrece habitualmente en sus visitas a las escuelas de la zona.

Respecto a la implementación de actividades de la propuesta, en los momentos de discusión y debate de las actividades, donde el objetivo consistió en evidenciar las propiedades de las curvas como lugar geométrico, los estudiantes pudieron encontrar estas propiedades a partir de los registros de sus observaciones. La importancia de los mismos fue evidenciada en las actividades propuestas al final de cada encuentro, en las que, mediante el uso de gráficos o dispositivos tecnológicos, se solicitó alguna conjetura sobre ellos. En estas actividades los estudiantes revisaron sus anotaciones e incluso incorporaron nuevas observaciones necesarias para poder proseguir con las consignas.

Se observó, que las actividades promovieron el protagonismo de los estudiantes, los mismos, participaron activamente, hipotetizando, argumentando y justificando, en las discusiones que se desarrollaron al interior de los grupos como así también en la puesta en común. Además, mostraron un genuino interés por conocer más sobre lo estudiado y en particular, sobre las aplicaciones en tecnologías.

Finalmente, en un encuentro posterior a las implementaciones de la propuesta didáctica, en el que participaron los docentes de las escuelas, los estudiantes, los integrantes del Museo, los voluntarios y docentes investigadores de la universidad, se pudo evidenciar otras consideraciones que expresaron los estudiantes. En tal encuentro, se compartieron las experiencias realizadas en las clases y se logró apreciar que la representación que tenían los estudiantes sobre la matemática antes de la implementación de la propuesta, se modificó. Los estudiantes comenzaron a verla desde un punto de vista de una ciencia más experimental, más cotidiana y más entretenida.

Conclusiones

Con esta propuesta mostramos una secuencia de actividades que puede desarrollarse de manera lúdica en torno a dispositivos de fácil diseño y construcción; y que permite la enseñanza significativa de las propiedades geométricas de las cónicas.

Observamos que los estudiantes encontraron un sentido más "práctico" y, en cierta medida, motivador, al estudio de las cónicas, basado en las aplicaciones a algunas tecnologías utilizadas en la vida cotidiana y sustentado por la experimentación física de algunas características geométricas de las curvas. Esto fue manifestado en las observaciones y debates dados en el aula como así también en los surgidos en el último encuentro compartido entre ambas escuelas. Asimismo, se observó durante el cierre cada clase y como así también en el cierre general de los encuentros, que el aprendizaje resultó más significativo, beneficiado por las características experimentales y la contextualización de las propiedades de las curvas.

Por su parte, la componente lúdica utilizada como factor motivacional y como medio de aprendizaje, de algunas actividades, favoreció el abordaje del tema, donde el contexto dinámico y distendido, propició la construcción de conocimiento.

Consideramos entonces, que propuestas con estas características en las que se aborda un tema con materiales didácticos, donde la participación del estudiante es activa y experimental, y con algunas componentes lúdicas, entendiendo el juego como medio en la interacción entre estudiante-docente-medio según la TDS, facilitan el aprendizaje significativo de los estudiantes.

Queda como desafío llevar las conclusiones de las actividades al ámbito algebraico para luego analizar el carácter funcional de las mismas, y poder de esta manera abordar los tres posibles enfoques de estas curvas: lo geométrico, lo algebraico y lo analítico.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Calvo, M. (2002). ¿Popularización de la ciencia o alfabetización científica? *Revista Ciencias, (66)*, 100-105.

De Guzmán, M. (2007). Juegos matemáticos en la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, (43),*19-58.

Gálvez, G. (1994). La didáctica de las Matemáticas. En C. Parra e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de matemáticas, aportes y reflexiones* (pp.39-50), Buenos Aires: Editorial Paidós.

Vigotsky, L. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Editorial Crítica.

Vankús, P. (2013). *Didactic games in mathematics*. Bratislava: Comenius University, Bratislava. Faculty of Mathematics, Physics and Informatics.

Wagnensberg, J. (2004). Principios fundamentales de la museología científica moderna, *Revista Museos de México y el Mundo, (1)*, 14-19.

LA FRACCIÓN COMO MEDIDA Y COMO OPERADOR: UNA EXPERIENCIA DE DISEÑO DE ACTIVIDADES DIDÁCTICAS

THE FRACTION AS A MEASURE AND AS AN OPERATOR: A DESIGN EXPERIENCE OF DIDACTIC ACTIVITIES

Elizabeth Vásquez Tirado, Maricela Armenta Castro, César Fabián Romero Félix
Universidad de Sonora. (México)
ely.vasquez.tirado@gmail.com, maricela@mat.uson.mx, cesar.romero@unison.mx

Resumen
Se presentan avances de una tesis de maestría consistente en el diseño, implementación y evaluación de actividades didácticas para favorecer la construcción de significados de la fracción como medida y como operador en niños de sexto grado de primaria (11-12 años). Se utilizaron los planteamientos de Lamon (2007, 2012) sobre los significados de las fracciones como marco referencial para orientar el diseño y llevar a cabo un análisis *a priori* de las actividades diseñadas. La implementación de las actividades se llevó a cabo con un grupo de 32 estudiantes de sexto grado de primaria. La propuesta está apoyada en el uso de tecnología digital y plantea momentos de trabajo individual, en equipo y grupal; y de acuerdo con la evaluación de la implementación, esta estructura funcionó para el diseño y el desarrollo de las actividades.

Palabras clave: significados, fracciones, diseño, actividades didácticas

Abstract
We present preliminary results from a master's thesis consisting on the design, implementation and evaluation of didactic activities to favor the construction of meanings for fraction as a measure and as an operator by sixth grade elementary school students (11-12 years). The Lamon´s contributions (2007, 2012), were used as a reference framework about meanings of fractions, guiding the design and *a priori* analysis of the activities. The implementation was carried out with a group of 32 sixth grade elementary school students. The proposal is based on the use of digital technology and considers moments of individual work, teamwork and group work; and according to the implementation's evaluation, this structure worked for the design and development of the activities.

Key words: meanings, fractions, design, didactic activities

Introducción

En el Sistema Educativo Mexicano, las fracciones se plantean en el currículo a partir del tercer grado de educación primaria. Los estándares curriculares señalan que al concluir el sexto grado, los estudiantes deben estar en condiciones de resolver problemas que impliquen leer, escribir, comparar, sumar, multiplicar y dividir números en representación fraccionaria o decimal, así como calcular porcentajes e identificar distintas formas de representación de las fracciones (SEP, 2011, p.64). En cuanto a los significados, se señala a la fracción como parte-todo, medida, cociente y razón. Sin embargo, en una revisión de libros de texto oficiales utilizados en Primaria y varios textos utilizados en Secundaria, identificamos que las situaciones que se abordan son mayormente situaciones de reparto, que dan lugar principalmente al significado parte-todo y en menor medida a otros significados, incluso al significado de la fracción como operador.

Por otra parte, reportes de evaluación del aprendizaje de estudiantes de nivel básico, tales como el Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes (PLANEA) 2018 y el Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) señalan serias limitaciones en la resolución de problemas que involucra el uso de las fracciones (INEE, 2018; PISA, 2015). Esto muestra que la problemática alrededor de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones es aún vigente. Esta problemática ha sido abordada por especialistas de la Matemática Educativa y documentada en distintos reportes de investigación, de los cuales retomamos los siguientes:

Fandiño (2007) señala que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones es uno de los más estudiados en Matemática Educativa quizás porque es una de las áreas que muestra mayor debilidad en el mundo. Encontramos que la afirmación de Fandiño se sostiene a la fecha, ya que una revisión bibliográfica reciente muestra que se siguen realizando estudios sobre el aprendizaje de las fracciones en diversos sistemas educativos, mencionando comúnmente dificultades asociadas a los diferentes elementos de significado de las fracciones, por ejemplo, la equivalencia de fracciones y *el operador fracción* como un número (Chambris, Tempier, & Allard, 2017).

Por otro lado, Chamorro (2006) plantea que el estudio de las fracciones demanda serias exigencias cognitivas por la utilización de nuevos símbolos y algoritmos para realizar operaciones, además de los conceptos y significados a los que se enfrenta un estudiante de primaria; destacando en particular las dificultades por falta de conexión entre el algoritmo y el significado. Sostiene también que la variedad de representaciones y la variedad de situaciones en las que pueden presentarse las fracciones, son fuentes de dificultad asociadas a su aprendizaje. En forma coincidente, Lamon plantea que "cuando se pasa del estudio de los números enteros a las fracciones, la variedad y complejidad de las situaciones que dan significado a los símbolos aumentan dramáticamente" (Lamon, 2012, p.32).

Como ejemplo paradigmático de *fenomenologías didácticas*, Freudenthal (1983) describe a las fracciones en el lenguaje cotidiano como fracturador o como comparador, señala también que el fracaso del aprendizaje de las fracciones se debe a que éstas se abordan solamente desde una perspectiva, a diferencia de los números naturales. Esto respalda nuestra enfoque de favorecer el aprendizaje de los distintos significados de las fracciones, por lo cual consideramos pertinentes a nuestro trabajo los planteamientos de Lamon (2012), que inicialmente surgieron como una extensión del análisis de fenomenologías didácticas del concepto de fracción (Lamon, 2007), acerca de las estructuras centrales para el aprendizaje de las fracciones: medida, cantidad y covariación, pensamiento relativo, planteamiento de unidad, reparto y comparación, razonamientos ascendente y descendente, así como interpretación de números racionales.

Ante el interés acerca de esta problemática, el objetivo del proyecto de tesis que enmarca este trabajo consiste en diseñar una propuesta de actividades didácticas para favorecer la construcción de significados de la fracción. Es importante señalar que el proyecto incluye tres etapas: el diseño de actividades con un marco conceptual que permite establecer análisis a priori, niveles de desempeño y valorar la propuesta; la implementación de las actividades; y finalmente un análisis de la implementación que permite evaluar el trabajo matemático realizado por los estudiantes al resolver las actividades, este último realizado con el marco de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Particularmente aquí nos enfocamos en la etapa de diseño de los significados de medida y operador de las fracciones.

Las actividades están dirigidas a estudiantes de sexto grado de primaria (11-12 años) e incorporan el uso de tecnología digital con un enfoque instrumental ya que tal visión permite "enfocarse en técnicas que los estudiantes desarrollan mientras se utilizan las herramientas… reconociendo que las técnicas incluyen nociones teóricas" (Drijvers, Kieran & Mariotti, 2009). De tal manera, los applets diseñados para algunas actividades tienen la intención de favorecer el desarrollo de técnicas específicas asociadas a alguna de las características del significado particular de fracción a estudiar.

Marco conceptual

Para el diseño de actividades adoptamos como marco conceptual las aportaciones de Lamon (2007, 2012) acerca de los significados de las fracciones, ya que permite un acercamiento compatible con los requerimientos del Sistema Educativo Mexicano.

Respecto a los significados de las fracciones que aquí se reportan, Lamon (2012) señala que en el significado de medida "una fracción usualmente es la medida asignada a algún intervalo o región, dependiendo si estamos en un espacio de una o dos dimensiones. En caso de estar trabajando en la recta numérica, la unidad es siempre un intervalo de longitud l, que cuando es partido en b subintervalos de igual longitud, cada subintervalo es de longitud $\frac{1}{b}$. En este caso, la fracción $\frac{a}{b}$ significa a intervalos de longitud $\frac{1}{b}$" (Lamon 2012, 210). También destaca algunos elementos o características de cada significado. Para la fracción como medida, señala los siguientes elementos: medición estática y dinámica, partición sucesiva, construcción de un sentido de densidad de los racionales, construcción de un sentido de orden y magnitudes relativas a las fracciones y, por último, operaciones con fracciones.

En la interpretación de la fracción como operador, Lamon (2012) plantea a la fracción como función que actúa como mapeo o bien como una transformación y señala algunas características que retomamos en este trabajo. Éstas son que las fracciones alargan o acortan segmentos de recta, aumentan o disminuyen el número de elementos de un conjunto discreto, toman una figura y la mapea en otra figura más grande o más pequeña, pero con la misma forma, relaciones de entrada y salida y por último composición.

Por otra parte, Lamon (2012) propone criterios para determinar si un estudiante ha construido los significados de las fracciones, por ejemplo, señala que un estudiante ha construido un significado para la fracción como medida cuando es capaz de realizar las acciones siguientes: utilizar la partición sucesiva, encontrar cualquier cantidad de fracciones entre dos fracciones dadas y comparar dos fracciones cualesquiera. Mientras que, para la fracción como operador, señala que el estudiante debe ser capaz de: interpretar a la fracción como operador de varias maneras, utilizar una fracción para referirse al resultado de aplicar una composición de fracciones, identificar el efecto del operador y usar modelos para caracterizar una composición de composiciones.

Metodología

Como ya se mencionó en la introducción de este reporte, el diseño de las actividades está enfocado en los significados de la fracción como medida y como operador, con la intención de favorecer la construcción de dichos significados en niños de sexto grado de primaria. Las aportaciones de Lamon (2007, 2012) se utilizaron para definir elementos o características fundamentales para cada significado y orientar el trabajo de diseño y el análisis preliminar de las actividades. Además, consideramos distintas formas de trabajo: individual, en equipos y grupal; así como uso de material concreto y applets en GeoGebra.

Para la fracción como medida, Lamon (2012) señala los siguientes elementos: *Medición estática y dinámica, partición sucesiva, construcción de un sentido de densidad de los racionales, construcción de un sentido de orden y magnitudes relativas a las fracciones* y, por último, *operaciones con fracciones*, por lo que nos dimos a la tarea de diseñar hojas de trabajo para cada uno de estos elementos. Así continuamos con el resto de los elementos para la fracción como medida y operador.

De tal manera, en total se diseñaron 26 hojas de trabajo, once hojas para el significado de medida (Figura 1) y quince hojas para el significado de operador (Figura 2). Para el significado de medida se diseñó una actividad con uso de material concreto y tres con uso de applets en GeoGebra; para el significado de operador se diseñó una actividad con material concreto y tres actividades con uso de applets.

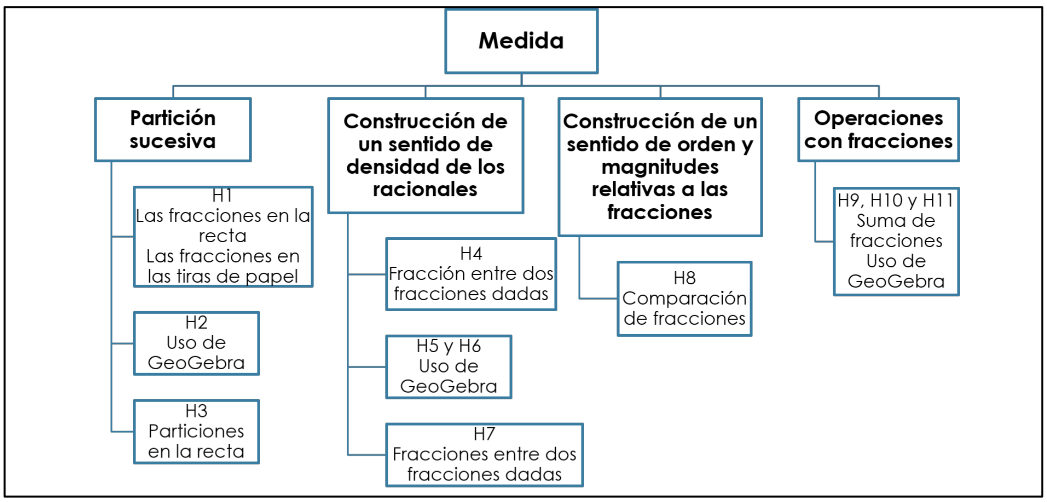


Figura 7. Estructura de actividades para significado de medida

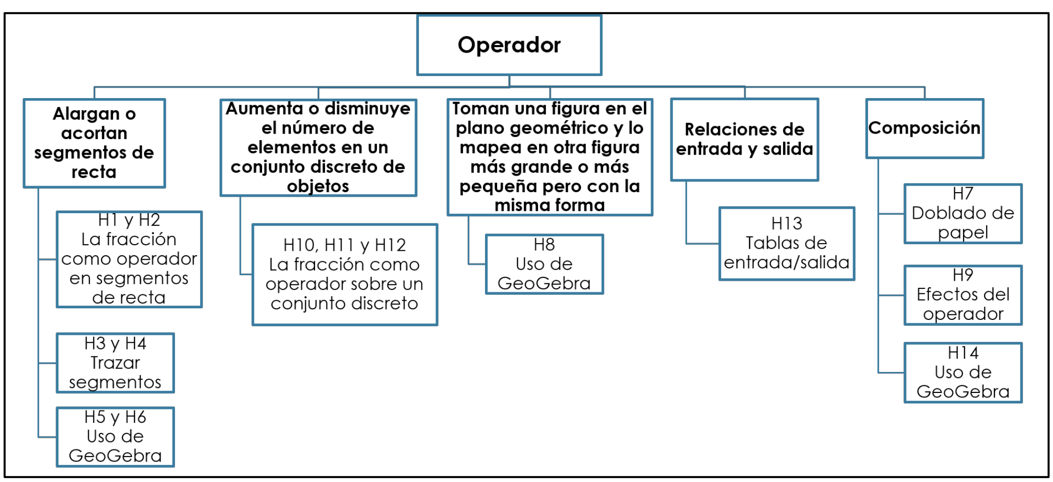
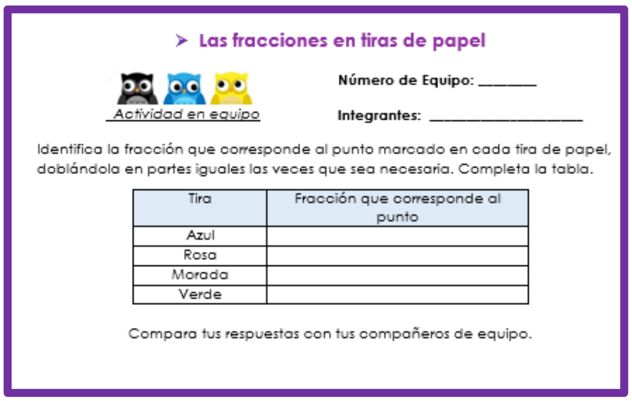


Figura 8. Estructura de actividades para significado de operador

En este proceso se identificaron los recursos que apoyan a la actividad, que puede ser material concreto o applets elaborados en el software GeoGebra; por ejemplo, diseñamos un applet para el desarrollo de la técnica de partición sucesiva para el significado de medida.
Enseguida se presentan algunos ejemplos de partes del diseño de las actividades para el significado de medida.

Actividad 1. Actividad individual a lápiz y papel, donde se espera que los estudiantes localicen algunas fracciones en segmentos de recta dados.

Actividad 2. Actividad en equipos con uso de material concreto donde se espera que los estudiantes identifiquen y registren en una tabla la posición de una marca en una tira de papel, mediante el doblez en partes iguales de una tira de papel. En esta etapa, esperamos que los estudiantes se apoyen en sus conocimientos previos, relacionados con el significado de *parte-todo*, y que posiblemente tengan dificultades para representar la fracción solicitada de manera correcta por las limitaciones de tal significado.


➢ Las fracciones en tiras de papel

Actividad en equipo

Número de Equipo: _______

Integrantes: __________________

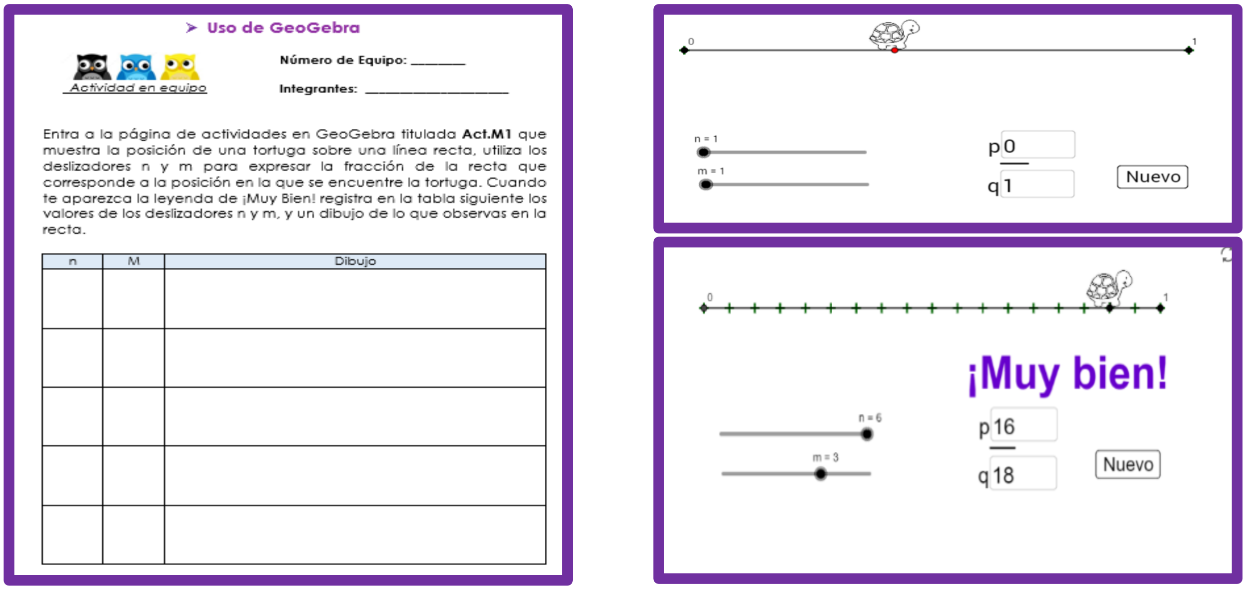
Identifica la fracción que corresponde al punto marcado en cada tira de papel, doblándola en partes iguales las veces que sea necesaria. Completa la tabla.

Tira	Fracción que corresponde al punto
Azul	
Rosa	
Morada	
Verde	

Compara tus respuestas con tus compañeros de equipo.

Figura 9. Hoja de trabajo correspondiente a la actividad 2 de partición sucesiva de medida

Actividad 3. Actividad en equipos con uso de applets elaborados con el software GeoGebra, donde los estudiantes desarrollan una técnica de partición sucesiva para determinar la posición de una tortuga en un segmento de recta. En este contexto, los estudiantes pueden cambiar de modo de pensamiento, de parte-todo a medida, por las manipulaciones posibles dentro del ambiente dinámico.



➢ Uso de GeoGebra

Actividad en equipo

Número de Equipo: _______

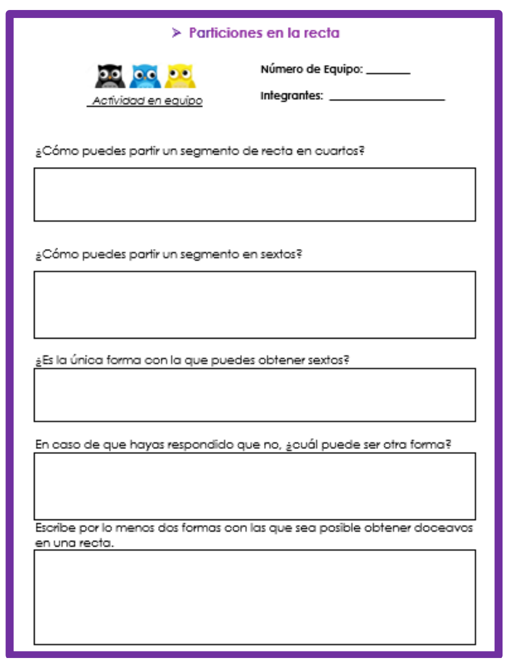
Integrantes: ___________________

Entra a la página de actividades en GeoGebra titulada **Act.M1** que muestra la posición de una tortuga sobre una línea recta, utiliza los deslizadores n y m para expresar la fracción de la recta que corresponde a la posición en la que se encuentre la tortuga. Cuando te aparezca la leyenda de ¡Muy Bien! registra en la tabla siguiente los valores de los deslizadores n y m, y un dibujo de lo que observas en la recta.

n	M	Dibujo

Figura 10. Hoja de trabajo y applet correspondiente a la actividad 3 de partición sucesiva del significado de medida.

Actividad 4. Actividad en equipos a lápiz y papel donde los estudiantes modifican la técnica desarrollada en el ambiente dinámico para realizar la partición sucesiva como recurso para obtener segmentos de longitud $\frac{1}{b}$.



➢ Particiones en la recta

Actividad en equipo

Número de Equipo: ______

Integrantes: _______________

¿Cómo puedes partir un segmento de recta en cuartos?

¿Cómo puedes partir un segmento en sextos?

¿Es la única forma con la que puedes obtener sextos?

En caso de que hayas respondido que no, ¿cuál puede ser otra forma?

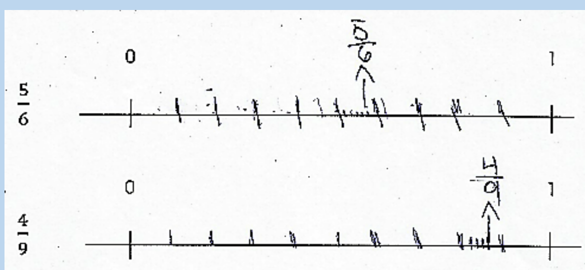
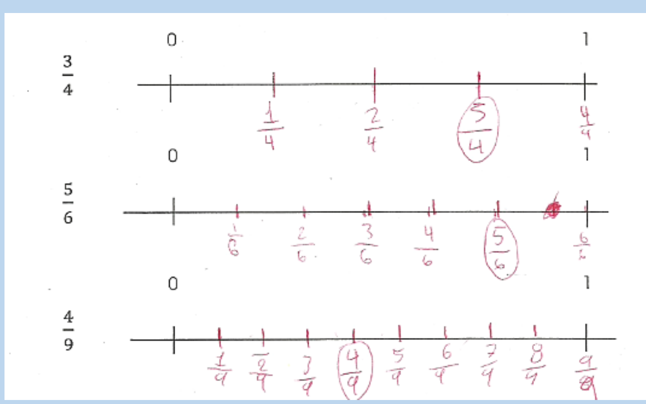
Escribe por lo menos dos formas con las que sea posible obtener doceavos en una recta.

Figura 11. Hoja de trabajo correspondiente a la actividad 4 de partición sucesiva del significado de medida.

Implementación y Resultados

Las actividades se implementaron en una escuela privada con un grupo de 32 estudiantes de sexto grado. Cada estudiante contó con un juego completo de las hojas de trabajo diseñadas y sus materiales correspondientes. Para las actividades en equipo se organizaron grupos de tres o cuatro estudiantes y a cada equipo se le asignó una computadora. En total, la implementación se llevó a cabo en doce sesiones de 45 minutos cada una, seis sesiones por cada significado. Las hojas de trabajo se utilizaron para obtener información de las respuestas individuales de los estudiantes. El análisis de los datos obtenidos de esta implementación se realizó comparando las respuestas registradas por los estudiantes con la descripción que se tenía producto del análisis *a priori*. Las respuestas se organizaron por niveles de desempeño distinguiendo tres niveles: nivel alto, regular y bajo. El análisis de las respuestas se orientó por los criterios señalados por Lamon (2012) para cada significado, observando que, en el caso de las actividades para el significado de medida, algunos estudiantes superan los procesos esperados en el análisis a priori, otros estudiantes muestran dificultades al intentar resolver problemas de medida con el significado parte-todo, sin embargo, logran superar estas dificultades después de las fases de trabajo en equipo y grupal.

Se observó que los estudiantes respondieron con mayor éxito las actividades de medida, lo cual consideramos que esto se debe a que los estudiantes contaban con experiencias que les permitían avanzar en su desarrollo; lo cual no sucedió en el caso de las actividades para promover el significado de operador. Consideramos que el sentido dinámico que caracteriza a este significado, por ejemplo, cuando se trata de alargar o acortar segmentos de recta debe favorecerse incluyendo un applet que enfatice este efecto. Enseguida se muestran algunas respuestas clasificadas con distintos niveles de desempeño para las actividades enfocadas al significado de medida.

Nivel de desempeño bajo		Un estudiante presenta dificultades para localizar la posición de las fracciones solicitadas, mostrando problemas relacionados con el significado parte-todo.
Nivel de desempeño medio		Algunos estudiantes partieron el segmento de recta en la cantidad que indica el denominador y señalaron al numerador como se muestra en la imagen (E27). Esta técnica se relaciona con el significado parte-todo.

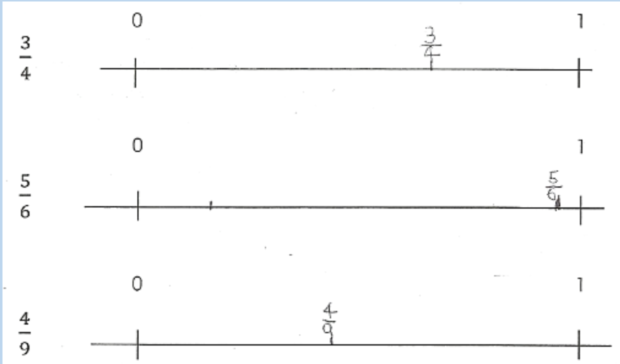
Nivel de desempeño alto		Otros estudiantes representan directamente la posición de la fracción y la señalan (E11). La técnica utilizada es la estimación.

Tabla1. Hojas de respuesta de estudiantes correspondiente a la actividad 1 de medida con distinto nivel de desempeño

Las respuestas de los estudiantes se compararon con el análisis *a priori* permitiendo establecer los niveles de desempeño, consideramos que a pesar de que las respuestas son correctas como los ejemplos que se muestran en la Tabla1, las técnicas utilizadas para la localización de las fracciones permiten establecer los niveles de desempeño. Esta actividad corresponde a la primera hoja de trabajo del significado de medida, después de resolver las actividades 2 y 3 de medida con uso de material concreto y applet, se presenta la actividad 4 que se lleva a cabo organizados en equipos a lápiz y papel. A continuación, se muestran respuestas de los estudiantes a la solicitud de escribir por lo menos dos formas con las que sea posible obtener doceavos.

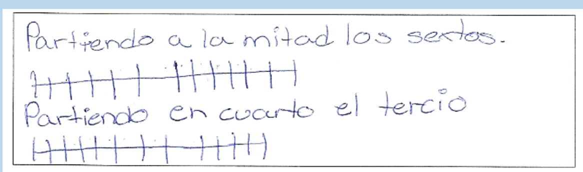
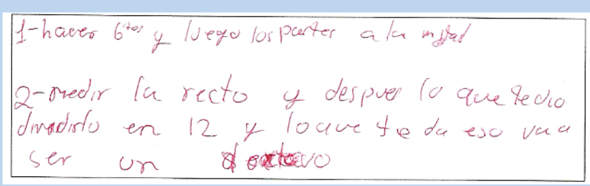
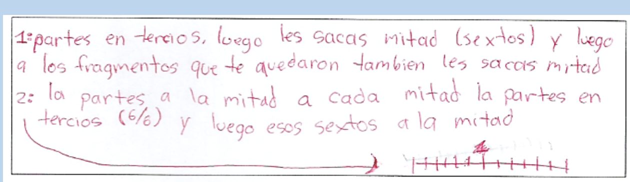
	Eq.9 E7
	Eq.3 E6
	Eq.5 E32

Tabla 2. Respuestas de los estudiantes para la generar doceavos en un segmento de recta.

En esta actividad, que es la última correspondiente a favorecer la partición sucesiva del significado de medida, todos los equipos logran responder de manera exitosa la actividad, aunque de nuevo, se observan que algunas respuestas son más descriptivas que otras, algunos recurren a representaciones gráficas y las respuestas se relacionan con las técnicas presentadas en la etapa de uso de herramientas.

Conclusiones

Acerca de las actividades para la fracción como medida, podemos concluir que la estructura tomada de Lamon (2012) fue una guía que facilitó el diseño. Las actividades diseñadas sí favorecieron la construcción de significado, incluso en aquellos elementos donde fue difícil implementar la estructura de diseño (trabajo a lápiz y papel, uso de tecnología y lápiz y papel) se presentaron dificultades menores en el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes. Se podría extender el significado desarrollado, diseñando recursos de apoyo adicionales, como hojas de trabajo y applets.

Sobre las actividades para la fracción como operador, podemos concluir que los elementos o características que se desprenden de este significado parecen ser considerablemente más complejos, tanto para el diseño de actividades como para el desarrollo conceptual de los estudiantes. Incluso en las actividades donde se contó con todos los recursos de apoyo para los estudiantes, se presentaron dificultades medianas o graves para el desarrollo de las mismas. Sin embargo, la implementación de las actividades funcionó como exploración didáctica para identificar elementos adicionales del significado de operador y planear el diseño de recursos adicionales, con la intención de minimizar las dificultades observadas. Por ejemplo, iniciar las actividades de la fracción como operador con applets o manipulables que permitan a los estudiantes identificar el sentido dinámico de la fracción como operador.

En general, las herramientas diseñadas con software GeoGebra fueron accesibles para los niños, en el sentido de que las pudieron incorporar a sus técnicas de resolución. Sin embargo, se han identificado aspectos que requieren ser revisados para una mejora de las actividades.

Asimismo, se identificaron actividades que la mayoría de los estudiantes logran resolver de manera exitosa. La estructura de esas actividades se caracteriza por una primera fase de trabajo individual con uso de lápiz y papel, seguido de trabajo en equipo con uso de material concreto y/o applets y, finalmente, una última fase de trabajo lápiz y papel.

Tomando en cuenta la complejidad de la enseñanza de fracciones, el trabajo realizado permitirá generar una secuencia de actividades que pueda implementarse con alumnos de quinto y sexto grado de primaria (10-12 años).

Finalmente, consideramos que esta experiencia valida planteamientos de Lamon acerca de la importancia de establecer conexiones entre los distintos significados de las fracciones privilegiando uno de ellos.

Referencias bibliográficas

Chambris, C., Tempier, F., & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collége. *Repères IREM* 108, pp. 63-91.

Chamorro, M. (2006) Didáctica de las Matemáticas Primaria. Madrid: Pearson.

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2009). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Digital technologies and mathematics teaching and learning: Rethinking the terrain* (pp. 89-132). New York: Springer.

Fandiño, M. (2007). Fractions: Conceptual and didactic aspects. *Acta Didactica Universitatis* Comenianae, 7, pp. 23-45.

Freudenthal, H. (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001.

INEE (2018). *PLANEA Resultados Nacionales 2018*. Recuperado el 04 de enero de 2019 de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2018/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2018_INEE.pdf

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the national teachers of mathematics* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lamon, S. (2012). *Teaching Fractions and ratios for understanding*. Nueva York y Londres: Routledge Taylor & Francis Group.

PISA (2015) Resultados México (sf). Recuperado el 7 de diciembre del 2016 de https://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Mexico-ESP.pdf

SEP (2011). *Programas de estudios 2011. Guía para el maestro.* Educación Básica Primaria. Sexto Grado. México: Autor.

EXPLORANDO ETNOMATEMÁTICAS EN ARTEFACTOS DE LA CULTURA CAFETALERA DE COSTA RICA

EXPLORING ETNOMATAMÁTICAS IN ARTIFACTS OF COFFEE CULTURE OF COSTA RICA

Evelyn Agüero Castro, Steven Quesada Segura, María Elena Gavarrete Villaverde
Universidad Nacional de Costa Rica. (Costa Rica)
evelynac22@gmail.com, steven_09_11@hotmail.com, marielgavarrete@gmail.com

Resumen
Este trabajo describe una serie de conexiones entre las etnomatemáticas de la cultura del café en Costa Rica y sus potencialidades didácticas. El propósito de este estudio es evidenciar la visión sociocultural de las matemáticas en los artefactos utilizados en la actividad cafetalera desarrollado en esta zona. Dentro de lo desarrollado se comprenderá la caracterización de los artefactos por medio de un estudio de los elementos propios del contexto mediante una descripción y ejemplificación de estos. Y concluimos que existen unas matemáticas desarrolladas por los cafetaleros, las cuales pueden ser utilizadas por los docentes para enseñar a los estudiantes que pertenecen a dicha cultura.

Palabras clave: etnomatemática, cultura, contextualización y artefacto

Abstract
This brief communication describes a series of connections between the ethnomathematics of the coffee culture in Costa Rica and its didactic potentialities; which is part of a research project under development in Costa Rica, specifically in the community of Calle Liles, in the town of Poás, in the province of Alajuela; which is a mountainous region, which is located in the foothills of the Poás Volcano and whose main activity is the cultivation of coffee. Its purpose is to show the sociocultural vision of mathematics in the artifacts used in the coffee activity developed in this area. Attendees are expected to understand the characterization of the artifacts by means of a study of the elements of the context through a description and exemplification of these.

Key words: ethnomathematics, culture, contextualization and artifact

Introducción

El interés de este trabajo es resaltar las etnomatemáticas del café pues son poco abordadas en el país, el objetivo es desentrañar el conocimiento matemático cultural de la región e indagar las potencialidades de una propuesta didáctico-matemática pertinente relacionada con la cultura del café. Por lo anterior, la importancia de desarrollar este tipo de estudios, mostrar la matemática de una actividad tan cercana para muchos costarricenses como lo es la producción del café.

Este trabajo aborda las conexiones entre las etnomatemáticas de la cultura del café en Costa Rica y sus potencialidades didácticas. Se trata de una investigación que se encuentra en desarrollo y que es aplicada en Costa Rica, específicamente en la comunidad de Calle Liles, en la localidad de Poás, en la provincia de Alajuela; la cual es una región montañosa, que se encuentra en las faldas del Volcán Poás y cuya actividad preponderante es el cultivo del café.

Es decir, la importancia de este estudio radica en tratar de difundir los aspectos relacionados con la herencia del conocimiento cultural cafetalero y su relación con el conocimiento matemático, pues es de esta forma se logra reforzar la identidad cultural de estos entornos.

Con respecto a lo anterior, el objetivo central corresponde a *describir las etnomatemáticas en los artefactos de la cultura cafetalera de Costa Rica.* La relevancia, atinencia y pertinencia del trabajo se justifican por el esfuerzo de resaltar el conocimiento de las personas que utilizan los artefactos que intervienen en la actividad cafetalera y sus conocimientos específicos, tales como el uso de un lenguaje técnico y simbólico, las interacciones y prácticas sociales inmersas en el proceso.

Esto nos lleva a la finalidad de evidenciar la importancia de las matemáticas dentro del contexto del cultivo y producción del café, con el fin de que el profesor de matemática dentro del aula pueda tomar decisiones en vincular las clases de matemáticas con la realidad de muchos estudiantes.

Por consiguiente, es importante tomar en cuenta las sugerencias que propone el Ministerio de Educación Pública donde menciona que la contextualización activa en nuestras aulas, fomenta un mejor entendimiento de dicha materia, así como la aplicación de las matemáticas en la vida cotidiana, de este modo se debe fomentar una reflexión sobre la metodología de enseñanza y a su vez, cuestionarse la matemática que se enseña bajo un modelo tradicional para enseñar dicha área. Según el Ministerio de Educación Pública, en sus siglas MEP (2012), “se plantea una contextualización activa que estimule la acción estudiantil, lo que requiere el uso importante de modelos sobre la realidad cercana” (p. 36).

A lo largo del trabajo se describirán los artefactos utilizados en las distintas etapas como: producción, recolección, secado, y tostado del café, pues estos han sido resultados de una construcción del conocimiento matemático para resolver problemas dentro de su contexto.

Fundamentos teóricos

Las Etnomatemáticas es una corriente de investigación para la educación matemática que permite contextualizar, para este caso en particular, los elementos y símbolos presentes en la actividad cafetalera. Como menciona D’Ambrosio (2000) “la etnomatemática se reconoce como una práctica escolar válida que refuerza la creatividad, los esfuerzos, el auto-respeto cultural y ofrece una amplia visión de la humanidad que tiende de forma creciente hacia el multiculturalismo y pluriculturalismo” (p. 440).

Por otro lado, es importante aprender sobre los distintos contrastes acerca de las matemáticas como fenómeno cultural, estos contrastes muestran las diferencias y a la vez nos hacen reconocer cada una de las similitudes de los fenómenos en estudio. Pues la etnomatemática "reconoce que los miembros de distintos grupos culturales desarrollan técnicas, métodos y explicaciones matemáticos únicos, los cuales les permiten entender y transformar las normas sociales" (Auccahuallpa, Bonilla, Reyes y Rosa, año, p. 1234).

El conocimiento generado por el grupo diferenciado conocido como cafetaleros, surge con el fin de sobrevivir y trascender, pues este se transforma en un conocimiento compartido. Es de esta manera, como lo menciona D'Ambrosio (2013) que "los momentos vividos por dos individuos en interacción son mutuamente enriquecidos gracias a la comunicación, que permite que ambos enriquezcan sus informaciones a través de la información que comunica el otro" (p. 71).

Los cafetaleros desde tiempo atrás, han comprendido y explicado fenómenos tanto sociales como naturales, los cuales han estado relacionados con dicha actividad, esto los lleva a organizarse de distintas formas a vivir su conocimiento e incluso organizarlo. Por ello, se profundizará en esta investigación las matemáticas que se encuentran presentes en dicho contexto. Pues estos grupos diferenciados "no son plenamente conscientes de sus propios mitos y dado que la cultura no es objetivable, entonces al conocimiento matemático cultural se facilita participando de algún modo en su mito, puesto que cada cultura define unos preceptos de percepción del mundo" (Casis y Gavarrete, 2014, p. 1425).

Adicionalmente hemos observado y vivenciado las formas de pensar en un contexto cafetalero. Para el análisis se debe partir de las representaciones inactivas e icónicas y del lenguaje simbólico que constituyen los modos de comunicación y permiten compartir estas formas de pensar (Albanese, 2014).

Por lo tanto, desde esta perspectiva se trata de valorar que en cada pueblo del mundo existen diferentes conocimientos y comportamientos vinculados al origen de su cultura, ya que el ser humano actúa desde distintos puntos de vista y de acuerdo a su entorno, por ello, responde a lo material (artefacto), y de su imaginación que responde a lo abstracto (mentefacto) (D'Ambrosio 2013).

De ahí que surge un conjunto de instrumentos, los cuales son utilizados para llevar a cabo la actividad cafetalera, a estos se les llama artefactos; pues son manifestaciones materiales de la cultura, denominados mercancías culturales o tecnología material, que cumplen la función de satisfacer necesidades básicas de cada pueblo (Gavarrete 2015).

Cabe destacar, que este estudio nace al intentar tratar de comprender la matemática desarrollada por las personas implicadas en el contexto cafetalero. De esta manera, se quiere presentar las seis actividades: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar; planteadas por Bishop (1999), con sus respectivas ejemplificaciones basados en el estudio de artefactos utilizados en la actividad cafetalera; es decir, se van a ejemplificar los artefactos que tienen relación con contar, medir y diseñar. Es a través de estas actividades que ayudan a destacar puntualmente los procesos que conducen el desarrollo de las matemáticas, sus implicaciones tanto en el lenguaje como de representación.

A continuación, se muestra una breve descripción de tres de las actividades propuestas por Bishop (1999), dicha explicación revela su relación con el contexto cafetalero:

Contar

Esta actividad sugiere un mayor desarrollo matemático y es la actividad matemática mejor investigada en la literatura cultural. Sin duda, contar y asociar objetos con números tiene una historia muy larga y muy bien documentada. Por otro lado, hace referencia a bases distintas para los sistemas de contar, con gestos y dedos, se produce incluso en situaciones sociales donde no existe ninguna necesidad de números muy grandes (Bishop, 1999, p. 22).

Medir

Esta actividad es significativa porque es la que llega a propiciar actividades como: comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia. Los distintos escenarios son los que proporcionan las cualidades que se han de medir, además de las unidades de medida. Con el paso de los años surgió la necesidad de comparar y ordenar las unidades o sus equivalentes pues existían en la mayoría de las sociedades, la comparación entre dos o más fenómenos (Bishop, 1999, p. 31).

Diseñar

Es relevante conforme se avanza ir describiendo cada actividad, en el caso de diseñar es importante detallar que esta actividad tiene una relación entre el objeto y el propósito, su vinculación entre la forma-abstracta y el proceso que se lleva a cabo para alcanzar la abstracción. Ahora bien, al referirse a diseñar se hace noción del uso de las tecnologías y su papel dentro del entorno en estudio como se menciona a continuación:

> La tecnología los artefactos y los objetos manufacturados que todas las culturas crean para su vida doméstica, para el comercio, como adorno, para jugar y con fines religiosos. Es transformar una parte de la naturaleza, es decir tomar un fenómeno natural, sea madera, arcilla, o terreno y transformarlo en otra cosa: quizá un ornamento tallado, una olla o un huerto implica imponer una estructura particular a la naturaleza, es imaginar la naturaleza sin las partes innecesarias y quizá incluso destacar algunos aspectos por encima de otros (Bishop, 1999, p. 35).

Metodología

Los instrumentos que se utilizan en esta investigación son la observación participante, registro fotográfico, filmación de escenas del proceso, entrevistas no estructuradas y diario etnográfico de campo; respecto a la observación participante, los investigadores realizaron una etnografía participante pues se estuvo durante varias semanas con miembros de la comunidad durante un periodo de tiempo que abarcó desde la recolección hasta el momento de tostado, además se realizó entrevistas a profundidad con el fin de encontrar un lenguaje propio y conjunto de significados compartidos (Oliveras, 1996) del grupo diferenciado. Es decir, en este punto del estudio se muestran las fases de la investigación, donde los miembros de la comunidad utilizan los artefactos para llevar a cabo la producción, recolección, secado, y tostado del café, pues estos han sido resultados de una construcción del conocimiento matemático.

Resultados

Los atributos señalados anteriormente, favorecieron a la identificación y caracterización de los artefactos presentes en la cultura del café. En este estudio, se realiza una descripción de dichos artefactos, los cuales se explican y ejemplifican a continuación:

Cajuela: es uno de los instrumentos fundamentales en la medición de café; además es la unidad de medida fundamental y tradicional que ha prevalecido por años. Tiene forma cúbica con 42 cm de arista, capacidad de 20 litros y un peso de 12,75 kilogramos aproximadamente, esta herramienta es utilizada al final de una recolección diaria de café, con el fin de calcular el número total de cajuelas recolectadas por un cogedor al día y de esa forma, así darle el valor monetario a una jornada de trabajo, cabe destacar que tiene un valor de dos dólares cada cajuela; a continuación, se presenta una imagen de dicho instrumento:

Imagen 1: Cajuela de Café
Fuente: Elaboración Propia

Angarilla: este utensilio es usado en el recibidor para medir el café, con el fin de ser vendido a grandes beneficios como Volcafe, Café Britt, entre otros. El mismo tiene forma de prisma rectangular con dimensiones de 50,5 cm de ancho, 100 cm de largo y 40 cm de altura, con una capacidad de 10 cajuelas de café, inmediatamente se muestra una imagen donde se refleja la angarilla:

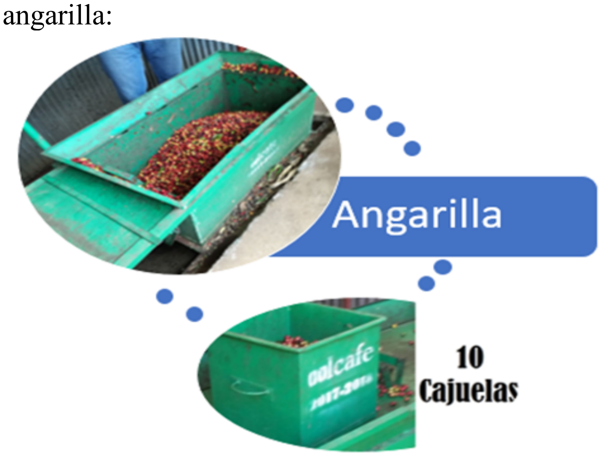


Imagen 2: Angarilla y Cajuela de Café
Fuente: Elaboración Propia

La varilla: este aparato es empleado en el beneficio, para el cálculo de cajuelas cuando la angarilla no está llena en su totalidad, tiene forma de una regla la cual posee un tipo de marcas donde representan medias cajuelas, la persona encargada de recibir el café en el recibidor introduce la varilla en la angarilla para así determinar el número de cajuelas que tiene la angarilla en ese momento, se exponen unas imágenes de la varilla para ejemplificar:

Imagen 3: Varilla
Fuente: Elaboración Propia

Flotador: este artefacto tiene forma de probeta y su función en el recibidor es relevante, pues su fin es obtener una muestra de la totalidad del café; de cada angarilla se toma una pequeña muestra de café para llenar en su totalidad el recipiente, luego en un balde con agua se pone la muestra extraída y se mueve constantemente para que los granos de mala calidad floten en el agua. Finalmente, se extraen los granos que flotaron y se ubican de nuevo en el recipiente, el cual marca el porcentaje de café de mala calidad, ese porcentaje es rebajado del total de cajuelas. A continuación, se revela una representación gráfica del uso del artefacto:

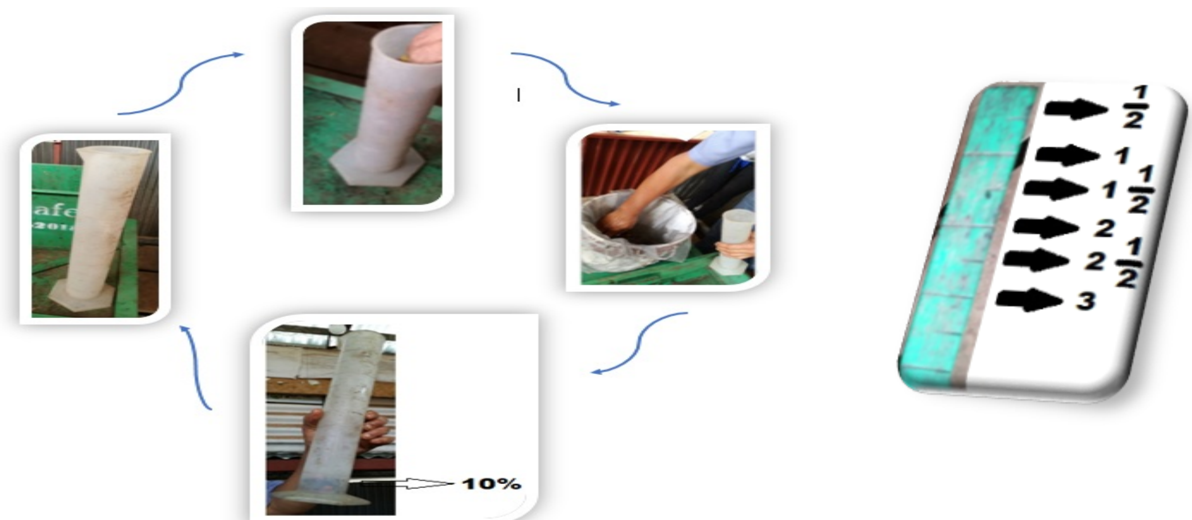


Imagen 4: Flotador
Fuente: Elaboración Propia

Ábaco cafetalero: esta herramienta consiste en una tablilla con números naturales, dicho tablero se asemeja a un ábaco solamente que este posee una especie de orificios con el fin de que la persona que recibe el café en el recibidor marque con una varilla pequeña; la tablilla funciona para contar la cantidad de angarillas de café. Para ilustrar, se presenta una imagen a continuación:

Imagen 5: Abaco Cafetalero
Fuente: Elaboración Propia

Boleto: son un tipo de fichas que se dan a cambio del número de cajuelas recolectadas, estos son usados por el cafetalero para hacer una representación del pago monetario a los recolectores, pues no se les paga en efectivo hasta finalizar la semana o tienen derecho a cambiarlos en algún supermercado autorizado, existen varios tamaños uno para un cuartillo, medio, tres cuartillos y una cajuela de café. Acto seguido, se presenta una imagen de dicho artefacto:

Imagen 6: Boletos
Fuente: Elaboración Propia

Como se puede observar en este caso no existe la necesidad de utilizar números muy grandes, esta información numérica es una herramienta muy poderosa porque nos ayuda a comprender mejor el significado de las cosas. Además, se requiere del uso de otros procesos cognitivos que nos llevan a la búsqueda de matemáticas culturales (Bishop, 1999, p. 25).

Estas herramientas se relacionan con la actividad cafetalera, pues se hace uso de un sistema de medida tradicional, la cajuela se divide en cuatro partes (cuartillos) en uno, dos y tres cuartillos, tanto el cafetalero como las personas que se dedican a recolectar el café, miden las cajuelas recolectadas al día o semana. Para medir grandes cantidades se usa otro sistema como la angarilla que es equivalente a diez cajuelas y la fanega a veinte cajuelas, cada una de estas medidas tienen un valor monetario, por así decirlo es el indicador de cuánto dinero se puede ganar una persona por día o semana, en el pasado ese valor era representado por medio de boletos.

Como se ha venido indicando, cada cultura diseña instrumentos y técnicas de acuerdo con sus necesidades. La cantidad y formas varían de una cultura a otra. Pero lo más importante de rescatar acá es la importancia del desarrollo de las ideas científicas que se pueden obtener de cada uno de los productos obtenidos (Bishop, 1999, p. 35).

Conclusiones

Se pueden evidenciar las principales etnomatemáticas presentes en los artefactos utilizados en la cultura cafetalera y el aporte al Programa de Etnomatemática, además queda claro las diversas posibilidades del uso que se le puede dar a estos resultados con fines didácticos y así contextualizar en nuestras clases. Por ejemplo, en las áreas de geometría, números, medidas y relaciones, pues en este contexto se han encontrado distintas aplicaciones y las mismas pueden ser utilizadas de distintas formas por cada docente que conozca la comunidad o entorno.

Dicho de otro modo, la importancia de este estudio radica en cómo se ha tratado de rescatar el conocimiento matemático que ha sido desarrollado en la cultura del café, por medio de sus sistemas de símbolos y artefactos. Además, destacar la forma en que desenvuelven su lógica interna y la toma de decisiones de cada uno de los miembros de esta cultura.

La importancia de esta investigación radica en la valorización que se le debe dar al conocimiento matemático desarrollado por el grupo diferenciado de los cafetaleros. Otro aspecto por destacar es la forma en que desenvuelven su lógica interna y la toma de decisiones de cada uno de los miembros de dicha cultura, así como también el uso de un lenguaje técnico y simbólico, las interacciones y prácticas sociales inmersas en el proceso.

Referencias bibliográficas

Albanese, V. (2014). Pensar Matemáticamente: Una visión Etnomatemática de la práctica artesanal soguera. *Revista Latinoamericana en Educación Matemática, 17*(3), 261-289

Auccahuallpa, R., Bonilla, M., Reyes, M. y Rosa, M. (2018*). La dimensión matemática en educación intercultural Bilingüe: educación matemática y diversidad*. Recuperado de https://clame.org.mx/uploads/actas/alme31_2.pdf

Casis, L. y Gavarrete, M. (2014). *La cosmovisión indígena y sus perspectivas didácticas: visión etnomatemáticas de dos grupos étnicos*. Recuperado de https://clame.org.mx/uploads/actas/alme27.pdf

D'Ambrosio, U. (2000). *Las dimensiones políticas y educacionales de la Etnomatemática*. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo90.pdf

D'Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemáticas: entre las tradiciones y la modernidad.* Madrid, España: Ediciones Díaz de Santos

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de Estudio de Matemática, Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía*. San José: Ministerio de Educación Pública

Oliveras, M.L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Comares

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS ASSESSMENT

Marisol Radillo Enríquez, Juan Martín Casillas González, Lucía González Rendón, Gabriela Godínez Dietrich
Universidad de Guadalajara. (México)
marisol.renriquez@academico.udg.mx, martin.casillas70@gmail.com, lgrendon2@yahoo.com.mx, ggdietrich@hotmail.com

Resumen
La evaluación del aprendizaje en el Cálculo Diferencial e Integral debería centrarse más en los conceptos de esta materia, que en el manejo algebraico o trigonométrico de los procedimientos. Con el propósito de orientar a los profesores de cálculo en el diseño de actividades de evaluación integradas a los procesos de aprendizaje y enseñanza, se presenta una propuesta para clasificar reactivos de integrales definidas, con base en el análisis de los posibles procedimientos para su resolución.

Palabras clave: evaluación, taxonomía, cálculo

Abstract
Calculus assessment must focus on calculus' concepts, but algebraic or trigonometric procedures. With the purpose of guiding calculus teachers in design testing techniques and its association with the teaching and learning process, presents a proposal to build taxonomy for different type of problems of indefinite integral, based on its solution procedures.

Key words: assessment, taxonomy, calculus

Problematización

La evaluación educativa es un fenómeno dinámico y complejo que involucra factores y actores tan diversos como: profesores y directivos, escuelas y universidades, planes y programas de estudio, libros de texto, y materiales didácticos, etcétera. La valoración de cada uno de estos elementos y su efecto en el proceso educativo debe diseñarse de acuerdo al propósito que se persiga. Desde hace algunas décadas, y a raíz del auge del constructivismo, la labor académica implica la evaluación continua en el salón de clases; no obstante, de manera paralela se han impulsado las pruebas estandarizadas a gran escala, con propósitos tan diversos que van desde determinar los niveles de aprendizaje de los egresados de un programa educativo, hasta comparar la calidad de los sistemas educativos o de las instituciones escolares a través de los resultados de los estudiantes en dichos exámenes (Díaz-Barriga, 2006).

En la actualidad, uno de los retos para los docentes de la Educación Superior en México consiste en sistematizar el proceso de evaluación, de tal manera que resulte “estratégicamente integrada” con las actividades de aprendizaje y enseñanza (Jiménez, González, y Hernández, 2011). Aunque existe una gran variedad de instrumentos de recolección de información sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes, tales como portafolios, proyectos, diarios de aprendizaje, listas de cotejo, tareas, ensayos, mapas conceptuales, etc., en los cursos de matemáticas a nivel universitario, la evaluación gira en torno a la resolución de problemas y/o ejercicios.

Desde nuestra experiencia docente, hemos observado que el grado de complejidad de los reactivos de Cálculo Diferencial e Integral que se han incluido en los exámenes departamentales del Dpto. de Matemáticas del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, depende más del procedimiento algebraico o trigonométrico que de la conceptualización de la derivada o la integral. Dichos exámenes, realizados hasta 2013, estuvieron integrados por reactivos que planteaban explícitamente una función a la cual había que derivar, integra u obtener un límite determinado. Si se dejan de lado las razones que se tuvieron para evitar los problemas de aplicación relacionados con las diversas carreras de ingeniería y ciencias exactas de nuestros estudiantes, al revisar dichos exámenes se encuentra que una baja puntuación obtenida en el examen puede atribuirse meramente a errores algebraicos; en contraparte, una alta puntuación tampoco indica que el estudiante demostró un conocimiento profundo del cálculo.

El objetivo de este trabajo es proponer una taxonomía particular para los reactivos de cálculo diferencial e integral, que permita a los profesores del CUCEI diseñar actividades de evaluación y de aprendizaje acordes a los nuevos planes de estudio (vigentes desde 2013). La idea central es que, dado un banco de reactivos debidamente clasificados de acuerdo a su complejidad y conceptos involucrados, el profesor pueda diseñar actividades de evaluación (tareas, exámenes u otros instrumentos) que se centren en el aprendizaje del cálculo. En esta primera fase de la investigación, se trabajará con la integral, definida e indefinida.

Sustento teórico

Nuestra postura teórica parte de considerar la evaluación del aprendizaje como un proceso paralelo y complementario a la enseñanza-aprendizaje. En nuestra opinión, los exámenes son solo un instrumento más para evaluar el aprendizaje, pero no el único ni necesariamente el principal recurso para determinar si un estudiante ha aprendido determinado contenido temático u objetivo instruccional.

Una prueba de aprendizaje (examen) es un instrumento de recolección de información cuantitativa sobre el aprendizaje de los estudiantes. Aunque existen diversos tipos de pruebas, este proyecto se enfoca en las pruebas objetivas, es decir aquellos exámenes integrados por preguntas de respuesta convergente, es decir, una sola respuesta correcta.

En este proyecto nos centramos en uno de los indicadores de eficacia de las pruebas, de acuerdo a Ulloa, Pantoja y Nesterova (2014) es la validez de contenido, considerada como la medida en que las tareas del examen corresponden a las competencias y temas del programa del curso, ya que consideramos que las pruebas de Cálculo Diferencial e Integral deben centrarse en evaluar los conceptos de esta materia. El contenido de un examen depende de los reactivos que lo integran; por esta razón, cada ítem de este proyecto deberá indicar, además de su nivel taxonómico, el contenido y objetivo del programa vigente con los cuales se relaciona. De esta manera los profesores podrán diseñar adecuadamente sus tareas y exámenes.

En cuanto a los reactivos que utilizaremos, serán de tipo convergente y se pretende que la solución de los mismos no esté centrada en el recuerdo y la repetición de información descontextualizada por parte del estudiante, pues deseamos evitar que para responder correctamente las preguntas solamente sea necesario un formulario ya que, como afirman Carrasco, Carrión, Hernández, Preciado, Arrieta y Díaz (2017) esto implica reducir el pensamiento matemático al manejo de reglas y símbolos de un lenguaje. Aun así, es inevitable que los estudiantes de matemáticas deban resolver una gran cantidad de ejercicios, es decir si planteamientos rutinarios, tanto en el trabajo en el aula como en algunas tareas o exámenes. Sin embargo, a este tipo reactivos les corresponderá el nivel taxonómico más bajo, lo cual incide en una menor puntuación que un problema más complejo.

Nuestra intención es clasificar diversos reactivos sobre un mismo tema y objetivo, por ejemplo, la derivada de una función en un punto dado, y en función de las respuestas a cada uno de ellos, determinar si el estudiante demuestra haber aprendido “a profundidad”. Para ello debemos clasificar el grado de complejidad de las tareas cognitivas requeridas en la solución de cada problema.

La taxonomía de productos cognitivos de Bloom, Engelhart, Furst, Hill, y Krathwohl, constituye nuestro punto de partida para crear una clasificación de reactivos de Cálculo diferencial, de acuerdo al nivel de complejidad que representa su solución (Kratwhol, 2002). En 1956 se publicó la taxonomía para objetivos instruccionales, ya que el proyecto de Bloom se enfocaba en el curriculum, bajo el título *Taxonomy of Educational Objectives: The Classificarion of Educational Goals. Handbook I: Cognitive Domain* (Kratwhol, 2002). Si bien son conocidas las 6 categorías principales de esta taxonomía, en realidad 5 de ellas se subdividen, como se muestra a continuación.

Estructura de la taxonomía original de Bloom (Kratwhol, 2002, p. 213)

1. Conocimiento
    - 1.1. Conocimientos específicos
        - 1.1.1. Conocimiento de la terminología
        - 1.1.2. Conocimientos de datos específicos
    - 1.2. Conocimientos de modos y significados específicos
        - 1.2.1. Conocimiento de convenciones
        - 1.2.2. Conocimiento de secuencias
        - 1.2.3. Conocimiento de clasificaciones y categorías
        - 1.2.4. Conocimiento de metodología
    - 1.3. Conocimiento de universales u abstracciones en un campo o área
        - 1.3.1. Conocimiento de principios y generalizaciones
        - 1.3.2. Conocimiento de teorías y estructuras
2. Comprensión
    - 2.1. Traducción
    - 2.2. Interpretación
    - 2.3. Extrapolación
3. Aplicación
4. Análisis
    - 4.1. Análisis de elementos
    - 4.2. Análisis de relaciones

    4.3. Análisis de principios de organización
5. Síntesis
    5.1. Producción de una comunicación única
    5.2. Producción de un plan, o propuesta de un conjunto de operaciones
    5.3. Derivación de un conjunto de relaciones abstractas
6. Evaluación
    6.1. Evaluación en términos de evidencia interna
    6.2. Emisión de juicios en términos de criterios externos

Estas 6 categorías principales tienen una jerarquía “acumulativa”, es decir, un objetivo o ítem de nivel 3 (aplicación), involucra el cumplimiento de la complejidad de los dos niveles previos (Conocimiento y Comprensión). Esta taxonomía ha sufrido algunas transformaciones a lo largo del tiempo, debidas a revisiones y adecuaciones, en especial en los verbos indicadores del nivel de complejidad. Dado el objetivo de este proyecto, solo mencionaremos la versión de la tabla taxonómica representada en dos dimensiones (Kratwhol, 2002, p. 217), un ejemplo de la cual se muestra en la figura 1. Una tabla de doble entrada como la mostrada en la figura 1, será de más utilidad para cumplir con nuestro objetivo.

The Cognitive Process Dimension

The Knowledge Dimension	1. ***Remember***	2. ***Understand***	3. ***Apply***	4. ***Analyze***	5. ***Evaluate***	6. ***Create***
A. ***Factual Knowledge***	Objective 1					Objective 3
B. ***Conceptual Knowledge***		Objective 2			Objective 4	Objective 3
C. ***Procedural Knowledge***						
D. ***Metacognitive Knowledge***						

Figure 2. The classification in a Taxonomy Table of the four objectives of Ms. Airasian's unit integrating Pre-Revolutionary War colonial history with a persuasive writing assignment.

Figura 1. Tabla taxonómica de dos dimensiones, publicada en Kratwhol (2002)

Metodología

Con el propósito de facilitar la construcción de la taxonomía, se eligió trabajar con reactivos de respuesta convergente, ya sea en un formato de respuesta abierta o de opción múltiple.
Se plantean las siguientes fases:

1. Revisión del programa del curso para determinar los objetivos o competencias que es posible lograr con el contenido temático de las integrales definidas e indefinidas.
2. Elaborar una clasificación preliminar de reactivos, de acuerdo al grado de complejidad que requiere su solución. Se utilizarán los reactivos de los exámenes departamentales existentes y se elaborarán nuevos reactivos, acordes a los nuevos Planes de Estudio.
3. Evaluación formativa de los reactivos, por parte expertos (profesores de la materia) y algunos estudiantes. En esta fase se determinarán los indicadores de calidad de los reactivos, como el índice de dificultad y el poder de discriminación.

4. Elaboración de una taxonomía específica para los reactivos diseñados.

Resultados preliminares

Dado que el proyecto está en marcha, los resultados que tenemos son preliminares (fase 2), y hemos encontrado 3 niveles tentativos de reactivos para integrales indefinidas:

Nivel (1) dada una función en forma explícita, obtener la integral indefinida. Este nivel se subdivide en más categorías, de acuerdo a la técnica de integración involucrada en el proceso, sin perder de vista las operaciones algebraicas o trigonométricas involucradas.

Nivel 1.1 Reactivos que se resuelven al aplicar directamente una fórmula o procedimiento. Las operaciones involucradas en su solución o simplificación, son rutinarias. Ejemplos:

$\int \frac{1+\cos 4t}{2} dt$, $\int \frac{(e^x + e^{-x})dx}{e^x - e^{-x}}$, $\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-16}}$, $\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$

Nivel 1.2 Reactivos que se resuelven al aplicar directamente una fórmula o procedimiento. Requieren de un procedimiento extenso, mas no complicado, para su solución o simplificación

Nivel (2) integrales indefinidas cuya solución requiere cambio de variable, o de un procedimiento laborioso, que puede involucrar elegir la técnica de integración óptima. Ejemplos:

$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$, $\int t\sqrt{t+1}\, dt$, $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$, $\int x^3 \cdot e^x dx$,

Nivel (3) problemas de diferentes contextos de física e ingeniería cuya solución requiere una modelación matemática (obtener la función) y un proceso de integración.

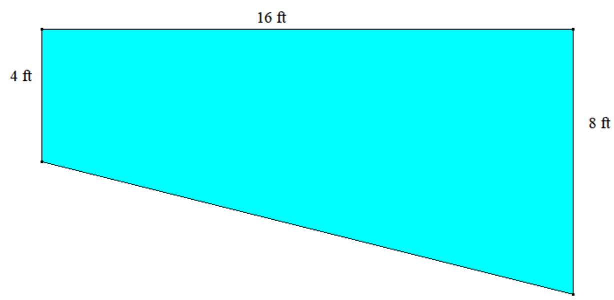
Ejemplos:

- La siguiente tabla muestra la velocidad de un cuerpo en movimiento (en metros sobre segundo), medido en intervalos regulares de un cuarto de segundo.
  Determine la distancia recorrida por el cuerpo desde $t = 0$ hasta $t = 3.75$

Tiempo (segundos)	Velocidad (m/s)
0.00	0.00
0.25	0.28
0.50	0.53
0.75	0.73
1.00	0.90
1.25	1.01
1.50	1.11
1.75	1.18
2.00	1.21
2.25	1.17
2.75	1.05
3.00	0.91
3.25	0.72
3.50	0.55
3.75	0.26

Fuente: Calculo integral Wenzelburger, E. (1994). Didáctica del Cálculo Integral. México: Editorial Iberoamerica

- Calcular la fuerza ejercida por el agua sobre el fondo de una alberca rectangular, cuando ésta se llena al 100% de su capacidad. El fondo es un plano inclinado, con 10 pies de ancho por 16 ft de largo, profundidad de 4 ft en la parte baja y de 8ft. En la parte más honda. La siguiente figura muestra el corte transversal de la alberca.



Reflexiones finales

Los resultados preliminares de las categorías taxonómicas que hemos mostrado aún están en revisión. En esta primera etapa hemos comenzado a clasificar los reactivos que comúnmente fueron utilizados en los exámenes departamentales de nuestra institución, que no son las herramientas más adecuadas para evaluar aprendizaje.

La complejidad de un reactivo de Cálculo Diferencial e Integral no debería residir en las operaciones o procedimientos algebraicos o trigonométricos requeridos para su solución, sino en las operaciones cognitivas que se requieren para operar los conceptos matemáticos involucrados en el problema. Por supuesto que los estudiantes de cálculo deben dominar los conocimientos previos de álgebra y trigonometría, entre otros, pero con la clasificación de los reactivos, que incidirá en la puntuación que corresponderá a su respuesta, en una tarea o examen, queremos poner el énfasis en los conceptos base de la materia (límites, derivadas, integrales). De esta manera, los resultados de las evaluaciones proveerán a los profesores información útil para mejorar su práctica docente y orientar a sus estudiantes para que mejoren sus técnicas de estudio y de resolución de problemas.

En etapas posteriores, se ampliará el trabajo con el resto del curso de Cálculo Diferencial e Integral y se hará la evaluación formativa de los reactivos, con una muestra aleatoria de estudiantes de diversas carreras del CUCEI, que cursen dicha materia. No obstante, consideramos que el producto final de este proyecto, la taxonomía para reactivos de cálculo integral, siempre será perfectible por lo que seguiremos trabajando en esta línea, en estrecha relación con los profesores y estudiantes del Departamento de Matemáticas del CUCEI.

Referencias bibliográficas

Carrasco, E., Carrión, V., Hernández, E., Preciado, P., Arrieta, J., Díaz, L. (2017). Complejidad en el acto de conocer: Segunda sesión. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *30*, 139-147.

Díaz-Barriga, Á. (2006). Las pruebas masivas. Análisis de sus diferencias técnicas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 11*(29) 583-615. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=14002912.

Jiménez, Y. I., González, M. A., Hernández, J. (2011). Propuesta de un modelo para la evaluación integral del proceso enseñanza-aprendizaje acorde con la Educación Basada en Competencias. *CPU-e Revista de Investigación Educativa*, *13*, 34-58.

Krathwohl, D. R., Anderson, L. W. (2002). A revision of Bloom's Taxonomy: An Overview. *Theory Into Practice, 41*(4), 212-218

Ulloa, R., Pantoja, R. Nesterova, E. (2014). *Notas para evaluación*. México: Universidad de Guadalajara.

Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica del Cálculo Integral*. México: Editorial Iberoamerica

DIÁLOGO ENTRE MATEMÁTICA E BIOLOGIA NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO

DIALOGUE BETWEEN MATHEMATICS AND BIOLOGY IN THE NATIONAL MIDDLE SCHOOL EXAM

José Fernandes da Silva, Valquíria Marçal Silva, Gilson José de Freitas
Instituto Federal de Minas Gerais –Campus São João Evangelista/Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais (Brasil)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, valquiriamarcalsilva@gmail.com,
gilson.freitas@educacao.mg.gov.br

Resumo
O diálogo entre as diferentes áreas é uma importante ferramenta para a construção do conhecimento. É uma tendência dos currículos atuais propor a articulação entre diferentes áreas do conhecimento como forma de enriquecimento das práticas pedagógicas. O principal objetivo deste trabalho, qualitativo, é relatar o contexto de uma experiência realizada com alunos de Ensino Médio de uma escola pública do Estado de Minas Gerais – Brasil, no que concerne ao estudo e discussão de questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) com foco no diálogo entre a Matemática e a Biologia. Embora a Matemática e a Biologia tenham suas especificidades, enquanto áreas do conhecimento, estas apresentam possibilidades de aproximações e superação das concepções fragmentadas de construção do conhecimento.

Palavras-chave: resolução de problemas, matemática, biologia, enem

Abstract
The dialog between different areas is an important tool to build knowledge. A trend in present curriculums is to propose the articulation between different knowledge areas as a way to enrich pedagogical practices. The main purpose of this work – qualitative – is to report the context of an experience made with High School students from a public school in the State of Minas Gerais, Brazil, regarding the study and the debate of issues pertaining to ENEM (the National Exam of High Schools) focusing on the dialog between Mathematics and Biology. Though Mathematics and Biology both have their specificities while knowledge areas, they provide possibilities of approximation and of overcoming the fragmented concepts of knowledge building.

Key words: problem solving, mathematics, biology, enem

Introdução

Nas diferentes áreas do conhecimento existe uma demanda para que o processo de ensino e aprendizagem tenha como meta principal a resolução de problemas. No campo da Matemática, em especial, muitas discussões apontam que, entre as várias razões para o fracasso escolar, a abordagem dos conteúdos, divorciada de situações problemas, contribui para que o aluno não construa conhecimentos matemáticos.

As diretrizes curriculares têm conclamado aos educadores para que a resolução de problemas tenha espaço de destaque no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Além disso a contemporaneidade exige que a sala de aula de Matemática promova o diálogo com as outras áreas do conhecimento. Sabe-se que a Matemática está presente nas outras ciências, seja como ciência aplicada ou como suporte para compreensões de fenômenos diversos.

Este trabalho, apresenta o objetivo de discutir o diálogo entre a Matemática e a Biologia, através de uma investigação qualitativa, na qual promoveu-se a discussão de situações problemas no âmbito da prova do Exame Nacional do Ensino Médio – Enem.

A questão norteadora, "Quais são as possibilidades de diálogo entre a Matemática e Biologia no contexto do Exame Nacional do Ensino Médio?", foi adotada para subsidiar a investigação.

A organização deste artigo apresenta-se da seguinte forma: inicialmente, discute-se os aspectos teóricos relacionados à resolução de problemas, os aspectos metodológicos adotados, a discussão dos dados encontrados e, ao fim, as reflexões sobre o estudo empreendido.

Marco teórico

Resolver problemas faz parte do contexto do desenvolvimento do homem. Desde a antiguidade, o homem, enfrentou problemas para garantir sua subsistência física, social e cultural. Neste contexto, muitas práticas humanas culminaram em conhecimentos matemáticos que, hoje, se fazem presentes em nosso dia a dia. Práticas como contar, selecionar, organizar, comparar e medir surgiram do "fazer" humano.

Levando em consideração o contexto histórico do desenvolvimento do conhecimento matemático do homem, a resolução de problemas ganhou um espaço significativo nas discussões sobre os processos de ensinar e aprender a matemática.

Nos anos 80, o *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM (2000), promoveu uma reflexão apontando que a resolução de problemas deveria ser o principal objetivo do ensino da Matemática nas escolas. Nos anos 90, com o fomento às discussões que apregoavam a educação para todos, a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura - (UNESCO), declarou que a resolução de problemas seria estratégia fundamental para a aprendizagem.

Diante do exposto, faz-se, mister, discutir o conceito de problema. Para esta investigação adotou-se a concepção que afirma ser um problema "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer" (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81).

Outro ponto a destacar no desenvolvimento das discussões sobre a resolução de problemas como meio para ensinar Matemática é a discussão sobre a avaliação. Para Onuchic e Allevato (2011) é necessário conceber a resolução de problemas aliada à avaliação, assim, tais autoras defendem o uso do termo "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-

Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas", como o mais adequado para melhor referir-se às práticas que adotam a resolução de problemas como via para ensinar conteúdos matemáticos. Para as citadas autoras, as três vertentes, se completam e devem nortear a aula de matemática:

> Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (Onuchic; Allevato, 2011, p. 81)

No que concerne ao diálogo entre as diferentes áreas do conhecimento Aguiar Júnior (2003) ressalta que:

> O ensino disciplinarizado não considera possibilidades de articulações entre temas de áreas distintas. No Brasil a persistência do pensamento disciplinar trata a Biologia, a Física, a Química e a Matemática como disciplinas incapazes de articulações entre seus saberes. Tradicionalmente essas Ciências têm o ensino baseado apenas na utilização de fundamentos científicos sem que os mesmos se articulem, posição epistemológica derivada de uma cultura científica fragmentada e fundada no Positivismo, contemporâneo da revisão dos fundamentos da Matemática (Silva Junior, 2008, p. 145).

O citado autor aponta a importância de observar que a articulação de saberes não deve ser tratada como ciência autônoma, mas como alternativas para integrar temas e metodologias. Ainda, defende que aprender temas de uma disciplina é tão necessário quanto saber ligá-los aos de outros campos, aumentando, desta forma, a rede em que eles são inseridos.

Entretanto, aponta Silva Junior (2008), a busca pelo diálogo entre as disciplinas não pode servir de pretexto para destruir a identidade de cada disciplina e empobrecer objetivos didáticos.

Metodologia

O percurso metodológico balizou-se na investigação qualitativa (Bodgan & Biklen, 1994). Valeu-se das análises das provas do Enem dos anos de 2015 e 2016, estudos bibliográficos e realização de oficinas com seis voluntários, alunos do 3º ano do Ensino Médio. Em um primeiro momento, selecionou-se as questões das provas do Enem que apresentavam diálogo entre Matemática e Biologia. Em seguida, de posse destas questões selecionadas, fomentou-se discussões no âmbito das oficinas sobre a importância do estabelecimento de conexões entre as diferentes áreas do conhecimento.

As questões foram adaptadas de modo a requerer dos alunos o desenvolvimento de estratégias e conjecturas para a resolução. As atividades foram realizadas levando em conta o desenvolvimento do protagonismo dos alunos, sendo os educadores orientadores do processo.

Os trabalhos foram desenvolvidos no contexto de uma escola pública do Estado de Minas Gerais, sendo realizado um encontro semanal com duração de duas horas, totalizando 10 encontros.

Os dois primeiros encontros foram destinados a expor os objetivos do projeto e dialogar com os alunos sobre suas expectativas em relação ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática e Biologia e sobre suas participações no Exame Nacional do Ensino Médio – Enem.

Em cada encontro, eram apresentadas aos alunos algumas questões selecionadas e, em seguida, era proposto um trabalho em grupo para análises e discussões. Ao final de cada encontro, os alunos realizavam apresentações expondo os limites e possibilidades nas resoluções das atividades propostas.

A investigação, no âmbito do Enem, justifica-se pela importância desta avaliação no cenário educacional do Brasil. O exame é realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) e Ministério da Educação (MEC) do Brasil. Seu resultado serve para acesso ao ensino superior, em universidades públicas e privadas brasileiras, através do Sistema de Seleção Unificada (SiSU), assim como em algumas universidades no exterior. A prova conta com mais de 7 milhões de inscritos, divididos em 1.661 municípios do país.

Para este trabalho, extraiu-se, na íntegra, três excertos representativos das questões do ENEM discutidas nas oficinas com os alunos do Ensino Médio.

Resultados e discussões

Para este artigo, apresenta-se um recorte das atividades realizadas, explicitando três questões consideradas significativas no processo.

A primeira questão tinha o objetivo de promover a discussão de dados organizados em tabela. A seguir, apresenta-se a questão:

A tabela apresenta parte do resultado de um espermograma (exame que analisa as condições físicas e composição do sêmen humano).

Espermograma						
Características	**Padrão**	**30/11/2009**	**23/03/2010**	**09/08/2011**	**23/08/2011**	**06/03/2012**
Volume (mL)	2,0 a 5,0	2,5	2,5	2,0	4,0	2,0
Tempo de liquefação (min)	Até 60	35	50	60	59	70
pH	7,2 a 7,8	7,5	7,5	8,0	7,6	8,0
Espermatozoide (unidade / mL)	> 20 000 000	9 400 000	27 000 000	12 800 000	24 200 000	10 200 000
Leucócito (unidade / mL)	Até 1 000	2 800	1 000	1 000	900	1 400
Hemácia (unidade / mL)	Até 1 000	800	1 200	200	800	800

Para analisar o exame, deve-se comparar os resultados obtidos em diferentes datas com o valor padrão de cada característica avaliada.

O paciente obteve um resultado dentro dos padrões no exame realizado no dia

A 30/11/2009.
B 23/03/2010.
C 09/08/2011.
D 23/08/2011.
E 06/03/2012.

Figura 01. Excerto de uma questão representativa relacionada à análise de dados em tabela
INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (2018)

Como pode ser observado na tabela dada, o paciente obteve um resultado dentro dos padrões no exame realizado no dia 23/08/2011. Trata-se de uma solução direta, cabendo ao aluno analisar/relacionar o padrão adotado pela técnica adotada, pelo exame, e os resultados obtidos nas diferentes datas.

Na resolução desta questão os alunos não demonstraram muitas dificuldades. Realizaram as discussões, em grupos, e chegaram à resolução pretendida. Um dos alunos relatou:

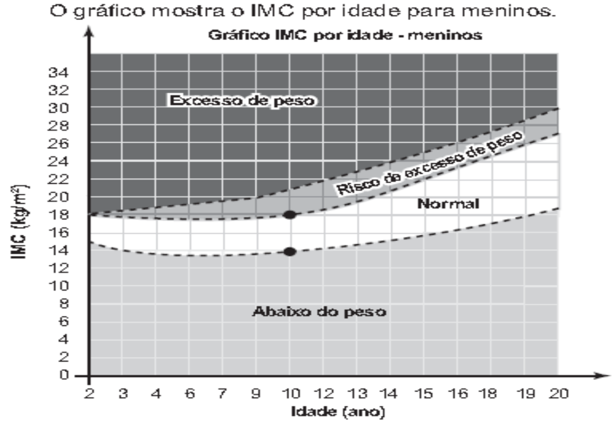
> Esta questão apresentou um grau de facilidade, pois requer análise e atenção para ser respondida. As informações são baseadas em Biologia, mas envolve análise de dados da Matemática. É preciso atenção para os valores da segunda coluna e os resultados encontrados das datas da tabela (Aluno A).

Em geral, as questões que tratavam da análise de tabelas foram discutidas pelos alunos, os quais apresentavam a solução correta e os registros solicitados.

Nas questões que envolviam análises de gráficos, os alunos apresentaram dificuldades na resolução. A seguir, apresenta-se um exemplo de questão que demandava a análise de um gráfico:

O Índice de Massa Corporal (IMC) pode ser considerado uma alternativa prática, fácil e barata para a medição direta de gordura corporal. Seu valor pode ser obtido pela fórmula $IMC = \frac{Massa}{(Altura)^2}$, na qual a massa é em quilograma e a altura, em metro. As crianças, naturalmente, começam a vida com um alto índice de gordura corpórea, mas vão ficando mais magras conforme envelhecem, por isso os cientistas criaram um IMC especialmente para as crianças e jovens adultos, dos dois aos vinte anos de idade, chamado de IMC por idade.

O gráfico mostra o IMC por idade para meninos.



Uma mãe resolveu calcular o IMC de seu filho, um menino de dez anos de idade, com 1,20 m de altura e 30,92 kg.

Disponível em: http://saude.hsw.uol.com. Acesso em: 31 jul. 2012.

Para estar na faixa considerada normal de IMC, os valores mínimo e máximo que esse menino precisa emagrecer, em quilograma, devem ser, respectivamente,

- A 1,12 e 5,12.
- B 2,68 e 12,28.
- C 3,47 e 7,47.
- D 5,00 e 10,76.
- E 7,77 e 11,77.

Figura 02. Excerto de uma questão representativa relacionada à análise de dados em tabela
INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (2018)

Uma das resoluções possíveis para essa questão é a seguinte: se m, em kg, for a massa da criança considerada, sendo esta com idade de 10 anos, tendo 1,2 m, pode-se afirmar, de acordo com o gráfico que $14 \le \frac{m}{(1,2)^2} \le 18$ logo $14 \cdot 1,44 \le 18 \cdot 1,44 \Leftrightarrow 20,16 < m < 25,92$. Levando em conta que a massa da criança é $30,42$, pode-se estabelecer que: $30{,}92-20{,}16=10{,}76$ e $30{,}92-25{,}92=5$. Neste sentido, é correto afirmar que essa criança precisa emagrecer, no mínimo 5 kg e, no máximo, 10,76 kg.

Os alunos apresentaram dificuldades na resolução desta questão, pois necessitavam realizar uma sequência de cálculos, como por exemplo, encontrar o índice de Massa Corporal - IMC da criança, seu novo peso e os quilogramas perdidos. Percebeu-se uma dificuldade, entre quatro dos seis alunos, em realizar análises sucessivas dos dados encontrados. Após as mediações realizadas pelos professores, em seu relato, o aluno C apontou:

> Eu tive dificuldade em relacionar o texto com o gráfico. Mas depois consegui, com a ajuda do professor. Eu gosto destas questões, pois elas trazem a aplicabilidade da matemática. Eu sei que precisava achar uma conta que desse um valor no gráfico, mas não cheguei a armar essa conta. Depois da ajuda do professor ficou mais fácil (Aluno C).

Outra questão representativa, ao longo da investigação, apresentou uma expressão matemática, para, a partir dela, analisar o comportamento da população de bactérias após um tempo dado. Eis a questão:

O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t)=40\cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

- A reduzida a um terço.
- B reduzida à metade.
- C reduzida a dois terços.
- D duplicada.
- E triplicada.

Figura 03. Excerto da questão representativa da análise do comportamento de crescimento de uma população de bactéria - INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (2018)

A questão, acima, apresenta uma solução (dentre outras possíveis) que pode seguir os seguintes passos: como t é dado em horas, converte-se os 20 minutos em horas, sendo:

$$\begin{array}{l} 1h \longrightarrow 60\,\text{min} \\ x \longrightarrow 20\,\text{min} \end{array} \Rightarrow 60x=20 \Rightarrow x=\frac{20}{60}=\frac{1}{3},\ \text{Logo}\ \ p\left(\frac{1}{3}\right)=40.2^{3.\frac{1}{3}}=40.2^{1}=80\ \text{mil (unid)}$$

Após a leitura e as discussões desta questão, todos os alunos a resolveram corretamente. Quando indagados sobre as razões do consenso obtido, relataram que levaram em consideração os conhecimentos da Biologia relacionados ao crescimento de bactérias, que em sua maioria, se reproduzem a cada 20 minutos, por bipartição. Desta forma, não desenvolveram a expressão matemática. O aluno B fez a seguinte consideração:

> A questão, para mim, foi mais fácil para desenvolvê-la porque apesar de trazer uma fórmula de matemática, eu cheguei até a resposta através do conteúdo de Biologia, que foi visto no 2º ano, que falava sobre reprodução das bactérias, que é a cada 20 minutos. Desta forma, relacionei as informações de Matemática com o conteúdo de Biologia e cheguei a resposta correta sem desenvolvimento da fórmula (Aluno B).

Como se vê, o citado aluno valeu dos seus conhecimentos de Biologia para chegar à solução. Tal apontamento, corrobora com a importância do estabelecimento do diálogo entre temas da Matemática e da Biologia.

Os alunos participantes citaram que o dia a dia da sala de aula não os desafiam com situações-problemas como as que aparecem na avaliação do ENEM. Especialmente, apontaram que, na maioria do tempo, em suas aulas de Matemática, lidam com exercícios algorítmicos que demandam aplicação de técnicas conhecidas e memorizadas.

Considerações finais

Com este trabalho percebemos que os alunos apresentavam dificuldades na maioria das resoluções das situações-problemas. Apenas nas situações de análise de tabelas realizaram as tarefas com maior autonomia.

Em seus relatos apontaram a ausência de situações-problemas em suas aulas, fato que consideraram preponderante para as dificuldades encontradas. Nas questões que envolviam diferentes articulações entre os conhecimentos de Biologia e Matemática, os professores necessitaram realizar mediações e/ou orientações, sem, contudo, dar respostas.

Foi possível constatar, ao final das atividades, um maior entendimento e interesse dos alunos a respeito de situações-problemas, bem como observar uma ampliação dos domínios lógicos matemáticos e o avanço dos níveis conceituais referente aos conteúdos de Matemática e Biologia.

Ficou evidenciado, nas reflexões dos alunos, a importância do enfrentamento de situações-problemas envolvendo diferentes áreas do conhecimento. Relataram que a rotina da sala de aula não apresenta situações de desafios e/ou relações entre as áreas do conhecimento. Nas provocações realizadas, evidenciaram que em suas aulas cotidianas são valorizadas as atividades de resoluções diretas e respostas algorítmicas.

Para os participantes desta investigação, o diálogo entre a Matemática e a Biologia possibilitou contextualizar e dar significado às temáticas das duas áreas envolvidas, além de promover uma reflexão sobre a estrutura e as exigências da prova do ENEM. Tal resultado aproxima-se das constatações de Silva Júnior (2008) quando explicitou, em suas investigações, que embora a Matemática e a Biologia tenham suas especificidades, enquanto áreas do conhecimento, estas apresentam possibilidades de aproximações e superação das concepções fragmentadas de construção do conhecimento.

Bibliografia

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora.

Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP). (2018). Recuperado de: http://www.inep.gov.br/

National council of teachers of mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards.* Recuperado em 12 de novembro de 2016 de http://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/Principles,-Standards,-and-Expectations/

Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, 41, 73-98.

Silva Júnior, G. B. (2008). *Biologia e matemática: diálogos possíveis no ensino médio*. 2008. 158 f. Dissertação (Mestrado) não publicada, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Brasil.

Unesco. (1990). *Declaração Mundial sobre Educação para Todos: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem*. Recuperado em 12 de novembro de 2016 de http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000862/086291por.pdf

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

USO DEL PORTAFOLIO COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN EN UN CURSO DE ENCULTURACIÓN MATEMÁTICA

USING THE PORTFOLIO AS A LEARNING STRATEGY IN A COURSE OF MATHEMATICAL ENCULTURATION

Marcela García Borbón; Ma. Elena Gavarrete Villaverde; Margot Martínez Rodríguez; Jesennia Chavarría Vásquez
Universidad Nacional (Costa Rica)
marcela.garcia.borbon@una.cr, maria.gavarrette.villaverde@una.cr, margot.martinez.rodriguez@una.cr, jesennia.chavarria.vasquez@una.cr

Resumen
Este documento tiene por objetivo la socialización de una experiencia en el uso del portafolio como estrategia evaluativa y de aprendizaje, en un curso de formación continua en Enculturación Matemática y Etnomatemática, dirigido a docentes de primaria. Desde esta perspectiva se describen las etapas que permitieron la conformación del portafolio y se muestran producciones y reflexiones de los docentes participantes. Como resultado de la implementación del portafolio se evidenció el empoderamiento de los docentes respecto a su autoaprendizaje, abordaje de conocimientos y habilidades matemáticas a través de signos culturales, y la reflexión de la propia praxis profesional.

Palabras clave: enculturación, formación docente, etnomatemáticas, portafolio

Abstract
The purpose of this paper is to divulge an experience in the use of the portfolio as an evaluation and learning strategy in a continuous education course in Mathematical Enculturation and Ethnomathematics, aimed at elemental school teachers. From this perspective, the sections that make up the portfolio are described, as well as the participating teachers' productions and reflections. Finally, the researcher's group's considerations are shared, regarding the results of this experience, in the use of this evaluation device.

Key words: enculturation; teacher training, ethnomathematics; portfolio

Introducción: el curso de enculturación matemática y etnomatemática

En el 2015 inició el proyecto "Formación de docentes de primaria en la Visión Socio-Cultural de las Matemáticas" en la Universidad Nacional de Costa Rica, el cual parte de la premisa de incorporar la perspectiva sociocultural y política de la matemática para promover la creatividad docente a partir de una visión relativista, que conduce a los docentes a reflexionar sobre elementos de su entorno sociocultural para integrarlos en el desarrollo de su actividad profesional. A partir de esta premisa, se busca impulsar actividades didácticas en el entorno escolar que integren la visión de las Etnomatemáticas occidentales y las Etnomatemáticas del entorno regional.

En el marco de este proyecto se diseñó e implementó el curso titulado "Enculturación Matemática y Etnomatemática" dirigido a docentes de educación primaria de diversas zonas geográficas y entornos socioculturales de Costa Rica. Los propósitos de dicho curso de formación consistieron en promover: la sensibilización sobre la dimensión histórica y filosófica de la matemática, así como sobre la visión social y cultural de las matemáticas; la formación de los docentes como enculturadores matemáticos, es decir como sujetos que se apropian de su identidad regional desde la investigación de las matemáticas de su entorno, y el fortalecimiento de la creatividad docente a partir de actividades que inducen a la creación de recursos didácticos contextualizados con el entorno del docente.

Este curso utiliza metodologías innovadoras para orientar a los docentes en la caracterización de conocimiento matemático cultural y regional, así como la integración de elementos de la identidad cultural regional en el diseño de acciones didácticas contextualizadas. Asimismo, promueve la adquisición de competencias profesionales científicas y de investigación donde se integra el desarrollo de estrategias pedagógicas que promueven la innovación docente y favorecen la Educación Matemática Intercultural, contribuyendo a ensanchar las posibilidades de la competencia de planificación docente, la cual demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos que se realizan a partir de las expectativas de aprendizaje y es necesaria para el diseño de tareas y la constitución de las secuencias de actividades en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Rico, Marín, Lupiañez y Gómez, 2008).

Los principales referentes teóricos de la propuesta formativa son:

Alan Bishop (1988, 1999) quien describe las matemáticas que existen en todas las culturas, a través de seis actividades universales: contar, localizar, medir, diseñar, jugar, explicar. Además, se utiliza la Enculturación Matemática para lograr un proceso de investigación y empoderamiento de las matemáticas inmersas en la cultura y sociedad de un determinado entorno educativo.

Ubiratan D'Ambrosio (2007, 2008) de quien interesa su visión transversal de la Educación Matemática la cual posibilita afianzar la identidad de la cultura regional de los maestros y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. La etnomatemática se considera, por lo tanto, desde la perspectiva sociocultural y política de las matemáticas.

El curso se estableció a través de tres fases: la ejemplificación, la producción y la integración. Los docentes participantes tuvieron un papel central en las fases de producción e integración, quienes, a través de un portafolio, reflexionaron sobre sus aprendizajes, incluyendo evidencias y desarrollando unidades didácticas a partir de los productos elaborados y de la investigación de signos culturales para el abordaje de contenidos matemáticos.

El portafolio como estrategia de aprendizaje y evaluación

Para efectos del curso de Enculturación y Etnomatemática, se utilizó el portafolio como mecanismo de evaluación y autorregulación del aprendizaje; utilizando esta estrategia como "una herramienta reflexiva que permite almacenar y mostrar evidencias del desarrollo de un estudiante o de un profesional" así como también "una alternativa para evaluar, certificar, informar, promocionar, etc." (Del Pozo, 2015).

El portafolio aporta valores de cambio metodológico y de motivación para el logro de competencias profesionales, de gran relevancia. En este sentido, Cano (2005) expresa que, por un lado, conlleva una finalidad de carácter sanativo, en el sentido de que la persona que lo elabora da a conocer el conocimiento que posee, o de lo que es capaz; y por otro lado, una finalidad formativa, que supone un proceso de reflexión de la propia práctica.

El portafolio cumple con dos roles en el proceso de aprendizaje, como un medio para que el estudiante sea el gestor de su propio aprendizaje, asumiendo un rol y como acompañamiento para el evaluador identificando los avances con base en criterios previamente establecidos. (Argudín (2007) citado por Murillo (2012))

Con respecto al rol del portafolio como estrategia de evaluación − dentro del diseño del curso −, tiene como propósito dar énfasis a la dedicación y al aprendizaje auténtico. La estructura del Portafolio consta de cuatro secciones: la recopilación del material del curso, las reflexiones de cada sesión, las construcciones propias y la producción didáctica. Tal como se muestra en la Figura 1, a continuación.

Figura 1. Secciones del portafolio en el marco del curso Enculturación Matemática y Etnomatemática

Primera sección: la recopilación de todo el material aportado por las facilitadoras durante el curso

En esta sección, cada docente recopiló la documentación necesaria para el buen desarrollo del curso y que le fue entregada por las facilitadoras. En primer lugar, se ofreció a los docentes participantes un programa con información relevante, como los objetivos del curso, la descripción de cada sesión, los criterios de evaluación (en particular, los del portafolio) y referencias bibliográficas para consulta. La presencia del programa en el portafolio se justifica como una evidencia de la descripción del curso, pero también de las habilidades que se espera que los participantes desarrollen a través de sus producciones, señaladas en los objetivos y reflejadas en las actividades. El programa constituye también una guía para la elaboración del portafolio, pues sugiere que no se pretende únicamente hacer una colección de documentos y actividades, sino que busca evidenciar la evolución del aprendizaje a lo largo del curso.

Además, se solicitó a los participantes que firmaran y conservaran para sus registros una copia del Consentimiento Informado, donde se les explicaba los alcances del proyecto y cuál sería su intervención dentro del mismo. De este modo, se evidencia la anuencia de los participantes para divulgar todos los hallazgos que derivan de este proyecto.

Finalmente, se facilitó a los participantes una copia en físico de la lectura *Aspectos sociales y culturales de la educación matemática*, de Allan Bishop, como referencia teórica para el trabajo que deberían de realizar durante la segunda sesión. Esta lectura aborda, entre otros, la descripción de las seis actividades matemáticas universales (contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar) que Bishop afirma son comunes a todas las culturas. Se usa con el propósito de que el docente logre, después realizar un trabajo de observación de su entorno sociocultural, la identificación de objetos que puedan analizarse desde las categorías de Bishop, reconociendo las matemáticas inmersas en su contexto.

Para la realización de este trabajo de observación, el curso ofrece un instrumento que sirve de guía al docente como investigador de su propio proceso de Enculturación Matemática. Ambos documentos se incluyen en el portafolio para favorecer el cumplimiento del objetivo de promover la sensibilización sobre la visión social y cultural de las matemáticas.

Las facilitadoras consideraron de suma importancia enterar a los participantes sobre los propósitos del curso y de la elaboración de los portafolios, de manera que este proceso fuera efectivo en el desarrollo de las habilidades propuestas.

Segunda sección: las construcciones propias de cada docente elaboradas en los talleres

En esta sección del portafolio, se les solicitó que hicieran una compilación de los productos de las actividades que desarrollaron a lo largo del curso.

Cada uno de los talleres que constituyeron las tres sesiones presenciales fue diseñado en atención a las áreas temáticas que establece el Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica, en su programa de estudio de matemáticas para la educación primaria. Pero, además, se consideraron entornos sociales y culturales como focos y ejemplos para el desarrollo de actividades didácticas.

En la primera sesión se reflexionó sobre el papel del conocimiento matemático en el entorno social y cultural. Se brindaron orientaciones teóricas de cómo caracterizar las etnomatemáticas regionales a partir del análisis teórico de las categorías que propone Alan Bishop (1999) para describir las matemáticas desarrolladas por grupos diferenciados. En esta sesión también, se abordaron de manera general constructos teóricos de Etnomatemáticas (D'Ambrosio, 2008), Enculturación Docente, Valores de las Matemáticas y aprendizaje por proyectos (Bishop, 1999), entre otros.

Además, fueron desarrolladas actividades contextualizadas, a partir del taller titulado "La medición de mis abuelos", el cual se ubica en el área de Números y Medidas, pues expone como tema central el uso de medidas tradicionales, actualmente vigentes, y cómo éstas pueden acompañar el desarrollo de actividades matemáticas como el conteo y la medición. En la Figura 2, se muestra una fotografía recopilada en uno de los portafolios de docentes de la Región Educativa de Nicoya donde se compartió una lista elaborada, en grupos, por los docentes sobre las medidas tradicionales utilizadas en la región.

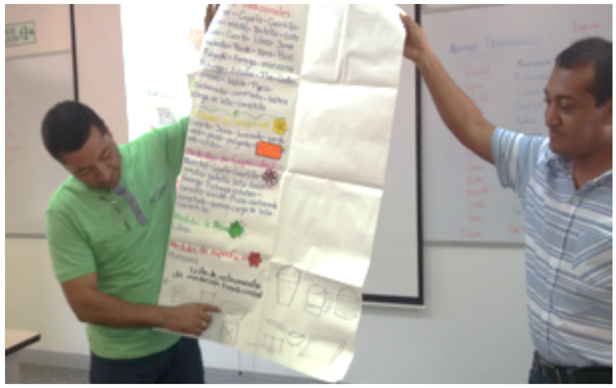


Figura 2. Docentes de la Región de Nicoya en el Taller “La medición de mis abuelos”

La segunda sesión del curso consistió en la ejecución de dos talleres centrados en el área de Geometría. El primero de los talleres se tituló “Patrones con Armonía”, en donde el propósito fue diseñar teselados y patrones simétricos a partir de elementos de la cultura, y cómo éstos pueden acompañar el desarrollo de actividades matemáticas como diseñar y explicar.

En la Figura 3 se muestra el trabajo recopilado por uno de los docentes de la Región Educativa Grande de Térraba en la construcción colectiva de una figura simétrica.

Figura 3. Docentes de la Región de Grande de Térraba en el Taller “Patrones con Armonía”

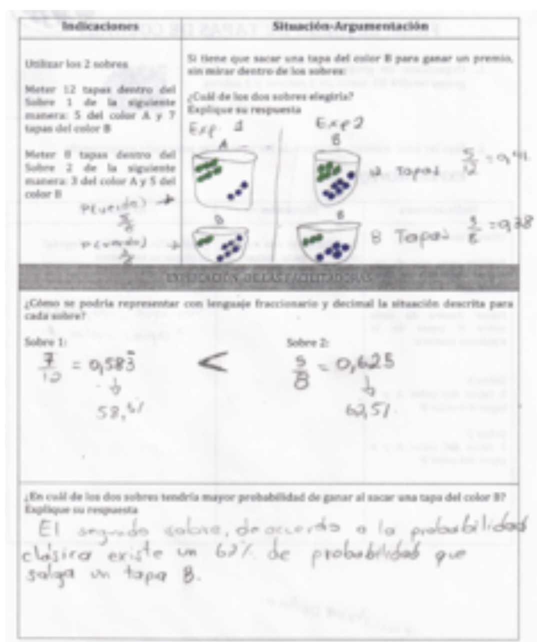
El segundo taller, titulado “Hacia dónde me dirijo”, tuvo como temática central el estudio de la localización y orientación espacial costarricense, y cómo éstas pueden acompañar el desarrollo de actividades matemáticas como localizar, diseñar, explicar y medir.

En la Figura 4 se muestra una fotografía que está presente en el portafolio de uno de los docentes de la Región Educativa de Grande de Térraba, que muestra la elaboración de un mapa de su comunidad, evidenciando los puntos de referencia que son considerados para brindar direcciones en las cercanías de sus centros educativos.

Figura 4. Docentes de la Región de Grande de Térraba en el Taller “¿Hacia dónde me dirijo?”

Finalmente, en la tercera sesión presencial se desarrolló el taller “Ganar o Perder: ¿de qué depende?, el cual tuvo como foco central el área temática de Probabilidad. Este tema se desarrolló a través de la reflexión sobre juegos tradicionales, y cómo estas actividades pueden acompañar el desarrollo de actividades matemáticas como contar, explicar y jugar.

En la Figura 5 se muestra la ficha registrada en uno de los portafolios de la Región Educativa de Alajuela, respecto al taller de Probabilidad.



Indicaciones	Situación-Argumentación
Utilizar los 2 sobres. Meter 12 tapas dentro del Sobre 1 de la siguiente manera: 5 del color A y 7 tapas del color B. Meter 8 tapas dentro del Sobre 2 de la siguiente manera: 3 del color A y 5 del color B	Si tiene que sacar una tapa del color B para ganar un premio, sin mirar dentro de los sobres: ¿Cuál de los dos sobres elegiría? Explique su respuesta

¿Cómo se podría representar con lenguaje fraccionario y decimal la situación descrita para cada sobre?

Sobre 1: $\frac{7}{12} = 0{,}58\bar{3}$ < Sobre 2: $\frac{5}{8} = 0{,}625$

¿En cuál de los dos sobres tendría mayor probabilidad de ganar al sacar una tapa del color B? Explique su respuesta

El segundo sobre, de acuerdo a la probabilidad clásica existe un 62% de probabilidad que salga un tapa B.

Figura 5. Ficha elaborada por un docente de la Región Educativa de Alajuela en el Taller “Ganando o Perdiendo: ¿de qué depende?”

Estas actividades, además de ser una muestra de las posibilidades de usar el entorno cultural en la clase, sirvieron para repasar y aclarar conceptos teóricos, pues en algunas oportunidades se presentaron casos de docentes que indicaron que sus concepciones previas estaban equivocadas y se mostraron complacidos por las actualizaciones.

Tercera sección: Las reflexiones de los docentes sobre el aprendizaje obtenido en cada taller

Esta parte del portafolio recopila las reflexiones elaboradas por los docentes en forma posterior a cada sesión. Cada reflexión incluye los aprendizajes e impresiones, tanto de conocimiento matemático como del potencial didáctico de los signos culturales de su región, respondiendo a preguntas como: ¿De qué manera me sirven las actividades realizadas para mi práctica docente?, ¿Las voy a utilizar? ¿Cómo?, ¿Qué aspectos se pueden adecuar a mi contexto?, ¿Qué me gustó más?, ¿Qué me gustó menos?

A continuación, se presentan fragmentos de las reflexiones elaboradas por algunos docentes, que muestran la construcción de sus propios aprendizajes a partir de la experiencia vivida en los talleres.

Lo que hicimos hoy es nuevo para mí, ya que nunca me habían hablado de enculturación, anteriormente hablábamos de contexto, el taller de hoy es muy dinámico lo cual lo voy a poner en practica con mis estudiantes, todas aquellas actividades que yo no he trabajado, poner en práctica las actividades universales, el cual será una guía en el proceso, se les solicitara a los estudiantes una serie de instrumentos que se utilizan en nuestra zona calabazos, jícaros, guacales,... para medir con instrumentos tradicionales y luego ellos expondrán explicando a todos los compañeros. Realizar actividades tradicionales en las cuales desarrollemos nuestro plan de trabajo, Y así sea más fácil el aprendizaje de los estudiantes, éste taller es de mucho provecho, ya que nos da más ideas para trabajar con los niños y niñas, cabe mencionar que este taller no es como los que he recibido anteriormente siento que es muy dinámico y provechoso.

Figura 6. Fragmento de la reflexión de la *Docente A*

Como puede observarse en el extracto anterior, la *Docente A* focaliza su aprendizaje en cuanto a un nuevo concepto, el de *enculturación*, relacionado con uno de los propósitos del curso. Asimismo, manifiesta su disposición por aplicar las actividades realizadas y ahí mismo empieza a construir sus propias ideas de cómo adecuarlas al aula, según su entorno sociocultural.

Otra docente manifiesta que:

En las lecciones se debe relacionar la geometría del programa de estudio con la visión sociocultural de las matemáticas, para ello se deben planificar estrategias que impliquen actividades de diseñar, jugar y explicar tomando en cuenta el entorno. ·Un ejemplo muy práctico son las carretas de Sarchí y el piso de la iglesia de Grecia.

Figura 7: Fragmento de la reflexión de la *Docente B*

En esta parte de su reflexión, la *Docente B* muestra con un ejemplo la importancia de incorporar las actividades matemáticas universales a partir del contexto. Se nota empoderada con el nuevo conocimiento a partir de Bishop y evidencia la aplicación de las actividades matemáticas, ejemplificando con un signo cultural de su región.

El conocimiento matemático también se ve reforzado en las reflexiones, así lo manifiesta el *Docente C* de la región de Orotina: *"Realizamos una socialización donde se efectúa un diseño y se responde a la interrogante, si es un diseño simétrico y cuántos ejes de simetría puede tener"*; además, "*(...) pude tener una mejor visión de que la simetría se relaciona con la belleza, para con ello, dar un mejor enfoque en mi clase con respecto a la realidad de los niños".*

Otra docente destaca en su reflexión la importancia de rescatar las costumbres de los antepasados y darle sentido de identidad a las actividades didácticas, además de la construcción del conocimiento en forma colectiva, así como el mejoramiento de las actividades, mostrando autonomía y creatividad como docente investigador.

> Durante este taller, trabajamos actividades muy enriquecedoras para la práctica docente, ya que se observaron y conocieron diversas medidas tradicionales que no eran sabidas por todos los integrantes del grupo, pudiendo recalcar que se dio un aprendizaje colectivo.
>
> Las mismas pueden aplicarse en el aula, ya que en una gran mayoría son desconocidas por los estudiantes, así que es una buena idea utilizarlas en una clase sobre las medidas.
>
> Se puede mejorar la experiencia al proyectar videos, al buscar juegos en linea de internet, para que los discentes aprender a realizar trueques o ganancias con ciertas medidas.

Figura 8. Fragmento de la reflexión de la *Docente D*

Los participantes del curso mostraron a través de sus reflexiones diversos aprendizajes significativos en cuanto al uso del signo cultural como recurso didáctico para facilitar el conocimiento matemático en sus aulas; así como también significaron una introspección, una mirada interna en lo que refiere a sus propios conocimientos matemáticos, pedagógicos y de su entorno sociocultural.

■ Cuarta Sección: la producción didáctica como resultado del curso y del proceso vivencial e investigativo llevado a cabo por cada docente participante

Como resultado del proceso vivencial en el curso, así como del proceso investigativo que cada docente realizó a través de las sesiones no presenciales, se construyeron unidades didácticas que reflejan la utilización de un signo cultural en actividades de aula para el abordaje de determinados temas y habilidades matemáticas, establecidos en el programa de estudio para la educación primaria.

En la Figura 9 se muestra el signo cultural seleccionado por una docente para su Unidad Didáctica. En ella establece actividades de conteo y clasificación de peces de la zona, y formula preguntas de medición a través de la profundidad de las pozas que se forman a lo largo del río.

2- Identifique una actividad tradicional o un elemento dentro de su cultura cuyas características puedan ser utilizadas para desarrollar una clase de matemática y describa las Actividades Matemáticas Universales que están relacionadas con la actividad tradicional o elemento cultural.

Actividad Seleccionada:

El Río Machuca.

Figura 9. Producción de unidad Didáctica basada en el Río Machuca elaborado por una docente

Como puede observarse, las tres primeras secciones del portafolio estuvieron asociadas a la fase de ejemplificación y reflexión, mientras que la cuarta sección se vincula con las fases de producción e integración. Esto dado que cada docente realizó una investigación desde su realidad, a partir de un signo cultural presente en sus comunidades para lograr su integración con determinados conocimientos y habilidades matemáticas.

Reflexiones de la experiencia

El portafolio supone un cambio de modelo, pues su énfasis se centra en la autoevaluación del propio proceso de aprendizaje. En esta experiencia, el portafolio, fue más que una recopilación de información, pues se convirtió en una herramienta para la reflexión del aprendizaje del docente, un registro de experiencias alcanzadas a través de los distintos talleres y sesiones del curso, así como un documento de consulta para su labor profesional.
La revisión del trabajo docente y la reflexión sobre la evolución en el aprendizaje por parte de los maestros participantes de la experiencia les permitió hacer una valoración sobre el logro de objetivos. La utilización del portafolio permitió evidenciar un empoderamiento de los docentes de primaria respecto al abordaje de contenidos conocimientos y habilidades matemáticas a través de los signos culturales que pueden utilizar, atendiendo la contextualización activa que les solicita el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) para la enseñanza de las Matemáticas.

La estrategia del portafolio, en este caso particular, se constituyó en un mecanismo de reflexión de la propia praxis del docente, permitiendo indagar e incorporar estrategias de enseñanza y de aprendizaje innovadoras, vinculadas con el contexto.

En esta experiencia formativa, el portafolio tuvo un carácter flexible e innovador, como un recurso para enriquecer el componente de investigación en la vertiente de la relación teórico-práctica del proceso.

Finalmente, la evaluación, a partir de un portafolio ofrece una visión más personalizada e integral del proceso de aprendizaje, pues al incluir temas como reflexiones y producción individual, permite evidenciar aspectos como creatividad, rigor, organización, actitud crítica frente a sus aprendizajes, capacidad de investigación, entre otros.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.

Cano, E. (2005). *El portafolio del profesorado universitario. Un instrumento para la evaluación y para el desarrollo profesional.* Barcelona: Ediciones Octaedro, S.L.

D'Ambrosio, U. (2004). Educación matemática, etnomatemática i pau. *Perspectiva Escolar*, *284*, 15-22.

D'Ambrosio, U. (2005a). O Programa Etnomatemática como uma proposta de reconhecimento de outras formas culturais. *Yupana, 2*(5), 63-71.

D'Ambrosio, U. (2005b). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. Educação e Pesquisa, 31(1), 99-120.

D'Ambrosio, U. (2007). La matemática como ciencia de la sociedad. En J.Giménez, J.Diez-Palomar y M. Civil (Eds.), *Educación Matemática y Exclusión* (pp.83-102). España: Graó.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad.* México: Limusa.

Del Pozo, J. (2015). *Herramientas de evaluación: el portafolio, la rúbrica y las pruebas situacionales*. Madrid: Narcea

MEP (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas, Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía*. San José: Ministerio de Educación Pública, República de Costa Rica.

Murillo, G. (2012). El portafolio como instrumento clave para la evaluación en Educación Superior. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 12* (1), 1-23.

Rico, L.; Marín, A., Lupiañez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en Secundaria: el caso de los números naturales. *Suma* (58), 7-23.

EL SABER PROPORCIONAL EN LAS HUERTAS ESCOLARES. UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

THE PROPORTIONAL KNOWLEDGE IN SCHOOL GARDENS; A SOCIOEPYSTEMOLOGY STUDY

Paola Alejandra Balda Álvarez, Gabriela Buendía Ábalos
Universidad Santo Tomás (Colombia), Colegio Mexicano de Matemática Educativa (México)
pbalda20@hotmail.com; buendiag@hotmail.com

Resumen
Este artículo presenta los resultados parciales de una investigación que busca identificar los usos de la proporcionalidad en el contexto de las huertas escolares. La investigación parte de la premisa de reconocer la existencia de un pensamiento proporcional que se difunde socialmente y que se evidencia en el desarrollo de las tareas que los niños llevan a cabo en este escenario. El análisis del saber se realiza a la luz de las manifestaciones matemáticas recurrentes, que los niños realizan cuando desarrollan las tareas en la huerta escolar. La atención se centra en la forma cómo el saber se modela a través de procesos de razonamiento proporcional y la intencionalidad explícita en los procesos didácticos que surgen a través de los saberes identificados. En este avance se presentan los análisis realizados a dos de las tareas: sembrar y preparar el terreno.

Palabras clave: Usos de la proporcionalidad, huertas escolares, socioepistemología

Abstract
This article presents partial results of a research that pretend to identify the uses of proportionality in the context of school gardens. The research starts from the premise of recognizing the existence of a proportional thinking that is socially disseminated and that is evident in the development of tasks that children carry out in this scenario. The analysis of knowledge is carried out in the light at recurrent mathematical manifestations, which children perform when they develop tasks in the school garden. The focus is on the way knowledge is modeled through processes of proportional reasoning and explicit intentionality in the didactic processes that arise through the identified knowledge. In this advance, the analyzes carried out on two of the tasks are presented: sowing and preparing the ground.

Key words: Uses of the proportionality, school garden, socioepistemology

Introducción

Los estudios llevados a cabo que tienen como objeto problematizador: la proporcionalidad, dan a conocer el poco énfasis que se ha realizado a las formas cómo ese saber vive en escenarios extraescolares. Además, pese a que este sea un objeto producto de múltiples indagaciones, la investigación en torno a él aún proporciona un gran reto para la comunidad de Matemáticos Educativos, toda vez que se constituye en un objeto presente en los currículos escolares de diferentes niveles y que su naturaleza le otorga el estatus de saber trasversal (Reyes-Gasperini, 2016). En la actualidad existen escenarios donde lo escolar y la realidad del sujeto convergen, escenarios donde la matemática se usa de manera explícita para el desarrollo de situaciones propias del contexto, donde se manifiesta su carácter funcional y por ende se da sentido a su valor de uso otorgado a un saber. Uno de estos escenarios es la huerta escolar, un escenario ubicado fuera del aula, pero dentro de la escuela que trae la realidad, experiencias y saberes de quien aprende al escenario escolar. Es en este escenario donde el carácter funcional de la matemática adquiere sentido, pues a través de su quehacer los estudiantes comparten un hacer y una normativa del hacer. El hacer está determinado por cierto número de tareas propias del contexto campesino, tareas en las cuales se identifica el uso de lo proporcional, la proporcionalidad de uso de manera recurrente

De lo anterior y con lo que le compete a la Matemática Educativa nos preguntamos sobre cuáles son los usos y significados atribuidos a lo proporcional en el escenario de la huerta escolar. Al considerar los posibles caminos para abordar la respuesta a este interrogante, las preguntas se dirigirían hacia cómo esa matemática funcional se materializaba en cada una de las tareas llevadas a cabo por los estudiantes. El estudio fue entonces un proceso de análisis centrado en esos quehaceres a través de constructos teóricos en torno a los usos que consideran elementos de construcción del saber desde su naturaleza social. Al querer indagar sobre la construcción social del conocimiento proporcional en la huerta escolar, se consideró que una visión socioepistemológica como aquel marco teórico que brindaría elementos pertinentes para su análisis. De ahí que nos enfocamos en el saber proporcional en las huertas escolares y decidiéramos a través de este informe dar cuenta de los hallazgos que tenemos hasta la fecha sobre cómo lo proporcional vivía en el contexto de la huerta escolar en el desarrollo de dos de sus tareas principales: la siembra y la preparación del terreno.

Marco teórico

Esta investigación adopta como marco teórico-metodológico la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual a su vez se constituye en fuente para delinear el proceso investigativo y fundamentar el problema. De la teoría se asumen entre otros la propuesta en torno a los usos, los modelos de pensamiento en torno al saber en cuestión y el reconocimiento de los diferentes tipos de saber que constituyen la sabiduría humana.

Los usos

La investigación asume el estatus otorgado a los usos como generadores de conocimiento, lo cual se fundamenta en el hecho de asumir como objeto de estudio "al ser humano usando y haciendo matemáticas y no solo su producción matemática final" (Buendía, 2012). Esto otorga un carácter social a las matemáticas, un paso de cuántas matemáticas se debe aprender a cuáles son las matemáticas que se deben aprender, lo cual toma forma a través del análisis del hacer. Se retomó entonces la propuesta de Cordero (2006), quien afirma que son las prácticas las que anteceden la producción de conceptos, las cuales se materializan a través de los usos y que los medios que permiten comprender estos usos son los funcionamientos y formas, los cuales habrá que analizarlos teniendo en cuenta sus características situacionales, intencionales y de significado. En la investigación se asumieron a los funcionamientos y formas así:

- Funcionamientos como las ejecuciones u operaciones enmarcadas en las acciones que los estudiantes desarrollan en las tareas de la huerta.
- Las formas, como las diversas nociones y modelos de pensamiento relacionadas con lo proporcional,

Los modelos de pensamiento proporcional

Para el análisis de los datos se retoma el esquema construido respecto a los modelos de pensamiento proporcionales. Estos modelos sintetizados y presentados por Reyes-Gasperini y Cantoral (2014), son el modelo cualitativo, el aditivo simple, el aditivo compuesto, el multiplicativo, el multiplicativo inter y el multiplicativo intra. De acuerdo con los autores, el razonamiento cualitativo precede a los modelos cuantitativos de pensamiento proporcional y obedece a una relación descriptiva de tipo "entre dos magnitudes" que se materializa según Piaget e Inhelder (1977) al reconocer un elemento de compensación para mantener el "equilibrio". Este equilibrio otorga sentido al anunciamiento del tipo: "a más-más… a menos-menos".

Por su parte, el razonamiento aditivo simple, se materializa cuando dada la imagen del elemento unitario, responde al razonamiento: por cada aumento unitario en el dominio, aumenta la cantidad de la constante en el codominio. Mientras que en el razonamiento aditivo compuesto la imagen de la suma de dos elementos del dominio es igual a la suma de las imágenes de cada uno de dichos elementos.

Finamente el razonamiento multiplicativo modela un pensamiento en el cual, dada la imagen del valor unitario cualquier elemento del codominio será igual al producto de su correspondiente en el dominio por el valor unitario. Aquí se habla además del razonamiento inter en el cual los elementos del dominio y el codominio varían de la misma manera. Este razonamiento suele materializarse a través de expresiones como: al doble le toca el doble. Y el razonamiento intra en el que la razón entre el elemento del dominio y el elemento del codominio es constante siempre.

Los modelos de pensamiento expuestos fueron base para el análisis de hacer de los niños en el marco de las tareas de la huerta escolar, y permitieron reconocer aquellas prácticas que permiten emerger esos significados a través de los usos.

Figura 1. Modelos de pensamiento proporcional.
Fuente: Reyes-Gasperini (2011)

Los diferentes tipos de saberes

Desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa se reconoce la existencia de tres tipos de saberes, los cuales según Cantoral (2013) son constitutivos de la sabiduría humana. Estos saberes obedecen al saber culto, el saber popular y el saber técnico. El saber popular hace referencia a aquel saber que se hereda de generación en generación; un saber que dota de identidad a un grupo toda vez que representa no sólo cómo hacer algo, sino que justifica su quehacer. El saber técnico obedece a un saber que se construye a la luz de la experiencia. Un conocimiento que adquiere sentido y significación a través del hacer. El saber culto, por su parte se constituye en un dominio heredado a través de la academia. Un saber construido con anticipación que se trasmite intencionalmente.

Desde la investigación se reconoce el escenario de la huerta escolar como un escenario en el cual cohabitan estos tres tipos de saberes, de los cuales abordamos dos en este artículo. El saber técnico como aquel que los niños construyen a través de su quehacer. El saber popular como aquel heredado de sus padres, el cuál norma muchas de las decisiones que los estudiantes toman a la hora de abordar una tarea.

Metodología

La metodología empleada se enmarcó en el paradigma cualitativo y el enfoque hermenéutico, los cuales guiaron el análisis de los datos a través del lente socioepistemológico. Este se materializó a través del esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2011, p.446)

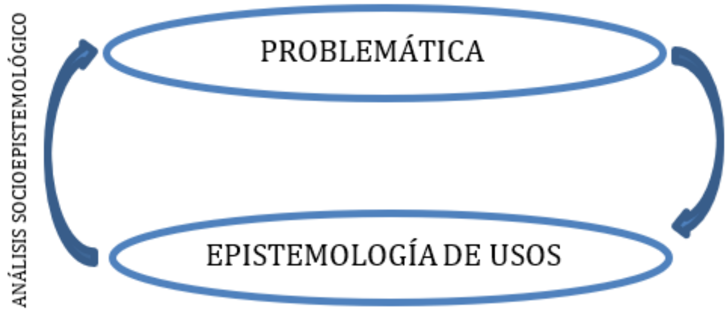


Figura 2. Esquema metodológico.
Fuente: Elaboración propia basada en Montiel y Buendía (2011)

El esquema se materializó a través de diferentes momentos entre los que se encuentran:

1. Acompañamiento a 57 sedes de escuelas rurales y urbanas en Colombia con huertas escolares, donde se tomaron fotografías, videos y notas de campo.
2. Análisis inicial, en donde luego de la trascripción de realizó un primer momento de análisis de la información llegando a concluir la existencia de tareas y manifestaciones matemáticas recurrentes.
3. Acompañamiento a dos sedes de la Institución Educativa Eugenio Díaz Castro de Soacha-Cundinamarca, donde nuevamente se tomaron fotografías, videos, notas de campo y se hicieron entrevistas a niños, docentes y padres de familia.
4. Una segunda fase de análisis, el análisis socioepistemológico, el cual se llevó a cabo a través de la triangulación de tres aspectos que constituyeron la unidad de análisis: las manifestaciones matemáticas recurrentes que los niños realizan cuando desarrollan las tareas en la huerta escolar, la forma como el saber se modela a través de procesos de razonamiento proporcional y la intencionalidad explícita en los procesos didácticos que se evidencian a través de los saberes populares y técnicos.

Resultados

El acompañamiento realizado a escuelas con huertas escolares permitió identificar que en su quehacer existen diez tareas que se repiten en cada una de ellas. En este reporte daremos cuenta de dos de esas tareas y de los hallazgos producto del análisis de lo observado.

Sembrar

Sembrar es una tarea que requiere esparcir semillas en determinado terreno con la finalidad de que germinen. Para el desarrollo de esta tarea los estudiantes hacen uso de partes de su cuerpo, como sus falanges o pies, para marcar la profundidad que debe tener el hoyo en el cual se colocará la semilla.

El análisis realizado a la tarea de sembrar permitió identificar que durante su desarrollo los niños realizan comparaciones, anticipaciones, mediciones, selecciones y conteo. Las comparaciones involucran dimensiones del terreno y tienen por objeto lograr a través de su quehacer que el terreno o porción de terreno que van a sembrar adquiera las mismas características de otro ya sembrado. Al respecto, los niños afirman:

> *"si usted quiere tener la misma cosecha acá, debe sembrar la misma cantidad de terreno"*

Fotografía 1. Niños sembrando

Por su parte, para las anticipaciones los niños hacen predicciones basadas en razonamientos que tienen como sustento experiencias previas.

> "Este terreno debe ser así de grande porque las plantas crecen más o menos así"
> [Niños explicando la tarea. Institución Educativa Eugenio Díaz Castro, 2016]

Las herramientas empleadas para este quehacer son de dos tipos: lógicas (razonamientos) y concretas (palas, pasos, palos, etc.). Ambas normadas por su experiencia.

La misma experiencia que norma el quehacer en las comparaciones determina los procesos de razonamiento empleados para anticipar, seleccionar y contar, pues es su experiencia y la experiencia heredada por sus padres la que valida las formas de proceder frente a las situaciones que se generan en este escenario, de ahí que adquiera validez hablar de la racionalidad contextualizada y el relativismo epistemológico.

> "Así, porque mi papá me lo enseñó(...) El también siembra alverja, como mis abuelos. Todos somos del campo"
> [Nota de campo: Institución Educativa Eugenio Díaz Castro, 2016]

En cuanto a lo proporcional se reconocen el uso de un razonamiento aditivo simple, a través de quehaceres en los cuales los estudiantes relacionan la cantidad de hoyos con la cantidad de semilla:

	Cantidad de hoyos	Cantidad de semillas	
+1	1	3	+3
	2	6	

Tabla 1. Cantidad de hoyos: cantidad de semillas.

Por otra parte, se logra evidenciar el desarrollo razonamiento inter, a través de afirmaciones en las cuales los niños relacionan la cantidad de papas a sembrar con la cantidad de papas que se obtienen:

	Cantidad de papas a sembrar	Cantidad de papas que se obtienen	
x2	2	más o menos 4	x2
	4	El doble	

Tabla 2. Papas sembradas: Papas obtenidas

En este momento se logra reconocer además el empleo de un lenguaje generalizado, el cual se constituye en herramienta para justificar las conclusiones en su hacer.

Preparar el terreno

Preparar el terreno es una tarea que demanda quitar la maleza y las malas hierbas, así como el airamiento de la tierra. Para el desarrollo de esta tarea los estudiantes arrancan la maleza del terreno, ya sea con las manos o con alguna herramienta de apoyo. La decisión del instrumento a emplear depende de lo largo y grueso de la raíz, la cual, aunque no es visible es conocida por los estudiantes debido a su experiencia o a la experiencia heredada en sus casas.

El análisis realizado a la tarea de preparar el terreno permitió identificar que durante su desarrollo, al igual que en la siembra los niños realizan comparaciones, anticipaciones y clasificaciones.

Fotografía 2. Niños preparando el terreno.

Las comparaciones realizadas son de la misma naturaleza que aquellas realizadas en la siembra. Estas involucran dimensiones del terreno y tienen por objeto lograr a través de su limpieza que éste en su totalidad o en determinada sección adquiera las mismas características de otro ya arreglado.

Las clasificaciones tienen en cuenta el tipo de terreno, cualidades de la tierra y tipo de producto que se requiere sembrar.

> “La fresa se siembra en vasos, la papa se siembra en el terreno y la lechuga se siembra en camas”
> [Nota de campo: Institución Educativa Eugenio Díaz Castro, 2016]

Las herramientas empleadas para este quehacer son los patrones y los razonamientos basados en su experiencia.

Las anticipaciones obedecen a predicciones razonadas, las cuales se justifican a través de los resultados de experiencias pasadas realizadas en su hogar o en la misma escuela, experiencias que determinan la coexistencia del saber popular y del saber técnico. Las clasificaciones del terreno a preparar tienen como sustento sus características particulares y su razón de ser tiene sentido gracias al reconocimiento del tipo de terreno que se requiere para lograr una siembra provechosa.

El razonamiento proporcional identificado en este quehacer es un razonamiento cualitativo, el cual se manifiesta a través de expresiones retóricas del tipo:

> “Entre más quiera sembrar, más terreno debo preparar”
> [nota de campo: Institución Educativa Eugenio Díaz Castro, 2016]

Para la realización de esta tarea, al ser la primera que se lleva a cabo en todo el proceso pareciera ser necesario que el maestro asuma el papel de guía. En este momento el maestro da indicaciones generales de cómo arreglar el terreno, enseña a través del ejemplo y luego permite que los niños lo hagan e incluso aprueba nuevas construcciones del estudiante que surgen a través del hacer.

Conclusiones

Los resultados obtenidos, producto de análisis realizado al quehacer en las huertas escolares permitió concluir:

- Existen tareas recurrentes en el desarrollo de las tareas de la huerta escolar: preparar el terreno, sembrar, abonar, hacer surcos, regar, trasplantar, recoger, podar, tutorar y deshierbar. La descripción de cada una de las tareas implica el surgimiento de ciertas manifestaciones matemáticas: la comparación, la medición, la clasificación, la selección, la estimación, el conteo, la anticipación y la aproximación. Un ejemplo particular para el caso de la preparación del terreno, lo presentamos a continuación:

Deshierbar y preparar el terreno		
Momentos de la tarea	**Descripción de los momentos de la tarea**	**Manifestaciones matemáticas recurrentes**
1	Comparan el terreno a sembrar con otro ya sembrado. Esto con la finalidad de tomar decisiones respecto a la porción de terreno que requiere ser deshierbada.	Comparar Anticipar Clasificar
2	Anticipan el tamaño de la producción teniendo en cuenta la porción de terreno que será deshierbada.	
3	Arrancan la maleza del terreno.	
4	Clasifican entre los pedazos de tierra sólida, aquellos que son piedras para apartarlos del terreno. Entre aquellas que son tierra sólida para picar y volverlo tierra.	
[nota de campo 24, I.E. Eugenio Díaz Castro, 2016]		

- Las manifestaciones matemáticas que conforman el hacer en las tareas de la huerta escolar aportan a la construcción de un pensamiento proporcional, el cual cobra sentido a través de los usos.

- Los usos de lo proporcional en la huerta escolar están estrechamente relacionados con prácticas de comparación, las cuales a su vez a través de un proceso reflexivo permiten que se establezcan relaciones de dependencia. Las comparaciones pueden ser comparaciones entre magnitudes de igual o diferente naturaleza, En el caso de las magnitudes de igual naturaleza estás pueden pertenecer o no a un mismo espacio de referencia, siendo estas comparaciones del tipo parte-parte y parte todo.

- Otra de las acciones que se evidencian dentro de las tareas de la huerta escolar y que da sentido al uso de lo proporcional es el uso de patrones y construcción de unidades de medida. Los patrones pueden ser antropométricos o no y las unidades son formas de medición acordadas por la comunidad las cuales dotan de identidad al quehacer.

- Las formas de generalizar los resultados de sus procesos o posibles resultados de sus procesos obedecen a estructuras retóricas o sincopadas, las cuales son producto de una práctica de anticipación que involucra razonamientos en tono al cálculo y medida.

- El quehacer en la huerta escolar es un quehacer determinado por los tres tipos de saberes: cultural, técnico y culto los cuales cohabitan en igualdad de condiciones y otorgan a este escenario el estatus de escenario intercultural de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. Red de Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal, 24(2), 9-35.

Cantoral, R. (2013), *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre la construcción social del conocimiento*, Barcelona, Gedisa

Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. En R. Cantoral, Covián, O., Farfán, R. M., Lezama, J., y Romo, A. (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, AC y Ediciones Díaz de Santos, S. A. 285-309

Montiel, G. y Buendía, G., (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio. (Eds.). *Memorias de la XIV Escuela de invierno en Matemática Educativa*. 443-45. México: Red Cimates.

Piaget, Jean y Barbel Inhelder (1977), "El preadolescente y las operaciones proposicionales", *en Jean Piaget y Barbel Inhelder (eds.), Psicología del niño*, Madrid, Ediciones Morata, pp. 131-150.

Reyes-Gasperini, D. (2016). Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa. (Tesis de doctorado). México, D. F.: Centro de investigación y Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral R. (2014), "Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático*", Bolema: Boletim de Educação Matemática*, vol. 28, núm. 48, pp. 360-382.

Reyes-Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: estudios de factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas.* (Tesis de maestría). Centro de investigación y Estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.

SIGNIFICADOS DE LA LÍNEA Y EL ÁNGULO EN LA ESFERA: HACIA UNA EXPLORACIÓN DIDÁCTICA

MEANINGS OF THE LINE AND THE ANGLE IN THE SPHERE: TOWARDS A DIDACTIC EXPLORATION

Melvin Cruz-Amaya, Gisela Montiel Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
melvin.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Resumen

La geometría euclidiana representa un buen modelo del espacio en que vivimos, de ahí que no nos preguntamos por qué funciona y qué es lo que hace que funcione; y muchas de las nociones geométricas que utilizamos no son cuestionadas. Estudiar una noción geométrica en un espacio distinto al común, lo consideramos fuente primordial de información para aportar en la teorización sobre el desarrollo del pensamiento matemático, ya que, potencia la significación de la geometría euclidiana y permite la comprensión, descripción y representación del espacio en el que vivimos. En esta dirección, perfilamos y presentamos avances de un proyecto de investigación, sustentado teóricamente en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), cuyo objetivo es caracterizar un proceso de significación progresiva relativo a la línea y al ángulo en la esfera, mediante una exploración didáctica, reconociendo la variedad y complejidad de significados en la esfera y en el plano, de ambas nociones.

Palabras clave: geometría, geometría esférica, exploración didáctica

Abstract

Euclidean geometry represents a good model of the space in which we live, hence we do not ask ourselves why it works and what makes it works; and many of the geometric notions we use are not questioned. Study a geometric notion in a space other than the common, we consider it a primordial source of information to contribute to the theorization on the development of mathematical thought, since, potency the significance of Euclidean geometry and allows the understand, describe and represent the space in which we live. In this direction, we profile and present advances of a research project, supported theoretically in the Socio-epistemology Theory of Educational Mathematics (TSME), whose objective is to characterize a process of progressive significance relative to the line and the angle in the sphere, through a didactic exploration, recognizing the variety and complexity of meanings in the sphere and the plane of both notions.

Key words: geometry, spherical geometry, didactic exploration

Introducción

Ante la necesidad de explicar fenómenos naturales y generar una mejor forma de vida, se estructura y teoriza la matemática; reconocida actual e históricamente como una ciencia primordial en la formación de cualquier individuo. Al ser una ciencia amplia, podemos encontrar en ella diversas ramas, siendo una de las más antiguas, la geometría. Tanto Heródoto como Aristóteles situaron su origen en la civilización egipcia, el primero sostenía que había surgido a partir de la necesidad práctica de volver a trazar los linderos de las tierras después de la inundación anual del valle del río Nilo y el segundo sostenía que el cultivo de la geometría en Egipto se impulsó por la existencia de una clase sacerdotal ociosa (Boyer, 1968). Sin embargo, desde el periodo neolítico se revela un camino hacia la geometría, mediante relaciones espaciales en diferentes superficies.

Tradicionalmente en la enseñanza escolar de la geometría no entran en juego discusiones referentes al trabajo en superficies no planas, y los trabajos sobre mediciones de superficies reales se resuelven considerándolas planas. Aunque la Geometría Euclidiana —GE—, permite localmente una buena descripción del mundo físico, no puede aplicarse a la navegación en la superficie de la tierra, a la astronomía y a la topografía (Guven y Baki, 2010). Como la GE representa un buen modelo para el espacio en que vivimos, no solemos preguntamos por qué funciona y qué es lo que hace que funcione, y muchas de las nociones geométricas no son cuestionadas. Refiriéndose a la geometría en la superficie de la esfera, Junius (2008) sostiene que, posibilitar a los aprendices ir y venir entre el plano y la esfera provocará que estos, al descubrir que muchas ideas no funcionan en la esfera se pregunten, por qué sí lo hacen en el plano. Dentro de la matemática escolar es común atribuirle a la geometría el papel de desarrollar un pensamiento que permite comprender, describir y representar el mundo en el que vivimos, lo cual nos hace preguntarnos si realmente la geometría escolar —geometría que se trabaja en la escuela— potencia dicho propósito, o la noción de nuestro entorno es acotada.

Dicha reflexión muestra uno de los motivos que nos hace considerar la posibilidad de tratar con una geometría diferente a la GE —la cual es potencialmente trabajada en la escuela— y estructurar un proyecto de investigación en esa línea. Presentamos en este documento, un avance de dicho proyecto, donde mostramos una necesidad de investigación en el área; el fundamento teórico; las decisiones metodológicas; y el método, en tanto obtención, organización y análisis de los datos.

Una problemática

Las Geometrías No Euclidianas —GNE— además de potenciar la significación de la GE, desarrollan un pensamiento que permite describir el espacio en el que vivimos, es decir, conocimientos cotidianos —aquellos conocimientos adquiridos en la educación básica, a través de nuestras experiencias con tareas prácticas y por medio de las tradiciones de nuestros pueblos—, que permiten comprender nuestro entorno. Son conocimientos dependientes del espacio-tiempo, nos referimos al conocimiento actual, que la mayoría posee, podría poseer o necesita poseer, dependiendo del contexto en el cual se desarrollan. Comúnmente enfrentamos situaciones que, aunque no son de nuestro cotidiano, están en nuestro entorno, y al tratar con ellas, las herramientas que tenemos son insuficientes y no logramos su compresión.

Uno de los primeros aprendizajes adquiridos en geometría es que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta. También en la escuela utilizamos mapamundis en los que la superficie de la tierra se representa en el plano, aun cuando sabemos que la Tierra es casi una esfera, representación que puede conllevar algunas distorsiones. Una situación particular para ejemplificar dichos argumentos, es cuando viajamos en avión y observamos en los monitores la ruta del recorrido o simplemente cuando pensamos en ella, es común pensar automáticamente en una línea recta —en el sentido de la línea recta en el plano— que une los aeropuertos de origen y destino, dicho resultado puede alejarse de la realidad o no comprender la ruta del viaje, en especial cuando más largo sea el vuelo o cuanta más diferencia de latitud —medida angular de la distancia entre un punto de la Tierra y el ecuador— haya entre el origen y el destino del viaje.

Este tipo de fenómenos resultan de interés para nuestra disciplina —la Matemática Educativa—, en particular para los enfoques sobre el desarrollo del pensamiento matemático interesados en entender cómo se pone en funcionamiento el conocimiento adquirido en la escuela para interactuar con el mundo fuera de ella, y así identificar el impacto de la educación matemática en la formación del ciudadano y la transformación de su entorno. Este interés disciplinar se reflejó en la reciente revisión que se presentó en el Congreso Internacional en Educación Matemática (ICME-13) sobre educación de la geometría (Sinclair, Bussi, Villiers, Jones, Kortenkamp, Leung, y Owens, 2016), donde uno de sus apartados fue dedicado a los nuevos enfoques en geometría, la enseñanza y el aprendizaje de la geometría 3D y las GNE, principalmente se muestran las ventajas de conocer sobre la geometría esférica, un caso particular de la geometría elíptica.

Actualmente a nivel latinoamericano, las GNE han tenido como alcance su incorporación en algunos currículos escolares de educación preuniversitaria, principalmente en Brasil, como: Las Directrices Curriculares del Estado de Paraná (2008), Currículo Básico del Ayuntamiento Municipal de Curitiba (1988), y la Propuesta Curricular para las Matemáticas de la Enseñanza Fundamental de Sãu Paulo (1991); además se incorporaron en algunos currículos de universidades formadoras de profesores de matemáticas como la Universidad de Buenos Aires, Argentina y la Universidad Estatal a Distancia (UNED) de Costa Rica. Otras universidades las han incorporado en actividades académicas extra-clases, por ejemplo: charlas sobre estos temas en el Club de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile; y seminarios del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México, México; entre otros. Dicha incorporación, ha sido influenciada por lineamientos curriculares generales, como el Currículo y los Estándares de Evaluación para las Matemáticas Escolares, por el NCTM (1989):

> College-intending students also should gain an appreciation of Euclidean geometry as one of many axiomatic systems. This goal may be achieved by directing students to investigate properties of other geometries to see how the basic axioms and definitions lead to be quite different – and often contradictory – results. For example, great circles, which play the role of lines in spherical geometry, always meet. Thus, in spherical geometry, instead of having exactly one line parallel to a given line through a point not on the line, there are no such lines. NCTM (1989, citado por Guven y Karatas, 2009, p. 331)

Donde se muestra a la geometría esférica como una fuente de significación de la GE. Por su parte los Lineamientos Curriculares de Matemáticas en Colombia, MEN (1998), nos hablan de las necesidades de desarrollar el razonamiento espacial en relación con el contexto, al igual que los Parámetros Curriculares Nacionales - PCN, (Brasil en 1998). Esta incorporación de forma general se ha justificado, por la necesidad de atender fenómenos naturales, mediante herramientas cognitivas en nuevas o combinadas disciplinas científicas. Como nos indican Bruce, Davis, Sinclair, MeGarvey, Hallowell, Drefs y Woolcott (2017) el razonamiento espacial —capacidad de reconocer y (mentalmente) manipular las propiedades espaciales de los objetos y sus relaciones— es un eje transversal en diversas disciplinas científicas y proporciona un tratamiento del contexto, el cual cada vez se vuelve más necesario, dado que, puede concebirse como un tratamiento molecular o astronómico, donde las GNE describen los fenómenos con mayor precisión. Desde la problemática anteriormente descrita, perfilamos un proyecto de investigación, buscando estudiar la construcción de significados de la línea y el ángulo al trabajar geometría sobre la superficie de una esfera, para ello, se realizó una revisión de la literatura referente a nuestro interés.

De la revisión de literatura

A través de las consideraciones histórico-epistemológicas, cognitivas y didácticas de las investigaciones en la disciplina sobre la línea recta, el ángulo y otras nociones geométricas trabajadas en el plano y en la esfera. Respecto a la línea recta, rescatamos (1) dos características de la línea recta potenciadas en la escuela, la infinitud y la densidad (Liñán, Montes, y Contreras, 2015), las cuales no necesariamente permiten la comprensión de la *rectitud*; (2) los significados de la línea recta: como la distancia más corta entre dos puntos, como simetría y como círculo de radio infinito, emergen a través del uso de la noción de línea en diferentes contextos geométricos (Henderson y Taimina, 2016); (3) existen dos características asociadas al uso de la línea recta, una noción perceptible y otra hermética; y (4) cuatro elementos fundamentales para su significación en la esfera: el lenguaje, las analogías, la imaginación y los movimientos físicos (Junius 2008).

Con relación al ángulo, además de sus diferentes definiciones, las categorías aristotélicas —ángulo como cantidad, relación y cualidad— y la clasificación según la cantidad de lados visibles, se reconoce al ángulo con propiedades estáticas y dinámicas, las cuales según Rotaeche y Montiel (2011) están asociadas a las definiciones y representaciones utilizadas como soporte en el manejo del concepto en la escuela. Además, al asumir que los estudiantes "reconocerán las nociones de ángulo en sectores de área (significado cualitativo-estático), en los giros (significado cualitativo-dinámico), en la porción de una circunferencia (significado cuantitativo-estático) y en la parte de vuelta (significado cuantitativo-dinámico)" (Rotaeche y Montiel, 2011, p. 205), se caracterizan significados asociados a dicha noción.

Desde lo cognitivo retomamos, el modelo para el desarrollo de la noción de ángulo que proponen Mitchelmore y White (2000), que intenta relacionar los conceptos angulares de los estudiantes con sus experiencias angulares físicas, donde reconocen progresivamente similitudes entre diferentes experiencias angulares, seguidamente las clasifican en situaciones específicas —primera etapa, ángulo situado—, luego en contextos generales —ángulos contextuales—, con el fin de llegar a la abstracción del concepto e incluso definirlo —ángulo abstracto—. Además, tomamos en cuenta la complejidad de trabajar con el ángulo por su naturaleza multifacética, por ello, la importancia de relacionar diferentes situaciones y contextos angulares. Si bien identificamos la falta de investigación didáctica relativa al ángulo esférico, encontramos e integramos diversas exploraciones e innovaciones didácticas centradas en la enseñanza y el aprendizaje de nociones geométricas en la superficie de la esfera; de las cuales resaltamos: situaciones problemas en una secuencia didáctica, el uso de materiales concretos y recursos digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y la obtención de una visión general de la centración de las investigaciones recientes en la disciplina sobre dicha temática.

Apreciamos el devenir histórico de la noción de línea y ángulo tanto en el plano como en la esfera; al igual que el origen, desarrollo y estructura de las GNE, principalmente la geometría esférica. Esto enmarca, contextualiza, argumenta y justifica algunas problemáticas planteadas alrededor de dichas nociones. Donde reconocemos la complejidad al caracterizar nociones como la línea y el ángulo, y la polémica en la que se envuelve el surgimiento de las GNE, mediante la negación del quinto postulado de Euclides. Dado que Bernhard Riemann (1826-1866) niega el V postulado de Euclides como: dada una recta r y un punto P no perteneciente a ella, no existen rectas que pasen por P y sean paralelas a la recta r, permite la emergencia de una geometría donde no existen paralelas, pues todas las líneas rectas se intersecan. Mientras que en la GE solo hay una recta entre dos puntos, en la geometría de Riemann puede haber más de una, incluso infinitas, así que resulta posible que dos líneas rectas encierren un área.

Lo anterior muestra una necesidad de hacer investigación en el ámbito antes descrito, teniendo esto en cuenta, perfilamos nuestro proyecto de investigación en torno al proceso de significación progresiva de la línea, la línea recta y el ángulo en la geometría esférica, un caso particular de la geometría elíptica, una de las GNE, es decir, su objeto de estudio es el proceso de significación progresiva de la línea recta y del ángulo en la esfera, de estudiantes de bachillerato —entre 16 y 18 años—, por medio de una exploración didáctica del trabajo geométrico en la superficie de la esfera de tipo laboratorio de matemática. Tiene como pregunta de investigación, ¿qué significados de la línea y el ángulo se construyen a partir de su uso en la esfera?, y como objetivo general, caracterizar un proceso de significación progresiva relativo a la línea y al ángulo en la esfera, mediante una exploración didáctica.

De las consideraciones teóricas

Nuestro proyecto está sustentado teóricamente en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), en tanto que "La socioepistemología propone como base de significación no solo a la matemática misma, sino a todo aquello que rodea y en lo que se involucra el humano al hacer matemática" (Buendía, 2012, p.14), por lo que, las herramientas, los argumentos emergentes, las estrategias y los contextos de uso, durante la interacción con la noción matemática son considerados fundamentales para su significación. Dicha teoría desde su construcción busca la democratización del aprendizaje a través de la teorización de formas de pensamiento matemático, a causa de ello, indaga como objeto de estudio en la explicación de la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, siendo una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional (Cantoral, 2013), estima a la matemática como producción humana situada cultural, histórica e institucionalmente, por lo que el saber mismo puede ser popular, técnico y culto, y en conjunto formar la sabiduría humana. Características que la hacen ser una herramienta eficaz para conocer, caracterizar, analizar e interpretar los fenómenos didácticos relativos a la matemática.

La TSME, está cimentada en cuatro principios: la *racionalidad contextualizada*, desde la cual, se entiende a la relación del sujeto con el saber en dependencia del contexto, es decir, desde el momento y el lugar en la que se encuentre el sujeto; el *relativismo epistemológico*, ya que, al tener en cuenta todo tipo de saber desde el contexto donde emerge, se reconoce que su validez la adquiere al seno del grupo que lo construye; la *significación progresiva*, es considerada el mecanismo de base en el desarrollo del pensamiento matemático y se da, cuando un primer significado asociado a una noción matemática se pone en juego en una nueva situación, este se usa de forma diferente y con ello, se resignifica, generando nuevas caracterizaciones, argumentos y conocimientos, los cuales, son la base para una nueva fase de significación; y la *normatividad de la práctica social*, la cual regula cualquier desarrollo del colectivo, como la construcción del conocimiento, considerando a la práctica social no la acción que realiza el individuo sino lo que le hace hacerla, es decir, lo que norma lo que hacemos.

Cuando el conocimiento matemático se pone en uso, se constituye el saber matemático, es decir, ese conocimiento adquiere un sentido mediante su uso y se convierte en un saber; por lo tanto, las formas en que puede encontrarse o las dimensiones que componen sistemáticamente dicho saber requiere un apartado importante. Dentro de la socioepistemología se contemplan cuatro dimensiones del saber: la dimensión didáctica, la dimensión cognitiva, la dimensión epistemológica y la dimensión social, que interactúa entre sí sin desligarse una de la otra. A la TSME le interesa el conjunto de prácticas asociadas a una noción o nociones matemáticas, las cuales van a surgir desde la interacción del sujeto con el objeto, la organización de las actividades mediadas y situadas socioculturalmente, la intencionalidad de la práctica socialmente compartida, la regulación de la práctica de referencia y finalmente todas éstas normadas por la práctica social; con eso nos referimos al interés por la evolución de prácticas que explica la construcción social del conocimiento matemático, y constituyen el modelo de anidación de prácticas, herramienta que permitirá la explicación de la construcción de significados asociados a la línea y el ángulo en la esfera.
Al tratar con tareas geométricas en la superficie de la esfera nos interesa caracterizar, las prácticas asociadas al desarrollo del trabajo geométrico —manera de hacer/estudiar geometría—, para ello, usaremos el modelo de trabajo geométrico que propone Rubio-Pizzorno (2018), el cual surge de un estudio sistémico de la naturaleza de la geometría desde diferentes esferas de conocimiento y sus convergencias. Se enmarca en un esquema que tiene a los objetos teóricos y concretos como polos, distingue como mecanismos para transitar de un polo al otro, la práctica geométrica de *abstracción* y la práctica geométrica de *representación*. La primera se compone por la intuición empírica —permite percibir las propiedades gráfico-espaciales de los diagramas— y la intuición sofisticada

—permite abstraer las propiedades teóricas que los diagramas están representando, mediante la interpretación de diagramas, el reconocimiento e identificación de invariantes—; por su parte la práctica geométrica de representación genera dos tipos de diagramas, *el bosquejo* —no refleja las propiedades geométricas— y *la construcción* —refleja las propiedades geométricas y pueden ser construcciones generales y particulares— (ver figura 1).

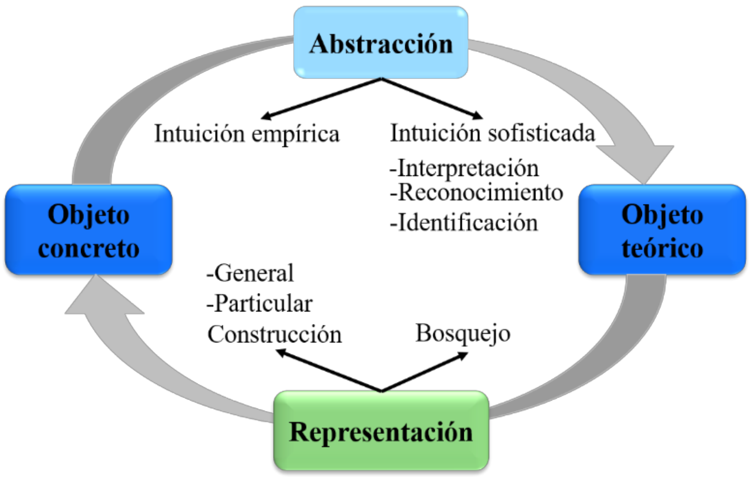


Figura 1. Modelo de trabajo geométrico (Rubio-Pizzorno, 2018, p. 102)

De las consideraciones metodológicas

Es un estudio cualitativo-interpretativo en el área de matemática educativa. Dicha investigación la enmarcamos metodológicamente basados en el esquema metodológico para la investigación socioepistemológica que proponen Montiel y Buendía (2012), entre el primero y el segundo nodo de su esquema, la acción relacionante —*análisis socioepistemológico*—, trastocando el tercer nodo —con algunas adaptaciones—. Entre las tres dimensiones del análisis socioepistemológico, nuestro proyecto está enmarcado en la resignificación del saber en escenarios diversos. Comenzamos con la descripción y definición de una problemática, para pasar del primero al segundo nodo del esquema, se desarrolló el análisis socioepistemológico, para lo cual, primero se realizó una revisión de la literatura desde las consideraciones histórico-epistemológicas, cognitivas y didácticas de la línea, el ángulo y otras nociones de geometría tanto en el plano como en la esfera.

Por medio de las consideraciones teóricas, basadas en la TSME, se estructuraron y plantearon las estimaciones del método: donde para la recolección de datos se constituyó una exploración didáctica de tipo laboratorio de matemáticas, fundamentada desde la revisión de la literatura y desde las consideraciones teóricas; la organización de los datos, desde los procesos planeados en la intervención didáctica y las fuentes de los datos —primarias y secundarias—; y para el análisis, se consideró el modelo de trabajo geométrico, propuesto por Rubio-Pizzorno (2018) y el modelo de anidación de prácticas, desde la TSME. De la organización y análisis de los datos llegamos al segundo nodo del esquema —epistemología de prácticas—, como un producto del análisis. De igual forma, nuestro proyecto busca una etapa más, un análisis retrospectivo del laboratorio de matemáticas, para proponer un rediseño de este, fundamentado en la epistemología de prácticas propuesta, por lo que la evolución pragmática jugará un papel importante para repensar y modificar las situaciones problema, logrando un acercamiento al tercer nodo del esquema metodológico —situación problema— (ver figura 2).

Figura 2. Esquema metodológico de la investigación. Elaboración propia

Constituimos un método, al que llamamos *Exploración Didáctica*, con el que recolectamos, organizamos y analizaremos los datos. Éste emerge de la naturaleza del contenido matemático tratado y del propósito, la estructura y la fundamentación del proyecto de investigación. El diseño que sirve de instrumento para la intervención, donde estudiaremos la significación progresiva de la línea recta y el ángulo en la esfera se fundamenta en la revisión de la literatura —que incluyen algunas aportaciones relativas a significados y usos de la línea, la línea recta y el ángulo— y en los constructos de la TSME, y no estrictamente hablando en una epistemología de prácticas —por ejemplo, producto de una historización—. De ahí el estatus de exploración.

La exploración didáctica como método de investigación está enmarcada en las tres grandes categorías antes mencionadas —recolección, organización y análisis de los datos—, para lograr estos tres procesos requerimos pasar por 5 pasos —planeación del instrumento de investigación (una experiencia didáctica de tipo laboratorio de matemáticas), protocolo previo a la puesta en escena, puesta en escena, organización de los datos y análisis de los datos—, buscando cumplir un ciclo de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) —preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo— (ver figura 3).

Figura 3. Exploración didáctica como método. Elaboración propia

Desde un plano didáctico llamamos a la experiencia *laboratorio de matemáticas*, considerando que metodológicamente un espacio pedagógico con dicha acepción permitirá lograr el propósito de nuestro proyecto de investigación; dado esto retomamos y adaptamos la caracterización de laboratorio de matemáticas que proponen Pérez, Gil, Navarro, Ruiz, Gil, Sepulcre y Gil (2016), los cuales indican que un laboratorio de matemáticas se fundamenta en tres categorías: el aprendizaje colaborativo, situación problema y el aprendizaje significativo. Dados nuestros referentes teóricos, consideramos a las situaciones problemas desde lo contextual y a la última categoría como el proceso de significación mediante el uso.

La población participante en la experiencia didáctica, fueron 6 estudiantes de último año (entre 16 y 18 años) de bachillerato de la Escuela Preparatoria Oficial Anexa a la Normal Núm. 3 de Nezahualcóyotl, Estado de México, México. De ellos 5 mujeres y 1 hombre. La obtención de los datos se desarrolló en 4 sesiones de 2 horas y media cada una, en las instalaciones de la institución educativa. Y la organización de los datos se realizó desde los cuatros procesos en los que se estructuró el diseño —concebir a la esfera como una superfie en la que podemos hacer geometría, caracterización de la línea recta esférica, caracterización del ángulo esférico y la caracterización de polígonos esféricos—, además de una clasificación interna, según la fuente de datos.

Reflexiones preliminares

Este proyecto de investigación está en desarrollo y hasta el momento identificamos la manera en cómo los diferentes significados asociados a la línea recta y el ángulo, descritos en la revisión de la literatura, se manifestaron en la aplicación de nuestro laboratorio de matemáticas. Al caracterizar la línea recta y el ángulo en la superficie de la esfera, surgió la necesidad de afirmar lo que "conocían" en un escenario usual —el plano—, con el propósito de trasferir ese conocimiento al trabajo geométrico en la esfera, es decir, los estudiantes pretendían caracterizar dichas

nociones desde sus concepciones en el plano. Las situaciones problemas, el uso de materia manipulable, exploraciones y experimentos vivenciales, generaron una interacción del sujeto con el objeto, que permitió reflexión individual y de grupo alrededor de las características asociadas a la noción de línea, línea recta y ángulo, tanto en la esfera como en el plano, generando argumentos y conclusiones desde lo contextual, que permitieron dar sentido a las situaciones presentadas. Además, el papel que jugaron las nociones geográficas, en dicha caracterización resultó primordial, ya que, al relacionarlas con nociones de geometría esférica, les dieron razón de ser a dichas nociones.
En la fase de familiarización con los datos, percibimos superficialmente que al interpretar los diagramas presentados —ya sean bosquejos o construcciones—, los estudiantes lograron la interpretación de signos en los diagramas, el reconocimiento e identificación de invariantes en dichos diagramas, es decir propiedades o características asociadas a las nociones; además, al pensar en dichas características para lograr una representación, fue evidente cómo pusieron en juego concepciones asociadas a las nociones en el plano. Será la fase de análisis a profundidad la que nos permita caracterizar el proceso completo de resignificación de todas las nociones involucradas.

En general, resultó pertinente el laboratorio de matemática como espacio didáctico-pedagógico, para la construcción de conocimiento matemático que, basados en un análisis exhaustivo y detallado usando nuestras herramientas teóricas, pretendemos explicar puntualmente. Cabe indicar que las investigaciones de esta naturaleza, en tanto contenido matemático tratado y decisiones metodológicas, focalizan explicaciones de fenómenos didácticos matemáticos, que son y exigen ser, fuertemente explicados a nivel latinoamericano.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1968). *Historia de la matemática*. Nueva York, United States of America: Wiley

Bruce, C., Davis, B., Sinclair, N., MeGarvey, L., Hallowell, D., Drefs, M., y Woolcott, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using “spatial reasoning” as a window into the importance of networked educational research. *Educ Stud Math*, 95, 143-161. doi:10.1007/s10649-016-9743-2

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. *Educación Matemática, 24*(2), 09-35.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Guven, B., y Baki, A. (2010). Characterizing student mathematics teachers´levels of understanding in spherical geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(8), 991-1013. doi:10.1080/0020739X.2010.500692

Guven, B., y Karatas, I. (2009). Students discovering spherical geometry using dynamic geometry sofware. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*(3), 331-340. doi:10.1080/00207390802641650

Henderson, D., y Taimina, D. (2016). Experiencing Meanings in Geometry. En N. Sinclair, Pimm, D., & Higginson, W., *Mathematics and the Aesthetic* (pág. 58-83). New York, United States of America: Springer. doi:10.1007/978-0-387-38145-9_4

Junius, P. (2008). A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(8), 987-1002. doi:10.1080/00207390802136529

Liñán, M., Montes, M., y Contreras, L. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XIX*, 335-342.

Mitchelmore, M., y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. *Metodología en matemática educativa: visiones y reflexiones*, 61-88.

Pérez, J., Gil, S., Navarro, J., Ruiz, M., Gil, A., Sepulcre, J., y Gil, M. (2016). Laboratorio de Matemáticas. *Alicante: Universidad de Alicante*, 1411-1425.

Rotaeche, A., y Montiel, G. (2011). Desarrollo histórico como mirador de conocimientos para la enseñanza del concepto de ángulo. En G. Buendía, *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (págs. 191-218). Ciudad de México, México: Lectorum.

Rubio-Pizzorno, S. (2018). Integración digital a la práctica del docente de geometría (Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1

Sinclair, N., Bussi, M., Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., y Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM mathematics Education, 48*, 691-719. doi:10.1007/s11858-016-0796-6

DIÁLOGO COMO MEDIAÇÃO NO ESPAÇO DA ZDP

DIALOGUE AS MEDIATION IN THE SPACE OF THE ZPD

Maurílio Antônio Valentim, Maria Helena Palma de Oliveira
Prefeitura de Juiz de Fora, Instituto Langage\UNIVESP (Brasil)
valenttinos@yahoo.com.br, mhelenapalma@gmail.com

Resumo
O objetivo específico deste trabalho é apresentar uma análise sobre o processo cognitivo de alunos do 6º do Ensino Fundamental, 12 e 13 anos de idade, na resolução de atividades de Matemática. O material de análise foi recolhido do diálogo originado da interação entre 3 alunos. O método seguiu os parâmetros da pesquisa qualitativa. As categorias de análise tomaram como referência os 4 níveis de ajuda próprios da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vigotski, descritas por Beatón. O estudo destaca a importância da capacidade do professor na identificação do nível de desenvolvimento do aluno em um determinado conteúdo e a possibilidade de trabalho exitoso na ZDP que permite projetar a intervenção na direção do nível de desenvolvimento potencial a ser alcançado pelo aluno por meio da ajuda de um companheiro mais capaz.

Palavras-chave: diálogo; mediação; aprendizagem matemática

Abstract
The specific objective of this work is to present an analysis on the cognitive process of 6th grade students, 12 and 13 years old, in solving Mathematics activities. The analysis material was collected from the dialogue originated from the interaction between 3 students. The method followed the parameters of qualitative research. The categories of analysis took as reference the 4 levels of aid specific to the Zone of Proximal Development (ZDP) of Vygotsky, described by Beatón. The study highlights the importance of the teacher's ability to identify the student's level of development in a given content and the possibility of successful work in the ZPD that allows designing the intervention towards the level of potential development to be achieved by the student through the help of a more capable fellow.

Key words: dialogue; mediation; mathematical learning

Introdução

O trabalho apresenta uma análise sobre o processo cognitivo na resolução de atividades de Matemática baseada nos 4 níveis de ajuda na Zona de Desenvolvimento Proximal, apresentados por Beatón (2003) que tomou como referência estudos de Lev Vigotski. Foram analisadas narrativas que constituíram diálogos de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (EF), em sala de aula de uma escola da rede municipal de Juiz de Fora, MG (Valentim, 2015).

Essa perspectiva destaca a importância do trabalho docente. Em uma sala de aula, o professor é aquele que detêm mais experiência, é o que, no processo pedagógico, mediará, intervindo com orientações, sugestões, demonstrações para os alunos, na relação do aluno com o conhecimento, procurando criar ZDP e intervindo nos avanços que não ocorreriam espontaneamente. Deve atuar como um elemento de ajuda, trabalhando junto aos alunos em uma construção (com)partilhada do conhecimento em que o processo é fator primordial na consolidação daquilo que já era embrionário, rudimentar.

Beatón (2005) afirma que a criatividade e a iniciativa do professor são fundamentais para respeitar as diferenças entre os alunos e concretizar aprendizagens. As iniciativas do professor, citadas acima, não devem se restringir àquelas em que ele seja o mais capaz na interação, deve propiciar fortemente a interação entre os alunos.

O principal conceito que fundamenta este estudo é o de Zona de Desenvolvimento Proximal de Lev Vigotski, por isso é importante enfatizar alguns aspectos que alicerçam esse conceito, bem como recuperar sinteticamente as bases históricas de sua construção, conforme o pensamento do cientista russo, na explicação da relação entre desenvolvimento cógnito e aprendizagem.

No período em que Vigotski realizou seus estudos, três correntes teóricos na explicação da relação entre aprendizado e desenvolvimento tinham preferência entre os psicólogos. A primeira considerava que a aprendizagem devia seguir o desenvolvimento dos alunos, a segunda considerava que aprendizagem e desenvolvimento são processos simultâneos e a terceira que julgava que as duas primeiras teorias tinham razões.

De acordo com Vygotsky (2010), a primeira corrente teórica baseia-se no pressuposto de que os processos de desenvolvimento da criança são independentes do aprendizado, ou seja, o aprendizado não se relaciona com o processo de desenvolvimento. O desenvolvimento é o motor da aprendizagem, no entanto, o aprendizado não oferece nenhum impulso para o desenvolvimento. Os teóricos dessa corrente afirmam que os ciclos de desenvolvimento precedem os de aprendizado, ou seja, a maturação precede o aprendizado, por isso a instrução deve seguir o crescimento mental. O desenvolvimento é o substrato para o aprendizado, uma pré-condição para que ocorra o segundo. Essa corrente tem como principais representantes Jean Piaget e Alfred Binet.

Piaget, ao adotar essa posição teórica, buscou estudar as tendências do pensamento das crianças sem que a influência de experiências anteriores se mostrasse presentes nas respostas dos sujeitos. Para isso, ele utilizava perguntas sobre assuntos que estavam além do conhecimento das crianças.

Já a segunda corrente demanda que a aprendizagem é desenvolvimento. Segundo os teóricos desta corrente, os dois processos ocorrem simultaneamente, coincidem em todos os pontos. Esse conceito se tornou a base para a teoria que considera o desenvolvimento como domínio de reflexos condicionados. Essa corrente acaba indo ao encontro das teorias de Piaget ao considerar que o desenvolvimento é concebido com a elaboração e substituição de respostas inatas.

A terceira corrente teórica considera que o aprendizado e o desenvolvimento se combinam. Três aspectos são novos nessa corrente teórica: primeiro é a combinação citada acima; segundo é a ideia de que eles são interagentes e mutuamente dependentes e terceiro é o papel atribuído ao aprendizado no desenvolvimento da criança. Para estes teóricos, como Koffka e os gestaltistas, a influência do aprendizado nunca é específica e o desenvolvimento é sempre um conjunto maior que o aprendizado, eles não coincidem. Nessa concepção, por exemplo, o desenvolvimento de uma determinada capacidade mental por meio de um assunto específico, promove o desenvolvimento global dessa capacidade, mesmo para assuntos diferentes. Entende-se que as capacidades são redes gerais e não conjuntos específicos.

Vigotski não concordava com nenhuma dessas três correntes teóricas, pois elas não forneciam subsídios necessários na explicação dos processos psicológicos humanos. Para ele, o desenvolvimento das bases cognitivas para o aprendizado não precede o aprendizado, ao contrário, ele, o aprendizado, é que precede o desenvolvimento. Vigotski então elabora uma nova abordagem ao assunto com o que chamou de análise de unidades, para ele, "um produto de análise que, ao contrário dos elementos, conserva todas as propriedades básicas do todo, não podendo ser dividido sem que as perca". (Vygotsky, 2010, p.15).

Ao compreender a relação desenvolvimento/aprendizagem, ele cria, de forma original, o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal, a ZDP, que é um percurso de caráter interativo e social, uma região de transição entre o que Vigotski chama de "nível de desenvolvimento real", representado pelos conhecimentos já apropriados e usados de modo independente e o "nível de desenvolvimento potencial", que é o ponto delimitado por essas capacidades. Vigotski define ZDP como

> [...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais ativos. (Vygotsky, 2010, p. 97)

O nível de desenvolvimento potencial é um conjunto de atividades que a criança não consegue realizar sozinha, mas que, com a ajuda de alguém que lhe dê algumas orientações adequadas, ela consegue resolver. Para ele, o nível de desenvolvimento potencial é muito mais indicativo do desenvolvimento da criança que o nível de desenvolvimento real, pois este último refere-se a ciclos de desenvolvimento já completados, fatos passados, enquanto o nível de desenvolvimento potencial indica o possível desenvolvimento, ou seja, refere-se ao futuro do sujeito.

Destaca-se, assim, a necessidade de se propor situações em que o aluno possa realizar a atividade com ajuda de outro mais experiente indo além do que seria capaz de fazer individualmente - o que evidencia a importância do trabalho em parceria com outros sujeitos mais competentes para provocar reestruturações e as modificações nos esquemas de conhecimento que possibilitará, aos poucos, uma atuação mais autônoma pelo sujeito aprendiz.

Para Vigotski, "outros" são todos aqueles que podem auxiliar no desenvolvimento de uma criança: professores, colegas mais experientes e adultos. Beatón (2003) considera "outros", também como tudo que auxilie na interação entre a criança e o adulto, como TV, vídeos, computador e o próprio sujeito após sua formação.

Essa interação, entre alunos, poderá ser evidente em salas de aulas heterogêneas, porém a separação de alunos em salas de aulas homogêneas, conforme nível de aprendizagem, é tema bastante polêmico.

De acordo com King (1997), as turmas de escolas públicas estão cada vez maiores e, assim, as diversidades se tornam mais evidentes. A interação entre os alunos proporcionada pelo professor torna-se uma ferramenta importante no processo de aprendizagem, um exemplo é a aprendizagem mediada pelos pares e considerada um meio natural de aprendizagem.

Nesse estudo, pautado pela abordagem sociocultural, pretende-se levantar as possibilidades que a teoria de Vigotski, mais especificamente, o trabalho no espaço da ZDP, traz para uma educação com a qualidade necessária para que se atinja o objetivo da aprendizagem, levando em conta as diversidades dos alunos. Nesse sentido, cabe um aprofundamento no estudo da ZDP com o enfoque nos níveis de ajuda. Esse entendimento mais aprofundado contribui para o trabalho em sala de aula na medida em que se considera que cada aluno está em uma zona de desenvolvimento que pode não ser a mesma que a de seus colegas e que a interação entre eles, com a ajuda do professor, auxilia na aprendizagem.

Zona de desenvolvimento proximal e níveis de ajuda

Mas o que provoca essa diferença entre as zonas de desenvolvimento? Beatón (2005, p. 235) cita que as causas são variáveis, que podem depender "do sujeito, da interação, do desenvolvimento anterior, da qualidade da ajuda, do conhecimento empírico e de muitas outras coisas".

Na busca de conhecer em que nível de desenvolvimento o aluno se encontra, é possível lançar mão da narrativa do aluno, que nessa perspectiva se torna um instrumento valioso (Valentim, 2015).

Associando o pensamento narrativo aos níveis de ajuda propostos por Vigotski e considerando sua afirmação de que quando "propomos à criança que resolva, com uma ou outra forma de colaboração, as tarefas que excedam os limites de sua idade mental" (Vygotsky, 1996, p. 269), é possível analisar detalhes que envolvem uma ZDP.

Os processos de desenvolvimento de funções psicológicas superiores são mediados pelas pessoas. Nesse estudo, destaca-se a mediação de um aluno mais "capaz" em relação com seus colegas.

O avanço propiciado pela aprendizagem ocorre, de acordo com a perspectiva de Vigotski, quando um aluno e um colega mais capaz ou experiente interagem para realizar determinada tarefa. A interação entre os alunos é definida por níveis de ajuda (Beatón, 2005) que caracterizam os graus de independência entre eles.

Outro fator importante é apontado por Beatón (2005) sobre a ZDP, os níveis de ajuda. Por meio de uma representação gráfica Beatón demonstra que entre o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial, próprios da ZDP, acontecem zonas de trabalho mais independentes originadas com a ajuda de "outros". Assim, a ajuda leva o sujeito a ser mais independente, colocando-o em um novo patamar de desenvolvimento real. O autor ressalta que essas zonas mais próximas do desenvolvimento real podem ser mais vastas ou mais estreitas (Beatón, 2005, p. 235).

Beatón (2005) retorna a proposta de Vigotski de 4 níveis de ajuda dentro do processo de aprendizagem na ZDP relacionando-os aos níveis à independência do aluno. Essa relação é inversamente proporcional, pois, dependendo de seu nível, sua independência será maior ou menor. O aluno que necessite da ajuda de nível 1 pode ser considerado mais independente e o aluno que necessita de ajuda em nível 4 é aquele menos independente.

No nível 1, o professor, ou o colega mais capaz, somente direciona o aluno para o objetivo da atividade. Nesse nível, os alunos elaboram estratégias para encontrar a solução, utilizando seus possíveis conhecimentos específicos ou a junção de vários conhecimentos. Nesse nível o aluno constrói seus instrumentos de resoluções.

No nível 2, é necessária a apresentação de uma atividade semelhante à aquela ou a outras já realizadas por ele para auxiliá-lo na aprendizagem. Assim, ao visualizar ou lembrar-se dos procedimentos já utilizados, ele é capaz de continuar a resolução da atividade sozinho.

No nível 3, a ação do agente mais capaz se torna mais contundente. Aluno e professor, ou o mais capaz na tarefa, passam a resolver a atividade, inicialmente juntos, deixando o aluno continuar.

No nível 4, não há como o aluno continuar sem uma ajuda e o mais capaz acaba por ter de terminar a atividade. Nesse nível, é total a dependência do aluno em relação àquele que está ajudando.

Vygotsky atribui à linguagem um papel de grande importância no desenvolvimento cognitivo do sujeito, uma vez que para esse autor, o crescimento intelectual da criança depende dos instrumentos linguísticos, por meio de suas propriedades formais e discursivas, do pensamento e da experiência sociocultural.

Para Vygotsky (1979), os produtos culturais como a linguagem e outros sistemas simbólicos são os mediadores das representações da realidade. Nossos filtros interpretativos nos permitem a apropriação da realidade e a ação sobre ela, por meio de modelos que antecipam o comportamento dos outros. Portanto, o desenvolvimento do pensamento verbal depende de fatores externos, pelo fato de o mesmo não se constituir um comportamento natural e inato. No tocante à representação do pensamento em forma de discurso exterior, Vygotsky afirma que:

> A comunicação por escrito repousa sobre o significado formal das palavras e, para transmitir a mesma ideia, exige uma quantidade de palavras bem maior do que a comunicação oral. [...] – Como, precisamente, um pensamento não tem correspondência imediata em palavras, a transição entre o pensamento e as palavras passa pelo significado. (Vygotsky, 1979, p.196)

Aspectos metodológicos

Este trabalho propõe-se a analisar o processo cognitivo na resolução de atividades de Matemática baseada nos 4 níveis de ajuda descritos por Beatón (2003) que tomou como base estudos de Vigotski sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal. O material de estudo são as narrativas que constituem diálogos de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental (EF), em sala de aula de uma escola da rede municipal de Juiz de Fora, MG (Valentim, 2015).

O método seguiu os parâmetros da pesquisa qualitativa. O material de análise foi recolhido dos diálogos originados da interação entre 3 alunos com idades de 12 e 13 anos. Os materiais produzidos por eles foram recolhidos para análise e todo o processo de aplicação das atividades foi gravado e filmado.

Uma das grandes vantagens da coleta utilizada é permitir um registro fiel das informações, que não seria possível somente com registros escritos pelo pesquisador. Porém, é preciso ficar atento ao fato de que alguns dos instrumentos de coleta descritos, no caso, a gravação e filmagem, podem provocar uma inibição dos participantes. É fato também que somente os questionários e entrevistas escritas não permitem coletar todas as informações sobre a construção de conhecimento dos alunos, como descreve Meira apud Silva (2003) sobre a importância do vídeo que pode:

> [...] capturar múltiplas pistas visuais e auditivas que vão de expressões faciais a diagramas no quadro negro, e do aspecto geral de uma atividade a diálogo entre professor e alunos. O vídeo é menos sujeito ao viés do observador que anotações baseadas em observação, simplesmente porque ele registra informações em maior densidade. (Silva, 2003, p.55)

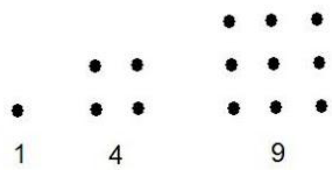
Nessa perspectiva, as informações foram predominantemente descritivas e obtidas no contato direto com os participantes. Em decorrência, a ênfase recaiu mais sobre o processo do que sobre o produto, conforme explicam Lüdke e André (1986). Além disso, essas formas de registro permitem traduzir com maior qualidade a trajetória da produção dos alunos.

Nesse estudo, especificamente, destacam-se os diálogos produzidos pelos alunos nos processos de resolução de atividades de introdução à álgebra, transcritos para a análise. Quais sejam:

Quadro 1 - Atividade 1

1) Observe o desenho.

1º 2º 3º 4º



?

Quantas bolinhas serão necessárias para construir uma figura semelhante a um quadrado no quarto desenho?

É possível descobrir a quantidade de bolinha do décimo quinto desenho? Como?
Existe outra maneira? Como? Qual é a maneira mais fácil? Justifique.

Fonte: Arquivo pessoal

Diálogo e aprendizagem na ZDP: os níveis de ajuda

A análise dos diálogos dos 3 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental teve como categorias de análise os 4 níveis de ajuda descritos por Beatón (2005).

A consideração de um aluno como mais capaz não pode ser estanque, ou seja, o diálogo na aprendizagem matemática pode provocar posições intercambiáveis, de modo que cada uma contribui para as narrativas que vão sendo estruturadas coletivamente na solução da atividade, ou seja, o papel do mais capaz é muitas vezes intercambiável, principalmente se considerarmos que os participantes estão em níveis de conhecimento retrospectivo muito próximos. Como podemos destacar no diálogo a seguir.

Quadro 2. Processo de resolução da atividade de sequência -1

R: *Igual eu tou te falando, 5 vezes 5 forma 25, depois 36.*
F: *É. Mas não precisa fazer não. É só escrever.*
J: *É só escrever.*
R: *Multiplicando todos. Multiplicando todos pelo mesmo número.*
F: *Põe assim. Põe assim. Multiplicando 5 vezes 5, 6 vezes 6, 7 vezes 7, 8 vezes 8, 9 vezes 9.*
J: *Não é mais fácil colocar multiplicando todos?*
F: *Não J, tem de especificar.*
J: *Então deixa eu colocar, 4 vezes 4.*

Fonte: Arquivo pessoal

Como é possível observar no diálogo transcrito, em cada momento é um que assume o papel de quem "ensina", do mais capaz. No trabalho em grupo, o pensamento de um é complementado com o pensamento do colega, como se fosse um único cérebro trabalhando na tarefa.

Essa realidade traz desafios para a análise dos diálogos, isso porque o diálogo expressa a comunhão em tempo real, em que as ajudas se sucedem em alternância com o mais capaz. Quando, no contexto do cotidiano de sala de aula, temos, prioritariamente, o professor agindo como o mais capaz e mediando esse processo, a identificação dos níveis de ajuda se torna mais explícita na medida em que o papel do mais capaz está posto e é fixo.

Para Vygotsky, o que num momento é considerado nível de desenvolvimento potencial de um aluno, por meio da aprendizagem pode se transformar em nível de desenvolvimento real. O desenvolvimento cognitivo é um processo vivo de evolução e revolução. Logo, podemos deduzir que um aluno pode transpor os níveis de ajuda - do nível 4 para o nível 1, por exemplo, conforme analisa Beatón (2003), do mais dependente para o menos dependente.

O nível 1 ocorre quando só a explicitação do professor é suficiente para que o aluno desenvolva a resolução da atividade. Em nossa investigação, o pesquisador procurou intervir o mínimo possível, deixando a cargo do grupo a interpretação da atividade. Neste caso, um aluno, muitas vezes, assumiu o papel de professor dentro do grupo, ou, do mais capaz, isso fica evidente no diálogo transcrito no Quadro 2, em que N avança do não entendimento da tarefa e da dependência da orientação do professor (P) para a resposta correta em um salto qualitativo bastante expressivo.

Quadro 3. Processo de resolução da atividade de sequência -2

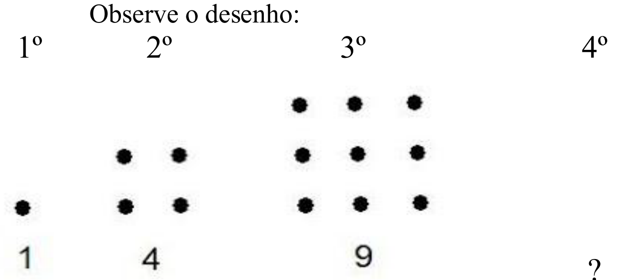
N: E aí gente? Eu não entendi! *Elas olham entre si e olham para mim esperando uma explicação.* *N: A gente não entendeu, explica?* *P: Então vamos lá. No primeiro desenho, gastou uma bolinha, no segundo desenho, quatro bolinhas, no terceiro desenho nove bolinhas. Aí, está te perguntando quantas bolinhas iriam gastar no quarto desenho.* *N: No quarto quadrado? Peraí, pontinho... O quarto quadrado irá precisar... Quarto quadrado é este aqui, né, professor?* *P: Primeiro desenho, uma bolinha, segundo desenho forma esse quadrado com quatro bolinhas, terceiro desenho forma um quadrado com nove bolinhas.* *N: E o quarto?* *P: O quarto desenho vai formar um quadrado com quantas bolinhas?* *N: Nove.*

Fonte: Arquivo pessoal

O quarto desenho da atividade, referido por P no diálogo acima do Quadro 2, constituiu a próxima questão da atividade, para a qual era necessário indicar a quantidade de bolinhas para formar o próximo desenho.

Quadro 4. Atividade de sequência aplicada aos alunos

Observe o desenho:



Quantas bolinhas serão necessárias para construir a figura de um quadrado no quarto desenho?

Fonte: Arquivo pessoal

Nesse mesmo exemplo, podemos considerar o aluno mais capaz está no nível 2, em que, para a resolução da questão, utilizou a figura, observando os elementos da sequência.

P buscou sempre evitar a intervenção nos exercícios, mesmo assim, em vários momentos, os alunos solicitaram esclarecimento em alguns pontos na atividade. Uma suposta justificativa para essa dependência com relação ao professor pode ser a metodologia de trabalho empregada na fase I do E. F. que precisa favorecer mais a independência dos alunos em relação à orientação do professor.

O diálogo esteve presente em quase todo o momento da coleta. Se considerarmos os níveis de ajuda, de acordo com Beatón, eles estariam no nível 4. Porém, nos momentos das atividades em que perguntas instigavam a produção de uma narrativa dos alunos, houve uma reluta do mais capaz em auxiliar os colegas. Com isso, não houve muitas respostas diferentes.

■ Conclusão

As análises apresentadas nessa pesquisa, de acordo com o número de turmas e tipos de atividade, foram feitas com base nos diálogos elaborados pelos alunos na resolução das atividades.

Optamos por analisar todas as produções dos grupos de alunos, já que o objetivo principal da pesquisa era descrever e analisar as relações entre pensamento e linguagem que se estabelecem nos processos de aprendizagem, não levando em consideração as estratégias adotadas por eles, ou seja, o êxito ou não nas referidas atividades.

Chegamos à conclusão de que na aprendizagem propiciada pelo diálogo no espaço da ZDP, as posições entre os participantes foram de certa forma intercambiáveis. O mais capaz na tarefa, em um determinado momento, pôde ser surpreendido pelo colega que pouco antes não havia entendido e, de repente, dá um salto que acaba por levantar pontos que ainda não estavam tão claros para o que havia se colocado antes como o mais capaz como podemos observar no quadro 2.

Uma possibilidade de explicação pode ser o fato de que os participantes do grupo têm níveis de conhecimento retrospectivo muito próximos. Nesse sentido, a interação em tempo real permite processos evolutivos muito rápidos como se o pensamento fosse um só, completado continuamente por empréstimos do raciocínio do outro, em tempo real.

A pesquisa também mostrou a importância do Professor identificar em qual zona de desenvolvimento, baseado no esquema elaborado por Beatón, de níveis de ajuda, o aluno está. Para aqueles em que a participação nas aulas é ativa, não será difícil fazer essa identificação, porém nem sempre isso é possível. Cabe destacar que as práticas arraigadas na cultura da escola tradicional, criaram nos alunos, muitas vezes, comportamentos de não participação, de não colaboração, que podem levar a não resolver as atividades propostas, a não dialogar com o professor e até com os colegas sobre ela e até mesmo a apenas copiar de um colega sem se preocupar com os processos de raciocínio que a envolvem. Essas situações exigem do professor criatividade, planejamento e intervenção ajustada às necessidades que vão surgindo no decorrer da atividade de ensino.

Ressalta-se a essencialidade da produção de diálogos, por meio da interação entre professor e aluno e entre aluno e aluno. O diálogo materializa a identificação do nível de ajuda em que um aluno pode estar situado com relação a determinado conteúdo, permitindo ao professor fazer os ajustes necessários na ajuda que oferece e ainda fomentar processos de ajuda entre os pares do grupo.

Esse estudo valoriza práticas pedagógicas que deem ênfase à promoção de diálogos entre os alunos nos momentos de resolução de atividades matemáticas. Por isso, a insistência sobre a importância de provocar nos alunos o hábito do diálogo, que só será efetivado quando de fato o aluno tiver voz.

Referências

Beatón, G. A. (2003). El papel de los "otros" y sus características en el processo de potenciación del desarrolo humano. *Horizontes Educacionales***.** N. 8, pp. 81-87, Recuperado em 24 de abril, 2014, de < http://www.ubiobio.cl/revistahorizontes/>

Beatón, G. A. (2005). *La persona en el enfoque histórico cultural*. São Paulo: Linear B,. p. 159-254.

Lüdke, M. e André, M. E.D.A. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas.* São Paulo, EPU.

Silva, A. M. da. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática.* 256 f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. UNESP – Rio Claro, S.P.

Valentim, M. A. (2015). *Pensamento narrativo na aprendizagem matemática*: estudo com alunos de ensino fundamental na resolução de atividade de álgebra. Tese Doutorado em Educação Matemática, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Vygotsky, L. S. (1979). *Pensamento e Linguagem* – Lisboa, Portugal: Edições Antídoto.

Vygotsky, L. S. (2010). *A formação social da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes.

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO SOBRE LA CONFRONTACIÓN ENTRE LA GEOMETRÍA DE DESCARTES Y LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

SOCIOEPISTEMOLOGICAL STUDY ABOUT A CONFRONTATION BETWEEN THE DESCARTES' GEOMETRY AND ANALYTICAL GEOMETRY

Luis Miguel Paz-Corrales, Ricardo Cantoral
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
luismiguel.paz@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen

Este trabajo aborda el desarrollo de una investigación documental que consiste en la confrontación de La Geometría de Descartes y el discurso Matemático Escolar en el libro de texto Geometría Analítica de Lehmann. Nos cuestionamos cómo nace la geometría analítica y además cuál es el contexto sociocultural que le confirió su razón de ser. Asumimos como hipótesis de partida que el pensamiento variacional está inmerso en la construcción del conocimiento matemático, aún de aquél del tipo geométrico o geométrico analítico. Con los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional y apoyados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, a partir del análisis, se muestra cómo están presentes las ideas variacionales en ambas obras.

Palabras clave: discurso matemático escolar, pensamiento y lenguaje variacional, lugar geométrico

Abstract

This work deals with the development of a documentary research that consists of the confrontation of Descartes' Geometry and the Mathematical School discourse in Lehmann's textbook Analytical Geometry. We ask ourselves how analytical geometry is born and what is the sociocultural context that gave it its reason for being. We assume as a starting hypothesis that variational thinking is immersed in the construction of mathematical knowledge, even in the geometric or analytical geometric type. With the elements of Variational Thinking and Language, and supported by the Socioepistemological Theory of Mathematics Education, the analysis shows how variational ideas are present in both texts.

Key words: mathematical school discourse, variational thinking and language, locus

Introducción

En la conferencia *Socioepistemología de la variación y el cambio: una ruta didáctica*, el Dr. Ricardo Cantoral mencionó que, en los años 90, diversas investigaciones aceptaron que las matemáticas del cambio o el estudio del cambio sería identificado como uno de los hilos conductores que habrían de desarrollarse desde las experiencias informales de estudiantes, a través de experiencias escolares formales en los niveles de educación básica, secundaria y media (Cantoral, 2015). Asimismo, los resultados de investigaciones dentro de la Matemática Educativa han mostrado que, propiciar el estudio de la variación, representa una tarea importante para fomentar un aprendizaje rico en significados (Caballero y Cantoral, 2013).
Sin embargo, investigaciones enmarcadas en la línea de Pensamiento y Lenguaje Variacional muestran que el actual discurso Matemático Escolar no propicia el desarrollo de ideas variacionales, como lo muestra la tabla 1 a continuación.

Tabla 1. *Antecedentes de estudios del cambio y la variación*

Autores	Hallazgos relevantes
Cantoral y Farfán (1998)	Ausencia de procesos variacionales que doten de significados a los objetos del cálculo.
González (1999)	Diseño de actividades que propicien el desarrollo de estrategias variacionales.
Salinas (2003); Reséndiz (2004)	Estudian la forma en que la variación se hace presente en el dME (libros de texto y explicaciones de los profesores)
Fernández (2004)	Una propuesta didáctica de los multiplicadores de Lagrange.
Cabrera (2009)	Formación de profesores de matemáticas con respecto a ideas variacionales.
Caballero (2012)	Dificultades de los profesores de bachillerato para desarrollar el pensamiento variacional.

Al respecto, Salinas (2003) menciona:

> […] la transposición actual ha hecho que el estudiante privilegie la algoritmia y deje de lado lo variacional que existe en ellos de forma natural. En este momento nos dimos cuenta que la algoritmia y el pensamiento variacional del alumno toman rutas diferentes, trayendo como consecuencia que no haya aprendizaje de los conceptos matemáticos en el pensamiento de los estudiantes. (Salinas, 2003, p. 82)

Existen investigaciones que han reportado el papel del Pensamiento y Lenguaje Variacional en áreas del conocimiento tales como la física y el cálculo (véase Cantoral, 1990), pero no así en el área de la geometría analítica. Es por ello que en esta investigación nos cuestionamos si están presentes estas ideas variacionales en la geometría analítica, y de ser así, de qué manera lo están.

Consideraciones teóricas

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (en adelante TSME) de Cantoral (2013), asume que, para estudiar fenómenos didácticos ligados al saber matemático, se precisa acudir –y esto es lo que la diferencia de otros enfoques teóricos– a un examen minucioso del saber, es decir, a su problematización. Como lo plantean Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini (2015):

> […] la Socioepistemología utiliza como recurso a la problematización del saber, proceso mediante el cual se realiza análisis de obras originales de una pieza de conocimiento, se examinan los libros de texto, se interpretan procesos mentales involucrados y se comparan los usos del conocimiento matemático. (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 14)

Y es ahí, como mencionan los autores, que el análisis de los libros de texto toma un rol relevante para la teoría, puesto que permite identificar lo que se mantiene invariante, sea cual sea el texto, el paradigma educativo o la región, y que caracteriza al discurso Matemático Escolar del saber matemático que se está investigando, que en nuestro caso es la geometría analítica. Se consideró este referente teórico dado que su aporte fundamental es modelar la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. Bajo esta idea, Cantoral (2013) afirma que el conocimiento matemático es construido con base en prácticas sociales que norman la actividad de quienes lo construyen.

El carácter normativo de la práctica social describe una evolución pragmática de la construcción del conocimiento, como un intento de explicar cómo se aprende en matemática y además de ofrecer una herramienta teórica de análisis de datos, que Cantoral (2013) describe como el modelo de anidación de prácticas. Una forma de explicar este modelo (véase figura 1) sería que el estudiante pasa de la acción directa del sujeto ante el medio, lo cual se organiza como una actividad humana para perfilar una práctica (socialmente compartida) regulada bajo prácticas de referencia, las que son expresión material e ideológica de un paradigma, que a su vez son normadas por una práctica social.

Figura 1. Modelo de anidación de prácticas. Extraído desde Cantoral (2013, p. 155).

La TSME descansa sobre cuatro principios fundamentales que se explican de manera articulada y sustentan su idea fundamental sobre el significado: principio de normatividad de las prácticas sociales, principio de racionalidad contextualizada, principio de relativismo epistemológico y el principio de resignificación progresiva. Además, la teoría postula que la esencia de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reside en la noción de *discurso Matemático Escolar* (en adelante dME), el cual entenderemos como el conjunto de discursos estructurados producidos por convencionalismos sociales y culturales que surgen ante la necesidad de la comunicación y difusión masiva de los saberes matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

De acuerdo con Soto (2010), algunas de las características del dME son: la atomización en los conceptos, su carácter hegemónico, la matemática como un conocimiento acabado y continuo, el carácter utilitario del conocimiento y finalmente la falta de marcos de referencia.

Esta investigación está enmarcada en la línea del Pensamiento y Lenguaje Variacional (en adelante PyLV), la cual descansa en el seno de la TSME. Según Caballero y Cantoral (2013):

> El PyLV es tanto una línea de investigación como una forma de pensamiento, que se caracteriza por proponer el estudio de situaciones y fenómenos en los que se ve involucrado el cambio, y donde la necesidad de predecir estados futuros motiva el estudio y análisis de la variación. (Caballero y Cantoral, 2013, p. 1197)

Esta investigación se gesta en la búsqueda de ideas que aluden al cambio y a la variación, por lo cual entenderemos al primero como una modificación de un estado y a la segunda como la cuantificación de dicho cambio.

Según Caballero (2016), la variación no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y, por tanto, se construye, de este modo, la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas o involucradas en el estudio del fenómeno para darse cuenta de su evolución en los diversos estados en los que se pueda presentar.

Por otro lado, dado que se analizó una obra original y un texto escolar, resulta conveniente mencionar en la tabla 2 cómo son vistos ambos.

Tabla 2. *Concepciones de los textos*

Punto de vista	Autor
Como material de consulta	Bravo y Cantoral (2012)
Como objeto de difusión escolar y científica	Espinoza (2009)
Como objeto cultural	Cantoral et al. (2015)
Como instrumento de poder	Choppin (1980)

Consideraciones metodológicas

En la presente investigación, de tipo documental, se utilizó el método de análisis de textos, particularmente, la obra *La Geometría* (Descartes, 1947) y el texto escolar *Geometría Analítica* (Lehmann, 2005). Dicho análisis se llevó a cabo mediante la problematización del saber, recurso que nos ofrece la TSME, en la cual, no sólo se analiza el contenido, sino que se busca precisar el juego de prácticas explicitas o implícitas en las obras, es decir, se contrasta el texto escolar con el o los originales de otras épocas, tomando en cuenta el contexto de la producción de la obra.

Figura 2. Búsqueda de ideas variacionales en *La Geometría* (Descartes, 1947) y *Geometría Analítica* (Lehmann, 2005). Elaboración propia.

Inicialmente, en función del método propuesto por Cantoral et al. (2015), se llevó a cabo la investigación en dos fases: una *fase descriptiva* (véase figura 3), que contextualiza y sitúa a la geometría analítica en el momento que Descartes ofrece sus ideas germinales y cómo se ubica en el sistema educativo, en el caso del texto escolar; en una segunda fase, denominada *análisis cualitativo*, donde se resalta la actividad matemática que propone el libro a partir de las *acciones* del individuo.

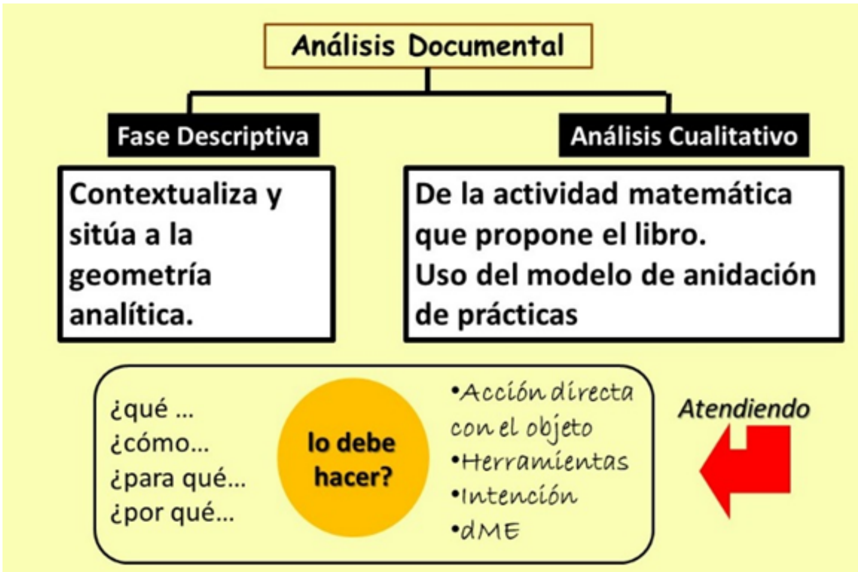


Figura 3. Método del análisis documental. Adaptado desde Cantoral et al. (2015, pp. 18-19)

Posteriormente, y a partir del análisis, se decide incorporar una tercera fase denominada *de confrontación*, esto con el objeto de dar muestra de las ideas variacionales observadas de forma transversal, sin hacer distinción entre ambas obras, y no para mostrar las bondades o desaciertos de una con respecto a la otra.
Al estudiar ambas obras, somos conscientes que, por su intencionalidad son diferentes, pero es nuestro interés explorar lo que pasó, relativo a la variación, con este tipo de conocimiento al llegar a la escuela.

Análisis y resultados

A continuación, se describen y analizan los resultados más relevantes de este estudio con respecto a extractos de las distintas fases antes mencionadas.

Fase descriptiva

La Geometría es uno de los tres tratados que componen el *Discurso del Método*, publicado originalmente por Descartes en 1637. De acuerdo con González-Urbaneja (2007), es una de las obras culminantes del saber humano, y considerada como la inicial de la matemática moderna.

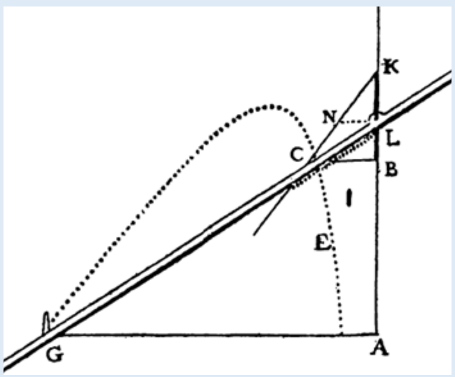
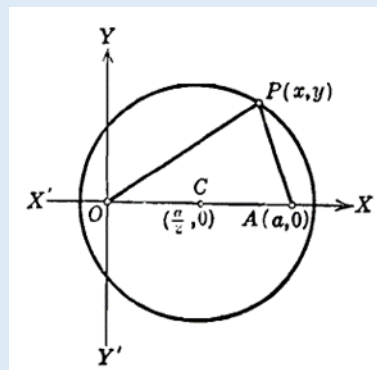
La *Geometría Analítica* de Lehmann, publicado originalmente en 1942, es un libro muy utilizado por profesores y estudiantes mexicanos, el cual se ha manejado desde hace mucho tiempo hasta la actualidad (Serna-Martínez, 2007). En México, la geometría analítica se introduce en el III semestre de la Educación Media Superior.

Fase cualitativa

En cuanto a la elección de los dos libros, la obra cartesiana se escogió porque propone un método para resolver problemas geométricos, como por ejemplo el famoso *Problema de Pappus*, piedra angular para demostrar su efectividad. En cambio, el segundo es un texto clásico usado en muchas de las instituciones educativas mexicanas.

Con el afán de observar dónde se hace presente el cambio, y a la vez identificar las nociones variacionales encontradas, se analizaron problemas homólogos de los dos libros, como el caso presentado en la tabla 3 a continuación.

Tabla 3. Presentación de dos problemas homólogos para este estudio

Problema A*	Problema B**
	

Problemas extraídos desde (*) Descartes (1947, p. 79) y (**) Lehmann (2005, p. 130)

Para el análisis de los problemas A y B, se destacarán **en negrita** las ideas variacionales presentes en cada uno de éstos.

Problema A: ¿De qué género es la curva?

Descrita por la intersección de la regla GL y la pieza $CNKL$, cuyo lado KN está prolongado indefinidamente hacia C, y se mueve sobre el plano en línea recta. Se elige una línea recta como AB para referir a sus diversos puntos todos los de la línea curva EC (sistema de referencia). En AB se elige un punto, como el A, para empezar por el cálculo, tomando un punto C cualquiera de la curva (generalidad). A continuación, se designan cantidades indeterminadas y desconocidas: $CB = y$, $BA = x$, para encontrar la relación de ambas. Ahora, se definen las cantidades conocidas que determinan el trazado de esa línea curva, a saber: $GA = a$, $KL = b$, $NL = c$. Si por semejanza de triángulos $\frac{LN}{LK} = \frac{CB}{BK}$, entonces $BK = \frac{b}{c}y$, $LB = \frac{b}{c}y - b$, $AL = x + \frac{b}{c}y - b$ (comparación). Posteriormente, $\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{LA}$, entonces $\frac{y}{\frac{b}{c}y-b} = \frac{a}{x+\frac{b}{c}y-b}$. Y así que la ecuación que se debía encontrar es $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$, por lo cual, la línea EC es de primer género, en este caso, una hipérbola.

Problema B: Hallar la ecuación del lugar geométrico. Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias, a dos puntos fijos, es constante. Hallar la ecuación de su lugar geométrico, y demuéstrese que es una circunferencia.

Por simplicidad, podemos tomar los puntos $O(0,0)$ y $A(a,0)$. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico. Entonces, P debe satisfacer la condición geométrica $\overline{PO}^2+\overline{PA}^2=k$. Por la fórmula de distancia entre dos puntos: $\overline{PO}^2=x^2+y^2$, $\overline{PA}^2=(x-a)^2+y^2$. Sustituyendo $x^2+y^2+(x-a)^2+y^2=k$, luego $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(2k-a^2)$. Retomando la ecuación $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(2k-a^2)$, se puede evidenciar que se trata de una circunferencia cuyo centro es el punto $C\left(\frac{a}{2},0\right)$, y cuyo radio $PC=\frac{1}{2}\sqrt{2k-a^2}$, siempre que $k>\frac{a^2}{2}$. Si $k=\frac{a^2}{2}$, el lugar geométrico se reduce al punto $\left(\frac{a}{2},0\right)$, y si no se cumple ninguna de las dos anteriores, no existe ningún lugar geométrico.

Fase de confrontación

Nociones variacionales:

En el *Problema A*, se muestra una curva para propiciar el análisis de los cambios que se producen. Se pregunta de qué género es la curva EC, por el cambio experimentado por la intersección de GL con la pieza $CNKL$ se generan diferentes puntos de la curva. En este caso identificamos el uso de la estrategia de comparación, al analizar el estado de la curva en dos puntos diferentes, y así argumentar acerca del comportamiento y el género de la curva. La idea es relacionar la variable x e y mediante la semejanza de triángulos, de manera que se requiere el uso de la estrategia de *seriación* para analizar la forma en que cambia la longitud de los segmentos a medida que la regla gira circularmente en G. La estrategia de *predicción* se hace presente cuando, al suponer el problema ya resuelto y conociendo la ecuación de varias curvas, se puede anticipar el género de la misma, incluso qué otras curvas se generarían si la pieza $CNKL$ fuese otra. Finalmente, la tarea propone una pregunta de tipo predictivo, en tanto que si se cambia la pieza triangular se pueden obtener otros lugares geométricos.

En el *Problema B*, se dan ciertas condiciones, y se pide demostrar que se trata de una circunferencia. Se usa la estrategia de *comparación*, puesto que, aunque P se mueva, la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos será constante, lo cual se puede verificar al llegar al siguiente resultado: $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(2k-a^2)$, se *anticipa* que se trata de una circunferencia, pues la ecuación general ya es conocida, cuyo radio es PC. Al usar la estimación, se concluye que si se cumple que $k>\frac{a^2}{2}$, se generará la circunferencia. Además de los casos donde $PC=0$ o incluso $k<\frac{a^2}{2}$.

Conclusiones

En *La Geometría* no se encuentra ninguna curva trazada directamente a partir de una ecuación, pero esto fue rescatado por Fermat. Se puede inferir que a Descartes no le interesaban los lugares de puntos que satisfacen una ecuación dada, sino la posibilidad de construir esos puntos. Lehmann enfatiza la noción de lugar geométrico y le da un carácter dinámico. Sin embargo, a partir del análisis, solo se presenta dos actividades que vinculan la construcción geométrica, es decir, no se explicita las construcciones geométricas exactas.
El contraste más fuerte entre Descartes y Lehmann es que este último perdió de vista el **movimiento**. Entonces, los problemas que plantea Lehmann ya no dejan ver lo que veía Descartes: buscar la forma de categorizar las curvas generadas por algún tipo de movimiento. Y esto es lo importante, porque es lo que le da el vínculo con lo variacional. Aun así, en ambas obras se puede apreciar la noción de variación de la forma siguiente:

> *Variación* (o variación dinámica en geometría analítica): tenemos los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Asignaremos la posición del punto (x_1, y_1), a medida que se esté generando la curva, aparece el punto $(x_2 . y_2)$, y así sucesivamente, hasta que aparece el punto (x_n, y_n).Gráficamente, se puede ver que un punto C cualquiera, con coordenadas (x, y), ha cambiado de posición. Y si queremos saber la posición de un punto en particular, será a partir de la ecuación.

De acuerdo con la definición anterior, podemos preguntarnos ¿por qué, al hablar de cambio y variación, sí o sí tenemos que referirnos al movimiento?

En otras palabras, vemos la variación en geometría analítica al momento que un punto $C(x, y)$ se mueve y cambia de posición, y con ello, también lo harán los segmentos punteados de longitud x y longitud y. Lo anterior nos conlleva a afirmar que es mediante la ecuación que se podrá observar el *carácter estable del cambio* (véase en Caballero, 2012).

A partir del análisis, pudimos notar diferentes sistemas de representación asociados a la variación:

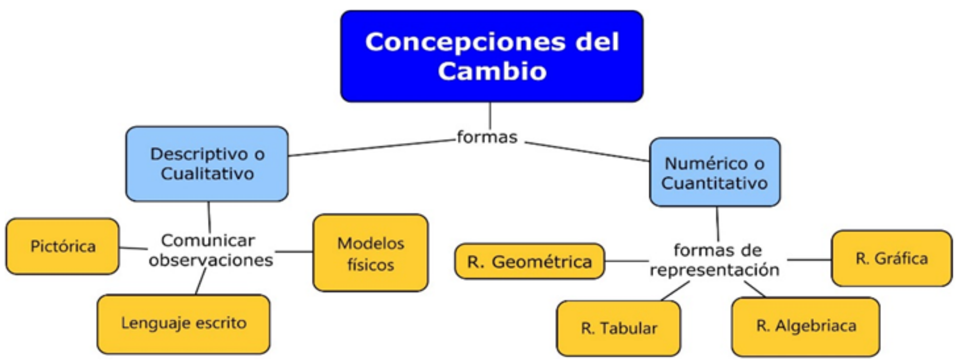


Figura 4. Formas en donde el cambio se observó a partir del análisis. Elaboración propia.

Otro punto interesante que podemos mencionar es que, en un curso de Geometría Analítica como está en el texto de Lehmann, se van a trabajar cónicas, rectas, parábolas, elipses, círculos, hipérbolas, donde normalmente se da una propiedad del lugar geométrico y se deduce la ecuación. En ese sentido, existe la percepción que los problemas de este tipo no aportan nada nuevo, porque ya se tienen maneras de construir una circunferencia, una elipse, etc., entonces, surge la interrogante ¿dónde está lo nuevo?

Podría ser que el tipo de problemas planteados en la obra cartesiana sí parecen novedosos, como por ejemplo aquél sobre determinar qué lugar geométrico genera esa propiedad, dado que los objetos que van a resultar ¡sorprendentemente serán objetos conocidos! Del análisis realizado, postulamos que son este tipo de problemas los que en verdad dan origen a lo que hoy conocemos como geometría analítica.

Finalmente, a partir de este trabajo, se puede afirmar que no es siempre explícito el rol del PyLV, pero sí está presente en la geometría analítica.

Referencias

Bravo, A. y Cantoral, R. (2012). Los Libros de Texto de Cálculo y el Fenómeno de la Transposición Didáctica. *Educación Matemática, 24*(2), 91-122. Recuperado desde http://somidem.com.mx/descargas/Vol24-2.pdf

Caballero, M. (2012). *Uso de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en los profesores de bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Caballero, M. (2016). *Los Sistemas de Referencia: El papel de la causalidad y la temporalización en el tratamiento del cambio y la variación. Un estudio socioepistemológico de su construcción* (Memoria predoctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26*, 1197-1205. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cabrera, L. (2009). *El pensamiento y lenguaje variacional y el desarrollo de competencias. Un estudio en el marco de la reforma integral del bachillerato* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico"* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. [Facultad de Educación Universidad de La Sabana]. (30 septiembre, 2015). *Conferencia Ricardo Cantoral (México) Día 3 Congreso Internacional Didáctica de la Matemática* [Archivo de video]. Recuperado desde https://youtu.be/tl7wnOTDgcU

Cantoral, R. y Farfán, R.-M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, 42*, 353-369.

Cantoral, R., Farfán, R.-M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y Representación: algunos ejemplos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático* (Número especial de RELIME: Revista Latinoamericana de Matemática Educativa), 83-102.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28. Recuperado desde http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/123

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires: Un approche globale. *Histoire de l'éducation, 9*, 1-15. doi:10.2307/41158041

Descartes, R. (1947). *La Geometría* (P. R. Soler, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Fernández, F. (2004). *Una propuesta didáctica del método de los multiplicadores de Lagrange. Un enfoque socioepistemológico* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

González-Urbaneja, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA – Revista de Matemáticas, 30*, 205-236. Recuperado desde http://www.euskadi.eus/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/18_raices.pdf

Lehmann, C. (2005). *Geometría Analítica* (R. G. Díaz, Trad.). Guanajuato, México: Limusa.

Reséndiz, E. (2004). *La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Salinas, C. (2003). *Un estudio sobre la evolución de ideas variacionales en los cursos introductorios al cálculo* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Serna-Martínez, L. (2007). *Estudio socioepistemológico de la tangente* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria, México.

Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ETNOMATEMÁTICA Y EDUCACIÓN INTERCULTURAL BILINGÜE EN AMÉRICA LATINA

ETHNOMATHEMATICS AND BILINGUAL INTERCULTURAL EDUCATION IN LATIN AMERICA

María del Carmen Bonilla, Milton Rosa, María Eugenia Reyes Escobar, Domingo Yojcom Rocché, María Elena Gavarrete Villaverde, Diana Victoria Jaramillo Quiceno
APINEMA: Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática (Perú), Universidade Federal de Ouro Preto (Brasil), Universidad de Granada (España), Centro de Investigación Científica y Cultural (Guatemala), Universidad Nacional (Costa Rica), Universidad de Antioquia (Colombia)
mc_bonilla@hotmail.com, milrosa@hotmail.com, mreyeses@gmail.com, mingoyo1@yahoo.com, marielgavarrete@gmail.com, diana.jaramillo@udea.edu.co

Resumen
La mayoría de los Estados Latinoamericanos ha asumido dentro de sus políticas públicas a la Educación Intercultural Bilingüe (EIB), modelo que tiene como finalidad formar a los escolares de los pueblos originarios y grupos sociales minoritarios, en el contexto de dos culturas distintas. Inicialmente, la EIB solo se orientó a la formación en comunicación lingüística desde una perspectiva intercultural. En la actualidad, el ámbito de acción aborda también la formación escolar intercultural en el área de ciencias, y dentro de ellas, las matemáticas. El ejercicio del derecho a la Educación Matemática de los pueblos originarios y grupos minoritarios promueve el desarrollo de la Etnomatemática en la EIB. El presente estudio propone conocer la pertinencia cultural de los currículos nacionales de Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Guatemala y Perú en el área de matemáticas, tomando en cuenta las perspectivas histórica, social y política, demostrándose la necesidad de recurrir a diversas disciplinas para dar solución a problemas en educación matemática.

Palabras clave: educación intercultural bilingüe, etnomatemática, pertinencia cultural

Abstract
Most Latin American states have adopted Bilingual Intercultural Education (BIE) within their public policies, which is a model that aims to educate students from indigenous peoples and minority social groups, in the context of two different cultures. Initially, the BIE only focused on the formation of linguistic communication from an intercultural perspective. Currently, we also work on intercultural school education in the area of science, and within them, in mathematics. The exercise of the right to Mathematical Education of indigenous peoples and minority groups promoted the development of Ethnomathematics in conjunction with BIE. While demonstrating the need to draw upon various disciplines to solve problems in Mathematics Education, this study aims to raise awareness of the cultural relevance of the national curricula of Brazil, Chile, Colombia, Costa Rica, Guatemala, and Peru in the area of mathematics while taking into account historical, social and political perspectives.

Key words: intercultural bilingual education, ethnomathematics, cultural relevance,

Introducción

Producto del encuentro de dos o más culturas surge la EIB, modelo que, en concordancia con las etnomatemáticas (D'Ambrosio, 1990), respeta la cultura de los pueblos, sus saberes ancestrales y cosmovisiones, constituyéndose en una alternativa frente a la enseñanza homogeneizante. Para D'Ambrosio (2005), por las condiciones sociales y políticas de cada país, la EIB en las diversas regiones de América Latina (AL) no ha tenido el mismo grado de desarrollo. La resistencia de los pueblos originarios frente a la nueva oleada de despojo de sus territorios ha obligado a los estados a darles una mayor atención y asumir la interculturalidad y la atención a la diversidad como políticas educativas. Los pueblos originarios son aquellas poblaciones que ocuparon diferentes territorios antes del colonialismo europeo. Cuando Colón llegó a América creyó que había llegado a las "Indias", por ello llamó indios a los pobladores de esas tierras. El concepto "pueblos indígenas" fue aceptado por la Organización Internacional del Trabajo en 1989.

Por otro lado, desde el ámbito escolar y la academia se desarrolla la Etnomatemática como una expresión de la Educación Matemática (EM) en la EIB de los países de AL (Bonilla et al, 2018). En un inicio la educación indígena enfocaba su trabajo en la enseñanza de las lenguas, deviniendo en su desarrollo de un bilingüismo sustractivo a uno aditivo. Posteriormente, la Educación Bilingüe pasó, de tener un carácter asimilacionista, a ser de transición, integración y, por último, de articulación (López y Küper, 1999).

El modelo actual de EIB es de mantenimiento y desarrollo, aborda los procesos de aprendizaje y enseñanza en las diversas áreas, como las ciencias, y dentro de ellas, la matemática, desde la óptica de la interculturalidad, respetando la cosmovisión de los pueblos originarios, en medio de una labor multidisciplinar y holística. Es importante resaltar que, de acuerdo con Pinheiro y Rosa (2018), las bases teóricas de las etnomatemáticas ofrecen alternativas válidas a los estudios tradicionales que aluden los aspectos pedagógicos y la naturaleza de la matemática.

La EIB está regida por el currículo nacional de cada país. A continuación, se discutirá la pertinencia cultural de los currículos nacionales de Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Guatemala y Perú en el área de matemática, desde diversos enfoques, histórico, social y político, dando a conocer el proceso de evolución de la interculturalidad. De igual manera se señalará cómo se han reflejado estos cambios en las normas legales de cada país.

Educación intercultural bilingüe en el contexto escolar brasileño

Brasil está constituido por pueblos de diversos orígenes, con una pluralidad lingüística y cultural que constituye la sociedad brasileña. Así, a lo largo de su historia, la enseñanza de las lenguas ha pasado por varios cambios en su tratamiento oficial, conforme al contexto social y político de cada época. Brasil es un país pluricultural, pues la formación de su pueblo está entrelazada por las sucesivas olas migratorias que comenzaron a partir de 1500. El mito del monolingüismo fue históricamente construido en Brasil por intereses diversos que pretendían apagar a las minorías: las naciones indígenas, las comunidades migrantes y, por extensión, a las mayorías tratadas como minorías, o sea, a las comunidades hablantes de variedades desprestigiadas del portugués (Cavalcanti, 1999).

Los contextos bilingües brasileños están relacionados con las escuelas bilingües para indígenas y Sordos y con las escuelas fronterizas con los países de Mercosur; con las escuelas internacionales y, también, con las comunidades hablantes de variedades desprestigiadas de la lengua portuguesa. Sin embargo, estudios sistematizados sobre el bilingüismo y el multilingüismo en Brasil son recientes, pues, en su mayoría, han sido realizados en las últimas dos décadas (Moura, 2009).

Entonces, la EIB es un tema recurrente en las agendas brasileñas y en los discursos de agentes del gobierno, de la sociedad civil y de líderes indígenas, pues tiene como objetivo el entendimiento sobre una educación que promueva la inclusión social. Así, la búsqueda por un tipo de educación que atienda las necesidades particulares de cada pueblo está amparada por una vasta base legal brasileña. Por ejemplo, entre otros documentos se destacan la Constitución Federal de Brasil (CRF/1988), la Ley de Directrices y Bases de la Educación Nacional - LDB (9394/96), el Plan Nacional de Educación - PDE (2014-2024) y el Marco Nacional para las Escuelas Indígenas – RCNEI (2002).

De acuerdo con el Censo del Instituto Brasileño de Geografía y Estadística, en 2010 existen 274 lenguas indígenas habladas en Brasil pertenecientes a 305 etnias diferentes. La población indígena es de 897 000 personas. Es importante considerar otros contextos de bilingüismo y multilingüismo, como, por ejemplo, a) cerca de 9,8 millones de brasileños con deficiencias o perdidas auditivas, que pueden comunicarse en Lengua Brasileña de Señas (Libras) y b) comunidades que hablan variedades desprestigiadas del portugués, los contextos bidialectales, que forman la mayoría de la población en las escuelas públicas.

Aunque la legislación educacional brasileña todavía no ha contemplado a las diversas comunidades lingüísticas del país, las presiones políticas en defensa de los derechos lingüísticos de estos grupos culturales consiguieron, en las últimas dos décadas, dos importantes conquistas: el reconocimiento del derecho de los Pueblos Indígenas (PI) y el de las Comunidades Sordas al acceso a la Educación Bilingüe, en sus lenguas maternas y en portugués, a) Pueblos Indígenas: el Decreto N° 5.051 del 19/04/2004, reconoce entre los derechos de estos pueblos, el acceso a la educación en su propia lengua y conforme a sus propias costumbres y b) Comunidades Sordas: el Decreto N° 5.626 del 22/12/2005, regula la Ley N° 10.436, de 24/04/2002, que dispone sobre la Lengua Brasileña de Señas (Libras), y el art. 18 de la Ley N° 10.098, de 19/12/2000, representan avances en la garantía de los derechos de las comunidades que utilizan Libras como lengua materna.

Para Moura (2009), la instrucción en las escuelas brasileñas, los medios de comunicación y los documentos oficiales pretendieron el apagamiento de las lenguas vernaculares en la vida pública y en el nombre de un proyecto de país y de la construcción de una identidad nacional brasileña que atendiese a los pensamientos políticos, económicos e ideológicos vigentes en el transcurso de la historia. En ese contexto, Rosa y Orey (2018) sostienen que las etnomatemáticas reconocen que los miembros de distintos grupos culturales desarrollan técnicas, métodos y explicaciones matemáticos únicos, los cuales les permiten entender y transformar las normas sociales y políticas vigentes. Las bases teóricas de las etnomatemáticas ofrecen alternativas válidas a los estudios tradicionales que aluden los aspectos pedagógicos y la naturaleza de la matemática.

Educación intercultural bilingüe en el contexto escolar chileno

En 1993 se promulga la Ley Indígena que establece la creación de la Comisión Nacional de Desarrollo Indígena y el Programa Nacional de Educación Intercultural Bilingüe (PEIB) dependiente del Ministerio de Educación (MINEDUC). A través de la ley 19.253, el Estado reconoció oficialmente la existencia de ocho PI en territorio chileno: aymara, colla, kawésqar o alacalufe, likan antai o atacameña, mapuche, quechua, rapa nui o pascuenses, yamana o yagán. Posteriormente, se reconoció oficialmente al pueblo diaguita. El último censo de población en Chile del 2017 mostró que en el país existen 2.185.792 personas que se identifican con alguno de los 9 pueblos originarios (PO) y 1.745.147 se reconoce mapuche. La población que se considera perteneciente al pueblo mapuche representó 9,9% de la población total efectivamente censada (INE, 2017).

La promulgación del Decreto 280 del 2010 marca el inicio del PEIB en Chile. La ley, que recomienda la enseñanza de lenguas ancestrales en los Centros Educativos (CE) del país, se implementa en todos los establecimientos educacionales del país que opten por desarrollarlo, y obliga a implementarla, si la matrícula del alumnado indígena es igual o mayor al 20%. El PEIB ofrece a los CE adheridos textos escolares en Lengua Indígena. Estos textos están enfocados hacia las cuatro lenguas vigentes: aimara, mapuche, rapa nui y kechua. Sin embargo, el PEIB no llega a los CE urbanos que no alcanzan la matrícula de alumnado indígena mínima para que su implementación sea obligatoria. Según Williamson y Flores (2015), hoy en día muchas comunidades indígenas del país continúan recreando sus prácticas educativas ancestrales, las que corresponden a los procesos de reproducción de sus espacios e instituciones sociopolíticas y socioculturales, entendiendo aquí que la educación es también un proceso formal de socialización y regulación comunitaria o intercomunitaria, fuera de la influencia directa del estado.

El PEIB está enfocado a la difusión del lenguaje y dentro de la región Metropolitana la lengua ancestral de mayor difusión es la lengua mapuche. Las escuelas y colegios que postulan al PEIB tienen entre sus docentes a un/a educador/a de lengua y cultura indígena (ELCI) en una hora pedagógica semanal, los educadores tienen conocimientos de la lengua y hacen esfuerzos para conectarse a la cultura escolar pero no tienen conocimientos de pedagogía. En las universidades hay talleres a nivel formal dentro de cursos electivos programados y a nivel informal con asociaciones y comunidades. Hay dos universidades impartiendo las carreras de pedagogía intercultural, en el norte del país la Universidad Arturo Prat, que rescata la lengua aymara, y en el sur del país la Universidad Católica de Temuco, que promueve la lengua mapuche.

El PEIB ha implementado recursos en materia de producción de textos en lo que se refiere a la lengua indígena pero falta: articulación con los otros sectores de aprendizajes, implementar en el contexto urbano y llegar a los establecimientos secundarios. El PEIB patrocinó un texto intercultural para el subsector de matemáticas sólo en el año 2005, de 1° a 4° básico enfocado al contexto rural, unificando contenidos matemáticos al contexto cultural mapuche, lo que representó un hito hacia la interculturalidad (Reyes, 2016).

Según Peña y Hueitra (2016), la inclusión de los conocimientos ancestrales de los PO en la asignatura de Matemática en Chile resulta compleja por tres razones: la perspectiva epistemológica de la matemática dominante en el medio educativo no da cuenta del carácter sociocultural de los conocimientos matemáticos; los programas de estudio del sistema educativo chileno son nacionales, extensos y obligatorios; y las evaluaciones estandarizadas que constituyen la base para la calificación de las escuelas no miden tales conocimientos.

Consecuentemente, Rosa y Orey (2018) argumentan que, con la creciente preocupación de la incorporación de la perspectiva cultural en los currículos de matemáticas, existe la necesidad de desarrollar una práctica etnomatemática dirigida a la acción pedagógica. La problemática es que dentro de los planes y programas chilenos hay un currículo rígido, que no permite una apertura hacia la interculturalidad. El sistema de implementar el PEIB requiere que los establecimientos postulen para tener un/a ELCI, la cual es financiada un año por el MINEDUC y al segundo año por el establecimiento. Esta práctica desmotiva a los directores de establecimientos a postular al PEIB. Por ello el gran porcentaje de alumnado que se identifica con alguno de los 9 pueblos originarios continúa invisibilizado. Se hace necesario realizar actividades pedagógicas en las escuelas para visibilizar la problemática, avanzar en la inclusión de saberes ancestrales y fortalecer la identidad del alumnado indígena. En ese camino, D'Ambrosio (1990) argumenta que es necesario realizar actividades pedagógicas en las escuelas para visibilizar la problemática, avanzar en la inclusión de saberes ancestrales y fortalecer la identidad del alumnado indígena.

Educación indígena en Colombia

La educación indígena (EI) en Colombia se viene discutiendo con mayor intensidad en las últimas tres décadas, a partir de esfuerzos liderados por organizaciones locales y departamentales oriundas de los territorios habitados por las diversas comunidades indígenas. Algunos pueblos indígenas han venido participando de forma activa en el proceso de construcción de los marcos legales que regulan la EI en el país, aunque con mayor fuerza, a partir de la reforma hecha a la Constitución Política de Colombia en 1991. En algunos de los artículos de dicho documento, el Estado reconoce y protege la diversidad étnica y cultural de la nación; reconoce el castellano como idioma oficial de Colombia, siendo las lenguas y dialectos de los grupos étnicos oficiales en sus territorios; indica que la enseñanza que se imparta en las comunidades con tradiciones lingüísticas propias debe ser bilingüe. Con la expedición de estos artículos, el Estado reconoce, oficialmente, a los pueblos indígenas (PI) desde su organización social, cultural, política y lingüística.

En el 2011, el debate sobre la educación de algunos PI se hizo más candente; esto, derivado de algunos procesos de concertación —entre algunos grupos indígenas y el Estado Colombiano— desarrollados en el marco de la sentencia T-025 de 2004 que se explicitan en el Auto 004/09—expedidos por la Corte Constitucional de Colombia (2009). Esta sentencia busca que el Estado Colombiano proteja a 34 PI que están en riesgo de exterminio por desplazamiento, muerte natural o violenta de sus integrantes. La sentencia se haría efectiva por medio de planes de salvaguarda étnica, elaborados y discutidos por los 34 PI. Un elemento central, según la Corte Constitucional, para elaborar estos planes es ofrecer herramientas para el fortalecimiento de la integridad cultural y social de cada etnia beneficiaria; centrándose en el fortalecimiento de la EI de las culturas de cada comunidad.

En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), en la Ley 115 (1994) que regula la Educación del país, a partir del programa de Etnoeducación, reconoce la importancia de la EI y de la elaboración de currículos escolares propios y pertinentes para estas comunidades. En el artículo 55 de la Ley se plantea que los currículos deben estar establecidos dentro los límites de las culturas propias, y, deben responder a los intereses, necesidades y aspiraciones de cada grupo cultural, de acuerdo con sus características socioculturales, económicas, políticas y lingüísticas, características curriculares culturales que concuerdan con los objetivos del programa etnomatemática (D'Ambrosio, 2001).

Sin embargo, en todo el territorio nacional se ha promovido, para las comunidades indígenas, un modelo curricular llamado "escuela nueva". Ese modelo surgió en Colombia en la década de los años 70, como una propuesta para las necesidades educativas de los niños de primaria de las zonas rurales del país. En ese modelo se plantea el componente curricular y pedagógico desde aspectos metodológicos tanto dentro como fuera del aula, donde todas las acciones deben estar enfocadas en la articulación de las áreas obligatorias y fundamentales (prescritas por el MEN).

En las comunidades indígenas la "escuela nueva" se convirtió en un espacio para aprender la lengua castellana y las operaciones aritméticas básicas. Los contenidos propuestos por la "escuela nueva" parecen estar dotados de sentidos y significados culturales que no son cercanos a las comunidades, es decir, no corresponden a los conocimientos que históricamente se han configurado desde, por y para las prácticas sociales de los diferentes pueblos. Por mencionar un ejemplo, en el caso del pueblo Dule, la lengua propia es el dule, y es una lengua fundamentalmente oral (no es escrita). En la "escuela nueva", las guías de trabajo, solo por mencionar un aspecto, están escritas en español. Este aspecto evidencia, aún más, para los miembros de la comunidad, el dominio de una enseñanza de saberes oriundos de otros contextos histórico-culturales (propios del eurocentrismo) y alejados de la cultura dule (Tamayo, 2012). Al decir de Green, sabio y líder nacional indígena:

> … La Tierra es nuestra Madre, todos los seres que la habitamos somos sus hijas e hijos, porque dependemos de ella en cada instante de nuestras vidas, porque la estructura de nuestro cuerpo es igual a la de la tierra. Nuestro hígado, nuestros pulmones, nuestros huesos, la sangre que corre por nuestras venas son iguales a las quebradas, a las montañas, a los diferentes ecosistemas que hay en la Madre Tierra… (Green, 2011, p. 61)

Así, es la Madre Tierra quien da origen a las cosmogonías, cosmovisiones y espiritualidades de los PI. Es ella quien guía y da sentido a los conocimientos producidos en las interacciones con los seres humanos. Reconocemos que en Colombia siguen existiendo dicotomías entre las propuestas educativas oficiales del Estado y las necesidades, intereses y deseos educativos de los diversos PO.

Educación indígena en Costa Rica

En Costa Rica, el documento más connotado para el resguardo de los derechos de los PI es el Convenio No 169 sobre Pueblos Indígenas y Tribales en Países Independientes, emitido por la Organización Internacional del Trabajo (OIT), donde se indica que los PI tienen derecho a recibir una educación de calidad y contextualizada, es decir, deben considerar los valores de su ancestralidad, en lo que respecta a la historia, conocimientos tradicionales, valores culturales y su cosmovisión.

Sánchez-Duarte (2016) menciona que este convenio hace referencia a las capacitaciones y formaciones profesionales que estos pueblos tienen derecho a recibir, tomando en cuenta su entorno sociocultural, económico y ambiental. A pesar de lo establecido en dicho convenio, y que existen instituciones en Costa Rica que realizan esfuerzos para realizar esta integración, existen otras que ignoran este acuerdo internacional; por un lado, se insiste en desconocer en los programas de estudio, las particularidades de estos pueblos, con lo cual se les niega la oportunidad de obtener una educación contextualizada y no se les toma en consideración para que construyan los modelos educativos que les son los idóneos.

Borge (2012) hace referencia al desafío para acortar la brecha de los CE indígenas entre sí y con el resto del país, por ello considera necesario implementar un plan de estudios mediado por el modelo pedagógico constructivista combinado con el tradicional indígena: donde, ante todo, deben impartirse las clases en los idiomas vernáculos, y es hasta este momento en el que se podrá hablar que existe una EI. Con esto, lo que se afirma, es que en Costa Rica no existe una política definitiva con respecto a la EIB, aunque se han realizado múltiples esfuerzos desde diversas dependencias. En 1985 el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP-CR) creó una dependencia encargada de velar por la educación formal en los territorios indígenas: la Asesoría Nacional de Educación Indígena (ANEI), la cual pretendió crear un modelo curricular que tomara en cuenta el contexto bicultural y bilingüe de los PI, revalorando sus condiciones psico-sociales y culturales.

En 1992 se cierra la ANEI, con lo que se “frena” la evolución de las políticas relativas a la evolución de la EIB en Costa Rica y hay un estancamiento de carácter administrativo en el periodo 1993-2009, hasta que se crea la Dirección Regional SuLá, que fue la primera dependencia del MEP-CR de carácter indígena y administrada por profesionales pertenecientes a los PO Bribri y Cabécar. Posteriormente, se crea el Departamento de Educación Intercultural en el MEP, con dos unidades que lo integran: la Unidad de Educación Indígena, y la Unidad de Contextualización y Pertinencia Cultural.

De acuerdo con Guevara-Víquez y Solano-Alpízar (2017), existen una serie de barreras para el desarrollo de la EIB en Costa Rica, tales como las trabas administrativas y legales del sistema educativo, las contradicciones entre convenios internacionales y leyes nacionales o decretos ejecutivos, la carencia de planificación educativa y cultural, así como también la carencia de políticas culturales y de una política educativa para atender la diversidad cultural y la escasez de recursos para producir material didáctico.

Aunado a todo lo anterior, también prevalecen otros asuntos de índole menos administrativo y de mayor peso social, como la discriminación hacia los docentes indígenas por parte de los docentes no indígenas y de los funcionarios administrativos del MEP y que las formas autóctonas de aprender y enseñar, así como las normas de interacción de los PI han sido poco estudiadas. La EIB de Costa Rica aún tiene mucho por evolucionar, puesto que aún existe un modelo administrativo centralizado en las zonas urbanas, que relega la posibilidad de desarrollar una alternativa de educación que emane de los mismos PI. Para Rosa, Orey y Gavarrete (2017), hasta ahora, se ha limitado a la retroalimentación e intercambio entre lo indígena y lo no indígena, lo cual ha coartado en cierta medida, el diálogo entre las diversas culturas y ha favorecido un solo enfoque monocultural.

La matemática y su enseñanza en la educación bilingüe intercultural en Guatemala

Los primeros esfuerzos por ofrecer una educación con pertinencia cultural en Guatemala acontecieron en la década de los años 80', cuando el gobierno de Guatemala a través de Ministerio de Educación implementó el Programa Nacional de Educación Bilingüe Bicultural (PRONEBI) mediante el Acuerdo Gubernativo No. 1093-84, cuya intención era promover la educación bilingüe (español-maya) en el país. Este programa marcó la historia no solo de la enseñanza de las matemáticas, sino del sistema educativo en general, porque vino a debilitar la educación escolar monolingüe, especialmente el programa de castellanización implementado por el mismo Estado guatemalteco en los 60'. El PRONEBI abre otras posibilidades, no solo para atender los problemas del manejo del idioma sino de los problemas sociales e ideológicos que coyunturalmente se estaba viviendo en esa época.

> Los problemas sociales son siempre problemas culturales porque tienen que ver con los mundos que construimos en la convivencia … la solución de cualquier problema social siempre pertenece al dominio de la ética, es decir, al dominio de la seriedad en la acción frente a cada circunstancia que parte de aceptar la legitimidad de todo ser humano, de todo otro, en sus semejanzas y diferencias. (Maturana, 2009, p. 18)

El aprendizaje de las matemáticas no es ajeno a los problemas sociales, es parte de ellos, al igual que el uso y manejo del idioma. Hoy en día hay cerca de 7 000 idiomas según la UNESCO en 193 países que pertenecen a la ONU, de éstos, 23 idiomas son originarios de Guatemala, esto refleja la gran diversidad cultural y lingüística. ¿Pero cuál es la relación del aprendizaje de las matemáticas con la educación bilingüe o la EIB? Por ejemplo, D'Ambrosio (2001) afirma que las matemáticas están cargadas de conceptos y estos constructos se han elaborado social e históricamente en la sociedad, por lo tanto, idioma y ciencia poseen una estrecha relación, uno alimenta al otro para su coexistencia.

Por eso, el programa impulsado por el Ministerio de Educación en Guatemala en los años 80', no sólo vino a fortalecer el uso de los idiomas mayas en la escuela, sino trajo consigo el reconocimiento de la Matemática Maya como mecanismo esencial para la enseñanza y el aprendizaje en una modalidad bilingüe (PRONEBI, 1992).

Hoy en día el currículo nacional base del nivel medio, contempla para el área de las matemáticas un componente denominado etnomatématica, este componente responde a las competencias marco del nivel medio. Además, se ha iniciado un esfuerzo conjunto entre el Ministerio de Educación y la Cooperación Japonesa (JICA) para la creación de textos escolares de matemática del nivel medio, que tomen en cuenta los elementos culturales, especialmente en la unidad de etnomatemática.

Para atender la EIB en el país, el Ministerio de Educación en cooperación con la Universidad San Carlos de Guatemala, iniciaron en el 2015 el programa de Formación Inicial Docente (FID) creando cinco profesorados, que incorporan en su malla curricular, en los cursos de matemática 1 y 2, una unidad de matemática maya en donde se aborda elementos de: aritmética, geometría y trigonometría maya.

A pesar de los esfuerzos del Ministerio de Educación y de las organizaciones no gubernamentales como el Consejo Nacional de Educación Maya, Asociación de Centros Educativos Mayas, Centro de Investigación Científica y Cultural, Xch'ool Ixim, entre otros, falta mucho por trabajar en el ámbito de la Educación Bilingüe Intercultural. La matemática escolar pensada, organizada y destinada para una población diversa, presenta grandes desafíos para el sistema educativo actual, especialmente para el docente. Esta intención conlleva a conocer el contexto, las diferencias individuales de los estudiantes, el uso del idioma de la región, y esencialmente, implica: investigación, formación y autoformación.

Etnomatemática y educación intercultural bilingüe en Perú

En los últimos años en la población peruana está tomando fuerza una creciente autoidentificación como PO. Los Censos Nacionales del 2017 han dado a conocer que ante la pregunta: ¿Por sus costumbres y sus antepasados, Ud. se considera?, el 25% de la población peruana se autoidentificó como persona originaria, quechua, aimara o nativa de la Amazonía, frente a un 16% que tiene una lengua originaria como lengua materna (INEI, 2018). Existen tendencias contrarias, una que reivindica un mayor sentimiento de identidad con sus raíces étnicas, y otra más antigua, y todavía vigente, que niega sus orígenes. Se siente en el día a día que hay un creciente reconocimiento y revalorización de nuestro pasado histórico, de la conciencia de la defensa de su legado, así como del papel que los PO jugamos en él.

En concordancia con la tendencia antes señalada, el estado peruano ha puesto en la agenda pública a la interculturalidad y al bilingüismo en diversos sectores, en los servicios de salud, en la administración de la justicia, en el periodismo, y por supuesto en la educación. Inclusive, hay un creciente interés por investigar sobre los conocimientos científicos desarrollados y empleados por los PO en la solución de los problemas de su entorno, con la finalidad de ponerlos en vigencia por su comprobada eficacia.

Desde 1972 se han decretado planes, leyes, políticas sectoriales que fomentan la Educación Intercultural y la EIB. El 2016 el Ministerio de Educación (Minedu) aprobó el Plan Nacional de EIB al 2021 y la Política Sectorial de Educación Intercultural y EIB. Además de tener el objetivo de brindar un servicio educativo relevante y pertinente, que garantice un mejor aprendizaje de la población de los PO, implementando una EIB en todas las etapas, formas y modalidades del sistema educativo (SE); se pretende implementar la Educación Intercultural en todo el SE, incluso en el 100% de las escuelas de la zona urbana con la finalidad que los escolares peruanos conozcan la diversidad, valoren su riqueza, la respeten y así poder construir una ciudadanía saludable, sin discriminaciones.

La interculturalidad está presente desde hace varias décadas en el SE pero no se contaba con orientaciones que permitieran formular propuestas pedagógicas desde la EIB. En la actualidad, a pesar de ser un enfoque transversal del Currículo Nacional de Educación Básica (CNEB), las competencias relacionadas a la interculturalidad se restringen a lo lingüístico. Es necesario que llegue a otras áreas como las ciencias, y en especial a las matemáticas, en específico a través de la Etnomatemática (D'Ambrosio, 1990), programa que explica los conocimientos matemáticos tomando en cuenta la contextualización en el grupo sociocultural de los sujetos productores, como un constructo que no nace al margen de la cultura local.

En el mismo camino, la diversificación curricular ha sido planteada hace más de una década. Inclusive se han elaborado Proyectos Educativos Regionales en todo el territorio. Sin embargo, por supervisiones desarrolladas por la Defensoría del Pueblo (2011) se pudo comprobar que muchas autoridades educativas locales no cumplían con elaborar orientaciones para la diversificación curricular o, a veces, si las tenían, no eran distribuidas. Debido a ello la mayoría de los docentes trabajaba sin realizar la diversificación curricular. Con el nuevo CNEB la diversificación contempla nuevos elementos, las competencias y los estándares de aprendizaje. La pregunta es, ¿será posible aplicar un enfoque por competencias en la EIB?, ambos corresponden a distintas visiones de la educación.

Otro aspecto de la Etnomatemática y la diversificación curricular está relacionado con la producción de los cuadernos de trabajo (CDT). El Minedu elaboró CDT en casi todas las lenguas originarias. Sin embargo, se ha comprobado que son utilizados en un 25%, debido a que los docentes hablan la lengua originaria, pero tienen dificultades para leer y escribir, o porque no han sido bien capacitados en el uso de los CDT, o porque los CDT no llegaron a la Institución Educativa (García, Cavero y Perú, 2017). Otros señalan que la racionalidad de los CDT no dista mucho de la racionalidad de los CDT de la zona urbana, y que se identifican neologismos que no se pueden traducir por no ser conocidos por la comunidad educativa.

Conclusiones

Como EIB o EI, la educación de los PI está ganando cada vez más espacio en los sistemas educativos latinoamericanos. Desde una perspectiva etnomatemática, el tener acceso a la producción social, política y cultural históricamente producida en dos o más lenguas, beneficia a los alumnos porque acceden a más conocimientos, desarrollan competencias y habilidades como lectores y escritores y pueden participar de más situaciones de comunicación, incluso con personas de otros lugares y regiones.

Es tarea de la comunidad de investigadores en Etnomatemática aportar con nuevas propuestas que beneficien a los escolares de EIB y EI, partiendo del respeto a su cosmovisión y racionalidad.

Referencias

Bonilla, M. Rosa, M., Auccahuallpa, R. & Reyes, M. La Dimensión Matemática en EIB: Educación Matemática y diversidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*(2), 1233-1240.

Borge, C. (2012). *Costa Rica: Estado de la educación indígena en territorios indígenas*. Costa Rica: Consejo Nacional de Rectores.

Cavalcanti, M. C. (1999). Estudos sobre educação bilíngue e escolarização em contextos de minorias linguísticas no Brasil. *Delta*, 15, 385–417.

Corte Constitucional de Colombia (2009). *Auto 004/09.* Bogotá, Colombia.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática*. São Paulo, SP: Editora Ática.

D'Ambrosio, U. (2001). *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

D'Ambrosio, U (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino**.** *Educação e Pesquisa*, *31*(1), 99-120.

Defensoría del Pueblo (2011). *Aportes para una Política Nacional de Educación Intercultural Bilingüe a favor de los pueblos indígenas del Perú.* Informe Defensorial N° 152. Lima: Defensoría del Pueblo.

García, M., Cavero, O. y Perú (2017). *Estudio sobre factores asociados al uso de cuadernos de trabajo:* el caso particular de materiales en awajún, ashaninka, aimara y quechua chanka. Lima: Ministerio de Educación.

Green, A. (2011). *Anmal Gaya Burba.* Significados de Vida. Tesis de doctorado. Medellín: Universidad de Antioquia.

Guevara-Víquez, F. & Solano-Alpízar, J. (2017). La *escuela y los pueblos indígenas de Costa Rica: políticas, indicadores educativos y planificación multilingüe.* Heredia, Costa Rica: Universidad Nacional. CIDE. División de Educación Rural.

López, L. y Küper, W. (1999) La educación intercultural bilingüe en América Latina: balance y perspectivas. *Revista Iberoamericana de Educación*, 20.

Instituto Nacional de Estadísticas (2018). *Síntesis de resultados.* Censo 2007. http://www.censo2017.cl/descargas/home/sintesis-de-resultados-censo2017.pdf

Instituto Nacional de Estadística e Informática - Perú (2018). *Censos Nacionales 2017: XII de Población, VII de Vivienda y III de Comunidades Indígenas*.

Maturana, H. (2009). *La realidad: ¿Objetiva o construida?* I. Fundamentos biológicos de la realidad. España: Anthopos.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia-MEN. (1994). *Ley general de Educación 115.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Moura, S. A. (2009). *Com quantas línguas se faz um país?* Concepções e práticas de ensino em uma sala de aula na educação bilíngue. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. São Paulo, SP: Universidade de São Paulo - USP.

Peña, P. y Hueitra, Y. (2016) Conocimientos [matemáticos] mapuche desde la perspectiva de los educadores tradicionales de la comuna de El Bosque. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 9(1), 8-25.

Pinheiro, R. C. y Rosa, M. (2018). Educação financeira para alunos surdos utilizando uma perspectiva etnomatemática. *Educação Matemática em Revista, 23* (60), 229-245.

PRONEBI (1992). *Principios básicos de la Matemática y operaciones básicas de la Matemática Maya.* Guatemala: Mineduc.

Reyes-Escobar, M. (2016). *Hacia la Educación Intercultural Bilingüe.* Análisis didáctico de textos de apoyo diseñados desde un enfoque etnomatemático. Tesis de Máster. Universidad de Granada.

Rosa, M. y Orey, D. (2018). *Influências etnomatemáticas em salas de aula*: caminhando para a ação pedagógica. Curitiba, PR: Editora Appris.

Rosa, M.; Orey, D. y Gavarrete, M. E. (2017). El programa etnomatemáticas: perspectivas actuales y futuras**.** *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 10*(2), 69-87.

Sánchez-Duarte, E. (2016). La educación indígena en Costa Rica: entre la práctica oficial y la propuesta comunitaria. *Temas De Nuestra América. Revista De Estudios Latinoamericanos*, *21*(42), 37-80.

Tamayo-Osorio, C. (2012). *(Re)significación del currículo escolar indígena, relativo al conocimiento matemático, desde y para las prácticas sociales:* el caso de la comunidad Tule de Alto Caimán. Disertación de Maestría. Facultad de Educación. Medellín: Universidad de Antioquia (UdeA).

Williamson, G., Flores, F. (2015). *Estado del arte de la Educación Intercultural bilingüe en Chile, 1990-2013.* Chile: Coedición Ediciones Universidad de la Frontera y Centro de estudios Interculturales e Indígenas.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

PROCESO DE GENERALIZACIÓN ASOCIADO AL CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FOURIER

GENERALIZATION PROCESS ASSOCIATED WITH THE CALCULATION OF FOURIER COEFFICIENTS

Fabián W. Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Universidad de Costa Rica (Costa Rica), Cinvestav-IPN (México)
fabian.romero@ucr.ac.cr, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
Este escrito corresponde a un avance de una investigación en desarrollo que, desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa y con una articulación con la Generalización Operativa, busca analizar el proceso de generalización que se da cuando se trabaja con una situación de aprendizaje que promuevan la construcción social del conocimiento matemático, en particular, una situación que busque significar los coeficientes de Fourier. Para esto cobra especial importancia la problematización del saber, pues dotará de elementos para el diseño e hipótesis de cómo debe ser este proceso de generalización.

Palabras clave: serie trigonométrica de Fourier, socioepistemología, generalización operativa

Abstract
This paper corresponds to an advance of a research in development that, from the Socio-epistemological Theory of Educational Mathematics and with an articulation with the Operative Generalization, seeks to analyze the process of generalization that occurs when working with a learning situation that promotes the social construction of mathematical knowledge, in particular, a situation that seeks to signify Fourier coefficients. For this, the problematization of knowledge is especially important, since it will provide elements for the design and hypothesis of how this process of generalization should be.

Key words: Fourier trigonometric series, socioepistemology, operational generalization

Introducción y antecedentes

En matemática educativa, diversas investigaciones se han preocupado por el estudio de los procesos de generalización. Interesados por cómo se dan los procesos de generalización en entornos de construcción social del conocimiento, tomamos como punto de partida las investigaciones relacionadas con la Serie Trigonométrica de Fourier (STF), por ser uno de los temas primordiales en el estudio del cálculo y en el desarrollo del pensamiento trigonométrico formal. Además de una importancia implícita sobre la generalización que se muestra en Farfán y Romero (2017) para la construcción de este conocimiento matemático.
En este sentido, se pretende construir un aparato teórico-metodológico para analizar los procesos de generalización, atendiendo a la construcción social del conocimiento matemático.

Las investigaciones alrededor de la STF, hasta la fecha, dan cuenta de diversos aspectos relacionados con la serie; como su génesis histórica, la hipótesis de periodicidad, las nociones de calor y convergencia, entre otras. Para esta investigación interesa revisar aquellos resultados de investigación relacionados con la STF y lo que han dicho respecto del proceso de generalización relacionado con la serie, ya sea directa o indirectamente.

Farfán (2012) nos muestra cómo la controversia alrededor del problema de la cuerda vibrante no es la solución en sí, más bien la discusión gira en torno a cuál es la *solución general* del problema y la metodología empleada para encontrarla. Es el afán de generalizar sus resultados lo que provoca una discusión que se extendería por cerca de un siglo y que provoca el cuestionamiento de los fundamentos del Análisis Matemático en la época.

Respecto de la noción de estado estacionario en el fenómeno de la propagación del calor, Marmolejo (2006) indica que existe una idea generalizada en el discurso escolar que asegura que el estado estacionario se alcanza cuando las temperaturas no dependan del tiempo, en realidad el estacionario se logra cuando las variaciones de temperatura son infinitamente pequeñas para un tiempo infinitamente grande. El ambiente fenomenológico, juega aquí, un papel sumamente importante, pues:

> …nos permite preestablecer las condiciones de frontera, que no solo tienen la función de obtener una solución particular del problema de la transferencia de calor, sino que, además, permiten orientar o bien reglar la intuición del estudiante, lo restringen en su pensamiento… (Marmolejo, 2006, p. 77)

Es decir, las condiciones de frontera, que se obtienen a partir del ambiente fenomenológico, más que permitir hallar soluciones particulares, orientan el pensamiento del estudiante para comprender el comportamiento general del fenómeno de propagación del calor. Lo que nos enfrenta a un proceso inductivo, buscando generalizar los resultados de estudiar casos particulares hacia el comportamiento general del fenómeno.

Para esta generalización, Ulín (1984) indica que es imposible separar el fenómeno físico de su matematización, sin embargo, la escuela no propicia las herramientas físicas necesarias para la comprensión del fenómeno de propagación del calor (Morales, 2010), mucho menos para su matematización.

Respecto de la convergencia de la STF, Farfán (2012) y Albert (1996) evidencian el *principio de permanencia de Leibniz* (Artigue, 1998) como un obstáculo epistemológico que provoca, tanto estudiantes como profesores, que trasladen las propiedades de las sumas parciales (continuidad y la naturaleza oscilatoria) a la función límite, es decir, sobre-generalizan los resultados del caso finito al caso infinito, lo que amerita atención en cuanto a las generalizaciones que se realizan en el trabajo con la STF.

Aunado a lo anterior, se debe considerar que “las generalizaciones que hace Fourier son para intervalos de longitud finita, y no sobre todo $\mathbb{R}$” (Vásquez, 2006, p. 45), pero existe una tendencia en el discurso matemático escolar alrededor de la serie en el cual predomina la propiedad periódica de la misma, lo que incentiva la sobre-generalización de propiedades pues no permite confrontar la idea de que el valor de convergencia de una serie de funciones no tiene, necesariamente, las mismas propiedades de los términos de la serie (Vásquez, 2006).

Respecto de la convergencia de series numéricas, Flores (1992) asegura que para el estudio de la convergencia se debe pasar por cinco etapas, las últimas dos corresponde a la conjeturación y a la generalización. Respecto de la etapa de conjeturación plantea que es necesario utilizar casos particulares de convergencia de series con el propósito de enunciar los criterios de convergencia. A pesar de que Flores hace referencia a los criterios de convergencia enunciados por Cauchy, posterior a los trabajos de Fourier, y sin olvidar que su objeto matemático corresponde a series numéricas; no podemos dejar de evidenciar que, respecto de las series de Fourier, es necesario el estudio de casos particulares de convergencia de series trigonométricas previo al cálculo de los coeficientes de Fourier (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017).

Respecto de la generalización, Flores plantea que esta "consiste en el enunciado y la demostración rigurosa de los nuevos criterios de convergencia" (Flores, 1992, p. 201). Entendiendo criterio como una condición suficiente para que la serie sea convergente, según Flores. Es decir, en este sentido generalizar corresponde a determinar y demostrar una condición suficiente para que se dé la convergencia. Sin olvidarnos de la diferencia epistemológica entre el trabajo de Cauchy y el de Fourier, surge la cuestión ¿qué es generalizar en el trabajo de Fourier, suponiendo que se debe partir de casos particulares para su significación? Esto es parte de las preocupaciones de esta investigación, cuyo objetivo general es *caracterizar las prácticas que acompañan los procesos de generalización que se suscitan cuando se significa la serie trigonométrica de Fourier, a través de una situación de aprendizaje que promueva la construcción social de este conocimiento matemático, en particular el cálculo de sus coeficientes*.

Marco teórico

Tomando como punto de partida a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), la cual sostiene que el conocimiento se construye de manera social a través de prácticas situadas (Cantoral, 2013). Bajo los principios fundamentales de la teoría -racionalidad contextualizada, relativismo epistemológico, resignificación progresiva y normatividad de la práctica social- se estable es esquema de prácticas anidadas como modelo para la construcción social del conocimiento matemático, el cual permite basados en una problematización del saber, la escritura de diseños de intervención en el aula en donde se coordinen acciones, actividades y prácticas. Un análisis de este tipo para los coeficientes de Fourier se encuentra en (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017) y una propuesta de diseño de intervención en (Romero, 2016).

Por otra parte, Dörfler modela con detalle el proceso de abstracción reflexiva (de Piaget) en su marco teórico Generalización Operativa, donde estable que la generalización es un proceso social-cognitivo donde la abstracción constructiva juega un rol primordial, teniendo como punto de partida el papel que juegan las acciones (de Piaget), los elementos de la acción y el establecimiento y simbolización de relaciones invariantes en la construcción de la generalización (García y Martinón, 1999).

Esta articulación teórica es importante, pues desde la TSME no hay, a la fecha, una postura que permita analizar los procesos de generalización.

El Método

A continuación, se presenta el método de investigación, el cual se presenta en dos partes, con el fin de facilitar la continuidad de la lectura. La primera parte corresponde a la Ingeniería Didáctica (ID), y la segunda al Análisis Temático. Sin embargo, estas partes se relacionan entre sí cómo se explicitará más adelante.

Parte I: Ingeniería didáctica

La ID funcionar como guía para el diseño de situaciones para la aplicación en el aula, así como una metodología de investigación que guía las experimentaciones en clase (Farfán, 1997; Artigue, 2014; 2015) cuyas características principales son: se aplica en situación escolar, su análisis es cualitativo y la validación es interna, permite abordar diversidad de aspectos gracias a su funcionamiento metodológico (Albert, 1996). La ID cuenta con cuatro fases (Figura 1), las cuales corresponden a su esquema experimental de trabajo, estas fases están permeadas por la TSME para así acercarse a la construcción social del conocimiento matemático.

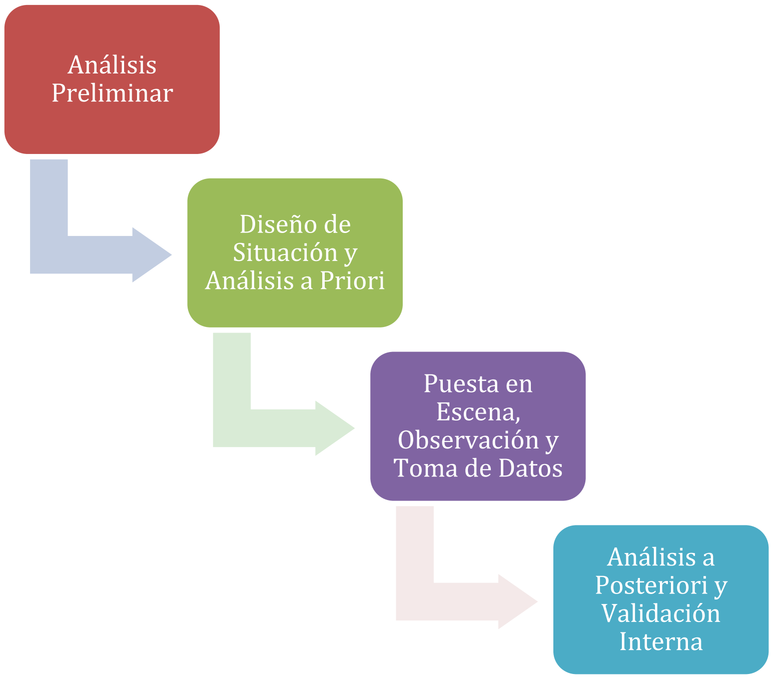


Figura 1. Fases de la metodología de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 2014).

Respecto de la STF, la investigación de Romero (2016) se centra en las dos primeras fases de la ID. Para el análisis preliminar, estudia de forma sistémica el papel de la práctica social en la constitución del saber matemático de nuestro interés. Esto lo hace mediante el estudio integrado de las dimensiones epistemológica, sociocultural (pues el conocimiento es una construcción social y cultural), los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

Para el diseño y análisis a priori, se definieron las variables macro y micro didácticas, además se definieron las hipótesis de lo que podría estar en juego durante el desarrollo de la situación de aprendizaje: posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que dispone el estudiante; por lo que se busca predecir que en los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado para el aprendizaje y que la tarea intentaba desarrollar, en Romero (2016) encontrará una propuesta de situación de aprendizaje para la STF. Esta investigación dará continuidad a las dos últimas fases.

Durante la experimentación, los datos se recopilan para el análisis a posteriori. Se presta especial atención a la recopilación de datos que permiten al investigador comprender la interacción de los estudiantes con el medio y hasta qué punto esta interacción respalda su movimiento autónomo desde las estrategias iniciales hasta las estrategias dirigidas (Artigue, 2015).

Según (Artigue, 2015), el análisis a posteriori se organiza en términos de contraste con el análisis a priori, poniendo a prueba las hipótesis subyacentes al diseño, en forma cualitativa y local. Se hacen importantes las siguientes preguntas:

- ¿Hasta qué punto los datos recopilados durante la fase de experimentación respaldan el análisis a priori?
- ¿Cuáles son las convergencias y divergencias significativas y cómo se pueden interpretar?
- ¿Qué sucedió que no se anticipó y cómo se puede interpretar?

Es importante tener en cuenta que siempre hay diferencias entre la referencia proporcionada por el análisis a priori y la contingencia analizada en el análisis a posteriori. Esto debido a que el análisis a priori trata con estudiantes genéricos y epistémicos, que no es el caso durante la experimentación. Por lo tanto, la validación de las hipótesis subyacentes al diseño no impone una combinación perfecta entre los dos análisis.

Como herramienta para realizar el análisis a posteriori utilizaremos en Análisis Temático, pues queremos profundizar no solo en las prácticas que acompañan la construcción de la STF y el cálculo de sus coeficientes, son también evidencias el proceso de generalización que se suscita al identificar las acciones e invariantes de acciones presentes en la experimentación.

Parte II: Análisis temático

Según Mieles, Tonon y Alvarado (2012), "dos aspectos clave en el proceso de investigación cualitativa son el registro y la sistematización de información; estas tareas se cumplen en el lapso entre la recolección y generación de información y la comprensión o interpretación de ella" (p. 2015). En Matemática Educativa, en particular para aquellas investigaciones donde el diseño de situaciones de aprendizaje juega un papel crucial, la validación del diseño, mediante el análisis de las producciones de los estudiantes es fundamental para la investigación.

En nuestro caso particular, la ID presenta, como una de sus principales virtudes, la validación interna del diseño como parte de su esquema metodológico. Sin embargo,

> Con el fin de organizar la información compilada y producida en el desarrollo de la investigación, guiar la comprensión o interpretación y hacer viable su recuperación y socialización, el investigador o equipo de investigadores requiere establecer criterios y formas de registro y sistematización de información; es aquí donde cobra sentido pensar en una alternativa como la planteada desde el análisis temático. (Mieles, Tonon y Alvarado, 2012, p. 216)

El análisis temático es un método para identificar, analizar y reportar patrones (temas) dentro de los datos; organiza y describe el conjunto de datos con detalle; e interpreta varios aspectos del tema de investigación (Braun y Clarke, 2006). Los diferentes análisis temáticos posibles dependerán del marco teórico utilizado, las preguntas de investigación y las decisiones sobre el método.

Algunos resultados teóricos preliminares

Romero (2016) realiza una integración de los resultados de investigación alrededor de la STF hasta la fecha e identifica las prácticas que acompañan la construcción social de la STF en su contexto de surgimiento, caracterizando los fenómenos necesarios de estudiar para hacer evolucionar el pensamiento trigonométrico de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica, esto a partir del ambiente fenomenológico de surgimiento de la STF, la propagación del calor.

Refiriéndose a la noción de variación en el ambiente fenomenológico de la transferencia del calor Solís señala que:

> …la culminación del manejo de esta noción de variación se da cuando, pudiendo operar con los símbolos de la variación, un individuo es capaz de establecer las leyes que rigen un fenómeno de variación, esto es, el construir un modelo que nos permita del fenómeno hacerlo predecible. (Solís, 1993, p. 2)

Entonces, se logra expresar el modelo general del fenómeno cuando se matematiza a través de los símbolos de la variación -diferenciales y derivadas parciales-, es decir, se logra establecer la ecuación diferencial que modela el fenómeno. Por ejemplo, ante el problema de la cuerda vibrante, la ecuación diferencial dada por D'Alembert, es el modelo general de un fenómeno de variación.

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Luego de establecer el modelo, la discusión gira en torno a cuál es la solución general de la ecuación, lo cual no tuvo respuesta contundente por parte de los matemáticos de la época (siglo XVIII). Daniel Bernoulli, en 1755, propone la solución como superposición de ondas, llegando a que la forma inicial de la cuerda (una función arbitraria), se puede representar como serie trigonométrica.

Euler debate fuertemente dicha solución, pues "Bernoulli no basa sus opiniones en ningún argumento matemático, por tanto, no existe prueba de la generalidad de que una función sea susceptible de tal representación; aunado a ello, no existen indicaciones de algún método para calcular los coeficientes" (Farfán, 2012, p. 66, el resaltado es nuestro). La controversia alrededor del problema de la cuerda vibrante se resuelve con el trabajo de Fourier sobre la propagación del calor, cuya ecuación diferencial, es otro ejemplo de la **generalización** del comportamiento de un fenómeno de variación:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{K}{C\cdot D}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

Al hacer uso de esta ecuación para resolver el problema de la propagación del calor en una lámina infinita, Fourier, mediante un gran dominio algebraico, logra determinar los coeficientes de una serie trigonométrica que converge a un valor específico. Esto da paso a que generalice sus resultados, para lo cual "enuncia y demuestra lo que para los matemáticos más prominentes del siglo XVIII era inaceptable: la posibilidad de representar una función *arbitraria* en serie trigonométrica" (Farfán, 2012, p. 128).

En Romero (2016) se da cuenta del significado geométrico-analítico detrás del razonamiento de Fourier para el cálculo de los coeficientes, además de proponer dos momentos importantes para la construcción social de la STF: el primero busca comprender que series trigonométricas particulares pueden converger a una función, el segundo busca generalizar que para una función arbitraria (pero representable en serie trigonométrica) determinar los coeficientes de la serie.

> El Momento 2 para la construcción social de la STF surge a partir del Momento 1 ya que, gracias a la necesidad de generalizar en matemáticas, se hace natural realizar la pregunta inversa ¿y si se conoce la función a la que se converge, cuál es la serie? Este segundo momento no busca determinar las condiciones para que una función se pueda representar en serie trigonométrica, más bien, supone de antemano que la función se puede representar y se concentra únicamente en el cómo se calculan los coeficientes de la serie. Para esto se evidencia como detrás del trabajo de Fourier existe una base de argumentaciones gráficas y geométricas, que permiten significar el cálculo de los coeficientes de Fourier (Romero, 2016, p. 128)

Por lo tanto, no se pueda dar el segundo momento sin el primero, se requiere una significación al partir del uso de la serie antes de generalizar la representación en serie trigonométrica para una función arbitraria (pero que cumpla las condiciones de Dirichlet). Es por esto por lo que se plantea como hipótesis que, *para lograr la generalización de la representación de una función en serie trigonométrica de Fourier, se debe primero significar a la serie trigonométrica misma a partir del uso y luego significar el cálculo de sus coeficientes*.

Refiriéndonos directamente al cálculo de los coeficientes de Fourier, en decir, al segundo momento de construcción social de la STF. Para el cálculo de los coeficientes, es necesaria la articulación de al menos dos registros de representación, el geométrico-analítico y el algebraico, para validar el segundo en el primero (Romero, 2016; Farfán y Romero, 2017). Esto a partir de la forma en que Fourier determina los coeficientes de la serie, donde sus argumentaciones iniciales son de forma geométrica-analítica para pasar luego a las argumentaciones algebraicas.

Diversos estudios se han preocupado por el abordaje de la STF con la finalidad de mejorar los procesos de aprendizaje vía la enseñanza; estas investigaciones dan cuenta de aspectos relacionados con la serie; como su génesis histórica, la hipótesis de periodicidad, las nociones de calor y convergencia, entre otras; una revisión detallada se encuentra en Romero y Farfán (2016).

Considerando los aportes realizados por todas estas investigaciones, Romero (2016) identifica las prácticas que acompañan la construcción social de la STF en su contexto de surgimiento, caracterizando los fenómenos necesarios de estudiar para hacer evolucionar el pensamiento trigonométrico de la funcionalidad a la formalidad trigonométrica. De esta manera se proponen dos momentos importantes para la construcción social de la STF: el primero busca comprender que series trigonométricas particulares pueden converger a una función y el segundo busca generalizar el cálculo de los coeficientes de Fourier para una función arbitraria, pero representable en serie trigonométrica (Farfán y Romero, 2017).

El segundo momento para la construcción social de la STF surge a partir del primero, y no busca determinar las condiciones para que una función se pueda representar en serie trigonométrica, más bien, supone de antemano que la función se puede representar y se concentra únicamente en el cómo se calculan los coeficientes de la serie. Por lo tanto, se requiere una significación al partir del uso de la serie antes de generalizar la representación en serie trigonométrica para una función arbitraria (pero que cumpla las condiciones de Dirichlet).

Reflexiones finales

A partir de la problematización del saber es posible observar aquellos significados geométricos y gráficos detrás del cálculo de los coeficientes de Fourier, y que, a pesar de que Fourier realiza un trabajo meramente matemático sin relación directa al contexto físico, es requerida una significación al partir del uso de la serie trigonométrica, previo al estudio del cálculo de sus coeficientes (Romero, 2016), esto da paso a la hipótesis de que el estudiante habrá generalizado los coeficientes de Fourier cuando logre expresar su significado en forma geométrica-analítica, es decir, como un área bajo la curva, previo al uso de su representación analítica (con integrales).

Previo a esta significación, la articulación entre marcos teóricos nos permitirá estudiar, por un lado, el proceso de generalización -Generalización Operativa- y por otro, las prácticas que acompañan a dicho proceso -Teoría Socioepistemológica- y de esta manera poder analizar en una puesta en escena controlada el proceso de generalización y su relación con las prácticas. A nivel teórico, buscamos tener elementos que nos permitan dar una postura inicial sobre los procesos de generalización en entornos de construcción social del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Albert, J. A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 40-55.

Artigue, M. (2014). Didactic Egineering in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (págs. 159-162). London: Springer.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knniping, & N. Presmeg, *Approches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (págs. 467-496). London: Advances in Mathematics Education.

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77-101. doi:10.1191/1478088706qp063oa

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Barcelona, España: Editorial Gedisa S.A.

Cantoral, R., y Farfán, R. M. (2003). Mathematics education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*, 255-270.

Farfán, R. M. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión Centroamericana y del Caribe referida al nivel superior. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1*(0), 6-26.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona, España: Gedisa S. A.

Farfán, R. M., & Romero, F. (2017). Construcción social del conocimiento matemático: La serie trigonométrica de Fourier desde la Socioepistemología. *Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS, 10*(23), 483-503.

Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

García, J., y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(1), 31-43.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Mieles, M., Tonon, G., y Alvarado, S. (2012). Investigación cualitativa: el análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas Humanística,* (74), 195-225.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier: Pautas para un diseño de intervención en el aula.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi:10.13140/RG.2.2.14118.63048

Romero, F., y Farfán, R. M. (2016). Estado actual de la investigación alrededor de la serie trigonométrica de Fourier. En F. Rodríguez, R. Rodríguez, & L. Sosa (Ed.), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa. 1*, págs. 275-282. Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Solís, M. (1993). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: El fenómeno de la propagación de calor.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

LA EDUCACIÓN FINANCIERA EN EL CURRÍCULO ACTUAL DE LA ESCUELA BÁSICA BRASILEÑA: ANTECEDENTES EN LA DISCIPLINA ECONOMÍA DOMÉSTICA

FINANCIAL EDUCATION IN THE CURRENT CURRICULUM OF THE BRAZILIAN BASIC SCHOOL: BACKGROUND IN THE DISCIPLINE DOMESTIC ECONOMY

Luzia de Fatima Barbosa Fernandes, Denise Silva Vilela
Universidad Federal de São Carlos (Brasil)
luziafbfernandes@gmail.com, denisevilela@ufscar.br

Resumen
En este trabajo presentamos algunos cambios en la inserción de temas relacionados a las finanzas en la escuela básica brasileña. En el siglo XIX, teníamos en el currículo asuntos relativos a la Economía Doméstica. Actualmente, con la Estrategia Nacional de Educación Financiera, el tema Educación Financiera se legitima en la escuela y es propuesto en la Base Nacional Común Curricular. Articulando los referentes de la Sociología Reflexiva de Pierre Bourdieu, adoptamos como método de investigación el análisis documental, insertándonos en una vertiente cualitativa. Para la discusión movilizamos el concepto de Estado y *doxa* y, relacionar la Educación Financiera como construcción social, de acuerdo con autores de la Sociología Económica. En nuestro modo de ver, la alteración de Economía Doméstica para Educación Financiera estaría relacionada a los cambios en la organización de la sociedad, específicamente, pasó de la dimensión de la familia hacia el ámbito individual, reforzando los ideales del neoliberalismo.

Palabras clave: educación financiera, economía doméstica, sociología, educación matemática

Abstract
In this paper we present some changes in the insertion of finance related subjects in the Brazilian Basic School. In the nineteenth century, we had in the curriculum subjects related to the Domestic Economy. Currently, with the National Strategy of Financial Education, the subject Financial Education is legitimized in the school and is proposed in the National Curricular Common Base. Articulating the references of Pierre Bourdieu's Reflective Sociology, we adopted documental analysis as a research method, inserting ourselves in a qualitative way. For the discussion we mobilize the concept of State and *doxa* and, relate Financial Education as a social construction, according to authors of Economic Sociology. In our way of seeing, the change from Domestic Economy to Financial Education would be related to the changes in the organization of society, specifically, from the dimension of the family to the individual sphere, reinforcing the ideals of neoliberalism.

Key words: financial education, domestic economy, sociology, mathematical education

Introducción

Este articulo presenta un recorte de una investigación de Doctorado en marcha, cuyo tema de estudio es la Educación Financiera orientada a la escuela básica brasileña. En el desarrollo de la investigación, la temática es investigada con foco en el documento de la *Estrategia Nacional de Educación Financiera* (ENEF), instituida en Brasil por el Gobierno Federal - Decreto nº 7.397, en el año 2010. Esa Estrategia tiene como una de sus iniciativas el Programa Educación Financiera en las escuelas, con la finalidad de preparar al estudiante de la escuela básica para enfrentarse con las decisiones financieras de forma consciente (Conef, 2014).

En la Educación Matemática el tema ha sido investigado por diversos investigadores, entre ellos, Silva y Powell (2013). Estos autores entienden que los estudiantes necesitan "tener posiciones críticas sobre cuestiones financieras" (Silva & Powell, 2013, p. 13). También encontramos diversas investigaciones que buscan desarrollar formas de trabajo con el tema en el aula, subsidiados por metodologías para la enseñanza de Matemáticas, en especial, para la enseñanza de contenidos de la Matemática Financiera y su relación con la Educación Financiera.

Enfocamos en este artículo la presentación de cambios ocurridos en el tratamiento del tema relacionado a las finanzas en el espacio escolar a lo largo de la historia de la educación en Brasil. Como objetivo, analizamos currículos nacionales anteriores y actuales para melhor compreender las cuestiones financieras en el ambiente escolar.

Para subsidiar la presente discusion nos atentamos al concepto de Estado, según Bourdieu (2014), entendiéndolo como responsable por la imposición de una educación que es legitimada; y el concepto de *doxa* que, interpretada a la luz de Bourdieu (1996), es visto como un "sentido común naturalizado" y, por lo tanto, como "el punto de vista de los dominantes" (Bourdieu, 1996, p. 120). Además, interpretamos los cambios en las directrices de la educación sobre los asuntos financieros como resultados de una construcción social.

Las investigaciones con análisis de cuño sociológico y sus relaciones con la Educación Matemática han sido realizadas por investigadores del Grupo de Investigación Educación Matemática y Cultura (EMAC), al cual pertenecemos. En algunas de las investigaciones - (Vilela & Souza Neto, 2012); (Farias, 2017) - los análisis buscaron desnaturalizar prácticas de clases de Matemáticas y/o Programas de Formación de Profesores, como la Olimpiada Brasileña de Matemáticas de las Escuelas Públicas (Obmep) y la Maestría Profesional en Matemáticas en Red Nacional (ProfMat), utilizando un el *modo de ver* y pensar sobre la Matemática y los modos de dominación del propio *campo* de las Matemáticas. En este sentido, esta investigación busca interpretar por medio de conceptos de la Sociología, la inserción del tema de la Educación Financiera en el aula como un *modo de ver* las relaciones entre el currículo de la escuela básica y la sociedad.

En la próxima sección discutiremos los referenciales teóricos y la metodología de la investigación basados en la Sociología; poco después, se presenta el análisis de los documentos selecionados, destacando las leyes federales de educación brasileña, los Parámetros Curriculares Nacionales (PCN), la Base Nacional Común Currícular (BNCC) y la Estrategia Nacional para la Educación Financiera (ENEF); y, por último, una sección con las conclusiones sobre las discusiones presentadas.

Referencias teóricas y métodos de investigación

Basamos teóricamente esta investigación en los estudios relativos a la Sociología Reflexiva de Pierre Bourdieu (1930-2002) y en los comentadores tais como en la Sociología de la Educación (Nogueira & Nogueira, 2002). Estos nos proporcionaron realizar un análisis de cuño sociológico y que contribuyeron en la interpretación de los datos, entendiéndolos como conectados al contexto social. Nos apoyamos también en los presupuestos de la construcción social de los mercados, de la Sociología Económica y de diversas investigaciones del área, tales como Raud-Mattedi (2005) y Jardim (2015), que tratan de la temática.

En ese sentido, movilizamos el concepto de Estado (Bourdieu, 2014) que, como productor de políticas públicas orientadas a la Educación Básica, tiene, entre sus funciones, "la producción de identidad social legítima" (Bourdieu, 2014, p. 38). Buscamos, por medio de este concepto, comprender las directrices y recomendaciones creadas en torno a la inserción del tema de la Educación Financiera en el ambiente escolar. Al respecto del concepto de *doxa*, es importante para interpretar las directrices sobre los contenidos que deben componer el currículo de la escuela básica como una visión a partir de la mirada del dominante, o sea, una visión que "se presenta y se impone como punto de vista universal; el punto de vista de aquellos que dominan el Estado y constituyeron su punto de vista desde el punto de vista universal al crear el Estado" (Bourdieu, 1996, p. 120).

Además, buscamos interpretar la Educación Financiera como una construcción social, entendiendo que el tema está ligado a preceptos de la teoría económica neoliberal en Brasil, apuntando las diferencias entre el foco dado a esa Educación Financiera en contraste con lo que era considerado en las clases de Economía Doméstica. Buscamos ese concepto de construcción social en teóricos de la Sociología Económica (Raud-Mattedi, 2005). Para la autora, la Sociología Económica surge como forma de crítica a los economistas, cuyo concepto de *homo economicus* prevé un hombre puramente racional y maximizador de beneficios. En ese sentido, por medio del concepto de construcción social de los mercados, interpretamos la Educación Financiera, hoy en Brasil, como un tema construido socialmente.

En concordancia con autores de la Sociología de la Educación, entendemos que los estudios realizados por Bourdieu (1930-2002) nos proporciona un cuadro "macrosociológico de análisis de las relaciones entre el sistema de enseñanza y la estructura social" (Nogueira & Nogueira, 2002, p. 35). Las relaciones entre escuela y sociedad nos auxilian para pensar los temas movilizados en el ambiente escolar y que buscan esa identidad con las necesidades planteadas por el mundo social. En este sentido, la escuela acaba por legitimar contenidos ligados a la cultura de clases dominantes, de prestigio en la sociedad, reforzando así su importancia, con el dominio de ciertos contenidos que representan esa realidad como única y verdadera. Para Bourdieu y Passeron (2014), el sistema de enseñanza cumple con la "función social de legitimación de la cultura dominante" (Bourdieu & Passeron, 2014, p. 159). En el caso de esta investigación, el sistema de enseñanza brasileña cumplería con su papel de legitimar asuntos relativos a las finanzas de acuerdo con el punto de vista de los dominantes.

Para desarrollar la investigación propuesta movilizamos algunos métodos que se mostraron adecuados, es decir, nos atentamos para "técnicas que, dada la definición del objeto, puedan parecer pertinentes" (Bourdieu, 1989, p. 26). Hemos adoptado como método, o "operaciones de investigación" (Bourdieu, 2014, p. 43), el análisis documental, considerando, para este articulo las siguientes publicaciones:

- la Base Nacional Común Curricular (Brasil, 2018), la cual contiene determinaciones sobre cómo el tema de la Educación Financiera puede ser insertado en el aula;
- la Estrategia Nacional de Educación Financiera (Brasil, 2010);
- los Parámetros Curriculares Nacionales (Brasil, 1998);
- y, además de esos documentos actuales, insertamos en nuestra discusión textos de leyes anteriores que indicaban el contenido de Economía Doméstica en el aula, incluyendo, entre los temas abordados, la organización de las finanzas de la familia.

Estos documentos citados - las leyes de ámbito federal, los PCN, la ENEF y la BNCC - fueron analizados por emparejamiento o asociación con la teoría de Bourdieu, estrategia que "consiste en analizar las informaciones a partir de un modelo teórico previo" (Fiorentini & Lorenzato, 2007, p. 138).

La búsqueda por leyes ligadas a la Educación Brasileña es un movimiento, entendido por Bourdieu (2014) como "regresión", una acción impuesta por la propia "lógica de la investigación" (Bourdieu, 2014, p. 43), caracterizando una vuelta en el tiempo, en la que tuvimos el objetivo de entender cuáles fueron a las condiciones que llevaron la inserción del tema en el ambiente escolar en diferentes épocas y con diferentes objetivos. Al analizar los documentos ligados a la historia de la Educación Básica Brasileña, nos llevó al conocimiento de una asignatura presente en el siglo XIX, a saber, la Economía Doméstica, la cual, por el contenido abordado, nos acercó a temas presentes en la actual Educación Financiera.

■ De la economía doméstica a la educación financiera: cambios en el currículo de la escuela básica brasileña

Recorriendo leyes y decretos instituidos a nivel Federal, relacionados a la Educación Brasileña, rescatamos antecedentes de conocimientos que se aproximan a la temática de la actual Educación Financiera. En leyes de los siglos XIX y XX - como el Decreto 7.247 (Brasil, 1879) -, entre otros, marcan la existencia de cuestiones relacionadas al mundo de las finanzas en la Educación Básica, como la asignatura de Economía Doméstica. Hasta el año 1946, cuando la publicación del Decreto-Ley nº 8.530 (Brasil, 1946), sobre las disciplinas que serán impartidas en el curso Normal - curso de formación de maestros para los primeros años de la Educación Básica -, la asignatura de Economía Doméstica aún integraba ese currículo. Este período, comprendido entre el final del siglo XIX y principios del siglo XX, se ha marcado en el escenario brasileño con los procesos de industrialización, período en el cual la educación cumplió un papel fundamental.

De acuerdo con Romanelli (1978), con las exigencias planteadas por la sociedad industrial de la época, el período que comprende la segunda mitad del siglo XIX dejó el Estado responsable por la educación. En esas exigencias, se incluía erradicar el analfabetismo de la población. Para la autora, "el capitalismo industrial, engendra la necesidad de proporcionar conocimientos a capas cada vez más numerosas, sea por las exigencias de la propia producción, sea por las necesidades del consumo que esa producción acarrea" (Romanelli, 1978, p. 59). Las condiciones impuestas por el sistema capitalista crearon la necesidad de ofrecer a la población, medios para permitir su participación en ese sistema. En el ámbito de la educación, el desarrollo de la lectura y la escritura eran conocimientos básicos para esa inserción.

De finales del siglo XIX a la primera mitad del siglo XX, cuando la asignatura de Economía Doméstica constituía parte del currículo de la escuela básica en Brasil, ella era dirigida al público femenino. De acuerdo con las costumbres de la época, cabía a la mujer el papel de administrar y cuidar el hogar, incluyendo las finanzas domésticas. En los años finales del siglo XX, con los cambios ocurridos en la sociedad y la mujer ocupando espacios en el mercado de trabajo, la asignatura deja de componer el currículo de la escuela básica. En su mayoría, asignaturas dirigidas al hogar ya las mujeres específicamente, dejaron de existir oficialmente en los currículos.

En el año 1998, tuvimos en Brasil la publicación de los Parámetros Curriculares Nacionales. La Economía Doméstica, que estuvo presente en los contenidos de la escuela básica brasileña en décadas anteriores, no figura en ese documento. Sin embargo, encontramos algunos asuntos que, colocados como Temas Transversales, posibilitaban enfoques interdisciplinarios. De la forma en que aparecen en el documento, estos Temas Transversales pueden ser trabajados para recurrir diferentes asignaturas del currículo de la escuela básica entendiendo, por lo tanto, que puedan ser problematizados por profesores con diferentes formaciones. Por ejemplo, son Temas Transversales que permitían, en el modo como interpretamos, insertar discusiones relacionadas con las finanzas: Ética; Pluralidad Cultural; Medio Ambiente y Trabajo y Consumo. En esa inserción, entendemos que situaciones relativas al presupuesto doméstico, compras e impuestos podrían ser contempladas. Los objetivos de los Temas Transversales son lo de permitir a los estudiantes una participación activa y constructiva en la sociedad, en la que es necesario que ellos "se que sean capaces de elegir criterios de acción pautados en la justicia, detectando y rechazando la injusticia cuando se haga presente" (Brasil, 1998, p. 35).

El término Educación Financiera como tema para el trabajo en el espacio escolar es desencadenado con más destaque a partir de las discusiones ocurridas en el marco de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) y confirmadas en Brasil con la institución de la Estrategia Nacional de Educación Financiera (ENEF) en el año 2010. Entre sus diversas iniciativas para llevar Educación Financiera a diferentes sectores de la sociedad brasileña, encontramos el Programa Educación Financiera en las escuelas, coordinado por el Comité de Educación Financiera (Conef). Este comité publicó una colección de material didáctico específico sobre el tema, dirigido a todos los años de la Educación Básica, es decir, para los nueve años de la Enseñanza Fundamental y los tres años de la Enseñanza Media. La ENEF instituye que su finalidad es, entre otras, "promover la educación financiera y previsional y contribuir al fortalecimiento de la ciudadanía" (Brasil, 2010).

A partir de la institución de la ENEF, los contenidos referentes a la Educación Financiera empiezan a ganar espacio en las escuelas brasileñas. Con este movimiento, en el año 2018, con la publicación del documento de la Base Nacional Común Curricular (BNCC), la temática es propuesta como contexto a ser considerado en el currículo de la escuela básica. El documento, de carácter normativo, definió una serie de aprendizajes considerados esenciales para los estudiantes de ese grupo de edad, incluyendo la Educación Financiera como medio de trabajar con la resolución de problemas matemáticos. De este modo, se incluye el "estudio de conceptos básicos de economía y finanzas" así como "asuntos como tasas de interés, inflación, aplicaciones financieras e impuestos" (Brasil, 2018, p. 267). La inserción del tema está propuesta como una forma para el desarrollo de habilidades en la asignatura de Matemática relativa a los años finales de la Enseñanza Fundamental. Además de contenidos de la Matemática Financiera, como tasa de interés por ejemplo, de acuerdo con el texto de la BNCC, la Educación Financiera posibilita la discusión de temas relacionados al mundo del trabajo y consumo, así como “un estudio interdisciplinario que involucra las dimensiones culturales, sociales , políticas y psicológicas, además de la económica " (Brasil, 2018, p. 267).

Todos estos documentos sobre temas y currículo para la escuela básica en Brasil nos permiten comprender las *doxas* que son impuestas por el Estado por medio de sus políticas públicas y materiales de amplia divulgación dirigidos a la escuela. En el modo en que interpretamos, *doxa* es la representación de "un punto de vista particular" (Bourdieu, 2014, p. 238), pudiendo el Estado ser definido como "un principio de ortodoxia" (p. 30) y, en ese sentido, el Estado se coloca como "productor de principios de clasificación , es decir, de estructuras estructurantes capaces de ser aplicadas a todas las cosas del mundo, y en especial a las cosas sociales " (p. 227).

La Educación Financiera y las ideas que la permean, cuando son llevadas al aula es vista por nosotros como una *doxa* impuesta desde el punto de vista de los dominantes. Y esa imposición es vehiculada en Brasil por medio de la ENEF, instituida a nivel nacional, por lo tanto, por medio del Estado. Sin embargo, entendemos que hay otras fuentes productoras de materiales relacionados a la Educación Financiera para la escuela, pero nos atentamos en este texto a discutir las divulgaciones sobre el tema realizado por medio de los materiales publicados a partir de la ENEF por el gobierno federal, pues esos materiales tienen alcance en todo el territorio nacional y es gratuito.

Con los cambios percibidos en lo que se refiere al tratamiento de asuntos sobre las finanzas, presupuesto doméstico y otros, percibimos la interconexión entre los momentos vividos en la esfera de la sociedad con el currículo que se piensa para la escuela básica. Entendemos de ese modo el discurso de la Educación Financiera como una construcción social que está relacionada actualmente a los intereses del capitalismo y del neoliberalismo, como la construcción social de un *homo economicus* (Jardim, 2015, p. 12), según nos apunta los principios de la Sociología Económica.

Todo este tema tratado en ambiente escolar pasa a ser legitimado, por la institución que lo asume, como un tema necesario. Ello se debe a que la escuela provee, con las asignaturas y contenidos que enseña, "métodos y programas de pensamiento" (Bourdieu, 2015, p. 214) que definen caminos a ser recorridos por los estudiantes. Así, cuando el tema sobre las finanzas asume un carácter vinculado a los intereses del capitalismo, la escuela legitima ese punto de vista y corrobora para su implementación, reforzando la *doxa* impuesta por el Estado, que contribuye por reproducir el orden capitalista existente de forma eficiente.

Consideraciones finales

En el modo en que interpretamos los documentos de diferentes períodos de la educación de Brasil, por lá teoría de Bourdieu, se han verificado cambios interesantes.

Los cambios observados en cuanto a los contenidos que eran desarrollados por la Economía Doméstica y los contenidos de la Educación Financiera, evidencian diferentes objetivos colocados en la escuela en cuanto a los asuntos involucrando las finanzas. La primera tenía como preocupación el presupuesto de la familia y estaba orientada, en la escuela básica, a las niñas, teniendo en vista que cabía la mujer administrar las finanzas del hogar. La segunda – Educación Financiera - tiene la preocupación más orientada hacia el ámbito individual, es decir, conocimientos que involucra el ámbito de la familia / del grupo, ahora pasaron a ser tratados en el ámbito individual, tales como: presupuesto personal, decisiones de compras, espíritu empresarial y planificación para el futuro.

Por el análisis que realizamos, los documentos actuales revelan que la *doxa* impuesta por el Estado y legitimada en la escuela, refuerza el mensaje de una postura individualista en la sociedad, en el que saber manejar con dinero supone un éxito que está representado por una acumulación de riqueza e interpretado como una postura sana que lleva a una vida tranquila. En nuestro modo de ver, los estudios y conceptos de la Sociología, representados en este texto por el pensamiento del sociólogo Pierre Bourdieu, nos auxilia para pensar la escuela como un espacio de fuerte influencia en la formación de ideas y disposiciones en los estudiantes para actuar en la sociedad de acuerdo con los intereses que cada época los impone. De ahí, la Educación Financiera en la escuela contribuye a la construcción social de jóvenes capaces de lidiar con el capitalismo financiero y sus especificidades, reforzando los preceptos del neoliberalismo.

El presente trabajo fue realizado con apoyo de la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamiento 001.

Referencias bibliográficas

Bourdieu, P. (1989). Introdução a uma sociologia reflexiva. In: P. Bourdieu, *O Poder Simbólico* (pp. 17-58). Lisboa: Difel.
Bourdieu, P. (1996). *Razões Práticas.* Campinas, SP: Papirus.
Bourdieu, P. (2014). *Sobre o Estado.* São Paulo: Companhia das Letras.
Bourdieu, P. (2015). Sistemas de Ensino e Sistemas de Pensamento. In: S. Miceli, *A Economia das Trocas Simbólicas* (pp. 203-229). São Paulo: Perspectiva.
Bourdieu, P., & Passeron, J.-C. (2014). *A Reprodução: elementos para uma teoria do sistema de ensino. 7. ed.* Petrópolis, RJ: Vozes.
Brasil. (1879). *Decreto 7.247 de 19 de abril de 1879. Reforma o ensino primário e secundário no município da Côrte e o superior em todo o império.* Acesso em 28 de novembro de 2017, disponível em Câmara dos Deputados: http://www2.camara.leg.br
Brasil. (1946). *Decreto-Lei nº 8.530 de 2 de janeiro de 1946. Ensino Normal.* Acesso em 28 de novembro de 2017, disponível em Câmara dos Deputados: http://www2.camara.leg.br
Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2010). *Estratégia Nacional de Educação Financeira.* Acesso em 13 de março de 2017, disponível em Planalto: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2007-2010/2010/Decreto/D7397.htm

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular.* Acesso em 12 de junho de 2018, disponível em Minitério da Educação: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/04/BNCC_19mar2018_versaofinal.pdf

Conef. (2014). *Educação Financeira nas escolas: ensino fundamental: livro do professor.* Brasília: CONEF.

Farias, J. V. (2017). O Profmat e as relações distintivas no campo da matemática. *Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação e Ciências Humanas*. São Carlos, SP, Brasil: Unviersidade Federal de São Carlos.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2007). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados.

Jardim, M. C. (2015). Nem Sagrado, nem Profano: MercadoS como Fato Social Total. In: M. C. Jardim, *MercadoS: nem Sagrado, nem Profano* (pp. 7-18). São Paulo: Cultura Acadêmica.

Nogueira, C., & Nogueira, M. (2002). A Sociologia da Educação de Pierre Bourdieu: limites e contribuições. *Educação&Sociedade*, 15-36.

Raud-Mattedi, C. A. (2005). A construção social do mercado em Durkheim e Weber: análise do papel das instituições na sociologia econômica clássica. *Revista Brasileira de Ciências Sociais*, 127-142.

Romanelli, O. O. (1978). *História da Educação no Brasil.* Petrópolis, RJ: Vozes.

Silva, A. M., & Powell, A. B. (18 a 21 de julho de 2013). Um programa de Educação Financeira para a Matemática Escolar da Educação Básica. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática*. Curitiba, PR, Brasil.

Vilela, D. S., & Souza Neto, J. A. (julho de 2012). Práticas de avaliação e capital simbólico da Matemática: o caso da Obmep. *Rematec*, pp. 62-82.

USOS Y SIGNIFICADOS DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN UNA COMUNIDAD DE INGENIEROS ELECTRÓNICOS

USES AND MEANINGS OF LAPLACE TRANSFORM IN A COMMUNITY OF ELECTRONIC ENGINEERS

Falconery Mauricio Giacoleti-Castillo, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
falconery.giacoleti@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen
Se presenta un avance de un proyecto de investigación que se sitúa en el programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)*. Dicha investigación pretende contribuir a crear un marco de referencia sobre los *usos* y *significados* de la Transformada de Laplace (TL) que emerjan de una *Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos que diseñan Sistemas de Control (CCM(IE-SC))*. Presentamos cómo aparece la TL en algunos libros de texto del sistema escolar universitario de México y, en este sentido, el tratamiento que se le da en la Matemática Escolar, el cual ocurre con una centración al objeto matemático de la TL, dejando de lado su funcionalidad. Mencionamos algunos estudios que se han realizado acerca de la TL y cuál ha sido su interés de investigación, que gira en torno a estudiar el objeto matemático. Mostramos, entonces, la pertinecia de nuestra investigación que estudia los *usos* de la TL —que aluden al *Comportamiento Tendencial de las Funciones*— que se ponen en juego en la (CCM(IE-SC)).

Palabras clave: transformada de Laplace, usos y significados, ingenieros electrónicos

Abstract
An advance of a research project is presented which is situated in the socioepistemological programme *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)*. This research aims to contribute to creating a reference framework on the *uses* and *meanings* of the Laplace Transform (TL) that emerge from a *Mathematical Knowledge Community of Electronic Engineers working in Control Systems (CCM(IE-SC))*. We present how the TL appears in some textbooks of the university system of Mexico and, in this sense, the treatment given to it in School Mathematics, which occurs with a focus on the mathematical object of the TL, leaving aside its functionality. We mention some studies that have been made about the TL and what has been its research interest, which revolves around studying the mathematical object. We show, then, the relevance of our research that studies the *uses* of TL —which allude to the Trend Behaviour of Functions— that are put into play in the (CCM(IE-SC)).

Key words: Laplace transform, uses and meanings, electronic engineers

Introducción

En el nivel superior del sistema escolar aparece una integral impropia llamada Transformada de Laplace (TL). A diferencia de temas como la derivada o la integral, en los cuales, en el mejor de los casos, los textos o los profesores tratan que el estudiante construya y atribuya significados de esos conceptos a partir de conocimientos previos, la TL se presenta en el aula de manera artificiosa como una representación simbólica dada por la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Cordero y Miranda (2002) mencionan que la TL es introducida en el medio escolar como una herramienta cuyas propiedades formales son útiles para resolver cierto tipo de ecuaciones diferenciales, y en ningún momento es construida o motivada por algún medio físico o geométrico o a partir de un conocimiento previo. En ese sentido, podemos decir que la TL, en la Matemática Escolar (ME), carece de un marco de referencia de significados y origen de las condiciones que permitieron su construcción; centrando su atención en la fórmula como algo algorítmico, prevaleciendo de esta manera el utilitarismo del conocimiento matemático y no su funcionalidad (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Este proyecto de investigación se enmarca en el Programa Socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)* (Cordero, 2016a, 2016b). El propósito principal de SOLTSA es revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo y en la ciudad (Cordero, en prensa).

Nuestra investigación pretende, entonces, contribuir a crear un marco de referencia sobre los *usos* y *significados* de la Transformada de Laplace (TL) que emerjan de una *Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos que diseñan Sistemas de Control (CCM(IE-SC))*, con el fin de revelar los usos de este conocimiento matemático de dicha comunidad.

El constructo que denominamos *uso* lo entenderemos tomando en cuenta su *funcionamiento* y su *forma*. La función del *uso* será aquella función orgánica de una situación (*funcionamiento*) que se manifiesta por las "tareas" que componen la situación, y la *forma* del *uso* será la clase (tipo) de esas "tareas". El *funcionamiento* y la *forma* son un binomio inherente al *uso*, de modo que el primero se expresa en las ejecuciones, acciones u operaciones que se desarrollan con la situación, mientras que la *forma* es las maneras cómo se presenta tal *funcionamiento*. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica, que debatirá con las formas de los usos. A este acto de uso se le llamará *resignificación* de *usos* (Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010).

Problemática y algunos antecedentes

Al referirnos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la investigación ha reportado acerca de la importancia de considerar a todos los agentes involucrados en dicho proceso educativo. No obstante, también ha mostrado el otro lado de esta misma moneda;

> …cuando se habla del aprendizaje y enseñanza de la matemática, en las instituciones educativas o en los modelos educativos, siempre, hay un sujeto olvidado. Este sujeto tiene varias expresiones: la realidad, el cotidiano, los usos del conocimiento y, en términos más genéricos, la gente. Esta última es significativa porque hace explícito el olvido del que aprende, del trabajador, del nativo y del ciudadano. (Cordero, 2016)

Cuando nos olvidamos de ese sujeto, es equivalente a creer que solo en el objeto matemático se encuentra la fuente del conocimiento. Por tal razón,

> Es necesario recuperar la parte humana en la construcción del conocimiento y es precisamente el cotidiano lo que permitirá conseguirlo. Por tanto, resulta conveniente ampliar la problemática para lograr que estos elementos tengan cabida. Así, de enfocarse en los estudiantes de matemáticas en el aula, es preciso entender primero el cotidiano de los ciudadanos que se tienen enfrente. Se requiere ver al ciudadano que participa activamente en la vida cotidiana y que la modifica. Es importante que en el aula de matemáticas ya no se piense en el alumno, sino en el ciudadano. (Gómez y Cordero, 2010, p. 921)

Diversas investigaciones en matemática educativa que han realizado estudios en el campo de la ingeniería —algunas de ellas, ingeniería electrónica—, han tenido el interés de investigar asuntos relacionados con dificultades y/o habilidades operacionales de los estudiantes respecto a la TL, así como también sobre el papel que juega la TL en el desarrollo de proyectos que se le proponen a ingenieros en formación para que los lleven a cabo. Algunos estudios se interesan también en la implementación de software matemático cuando se resuelven problemas donde interviene la TL. En la Tabla 1 se presentan algunas de estas investigaciones.

Autores de la investigación	Interés de la investigación	Descripción
Jáuregui, Ávila y Nesterova (2007)	Habilidades	• Habilidades para representar analíticamente, en términos de la Función Escalón Unitario, las Funciones Definidas por Intervalos (FDI), con el aprendizaje de la TL de FDI. • Habilidades para realizar la representación gráfica.
Juárez y Irassar (2014)	Dificultades	• Dificultades en el cálculo de la TL de FDI escritas en forma analítica por partes o dadas en forma gráfica. • Dificultades para resolver ecuaciones diferenciales cuyo término no homogéneo es una función continua por partes. • Dificultades en la resolución de problemas que involucran procesos discontinuos
Ruiz, Camarena y del Rivero (2016)	Implementación de software. Conocimientos previos	La investigación se propone evaluar el desarrollo de habilidades operacionales de los estudiantes, al resolver eventos contextualizados de la TL en circuitos eléctricos, al emplear el software Maple 13.
Romo (2010)	El papel de la TL en proyectos que desarrollan ingenieros en formación	Se cuestiona sobre el papel que juegan la TL en el desarrollo de las tareas de proyectos de ingeniería y cuál sería la praxeología realmente útil dado el uso de los recursos tecnológicos actuales

Tabla 1. Algunas investigaciones sobre la transformada de Laplace en el campo de la Ingeniería

Al referirnos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general, y particularmente en la ingeniería, sabemos que existen grandes dificultades que debemos afrontar. Durante varias décadas se han llevado a cabo investigaciones que buscan esclarecer la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y cuyos resultados han posibilitado que se implementen cambios con el propósito de mejorar la calidad educativa de las matemáticas. Sin embargo, en general, estos cambios que se han implementado no han podido obtener los resultados que se anhelan. Comunmente, la visión de estas investigaciones gira alrededor de estudiar los objetos matemáticos y, particularmente, el interés de las que se muestran en la tabla 1 es estudiar el objeto matemático de la TL, no los usos del conocimiento que están presentes en diversas comunidades; como por ejemplo, los *usos* que un ingeniero electrónico pone en juego al trabajar con la TL, y que emergen en la comunidad de conocimiento a la que pertenece. No obstante, como se dijo antes, nuestra investigación se interesa en estudiar dichos *usos* y *significados*.

La Transformada de Laplace en libros de texto

Al revisar diferentes programas de estudio de varias escuelas del sistema escolar universitario de México —en particular, en el área de Ingeniería— se ha encontrado que la TL aparece por primera vez en los cursos de ecuaciones diferenciales y que casi todos los programas consultados tienen los mismos textos, entre estos, aparecen: Spiegel (1983), Edwards (1986), Zill (1986 y 1995). También, aparecen como referencias textos de otros autores como Braun (1990), Derrick y Grossman (1981), Simmons (1993), Pita (1989), Marcus (1993). En la mayoría de estos libros, la definición de la TL es la siguiente:

Dada una función $f(t)$ definida para $t > 0$, la transformada de Laplace de la función $f(t)$ es la función $F(s)$ definida como $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ para todos los valores de s para los cuales la integral converge.

La TL, además, aparece en otros cursos dirigidos a Ingeniería, entre estos cursos están algunos de probabilidad, en especial en Ingeniería Electrónica, en donde la TL aparece junto con las series de Fourier, teoría de control y al análisis de señales y sistemas. En general, estos cursos son posteriores a los de ecuaciones diferenciales. En los programas respectivos consultados aparecen textos de autores como O'Neil (1994), Kaplan (1972 y 1985), Ogata (1970), Gary (1983) y Kamen (1990). Estos dos últimos autores introducen la TL basándose en la transformada de Fourier, la cual tratan previamente. La presentan de la siguiente manera:

La transformada de Fourier de una función dada $f(t)$ se define como:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

siempre que la integral exista.
A partir de estas definiciones enuncian a la TL como:
La transformada lateral de Laplace de $f(t)$ se obtiene reemplazando $i\omega$ por $s = a + it$, con $a > 0$, entonces $ds = idt$ y la transformada lateral de Laplace es

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

siempre que la integral exista.

Después de esto, al igual que en los textos anteriores, se dan ejemplos para el cálculo de las transformadas, propiedades y condiciones para su existencia

Esta revisión sirve como punto de partida para mirar la forma en que se introduce la TL en el medio escolar, así como saber los problemas que se resuelven mediante esa herramienta y, de esta manera, dimensionar su papel predominante en lo habitual de la enseñanza en la Matemática Escolar.

Según Miranda (2001), en los textos de ecuaciones diferenciales, la introducción y definición de la TL no ha variado desde la década de los 50's y se revela la ausencia de argumentos que puedan dar significado gráfico o físico sobre el tipo de problemas que originaron su definición, esto implica que para enseñar la TL solo se parte de su definición simbólica. En algunos libros se dan referencias a que la TL se originó debido a los trabajos de Heaviside y sus métodos operacionales para resolver las ecuaciones diferenciales, pero no se dice cómo fue esto, ya que en esos libros los capítulos sobre soluciones de ecuaciones diferenciales por operadores (o métodos cortos) están desconectados con el capítulo de la TL, pues no se explica la relación de un método con el otro.

Miranda (2001) concluye que, en la revisión de textos que llevaron a cabo, en el sistema educativo, la enseñanza de la TL está limitada a la manipulación de su expresión integral, calculando la transformada de funciones, probando propiedades de la TL, para después establecer un algoritmo que permite obtener la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales —comúnmente, ecuaciones diferenciales lineales—.

En ese sentido, dado este tratamiento que se le da a la TL en la Matemática Escolar, ocurre una centración al objeto matemático. El discurso Matemático Escolar no le da a la TL otro valor distinto que el algorítmico, dejando de lado el valor funcional de la TL, que se desarrolla en diferentes escenarios profesionales (Comunidades de Conocimiento Matemático).

Consideraciones teóricas y metodológicas

Con base en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013) se plantea que la ME ha centrado su atención en el objeto matemático y ha generado un discurso Matemático Escolar (dME), nocivo, que ha soslayado un actor principal en la construcción de conocimiento matemático: el cotidiano (*sujeto olvidado*), esto es, la realidad de los sujetos, lo habitual de los escenarios donde este se sitúa y donde expresa usos rutinarios (Cordero, 2016a). La ME debe valorar los usos y significados de la gente e incorporarlos en la enseñanza de la matemática, reconociendo que las *prácticas sociales* son las generadoras de conocimiento matemático. Según menciona Cordero (2016b), el constructo *practica social* valora el sujeto olvidado, que es de vital importancia recuperar. De esta manera se reconocerá no solo una epistemología —dominante—, sino que se valorará el conocimiento matemático que la gente produce y usa en su entorno.

La postura teórica desde la cual concebimos al conocimiento matemático, nos permite entenderlo desde una racionalidad contextualizada, ya que, como resultado de diversas investigaciones que dotan de evidencia empírica a la TSME, se ha configurado una *Socioepistemología del Cálculo y del Análisis*. Esta obedece a estructuras epistemológicas distintas, denominadas *Situaciones,* cada una de ellas (variación, transformación, aproximación, selección) construida a partir de *significaciones* relativas a su estructura epistemológica; por ejemplo, para la construcción de *lo matemático* en la *situación de transformación*, las *significaciones* son los patrones de comportamiento gráfico y analítico, los *procedimientos* derivados de las significaciones son la variación de los parámetros, *los instrumentos* de las *significaciones* son las instrucciones que organizan comportamientos. Todo esto genera la *argumentación* de la *situación de transformación*: el *Comportamiento Tendencial*. Esta *argumentación*, *Comportamiento Tendencial* es la resignificación de usos de las gráficas (Cordero, 2008).

Como se mencionó en párrafos anteriores, las investigaciones acerca de la TL no dan cuenta de sus *usos* y *significados*; no obstante, nuestra investigación se propone contribuir a crear un marco de referencia sobre los *usos* y *significados* de la TL que emerjan de una CCM(IE-SC), con el fin de revelar los *usos* de este conocimiento matemático de dicha comunidad, para así recuperar el *sujeto olvidado* —el cotidiano del ingeniero—. Esto contribuiría con el ideal de incorporar ese *sujeto olvidado* en el aula donde se enseña la TL, trastocando así la ME. De esta manera el ingeniero en formación, en sus clases de matemáticas de la TL, estaría más cercano a ciertos *usos* y *significados* que son propios de su comunidad.

La Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Eléctrónicos que Diseñan Sistemas de Control (CCM(IE-SC))

La consideración que estamos teniendo de Comunidad de Conocimiento Matemático (CCM) posee elementos que caracterizan lo propio de lo que es comunidad, es decir su naturaleza. No cualquier conjunto de personas agrupadas componen una comunidad; se debe distinguir a la comunidad de conocimiento de la individualidad, de lo público y de la universalidad o de lo cosmopolita. En ese sentido reconocemos tres elementos que constituyen una comunidad: i) *Reciprocidad* es el conocimiento que se genera por la existencia de un compromiso mutuo; ii) *Intimidad* es el uso de conocimiento propio y privado que no es público; iii) *Localidad* es el conocimiento local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, lo regional, entre otros. Estos tres elementos nos permiten separar lo individual, lo público y lo cosmopolita e identificar lo propio de comunidad. De ahí la importancia de formular el constructo Comunidad de Conocimiento Matemático como una triada (reciprocidad, intimidad, localidad). Otro aspecto consiste en el uso del conocimiento matemático. Para apreciar el uso se requiere de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia, en el seno de su comunidad. Por ello, importa la continuidad del conocimiento, es decir, la institucionalización como un eje transversal. Otro eje transversal es la identidad, la cual hace que una comunidad se distinga de otra. Esta identidad se conforma de momentos, tales como: legitimidad, resistencia y proyecto (Cordero, 2016a; Cordero y Silva-Crocci, 2012).

En nuestra Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos que diseñan Sistemas de Control CCM(IE-SC) que estudiaremos, hemos identificado aspectos de los elementos que constituyen dicha comunidad, los cuales son: i) *Situación* de *Transformación*, la cual se genera por el diálogo con el otro, en la interacción con su comunidad, en la reciprocidad; ii) *Comportamiento Tendencial de las Funciones*, la categoría de conocimiento —propio y privado— de la comunidad, que es la expresión de la intimidad; iii) *Situación de Sistemas de Control*, la cual es la problemática local de la comunidad, los intereses comunes, la jerga disciplinar, etc. Ver figura 1.

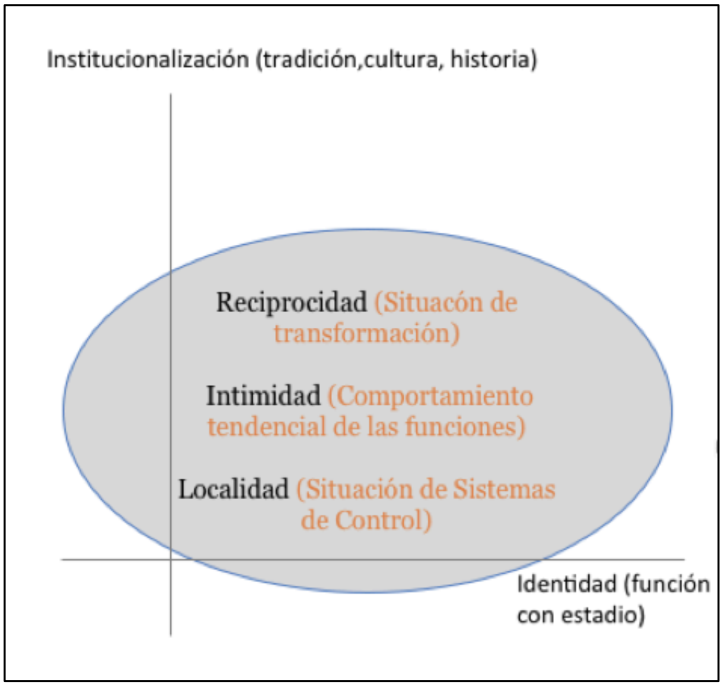


Figura 1. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos que diseñan Sistemas de Control (CCM(IE-SC))

Para dar cuenta de la emergencia de los *usos* y *significados* de la Transformada de Laplace en la CCM(IE-SC), en esta investigación tomamos una metodología cualitativa, articulando elementos de la Etnografía (Güber, 2001). Para adentrarnos en la CCM(IE-SC) y revelar los usos de la TL, tomamos como método la *inmersión,* en un sentido de acompañamiento permanente del investigador con la comunidad. Para tomar datos, se hará uso de técnicas que posibiliten el diálogo del investigador con el ingeniero en su profesión (entrevistas no estructuradas y semiestructuradas, observación no participante, etc.).

El siguiente apartado presenta una epistemología de la TL construida en Miranda (2001), la cual será base para analizar los usos y significados que emerjan de la comunidad de ingenieros electrónicos que estudiaremos en nuestra investigación.

Una epistemología de la Transformada de Laplace

A partir de la revisión de las ideas génesis de la TL, que llevó a cabo Miranda (2001), se dice que su representación simbólica posee gran riqueza de contenidos, tal que cada uno de los elementos de la integral tiene significado propio. Esto se muestra en la siguiente tabla:

<table>
<tr><td rowspan="4">$\int_a^b e^{-st} f(t)dt$</td><td>$f(t)$</td><td>e^{-st}</td><td>$\int_a^b$</td><td>Límites de integración: a, b</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Representa una serie de potencias (una función generatriz)</td><td>Factor para hacer converger la integral impropia</td><td rowspan="3">La conversión de una suma Σ cuando las variables son continuas</td><td rowspan="2">Parte de las condiciones para representar una función como una integral de Laplace</td></tr>
<tr><td>Factor para convertir una ecuación diferencial en una exacta</td></tr>
<tr><td>Representación de voltajes</td><td>Cálculo de estados estacionarios, en $t = \infty$, a partir de estados iniciales, en $t = 0$</td></tr>
</table>

Tabla 2. Significados de la transformada de Laplace (Miranda, 2001)

Además de lo mostrado en la tabla 2, Miranda (2001) expresa que desde sus orígenes la integral $\int_a^b e^{-st} f(t)dt$ y sus antecedentes fueron creados implícitamente —en el caso de Euler— o explícitamente —en el caso de Laplace— con la única finalidad de resolver problemas que involucraban ciertos tipos de ecuaciones diferenciales o en diferencias y que, para la justificación de su construcción, en ningún momento de su desarrollo se le asoció con los argumentos geométricos de área o volumen normalmente asociados a una integral definida.

La epistemología que propone Miranda (2001) está conformada por significados de origen y evolución alrededor del objeto matemático de la TL, por lo tanto, los usos de este conocimiento no se muestran como resultado de la investigación. Esto se debe a que en aquel entonces no era el interés de dicha investigación revelar el conocimiento funcional, sin embargo, en la conformación de esta epistemología del objeto, podemos inferir algunos usos de la TL que subyacen en dicha epistemología. Por lo cual, en esta etapa de nuestra investigación, hemos llevado a cabo una reinterpretación de esta epistemología a la luz de la *Situación de Transformación* en los sistemas de control. Ver figura 2.

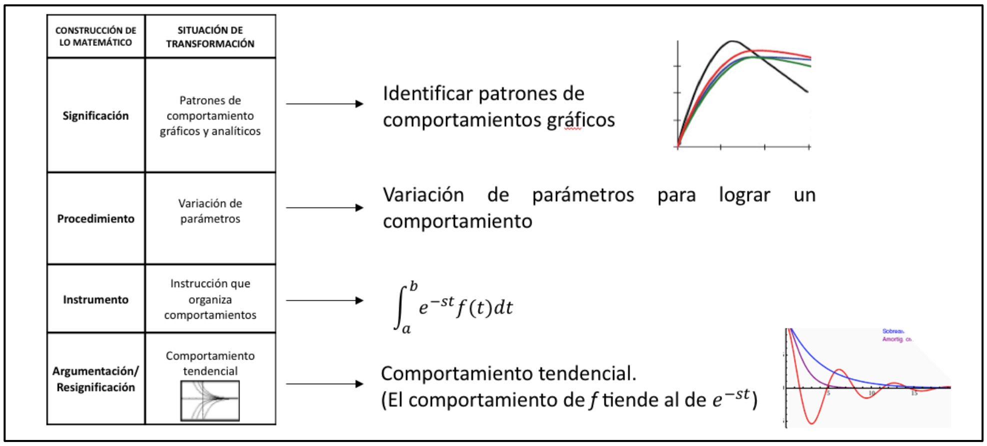


Figura 2. Reinterpretación de la epistemología de Miranda (2001) a través de la Situación de Transformación

Esta *Situación Específica (Se)*, es la situación núcleo, en la que se manifiesta la epistemología de usos de la TL (*Categoría de Conocimiento Comportamiento Tendencial de las Funciones*), la cual en nuestra *Hipótesis Epistemológica* que llevaremos a la inmersión que se hará en la CCM(IE-SC).

Tomamos la situación de sistemas de control ya que es una de las actividades centrales en la práctica profesional del ingeniero electrónico. Mendoza y Cordero (2018) señalan que los dispositivos artificiales construidos por ingenieros se conforman de procesos que se requieren controlar, de tal manera que se puedan reproducir las características y la estructura deseadas. Esto alude a la categoría de conocimiento *Comportamiento Tendencial de las Funciones*, cuando se busca *reproducir un comportamiento deseado*. Esta es la epistemología que emerge en la CCM(IE-SC) y de cuya emergencia daremos evidencia en nuestra investigación.

Esta categoría de conocimiento matemático (*Comportamiento Tendencial de las Funciones*) subyace, además, en la Transformada de Laplace al intervenir en un sistema de control, cuando se ejecuta como instrumento la ecuación diferencial —transformada mediante la TL— que modela el fenómeno (comportamiento de la función de transferencia y de la señal de entrada y de salida). Además, esta categoría de conocimiento alude a lo que mencionó el mismo Laplace (1988) en su Ensayo Filosófico, respecto a lo que hoy conocemos como la Transformada de Laplace: "...de lo único que se trataba es de reducir la integral definida a una serie convergente. Es lo que he obtenido por un procedimiento que hace converger la serie con rapidez..." (p. 65).

Para finalizar

Tal como ya se dijo, el tratamiento de la Transformada de Laplace (TL) en la Matemática Escolar ocurre con una centración al objeto matemático. El discurso Matemático Escolar no le da a la TL otro valor distinto que el algorítmico, dejando de lado su valor funcional, que se desarrolla en diferentes escenarios profesionales —como, por ejemplo, en una Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos que diseñan Sistemas de Control.

La categoría de conocimiento Comportamiento Tendencial de las Funciones —argumentación de la *Situación de Transformación* que hasta ahora se ha construido— es una epistemología de usos, que está presente en las comunidades de conocimiento matemático.
Habrá que llevarse a cabo investigaciones—tal como esta que se está desarrollando— en las que nos sumerjamos en las comunidades de conocimiento matemático para revelar y valorar los usos del conocimiento que dichas

comunidades construyen. De esta manera podremos encaminarnos hacia la reciprocidad, transversalidad y horizontalidad de los saberes. Con esto estaríamos ampliando el marco de referencia de los usos del conocimiento matemático, favoreciendo así el aprendizaje de resignificaciones.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistelógica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos-CLAME A.C.

Cordero, F. (2016). III Semana de las Pedagogías de la U.Chile. Facultad de Filosofía y Humanidades. Universidad de Chile. Chile. Archivo de resumen. Recuperado de http://www.filosofia.uchile.cl/agenda/127793/iii-semana-de-las-pedagogias-de-la-uchile

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente en matemáticas: Pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, ..., D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/ xxjnem/

Cordero, F. (en prensa). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2),187-214.

Cordero F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. y Miranda, E. (2002). El Entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(2), 133-168.

Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamerica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 15(3), 295-318.

Gómez, , K., y Cordero, F. (2010). Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 919-927. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Guber, R. (2001). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad.* Bogotá: Ed. Norma.

Jáuregui, E., Ávila, J. y Nesterova, E. (2007). El aprendizaje del tema “transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos” con apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 132-137. Camagüey: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Juárez, A. y Irassar, L. (2014). Sobre el aprendizaje de la transformada de Lapace: algunas dificultades y una propuesta didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 977-985. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Laplace, P. (1988). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (traducción de Pilar Castillo). México: Alianza Editorial.

Mendoza, J., y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.

Miranda, E. (2001). *Entendimiento de la transformada de Laplace. Caso de una descomposición genética*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Romo A. (2010). Projets d'ingénierie: étude d'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 201-218.

Ruiz, L., Camarena P. y Del Rivero S. (2016). Prerrequisitos deficientes con software matemático en conceptos nuevos. Transformada de Laplace. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 21* (69), 349-83.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

DIDACTICAL SUITABILITY CRITERIA IN TEACHER TRAINING COURSES

María José Seckel, Adriana Breda, Vicenç Font
Universidad Católica del Maule (Chile), Universidad de Barcelona (España)
mjseckel@ucm.cl, adriana.breda@gmail.com, vfont@ub.edu

Resumen
En este curso, con la participación activa de los asistentes, primero se analizó y valoró una tarea de clase con el objetivo de conocer los aspectos que los asistentes consideran relevantes para implementarla en sus aulas; a continuación, se comentaron las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas que permiten dar una primera respuesta a lo que se entiende por calidad de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y se observa cuáles han sido utilizadas por los asistentes. Posteriormente, se profundizó en la pregunta ¿Cómo debe ser una (buena) clase de matemáticas? y se introducen los criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, como respuesta a esta pregunta. Por último, se trabajaron algunas tareas que se han utilizado en la formación de profesores para introducir alguno de dichos criterios y componentes.

Palabras clave: formación de profesores. enfoque ontosemiótico. criterios normativos, idoneidad didáctica

Abstract
In this Course, with the active participation of the attendees, first a class task is analyzed and valued with the objective of knowing the aspects that the assistants consider relevant to implement it in their classrooms; afterwards, the current trends in the teaching of mathematics that allow us to give a first response to what is understood by quality of a teaching and learning process of mathematics are discussed and the ones which have been used by the participants, are observed. Later, the question "How should a (good) class of mathematics be? is deeply analyzed. Didactic suitability criteria along with their components and indicators are introduced as an answer to this question. Finally, attendees work on some tasks that have been used in teacher training to introduce some of these criteria and components.

Key words: teacher training, ontosemiotic approach, normative criteria, didactical suitability

Introducción

Font y Godino (2011) afirman que a la Didáctica de las Matemáticas (DM) se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar su mejora. Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora.

Diversas tendencias sobre la formación de profesores, tanto inicial como continua, proponen la investigación del profesorado y la reflexión sobre la práctica docente como una estrategia clave para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza. En esta línea de potenciar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, el constructo criterios de idoneidad didáctica (y su desglose en componentes y descriptores), propuesto en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, puede ser utilizado como una herramienta para organizar la reflexión del profesor – tal como se está haciendo en diferentes procesos de formación en España, Ecuador, Panamá, Chile y Argentina (Breda, Font, Lima & Pereira, 2018).

La noción de idoneidad didáctica es una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. Se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica: Idoneidad Epistémica, Idoneidad Cognitiva, Idoneidad Interaccional, Idoneidad Mediacional, Idoneidad Emocional e Idoneidad Ecológica.

La operatividad de los criterios de idoneidad exige definir un conjunto de componentes e indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas.

En este curso se explicó el constructo Criterios de Idoneidad (con sus componentes e indicadores) y se mostró cómo se ha enseñado, en diferentes ciclos formativos en cursos de grado y de postgrado de varios países, como herramienta para organizar la reflexión del profesor.

Marco teórico

En el campo de la Educación Matemática no hay un consenso sobre la noción de calidad y, en particular, no hay consenso sobre los métodos para la valoración y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Básicamente existen dos maneras de afrontar esta problemática, desde una perspectiva positivista o desde una consensual (Font y Godino, 2011). Desde la primera, la investigación científica realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a alcanzar, o, como mínimo, nos dirá cuáles son las condiciones y restricciones que hay que tener en cuenta para conseguirlos. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice cómo guiar la mejora de los procesos de instrucción de las matemáticas, debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre "lo que se puede considerar como mejor".

La noción de idoneidad didáctica propuesta por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007) se posiciona en la perspectiva consensual. La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, aunque sea local, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas?

Para responder a esta pregunta, es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad relacionada con la educación matemática; clarificando, a ser posible, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en la generación de dichos consensos. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de criterios de idoneidad didáctica, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

La noción de idoneidad didáctica es, pues, una respuesta parcial a la siguiente problemática: ¿Qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, que permitan evaluar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar el desarrollo de esta competencia? Los criterios de idoneidad (CI) pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones. Los criterios de idoneidad son útiles en dos momentos de los procesos de instrucción. A priori, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". A posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado. En el EOS se consideran los siguientes criterios de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

1. Idoneidad Epistémica, para valorar si las matemáticas que están siendo enseñadas son "buenas matemáticas".
2. Idoneidad Cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de aquello que los alumnos saben, y después del proceso, si los aprendizajes adquiridos están cerca de aquello que se pretendía enseñar.
3. Idoneidad Interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
4. Idoneidad Mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. Idoneidad Emocional, para valorar la implicación (intereses, motivaciones,) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
6. Idoneidad Ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

La operatividad de estos criterios exige definir un conjunto de indicadores observables, que permitan valorar el grado de idoneidad de cada uno de los criterios. Por ejemplo, todos concordamos que es necesario implementar unas "buenas" matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por ello. Para algunos criterios, los descriptores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo, para el criterio de idoneidad de medios), para otros, como es el caso de la idoneidad epistémica es más difícil. En Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

Desarrollo

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, se puede explicar como mínimo de dos maneras diferentes. Una primera posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las

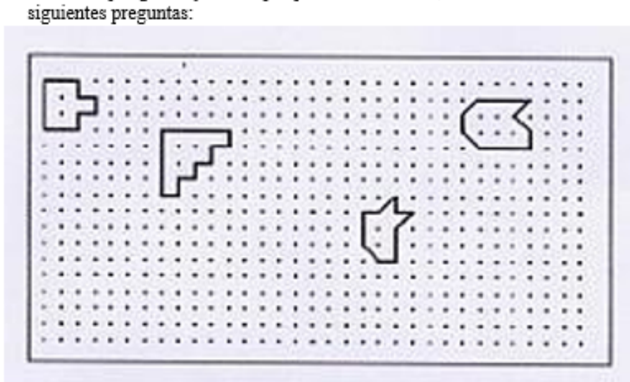
Matemáticas, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos.

Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. Esta última explicación donde más plausible parece es en la formación de futuros profesores, ya que es evidente que ellos no han participado en la generación de los consensos que son el soporte de los criterios de idoneidad didáctica. Por tanto, en la formación inicial de profesores, y también en la formación continua, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. Siguiendo esta última idea, el taller sigue las siguientes fases:

a) *Análisis de casos (sin teoría)*. Se propone a los participantes la resolución y el análisis didáctico de una tarea y se les pide que comenten si la utilizasen ellos y por qué. Se trata de que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos. En particular, la tarea propuesta es la de la Figura 1.
b) *Tendencias en la enseñanza de las matemáticas*. La tarea analizada se ha seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas. A continuación, se hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de las matemáticas y se comentan las que han sido utilizadas por los asistentes.

Con relación a las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas se comenta que son una primera manera, un poco difusa, de observar consensos en la comunidad que se preocupa por la educación matemática. Estas tendencias se pueden considerar como regularidades que se pueden hallar en los discursos sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas, ya que se considera que la enseñanza realizada según estas tendencias es de calidad. Algunas de ellas son específicas de la enseñanza de las matemáticas, mientras otras son aplicables en otras áreas del conocimiento. Tales tendencias pueden ser inferidas de las publicaciones más relevantes del área (por ejemplo, *handbooks* sobre investigación en educación matemática). Las principales tendencias que se tienen en cuenta son: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

6. Con estos polígonos y otros que puedes construir (tanto como sean necesarios) responde a las siguientes preguntas:



a. Construye las filas de la tabla siguiente tomando como unidad de área el cuadrado determinado por cuatro puntos de la trama.

Figura	Area	Puntos interiores (i)	La mitad de los puntos de la frontera (b/2)
1	7	2	6
2			
3			
4			
5			
...			

b. ¿Encuentras alguna relación entre el área, los puntos interiores y los puntos de la frontera? ¿Podrías representarlo algebraicamente?

REFLEXION Y ANALISIS DIDACTICO

¿Llevaríais estas actividades a un aula de matemáticas (Si la respuesta es sí, específica el curso)? ¿Por qué? (explica las razones por las que crees que se deben implementar o no)

Figura 1. Tarea sobre Teorema de Pick.
Fuente: Elaboración propia.

c) *Teoría (criterios de idoneidad*). Se explican elementos teóricos a los participantes, en concreto se les explican los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores.

Se explicó que los criterios de idoneidad didáctica deben ser entendidos como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar mejor. Desde esta perspectiva, la Didáctica de las Matemáticas nos puede ofrecer principios provisionales consensuados por la comunidad interesada, que pueden servir para guiar y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. También se explicó que para el desarrollo del constructo idoneidad didáctica, se ha considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del NCTM (2000) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Se trata de un constructo multidimensional que se tiene que descomponer en idoneidades parciales, componentes e indicadores. Para avanzar en esta dirección, se ha considerado que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM, reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los criterios de idoneidad didáctica, o bien podían contemplarse como componentes suyos.

Se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis idoneidades parciales, las cuales, a su vez, lo hacen en componentes e indicadores. La lista completa de los componentes e indicadores para todas las idoneidades se puede consultar en Breda y Lima (2016), Seckel (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017) ya que, por cuestiones de espacio no se han podido incorporar en este trabajo.

Con relación a los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad se comenta que se necesitan unos descriptores que los hagan operativos ya que, por ejemplo, todos estamos de acuerdo en que hay que impartir unas buenas matemáticas, pero podemos entender cosas muy diferentes por “buenas matemáticas”. También se comenta que para algunos criterios, los indicadores son relativamente fáciles de consensuar (por ejemplo para el criterio de idoneidad de los medios) y que, en cambio, para otros criterios la cuestión de ponerse de acuerdo no es tan fácil.

Mediante diferentes tareas el grupo va acordando diferentes criterios, las cuales suelen encajar fácilmente con los propuestos en Breda y Lima (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017), aunque pueden surgir nuevos componentes.

d*) Resolución de tareas usadas en la formación de profesores para hacer emerger algunos de los componentes o indicadores de los CI*. Se muestran y resuelven algunas tareas para ilustrar cómo los CI se enseñan en la formación de profesores. Se trata de tareas como la siguiente (ver figura 2), relacionada con el componente <<muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar>>:

TAREAS: COMPLEJIDAD DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS (Pendiente)

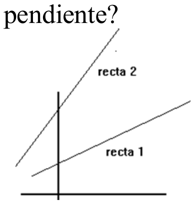
A continuación, tienes diferentes significados de la Pendiente y diferentes actividades. Asocia cada significado con la actividad que pone en juego este significado para su resolución (justifica la asociación).

Significados:

a) Significado geométrico: la pendiente determina la inclinación de la recta
b) Significado trigonométrico: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas.
c) Significado algébrico: el número que multiplica a la x en la fórmula $y = mx + n$
d) Significado funcional: el aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.

Actividades:

Actividad 1. ¿Cuál de las rectas siguientes tiene más pendiente?



Actividad 2. Escribe la fórmula de las siguientes funciones:

Pendiente	-2	3	0
Ordenada en el origen	0	4	-5

Actividad 3. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 4x + 5?

Actividad 4. Dibuja el gráfico de la función y = 5x + 1 y di si son correctos o no los comentarios de los siguientes estudiantes:
Juan: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba en vertical hasta volver a tocar la recta.

Alba: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos una unidad hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia abajo en vertical hasta tocar la recta.
José: Si nos situamos en el origen de coordenadas y nos desplazamos cinco unidades hacia la derecha, nos tenemos que desplazar 1 unidad hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.
Ana: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos dos unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 10 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.
Alberto: Si nos situamos en el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas y nos desplazamos 3 unidades hacia la derecha, después nos tenemos que desplazar 15 unidades hacia arriba en vertical hasta tocar la recta.
Laura: Si nos situamos en un punto cualquiera de la recta y nos desplazamos un número de unidades en horizontal, para volver a tocar la recta nos tenemos que desplazar 5 unidades hacia arriba por cada unidad de desplazamiento horizontal.

Actividad 5. Halla la pendiente de una recta que forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje abscisas.

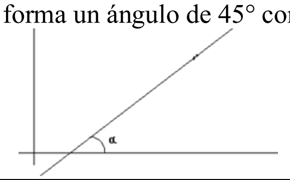


Figura 2. Tareas sobre representatividad de la complejidad de objetos matemáticos
Fuente: elaboración propia.

e) *Aplicación de los criterios para valorar episodios de aula.* Se propone a los participantes la valoración de episodios de aula utilizando los CI, sus componentes e indicadores.

En particular, se propone a los participantes la valoración de la idoneidad interaccional de un episodio descrito en Font, Planas y Godino (2010) — en este episodio un grupo de tres alumnos de 15-16 años resuelven un problema contextualizado en una clase de cuarto de Enseñanza Secundaria Obligatoria (España) durante diez minutos—. En la valoración de este episodio se manifiestan apreciaciones negativas en torno a la práctica profesional del profesor del episodio. Para argumentarlas, se mencionan, entre otros aspectos, el hecho de que el profesor no ha gestionado bien algunas intervenciones de los alumnos o bien que ha creado un clima emocional desfavorable para dos de ellos, o que los ha excluido. También, en algún caso, se dice cómo tendría que haber actuado el profesor del episodio. Aunque también hay opiniones de que el profesor ha gestionado bien el episodio. Como resultado de la discusión que se produce, al final se llega a un consenso de que se puede valorar negativamente la gestión del profesor porque ésta ha producido la exclusión de dos de los alumnos.

Conclusiones

Se observa que en este curso sucede lo mismo que en otros similares (Breda, Pino-Fan y Font, 2017), en particular se observa que: 1) Los participantes, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. 2) Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica. 3) La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

También se evidencia uno de los problemas observado en cursos similares relacionado con el criterio de idoneidad epistémica, ya que, para su aplicación, se precisa de una caracterización de un significado de referencia, que dé cuenta de la complejidad del objeto matemático que se está tratando (representaciones diferentes, propiedades, representaciones equivalentes, definiciones, argumentos, propiedades, tipos de problemas, etc.) y, en muchos casos, los participantes no tienen la suficiente competencia de análisis de la actividad matemática para poder caracterizar mínimamente dicha complejidad.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias

Breda, A., Font, V. & Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R. & Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162 -176

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018) Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., & Lima, V. M. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal Of Mathematics Science And Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* Tesis de doctorado no publicada. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

MATEMÁTICA NAS PRAÇAS: CONTRIBUIÇÕES PARA A FORMAÇÃO DOCENTE

MATHEMATICS IN THE SQUARES: CONTRIBUTIONS TO TEACHER TRAINING

Eliane Fonseca Campos Mota, Wesley Monteiro de Carvalho
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Goiano – Campus Urutaí (Brasil)
eliane.campos@ifgoiano.edu.br, wesleyifgti@gmail.com

Resumo
Relato a minha experiência vivenciada no projeto “Matemática nas Praças”, coordenado e desenvolvido, respectivamente, por professores e acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática do IF Goiano Campus Urutaí, buscando aproximar a matemática formal do dia-a-dia da comunidade. Ocorreu nas praças públicas das cidades de Pires do Rio-Go, Orizona-Go, Urutaí-Go e Ipameri-Go na Semana Nacional da Ciência e Tecnologia, em outubro de 2017, para estudantes e público em geral. Apliquei o jogo de tabuleiro pinos coloridos. Dentre as contribuições para a minha formação estão a importância do planejamento, o jogo como ferramenta pedagógica e o trabalho com a inclusão.

Palavras-chave: matemática, inclusão, jogos, formação docente

Abstract
I report my experience in the project "Mathematics in the Squares", coordinated and developed, respectively, by professors and academics of the Degree in Mathematics of IF Goiano Campus Urutaí, seeking to approach the formal mathematics of the day to day of the community. It occurred in the public squares of the cities of Pires do Rio-Go, Orizona-Go, Urutaí-Go and Ipameri-Go in the National Science and Technology Week, in October 2017, for students and general public. I applied the board game colored pins. Among the contributions to my training is the importance of planning, the game as a pedagogical tool and working with inclusion.

Key words: mathematics, inclusion, games, teacher training

Introdução

Este relato descreve a minha experiência vivenciada na aplicação do tabuleiro Pinos Coloridos no desenvolvimento do projeto de extensão “Matemática nas Praças” executado nas cidades de Pires do Rio-Go, Orizona-Go, Urutaí-Go e Ipameri-Go na Semana Nacional da Ciência e Tecnologia ocorrido em outubro de 2017. Mas, de que projeto estamos falando?

O Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) propôs em 2017 para as Universidades e Institutos Federais que ofertam o Curso de Licenciatura em Matemática que estas elaborassem e desenvolvessem um projeto com a temática “A matemática está em tudo”. Essa temática foi escolhida devido ao Brasil sediar dois eventos importantes na área da matemática em 2017, a saber, a Olimpíada Internacional da Matemática e o Congresso Internacional de Matemáticos. Alguns objetivos da proposta são “estimular a divulgação e a popularização da matemática, estimular o interesse pela matemática, colaborar com a melhoria da educação em matemática e promover as comemorações do Biênio da Matemática no Brasil, em 2017 e 2018” (MCTIC, 2017).

Pensar um projeto que atendesse a temática “a matemática está em tudo” parecia ser fácil, mas na verdade foi um desafio, pois, essa temática remetia a contextualização e a interdisciplinaridade que são dois aspectos que precisam ser melhorados no ensino da matemática no Brasil, que ainda está centrada na resolução de exercícios. “Contextualizar é problematizar o assunto em estudo a partir dos conteúdos dos componentes curriculares fazendo a vinculação com a realidade, posicionando-os no contexto” (Dias, 2016). Ao contextualizar, o conteúdo passa a ter significado para o aluno e se torna relevante. Pode se contextualizar de diversas maneiras, seja por meio de um jogo, pela História da Matemática, analisando uma conta de energia ou água, por exemplo, por meio da tecnologia, dentre outros. É perceptível que a matemática está presente nos mais diversos campos de atuação, eis alguns desses campos, a “[...] agricultura, pecuária, biologia, engenharia, demografia, medicina, sociologia, política, atividades tecnológicas, industriais, comerciais, administrativas[...], além daquelas relativas a ações bélicas, lamentavelmente [...]” (Huete & Bravo, 2007, p.18,). Contudo, a matemática também está mais perto de nós e em situações corriqueiras, como por exemplo, na culinária, na moda, nas movimentações bancárias, compra e venda, na decoração ou reorganização do espaço de nossa casa, no planejamento do nosso dia, no clima e temperatura da nossa cidade, no nosso corpo, nas brincadeiras e jogos, dentre outras situações. No caso da interdisciplinaridade, muito se tem discutido e pouco se tem praticado nas escolas brasileiras. “[...] embora a multiplicidade de fatores sociais, econômicos e culturais acene para a interdisciplinaridade como uma solução para os limites e as incapacidades das disciplinas isoladas de compreender a realidade responder às demandas do mercado de trabalho, na prática, difunde-se ainda na maioria das escolas um conhecimento fragmentado, deixando para o aluno estabelecer sozinho as relações entre os conteúdos” (Tomaz & David, 2008, p.13).

No contexto escolar também vemos a aplicação da matemática, como por exemplo, nas disciplinas de física, química, artes, ciências biológicas, geografia e história. Como juntar tudo isso, ou parte disso, ¿num projeto de extensão? Esses dois aspectos relevantes, a contextualização e a interdisciplinaridade, precisam se fazer presentes já na formação inicial de professores de matemática. Primeiramente foi preciso pensar o espaço para desenvolver esse projeto e o que levar para esse espaço de forma que mostrasse a matemática presente nos mais diversos campos de atuação, no cotidiano e nas disciplinas do contexto escolar da educação básica. Surge então, o projeto de extensão “Matemática nas praças” elaborados pelos professores de matemática, aprovado e financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e executado com o apoio e organização dos licenciandos do Curso de Licenciatura em Matemática do IF Goiano Campus Urutaí”. O objetivo desse projeto foi aproximar a matemática do dia-a-dia da comunidade, nas praças públicas das cidades de Pires do Rio, Orizona, Urutaí e Ipameri trazendo para o evento uma matemática contextualizada e interdisciplinar.

Desenvolvimento

O evento "Matemática nas Praças" foi realizado nos dias 24, 25, 26 e 27/10/2017, respectivamente, na Praça Gaudêncio Rincon Segóvia em Pires do Rio – GO; na Praça Calçadão em Orizona – GO; na Praça do Museu em Urutaí – GO e na Praça da Igreja Matriz do Divino Espírito Santo em Ipameri-Go. Teve duração de 9 horas, iniciando-se às 8h e finalizando às 17h. O projeto teve o apoio do IF Goiano Campus Urutaí, IF Goiano Campus Ipameri, Diocese de Ipameri, Prefeituras Municipais, Companhia Saneamento de Goiás S.A (Saneago), Centros de Convivências dos municípios e algumas escolas.

Participaram do evento as escolas municipais, estaduais e particulares, desde o ensino fundamental I até o ensino médio, bem como toda comunidade, porém, as escolas predominaram no evento.

Foram desenvolvidos jogos matemáticos e quebra-cabeças, exposições, oficinas e teatro. Os jogos matemáticos e quebra-cabeças propostos para o evento foram disponibilizados pelo Laboratório de Educação Matemática do Instituto Federal Goiano - Campus Urutaí e outros foram confeccionados pelos próprios licenciandos. Alguns dos jogos e quebra-cabeças desenvolvidos foram: jogo da velha 3D, dama vertical, tabuleiro pinos coloridos, advinha matrix, quebra-cabeça, jogo do labirinto, dama com operações matemáticas, jogo das argolas, torre de hanói, tangran, jogo do semáforo, desafio com palitos, jogo konane, jogo do produto, pescaria da matemática, dentre outros.

As oficinas realizadas foram: confecção de um palhaço com materiais recicláveis (matemática na reciclagem e no artesanato), confecção de um cartão fractal, confecção da pipa tetraédrica (matemática nas brincadeiras) e confecção de um cofre de barro (matemática na cerâmica). Houve ainda, atividades interdisciplinares: a matemática no corpo (IMC, altura), a matemática no DNA, a matemática nas moléculas, a matemática na pirâmide alimentar e a matemática na moda. As exposições traziam artesanatos (a matemática dos tapetes e crochês), os sólidos de Platão e o varal matemático. E por fim, aconteceu um teatro mostrando a matemática nos movimentos corporais, na temporalidade e na harmonia e sincronização do grupo.

Houve uma resolução de problema por meio do "Desafio do cofre", ~~a~~plicado nas quatro cidades e os materiais utilizados para sua confecção foram tábuas de madeira, chaves de corrente elétrica, fechadura, fios e outros materiais eletrônicos. Foi confeccionado para simular um cofre com várias "chaves" na face superior da caixa e para abrí-lo, o visitante tinha que ler as condições e movimentar as chaves (para cima ou para baixo). Veja a imagem do cofre abaixo.

Figura 1. Desafio do cofre. Acervo pessoal.

Outro problema proposto foi o “Desafio com palitos” aplicada em todas ases cidades. Dada uma certa quantidade de palitos e de movimentos o visitante deveria movê-los afim de tornar verdadeira a sentença do desafio.

Figura 2. Desafio com palitos. Acervo pessoal.

A oficina de fractais foi aplicada através de dobraduras de papel, montada com a proposta de apresentar uma geometria que está intrinsecamente presente na natureza, mas, que geralmente não é apresentada no ensino básico. Nesta oficina, o visitante construiu um cartão em forma de fractal.

Figura 3. Fractais. Acervo pessoal.

Um jogo adaptado e aplicado nas quatro cidades foi a dama com operações matemáticas. A proposta foi agregar ao jogo de dama clássico (com suas regras) operações matemáticas, onde cada participante deveria responder corretamente uma operação matemática, para realizar sua jogada. Respostas incorretas implica passar a sua vez de jogada, contudo a dinâmica do jogo pode mudar a depender da estratégia pedagógica do aplicador.

Figura 4. Dama com operações matemáticas. Acervo pessoal.

Outro jogo que ganhou destaque foi a dama vertical, ~~foi~~ também aplicado em todas as cidades do evento e é composto por 18 peças de cor clara e 18 peças de cor escura, as quais devem ser dispostas no tabuleiro de forma vertical com a finalidade de enfileirar 6 peças de mesma cor em uma das seguintes orientações: vertical; horizontal ou diagonal. Como na imagem abaixo.

Figura 5. Dama Vertical. Acervo pessoal.

O jogo carrossel foi aplicado nas quatro cidades. O jogo se configura em um tabuleiro com 9 hastes com diferentes cores distribuídas de forma simétrica com a haste central mais elevada que as demais mais 12 argolas também de diferentes cores, como na imagem abaixo.

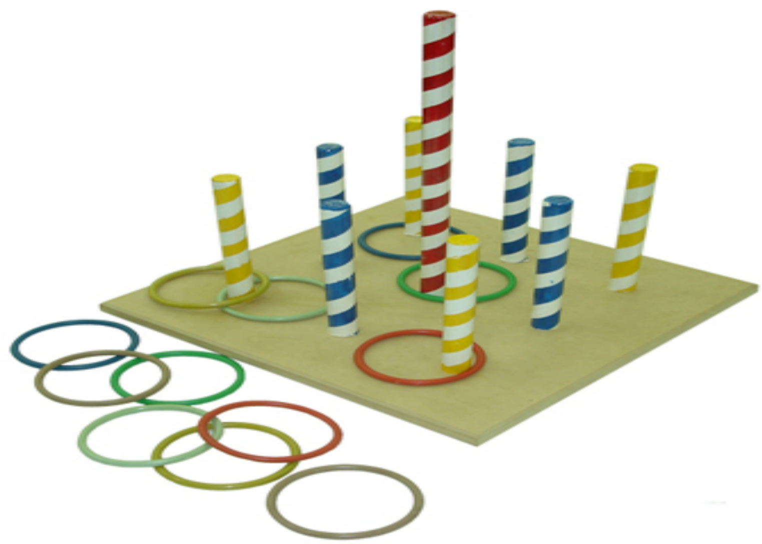


Figura 6 – Carrossel. http://www.matemoteca.com.br.
Acesso: 01/05/2018.

O tabuleiro pinos coloridos foi disponibilizado pelo Laboratório de Educação Matemática, num total de quatro unidades. Confeccionado em madeira, é um tabuleiro que possui 20 pinos que podem ser movimentados, dos quais, 5 são azuis, 5 verdes, 5 vermelhos e 5 amarelos, conforme pode ser visto na imagem a seguir.

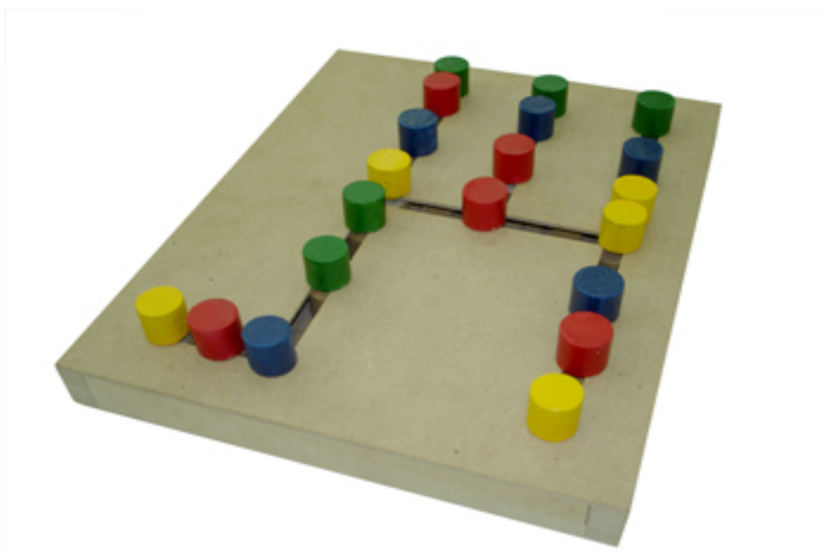


Figura 7 – Tabuleiro Pinos Coloridos. http://www.matemoteca.com.br/index-pinoscoloridos.asp.
Acesso: 01/05/2018.

Como aluno do curso, o tabuleiro pinos coloridos ficou sob minha responsabilidade e foi aplicado em todas ases cidades e é dele que trago meu relato de experiência. O objetivo é separar e agrupar os pinos de mesma cor nas extremidades do tabuleiro. Há outras variações, como por exemplo: variação 2, montar uma sequência de cores numa extremidade e repeti-la nas outras; variação 3, montar duas sequências de duas cores cada, cada uma no lado maior do suporte; variação 4, com as duas sequências de duas cores cada prontas, trocar de posição essas sequências; variação 5, montar o sulco menor do tabuleiro (aquele que fica no meio) uma sequência de quatro cores e solicitar que a sequência seja montada nos quatro cantos do tabuleiro; variação 6, solicitar que embaralhe as cores. Ele podé ser aplicado para crianças a partir de cinco años e até mesmo para os adolescentes e adultos. Há quem defenda a utilização desse tipo de material "como recurso didático pedagógico voltado a estimular e efetivar a aprendizagem, desenvolvendo todas ases potencialidades e habilidades dos alunos a partir da educação infantil" (Silva, 2004, p. 26). Podé ser jogado individualmente, em duplas e até mesmo coletivamente.

Tive que me familiarizar com o tabuleiro e ver as possibilidades de jogadas e, então, no decorrer do evento, fui agregando desafios aos jogadores, colocando-os em disputas por menor tempo, fazendo minicampeonatos e por fim desafiando-os a pensar de forma inversa do que foi pedido inicialmente, ou seja, a colocar as peças de forma mais aleatória possível.

Resultados

A partir da atividade aplicada por mim, pude observar a curiosidade despertada pelo tabuleiro pinos coloridos nas pessoas. Crianças, jovens e adultos se envolveram com o jogo e juntos aprenderam enquanto jogavam. Nesse ponto o jogo é compreendido como brincadeira na concepção de Vygotsky – "fator muito importante do desenvolvimento" (Vygotsky, 1988, p.115).

Não apresentaram dificuldades na compreensão da regra do manuseio do tabuleiro pinos coloridos e, ao dominar a dinâmica do mesmo, se propuseram a uma competição, no qual, aquele que agrupasse os pinos em menor tempo, ganharia a competição. Esse fato gerou euforia, vibração, empolgação com o tabuleiro pinos coloridos. Porém, mesmo aqueles que jogaram individualmente se concentraram e seguiram até o fim, conforme proposto pela regra.

Algumas situações foram relevantes para mim. Uma de las aconteceu em Ipameri-GO com um aluno com necessidade educacional específica, a qual só tive conhecimento após concluir o jogo com o aluno de aproximadamente 16 años de idade. Essa informação me foi passada pela professora que o acompanhava. O fato é que o aluno possuía dificuldades em raciocinar no agrupamento das cores. Com o auxílio da professora, esse aluno, conseguiu realizar esse agrupamento. Porém, ao desafiá-lo a realizar o caminho inverso (desagrupar as cores), esse aluno não conseguiu, o que não se pode concluir que el não conseguiria em outro momento e em outras circunstâncias após a aplicação desse mesmo tabuleiro por mais vezes, na sala de aula ou contraturnos de aula ou até mesmo em casa com o acompanhamento e intervenção de um adulto estimulando-o nesse desafio.

Na cidade de Orizona, um outro caso também chamou atenção, com um aluno com necessidade educacional específica. A princípio não havia notado essa necessidade, mas foi no decorrer de suas jogadas que percebi que ele levava mais tempo que os demais para agrupar os pinos por cores. Percebi ainda certa dificuldade na fala, porém, o fato interessante é que depois de várias jogadas ele conseguiu agrupar os pinos por cores no mesmo tempo dos demais e ainda conseguiu realizar o processo inverso de desagrupamento.

Em minha experiência trago, também, um caso ocorrido na cidade de Orizona-Go, com uma pessoa adulta na faixa dos 50 años de idade, baixa renda, semianalfabeta e oriunda de zona rural, informações que obtive em breve diálogo posteriormente com o mesmo. Em primeiro momento essa pessoa quis somente observar os alunos jogando, então a questionei sobre o porquê de não jogar também. Então, com seguinte resposta "não, não dou conta" e com certo desconforto e envergonhado, recusou, porém depois de algum tempo essa pessoa decidiu jogar. Não apresentou dificuldade no entendimento do objetivo do jogo, mas no início teve dificuldade de desenvolver o raciocínio para agrupar os pinos. Pude perceber que após algumas jogadas ele conseguiu atingir os objetivos do jogo, e ao conseguir, demonstrou alegria e quis continuar a jogar. Depois de algum tempo resolveu parar e ir embora, entretanto retornou depois de alguns minutos para continuar.

De maneira geral, houve casos de pessoas que se interessaram, jogaram e depois de algumas jogadas consideraram o jogo pouco desafiador e desinteressante. À medida que isso aconteceu, essas pessoas desistiram de continuar a jogá-lo.

Em relação aos adolescentes foi possível perceber que, não de forma geral, mas houve um desinteresse pelo jogo tabuleiro pinos colorido, talvez pelo fato de ser pouco desafiador para esse determinado público. Por essa experiência é possível depreender que a quantidade de pinos e de cores presentes no tabuleiro atenda melhor ou motive mais, o público infantil. Para que haja um maior interesse dos jovens pelo jogo é preciso repensar a quantidade de pinos e cores, tal vez deixando-o mais complexo e mais desafiador.

Conclusões

É sugerível que o tabuleiro pinos coloridos seja trabalhado com as crianças nas escolas, pois ele se mostrou eficaz para a concentração e raciocínio, além de atrair a atenção das pessoas e principalmente por esse público.

Essas experiências revelam o quanto devemos estar preparados para lidar com as diversas situações e dificuldades dos alunos, pois essas situações fazem parte do cotidiano da profissão ser professor. Percebi a importância do papel do professor para a inclusão e a diferença que isso pode fazer na vida das pessoas.

Esse evento trouxe contribuições importantes para minha formação acadêmica. Observei o quanto os jogos atraem crianças, jovens e adultos. Essa constatação faz repensar a prática dentro de sala de aula, pois, percebi que é possível aliar os jogos com o ensino da matemática, principalmente para o desenvolvimento de habilidades como, por exemplo, resolução de problemas e raciocínio lógico. Para as crianças pode auxiliar na socialização e coordenação motora. Dessa forma, o lúdico se torna uma ferramenta de contextualização pois ele faz parte de nossa vida.

Enquanto futuro professor pude notar que para pessoas com necessidades educacionais específicas o tabuleiro pinos coloridos podé se tornar eficaz para o seu desenvolvimento cognitivo. Por isso, torna-se interessante o incentivo ao desenvolvimento de atividades através de materiais manipuláveis para educação em diversos contextos.

O projeto "matemática nas praças" foi um importante evento que envolveu desde órgãos de fomento à pesquisa e desenvolvimento tecnológico à colaboração de governos locais, centros acadêmicos e comunidade escolar e comunidade em geral. Diante disso, o evento atingiu seu objetivo, pois mesmo com grandes variações de público foi evidente o envolvimento e participação de todos, da comunidade em si. Assim os jogos, as oficinas e as exposições agregaram, ao mesmo tempo, elementos do dia-a-dia e da matemática e contribuiu para mostrar que a ciência está presente na vida das pessoas desmistificando a concepção de que a matemática é para "poucos" e que a matemática escolar não tem relação com a matemática do cotidiano. Percebi ainda a importância desse evento para com a formação docente dos envolvidos neste projeto, trazendo experiências ímpares para o desenvolver da profissão professor. Experiências as quais somam à formação acadêmica continuada. Partindo do ponto de que esse projeto tem o envolvimento de milhares de indivíduos, os impactos desse evento se tornam imensuráveis.

Podemos, portanto, afirmar que o planejamento é fundamental para o sucesso da atividade.

Referências bibliográficas

Dias, M. (2016). Tendências em Educação Matemática: percursos curriculares brasileiros e paraguaios. 1ª ed. Curitiba: Editora Appris.

Huete, J.C.S; Bravo, J.A.F. (2007). O ensino da matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed Editora.

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC). (2017). Chamada MCTIC/CNPq Nº 02/2017. Semana Nacional de Ciência E Tecnologia - SNCT 2017. Brasília. Recuperado em 29 abril, 2018, de http://cnpq.br/chamadas-publicas?p_p_id=resultadosportlet_WAR_resultadoscnpqportlet_INSTANCE_0ZaM&idDivulgacao=7022&filtro=encerradas&detalha=chamadaDetalhada&id=47-902-4729

Silva, M. S. (2004). Clube da Matemática: jogos educativos. 3ª ed. Campinas: Papirus.

Tomaz, V. S; David, M. M. M. S. (2008). Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora.

Vygotsky, L. S. (1986). *Concrete Human Psycology, 27*, 53-77.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

PERCEPCIÓN DE LOS DOCENTES SOBRE RETROALIMENTACIÓN

TEACHERS' PERCEPTION ON FEEDBACK

Adriana Gómez Reyes
CCH Sur, Ciencia Forense, UNAM; CECyT 13, CICATA Legaria, IPN (México)
orodelsilencio@yahoo.com.mx

Resumen
La percepción está definida como el conocimiento o la idea que tiene alguien sobre algún tema. Dado el papel predominante que tiene el docente en el proceso de evaluación en el aula y en el de retroalimentación, se consideró importante explorar la percepción que de la retroalimentación tiene el docente de nivel medio y de nivel medio superior como un primer paso en una investigación sobre retroalimentación formativa. Para lograr este objetivo se planteó una encuesta cuyas respuestas se analizaron de forma cualitativa.

Palabras clave: evaluación, retroalimentación formativa, docentes

Abstract
The perception is defined as the knowledge or the idea that someone has on a subject. Given the predominant teacher´s role in the assessment process in the classroom and in the feedback, it was considered important to explore the perception of feedback from the secondary and high school teachers as a first step in an investigation about formative feedback. To achieve this objective, a survey was presented whose answers were analyzed qualitatively.

Key words: assessment, formative feedback, teachers

Introducción

La evaluación que se desarrolla día a día, durante un curso, nos permite observar cómo se va desarrollando el aprendizaje, y nos brinda la oportunidad de incidir directamente en el desarrollo del estudiante a través de la retroalimentación y, por consiguiente, en el logro de los aprendizajes. A este tipo de evaluación la llamamos evaluación en el aula. La evaluación en el aula consiste en le recopilación de evidencias de los logros del aprendizaje, mismas que brindan los estudiantes a través de varios medios: hojas de trabajo de las actividades de evaluación, bitácora COL, o diario de clase, entre otros; estas evidencias se analizan posteriormente con instrumentos de evaluación como listas de cotejo, Vs heurísticas de Gowin, hojas de resultados y rúbricas (Flores y Gómez, 2009). Con este análisis se llega a conclusiones que nos llevan a tomar decisiones para el diseño de la retroalimentación.

Cuando la didáctica en la que sustentamos el trabajo en el aula está centrada en el aprendizaje, son los estudiantes quienes proveen información sobre su aprendizaje; cada uno tiene su propio desarrollo y sus antecedentes, tanto conocimientos previos como intereses (Pozo, 2000; citado en Juárez, 2015), y todo esto debe considerarse, tanto en el proceso de aprendizaje como en el de evaluación, desde la planeación de los cursos, dejando incluso espacio para las intervenciones de retroalimentación.

En la planeación se debe considerar cómo se recopilará la información y con qué instrumentos se le organizará y analizará para obtener las conclusiones que nos permitan, tanto a profesores como alumnos (e incluso autoridades), tomar las decisiones pertinentes para mejorar el aprendizaje (Flores y Gómez, 2009).

La retroalimentación formativa considerada como el conjunto de estrategias y actividades que se llevan al aula después de un proceso de evaluación es, con toda seguridad, el medio más importante para lograr una mejoría en proceso de aprendizaje completo, incluidas las medidas que el profesor instrumenta para logar dicho aprendizaje. La retroalimentación, definida de esta manera, como respuesta a la evaluación en el aula, se da a través de actividades grupales o en equipo en lo que llamamos intervenciones de retroalimentación.

Dado el importante papel que juega el profesor en este proceso, decidimos iniciar nuestra investigación sobre retroalimentación formativa con una exploración que nos permita responder a las preguntas, ¿cuál es la idea que tienen los profesores sobre la evaluación y sobre la retroalimentación en el aula?, ¿cuál es la retroalimentación que se realiza en las aulas? Con el objetivo de hacer visible la concepción que tienen los profesores de la retroalimentación, cómo es y cómo debería ser.

En la presente comunicación se mostrarán los avances en la búsqueda de respuesta a las preguntas anteriores. Esto a través de una encuesta que, en un primer acercamiento, se aplicó a profesores de niveles medio y medio superior, del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos (CECyT) número 13 del Instituto Politécnico Nacional (IPN) y participantes del VII Congreso Regional de la Montaña Alta de Guerrero de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas (ANPM).

Marco teórico

Desde nuestra perspectiva, el aprendizaje es un proceso que lleva a la adquisición de conocimiento; es el proceso que permite acomodar el conocimiento nuevo en los esquemas mentales del aprendiz y, por ende, produce una modificación de tales esquemas. En el sentido en el que lo plantea Vigotsky (1978), diremos que la modificación se da a través de una comparación de los conceptos que ya se encuentran incorporados en la mente del individuo con aquellos que se pretende aprender, principalmente en la escuela, dando significado a los conceptos nuevos y enriqueciendo el significado de los viejos.

El ser humano, como ente social, aprende a través de la convivencia con otros seres humanos; y la escuela es la entidad por medio de la cual la sociedad se encarga de educar a los individuos que la integran. Es decir, la escuela se encarga de fomentar el aprendizaje del conocimiento útil para la sociedad. En este contexto, el trabajo en equipo, las discusiones entre estudiante y la comparación de trabajos son factores importantes del aprendizaje de cualquier conocimiento (Flores, 2007).

Una de las cuestiones esenciales en todo proceso de aprendizaje tiene que ver con la respuesta a la pregunta: ¿cómo se sabe que un individuo ha aprendido un cierto conocimiento? Desde un punto de vista positivista, posición que adoptan la mayoría de los esquemas tradicionales que se basan en un proceso de enseñanza-aprendizaje, la respuesta está en el examen riguroso que el profesor hace de sus alumnos para determinar qué aprendió de los contenidos enseñados, y en qué grado se lograron los objetivos de aprendizaje plasmados en el currículo.

Nuestra posición al respecto es que el esfuerzo no debe centrarse en mejorar las estrategias de enseñanza del profesor con la esperanza de que los estudiantes aprendan el conocimiento pretendido, sino que se deben buscar las evidencias del aprendizaje en el cambio de discurso y en el uso que se da al conocimiento nuevo en cuestiones prácticas. Tales evidencias se dan durante el curso cotidiano de las actividades en el aula. El papel del profesor consiste en diseñar las actividades que fomenten el aprendizaje y que, al mismo tiempo, den la oportunidad de obtener evidencias de su logro: estas actividades están en sintonía con la propuesta de Brousseau (1997), sobre las situaciones didácticas).

Ahora bien, en un contexto, donde el aprendizaje es el centro de la didáctica (estrategias, técnicas y métodos, tendientes a propiciar la educación de los estudiantes), la evaluación consiste en la recopilación y el análisis de la información que se genera durante las actividades de aprendizaje, en busca de evidencias de lo que se ha logrado, dando, así, la oportunidad a los estudiantes de mostrar, y demostrarse, lo que han aprendido.

Consideramos el objetivo de la evaluación como el perfeccionar el proceso evaluado (Stufflebeam & Shinkfield, 2005; Flores y Gómez, 2009); así, es necesario analizar las evidencias recopiladas, y tomar decisiones con respecto a lo que se hará en el futuro. Cuando nos referimos, en particular, a las acciones que lleva a cabo el profesor, a partir de esta información, las llamamos Intervenciones de Retroalimentación (Gómez y Flores, 2011).

Una encuesta se define como “una técnica que utiliza un conjunto de procedimientos estandarizados de investigación mediante los cuales se recoge y analiza una serie de datos de una muestra de casos representativa de una población o universo más amplio del que se pretende explorar, describir, predecir y/o explicar una serie de características” (Casas, Repullo y Donato, 2003, p. 527). En el caso de una investigación cualitativa, no es necesario pensar en el tipo de muestra, pues ésta se vuelve flexible en la medida que se va requiriendo en la investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

La encuesta a profesores de bachillerato y de nivel medio, (del CECyT 13 y de la zona de Guerrero) permitió un análisis sobre sus prácticas de evaluación, sus prácticas de retroalimentación y cómo creen que debería ser la retroalimentación. Es importante considerar que esta información surge de las preguntas planteadas y de lo que se lee de la práctica que reportan, pues no necesariamente lo que sucede en las aulas es lo mismo que se reporta en los documentos de la institución, por eso se consideró este instrumento porque permite “leer entre líneas” lo que sucede.

Desarrollo

Como se menciona en la introducción, el estudio se llevó a cabo con profesores del CECyT 13, escuela del Nivel Medio Superior (NMS) y de la región de Guerrero de la ANPM, asociación que agrupa profesores de matemáticas desde los primeros años escolares hasta el NMS. Nos enfocamos en el Nivel Medio, que considera Secundaria y

Bachillerato, tres años en secundaria y tres en bachillerato. Este nivel se incluye en la educación básica, y tiene estudiantes entre los 12 y 18 años, previo a la educación superior,

La respuesta esperada era que los profesores consideran como retroalimentación dar las respuestas correctas y, en el mejor de los casos, comentar los errores.

En Alaminos y Castejón (2006) se recomienda realizar una lista de lo quese quiere observar antes de planear las preguntas de la encuesta, para docentes se consideró la siguiente lista:

- Objetivo de la evaluación
- Retroalimentación
    - Objetivo de la retroalimentación
    - Formato de la retroalimentación
    - Personajes y momentos de la retroalimentación
- Situación ideal de la retroalimentación
- Situación real de la retroalimentación
- Razón de las diferencias

Se incluyeron rubros sobre evaluación por la relación que se da entre estos dos procesos.
A partir de esta lista se planteó el siguiente cuestionario:

¿Cuál es la función de la evaluación de los aprendizajes del estudiante?
¿Qué es la retroalimentación? ¿Qué función tiene?
¿Cómo hace la retroalimentación en sus grupos?
¿Cuál es el papel del profesor en el proceso de evaluación?
¿Cuál es el papel del profesor en el proceso de retroalimentación?
¿Cómo debe ser la retroalimentación?

Se aplicaron 68 cuestionarios, de los cuáles ocho se identificaron como profesores de bachillerato, uno como directivo, 35 profesores de secundaria, 13 de telesecundaria mientras que 11 no indicaron el nivel de su adscripción.

Para el análisis de las respuestas a las encuestas, se tomaron algunos extractos, y se clasificaros en una tabla, desde donde se hicieron las observaciones en cuanto a respuestas comunes y la comparación con las respuestas esperadas. En esta tabla se consideraron las siguientes columnas:

- Nivel educativo
- Función de la evaluación del aprendizaje
- Relación evaluación y retroalimentación
- Definición de retroalimentación
- Función de la retroalimentación
- Cómo se realiza la retroalimentación
- Papel del profesor (en general)
- Papel del profesor en la evaluación
- Papel del profesor en la retroalimentación
- Cómo debe ser la retroalimentación
- Otros

Algunos de estos puntos no se preguntaron directamente en el cuestionario, como la relación entre la evaluación y retroalimentación, pero creemos que, al hablar de estos dos procesos tan relacionados, se puede ver que la relación saldría a flote. El papel general del profesor, tampoco se preguntó directamente, pero se esperaba, desde la planeación, que se pudiera observar en las respuestas a las preguntas.

En una segunda versión, se consideran solo los rubros correspondientes a la retroalimentación. De esta segunda tabla se muestra un extracto en la Figura 1.

- Nivel educativo (NE)
- Relación evaluación y retroalimentación (ER)
- Definición de retroalimentación (R)
- Función de la retroalimentación (FR)
- Cómo se realiza la retroalimentación (H)
- Papel del profesor en la retroalimentación (PPR)
- Cómo debe ser la retroalimentación (RI)
- Otros

2	Bachillerato	IPN		una apropiación de los cor	cierre del tema	discusión grupal	guía de la discusión	clara y puntual	
3	Bachillerato	IPN		compartir estrategias	orientar al estudiante	pido a los estudiantes que	coordina	en el momento, presencial	
4	Bachillerato	IPN		hacer saber apr. Obtenidos		individual y grupal, hablac	evaluador, observador, br	constructiva, identificar errores y alternativas	
5	Secundaria	ANPM	eval. es un punto de pa	dar a conocer sus avances y puntos de mejora		maestro-alumno y vicever	guiar a cada alumno	crítica, reflexiva, crear me	el objetivo de la retroaliment
6	Secundaria	ANPM			ayudar atrasados	alumnos avanzados ayuda	recuperar las habilidad de	continua	
7	Telesecunda	ANPM			fortalecer ideas y conocim	analisis o estudio de un te	dar información sobre sus	positiva, para mejorar	
8	Secundaria	ANPM	necesita evaluar para p	volver a desarrollar el tema, implementando nuevas		buscando nuevas estrateg	mediador, busca estrategi	motivada, dinámica	
9	Secundaria	ANPM		reafirmar los conocimient	lograr los aprendizajes	explicando contenidos, pc	mediador	tomar en cuenta conocimientos previos, nueva planeac	
10	Secundaria	ANPM	a partir de ahí se imple	ocupar e implementar cie	reforzar el aprendizaje		hace la retroalimentación	constante y de calidad	
11	Secundaria	ANPM	Revisar y retomar	volver a realizar, corregir errores		Repetir los temas		fácil y entendible	
12	Secundaria	ANPM		Observar y analizar	aprender de las acciones r	promuevo reflexión, ince	Guía para cada alumno	Confianza, respeto, proponer acciones	
13	Telesecunda	ANPM		Volver a ver, revisar		Recuperando saberes previos		Proceso autoreflexivo	
14	Telesecunda	ANPM		Aportar ideas	Mejorar el resultado	Ejercicios, preguntas	buscar maneras diferente	precisa y clara	
15	Secundaria	ANPM		reforzar, repasar		lluvia de idea	Coordina	Provocar	
16	Secundaria	ANPM		Complementar		Aclarando dudas	enriquecer	variada, facilitando al alumno	
17	Secundaria	ANPM		Reforzar		Retomar, buscar alternativ	Buscar estrategias	ejercicios reflexivos, analíticos	
18	Telesecunda	ANPM		actividades, de contenido	medir lo que verdaderam	actividades lúdicas, paráfr	promover, orientar e iden	Clara,optima, motivante	Cualitativo y cuantitativo, eva
19	Telesecunda	ANPM		Retomar	Valorar	a través de ejemplos, lluvi	Mediador, moderador	con un fin etablecido	Evaluar la pertinencia de las e
20	Secundaria	ANPM			Dar información al alumnc	comentando, notas en los	Hacer comentarios y suge	concreta, ayudando a rec	Se evaluan los procesos y se r
21	Secundaria	ANPM		Volver a recordar, reforzar		relacionando con temas ar	Ser un apoyo	en todo momento	
22	no	ANPM		Reintroducir resultados	reafirmar	abordar contenidos	darse cuenta que no fue claro		
23	no	ANPM	tomar decisiones para	Reforzamiento	Aclarar dudas	preguntas gereradoras	agente activo, mediador	pertinente, eficaz	
24	Dirección gra	Privada			Nutre y ayuda a mejorar	siguiendo el guión al doce	seguir las sugerencias	empatica, constructiva	

Figura 1. Extracto del concentrado de respuestas a las encuestas

Resultados

Es importante destacar que las respuestas analizadas no son excluyentes, por lo que la suma de las respuestas enlistadas no tiene que dar el total de 68 encuestas. También está el caso de los profesores que no contestaron lo que se pedía o que no se encontraron comentarios que apuntaran a los rubros que no se preguntaron directamente.

Solo 12 de los participantes relacionaron la evaluación con la retroalimentación, diciendo en general que se necesita la primera para hacer la segunda. Alguien comentó específicamente que se retroalimenta a partir de la evaluación diagnóstica, pero no se relaciona con la evaluación que se lleva a cabo a lo largo del proceso ni con la mejora en los aprendizajes.

30 participantes (44% lo que lo convierte en la respuesta más común) definen la retroalimentación, o su función, como un repaso, volver a revisar temas pasados. Tres participantes más la refieren, como recuperación de saberes previos que sirven como punto de partida. Hay un par de comentarios acordes con la idea de dar a conocer a los estudiantes lo que saben y uno más en cuanto a darles a conocer sus puntos de mejora, otro que dice que consiste

en hacer comentarios favorables para motivarlos. Dos más que hablan de la necesidad de establecer nuevas estrategias. Siete de los profesores participantes creen que el objetivo de la retroalimentación es aclarar dudas. Otros dos la confunden con la evaluación al hablar de detectar errores y aprendizajes. Todas estas convicciones nos muestran una idea equivocada de la retroalimentación, pues la restringe solo a repaso y corrección, sin haber una verdadera respuesta a los resultados de la evaluación y sin aprovechar el análisis realizado para planear nuevas intervenciones.

Solo dos profesores hablan de la retroalimentación como oportunidad de mejorar el proceso, uno de ellos específica “aprendiendo de acciones realizadas”. Uno de los profesores dice que la función de la retroalimentación es dar información a los estudiantes, pero no específica que información.

El papel del profesor en la retroalimentación parece ser el de mediador o moderador según 17 de los profesores, tres más lo mencionan como guía y dos más lo vuelven evaluador. Siete dicen que el profesor debe proponer nuevas actividades o estrategias, lo cuál sería acorde a la idea de las intervenciones de retroalimentación y solo uno dice que contesta las actividades previas, que es en realidad la respuesta esperada.

Cuando se pregunta sobre la forma en que debe hacerse la retroalimentación nos encontramos con que un porcentaje importante repiten lo que ya dijeron sobre la función de la retroalimentación y como la realizan en su clase, o sea, repetir temas, lluvia de ideas y otros que hemos comentado previamente. Pero creemos destacable las características generales que le asignan a como debe ser una retroalimentación: cuatro profesores hablan de que debe ser oportuna y dentro del proceso, ocho dicen que debe ser continua, cuatro hablan de que debe llevar a la reflexión (o a la autorreflexión), cinco dicen que debe ser motivadora y cuatro hablan de que debe tener valores como la equidad, respeto. Estas características deben destacarse porque nos parece que se resaltan valores de la evaluación y la retroalimentación que permiten la mejora del proceso y su enfoque hacia la autonomía del estudiante.

Entre los resultados obtenidos destaca el hecho de que los exámenes son apenas mencionados, mientras que para la retroalimentación se considera la repetición o repaso de temas, y por consiguiente se presenta el problema de la falta de tiempo, por la extensión del programa. Otro resultado destacado es la relación que se muestra entre la autonomía de los estudiantes y la retroalimentación. Lo anterior refuerza la idea de que hay poca claridad en el concepto de retroalimentación, su uso y la importancia que pueden tener el proceso de aprendizaje.

Conclusiones

Mientras se esperaba que la mayoría de los profesores hicieran la retroalimentación como comentarios en los trabajos o exámenes (solo dos hicieron comentarios en este sentido) 17 hablan de lluvia de ideas y discusiones grupales y tres mencionan la necesidad de preguntas detonadoras, que parecen relacionarse más con la discusión o revisión de temas, un profesor habla de dejar hablar a los estudiantes y otro de la comunicación entre profesor y alumnos.

Este tipo de actividades aporta al ambiente en el aula, “dejar hablar a los estudiantes” y la preocupación por la comunicación entre profesor y alumnos, implica darles un espacio en el trabajo en el aula y no dejarlos solo como receptores de la información.

La idea más difundida de la retroalimentación está relacionada con el repaso de temas y su relación con la evaluación está en apoyar los aprendizajes que, en la evaluación, se observa que no está bien adquiridos.

Algunas ideas, que aparecen de forma aislada, como que la retroalimentación sea oportuna, respetuosa y motivadora, que les permita hablar y fomente la comunicación, son puntos que debemos retomar y apoyar por el impacto que implican en el ambiente dentro del aula.

Todas estas observaciones nos llevan a concluir que los profesores no tenemos una idea clara de lo que la retroalimentación es y cómo puede aportar a la mejora del proceso de aprendizaje en todos sus aspectos. Independientemente del marco que rija las instituciones en que laboren, la claridad en estos conceptos, su relación, y específicamente, la utilidad de la retroalimentación influirá en forma benéfica a los aprendizajes de los estudiantes.

Cabe resaltar que los docentes no entendemos la retroalimentación como dar las respuestas correctas o corregir los errores de los exámenes o ejercicios previos, como se refleja en la literatura revisada (Domínguez y Ángeles, 2014; Monroy, 2015; Pawlak, 2014); esto nos indica que las investigaciones necesitan voltear a ver lo que en realidad sucede en nuestras aulas.

Todos estos resultados nos llevan a plantear la necesidad de formación en evaluación y retroalimentación (como procesos íntimamente relacionados) pero también a la necesidad de plantear futuras investigaciones desde el aula, tomando en cuenta a los profesores y lo que sucede en realidad dentro de sus aulas.

Referencias bibliográficas

Alaminos, A. y Castejón, J.L. (2006). Elaboración, análisis e interpretación de encuestas, cuestionarios y escalas de opinión. Universidad de Alicante. España. ISBN: 84-268-1267-8.

Brousseau, G. (1997) Theory of Didactical Situations in Mathematics. Mathematics. Education Library, Kluwer Academic Publishers.

Casas, J., Repullo, J.R. y Donato, J. (2003). La encuesta como técnica de investigación. Elaboración de cuestionarios y tratamiento estadístico de los datos. Aten Primaria 2003; 31(8):527-38. España.

Domínguez, Y. y Ángeles, P. (2014) El error y su corrección en la adquisición de una lengua extranjera: su valor para la evaluación. *Congreso Internacional Evaluación. Debate 2014*. Universidad Autónoma de Tlaxcala. Facultad de Ciencias de la Educación. ISBN: 978-607-9348-86-1. Recuperado en http://posgradoeducacionuatx. org/congreso/?page_id=98

Flores, H. (2007). Aprender Matemática Haciendo Matemática: modelo de enseñanza centrado en el estudiante. *Acta Scientiae*. *9*(1). 28-40.

Flores, H y Gómez, A. (2009). Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*, 21 (2). pp. 117-142.

Gómez, A y Flores A. H. (2011). El papel de la retroalimentación en los reportes de resolución de problemas en la clase de matemáticas. *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, Universidad de Camagüey. Camagüey, Cuba.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta. Edición). Mc Graw-Hill/Interamericana Editores S.A. de C.V. México.

Juárez, F. (2015). *Epistemología del aprendizaje: apuntes para una pedagogía persuasiva.* UPN. México.

Monroy, M. (2015). *Actitudes hacia la retroalimentación en los profesores de inglés del Colegio de Ciencias y Humanidades*. (Tesis de maestría) Centro de enseñanza de lenguas extranjeras, UNAM. México.

Pawlak, M. (2014). The Role of Written Corrective Feedback *In Promoting Language Development: An Overview*. En W. Szubko-Sitarck (eds.), Language Learning, Discourse and Communication, Second Language Learning and Teaching (pp. 3-21) Swizerland: Springer International Publishing.

Stufflebeam, D. L.; Shinkfield, A. J., (2005*); Evaluación sistemática. Guía teórica y práctica.* Temas de educación Paidós. España.

Vigotsky, L. S. (1978). *Mind in Society, The development of Higher Psychological Processe*s. Harvard University Press.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

HACIA UNA PROPUESTA PARA REGULAR EMOCIONES NEGATIVAS EN DOCENTES DE MATEMÁTICAS

TOWARD A PROPOSAL TO REGULATE NEGATIVE EMOTIONS IN MATH TEACHERS

Josué Ramos Silverio, María del Socorro García González
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
josueramos8224@gmail.com, mgargonza@gmail.com

Resumen
El presente escrito es un avance de investigación que tiene como objetivo esbozar una propuesta de acompañamiento para regular las emociones negativas que los docentes experimentan durante la enseñanza de las matemáticas. El acompañamiento toma como eje el conocimiento emocional, y se desarrolla en 7 fases. En las líneas siguientes, se describe la primera fase de este proceso, tomando como ejemplo el caso de una docente de matemáticas de nivel preuniversitario.

Palabras clave: conocimiento emocional, acompañamiento, docentes, matemáticas, emociones negativas

Abstract
This paper is the research progress that aims to outline a proposal of coaching to regulate the negative emotions that teachers experience during mathematics teaching. The coaching takes emotional knowledge as axis and develops in 7 phases. In the following lines, the first phase of this process is described, taking as an example the case of a pre-university female mathematics teacher.

Key words: emotional knowledge, coaching, teachers, mathematics, negative emotions

Introducción

En la investigación sobre afecto en Matemática Educativa, han quedado evidenciadas las emociones que profesores, en formación y en servicio, experimentan durante la enseñanza de las matemáticas de los distintos niveles escolares, además de las situaciones que las desencadenan (ver por ejemplo, García-González & Martín-Pascual, 2017; García-González & Martínez-Sierra, 2016; Coppola, Di Martino, Pacelli, & Sabena, 2012). En el caso particular de profesores de primaria en formación, la investigación internacional señala dos razones por las que las emociones negativas se desencadenan en este grupo de profesores. La primera de ellas son los recuerdos de las emociones que experimentaron cuando eran estudiantes (Coppola, *et al*., 2012), la segunda razón es que la mayoría de ellos no son especialistas en matemáticas, y muchas veces desconocen los contenidos que deben de enseñar (Philipp, 2007).

En el contexto mexicano, la investigación de García-González & Martínez-Sierra (2016), señala que las emociones del profesorado de matemáticas en bachillerato son desencadenadas en función de tres metas: 1) 'que los estudiantes aprendan', 2) 'que los estudiantes se interesen en la clase' y 3) 'que los estudiantes participen en la clase'. Si estas metas se cumplen, las emociones que experimentan los docentes son positivas, en caso contrario, si las metas no son alcanzadas, los docentes experimentan emociones negativas.

La revisión hecha sobre investigaciones de emociones de profesores de matemáticas nos ha permitido identificar, que se han evidenciado las emociones positivas y negativas que experimentan los docentes de matemáticas, y las implicaciones que ellas tienen en su labor docente, pero poco se ha hecho sobre la regulación de las emociones en favor de la enseñanza de las matemáticas (ver por ejemplo, Hannula, Liljedahl, Kaasila & Rösken, 2007), que tanta falta hace en estos días. Por tal motivo nos hemos planteado como objetivo de investigación elaborar una propuesta de acompañamiento para el profesorado de matemáticas, con la finalidad de ayudarlos a regular las emociones negativas que afectan su enseñanza.

La investigación pretendida, se realiza en el marco del trabajo de tesis del primer autor de este escrito. En esta comunicación se presentan los avances correspondientes al diseño de la propuesta de acompañamiento, en particular, el desarrollo de la primera fase.

Marco referencial

El sustento teórico de la propuesta de acompañamiento es el *coaching* educativo, que toma como eje rector el conocimiento emocional del profesor de matemáticas, constructos que definimos enseguida.

El término *coaching* tiene una procedencia directa desde el ámbito deportivo, pero es en el entorno empresarial y personal donde adquiere el estatus de un proceso dialógico en el cual se generan condiciones óptimas para que una persona o grupo alcance los objetivos trazados.

En el contexto educativo, López & Valls (2013) definen *coaching educativo* como una relación uno a uno, donde existen dos roles diferentes: el *coach* (acompañante) y el *coachee* (acompañado), en el que la confianza y la confidencialidad generan el ambiente de trabajo necesario para poder iniciar un proceso de crecimiento y aprendizaje con el fin de lograr un objetivo. En nuestro caso entendemos los roles del acompañante como la persona que sugestionará, motivará y propondrá estrategias para la regulación de las emociones negativas del docente de matemáticas. En tanto que, el acompañado será el docente de matemáticas.

De acuerdo con López & Valls (2013), el coaching se basa en cuatro pilares fundamentales, los cuales se describen en la Tabla 1.

Tabla 1. Los pilares del coaching.

Pilares del coaching	Significado
Elevar el nivel de conciencia	Significa contactar con aspectos de la realidad de uno mismo o del entorno, de los que estábamos desconectados.
Responsabilidad	El acompañante no da respuestas ni soluciones si no que ayuda a que el que aprende desarrolle sus propias opciones, lo que lo hace que se responsabilice y se comprometa con ellas.
Creatividad	El acompañante ayuda a observar y a pensar desde perspectivas nuevas, por lo que surgen nuevos pensamientos, nuevos descubrimientos, que llevarán al que aprende a desarrollar nuevas formas de actuar, sentir, y pensar.
Transformación	El acompañante está enfocado directamente a lograr un cambio en el acompañado, podría decirse que sin transformación no hay coaching, ya que la transformación se traduce en la evaluación del proceso vivido.

Con base en lo descrito en la tabla anterior, nuestra propuesta de acompañamiento docente pretende cumplir con cada uno de los pilares del coaching. Respecto al primer pilar consideramos que el acompañado deberá ser consciente de la realidad en la que se encuentra, esto se traduce en: 1) conocer las emociones negativas que obstaculizan su enseñanza, 2) conocer las situaciones que las desencadenan, 3) ser consciente que esas situaciones pueden cambiar por medio de la regulación emocional, y 4) estar dispuesto a cambiarlas por medio del acompañamiento. El punto 4 será el primer paso que nos acercará a desarrollar la propuesta que pretendemos, no se le obligará a someterse al acompañamiento a quien no lo desea.

La regulación emocional se entiende como la capacidad para manejar las emociones de forma apropiada. Esta capacidad, supone tomar conciencia de la relación entre emoción, y comportamiento y tener buenas estrategias de afrontamiento (Bisquerra, 2005). Respecto al segundo pilar, la regulación emocional será responsabilidad del acompañado, no del acompañante, pues éste solo es responsable de ofrecerle los recursos adecuados para la regulación de las emociones, lo que va de la mano con la creatividad del acompañante, tercer pilar anunciado en la tabla anterior.

Respecto a la transformación, la frase *sin transformación no hay coaching*, significa que el logro de la regulación de las emociones negativas será la forma de valorar que realmente el acompañamiento ha sido exitoso, esto es, que el profesor aprendió a manejar las emociones negativas durante el tiempo que fue acompañado, y se espera que, en ocasiones similares a las reguladas, tenga estrategias para enfrentarlas sin ayuda del acompañante. Somos conscientes de que la transformación de un individuo puede requerir un tratamiento terapéutico profesional que no correspondería a un acompañamiento como el que se pretende, esta situación sería uno de los límites de nuestra propuesta. Por nuestra parte solo podremos ayudar a enfrentar situaciones del aula de clases, como el control de grupo, el diseño de estrategias didácticas, la profundización conceptual de temas matemáticos, o la relación interpersonal en el aula, situaciones que han sido reportadas como desencadenantes de emociones de profesores de matemáticas.

Por otra parte, el conocimiento emocional del profesor de matemáticas hace referencia al conocimiento que tiene de las emociones que experimenta durante la enseñanza de las matemáticas (García-González, 2018). Por nuestra parte consideramos que este conocimiento implica 2 habilidades: 1) dar un nombre a la emoción que se experimenta, y 2) conocer la situación que desencadena la emoción.

Con base en la definición de López & Valls (2013), y tomando en cuenta los constructos conocimiento emocional y regulación emocional, entenderemos en este trabajo el acompañamiento como un proceso centrado en el conocimiento emocional de un profesor de matemáticas (acompañado) que tiene como fin la regulación de sus emociones negativas con la ayuda de un acompañante.

Metodología/desarrollo de algunos ejemplos

Metodológicamente el acompañamiento pretendido se rige por la propuesta de López & Valls (2013) que se muestra en la Figura 1.

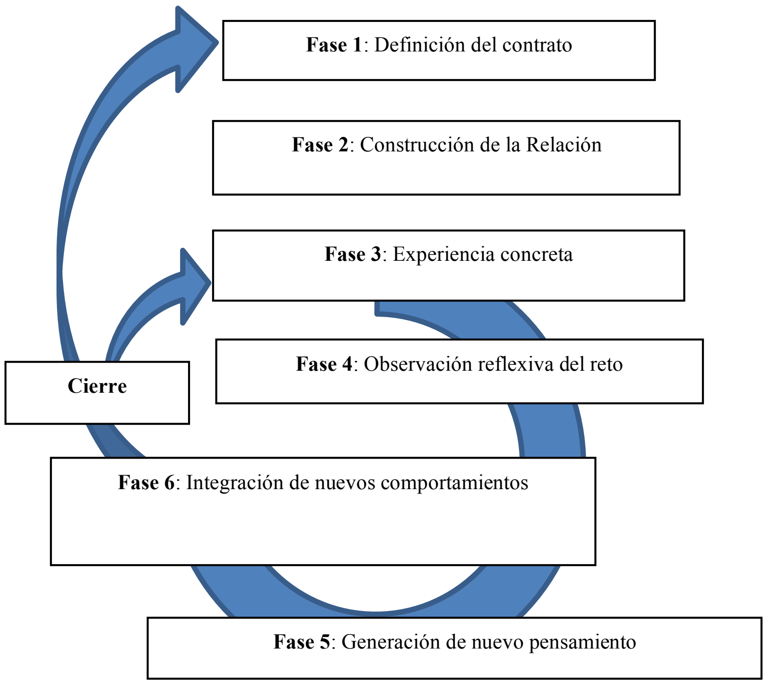


Figura 1. Metodología del acompañamiento docente.

Avances de investigación

Hasta el momento se ha realizado la fase 1, en la Fase de "Definición del contrato", se desarrollaron las siguientes actividades. 1) Seleccionar el acompañante, 2) Seleccionar al acompañado mediante un perfil emocional, 3) Definir el periodo del acompañamiento, y 4) Definir el espacio físico del acompañamiento.

El acompañante es el primer autor de este escrito, en el marco de su tesis de maestría. Para seleccionar al acompañado, usamos como criterio el perfil emocional. Basados en Davidson & Begley (2012), definimos el perfil emocional del profesor de matemáticas como la información sobre las emociones que experimenta durante la enseñanza de las matemáticas, información centrada en las dos habilidades del conocimiento emocional, dar un nombre a la emoción que se experimenta, y conocer la situación que desencadena la emoción.

Para elaborar el perfil emocional se realizó una entrevista semi-estructurada que consistía en una serie de preguntas con la intención de que el entrevistado proporcionara información sobre su conocimiento emocional. Las preguntas utilizadas han sido validadas por García-González & Martínez-Sierra (2016) y se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Protocolo de entrevista.

Preguntas desencadenantes del conocimiento emocional
¿Qué emociones o sentimientos experimenta en la clase de matemáticas?
¿Cuáles son las principales experiencias positivas que ha tenido como profesor de matemáticas?
¿Cuáles son las principales experiencias positivas que ha tenido como profesor de matemáticas?
¿En qué circunstancias y situaciones ha experimentado felicidad o alegría como profesor de matemáticas?
¿En qué circunstancias o situaciones ha experimentada tristeza o pesar como profesor de matemáticas?

La entrevista se realizó en octubre de 2017 en una interacción cara a cara con la acompañante, y fue videograbada para su posterior análisis. El análisis de las entrevistas se basó en la identificación de emociones y situaciones desencadenantes, recurriendo para ello a la Teoría de la Estructura Cognitiva de las Emociones (llamada teoría OCC, Ortony, Clore & Collins, 1996), tal y como lo hacen García-González & García-González (2016) en su investigación.

Perfil emocional de Karla

Karla (seudónimo que le hemos asignado) es una profesora de 30 años de edad, es licenciada en matemáticas y computación. Se ha desempeñado como docente en bachillerato durante 4 años. Su perfil emocional (ver Figura 2) se encuentra formado por emociones positivas y negativas. Fue seleccionada como acompañada porque el perfil emocional arrojó que las emociones negativas que experimentaba durante la enseñanza de las matemáticas causaban en ella malestar. Karla aceptó participar en el proceso de acompañamiento, después que se le habló de los resultados del perfil emocional y se le comentó el objetivo del acompañamiento.

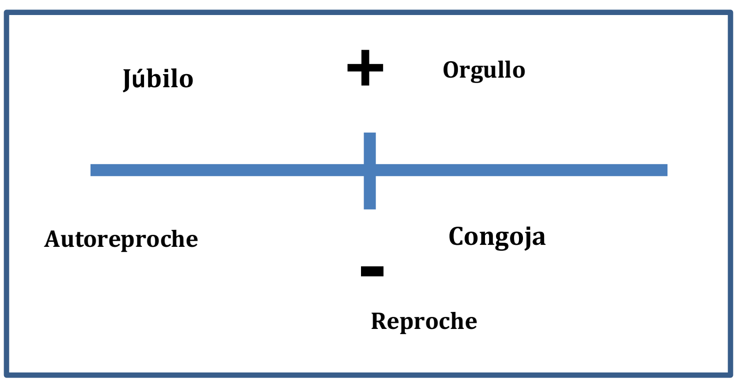


Figura 2. Perfil emocional de Karla.

A continuación, centrados en las definiciones de la OCC y ejemplificadas con extractos de la entrevista, describimos cada una de las emociones que componen el perfil emocional de Karla. En la evidencia resaltamos en cursivas las palabras emocionales y en negritas las situaciones desencadenantes.

Júbilo

Esta emoción se define por la OCC como “contento por un acontecimiento deseable”. En el caso de Karla, estar frente a grupo, y enseñar son acontecimientos deseables que cuando los realiza desencadenan en ella sentirse contenta.

> Karla*: Me siento feliz* al poder compartir los conocimientos que tengo con los alumnos, por qué sé que se llevan algo de mí, *me siento bien*, *me siento satisfecha*.
> Karla: *Me gusta mucho* estar frente a grupo, *me gusta mucho* enseñar lo que sé, compartirlo, *me siento feliz*, *satisfecha* al hacerlo.

Orgullo

Esta emoción se encuentra relacionada con la relación ante los agentes, es decir, las personas que se vuelven desencadenantes de las emociones que podemos experimentar. El orgullo, es una emoción particularmente desencadenada por nuestras propias acciones, y se define como "aprobación plausible de uno mismo". Karla encuentra plausible el hecho de que pueda ayudar a los estudiantes a resolver sus dudas dentro o fuera del salón de clases, ella se considera un ejemplo para los estudiantes cuando lo hace, de ahí que esta acción la haga sentirse orgullosa.

> Karla: También es bonito como docente ver que tus alumnos se te acercan para preguntarte dentro y fuera del salón de clases, cuando se acercan para que los saques de una duda de tu materia o de otra materia, para ellos eres un ejemplo, alguien en quien confían para llegar a ese grado de acercarse y preguntarte de alguna materia que no entienden, eso para mí es agradable.

Autoreproche

Esta emoción se encuentra relacionada también con los agentes, y se define como "desaprobación de una acción censurable de uno mismo", lo que significa que las acciones de la misma persona son las que desencadenan la emoción. En este caso, Karla se considera responsable de que sus estudiantes no entiendan lo que les explica, se asume culpable de la situación y se siente triste por ello.

> Karla: *Me siento triste* cuando veo que no le entienden a lo que explico durante la clase, *siento un poquito de culpabilidad hacia a mí. Por mi culpa* no entienden, por no entender bien el tema, no lo explico bien y eso *me hace sentir triste*.

Reproche

El reproche es un tipo de emoción cuya situación desencadenante son las personas que nos rodean, y se define como "desaprobación de una acción censurable de otro". Karla experimenta reproche por sus alumnos que no prestan atención en clase, desaprueba su comportamiento y les recrimina que no les interese que ella está esforzándose por explicarles.

> Karla: Cuando veo que en la clase no ponen interés, no ponen atención, *me siento molesta, me da coraje*, porque yo estoy explicando, estoy dando lo mejor que puedo y a ellos no les importa, tampoco les importan sus compañeros que están poniendo atención. Es una distracción para los que ponen atención y para mi estar tratando de meterlos, de incluirlos en la clase, en verdad *es molesto*.

Congoja

A este tipo de emoción la desencadena los eventos, y se define como "descontento por un acontecimiento indeseado", en el caso de Karla son dos eventos los que desencadenan su congoja, la evaluación y que los estudiantes no entiendan cuando ella explica en clase.

> Karla: Al momento de evaluar me siento un poquito triste porque muchos de los estudiantes no reúnen la cantidad de puntos aprobatorios, me siento triste porque no me gustaría estar en su lugar, no me gustaría mandarlos a extra [examen], y es que como alumnos se siente feo saber que estás en la cuerda floja, saber que vas a reprobar… y eso es lo que me gustaría evitar, para que no se vayan a un examen extraordinario.
> Karla: Cuando los estudiantes no me entienden, siento *impotencia, incapacidad*, impotencia por no saber qué hacer, qué aplicar, alguna estrategia quizá para que ellos puedan comprender lo que yo les estoy explicando y se las haga un poquito más fácil la clase.

■ Definición del periodo y el espacio físico del acompañamiento

El periodo del acompañamiento será de un año. Consideramos este periodo de tiempo suficiente para poder desarrollar las fases que hemos esbozado para el acompañamiento de los docentes. El espacio físico del acompañamiento consta de dos sedes, la primera es la escuela dónde Karla imparte clases, se trata de un bachillerato de tipo general, particularmente trabajaremos con dos de sus grupos de cuarto semestre en la materia de estadística, los grupos están conformados por 25 alumnos (17-18 años de edad). La elección de los grupos obedece a que queremos conocer si la docente presenta las mismas emociones con diferentes grupos de una misma asignatura, mientras que la elección de la asignatura obedece a que durante la entrevista Karla comentó que la materia de estadística es la que más se le dificulta enseñar.

La unidad de aprendizaje de estadística se encuentra ubicada en el cuarto semestre del nivel pre universitario dentro del Plan de estudio 2010 de la Universidad Autónoma de Guerrero, en México. Y se encuentra divida en tres unidades de aprendizaje:

1. El azar y su medida
2. Estudio de una variable
3. III. Estudio de dos variables

El curso de estadística es único y se imparte en tres horas semanales, un total de 48 horas en el semestre.

La segunda sede de acompañamiento son las instalaciones del Posgrado en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero, en ella se pretende hacer las entrevistas y encuentros con la acompañada cuando sea necesario.

■ Conclusiones

Consideramos que el acompañamiento que pretendemos puede ser una contribución a la línea del Dominio Afectivo en Matemática Educativa, debido a que la literatura reporta el fenómeno de las emociones negativas del profesor de matemáticas, como la ansiedad y el estrés, pero aún son pocas las propuestas concretas para enfrentarlas, las que existen, en general, pretenden que el profesor se dé cuenta de las emociones que experimenta (ver por ejemplo, Hannula, et al., 2007), por nuestro caso pretendemos que el profesor desarrolle su conocimiento emocional, es decir que sea consciente de las emociones que experimenta en el aula de clases y las situaciones que las desencadenan y más aún, que cuente con estrategias para regular las emociones negativas que afectan su enseñanza.

Para la regulación emocional proponemos un proceso de acompañamiento de 7 fases, hasta el momento hemos avanzado con la primera fase, tenemos seleccionada a la acompañada, se trata de Karla, una profesora de nivel preuniversitario. Ella fue elegida porque experimenta emociones negativas como el reproche, el autoreproche y la congoja durante la enseñanza de las matemáticas, estas emociones influyen en su motivación para asistir a clases.

A futuro, siguiendo las fases del acompañamiento, se observará a Karla impartiendo clases, con ello comprobaremos si hay más situaciones desencadenantes y emociones de las que aparecen en su perfil, además de conocer de cerca su enseñanza de las matemáticas, con base en ello podremos diseñar estrategias de regulación emocional junto a ella, por ejemplo, ante la congoja por que los estudiantes no entiendan cuando ella explica en clase, el proceso de acompañamiento pretenderá conocer de raíz este fenómeno. Si los estudiantes no logran entender por la forma en que Karla comunica el tema, entonces se trabajará sobre el diseño de estrategias didácticas, si es por otro factor, como la falta de interés de los estudiantes se procederá a diseñar estrategias de motivación académica.

Finalmente, queremos expresar al lector nuestro interés porque una propuesta como la que aquí se pretende, pueda ser considerada dentro de la formación inicial de profesores de matemáticas y en el desarrollo profesional, con el objetivo de que la enseñanza de las matemáticas, y el aprendizaje, se desarrollen en ambientes emocionalmente adecuados.

Referencias bibliográficas

Bisquerra, R. (2005). La educación emocional en la formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 19(3), (2005), 95-114.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 17 (3–4), 101–118.

García-González & Martín-Pascual (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *Revista de Investigación Educativa de la Red de Investigadores Educativos Chihuahua,* 8(15), 133-148.

García-González & Martínez- Sierra (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.

García-González, M.S. (junio 2018). *The emotional knowledge of mathematics teachers. Colloquium presentation*. Center for Research in Mathematics and Science Education (CRMSE), San Diego State University. USA.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R., & Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. P. Park, & D.-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 153–156). Seoul, Korea.

López, C. & Valls, C. (2013). *Coaching educativo, las emociones al servicio del aprendizaje*. México: SM.

Ortony, A., Clore, G. L., & Collins, A. (1996). *The cognitive structure of emotions*. (J. Martínez y R. Mayoral, traductores). España: Siglo XXI. (Trabajo original publicado en 1988).

Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ACTUALIZACIÓN CURRICULAR CONTINUA (ACC) EN EDUCACIÓN SUPERIOR, UNA REALIDAD EN LAS AULAS, UNA FICCIÓN EN EL PAPEL

CONTINUOUS CURRICULUM UPDATING (ACC) IN HIGHER EDUCATION; A REALITY IN THE CLASSROOMS; A FICTION IN DOCUMENTS

Rita Guadalupe Angulo Villanueva, Isnardo Reducindo Ruiz, Nehemías Moreno Martínez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí (México)
rodriguezcenobia@gmail.com, isnardo.rr@gmail.com, nehemias_moreno@live.com

Resumen
La actualización curricular continua es una concepción y una metodología para la reformulación cotidiana de programas de estudio. Se propone como alternativa a la actualización periódica de planes de estudio. Práctica curricular que ha llevado a los curricula oficiales a ser letra muerta en la realidad aúlica. Cada profesor actualiza cotidianamente sus programas en atención a criterios que es preciso evidenciar y sistematizar. Se comenta una experiencia piloto en esta metodología en la Licenciatura en matemática educativa de una universidad mexicana; se expone la metodología y el dispositivo que la hace posible: una base de datos en WEB 2.0

Palabras clave: actualización curricular, educación superior, matemáticas

Abstract
Continuous curriculum updating (UCC) is a conception and a methodology that allows the daily renewal of the syllabus. It is proposed as an alternative to the periodic updating of the curriculum. The periodic updating is a curricular practice that has made the official curriculum become a dead letter into classroom reality. Each professor daily updates his syllabuses according to some criteria, which needs to be registered and systematized. This paper presents a reference experience on this methodology which was put into practice in the Mathematics Education Degree at a Mexican university. We show the methodology and the technical devise that makes it possible: a Database in Web 2.0.

Key words: curriculum update, high education, mathematics

Introducción

Las universidades mexicanas han sido sometidas desde los noventas a procesos de innovación, particularmente de cambio curricular. La mayoría de las reformulaciones curriculares son efectuadas por una comisión destinada para ello, en tiempos relativamente cortos y sin tener como soporte estudios previos. Dichas reformulaciones carecen del conocimiento analítico acerca de cómo el curriculum explícito o plan de estudios es llevado a las aulas y modificado en ellas. Nos hemos cuestionado acerca de una actualización curricular más pertinente en cuanto a los contextos a los que responde: internacional-nacional-estatal, de las prácticas profesionales vigentes, de los avances científicos, tecnológicos y disciplinares. En el hacer cotidiano de las universidades, la realidad es que cada profesor lleva a cabo constantes modificaciones a sus programas (y por tanto al plan de estudios). A este conjunto de modificaciones puede reconocérsele como parte del curriculum vivido. El problema con esas modificaciones es que no son registradas ni sistematizadas, cuestión que lleva a la pérdida de valiosos saberes que el profesor maneja cotidianamente tanto sobre los programas en sí como sobre la afectación del proceso de enseñanza aprendizaje sobre el curriculum oficial. Cuando esta situación se repite una y otra vez, semestre tras semestre genera el distanciamiento entre curriculum vivido y curriculum explícito y que el profesor considere que su participación en la construcción del curriculum es irrelevante. A largo plazo el curriculum explícito se torna en letra muerta que –en teoría– norma la vida escolar de una universidad pero que en los hechos no es más que una ficción. A las modificaciones asistemáticas al curriculum le hemos llamado actualización curricular continua (ACC). En consecuencia, el *problema* de esta investigación es la distancia entre curriculum vivido y curriculum explícito u oficial.

Ante esta serie de problemas nos hemos cuestionado si ¿Es factible recuperar las modificaciones continuas al curriculum que se realizan en las aulas?

Tenemos como *supuesto de trabajo* que es factible llevar a cabo una actualización curricular continua mediante la formulación de una metodología *ad hoc* para recuperar el curriculum vivido, dicha metodología debe auxiliarse de un dispositivo tecnológico que garantice la sistematización de los cambios curriculares. Tal metodología ya ha sido planteada y el dispositivo tecnológico diseñado (Base de datos en Web 2.0 (BDW). El *propósito* de la investigación es probar la metodología de ACC y la BDW así como difundir su utilización mediante talleres presenciales y/o virtuales a dos universidades del Estado de San Luis Potosí, de la región (Zacatecas) y de dos grupos de investigación de otros países (España y Chile); en el período agosto-diciembre se estarán levantando los datos en las cinco instituciones. El *objetivo* de esta ponencia es presentar la metodología de actualización curricular. En otro documento se comentarán los primeros resultados que aporte la Base de datos

Indagación bibliográfica

Con respecto a los estudios realizados acerca de la modificación curricular continua, se tiene como referencia la noción de modificación continua de contenidos (Angulo, 2006a), así como la necesidad de una metodología de modificación continua y la propuesta de una base de datos en formato ACCES que en su momento fue probada con carreras de geología de varias universidades del país (Angulo, 2006b), en aquel tiempo se reconoció como principal dificultad el manejo de bases de datos mediante dicho programa y la dificultad de su recopilación. Posteriormente, Angulo (2007) establece la modificación continua como una alternativa para la actualización curricular a la vez que para la intervención curricular en el nivel universitario. A lo largo de este proceso fue posible establecer una conceptuación curricular acerca de ACC como una práctica curricular que se integra al discurso emergente acerca de los curricula universitarios (Angulo, 2017a). Se elaboraron categorías para un acercamiento al curriculum de matemática educativa (2017b).

Sobre los estudios acerca del curriculum en matemática educativa, existe muy poco trabajo de reflexión teórica en español en torno a la investigación sobre curriculum (Angulo, 2017b) si bien hay un poco más sobre los curricula que se emplean en la formación de profesores de matemáticas (Dolores y Hernández, 2014). Valenzuela y Dolores (2012) señalan que no existen en México investigaciones sobre el curriculum escolar matemático. Luis Rico (1998) señala que el curriculum tiene una gran complejidad y requiere trabajarse a partir de un marco conceptual que permita la organización de los contenidos, según el autor una de las fuentes más importantes para dicha organización conceptual son la epistemología e historia de las matemáticas. Según Angulo (2017b) la mayor parte de los estudios sobre curriculum para la formación de profesores en matemáticas se centran en la dimensión práctica del mismo, es decir en el proceso enseñanza aprendizaje, pero obvian una base teórica que permita no sólo diseñarlo y evaluarlo sino teorizar acerca de las relaciones del curriculum matemático con los curricula de otras áreas de conocimiento. En la dimensión internacional, el panorama es distinto, Li y Lappan (2014) sostienen que cada vez más existen estudios entorno al desarrollo y análisis del curriculum y presentan en su libro estudios acerca de experiencias curriculares en más de diez naciones además de análisis teóricos acerca de investigación en sí. Señalan que el curriculum es un sistema, a la vez que artefacto, que no puede separarse del contexto. Schoenfeld (2014) sostiene que el cambio curricular está necesariamente inmerso en el contexto cultural y que trasladar sin más el curriculum de un país a otro no es factible, no obstante enfatiza que el conocimiento de los sistemas escolares y sus curricula de otros países permite, a partir de la contrastación, la creación y mejoramiento de curricula propios.

Desde la perspectiva crítica que sustenta este trabajo, se parte de la consideración de que el curriculum es un dispositivo de poder a la vez que un discurso, mismo que ubicamos en la noción de articulación, entendida como "todas aquellas prácticas que establecen relaciones entre elementos o posiciones diferenciales al interior de un discurso" (Laclau y Mouffe, 1988, p. 177), en este caso hablamos de prácticas curriculares como la aplicación acrítica de cambios curriculares, el traslado de curriculas de otros países sin mediar la reflexión y la necesaria adaptación o, incluso, la generación de modelos curriculares propios. "Llamaremos discursos curriculares a la articulación entre prácticas curriculares, articulación que puede darse en tensión o en alianzas diversas; así consideraremos al discurso curricular del Estado en tensión con los discursos emergentes en las universidades" (Angulo, 2017a).

Se considera que el currículum es una "síntesis de elementos culturales…que conforman una propuesta político-educativa pensada e impulsada por diversos grupos y sectores sociales cuyos intereses son diversos y contradictorios…" (De Alba, 1991, p. 59). Hemos llamado discursos curriculares a la articulación entre prácticas curriculares (Angulo, 2017a), articulación que puede darse en tensión o en alianzas diversas (De Alba, 1991). Dentro de estos discursos reconocemos a la adecuación continua del currículum que existe en las universidades frente a disposiciones o tendencias curriculares explícitas u oficiales (Angulo, 2017a).

Derivados de los enfoques teóricos que hemos descrito antes, definimos los siguientes principios teóricos derivados: Modificación de contenidos, Modificación de estructura curricular, Modificación de elementos curriculares y Modificación del perfil de egreso. Estos principios orientarán el levantamiento de datos entre los que ofrezca la información de la base de datos Web 2.0 (BDW).

■ Metodología

La metodología de investigación consideró tres etapas, la primera referida a la creación y diseño de la base de la base de datos; la segunda, atendió al diseño de la metodología de actualización curricular continua; y, la tercera dirigida al levantamiento y análisis de la información que arroje la base. En este artículo se describe brevemente la primera, se refiere al documento que la ha reportado (López-Castillo y Reducindo, 2016) y se reportan los resultados de la segunda fase.

Para la creación de la BDW se consideró el volumen de información que se mueve en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí para "el proceso de creación, revisión, modificación y control del flujo de la información de programas académicos que se imparten" (López-Castillo y Reducindo, 2016) dicho sistema consideró: los documentos y el flujo de información, el diseño de la base de datos en sí y su montaje en el la WEB 2.0. El sistema propuesto pretende aplicar parte de la filosofía WEB 2.0 para imprimir dinamismo e involucrar a los principales actores (los profesores que imparten las asignaturas) en el proceso de actualización curricular. Las tecnologías WEB 2.0 de código libre que se emplearon son: Base de datos relacionales (E.F. Codd, 1970), MySQL / MariaDB, Maquetación WEB adaptiva, HTML 5, CSS3, Bootstrap, Lenguajes WEB dinámicos, PHP 7 y JScript (JQuery + JQuery-UI).

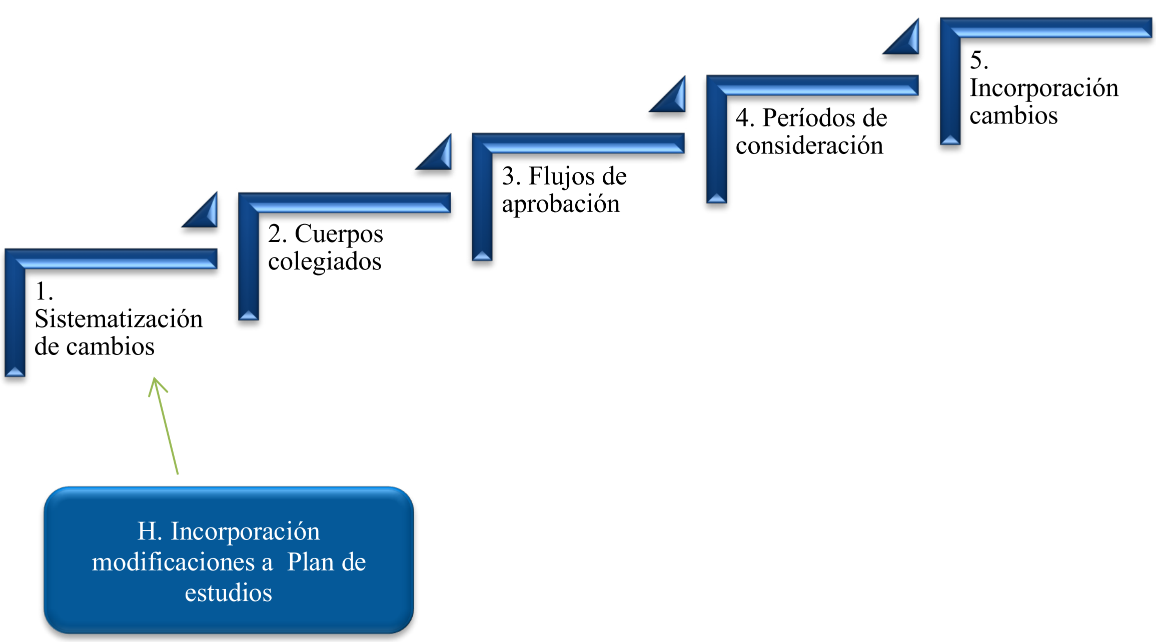
Resultados o avances

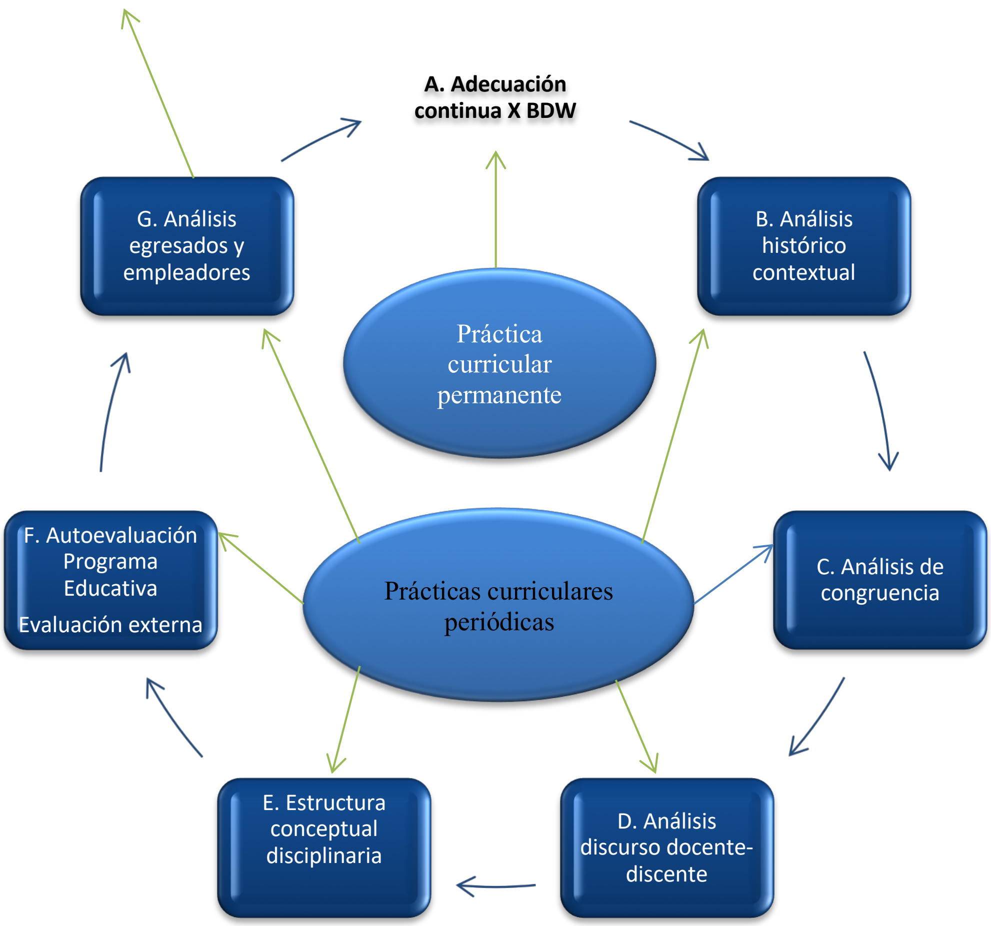
La metodología de actualización curricular continua consiste en seis fases: A. La recuperación mediante la BDW de las adecuaciones continúas efectuadas por profesores a sus programas de estudio en las aulas. B. Análisis histórico y contextual del plan de estudios. C. Análisis de congruencia interna del Plan de estudios vigente. D. Análisis del discurso curricular docente y discente. E. Construcción de la estructura conceptual de la disciplina. F. Autoevaluación y Evaluación curricular externa. G. Análisis de impacto en egresados y empleadores. H. La incorporación de las modificaciones por materia al Plan de estudios.

En esta metodología se prevé que la recuperación mediante la BDW sea permanente, es decir, que NO sea periódica como suele ocurrir en las reformulaciones curriculares usualmente. La BDW permite justo la recuperación continua, en tanto que las otras fases pueden realizarse periódicamente, tanto como cada institución lo decida. Por tanto, una vez que se han recuperado las modificaciones sugeridas por los profesores puede darse la fase H enumerada en el párrafo previo.

La fase H consiste en: 1) Sistematización de los cambios propuestos por los diversos profesores que imparten una o más materias del plan de estudios de una carrera universitaria, 2) Organización de grupos colegiados (comisiones curriculares, academias, autoridades, consejos académicos) para la revisión y consideración de los cambios sugeridos, 3) Establecimiento del flujo de grupos colegiados por los que debe pasar la aprobación de cambios sugeridos, 4) Establecimiento de períodos semestrales o anuales para la consideración y aprobación de cambios sugeridos, 5) Incorporación de los cambios al curriculum.

En la siguiente página se presenta un esquema de la metodología descrita.





Esquema 1. Metodología de actualización curricular continua. Elaboración propia.

La adecuación continua implica el registro de la actualización (eliminación, inclusión o modificación) de contenidos en programas de materias durante la actividad en aula. El análisis histórico contextual considera el recorrido histórico del programa educativo desde sus condiciones de surgimiento, así como la identificación de fuerzas sociales que han actuado y actúan en su entorno. El análisis de congruencia interna del programa educativa contrasta la relación entre perfil de egreso, competencias, y contenidos. El análisis discursivo del docente y del discente construye el discurso de maestros y alumnos mediante entrevistas a profundidad y cuestionarios, e identifica las tendencias formativas y de pensamiento científico del área. El análisis de la Estructura conceptual disciplinaria se realiza mediante la confrontación del conocimiento disciplinario experto con su reformulación en los programas escolares. La autoevaluación del programa educativo y la evaluación externa consisten en una reconsideración tanto del contenido y estructuración del plan de estudios como de su funcionamiento cotidiano, ambos desde la mirada del cuerpo docente y de pares externos. El análisis de egresados y empleadores se efectúa para considerar el impacto de los estudiantes una vez terminada la carrera.

La sistematización de los cambios propuestos por los diversos profesores que imparten una o más materias del plan de estudios de una carrera universitaria implica la recuperación en la base de datos de las modificaciones propuestas.

Estas pueden ser organizadas y exportadas de la BDW, por materia y semestre, en hojas de Excel. La organización de grupos colegiados (comisiones curriculares, academias, autoridades, consejos académicos) para la revisión y consideración de los cambios sugeridos tiene el propósito de poner en común las modificaciones a cada programa y establecer -a partir de la discusión colegiada- la actualización curricular continua. Finalmente, es necesario el establecimiento del flujo de grupos colegiados por los que debe pasar la aprobación de cambios sugeridos para adquiriri un status reglamentado. También habrán de considerarse los de períodos semestrales o anuales para la consideración y aprobación de cambios sugeridos. Una vez reglamentados se procede a la incorporación de los cambios al curriculum.

Reflexiones o conclusiones

La BDW se encuentra en fase de levantamiento de las modificaciones sugeridas por profesores de grupos a sus programas de estudio. Se ha creado la metodología de actualización curricular y se espera que con los datos que se recopilen se encuentre evidencia de que la ACC es factible y acerca del curriculum vivido al curriculum oficial.

Referencias

Angulo-Villanueva, R. G. (2013). Acerca de las dimensiones curriculares. Artículo de divulgación. Researchgate. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/279191464_Acerca_de_las_ dimensio nes_curriculares

Angulo Villanueva, R. (2006). Actualización curricular de contenidos en geología. Metodología de modificación continua por medio de una base de datos. *V Reunión Nacional de Ciencias de la Tierra*, 14 al 17 de septiembre. Puebla, México: Sociedad geológica mexicana. Publicado en CD.

Angulo Villanueva, R. (2007). La modificación continua de los contenidos. Una alternativa al problema metodológico del diseño curricular. Una metodología. En R. Angulo y B. Orozco (Coords.) (2007). *Alternativas metodológicas de intervención curricular en educación superior*, 267-298. México: Plaza y Valdés.

Angulo Villanueva, R. (2017a). Discursos curriculares en la educación superior en México. *Investigación Cualitativa*, 2 (2), 52-67.

Angulo-Villanueva, R. (2017b). Pensar acerca del currículum matemático. Un avance a categorías analíticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

De Alba, A. (1991). Curriculum: crisis, mito y perspectivas. México: Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación.

De Alba, A. (1993). El currículum universitario ante los retos del siglo XXI: la paradoja entre posmodernismo, ausencia de utopía y determinación curricular. En A. De Alba (Ed.), El currículum universitario de cara al nuevo milenio (pp. 29-45). México: Centro de Estudios sobre la Universidad-Universidad Nacional Autónoma de México.

De Alba, A. (2015). Cultura y contornos sociales. Transversalidad en el currículum universitario. En A. De Alba y A. Casimiro (Eds.), Diálogos curriculares entre México y Brasil (pp. 195-212). México: Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación.

Dolores, C. y Hernández, J. (2014) La formación de profesores de Matemáticas en México desde el currículum oficial. En Dolores, C., García, M., Hernández, J. y Sosa, L. (2014). *Matemática educativa: la formación de profesores,* pp. 51-74. Chilpancingo, Guerrero: Ediciones Díaz Santos-Universidad Autónoma de Guerrero.

Laclau, E. y Mouffe, Ch. (1988). *Hegemonía y estrategia socialista: hacia una radicalización de la democracia*. Madrid, España: Siglo XXI.

Li, Y. y Lappan, G. (2014). *Mathematics curriculum in school education.* Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

López-Castillo, S. y Reducindo, I. (2016). Sistema de Gestión Documental para los Programas Académicos de la UASLP. Reporte de Investigación-Verano de la Ciencia. San Luis Potosí: Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Orozco, B. (2016). El cambio curricular en la facultad de enfermería de la UASLP. Una mirada a su historia discontinua. Tesis de doctorado. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Schoenfeld, A. (2014). Reflections on Curricular Change. In Li, Y. y Lappan, G. (2014). *Mathematics curriculum in school education,* pp. 49-78. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

Valenzuela, C. y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. Números. Revista de Didáctica de las matemáticas, 79, marzo de 2012, 47-69. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros.

SUSTENTABILIDADE E CONSUMO: UMA PROPOSTA DE ANÁLISE DE UMA “CONTA D’ÁGUA”

SUSTAINABILITY AND CONSUMPTION: A PROPOSAL FOR ANALYSIS OF A "WATER BILL"

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Marlene Alves Dias,
Helenara Regina Sampaio Figueiredo, Samira Fayes Kfouri da Silva
Universidade Anhanguera de São Paulo, Universidade do Norte do Paraná (Brasil)
nielce.lobo@anhanguera.com, maralvesdias@gmail.com, helenara@kroton.com.br, samira.kfouri@unopar.br

Resumo
Este artigo discute os primeiros resultados de uma pesquisa empreendida em uma formação continuada para professores mediadores de cursos de Ensino Superior de uma Universidade particular do Estado do Paraná, Brasil, na modalidade EAD. O referencial teórico se constituiu em dois eixos: a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard e as ideias sobre professor reflexivo e profissionalização docente de Perrenoud. A metodologia qualitativa foi o estudo de caso. O objetivo foi o de analisar as declarações/justificativas/argumentos dados pelos professores ao conduzirem seus alunos a uma possível realização de atividade relacionada à análise de uma “conta d’água” no intuito de abordar o pensamento algébrico. Para isso, analisamos o emprego de uma “conta d’água” por meio de uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP). Propusemos, aos dezesseis professores participantes que respondessem à questão Q_0: Como você conduziria seus estudantes na análise dessa conta d’água para abordar noções ligadas ao pensamento algébrico? Os resultados indicaram o poder gerador da questão e a importância das reflexões compartilhadas para revelar as relações investigadas.

Palavras-chave: AEP, EAD, pensamento algébrico, matemática

Abstract
This article discusses partial results of a research undertaken in a continuous education for mediator-teachers of Higher Education Distance Learning courses on a private University of Paraná State, Brazil. The theoretical framework has consisted of two axes: Anthropological Theory of the Didactic from Chevallard and Perrenoud' s ideas about the reflective teacher and the teacher professionalization. The objective was to analyze the statements / justifications / arguments given by the teachers when conducting their students to a possible accomplishment of an activity related to the analysis of a “water bill”, in order to approach the algebraic thought. The qualitative methodology was the case study and was analyzed the use of a water supply statement for a Study and Research Activity. The question Q_0: How would you lead your students in the analysis of this water bill to address notions linked to algebraic thinking? was proposed to the 16 participating teachers to answer. The results indicated the generating power of the question and the importance of the shared reflections to reveal the relationships investigated.

Key words: SRA, DL, algebraic thinking, mathematics

Introdução

A água é um bem precioso para a vida no planeta e vem se tornando cada vez mais escassa, especialmente a água doce e potável. O tema da Sustentabilidade e Consumo de água é cada vez mais relevante para discussão nos espaços educacionais, em particular, por envolver diferentes disciplinas e permitir o desenvolvimento de atividades codisciplinares.

No Brasil, atividades com conta d'água estão presentes em livros didáticos, mas apesar de serem utilizadas como tarefas contextualizadas, muitas vezes ficam praticamente restritas ao pretexto de aplicação direta de uma determinada noção matemática para a qual o contexto não tem grande significado, funcionando apenas como um indício de possível utilização da matemática no cotidiano.

Esse tipo de tarefa deveria fazer parte do cotidiano dos brasileiros, principalmente pelo fato de que são diversosos modelos de contas de consumo das residências, os quais, como é o caso da conta usada nesta pesquisa, são enviados aos consumidores mensalmente. Uma análise mais detalhada mostra que essas contas exigem conhecimentos matemáticos, em particular, conhecimentos aritméticos que podem ultrapassar as possibilidades daqueles que não desenvolveram uma boa relação pessoal com esses conhecimentos.

No caso da água, dependendo da empresa que a fornece para a cidade ou região, das restrições e das normas para cobrança de impostos, são definidas as tarifas e formas de pagamento e emite-se a "conta d'água" mensal referente ao consumo residencial. No caso particular de São Paulo (capital) é necessário dispor de conhecimentos matemáticos para compreender como são realizados os cálculos, particularmente, se existir uma grande variação de consumo ou do valor total indicado para pagamento.

Vale ressaltar que, independentemente do modelo de conta d'água, uma tarefa mensal que deve ser sempre realizada por todo consumidor é a de leitura e conferência dos valores indicados na conta, de modo a identificar se o que está sendo cobrado é o correto. Além disso, a análise da conta d'água leva a perceber se o cidadão consumidor está colaborando para a sustentabilidade do planeta e para as questões de saúde associadas ao consumo de água.

Considerando o panorama acima, a nossa tarefa foi desenvolver um curso para professores mediadores em EAD, que focasse a importância da mediação por meio de uma abordagem questionadora e investigativa. Para tanto, foi necessário criar questões que envolvessem diversos conteúdos matemáticos, para suporte à discussão e à resolução dos questionamentos e problematizações surgidos no desenrolar do processo de inquérito.

Discutimos aqui parte do processo, em particular, a proposta feita, por meio de uma questão geradora associada à passagem da aritmética para álgebra, uma vez que essa passagem tem se mostrado resistente apesar das diversas propostas de formação inicial e continuada desenvolvidas no país.

Partimos do pressuposto que nos processos de formação continuada, principalmente nos que envolvem professores mediadores que atuam em EAD e em modelos semipresenciais (blended) é relevante discutir e estudar a mediação pedagógica. Nesses modelos os estudantes, em geral têm pouco ou nenhum acesso físico aos professores, assim sendo a forma de comunicação deve ser bem explicitada, clara, procurando evitar ambiguidades e suprir as necessidades individuais. Isso torna especialmente importante a mediação da aprendizagem feita, de modo que a aproximação ocorra nas diferentes formas de contato com o objeto e com os tutores e professores mediadores.

A partir da problemática acima nos colocamos a seguinte questão sobre os processos de mediação: Que tipo de formação poderíamos propor para auxiliar os tutores a motivarem seus estudantes a participar do processo de ensino e aprendizagem de forma ativa?

Desse modo, nossa proposta na formação continuada se centrou na utilização de uma tarefa, em um tempo reduzido, que pudesse auxiliar os tutores e professores mediadores a repensar seu trabalho com os estudantes.

Observamos que a tarefa deveria permitir a participação de tutores e professores mediadores de diferentes áreas conhecimento.

A pesquisa que desenvolvemos nessa formação continuada teve como objetivos:

- Identificar e analisar as marcas das relações institucionais sobre as relações pessoais daqueles que utilizam a Matemática como ferramenta da profissão.
- Verificar o poder gerador de reflexões entre os professores a partir do questionamento proposto.

Para tanto estabelecemos como questão de pesquisa: ¿Como o professor declara que conduziria seus estudantes na análise de uma conta d'água para abordar noções ligadas ao pensamento algébrico?

Na próxima seção discutiremos o aporte teórico da pesquisa.

Referencial teórico

O referencial teórico da pesquisa se constituiu em dois eixos: a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard e colaboradores, em particular os trabalhos de (Chevallard, 1992, 2015) e de (Bosch e Chevallard, 1999) e as ideias sobre professor reflexivo e profissionalização docente de Perrenoud (2002).

Quanto à TAD, apoiamo-nos mais especificamente nas noções de relação institucional e relação pessoal que são definidas a partir da noção de relação a um objeto após considerar como termos primitivos da teoria os objetos (o), as pessoas (x) e as instituições (I). Chevallard (1992, 2015) introduziu a noção de relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o, que corresponde à expressão pela qual designamos o sistema – representado por $R(x,o)$ –, de todas as interações, sem exceção, que x pode ter com o objeto o, ou seja, x pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele, etc. Assim, dizemos que o existe para x se este tem uma relação pessoal com o ou, ainda, se sua relação pessoal com esse objeto é não vazia – o que se indica por $R(x,o) \neq \emptyset$.

Dessa forma, quando um objeto o existe para uma pessoa x, ou seja, quando $R(x,o) \neq \emptyset$, dizemos que x conhece o e que a relação $R(x,o)$ indica a maneira que x conhece o.

Na sequência o autor introduziu a noção de instituição I e explicita que as instituições são obras que permitem e impõem a seus sujeitos maneiras próprias de fazer. Chevallard (1992, 2015) esclarece que a relação pessoal de x com o objeto o é criada ou alterada por meio da entrada de x em certas obras O, de cuja composição participa o, e essas obras vivem em determinadas instituições em que x poderá ocupar a posição p.

Assim, a "teoria do conhecimento" esboçada para os indivíduos é transferida às instituições, ou seja, dado um objeto o, uma instituição I e uma posição p em I, o autor denomina relação institucional ao objeto o em posição p, e a indica por $R_I(p,o)$ a relação com o objeto o que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de I em posição p.

Desse modo, um indivíduo ao se tornar sujeito de I em posição p submete-se às relações institucionais $R_I(p,o)$, que irão (re)modelar, (re)formar suas relações pessoais. De forma geral, nossas relações pessoais são fruto de nossa história de sujeições institucionais passadas e presentes.

Consideramos ainda, como aporte teórico, a noção de Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) que, segundo Chevallard (1991), é uma nova epistemologia que induz uma mobilização ou construção funcional dos conhecimentos e saberes, visando responder a uma questão motivadora, que delimita o campo de estudo.

Vale ressaltar que, atividade é aqui entendida como um trabalho pessoal supervisionado. As *atividades de estudo e de pesquisa* – AEP são prescritas com o objetivo de construir resposta R a uma questão Q e aos saberes S funcionalmente desejados, ou seja, saberes que podem ser úteis para a sociedade, o que, segundo o autor, pode ser a matriz de uma epistemologia mais autêntica, que rompe com a epistemologia escolar dominante.

Observamos que, segundo Chevallard (1991) essa nova epistemologia ao induzir uma mobilização ou uma construção funcional dos conhecimentos e saberes, por meio da busca de respostas a uma questão motivadora, que delimita o campo de estudo e impõe que os conhecimentos disciplinares associados se aperfeiçoem por meio de articulações codisciplinares, ou seja, é necessária uma sinergia com conhecimentos que pertencem a outras jurisdições disciplinares que serão selecionadas por meio da questão a estudar.

Ainda conforme Chevallard (1991) a implementação das "atividades" necessita de uma modificação decisiva da ecologia do estudo escolar, uma vez que o tempo didático não pode estar vinculado à sucessão de conhecimentos e nem mesmo a uma sucessão de AEP, mas deverá estar conectado a percursos de estudo e pesquisa – PEP. Um PEP é gerado por uma questão Q com alto poder generativo, propenso a impor muitas questões derivadas e, assim, levar a grande número de saberes a ensinar - e alguns outros, que marcarão o limite temporário do campo de estudo.

Em relação ao segundo eixo, qual seja, a profissionalização docente, o suporte teórico da pesquisa veio de Perrenoud (2002), para o qual a profissionalização do ofício de professor ocorre a longo prazo, em um processo estrutural e de lenta transformação. Segundo o autor, nenhum órgão governamental ou qualquer outra instituição poderá provocá-la em um curto espaço de tempo. Essa evolução precisa ser desejada e ocorrer de maneira contínua ao longo de muitos anos.

Outro conceito fundamental para orientar a formação e a pesquisa foi o conceito de prática reflexiva, segundo (Perrenoud, 2002). O autor esclarece que todos nós refletimos sobre nossas ações, no entanto não é dessa reflexão a que ele se refere para o caso do professor. Ele aponta que

> Visando chegar a uma verdadeira *prática reflexiva*, essa *postura* deve se tornar quase permanente, inserir-se em uma relação analítica com a ação, a qual se torna relativamente independente dos obstáculos encontrados ou das decepções. Uma prática reflexiva pressupõe uma postura, uma forma de identidade um *habitus.* (p.13)

Assim, a prática reflexiva, enquanto uma forma de identidade e um "habitus" do docente foi o tempo todo pensada no processo formativo. Os conceitos da TAD e de profissionalização docente embasaram a análise dos dados.

Na próxima seção apresentamos o desenho da pesquisa.

Metodologia da pesquisa

Como já anunciado na introdução, para atingir nosso objetivo propusemos na formação continuada o estudo de uma conta d'água de uma residência de São Paulo, para a qual existia uma média de consumo constante, mas que teve uma grande variação para um determinado mês indicado na mesma.

A partir da conta d'água propusemos a um grupo de 16 tutores e professores mediadores de cursos de Ensino Superior na modalidade EAD de diferentes áreas a seguinte questão inicial: Q_0: *Como você conduziria seus estudantes na análise dessa conta d'água para abordar noções ligadas ao pensamento algébrico?*

Observamos que a noção de pensamento algébrico aqui utilizada está associada à organização do trabalho com o grupo seguindo os quatro elementos indicados no (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), a saber: 1) compreender padrões, relações e funções; 2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas utilizando símbolos algébricos; 3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; 4) analisar as mudanças em vários contextos.

Ressaltamos ainda que a metodologia da pesquisa foi a qualitativa, segundo (Godoy, 1995), pois estuda um fenômeno que envolve seres humanos e suas relações sociais situadas em diferentes ambientes. Além disso, seguiu o método do estudo de caso, segundo a mesma autora, uma vez que analisa as possibilidades de utilização de um recurso de ensino e de aprendizagem com um grupo de pessoas envolvidas em uma mesma atividade, com propostas diferentes, mas que utilizam uma mesma ferramenta, a Matemática, no caso, um grupo heterogêneo de tutores e professores de diferentes áreas.

Participaram da pesquisa 16 tutores e professores do Ensino Superior de cursos na modalidade EAD. Tratava-se de um curso de formação continuada, na modalidade semipresencial com apoio de AVA Moodle, com 80 horas, 20 presenciais e 60 horas a distância, dividido em 3 módulos, objetivando discutir mediação pedagógica em EAD.

A coleta de dados foi realizada por meio de textos escritos e de apresentações dos participantes, os quais ficaram estocados no AVA da formação continuada e por meio de gravações das discussões na parte presencial do processo formativo.

A análise de dados foi interpretativa e realizada por meio: 1) da identificação das diferentes áreas de atuação dos participantes e suas relações pessoais com a Matemática; 2) das possibilidades de tratamento da tarefa proposta.

Cenário: Conta d'água

A proposta formativa girou em torno de apresentar uma proposta didática do tipo Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP) - Chevallard (1991). Nela os professores trabalharam incialmente a questão geradora Q_0 antes da discussão, pois esta foi enviada para cada um em particular e, organizados em duplas, eles nos enviaram suas respostas, as quais foram discutidas posteriormente no grupo.

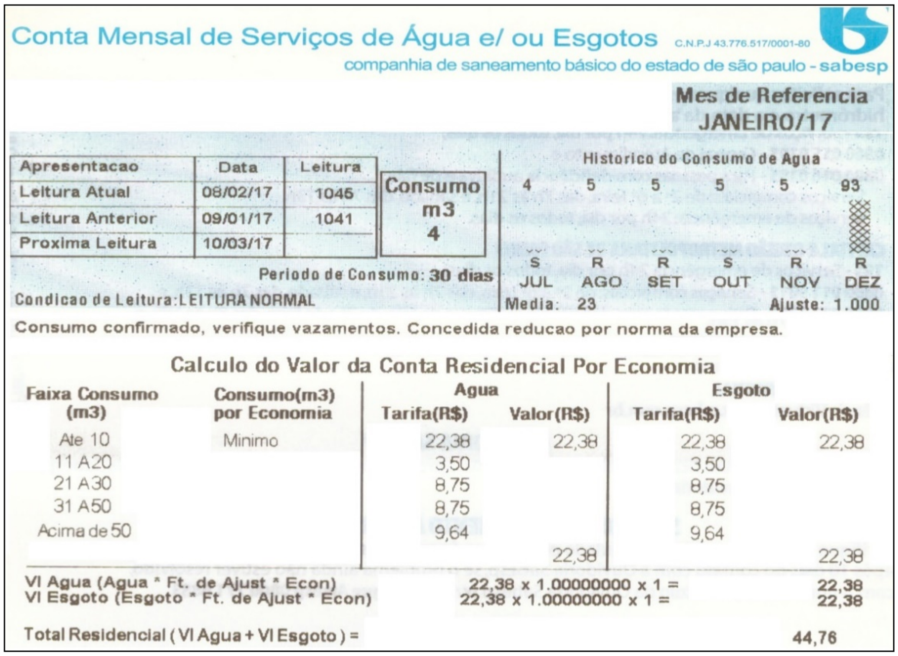
A questão Q_0 serviu de meio para criar espaços para a ação e a reflexão dos professores sobre as possíveis noções matemáticas por eles vislumbradas na conta d'água. Em particular, visávamos discutir questões associadas às noções matemáticas de média aritmética, função afim e transformações de unidades de medidas, entretanto, como a atividade envolvia uma tarefa com vários dados, e por serem dados que poderiam ser tratados por meio de outros conhecimentos disciplinares, ou seja, de forma codisciplinar. Para tanto, era necessária uma sinergia com conhecimentos que pertencem à outras jurisdições disciplinares que precisariam ser selecionados no inquérito da questão proposta. Sendo assim, a atividade envolvia "Sustentabilidade e Consumo" e, a partir dela, os professores deveriam responder à questão Q_0 proposta.

A atividade foi proposta da seguinte forma:

A companhia de saneamento básico (água e esgoto) de São Paulo – Sabesp efetua medidas e controla os gastos das residências por meio da média de consumo.

Nos anos de 2015 e 2016, em função da baixa capacidade dos reservatórios de água do Estado, devido à falta de chuvas, eram dados descontos - dependendo da baixa ou da manutenção do consumo - ou multas quando houvesse aumento de consumo de água.

Considere uma conta de água de uma residência em São Paulo, referente ao consumo de janeiro de 2017 *(observe que a conta se refere a pagamento da água consumida e, também, do esgoto).*



Conta Mensal de Serviços de Água e/ ou Esgotos C.N.P.J 43.776.517/0001-80
companhia de saneamento básico do estado de são paulo - sabesp

Mes de Referencia JANEIRO/17

Apresentacao	Data	Leitura
Leitura Atual	08/02/17	1046
Leitura Anterior	09/01/17	1041
Proxima Leitura	10/03/17	

Consumo m3 4

Periodo de Consumo: 30 dias
Condicao de Leitura: LEITURA NORMAL

Historico do Consumo de Agua

JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ
4	5	5	5	5	93
S	R	R	S	R	R

Media: 23 Ajuste: 1.000

Consumo confirmado, verifique vazamentos. Concedida reducao por norma da empresa.

Calculo do Valor da Conta Residencial Por Economia

Faixa Consumo (m3)	Consumo(m3) por Economia	Agua Tarifa(R$)	Agua Valor(R$)	Esgoto Tarifa(R$)	Esgoto Valor(R$)
Ate 10	Minimo	22,38	22,38	22,38	22,38
11 A20		3,50		3,50	
21 A30		8,75		8,75	
31 A50		8,75		8,75	
Acima de 50		9,64		9,64	
			22,38		22,38

Vl Agua (Agua * Ft. de Ajust * Econ) 22,38 x 1.00000000 x 1 = 22,38
Vl Esgoto (Esgoto * Ft. de Ajust * Econ) 22,38 x 1.00000000 x 1 = 22,38

Total Residencial (Vl Agua + Vl Esgoto) = 44,76

Figura 1: Parte da conta d’agua escolhida para análise
Fonte: Acervo das autoras

No gráfico da conta d’água real, com os consumos de julho de 2016 a dezembro de 2016, observamos regularidade nos meses considerados, mas no mês de dezembro o consumo foi quase 19 vezes maior.

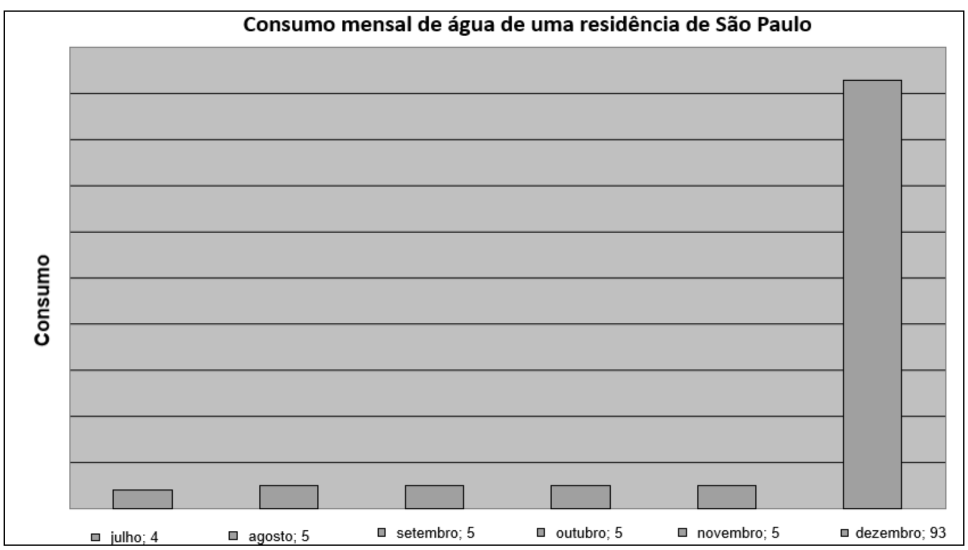


Figura 2: Gráfico com dados do consumo de julho a dezembro
Fonte: Acervo das autoras

Neste cenário a atividade foi desenvolvida.

Resultados

Existiam diversas possibilidades de tratamento da questão dada em função dos dados da referida conta.

Uma das duplas constatou que a média indicada não correspondia a habitualmente considerada nas aulas de matemática, ou seja, a média aritmética, pois a média de consumo indicada na conta é de 23 m^3. Portanto, a dupla levantou a seguinte questão: Que tipo de cálculo a Sabesp utilizou para determinar a média?

Na discussão a dupla comparou o resultado da conta e calculou a média aritmética, constatando que a mesma seria de 19,5 $m^{3,}$ em vez de 23 m^3. Além disso, sendo a dupla de professores que também leciona na educação básica, estes consideraram o interesse de utilizar a conta d'água como atividade para motivar o estudo das transformações de unidades de medida.

Neste momento discutimos um exemplo de tipo de tarefa de uma macroavaliação em que era preciso identificar a transformação de 1 litro em unidades cúbicas. Como a maioria dos alunos respondeu 1m^3 os professores identificaram na conta um bom exemplo para mostrar que essa resposta era descabida e poderia motivar os alunos a se questionarem e procurarem a resposta correta.

Uma outra proposta interessante foi a de uma dupla de professoras de língua portuguesa, motivadas pelo tema codisciplinar da sustentabilidade. Segundo as professoras, o professor de Matemática poderia contribuir propondo a questão da conta d'água e dando um tempo para que os estudantes, divididos em grupos, pudessem tratá-la buscando respostas para questões por eles mesmos levantadas, o que poderia conduzir a uma frutífera discussão sobre o problema da sustentabilidade de forma que a própria atividade levaria a necessidade de buscar respostas em outras disciplinas, o que permitiria a participação de outros professores enquanto mediadores desta nova metodologia de ensino, na qual cada aluno deve realizar suas próprias pesquisas de modo a encontrar uma resposta para a questão colocada.

No caso específico da dupla de professoras de português, estas observaram que a forma de cobrança seguia uma função afim em que para o consumo entre 1 m^3 e 10 m^3, o valor da conta representaria uma função constante $y = b$. No caso em que o consumo variasse de 11 m^3 a 20 m^3, o valor da conta representaria uma função afim $y = ax + b$ em que $a = 3{,}50$ e $b = 22{,}38$ reais, logo para um consumo de 16 m^3, o valor a pagar seria de $3{,}506 + 22{,}38 = 43{,}38$ reais multiplicado por 2. As professoras continuaram os cálculos observando que para determinar o valor a ser pago por cada consumidor, o computador remoto que efetua esses cálculos teria um *software* que dispunha de um programa descrito em uma linguagem especifica para efetuar os cálculos. Elas consideraram que esta explicitação poderia motivar e incentivar os alunos da educação básica, uma vez que estariam mostrando a importância da matemática para analisarem o que pensam ser uma simples conta d'água, mas que traz diversos elementos que podem enganar aqueles que não dispõem dos conhecimentos matemáticos para sua análise.

As professoras propuseram ainda discutir a questão da sustentabilidade, indicando os seguintes motivos: (i) caso o consumidor gaste 1 ou 10 m^3 pagará o mesmo valor; (ii) caso gaste 21 m^3 ou 50 m^3 o cálculo do valor a pagar será realizado utilizando o mesmo valor para cada m^3, ou seja, mesmo se na conta estão apresentados dois intervalos distintos para essa variação, o valor do m^3 é o mesmo, o que não parece justo em relação aos intervalos iniciais. O mesmo ocorre para os gastos acima de 50m^3 (independente do limite), o que parece não incentivar a economia.

Conclusão e perspectivas futuras

A proposta permitiu identificar que a relação pessoal do professor está associada à sua relação institucional (conhecimentos matemáticos da Educação Básica), pois, no recorte aqui discutido, eram duas professoras de língua portuguesa que já lecionavam numa escola que adota o sistema de projetos envolvendo professores de outras disciplinas, o que favoreceu o desenvolvimento da proposta.

A questão Q_0 provocou uma série de questionamentos e reflexões com o grupo todo quando da indicação de uma aplicação envolvendo conteúdos matemáticos como o estudo dos valores a serem pagos que dependiam do intervalo de consumo, indicando a ideia de função e, portanto, envolvendo a necessidade de passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico e na sequência para a representação computacional de forma a garantir os cálculos remotos em tempo real.

Essa discussão levou à ideia algébrica de função afim definida em intervalos, uma vez que o funcionário da empresa de fornecimento de água encarregado da medição do consumo dispõe de um aparelho com um *software* remoto que calcula o valor a ser pago de acordo com a água consumida e imprime a conta *in loco*.

A questão Q_0 se mostrou profícua, tendo um forte caráter gerador de novas questões, particularmente as associadas à identificação da estratégia de uso da conta d'água para o objeto de estudo.

Além disso, a questão Q_0 promoveu entre os professores participantes reflexões práticas sobre Sustentabilidade e Consumo e sobre como motivar o estudante a participar da proposta compreendendo a importância do pensamento algébrico aplicado a um conteúdo específico da disciplina de Matemática.

Os resultados além de indicarem o poder gerador da questão Q0, mostraram a importância das reflexões compartilhadas para revelar as relações investigativas motivadas pelos novos questionamentos

Observamos que a análise de Q_0 promoveu entre os professores reflexões sobre a gestão do tempo de trabalho necessário em sala de aula, sobre a necessidade de levantamento dos conhecimentos prévios envolvidos para o desenvolvimento da proposta, sobre as questões a serem propostas para mediar à aprendizagem e, enfim, sobre as discussões que poderiam ser levantadas com os alunos.

Tais reflexões, como explicita Perrenoud (2002), são frutíferas para o professor quebrar o isolacionismo e discutir possibilidades para a prática.

O grupo pode fornecer apoio às ideias, validando umas e contestando outras.

Os tutores e professores participantes identificaram diversas possibilidades de tratamento e abordagem graças à quantidade de dados disponíveis na conta e das possíveis relações pessoais originárias das relações institucionais as quais os professores e os estudantes se submeteram ou se submetem. Isso possibilitou discussões sobre profissionalização docente e o valor dos processos de formação continuada.

Considerando mais especificamente as relações pessoais dos participantes foi possível identificar que: os questionamentos e reflexões gerados a partir de Q_0 estavam diretamente associados à área do conhecimento em que o professor atuava, o que indica ser a relação pessoal desses professores diretamente ligada à relação institucional a que se submeteram ou estão submetidos.

Em relação aos professores da Educação Básica, estes procuraram desenvolver a atividade para noções que correspondiam a sua atuação no momento do desenvolvimento da atividade.

Observamos ainda que contas d'água ou de luz apresentadas dessa forma aos consumidores deveriam ser contestadas, uma vez que apresentam uma quantidade enorme de dados que dificultam o entendimento das mesmas. Como a maioria dessas contas são desenvolvidas dessa forma, e até o momento os consumidores não reclamaram das dificuldades de compreendê-las, podemos considerar que a maioria da população talvez não as analise e interprete os dados nelas contidos, mesmo que para o caso particular de cada conta precisamos apenas de conhecimentos aritméticos.

Concluímos que essa tarefa pode ser utilizada nas diferentes etapas da Educação Básica e no Ensino Superior, dependendo do conceito ou noção que se deseja introduzir ou desenvolver.
Para tanto, é preciso o professor refletir sobre:

1) a gestão da sala de aula;
2) as formas de motivar os alunos e
3) os possíveis questionamentos que podem surgir na classe.

É importante ressaltar que em função do tempo da formação continuada estar dividido em 20 horas presenciais e 60 horas a distância, iniciamos propondo uma AEP, para tal centraríamos a tarefa no estudo do gráfico apresentado e discutiríamos a noção de média aritmética deixando em aberto outros questionamentos que poderíamos tratar nas horas a distância. Entretanto, o caráter gerador da questão Q_0 nos conduziu a um PEP, pois apareceram questões diretamente associadas às representações matemáticas indicadas na conta como questões associadas a outras ciências, como por exemplo, a sustentabilidade.

Isso mostra que os PEP representam um novo meio para o desenvolvimento dos estudantes, em particular, os que seguem cursos na modalidade a distância, pois elas geram um espaço de questionamentos que ultrapassam as dúvidas relativas às noções de determinada disciplina, o que pode ser aproveitado para alimentar as discussões entre os estudantes e os tutores e professores mediadores, o que permite uma organização em que o sistema didático deixaria de ser constituído por estudantes, professor e tutor da disciplina e uma questão a estudar, mas incluiria estudantes, professores e tutores de diferentes áreas que se proporiam a estudar a questão geradora em conjunto, o que ampliaria o universo de conhecimento do grupo que se propôs a estudar Q_0.

Essa metodologia poderia ser utilizada como parte de disciplinas, para as quais se proporia uma questão geradora Q_0 que alimentasse fóruns e chats.

Referências

Bosch, M., e Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(1)*, 77-123.

Chevallard, Y. (1991). *Vers une didactique de la codisciplinarité: Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire.* Recuperado em 10 de agosto de 2018 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques, 12(1)*, 73-112.

Chevallard, Y. (2015). *Pour une approche anthropologique du rapport au savoir*. Recuperado em 05 de agosto de 2018 de http://www.gfen.asso.fr/images/documents/publications/dialogue/dial155_enligne_anthropo_rap_savoir_chevallard.pdf

Godoy, A. S. (1995). Pesquisa Qualitativa: Tipos Fundamentais. Recuperado em 10 de agosto de 2018 de http://www.scielo.br/pdf/rae/v35n3/a04v35n3

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Virgínia: NCTM.

Perrenoud, P. (2002). *A prática reflexiva no ofício de professor: profissionalização e razão pedagógica.* Porto Alegre: Artmed.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ENSINO DE PROBABILIDADE CONDICIONAL: O JOGO DA ROLETA EM UM EXPERIMENTO NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES

CONDITIONAL PROBABILITY: A ROULETTE GAME IN A TEACHING EXPERIMENT IN THE CONTINUING TEACHER TRAINING PROCESS

Albano Dias Pereira Filho, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Instituto Federal do Tocantins, Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
albano.filho@ifto.edu.br, nielce.lobo@gmail.com

Resumo
Neste artigo, discute-se um experimento de ensino sobre Probabilidade Condicional, inserido em um processo formativo para doze professores de matemática. A proposta, baseada em atividades investigativas, objetivou a construção de conhecimentos profissionais dos participantes sobre Probabilidade Condicional e utilizou materiais concretos, tais como CDs, bolas de gude, roletas e toca discos como materiais pedagógicos para os jogos. O experimento faz parte de uma pesquisa de doutoramento na qual utilizou-se o aporte teórico de Ponte, Brocardo e Oliveira sobre investigações matemáticas. A metodologia foi a qualitativa do tipo *Design-Based Research,* na concepção de Brown e de Collins. Os resultados indicaram que, a partir das discussões e reflexões sobre as possibilidades didáticas das atividades investigativas, houve para os participantes da formação, ampliação do conhecimento pedagógico do conteúdo.

Palavras-chave: Aula Investigativa, Jogos Educativos, Probabilidade

Abstract
This article discusses a teaching experiment on Conditional Probability, included in a training process to twelve mathematics teachers. It was aimed at helping teachers to construct professional knowledge on conditional probability teaching by using concrete materials such as: CDs, marbles, roulettes and record players as educational materials for games. The experiment is part of a doctoral research in which the theoretical contribution of Ponte, Brocardo and Oliveira on mathematical research was used. The methodology was qualitative, typified as *Design-Based Research*, according to Brown and Collins. The results indicated that, from the discussions and reflections on the didactic possibilities of the research activities, there was, mainly, more information of the pedagogical content knowledge for the participants of the training process.

Key words: research classroom, didactic games, Probability

Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado cujo objetivo foi identificar e analisar as contribuições de um curso de formação continuada voltado para o ensino da Probabilidade, por meio de aulas investigativas, para a ampliação do conhecimento profissional de professores do Ensino Médio. Apresentaremos neste texto um experimento de ensino com o jogo da roleta e suas possibilidades para discussão de Probabilidade Condicional.

Segundo (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2009) estudos em Educação mostram que aulas investigativas se constituem em uma poderosa forma para auxiliar o aluno na construção de conhecimentos. Os autores afirmam ainda que, nesse tipo de aula, quando os alunos expõem os resultados de suas investigações, eles tomam a iniciativa no andamento das atividades, se envolvem ativamente, o que facilita o aprendizado, uma vez que o aluno mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.

Consideramos ser importante nos processos formativos discutirmos esse tipo de estratégia de ensino, levando o professor a elaborar atividades de modo que a resolução seja dirigida pelos alunos, com a mediação do professor. Destacamos a necessidade de o professor questionar o aluno sobre suas jogadas e estratégias para que o jogar se torne uma atividade de aprendizagem e de (re)criação conceitual, em vez de reprodução mecânica como ocorre na resolução de uma lista de exercícios.

Em relação ao uso de jogos como atividade para ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio – PCNEM (BRASIL, 2002) sugerem tal recurso como um dos caminhos para melhorar os processos de ensino e de aprendizagem dos alunos, seja auxiliando nos contextos dos problemas ou servindo como instrumento para a construção de estratégias de resolução destes. Os PCNEM consideram os jogos uma possibilidade interessante de propor problemas, uma vez que estes sejam apresentados de modo atrativo, favorecendo assim a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.

Entendemos que um bom jogo deve ser interessante e desafiador, proporcionando a participação ativa dos jogadores durante todo o processo, podendo assim este tipo de atividade para ensino constituir uma poderosa forma para auxiliar o aluno a construir conhecimentos.

Fernandes, Batanero e Correia e Gea (2014), destacam que os estudos sobre probabilidade condicional com futuros professores devem avançar, e consideram também que essa discussão se encontra ainda escassa sendo que dentre esses que existem, alguns tem mostrado que a compreensão de probabilidade condicional, nem sempre está correta, por parte de futuros professores. Contreras, Batanero, Díaz e Arteaga (2013) em um estudo com futuros professores, destacam que muitas dificuldades são relacionadas à interpretação de problemas com ou sem reposição. Carter (2008) percebeu também essas dificuldades citadas anteriormente, em professores da educação básica, além de erros na interpretação do cálculo da probabilidade conjunta, equiprobabilidade e além de a resolução de problemas em que se tem de aplicar o teorema de Bayes.

Percebe-se por meio destas pesquisas que, ao resolverem problemas que envolvem probabilidade condicional, professores ou futuros professores, têm apresentado dificuldades de interpretação.

Sob a ótica de ensinar Probabilidade Condicional os professores de matemática participantes do processo formativo, refletiram coletivamente nos encontros sobre o uso de material concreto, especificamente com roletas, utilizando a metodologia de aulas investigativas no Ensino Médio, buscando levar os alunos a tomar contato de forma investigativa com conceitos de Probabilidade Condicional.

Fundamentação teórica: aulas investigativas

No recorte aqui discutido, o experimento desenvolvido na formação continuada focou probabilidade condicional e o suporte para a análise veio dos estudos sobre o “ensino por investigação”.

A ideia do ensino por investigação como metodologia foi proposta por John Dewey no início do século XX nos Estados Unidos. Dewey apontou que era necessário que as escolas acompanhassem as mudanças ocorridas no contexto da época integrando métodos científicos à Educação, possibilitando aos estudantes realizarem experiências práticas.

As ideias de Dewey só foram difundidas e incorporadas na Educação na metade do século XX quando o educador Joseph Schwab propôs que a ciência deveria refletir conceito e prática, e que os alunos deveriam entender que a investigação era uma atividade dinâmica e contínua e não uma atividade cientifica investigativa individual. Schwab dizia ser importante que o professor propusesse problemas com base em investigações fazendo o uso de experiências para conduzir as aulas. Isso deveria ser uma fase a cumprir, antes de introduzir a teoria, conceitos e princípios das ciências (Sá, 2009).

No Brasil as concepções de aulas investigativas começaram a surgir nas décadas de 50 e 60, época essa em que prevalecia o modelo de ensino como uma sequência fixa de comportamentos que iniciavam na identificação de problemas, passavam para elaboração de hipóteses e verificação experimental e por fim conclusão das hipóteses. Porém as ideias investigativas propostas eram tidas como neutras, ou seja, não envolviam valores e, assim sendo, distorciam o caráter da investigação científica.

De acordo com Vieira (2013), somente no fim da década de 80 e início da década de 90 do século passado, a proposta de ensino por meio de aulas investigativas foi retomada no Brasil, criando assim expectativas quanto à promoção de um ensino mais científico e dinâmico. Contudo, somente a partir de 2000 surgiram pesquisas pretendendo definir o conceito de aula investigativa.

O ensino por meio de aulas investigativas possibilita a construção de conceitos e conhecimentos possibilitando ao educando intuir, presumir, experimentar, provar, avaliar e apresentar os resultados encontrados. A ação de investigar significa compreender e procurar soluções para os problemas propostos e assim buscar relações, procurando sempre justificá-las. O uso de aula investigativa no ensino gera um chamado desequilíbrio que é necessário para instigar o raciocínio do aluno, esse desequilíbrio ocorre quando o aluno é retirado da passividade das aulas convencionais e passa a fazer parte da ação sobre o meio, sobre os objetos, sobre as ideias com os colegas, e ainda a experimentação, criação e solução de problemas, observações, testes e pesquisas (Bona &Souza, 2015).

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006) as aulas investigativas são aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. Os autores afirmam que, dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se durante a atividade ocorrer formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de investigação matemática. A postura do professor pode ajudar a tornar em sala de aula o aluno participativo, uma vez que ele é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, conjecturas e nas realizações de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e nas discussões e argumentações com os seus colegas e com o professor.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participem ativamente. As investigações facilitam a compreensão dos processos e ideias matemáticas e da atividade matemática. Desta forma, tarefas de natureza investigativa podem ser relevantes, pois os alunos viverão experiências com características semelhantes a dos matemáticos profissionais.

Ponte (2003) propõe o uso de metodologias investigativas na sala de aula e discute como a investigação pode contribuir para aprendizagem dos alunos. Além disso, aponta as competências necessárias aos professores para promover a investigação na sala de aula. Aborda também o que ainda precisa melhorar para que essa prática se torne integrada a gestão escolar, a investigação deve ser contínua e não momentânea. A investigação não pode ocorrer apenas em uma aula e na aula seguinte voltar à aula com repetições de fórmulas e tradicionalismo.

O autor afirma que, investigar não significa fundamentalmente trabalhar com problemas de grande dificuldade. Mas sim, refletir a partir de questões que nos interessam e que apresentam primeiramente obscuras, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. Nesse sentido, investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos e demonstrações. Segundo o autor, em uma investigação matemática o aluno parte de uma questão geral pouco estruturada e tenta formular uma questão mais específica e sobre ela produzir várias conjecturas que devem ser testadas para que em caso de refutações as questões sejam revistas ou novas questões sejam avaliadas até ganharem credibilidade.

A opção de trazer João Pedro da Ponte no referencial teórico se deve ao fato do autor considerar a investigação, como sendo o ato de descobrir relações, padrões, procurando identificar e comprovar as propriedades levantadas pelo investigador. Ele destaca a importância dessa atividade por contribuir para a construção do conhecimento, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar, e apresentar o(s) resultado(s) encontrado reforçando atitudes de autonomia cooperação e capacidade de comunicação oral e escrita (em se tratando do trabalho em grupo). Essas definições do autor vão ao encontro da metodologia utilizada na formação docente, abordando o ensino de probabilidade condicional por meio de aulas investigativas.

■ Metodologia

Buscamos analisar as contribuições de uma formação continuada para o desenvolvimento profissional docente. A formação foi empreendida por nós e focou o ensino de probabilidades condicional por meio de aulas investigativas. Os procedimentos metodológicos de coleta de dados durante a formação continuada foram por observações, recolhidas dos materiais produzidos/ adaptados pelos professores para suas classes, gravações de áudio e vídeos do processo formativo e da sala de aula.

Os sujeitos da pesquisa foram 12 professores da Educação Básica que atuam no Ensino Médio da rede Pública e privada da cidade de Porto Nacional –Tocantins. A metodologia da investigação foi qualitativa do tipo *Design-Based Research*, na concepção de Brown (1992) e (Collins, 1992). Esta é uma metodologia de pesquisa que apresenta características que permitem ao pesquisador tecer reestruturações das experimentações durante todo o processo. Desta forma, entende-se que os experimentos são desenhados de modo a se adequarem ao grupo pesquisado, o que atendeu ao interesse desta pesquisa.

O termo *Design-Based Research* foi introduzido pelos pesquisadores Ann Brown e Alan Collins para se referirem a um método de pesquisa em Educação que intenciona resolver problemas complexos em contextos reais, em colaboração com os participantes e realizar investigação rigorosa e reflexiva para testar e aperfeiçoar ambientes de aprendizagem inovadores (Brown, 1992), (Collins, 1992).

Como instrumentos de coleta de dados foram utilizados: o diário de campo do pesquisador, gravação em áudio e vídeo dos encontros e questionários aplicados aos professores participantes da formação continuada.

A proposta formativa objetivou a construção de conhecimentos profissionais dos professores participantes sobre Probabilidade Condicional e utilizou materiais concretos, tais como, CDs, bola de gude, roletas e toca discos antigos para confeccionar o material pedagógico para os jogos.

Durante a formação continuada foi identificado cinco eventos críticos, que identificaram momentos significativos relacionados aos objetivos e a questão de pesquisa. Estes eventos críticos refletem momentos em que a participação na formação continuada impulsionou os professores participantes a refletirem sobre sua prática, criatividade e autoconfiança, bem como promoveram impactos na sala de aula, no tocante à reflexão sobre os momentos de pré, durante e pós-aulas, ou seja, em sua própria didática. Identificamos também alterações na postura profissional frente o Ensino de Probabilidade por meio de aulas investigativas.

O método de análise de vídeos proposta por Powell, Francisco e Maher (2004) foi utilizado para a análise. São sete fases de análise: observar atentamente os dados do vídeo; descrever os dados do vídeo; identificar eventos críticos; transcrever; codificar; construir o enredo; compor a narrativa.

O episódio

O episódio aqui relatado teve por propósito a construção de conhecimentos profissionais dos participantes de uma formação continuada sobre Probabilidade Condicional quanto ao ensino por meio de atividades investigativas. Para tanto, no episódio foi discutido com os professores o aporte teórico de Atividades Investigativas, segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Foi proposto aos professores a criação de uma aula com o uso de um jogo, no qual se utilizasse materiais concretos, tais como CDs, bolas de gude, roletas e toca discos como materiais pedagógicos para os jogos.

Combinamos que a confecção das roletas seria uma tentativa de incentivar e aguçar a curiosidade sobre a atividade com material concreto. A expectativa foi de realizarmos as atividades em oito aulas, divididas em quatro momentos de duas aulas cada. Sendo o penúltimo momento, reservado para discussão dos resultados, momento este em que os alunos relatariam aos colegas de classe o trabalho realizado. Com relação ao último momento, este seria reservado para o professor sistematizar frente à turma o trabalho realizado, bem como, definir probabilidade por meio das atividades realizadas.

Inicialmente refletimos sobre a postura do professor desde a introdução da proposta, passando pelo momento de realização, socialização com os alunos e a discussão dos resultados. Em seguida elaboramos, em conjunto, uma atividade com a roleta e as questões a serem propostas aos alunos. A ideia de utilizar roletas e toca disco foi muito bem avaliada pelo grupo e abriu espaço para o surgimento de ideias de investigação, como por exemplo, as seguintes:

> Para as atividades propostas, vamos supor que vocês estejam sentados numa mesa de roleta. Desta forma, investigue e discuta com seus colegas. a) Se você precisar apostar onde a seta vai parar, qual seria sua ideia? Por quê? Rode a roleta e veja se sua conjectura se efetivou. b) Qual a chance de a seta parar na cor azul? Descrevam as ideias utilizadas pelo grupo. c) Qual a probabilidade da seta parar na cor verde, dado que o número é 1? d) qual a probabilidade da seta parar no número 1, dado que a cor é verde?

Para viabilizar o jogo foram construídas diversas roletas como mostra a figura 1.

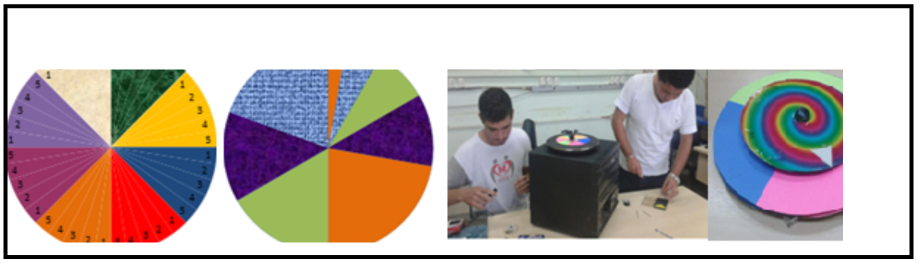


Figura 1- Roletas utilizadas para o jogo
Fonte: Dados da pesquisa.

Durante a elaboração, percebemos que os professores se preocupavam com as etapas que os alunos deveriam realizar para a resolução das questões, bem como na interpretação dos textos. Uma preocupação recorrente foi a de elaborar um enunciado claro e preciso, a preocupação dos professores participantes foi sempre com a didática e com o entendimento dos estudantes. Percebemos durante as discussões de elaboração das questões e materiais para o jogo, uma interação crescente do grupo e também o levantamento das possibilidades didáticas, para que a questão pudesse ser explorada de forma eficiente, levando assim os alunos sempre a refletirem sobre espaço amostral, aleatoriedade e sobre os conceitos de Probabilidade Condicional.

Realizarmos as atividades em oito aulas, divididas em quatro momentos de duas aulas cada. Sendo o penúltimo momento, reservado para discussão dos resultados, momento este em que os alunos relatariam aos colegas de classe o trabalho realizado.

As imagens abaixo são algumas das amostras de roletas elaboradas com os professores durante o processo formativo. O material foi explorado em CD e toca discos antigos (tocados a pilha). Exploramos probabilidade condicional, levando em consideração as cores, números e ângulos.

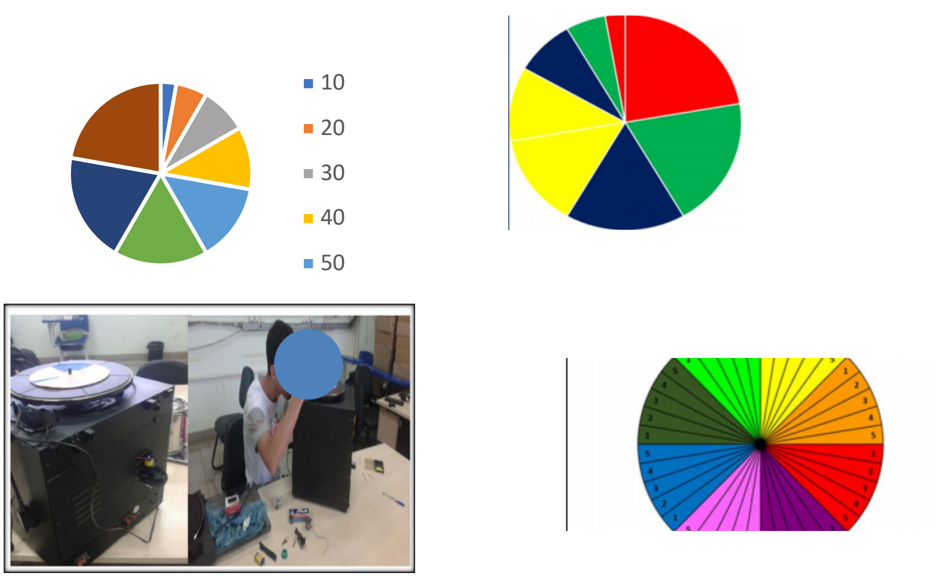


***Figura 2*:** Amostra de roletas elaboradas no processo formativo
Fonte: Dados da pesquisa

Elaboradas as atividades, foram discutidas as possibilidades para ensino de probabilidade condicional.

Análise dos resultados

Ao final do encontro, ficou evidente que a participação na formação pôde ampliar o conhecimento profissional docente (específico, curricular e pedagógico), oferecendo aos professores subsídios para reflexões sobre suas práticas em classe, oportunizando inserir as aulas investigativas para abordar os conceitos de probabilidade condicional.

Na formação continuada empreendida, buscamos, por meio das atividades de investigações matemáticas na sala de aula, identificar os problemas e as dificuldades dos professores em suas práticas e, também, discutir os processos e as estratégias de ensino, de modo que essa formação pudesse favorecê-los a se desenvolver profissionalmente, tanto do ponto de vista individual quanto coletivo. Foram compartilhadas durante o curso de formação continuada experiências vividas em sala de aula, aulas e atividades investigativas foram planejadas com o objetivo de auxiliar os professores a compreenderem melhor os conceitos relativos à Probabilidade. O curso procurou também promover o desenvolvimento de atitudes de liderança e competência para gerenciamento de trabalho em grupos.

Aproveitamos o espaço de reflexão para oportunizar e discutir o erro como possibilidade de construção de conhecimentos e, também, de analisar o erro sob o ponto de vista dos alunos. Para Ball, Thames e Phelps (2008), antecipar um erro é conhecimento esperado do professor e faz parte do que denominam conhecimento do conteúdo e dos alunos.

Entendemos assim que, ao longo da formação, as discussões contribuíram significativamente para a criação de um espaço de reflexão e planejamento das técnicas educacionais que podem levar a melhor qualidade da Educação tanto para professores quanto para alunos. Esta investigação se desenvolveu no âmbito de um processo de educação continuada que adotou a ideia de compartilhamento de experiências docentes, visando ampliar o conhecimento profissional, buscando desenvolver interesses e potencializar as possibilidades dos professores participantes. Vale ressaltar as limitações da pesquisa, uma vez que ela se estendeu a um pequeno número de participantes, por um período limitado de tempo.

Na formação continuada empreendida por nós, tínhamos professores de Matemática, com formação em Ciências da Computação, Economia, Agronomia e Biologia, dois destes se formaram também em Matemática. Este fato facilitou discutirmos possibilidades de atividades interdisciplinares, planejadas de forma compartilhada e pensadas a partir de conceitos comuns às diferentes áreas de conhecimento. Não era o foco da pesquisa, mas percebemos durante as discussões, necessidades de tais atividades, que procurassem abordar os conceitos identificados como aqueles a serem trabalhados de forma integrada, a partir de um planejamento pensado de forma conjunta entre os professores.

Destacamos que as atividades interdisciplinares devem contemplar momentos de trabalhos coletivos entre os professores, como buscamos fazer na formação continuada, mas também momentos individuais, nos quais cada professor pode aprofundar aspectos relacionados à sua área de conhecimento. Entendemos que o ensino e a aprendizagem de Probabilidade condicional e, também, de outros assuntos serão mais proveitosos com essa dinâmica de planejamento e preparação, uma vez que percebemos o potencial, ou seja, o quanto são ricos esses espaços e momentos de reflexões para a elaboração e consequentemente a aplicação das atividades elaboradas em conjunto.

Acreditamos ainda que faltam espaços para os professores trabalharem em conjunto, de forma cooperativa, rompendo a prática do isolamento docente na escola. No caso específico deste recorte, desenvolvemos uma melhor compreensão sobre as habilidades e conhecimentos relativos ao ensino e a aprendizagem de Probabilidade condicional,

Referências bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H. e Phelps, G.(2008) *Content knowledge for teaching: What makes it special?* Journal of Teacher Education, New York, v. 59, n. 5, p. 389 -407.

Bona, A.S.; Souza, M.T.C.C. *Aulas investigativas e a construção de conceitos de matemática: um estudo a partir da Teoria de Piaget*. Disponível no site: http://www.revistas.usp.br/psicousp/article/view/102400/100723

Brasil. (2000). PCNEM Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática. 109. Brasília: Ministério da Educação e do Desporto, MEC/SEF.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of The Learning Sciences, 2*(2), pp. 141–178.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. In G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics (pp. 19–43).* Rotterdam: Sense Publishers.

Collins, A. (1992). *Towards a design science of education. New directions in educational technology.* Berlin: Springer-Verlag.

Contreras, J. M., Batanero, C., Díaz, C., & Arteaga, P. (2013). Evaluación de la falacia del eje temporal en futuros profesores de educación secundaria. Acta Scientiae, 14(3), 346–362.

Fernandes, J. A., Batanero, C., Correia, P. F. e Gea, M. M. (2014). *Desempenho em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta de futuros professores do ensino básico. Quadrante*, *23*(1), 43-61.

Fiorentini, D. e Lorenzato, S. (2006). *Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.* Campinas: Autores Associados.

Ponte, J. (2003). Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação, 2*, 93-169.

Ponte, J. P., Brocardo, J., e Oliveira, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula* (2ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Powell, A. B.; Francisco, J. M.; Maher, C. A. *Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes*. Tradução: JUNIOR, A. O. In: BOLEMA. Rio Claro, SP: UNESP, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Ano 17 nº 21, p. 81-140, 2004.

Sá, E. P. (2009). *Discursos de professores sobre ensino de ciências por investigação:.* Belo Horizonte: UFMG/FaE.

Vieira, E. R. (2013). *Grupo de Estudos de professores e a apropriação de tecnologia digital no ensino de geometria: caminhos para o conhecimento profissional.* Tese de Doutorado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo-Brasil.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

CONHECIMENTOS DE ESTUDANTES DE PEDAGOGIA DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL AO SE DEPAREM COM PROBLEMAS QUE ENVOLVEM O RECONHECIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

KNOWLEDGE OF PEDAGOGY STUDENTS IN THE FIRST YEARS OF ELEMENTARY SCHOOLS WHEN FACED WITH PROBLEMS INVOLVING PROPORTIONAL THINKING RECOGNITION

Alexsandro Soares Candido, Angélica da Fontoura Garcia Silva, Ruy Pietropaolo
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
alexprofmath@hotmail.com, angelicafontoura@gmail.com, rpietropaolo@gmail.com

Resumo
Apresentamos um estudo acerca do raciocínio proporcional desenvolvido com 30 alunas de um curso de pedagogia de uma universidade particular da grande São Paulo, ao se depararem com situações proporcionais e não proporcionais. A coleta de informações se deu por meio da aplicação de um questionário – de caráter diagnóstico com duas questões –, visando identificar se as participantes reconheciam proporcionalidade em situações rotineiras. A análise dos dados fundamentou-se em estudos de Lamon (2005); Lesh, Post e Behr (1988); Oliveira (2009); Post, Behr e Lesh (1995) e Silvestre (2009) As respostas do grupo indicaram haver melhor compreensão em questões objetivas com um acerto de 87% enquanto na questão dissertativa não houve identificação não de proporcionalidade.

Palavras-chave: formação inicial, conhecimentos de estudantes de pedagogia, raciocínio proporcional

Abstract
This study focused on proportional reasoning as developed by 30 student teachers of a private university in Greater Sao Paulo when they were presented with proportional and non-proportional situations. Data collection used a survey-type questionnaire with two questions aiming to determine whether the student teachers identified proportionality in everyday situations. Data analysis was based on de Lamon (2005); Lesh, Post e Behr (1988); Oliveira (2009); Post, Behr e Lesh (1995) e Silvestre (2009). The group's replies showed they had a better understanding of proportional reasoning when presented with objective questions - 87% correct answers - than when open questions were used.

Key words: initial development, knowledge content of pedagogy students, proportional reasoning

Introdução

Este estudo apresenta uma investigação acerca do desenvolvimento do conhecimento profissional docente sobre o raciocínio proporcional. Realizamos levantamento diagnóstico inicial com 30 estudantes de pedagogia de uma universidade particular da grande São Paulo. Tal diagnóstico buscou investigar por meio da proposição de duas questões se as alunas reconheciam situações proporcionais e não proporcionais. Os resultados deste estudo serviram para orientar a condução das atividades durante um processo formativo.

Consideramos a pertinência de realizar esta investigação por acreditarmos ser a formação do professor e, sobretudo a inicial, uma etapa importante no processo de desenvolvimento profissional do educador. A formação profissional do docente que irá ensinar Matemática não se dá de forma espontânea, nesse sentido é essencial o planejamento e proposição de processos formativos que garantam ao futuro professor olhar profissionalmente para a Matemática e seu ensino. Todavia, estudos como os de Mello (2000, p. 98) já discutiam no ano de 2000 a urgência "da reformulação da teoria e prática da formação de professores no Brasil". A autora afirma ainda que a formação inicial de professores que lecionarão disciplinas específicas na Educação Básica apresenta limitações estruturais, haja vista que, muitas vezes, tal formação não proporciona aos futuros profissionais da educação "integração permanente e contínua entre a teoria e a prática".

Para apresentar este estudo, exporemos, nesta ordem, a relevância e a fundamentação do estudo, os procedimentos metodológicos; a análise e a discussão dos dados coletados; e, finalmente, as considerações finais.

Relevância e fundamentação do estudo

Consideramos este estudo relevante apoiados em investigações como de Lesh, Post e Behr (1988), por exemplo. Esses autores afirmam que o raciocínio proporcional é uma forma complexa, que envolve a sensação de covariação e de comparações múltiplas, além da capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. Nesse contexto, acreditamos, assim como os autores, que esse tipo de raciocínio envolve múltiplas relações e ideias matemáticas, além de análises qualitativa e quantitativa, como inferência e previsão.

Além da investigação anteriormente descrita, Post, Behr e Lesh (1995, p. 91) indicam também que problemas envolvendo os conceitos de razão e proporção sejam introduzidos com a utilização de conhecimentos prévios dos alunos sobre multiplicação e divisão. Além disso, relatam que para a obtenção do raciocínio proporcional é necessário que o aluno tenha clara a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais, que compreenda a ideia de covariação

> Para raciocinar com proporções é preciso ter a flexibilidade mental para abordar problemas por vários ângulos, e ao mesmo tempo, ter noções suficientemente sólidas para não se deixar afetar por números grandes ou "complicados" ou pelo contexto que se insere o problema [...] a pessoa precisa ser capaz de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. Isso tem implicação direta no ensino (Post, Behr Lesh, 1995, p. 91).

Além de Lesh, Post e Behr (1988) e Post, Behr e Lesh (1995) estudos como os de Cramer, Post e Behr (1989) também têm chamado a atenção, desde o final da década de 90, para a importância do raciocínio proporcional. Lesh, Post e Behr (1988) justificam essa relevância por ser este o ponto de chegada da aritmética elementar e o alicerce de estudos posteriores.

Outro argumento para justificar a pertinência deste estudo, encontramos nos documentos oficiais de referência curricular como Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) e Base Nacional Comum Curricular –

BNCC (Brasil, 2018), cujas orientações consideram o raciocínio proporcional uma das temáticas centrais do ensino de Matemática e sugerem que seja trabalhado com as crianças desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Nas orientações dos PCN (1997), por exemplo, há indicações de sua relevância, argumentando sua utilidade, uma vez que está presente em várias situações do cotidiano e também ligado "[...] à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor?). Para raciocinar com proporções é preciso abordar os problemas de vários pontos de vista" (Brasil, 1997, p. 38).

Nesses dois documentos há destaque para a Resolução de Problemas como eixo organizador dos processos de ensino e aprendizagem da disciplina e declaram que a atividade matemática não pode ser considerada como um "olhar para coisas prontas e definitivas", pois a consideram como construção e apropriação de um conhecimento pelo estudante, do qual ele se servirá para compreender e até, quem sabe, para transformar a realidade. Assim, consideram a resolução de problemas não apenas como o ponto de partida da atividade matemática, mas como um meio de proporcionar os contextos para a construção de conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Ademais, Lamon (2005) nos ajuda a entender a complexidade desse tipo de raciocínio ao apontar algumas habilidades a serem desenvolvidas: compreensão da covariação de grandezas, identificação de situações proporcionais ou não e a percepção da sua utilidade; aquisição de argumentos para justificar sua forma de pensar situações de proporcionalidade.

Além disso, é importante considerar que lecionar Matemática para os anos iniciais será uma das atribuições profissionais das estudantes de Pedagogia participantes deste estudo e, nesse campo, a resolução de problemas tem um papel fundamental. Assim, tomamos como ponto de partida a ideia de que explorar o raciocínio proporcional por meio da resolução de problemas requer do futuro professor um repertório expressivo de conhecimentos que lhe permitam interpretar situações-problema, fazer as adequações necessárias ao nível de compreensão dos alunos e favorecer algumas articulações dessas noções com outros conteúdos já estudados. Dessa forma, organizamos esta investigação com o propósito de verificar se um grupo de estudantes de Pedagogia eram capazes de reconhecer em situações do cotidiano se havia ou não proporcionalidade envolvida.

Para elaborar o questionário e proceder à análise das informações coletadas, consideramos as categorias distintas de conhecimentos para o ensino, estabelecidas por Ball, Thames e Phelps (2008). Os autores refinaram as categorias propostas por Shulman (1986) em: conhecimento do conteúdo (comum/horizontal/especializado); conhecimento do conteúdo (e dos estudantes/e do ensino/e do currículo).

Para este estudo, nos ateremos especialmente ao *conhecimento comum do conteúdo.* Segundo os autores, o *conhecimento do conteúdo comum* permite ao professor a utilização correta de termos, representações e notações e a identificação de incorreções ou inadequações, quer em produções dos alunos, quer em materiais didáticos. Assim, procuramos identificar se as professoras participantes de nossa pesquisa possuem tal conhecimento, pois entendemos ser requisito primordial para desenvolvimento dos demais.

Um exemplo de mobilização do *conhecimento do conteúdo comum* ligada a temática deste estudo diz respeito à habilidade de o professor (ou futuro professor) reconheça e resolva situações que envolvam raciocínio proporcional sejam elas convencionais ou não. A seguir apresentamos a forma como foi desenvolvido este estudo.

Nesta investigação, em especial, com base nas ideias de Lamon (2005); Lesh, Post e Behr (1988); Oliveira (2009); Post, Behr e Lesh (1995) e Silvestre (2009) foi aplicado aos professores um questionário – de caráter diagnóstico – contendo duas questões que nos permitisse identificar como as futuras pedagogas lidam com situações de proporcionalidade e não proporcionalidade.

Procedimentos Metodológicos

Reiteramos que participaram deste estudo 30 estudantes de um curso de pedagogia. Os dados foram coletados no primeiro encontro de um processo formativo, e, antes de ser discutido qualquer conteúdo. Para recolhermos as informações solicitamos a cada participante a resolução, de forma individual, de algumas situações que envolviam proporcionalidade ou não proporcionalidade.

As futuras professoras foram convidadas a participar voluntariamente do curso de formação de 20 horas. No contato inicial, solicitamos que escolhessem um pseudônimo, visando garantir o anonimato de seus nomes e informações nesta investigação.

Analisando o perfil das participantes observamos que todas elas residem na região metropolitana de São Paulo, em regiões próximas a Universidade. Elas têm idades que variam entre 18 e 50 anos. Das 30 estudantes, somente 8 possuem alguma experiência profissional na área educacional. Notamos ainda que a maioria – 60% – trabalha em lojas como atendentes e as outras 15% estão desempregadas.

Fundamentados em documentos oficiais, como os PCN (Brasil, 1997), BNCC (2018) e em estudos aqui descritos consideramos ser necessário ao ensino do raciocínio proporcional que o futuro professor faça a distinção entre situações proporcionais e não proporcionais. Nesse contexto, na primeira questão procuramos verificar se elas se utilizavam do raciocínio proporcional em situações rotineiras: deveriam assinalar se nas relações ali observadas havia dependência e se poderiam ser diretamente proporcionais (DP) ou não proporcionais (NP). Na segunda situação apresentada, buscamos identificar se as participantes reconheciam e resolviam situações de não proporcionalidade.

Resultados

Reiteramos que a primeira questão apresentada no quadro a seguir – Quadro 1 –. continha situações corriqueiras as alunas deveriam identificar se havia dependência entre as grandezas e se elas poderiam ser diretamente proporcionais (DP) ou não proporcionais (NP).

Quadro 1: questão 1 do questionário preliminar

Dependência - Diretamente proporcionais (DP) ou Não Proporcionais (NP).	DP	NP
a) A quantidade de pães comprados e o preço pago por eles.		
b) A idade de uma pessoa e o número de calça que ela veste.		
c) A idade de uma pessoa e seu peso.		
d) O salário de um vendedor e a quantidade de sapatos que ele vendeu.		
e) A quantidade de ovos para uma receita de bolo e a quantidade de ovos para cinco receitas do mesmo bolo.		
f) O salário de um trabalhador e o número de irmãos que esse trabalhador tem.		
g) A nota de uma avaliação na qual todas as questões têm o mesmo valor e a quantidade de questões certas.		

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores

Nas respostas apresentadas, identificamos que 28 alunas responderam corretamente, assinalando (DP) no item "a" e apenas 2 (Mandala e Moama) responderam (NP) para a primeira situação, pois, segundo percebemos, elas não reconheceram a relação proporcional entre quantidade e preço.

No item “b”, 26 participantes assinalaram (NP), enquanto 4 delas (Bynna, Carla, Hortência e Moama) assinalaram incorretamente (DP), pois para elas havia uma relação de proporcionalidade entre idade e número de calça. Já no terceiro item, detectamos que 24 futuras professoras registraram corretamente (NP) nos protocolos e 6 alunas (Bynna, Duda, Groove, Hortência, Moama e Tiana) entendiam que as grandezas idade e peso eram proporcionais, e assim registraram nos protocolos de maneira incorreta (DP). Para o item “d”, 23 participantes apontaram como resposta correta (DP) e 7 (Cami, Duda, Hortência, Pocahontas Mandala, Moama e Vitória) identificaram que salário e vendas não eram proporcionais e assinalaram (NP).Para o quinto item, 25 alunas assinalaram (DP) e as 5 restantes (Babich, Bynna, Fenix, Moama e Vitória) assinalaram (NP) para a relação entre quantidades, ou seja, não identificaram que havia uma relação de proporcionalidade envolvida. Já para o item “f” 28 das estudantes registraram (NP) e 02 (Bynna e Regina) registraram de forma errada (DP), ou seja, que o salário de um trabalhador e o número de irmãos que esse trabalhador tem era proporcional. E, por fim, no item “G” apenas 3 (Babich, Nádia e Vitória) das 30 alunas investigadas optaram por assinalar (NP), não associaram notas de uma avaliação com a quantidade de questões certas.

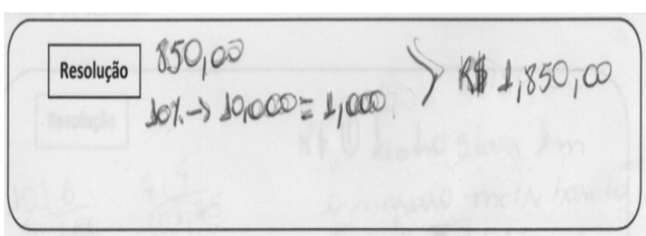
Notamos, ao analisar as respostas das participantes nessas sete perguntas objetivas, alto índice de acertos, ou seja, mais de 87% parecem identificar problemas de proporcionalidade. No entanto, percebemos equívocos de algumas dessas alunas (notamos haver mais erros nas produções de Bynna, Hortência e Moana), tal fato nos levou a conjecturar que, como essas estudantes apresentam dificuldades de identificar o raciocínio proporcional na questão 1, provavelmente essas futuras professoras não reconhecem que não basta simplesmente aumentar desordenadamente as grandezas para considerá-la diretamente proporcional.

Para concluir nosso diagnóstico, precisávamos verificar se as participantes reconheciam e resolviam uma situação de não proporcionalidade. A situação apresentada foi a seguinte:

Seu Manuel é vendedor de uma lojinha de conveniência e recebe mensalmente R$ 850,00. Além de seu salário fixo, seu Manuel recebe também 10% por cada venda feita. Responda: a) Quanto o vendedor deverá receber, se vender R$ 10 000?; b) Essa é uma situação de proporcionalidade, por quê?

Ao analisar os registros das respostas, identificamos que 27 alunas responderam corretamente o valor que o vendedor deveria ganhar (item a). E a maioria optou por resolver a situação aritmeticamente, ou seja, calcular 10% de R$10.000,00 e adicionar esse valor aos R$850,00, referentes ao valor fixo, como apresentado no protocolo a seguir.

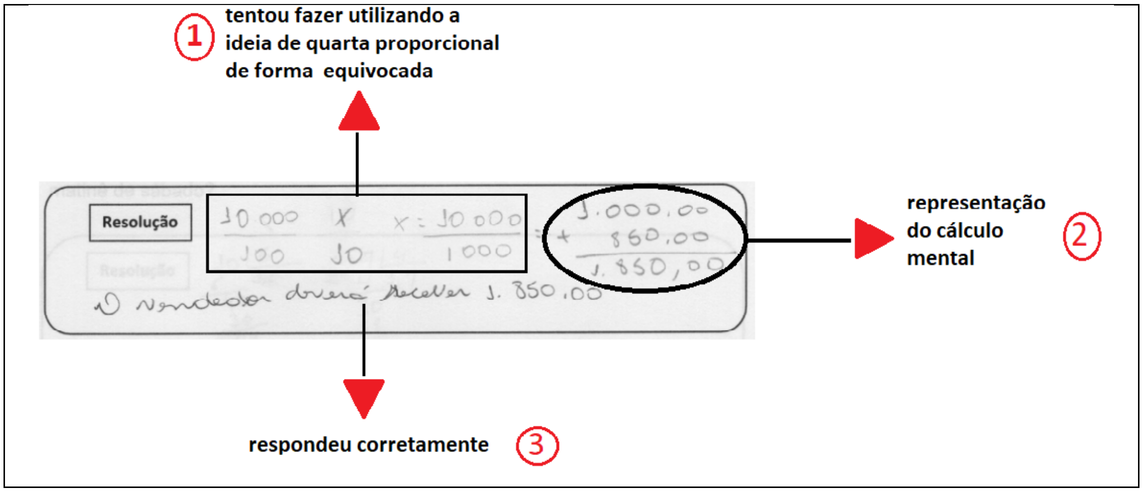
Figura 2. Resolução da questão 2 – item “a” do diagnóstico – aluna Duda



Fonte: Acervo dos Pesquisadores

Notamos que, da mesma forma que a aluna Duda, a maioria das participantes que respondeu corretamente parecia não ter preocupação em representar suas resoluções com a mesma correção, do ponto de vista da Matemática. Dentre elas, é importante destacar as alunas que tentaram utilizar-se do produto cruzado e não conseguiram representar corretamente o esquema de resolução. B, por exemplo, encontraram o valor correto mentalmente, mas não conseguiram encontrar o valor quando se utilizaram do esquema da quarta proporcional.

Figura 3: Resolução da questão 2 – item "a" do diagnóstico – aluna B



Fonte: Acervo dos pesquisadores

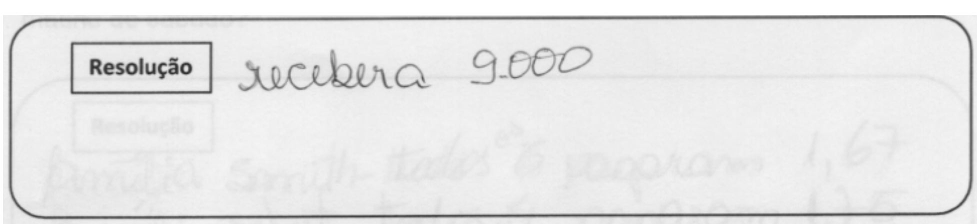
Quando questionamos a aluna sobre o esquema utilizado, ela afirmou:

> *Eu primeiro fiz de cabeça e sabia que 10% daria mil e o total seria mil oitocentos e cinquenta, mas precisava mostrar a conta. Tentei fazer por regra de três aqui* [apontando o dedo para o esquema 1], *mas me compliquei e não consegui, então escrevi a conta que fiz de cabeça* [referindo-se à representação 2] *e escrevi a resposta aqui* [apontando para 3].

Notamos que a participante, depois de resolver aritmeticamente, tentou representar pelo esquema do produto cruzado; todavia, parecia não compreender se tratar de duas variáveis de naturezas diferentes ao utilizar propriedades ligadas à álgebra para obter o valor da variável desconhecida por meio da aplicação do produto cruzado.

Além disso, outras duas participantes (Bynna e Regina) não identificaram a não proporcionalidade envolvida, e uma (Margarida) deixou esse item em branco. A seguir apresentamos a resposta de Regina.

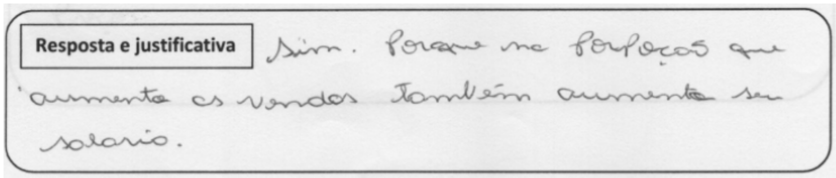
Figura 4: Resolução da questão 2 – item "a" do diagnóstico – aluna Regina



Fonte: Acervo dos pesquisadores

Para o item "b" não houve nenhum acerto, ou seja, 27 responderam ser uma questão de proporcionalidade, como aponta a estudante B, a seguir.

Figura 5: Resolução da questão 2 do diagnóstico – aluna B


Resposta e justificativa Sim. Porque na porfoços que aumenta as vendas Também aumenta seu salario.

Fonte: Acervo dos Pesquisadores

Notamos que a futura professora citada, bem como a maioria, sabe resolver aritmeticamente a questão, porém elas associaram à proporcionalidade o simples fato de as duas grandezas aumentarem. Os resultados do diagnóstico para esse item se assemelharam aos de Nunes de Costa (2016), pois, assim como os pesquisadores, identificamos as dificuldades das participantes deste estudo no reconhecimento de situações não proporcionais, ou seja, parece ser limitada sua capacidade de reconhecer como não proporcional uma relação aditiva entre as grandezas.

Considerações finais

Ao desenvolver o questionário preliminar detectamos dificuldades das estudantes em lidar com situações não proporcionais em questões abertas, verificamos que esse grupo apresentou limitações quanto diferenciação de proporcionalidade e não proporcionalidade.

Percebemos ainda que as futuras professoras, possivelmente, teriam dificuldades em sua atividade profissional ao ensinarem esse assunto se não discutíssemos e repletíssimos acerca dessas dificuldades. Apoiados em Ball, Thames e Phelps (2008) consideramos que o conhecimento comum do conteúdo é condição necessária para o desenvolvimento das demais categorias, nesse contexto levamos isso em conta para elaborarmos a formação inicial.

Com base nos resultados obtidos entendíamos que seria oportuno que, durante a formação realizássemos novos estudos com situações que as levassem a reflexão acerca do reconhecimento situações proporcionais e não proporcionais para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Referências

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*, pp. 389-407.

Brasil. (1997). *Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental.* (Vol. 3). Brasília: MEC/SEF.

Brasil.(2018). *Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular*. Brasília:MEC/SEF.

Cramer, K. P.; Post, t.; Behr, M. (1989). Interpreting proportional relationships. *Mathematics Teacher, 82*(6), 445-452.

Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* (2 ed.). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In: J. HIEBERT, & M. BEHR, *Number concepts and operations in the middle grades.* (E. E. Ana Isabel Silvestre e Ponte, Trad., pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum.

Mello, G. N. (2000). Formação inicial de professores para a educação básica: uma (re)visão radical. *São Paulo Perspec, 14*(1), 98-110.

Nesher, P., & Sukenik, M. (1991). The effect of formal representation on the learning of ratio concepts. *Learning and Instruction*(1), 161-175

Oliveira, I. A. (2009). Proporcionalidade: estratégias utilizadas na resolução de problemas por alunos do ensino fundamental no Quebec. *Bolema, 22*(34), 57-80.

Post, R. T., Behr, J. M. & Lesh, R. (1995). A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: A. F. Coxford, & A. Shulte, *As ideias da Álgebra* (pp. 89-103). São Paulo: Atual.

Santos, A. (2012). *Processos de formação colaborativa com foco no campo conceitual multiplicativo: um caminho possível com professoras polivalentes.* São Paulo: Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional:percursos de aprendizagem de alunos do 6.º ano de escolaridade.* Lisboa: Tese. (Doutorado em Educação - Didática da Matemática).

Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de "metade" e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa, 8*(3), 305-317

CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA PARA OS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL SOBRE O CONCEITO DE ÁREA E SEU ENSINO

KNOWLEDGE OF FIRST YEARS MATHEMATICS TEACHERS ABOUT THE AREA CONCEPT AND ITS TEACHING

Susana Maris França da Silva, Angélica da Fontoura Garcia Silva, Maria Elisa Esteves Lopes Galvão
Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN (Brasil)
susana_ditty@hotmail.com, angelicafontoura@gmail.com, elisa.gal.meg@gmail.com,

Resumen
Apresentamos um estudo acerca dos conhecimentos a respeito de área de figuras planas explicitados por um grupo de professores dos anos iniciais do ensino fundamental em uma escola privada em São Paulo - Brasil. As respostas a questões didáticas e de conteúdo foram analisadas à luz do Conhecimento Profissional Docente. Respostas ao questionário inicial revelaram concepções inconsistentes sobre os conhecimentos relativos às noções de área e seu ensino e evidenciaram a necessidade de refletir coletivamente, em processos formativos que discutam possibilidades para o cálculo de área por meio da utilização do quadriculado, da reconfiguração de figuras e das fórmulas.

Palabras clave: conhecimento profissional docente, conceito de área

Abstract
We present partial results of a study the knowledge on area concept of flat figures of group of in-service mathematics teachers of a private school in São Paulo - Brazil. The answers to didactic and content questions were analyzed in the light of the Professional Teaching Knowledge. Inconsistent conceptions of the notions of area and its teaching were revealed. The answers to the questionnaire evidenced the need to reflect collectively, in formative processes that discuss possibilities for the area calculation through the use of grid or formulas and invariant reconfiguration of figures.

Key words: professional teaching knowledge, area concept

Introdução

Este artigo apresenta uma análise dos resultados das respostas dadas a um questionário aplicado antes da proposição de um curso de formação continuada para um grupo professores que lecionam matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental de uma escola particular da grande São Paulo, Brasil. Os dados aqui coletados foram analisados na perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008) e nos estudos que tratam das questões relativas aos processos de ensino e aprendizagem do cálculo de área de figuras planas. O curso de formação buscou investigar como se dá a ampliação da base de conhecimentos para o ensino a respeito de área de figuras planas mediante estudos realizados em grupo na própria escola.

Diversos autores discutem acerca dos aspectos relacionados ao conceito de área que devem ser enfatizados no ensino. Clements e Stephan (2004), por exemplo, consideram que a compreensão do conceito de área é complexa, uma vez que envolve diversas ideias matemáticas, como o entendimento do significado da unidade bidimensional de medida, do cálculo da área por meio da reunião de figuras, da equivalência de áreas, da composição e decomposição de figuras. Os autores afirmam que as crianças devem desenvolver a compreensão, por exemplo, de que ao decompor ou reorganizar formas a sua área se mantém. Afirmam ainda que tal complexidade é uma possível geradora das dificuldades encontradas por alunos e professores que estudam e ensinam área de figuras planas.

Quanto à aprendizagem dos estudantes da Educação Básica, estudos internacionais como o realizado por Kamii e Kysh (2006), por exemplo, ao analisarem resultados de avaliações, observam que o quadrado unitário não é considerado em geral, pelos estudantes, como a unidade de medida de áreas e também não é utilizado para construir decomposições de figuras geométricas simples. Estudos com a participação de alunos brasileiros de diferentes faixas etárias também mostram dificuldades diversas na compreensão do conceito de área. Facco (2003) identificou as dificuldades de um grupo de alunos ao trabalhar com a reconfiguração para o cálculo de áreas por meio de uma sequência didática; com o mesmo objetivo, Ferreira (2010) propôs atividades que demandavam reconfigurações e comparações de áreas em situações estáticas e dinâmicas. Da mesma forma que em investigações internacionais como as de Baturo e Nason (1996), Pessoa (2010), Garcia Silva, Galvão e Campos (2013) analisaram conhecimentos de futuros professores e professores que lecionam matemática para os anos iniciais área de figuras planas, e identificaram ser recorrente um repertório limitado de conhecimentos sobre o conteúdo e sobre o ensino dessa temática. Evidenciaram também que as abordagens dinâmicas e estáticas sobre área e perímetro não estão incluídas nos currículos, limitando assim sua compreensão; e revelaram que o processo de cálculo da área é, em geral, apenas baseado na contagem de quadradinhos de uma malha quadriculada associada à figura ou na memorização e aplicação de fórmulas. Uma tendência revelada pelas pesquisas é associar a área como apenas a multiplicação do comprimento pela largura, desvinculada das experiências concretas de medição, o que resulta na não correlação entre a medida obtida e o que se está medindo.

A partir dessas constatações, conduzimos as sessões de estudo a partir de uma investigação inicial que evidenciasse concepções e conhecimentos dos professores relativos ao conceito de área e seu ensino. O aporte teórico adotado para a análise dos dados será descrito a seguir.

Marco teórico

Esta pesquisa fundamentou-se em estudos Ball, Thames e Phelps (2008) por meio dos quais foi possível realizar a análise das questões relativas à formação de professores e refletir sobre a prática pedagógica e o conhecimento profissional docente e nos trabalhos de Serrazina (1999, 2007) para discutir a reflexão sobre a prática.

Ball, Thames e Phelps (2008) investigaram a prática docente e criaram a Teoria do Conhecimento para o Ensino da Matemática (MTK) que considera que alguns domínios são necessários para o ensino de matemática, dentre os quais os conhecimentos: do conteúdo da disciplina e pedagógico do conteúdo. No primeiro subcategorizaram os conhecimentos: comum; horizontal e especializado do conteúdo; no segundo destacaram os conhecimentos: curricular, do conteúdo e do estudante, do conteúdo e do ensino.

Apoiar-nos-emos também nos estudos de Serrazina (1999, 2007), que relaciona os conhecimentos profissionais dos professores ao sucesso da atividade profissional docente e destaca a importância de serem feitas reflexões sobre a prática. Serrazina (1999) discute a relação entre o conhecimento e a autoconfiança e afirma que a partir do aprimoramento do conhecimento, os professores: “(...) são capazes de reflectir nas suas práticas. Isto pressupõe um elevado grau de conscientização que os ajude a reconhecer as suas falhas e fraquezas e a assumir um forte desejo de ultrapassá-las”. (Serrazina, 1999, p. 163). A autora chama a atenção para a necessidade de que processos formativos garantam espaços que favoreçam a reflexão e a compreensão mais profunda da Matemática a ser ensinada (Serrazina, 2007).

■ Procedimentos metodológicos

Apoiados em Bogdan e Biklen (1994), esta pesquisa, de natureza qualitativa, tem por objetivo compreender quais os conhecimentos profissionais docentes evidenciados por professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao participarem de um grupo que estudava o tema área e perímetro e seu ensino. Após analisarmos as orientações curriculares e pesquisas sobre o tema área e perímetro, elaboramos um questionário inicial para obter os subsídios que orientaram os estudos realizados posteriormente com o grupo. Traremos para este artigo dados do questionário inicial, concernentes ao perfil dos professores participantes e seus conhecimentos sobre o tema área e seu ensino. Os depoimentos e reflexões do grupo durante as sessões foram registrados em áudio e vídeo.

As professoras participantes são docentes dos anos iniciais de uma instituição privada de ensino, identificadas, na pesquisa, por nomes de flores para preservar suas identidades. Todas concluíram o ensino superior em Pedagogia em diferentes momentos; duas delas têm menos de dois anos de atuação profissional; as outras duas atuam há 14 e 32 anos, respectivamente.

Empregamos figuras em malha quadriculada para identificar os conhecimentos relativos à área, com o objetivo de analisar as estratégias adotadas pelas participantes para determinar a área das figuras dadas. Sobre o uso da malha, consideramos que pode servir como um facilitador para a obtenção da fórmula algébrica da área de algumas figuras, e possibilitar estratégias de contagem, como aponta Santana (2006, p. 95). Levamos também em conta as pesquisas de Pessoa (2010) e Garcia Silva, Galvão e Campos (2013) que relataram que a utilização de quadriculado para o cálculo de área não é compreendido em sua amplitude tanto por alunos como por professores. Constataram que, ao analisarem figuras em malha quadriculada, tanto alunos como professores usaram somente a contagem de quadradinhos para determinar a medida da área solicitada e, em alguns casos, tentaram recompor quadradinhos sem preocupação a respeito da equivalência das partes utilizadas na reconfiguração.

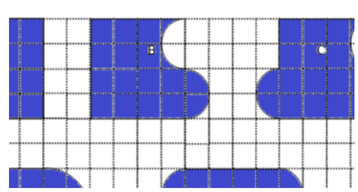


Figura 1. Figura inspirada nas investigações de Pessoa (2010, p. 28)
Fonte: Arquivo Pessoal

Partindo desses resultados, trazemos para esse trabalho as duas primeiras questões, baseadas nas Figuras 1 e 2, propostas com o objetivo de compreender como as professoras participantes desse estudo calculam a área de figuras planas diversas, associadas a uma malha quadriculada.

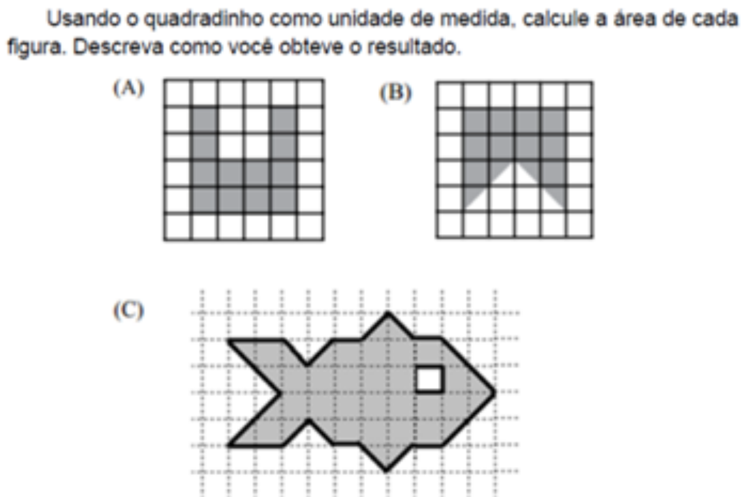


Figura 2. Figura apresentada no questionário,
Fonte: Inspirada nas investigações de Pessoa (2010, p. 27)

Ambas as questões demandam, para o cálculo da área, a mobilização de estratégias de decomposição/composição das figuras de forma a compará-las com o quadrado inicial exibido no quadriculado (Figura 1) ou a um retângulo (Figura 2).

Análise dos dados

As respostas às questões preliminares a respeito dos conhecimentos sobre área e seu ensino constantes nos protocolos de trabalho dos professores foram analisadas na perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008) e dos estudos de Baturo e Nason (1996) e Garcia Silva, Galvão e Campos (2013), que tratam dos conhecimentos de futuros professores e professores; Kamii e Kysh (2006) e Pessoa (2010), que discutem acerca dos processos de ensino e aprendizagem da obtenção da área por meio de malha quadriculada.

Questionadas inicialmente sobre os conceitos de superfície e de área, duas das professoras fizeram referência aos procedimentos multiplicativos relacionados à área do retângulo, uma delas referiu-se à "forma de medir"; uma boa aproximação do significado do conceito foi contemplada na resposta de somente uma das participantes.

Observamos que essas manifestações se aproximam das encontradas por Garcia Silva, Galvão e Campos, (2013) que constataram as dificuldades de compreensão do conceito de superfície e a tendência a confundi-lo com a área.

Nossa segunda questão apresentou as figuras com bordas retas e semicirculares para a determinação da área (Figura 2).

Passando às soluções verificamos (Figura 3) que a professora Acácia rearranjou as formas tornando-as todas quadradas de lado 4. Ao expor a resolução, ela sentiu a necessidade de representar a unidade de medida das formas e atribuiu metros quadrados (m^2) para todos os resultados. A professora Watsonia adotou os mesmos procedimentos e efetuou cálculos semelhantes; ambas não se deram conta de que poderia ser usada a unidade quadrada (u^2).

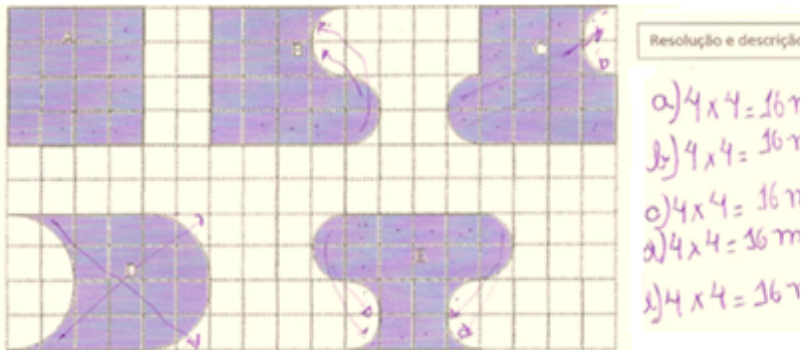


Figura 3. Protocolo da Professora Acácia.
Fonte: Acervo pessoal

Na Figura 3, estão assinaladas as partes das figuras que foram reorganizadas para recompor o quadrado, por meio do completamento de quadradinhos e a contagem realizada está destacada pela professora.

Por seu turno, a professora Jasmim analisou todas as figuras, mas registrou no protocolo a expressão “não sei”, por considerar que não sabia responder. A professora Violeta encontrou apenas a área do quadrado e não determinou a área das demais formas (Figura 4). Vale ressaltar que as duas professoras não registraram a unidade de medida.

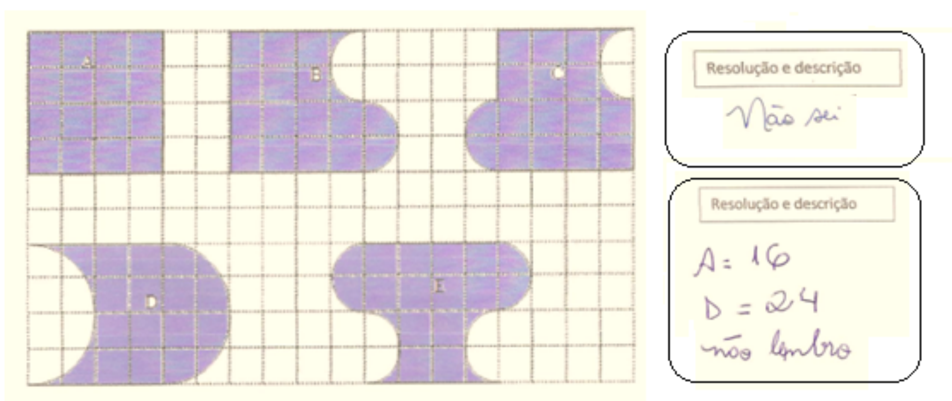


Figura 4. Protocolos das professoras Jasmim e Violeta.
Fonte: Acervo pessoal

Essa questão é análoga à que foi utilizada na pesquisa de Facco (2003) com alunos do 6.º ano ao 9.º ano do Ensino Fundamental II, e que teve por objetivo, assim como em nosso trabalho, analisar as estratégias utilizadas pelos participantes ao explorarem figuras equivalentes apresentadas em uma malha quadriculada. Na análise apresentada na pesquisa também é destacada uma forma de reconfiguração da figura proposta. (Figura 5).

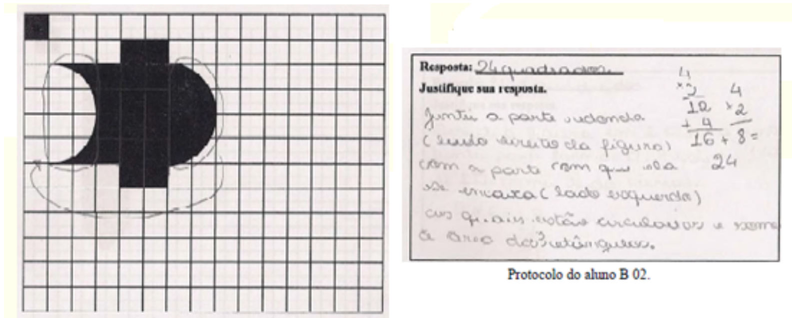


Figura 5. Atividade utilizada por Pessoa (2010, p. 51).
Fonte: Acervo pessoal

Na segunda questão do nosso instrumento de pesquisa, apresentamos três figuras com o intuito de que as professoras obtivessem a área das figuras.

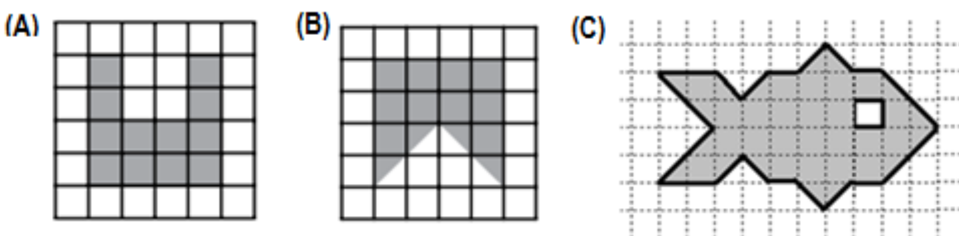


Figura 6. Figuras apresentadas no questionário de pesquisa
Fonte: Pessoa (2010, p. 27).

As Professoras Jasmim e Violeta analisaram as questões, mas afirmaram que não sabiam ou não conseguiam lembrar e/ou determinar a medida de área das figuras apresentadas (Figura 7).

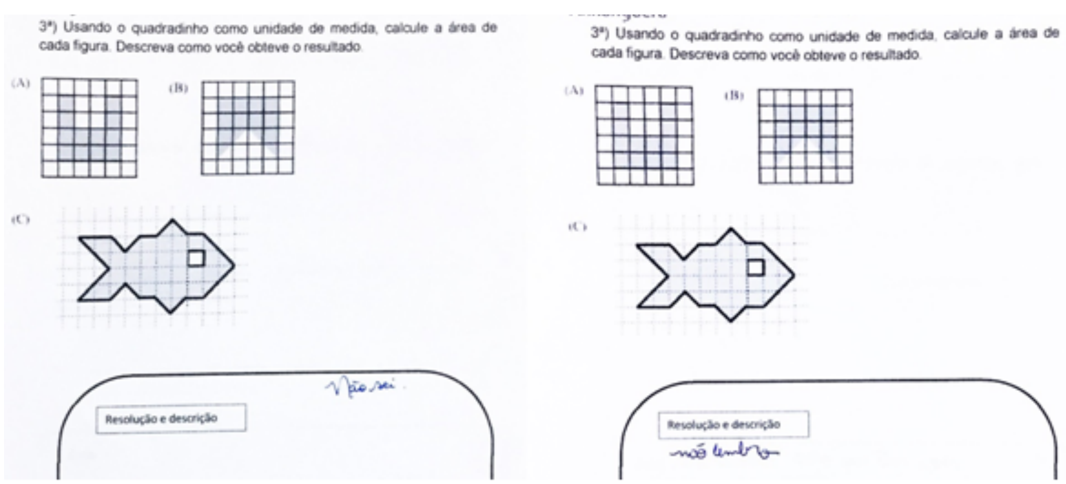


Figura 7. Protocolos apresentados pelas professoras Jasmim e Violeta
Fonte: Acervo pessoal

A Professora Acácia e a Professora Watsonia rearranjaram as formas, reorganizando as partes triangulares para obter uma figura retangular. As professoras também perceberam na resolução da figura (C) que essa continuaria com um "buraco", como descrito pela professora Watsonia, e que elas poderiam chegar ao resultado considerando a área total menos 1 (quadrado).

No protocolo da professora Watsonia (Figura 8) observamos que na figura (A) estão indicadas as correspondências entre quadradinhos que a reconfiguram numa forma retangular cuja área equivale a 12 quadradinhos; na figura (B) estão assinalados os triângulos também correspondem à essa mesma reconfiguração retangular. A figura (C) foi mais complexa para as professoras, pois elas precisaram rearranjar as "metades" até formar um quadradinho, para então obter uma figura maior e conseguir calcular a área total da figura.

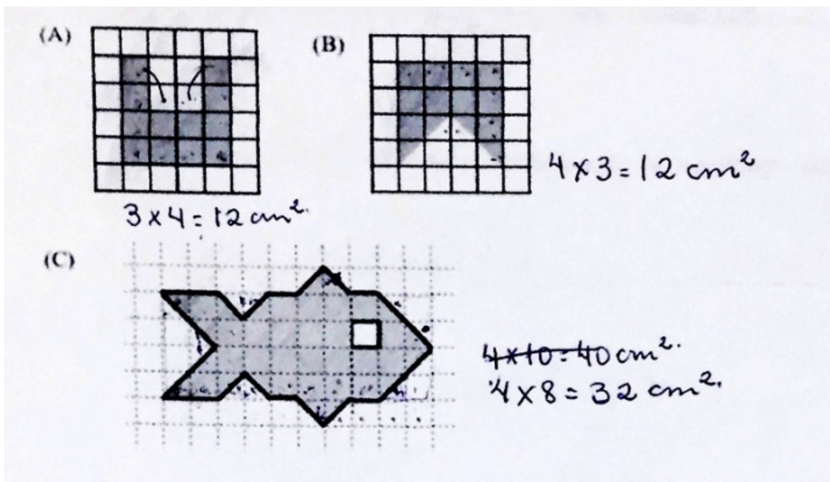


Figura 8. Protocolo apresentado pela Professora Watsonia
Fonte: Acervo Pessoal

A Professora Acácia, por sua vez, sinalizou a reconfiguração considerada para a figura realizou e apenas colocou o valor numérico para cada um dos resultados, preferindo não mencionar nenhuma unidade de medida.

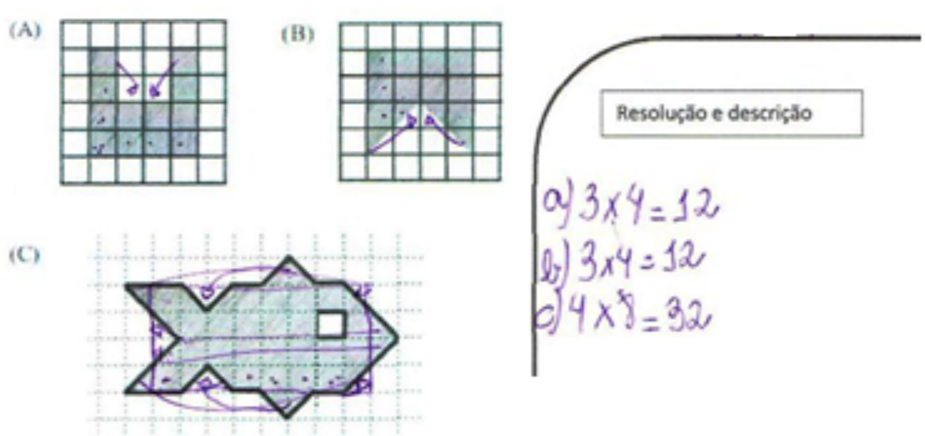


Figura 9. Protocolo apresentado pela Professora Acácia
Fonte: Acervo Pessoal

Analisando a estratégia utilizada pela Professora Acácia, observamos que ela juntou partes das figuras para formar quadradinhos e depois disso realizou a contagem. Essa estratégia também foi constatada por Garcia Silva, Galvão e Campos (2013), conforme verificamos no protocolo reproduzido na Figura 10.

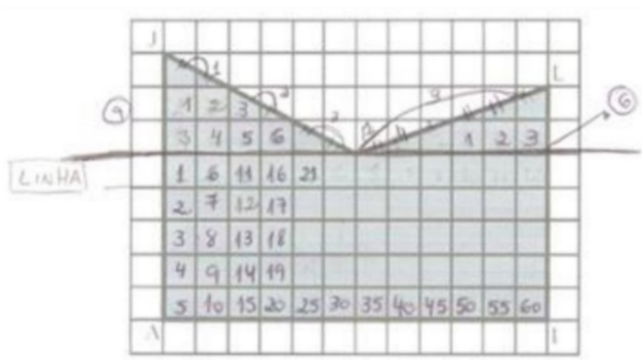


Figura 10. Protocolo da professora P3
Fonte: Garcia Silva, Galvão e Campos (2013, p.5680)

Segundo Ball, Thames e Phelps (2008), consideramos que as respostas apresentadas às questões acima evidenciam limitações no conhecimento do conteúdo, da parte de duas das participantes do grupo, no que se refere ao conceito e estratégias para a determinação da área das figuras propostas. O reconhecimento da unidade de área e possibilidades de reconfiguração das figuras para o cálculo da área fazem parte do conhecimento dos conteúdos das demais participantes, cuja solução consideramos fortemente atrelada à contagem de unidades da malha, o que reforça resultados de pesquisas anteriormente mencionadas. Também identificamos o recurso à fórmula na situação de uma estrutura retangular nas soluções apresentadas pelas professoras Watsonia e Acácia.

Apoiados em Ball, Thames e Phelps (2008) partir dessa análise a respeito das dificuldades encontradas pelas professoras relacionadas à reconfiguração das figuras apresentadas na malha quadriculada, uma parte da seqüência de sessões de estudo foi organizada de forma a fortalecer o conhecimento das participantes nesses aspectos e discutir as metodologias de ensino a serem utilizadas em sala de aula. Consideramos, assim como os autores, que a ampliação dos conhecimentos desse conteúdo poderia favorecer, igualmente a compreensão de seus aspectos pedagógicos e curriculares.

Conclusões finais

A investigação inicial sobre os conhecimentos das participantes a respeito do conceito e estratégias envolvidos no estudo de áreas de figuras planas foi conduzida tendo como base um conjunto de figuras associadas a uma malha quadriculada. O questionamento inicial mostrou-se eficiente no sentido de detectar as lacunas na abordagem do conceito de área e orientar as discussões no sentido de ampliar seus conhecimentos e possibilitar o desenvolvimento de habilidades no contexto da Geometria. Evidenciou, também a necessidade de reforçar a construção de aprendizagens; ter um novo olhar sobre a mudança na forma de significar o ensino da geometria; e construir saberes relacionados à prática pedagógica, refletindo igualmente sobre a prática pessoal de ensino.

Enfim, consideramos importante chamar a atenção para o fato de que os resultados aqui destacados refletem o domínio e os conhecimentos dos professores sobre o cálculo de área em malha quadriculada, no início de nossa investigação. Ao desenvolver o processo formativo, verificamos avanços relativos aos dados aqui identificados e um fator fundamental para a ampliação desses conhecimentos foi a vivência e o diálogo com as experiências que elas traziam de sua prática, assim como descreve Serrazina (1999, 2007).

Referencias

Ball, D., Thames, M. H. e Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education, 59*, pp. 389-407.

Bogdan, R.; Biklen, S. (1994) *Investigação qualitativa em educação*. Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Ed.

Baturo, A. e (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 3*, 235-268.

Clements, D. H. (2004). Measurement in pre-K to grade 2 mathematics. In: J. S. D. H. Clements, *Engaging young children in Mathematics* (pp. 299-317). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Facco, S. R. (2003). *Conceito de área. Uma proposta de ensino-aprendizagem.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Ferreira, L. F. (2010). *A Construção do Conceito de Área e da Relação entre Área e Perímetro no 3º ciclo do Ensino Fundamental: Estudos sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais.* Universidade Federal de Pernambuco, Pós-Graduação Em Educação, Recife.

Garcia Silva, A. d., Galvão, M. E., e Campos, T. M. (2013). Uma interpretação das estratégias utilizadas por um grupo de professores ao calcular área de polígonos em malha quadriculada. *Actas del VII CIBEM*, (pp. 56-74). Montevideo.

Kamii, C. e Kysh, J. (2005). *Journal of Mathematical Behavior*,25,105-115.

Pessoa, G. d. (2010). *Um estudo diagnóstico sobre área de figuras planas na malha quadriculada: influência de algumas variáveis.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia.

Santana, W. M. (2006). *O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise de livros didáticos para as séries finais do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em educação, Recife.

Serrazina, M. L. (1999). Reflexão, conhecimento e práticas lectivas em matemática num contexto de reforma curricular no 1.º ciclo. *Quadrante*, Lisboa, 8 (9), 139-167.

Serrazina, M. L. (2007) Aprender e ensinar Matemática nos primeiros anos. In: Serrazina, M. L. *Ensinar e aprender Matemática no 1º ciclo*. Lisboa: Texto Editores.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 4 / EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

CRITERIOS VALORATIVOS Y NORMATIVOS EN LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: GENESISI Y DESARROLLO DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

VALORATIVE AND NORMATIVE CRITERIA IN DIDACTICS OF MATHEMATICS: GENESIS AND DEVELOPMENT OF DIDACTIC SUITABILITY

Adriana Breda
Universitat de Barcelona (España)
adriana.breda@gmail.com

Resumen
En diversas investigaciones se ha observado el siguiente fenómeno: los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando justifican que sus propuestas didácticas representan una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. En este artículo se explica dicho fenómeno situando el constructo *idoneidad didáctica* en la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor. Se concluye que los criterios de idoneidad didáctica sirven como una herramienta para guiar la reflexión de los profesores y que su aplicación depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta.

Palabras clave: idoneidad didáctica, formación de profesores

Abstract
In several researches, it has been observed the following phenomenon: the criteria of didactic suitability proposed by the Ontosemiótico Approach (OSA) work as regularities in the discourse of the professors when they justify that their didactic proposals represent an improvement, without having been taught the use of this tool to guide their reflection. This article explains this phenomenon by placing the didactic suitability construct on the problem of the role that valuations and normative principles must play in the teacher's practice. It is concluded that the criteria of didactic suitability serve as a tool to guide teachers' reflection and that its application depends on the institutional context in which the teaching and learning process is developed, and on the pedagogical and didactic criteria of the teacher who owes them.

Key words: didactical suitability, mathematics teacher training

Introducción

Font y Godino (2011) afirman que a la Didáctica de las Matemáticas (DM) se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera demanda pretende que sus constructos teóricos sirvan para describir y comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda demanda pretende que éstos sirvan para guiar su mejora. Se trata de dos demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas, ya que sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas no es posible conseguir su mejora (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

La segunda demanda nos lleva a una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía que orienta acerca de qué acciones son correctas (buenas) y cuáles son incorrectas (malas).

En general, los enfoques teóricos que se han generado en la DM están más cómodos con la descripción y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que con la valoración de dichos procesos. Incluso podemos decir que muchos de ellos huyen de esta última con diferentes argumentos. Ahora bien, hay programas de investigación que consideran que la razón de la primera demanda (concepción de la didáctica como ciencia descriptiva/ explicativa) es poder afrontar la segunda demanda (concepción de la didáctica como ciencia normativa).

Una revisión de la literatura muestra que una parte importante de los trabajos de investigación relacionan ambas demandas de facto, aunque en muchos casos sin justificar fundadamente dicha conexión.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se ha decidido afrontar la segunda demanda a partir de la generación de constructos teóricos, siendo el más relevante el constructo criterios de idoneidad didáctica (CI). En los apartados siguientes explicaremos su génesis y desarrollo.

Este trabajo es una investigación en historia de la educación, ya que se realiza un estudio del desarrollo de la noción de idoneidad didáctica. Para ello, además de la lectura y análisis de fuentes documentales se ha contado con la colaboración de los investigadores autores del constructo idoneidad didáctica.

Idoneidad didáctica: génesis y desarrollo

Entre los aspectos que hacen parte de la génesis y desarrollo del constructo idoneidad didáctica, destacamos los siguientes:

Evitar la idea del esencialismo

La primera consideración que se tuvo en cuenta para elaborar el constructo idoneidad didáctica fue adoptar una posición que evitara caer en el esencialismo y que, al mismo tiempo, pudiera generar constructos teóricos para afrontar la segunda demanda (guiar las mejoras de los procesos de instrucción). Por esta razón, no se adoptó como constructo fundamental la noción de calidad, ya que la calidad, al ser considerada como un conjunto de propiedades inherentes a una persona, proceso o cosa que permiten apreciarla con respecto a las restantes, corre el peligro de caer en un cierto esencialismo. En otras palabras, se podría caer en la tentación de pensar que los procesos de enseñanza y aprendizaje de calidad tienen ciertas características esenciales (e independientes entre ellas), de tal manera que si éstas faltan no se puede hablar de calidad. Otra idea relacionada con el esencialismo es que, estas características esenciales de la calidad se pueden hallar como resultado del estudio empírico de los procesos de enseñanza y aprendizaje, realizado con los marcos teóricos que ha generado el área científica llamada Didáctica de las Matemáticas. Es decir, lo que es correcto, incorrecto, bueno, malo, tiene calidad (o no) nos lo dirá el avance de dicha área científica, la cual hallará resultados directos que nos guiarán para hacer los procesos de enseñanza y aprendizaje mejores, (Breda, Font y Pino-Fan 2018).

Delimitar las bases del constructo

Conforme apunta Breda, Font y Pino-Fan (2018), las decisiones adoptadas para delimitar las bases que permiten el desarrollo del constructo idoneidad didáctica no están exentas de tensión, ya que son opciones que empujan el desarrollo del constructo por caminos diferentes.

1) La primera decisión es que debe ser un constructo que permita al profesor reflexionar sobre su práctica y poder guiar su mejora en el contexto donde se realiza.
2) La segunda decisión (derivada de la primera) es utilizar un término que tenga un cierto aire de familia con el término calidad, pero en el que los aspectos contextuales sean más predominantes que los estructurales o inherentes. Por esta razón, se optó por el término idoneidad para introducir el constructo CI.
3) La tercera decisión es considerar que la indicación de cómo guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje debe emanar del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando éste se orienta a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar como mejor. Desde esta perspectiva, la DM nos puede ofrecer principios provisionales (un tipo de normas llamados aquí criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, o bien por un sector importante de ella, que pueden servir primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar sus implementaciones.
4) La cuarta decisión es que el constructo de idoneidad didáctica debe ser multidimensional y, por tanto, debe descomponerse en idoneidades parciales y, a su vez, cada una de ellas hacerlo en componentes.
5) La quinta decisión es que un proceso de enseñanza y aprendizaje se considera idóneo cuando se consigue un equilibrio entre los diferentes criterios parciales de idoneidad, y no cuando sólo se dan algunos de ellos.
6) La sexta decisión es que los criterios de idoneidad parciales (en tanto que consensos a priori) pueden entrar en conflicto con el contexto en que trabaja el profesor, lo cual conlleva, primero, tratar los CI de manera conjunta (y no como criterios independientes como frecuentemente se hace en el caso de la calidad) y, segundo, a cuestionar o relativizar la validez de un determinado criterio en un contexto específico, lo cual lleva a dar pesos relativos diferentes a cada criterio en función del contexto. Esta sexta decisión es posible porque los CI se consideran como normas que son principios en lugar de normas que son reglas. Los principios tienen un aspecto de peso o importancia que las reglas no tienen, de modo que los conflictos entre principios se resuelven por peso. Dicho de otra manera, los CI, en tanto que principios, no son binarios, son graduales.
7) La septima decisión es la definición de que, dada una posible contradicción entre la quinta y la sexta decisión, dicha contradicción se puede resolver mediante el rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje. En efecto, de acuerdo con la sexta decisión, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto inclina las decisiones en una dirección. Ahora bien, los principios con menor peso sobreviven intactos aun cuando no prevalezcan, lo cual permite darles más peso en un rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje de cara a una implementación futura más equilibrada.

Construir el constructo

La opción de considerar que el constructo idoneidad didáctica debe contar con un cierto grado de consenso, da una manera de generar criterios parciales que permitan responder a la pregunta ¿qué se debe entender por mejora de la enseñanza de las matemáticas? ya que es cuestión de explorar, en una primera fase, cómo se ha generado un conjunto de tendencias y principios que gozan de un cierto consenso en la comunidad relacionada con la educación matemática; clarificando, a ser posible, qué papel juegan los resultados de la investigación didáctica en su generación. En una segunda fase, se tiene que relacionar, relativizar, subordinar, etc., estos principios para generar una lista de CI, con sus componentes e indicadores, que sirvan al profesor para organizar la reflexión sobre su práctica.

A continuación, explicamos brevemente estas dos fases que han llevado al constructo CI, compuesto por seis criterios de idoneidad didáctica parciales, cada uno, a su vez, desglosado en componentes e indicadores, cuya función es señalar aspectos a mejorar en la práctica del profesor.

Para el desarrollo del constructo CI, se han considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) del año 2000 y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de la DM (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

Las principales tendencias que se tuvieron en cuenta fueron: la incorporación de nuevos contenidos, presentación de una matemática contextualizada, dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos (resolución de problemas, modelización matemática, etc.), enseñanza y aprendizaje de tipo activo (constructivista), considerar que saber las matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos, principio de equidad en la educación matemática obligatoria y la incorporación de nuevas tecnologías de la información y la comunicación.

El caso paradigmático de reconversión de algunas de estas tendencias en principios explícitos es el caso de los principios del NCTM (2000): currículum, enseñanza, aprendizaje, evaluación, tecnología e igualdad. En el EOS se consideró que, dado el amplio consenso que generan, los principios del NCTM (2000), reinterpretados, podían ser el origen de algunos de los CI, o bien podían contemplarse como componentes suyos. En concreto, se reinterpretaron los principios del NCTM (2000) como se explica en Breda, Font y Pino-Fan (2018). El principio del currículum del NCTM (2000), por ejemplo, señala claramente la idea de unas matemáticas importantes. Por esta razón, este principio, en la propuesta de criterios de idoneidad, se descompone en dos, uno llamado criterio de idoneidad epistémica que se relaciona con la idea de matemáticas importantes y otro llamado criterio de idoneidad ecológica que se refiere al hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje tienen que tener en cuenta el entorno en que se realizan. Por entorno se entiende todo aquello que está alrededor del aula, condicionando la actividad que se desarrolla en ella, en particular el currículum oficial.

Tres de los seis principios formulados por el NCTM (2000) (enseñanza, aprendizaje y evaluación) tienen una clara relación con el criterio de la idoneidad cognitiva. También lo tiene el principio de igualdad, aunque también se relaciona con la idoneidad interaccional. El principio de igualdad tiene relación con el hecho de que los diferentes países tienen tendencia a aumentar la edad en la que finaliza la enseñanza obligatoria, lo cual conlleva que la diversidad propia de una etapa obligatoria está presente en edades en las que antes los grupos de alumnos eran más homogéneos. Ante esta diversidad, hay una tendencia a buscar la equidad en la educación matemática. Hay cierto acuerdo en que los programas de instrucción matemática deben alcanzar a todos los estudiantes cualquiera que sea el género, lengua, grupo étnico o sus diversas capacidades. Este objetivo no es fácil, pero no imposible y para conseguirlo un aspecto clave es asegurar una gestión de la interacción en el aula que permita la inclusión de todos los alumnos. Por esta razón el principio de igualdad del NCTM (2000) en el EOS se relaciona sobre todo con el criterio de idoneidad interaccional, aunque no solamente con este. Por otro lado, el principio de la tecnología, contemplado por el NCTM (2000), se relaciona, sobre todo, con el criterio de idoneidad de medios, el cual incorpora, implícitamente, la noción de eficiencia. Esta última noción hace referencia a la capacidad de producir lo máximo con el mínimo tiempo y energía, se trata, por tanto, de un concepto referido a la relación entre inputs y outputs, al logro de determinados objetivos optimizando los medios y los recursos. En el criterio de idoneidad de medios, los recursos tecnológicos quedan incorporados como subcomponente del componente recursos materiales.

Además de las tendencias y principios comentados anteriormente en el área de la DM se han generado conocimientos y resultados que gozan de amplio consenso. Algunos de los aportes de los diferentes enfoques del área de la DM también se han tenido en cuenta para el desarrollo del constructo CI (Godino, 2013).

Criterios, componentes e indicadores

Una vez determinados los criterios de idoneidad (epistémico, cognitivo, interaccional, emocional, mediacional y ecológico), cada uno de ellos se descompone en componentes e indicadores. En el siguiente cuadro se presenta dicho desglose. La lista de los componentes e indicadores de las idoneidades se puede consultar en Breda y Lima (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017).

Cuadro 1. Componentes e indicadores de la idoneidad didáctica.

Componentes	Indicadores
Idoneidad Epistémica	
Errores	No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático.
Ambigüedades	No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
Riqueza de procesos	La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.).
Representatividad	Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos.
Idoneidad cognitiva	
Conocimientos previos (Componentes similares a la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.
Adaptación curricular a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo.
Aprendizaje	Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas.
Alta demanda cognitiva	Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) Promueve procesos meta-cognitivos.
Idoneidad Interaccional	
Interacción docente - discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión

Interacción entre discentes	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
Idoneidad Mediacional	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (de la enseñanza colectiva / tutoría, tiempo de aprendizaje)	Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad.
Idoneidad Emocional	
Intereses y necesidades	Selección de tareas de interés para los alumnos. Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional.
Actitudes	Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.
Idoneidad Ecológica	
Adaptación al currículo	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Conexiones intra e interdisciplinares	Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extra-matemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa).
Utilidad socio-laboral	Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral.
Innovación didáctica	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.).

Fuente: Breda y Lima (2016).

Resultados

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013). Este componente a su vez se concreta en diferentes indicadores, como el siguiente: Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. En cambio, los componentes tienen un papel clasificatorio de indicadores, por ejemplo, el componente representatividad es un conjunto de indicadores (los cuales se pueden entender como criterios específicos de idoneidad epistémica) que, globalmente, permiten conseguir el objetivo de que en el proceso de instrucción de un determinado objeto matemático se tenga en cuenta su complejidad.

La lista de componentes e indicadores para los seis criterios de idoneidad didáctica que se puede consultar en Breda y Lima (2016) y en Breda, Pino-Fan y Font (2017) presenta una reorganización relevante en los componentes e indicadores de idoneidad respecto a los propuestos en Godino (2013), sobre todo para el criterio de idoneidad epistémica. Otro aspecto a considerar es que se debería complementar la lista de indicadores a partir del paso previo de reconstrucción del significado de referencia del tema específico que se quiere enseñar. Por otra parte, en Godino (2013), la lista de criterios, componentes e indicadores que contemplamos en este trabajo, se complementa con otros indicadores de carácter mixto, que involucran más de un criterio de idoneidad didáctica.

Consideraciones finales

El constructo idoneidad didáctica es una herramienta que puede servir como una guía de reflexión de los profesores cuándo estos desarrollan un proceso de instrucción (Breda, Font y Lima, 2015). En particular, los criterios de idoneidad didáctica se están enseñando como contenido para pautar la reflexión del profesor sobre su propia práctica en tres postgrados (un máster de formación de profesores de secundaria en servicio en Ecuador, un máster interuniversitario de formación de profesores de secundaria en servicio en España y un diplomado para maestros de primaria en servicio en Panamá).

La segunda, es que su aplicación concreta debe ser situada. Es decir, la aplicación, priorización, relegación etc., de dichos criterios depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta. Se trata de contrastar el ideal con la realidad, pero en lugar de responsabilizar al profesor del desfase inevitable entre ambos, el uso de los criterios de idoneidad didáctica le da la posibilidad al profesor de reflexionar y decidir, de manera autónoma y en función del contexto, acciones para conseguir una mejora de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Los criterios de idoneidad son una guía de orientación para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no unos principios o criterios que produzcan la frustración del profesor normal al no poder alcanzarlos.

En cada contexto el profesor puede cuestionar ciertas verdades que tienen un gran consenso. Por ejemplo, puede haber un gran consenso en que organizar la clase en forma de proyecto de trabajo y dando mucho peso a la modelización es, a priori, lo más deseable; pero, si tenemos que hacerlo con un grupo de alumnos heterogéneos, en los que la capacidad de concentración dura poco tiempo, quizás esta verdad deba ser cuestionada en este contexto particular. Con este ejemplo se pretende señalar que un consenso asumido en el área de la Didáctica de las Matemáticas como una buena manera de enseñar las matemáticas puede funcionar de modo incoherente o producir contra efectos no previstos, al encarnarse en unas prácticas de enseñanza en un contexto de aula (espacio-temporal) determinado.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias

Breda, A., Font, V., y Lima, V. M. R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *8*(2), 1-41.

Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018) Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, *5*(1), 74-103. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Font, V., y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *Matemáticas: Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 9-55). Barcelona: Graó.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124.

Godino, J. D. (2013) Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

PRÁTICA COMO COMPONENTE CURRICULAR NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

PRACTICE AS A CURRICULAR COMPONENT IN MATHEMATICS LICENTIATE DEGREES

Lucas Diego Antunes Barbosa, Barbara Lutaif Bianchini
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brasil)
lucasdiegoantunesbarbosa@gmail.com, barbaralb@gmail.com

Resumo
O objetivo deste trabalho é investigar a interpretação dada à Prática como Componente Curricular (PCC) na Licenciatura em Matemática dos Institutos Federais de Educação brasileiros. Adotamos como referencial teórico as contribuições de Shulman, Ball, Phelps, Thames, Cochran-Smith e Lytle. Realizamos entrevistas com três professores formadores da Licenciatura em Matemática. Analisamos as entrevistas à luz da *Análise de Conteúdo* de Bardin. Os resultados preliminares das entrevistas realizadas evidenciam que a Prática como Componente Curricular do IF-Norte se resume a resoluções de exercícios no quadro e se limita a atividades dentro da sala de aula. Este fato converge para o conhecimento apontando por Cochran-Smith e Lytle como conhecimento na prática, o qual pode ser gerado em situações de sala de aula, de como decisões são tomadas e de como as estratégias de ensino são relacionadas.

Palavras-chave: prática, licenciatura, construção de conhecimento

Abstract
The aim of this study is to investigate the interpretation given to Practice as a Curricular Component (PCC) in Mathematics Licentiate Degrees in Brazilian Federal Education Institutes (IF), adopting the contributions of Shulman, Ball, Phelps, Thames, Cochran-Smith and Lytle as theoretical references. We conducted interviews with three Mathematics Licentiate course teachers and analyzed the interviews in light of Bardin's Content Analysis. The preliminary results of the interviews indicate that Practice as a Curricular Component of the North-IF unit is involves only solving exercises on the blackboard and is limited to classroom activities. This converges to knowledge pointed out by Cochran-Smith and Lytle as knowledge in practice, which can be generated in classroom situations, concerning how decisions are made and how teaching strategies are applied.

Key words: practice, licentiate, knowledge building

Introdução

Este estudo faz parte de uma tese de doutoramento, em andamento, do primeiro autor, orientada pela segunda, vinculado ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. O objetivo geral da pesquisa é investigar a interpretação dada à Prática como Componente Curricular na Licenciatura em Matemática dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia. Para tanto, intenta-se apontar a Prática e o Estágio como pontos que merecem uma maior atenção na análise da formação inicial de professores Matemática (Gatti & Nunes, 2009).

Conforme as Diretrizes Curriculares para a formação inicial de professores, são destinadas 400 horas de atividades de Prática como Componente nos cursos de Licenciatura. Marcatto (2012) evidencia que a concepção de Prática como Componente Curricular é equivocada, reduzindo as atividades de Estágio e disciplinas pedagógicas.

Partindo desses pressupostos, e entendendo que é necessário aprofundar as discussões, buscamos nesta pesquisa responder à seguinte pergunta: Qual a visão de professores formadores na relação construção de conhecimentos para docência e Prática como Componente Curricular na Licenciatura em Matemática?

Referencial teórico

Shulman (1986) define uma perspectiva do conhecimento de conteúdo para o ensino, apontando três categorias: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico do conteúdo e conhecimento curricular. O pesquisador afirma que o ensino "começa com a compreensão do professor sobre o que deve ser aprendido e como o conteúdo deve ser ensinado. O conteúdo passa por uma série de atividades, durante as quais os alunos recebem instruções específicas e oportunidades de aprendizado" (Shulman, 1987, p. 7).

O conhecimento do conteúdo se refere à forma de organização de um conteúdo na mente de um professor. Os professores precisam conseguir explicar para seus alunos uma proposição e como ela é justificável, e mostrar por que vale a pena conhecer e relacioná-la com outras proposições, dentro da disciplina, tanto na teoria quanto na prática (Shulman, 1986).

Outra categoria é o conhecimento pedagógico do conteúdo. Este diz respeito ao conhecimento do conteúdo voltado para o ensino. Shulman (1986) considera como sendo as maneiras de representar e formular o assunto, tornando-o compreensível aos outros, estreitando a relação de ensino e de aprendizagem. Percebemos, nesta categoria, um aspecto mais didático do que pedagógico, tendo como base o conceito de Didática da Matemática que, segundo Almouloud (2007, p. 17) tem por "objetivo investigar os fatores que influenciam o ensino e aprendizagem da Matemática e o estudo de condições que favoreçam sua aquisição pelos alunos".

Na terceira categoria, conhecimento curricular, espera-se que os professores possuam entendimentos sobre as alternativas curriculares disponíveis para instrução de um determinado conteúdo. Para Shulman (1986), trata-se de, por um lado, conhecimento de currículo lateral, que consiste na a capacidade do professor de relacionar um tópico com outras áreas de conhecimento, e por outro, conhecimento de currículo vertical, segundo o qual o professor necessita conhecer tópicos, de uma mesma área, ensinados em anos anteriores e posteriores.

A partir das ideias de Shulman, Ball, Thames e Phelps (2008) introduzem-se as noções de conhecimento comum de conteúdo, conhecimento especializado de conteúdo e conhecimento curricular. Além disso, apresentam o conhecimento de conteúdo e estudantes, conhecimento de conteúdo e de ensino e conhecimento do horizonte.

De tal modo, o conhecimento comum de conteúdo vai além do ensinar. Por comum, “não pretendemos sugerir um conhecimento que todo mundo saiba. Em vez disso, queremos indicar que este é o conhecimento com uma ampla variedade de configurações, ou seja, não é exclusivo do ensino” (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 399, tradução nossa).

A segunda categoria é o conhecimento especializado de conteúdo, o qual é o conhecimento matemático não tipicamente necessário para outros fins do que ensinar. “Os professores precisam conseguir falar explicitamente sobre a linguagem matemática usada; como escolher, fazer e usar representações matemáticas de forma eficaz e como explicar e justificar as suas ideias matemáticas” (Ball, Thames & Phepls, p. 400, tradução nossa).

Inserido no conhecimento pedagógico de conteúdo, estão os conhecimentos de conteúdo e de estudantes, que vinculam conhecer sobre os alunos e sobre a Matemática. Assim, “ao atribuir uma tarefa, os professores precisam antecipar o que faz com que os alunos fiquem susceptíveis e se eles vão achar que é fácil ou difícil” (Ball, Thames & Phepls, p. 401, tradução nossa). Uma característica importante dessa categoria é que o professor reconhece os tipos de erros cometidos em um conteúdo matemático, auxiliando os alunos na tomada de decisões e nas escolhas de estratégias de ensino adequadas.

Conhecimento de conteúdo e de ensino, por sua vez, é o saber sobre o ensino e a Matemática. É a capacidade que professores têm de avaliar se a instrução de um certo conteúdo será proveitosa ao ensinar uma tarefa. Os mesmos autores (Ball, Thames & Phepls, p. 401, tradução nossa) apontam que “cada uma destas tarefas exige uma interação entre a compreensão Matemática específica e uma compreensão de questões pedagógicas que afetam o aprendizado do aluno”.

A última categoria é o conhecimento do horizonte. Refere-se a relacionar o que está sendo trabalhado no momento com um conteúdo que já foi trabalhado anteriormente ou que ainda será trabalhado, ou seja, é o conhecimento de como os conteúdos matemáticos estão inseridos ao longo do currículo. O professor necessita saber como os conteúdos matemáticos estão alocados nas séries anteriores e posteriores no currículo de Matemática.

Nessa perspectiva, Cochran-Smith e Lytle (1999) apresentam concepções da formação de professores, o conhecimento para a prática, o conhecimento na prática e o conhecimento da prática, com o intuito de teorizarem a formação de professores baseados em ideias de como conhecimento e prática estão relacionados.

A primeira concepção de formação de professores, conhecimento para a prática, é apontado como conhecimento formal. “(...) conhecimento de conteúdo ou assunto, bem como conhecimento sobre as disciplinas da educação, desenvolvimento humano e de estudantes, organização em sala de aula, pedagogia, avaliação, contextos sociais e culturais do ensino e da educação” (Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 254, tradução nossa). Essa gama de conhecimentos é produzida, pelos pesquisadores, a partir de resultados de suas pesquisas e das disciplinas oferecidas na Universidade.

Ademais, o conhecimento para a prática destaca a aquisição de conhecimentos da área de conteúdo para os professores do Ensino Fundamental e Médio. Esta concepção de conhecimento supõe que os professores desempenhem um papel fundamental na mudança educacional, pelo conhecimento adquirido na formação de professores e no desenvolvimento profissional contínuo e, também, do desenvolvimento profissional com base na aprendizagem das práticas pelos professores. Desse modo, Cochran-Smith e Lytle dizem que os professores mais bem sucedidos são aqueles que são mais conhecedores dessas práticas e que, de forma mais precisa e consistente, usam tais práticas na sala de aula.

A segunda concepção de formação de professores é o conhecimento na prática. Nesta, os conhecimentos que os professores necessitam para ensinar bem é manifestado nas suas ações e decisões, os quais aprendem quando tem oportunidade de examinar e refletir sobre o conhecimento inserido nas boas práticas. Sendo assim, “(...) a partir da perspectiva do conhecimento na prática, reconhece-se que profissionais competentes colocam e constroem problemas a partir da incerteza e complexidade das situações de prática”(Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 263, tradução nossa).

Essas duas concepções de formação de professores possuem algo comum: os professores podem ensinar melhor a partir de algo que já conhecem. Todavia, as autoras também destacam diferenças: a primeira concepção foca nos conhecimentos dos professores conhecido por outra pessoa; a seguinte, mira no conhecimento dos professores conhecido por professores experientes.

Na terceira concepção de formação de professores, conhecimento da prática, tanto o conhecimento quanto sua geração são vistos como problemáticos por estarem sempre abertos à discussão. Seus principais contextos para a formação são a rede de professores, as comunidades de investigação e outros coletivos escolares. Existe, ainda nesta noção, dois tipos de conhecimento: o produzido por pesquisas e o gerado por atividades de ensinar. Diferentemente da segunda concepção, aqui não se distingue professor experiente e novato.

Nesse âmbito, ressaltamos que a terceira concepção não é uma síntese das duas anteriores. Cochran-Smith e Lytle indicam que ela se baseia em ideias diferentes: esta prática é mais do que prática. Além disso, consiste em ser mais do que uma interpretação do conhecimento prático dos professores. Dessa maneira, “a imagem do conhecimento aqui não é estreita nem técnica, e o objetivo da investigação não é a produção de ‘descobertas’, mas sim a resposta de questões fundamentais acerca de currículo, os papéis dos professores e os fins” (Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 274, tradução nossa).

Procedimentos metodológicos

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994), e classificamos como um estudo de caso. Segundo Yin (2010, p. 38), “o estudo de caso é uma investigação empírica que investiga um fenômeno contemporâneo em profundidade e em seu contexto de vida”.

Em relação aos participantes da pesquisa, entrevistamos três professores do curso de Licenciatura em Matemática, um educador matemático, um matemático e um pedagogo de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da região Norte do Brasil. Esta instituição foi escolhida para aplicação do instrumento piloto de pesquisa, levando em consideração o conceito da Licenciatura em Matemática e o tempo de funcionamento do curso.

Os dados coletados foram analisados baseados na análise de conteúdo de Bardin (2011, p. 33), que se trata de um “conjunto de técnicas de análise das comunicações, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens”.

Resultados e avanços

A fim de preservação do anonimato dos entrevistados, adotamos nomes fictícios; chamamos os professores formadores de Antônio, Beto e Carlos. A partir dos dados coletados nas entrevistas com estes professores, organizamos três categorias: Prática como aplicação da teoria, Prática como Componente Curricular na construção de saberes docentes e Alocação da Prática como Componente Curricular na Licenciatura em Matemática

A Prática como aplicação da teoria

A Prática para os professores entrevistados é vista como uma aplicação da teoria, no sentido que os licenciandos aprenderão um conteúdo na teoria e irão aplicá-lo na resolução de exercícios. Isto é perceptível neste relato: *"[...] eu colocava os alunos para irem ao quadro e sempre avaliava a postura deles enquanto professor, a maneira deles de dar aula"* (ANTÔNIO, 2017). Com isso, podemos perceber, também, que "o ensino é então compreendido principalmente como um processo de aplicação do conhecimento recebido a uma situação prática: os professores implementam, traduzem, utilizam, adaptam e/ou colocam em prática o que aprenderam da base de conhecimento" (Cochran-Smith & Lytle, 1999, p. 257, tradução nossa).

Nesse cenário, Professor Antônio afirma que existe dificuldade em entender o que é a PCC, pois a carga horária confunde com o Estágio e com as Atividades Curriculares Complementares. De acordo com o professor: "*Ela é um pouco confusa, fica entre um e outro. No início nós diluímos a Prática, nos dois PCC. Foram aprovadas, nos dois primeiros, as Práticas nas disciplinas"* (Antônio, 2017).

Seguindo essa mesma direção, Beto e Carlos assinalam como Prática colocar um discurso em ação. Beto afirma que prática é sair do campo teórico e praticar aquilo, sair da sala de aula e atuar como professor. Diz, também, que durante as suas aulas de Tecnologia do Ensino de Matemática, disciplina que tinha uma carga horária destinada à Prática como Componente Curricular, trabalhava com o uso de *softwares: "Às vezes eles apresentam um funcionamento de um* software*, ou uso de determinados* softwares *para explicar determinado conteúdo matemático. Tanto tem a parte de minha atuação, como também participação dos alunos"* (Beto, 2017).

A Prática como Componente Curricular na construção de conhecimentos

No discurso dos professores aparece o conhecimento didático, além do conhecimento de conteúdo, como fundamental para a atuação na Educação Básica. Isto nos faz perceber, pelas falas dos entrevistados, que a Prática como Componente Curricular pode contribuir com esse conhecimento. "*Além de, lógico, o aluno ter uma postura ao dar aula, saber a parte didática e metodológica (...). Hoje em dia, nas aulas, o aluno não está querendo só aquela aula de quadro e giz"* (Antônio, 2017). Shulman (1987, p. 15, tradução nossa) corrobora com isso:

> (...) a chave para distinguir a base de conhecimento do ensino está na interseção de conteúdo e pedagogia, na capacidade de um professor transformar o conhecimento de conteúdo que ele possui em formas que são pedagogicamente poderosas, mas também adaptáveis às variações nas habilidades e experiências apresentadas pelos alunos.

O professor Beto afirma que os futuros professores de Matemática necessitam ter um conhecimento dos conteúdos do Ensino Fundamental, Médio e Superior, um conhecimento na área da Didática e, ainda, conhecimentos de *"(...) Cálculo, Álgebra, Estatística, Matemática Financeira. Um curso de Licenciatura em Matemática está formando professores de matemática"* (Beto, 2017).

No que tange aos conhecimentos fundamentais para atuação na Educação Básica que a formação inicial pode oferecer, Carlos aponta o conhecimento de como o sistema educacional e as leis da área da educação funcionam: *"Na didática você trabalha a questão do planejamento, a organização que se deve ter para a preparação de uma aula e de como isso deve funcionar na prática"* (Carlos, 2017).

Alocação da Prática como Componente Curricular na Licenciatura em Matemática

Apenas o coordenador do curso, professor Antônio, sugere e acredita que o modelo de PCC, inserido no curso através de projetos, pode contribuir para a formação do futuro professor de Matemática, pois, segundo ele, dessa forma se poderão resolver problemas estratégicos da Licenciatura em Matemática. Igualmente, diz que a carga horária de Prática, quando diluída nas disciplinas, acaba por ficar a cargo de o professor aplicá-la ou não. A inserção de horas de PCC em algumas disciplinas dificulta o gerenciamento e o trabalho com essas horas (Marcatto, 2012).

Professor Beto afirma que trabalha com à Prática durante suas aulas, mas não consegue indicar qual a melhor forma de alocar as 400 horas exigidas pelo Ministério da Educação. Beto afirma que tenta ser um exemplo como professor, mesmo fora das disciplinas que não apresentam carga horária destinada à Prática. Desse modo, garante: *"(...) eu sempre tento desenvolver, dar conselhos (...) de como atuar bem, de ser um bom agente nesta área"* (Beto, 2017).

Por sua vez, professor Carlos sugere que a carga horária de PCC seja distribuída durante o curso e diz que nem sempre as atividades de Prática estão voltadas para a formação docente. No mesmo sentido, corroborando, Gatti e Nunes entendem que outras atividades são contabilizadas pelas instituições na carga horária de Prática: "(...) ficando-se no entanto, sem informação clara sobre o desenvolvimento de habilidades nessa instância tão fundamental para o exercício da docência" (Gatti & Nunes, 2009, p. 107).

Reflexões e conclusões

Os resultados preliminares das entrevistas realizadas evidenciam a Prática como Componente Curricular do IF-Norte se resume a resoluções de exercícios no quadro e se limita a atividades dentro da sala de aula. Este fato converge para o conhecimento apontado por Cochran-Smith e Lytle (1999) como conhecimento na prática, o qual pode ser gerado em situações de sala de aula, em como decisões são tomadas e em como as estratégias de ensino são relacionadas. Ainda, tomando como base as entrevistas, a Prática como Componente Curricular, na visão dos professores formadores, pode contribuir para construção do conhecimento didático do futuro professor de Matemática.

Referências

Almouloud, S. A (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática.* Curitiba: Editora UFPR.

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching:What Makes It Special? *Journal of Teacher Education,59*(5),389-497.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R.; Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora.

Cochran-Smith, M.; Lytle, S. L (1999). Relationships of knowledge of practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education, 24*, (pp. 249-305). Pennsylvania: Jstor.

Gatti; B. A., Nunes, M. M. R. (2009). *Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas.* São Paulo: FCC/DPE.

Marcato, F. S. F. (2012). *A Prática como Componente Curricular em projetos pedagógicos de cursos de Licenciatura em Matemática*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, Brasil.

Shulman, L. S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,15* (2), 4-14.

Shulman, L. S (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Havard educational review*, 57,1-22.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. – 4. Ed. – Porto Alegre: Bookman.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ENSEÑANZA Y EVALUACIÓN DE CONTENIDOS MATEMÁTICOS EN ESCUELAS DE SECTORES VULNERABLES. ESTUDIO DE UN CASO

EDUCATION AND EVALUATION OF MATHEMATICAL CONTENTS IN SCHOOLS OF VULNERABLE SECTORS. CASE STUDY

Mabel Chrestia, María de la Trinidad Quijano, Cecilia Fourés
Universidad Nacional de Río Negro (Argentina).
mchrestia@unrn.edu.ar, mquijano@unrn.edu.ar, cfoures@unrn.edu.ar

Resumen
Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación cuyo propósito es indagar el desarrollo de prácticas docentes en instituciones de nivel medio públicas que atienden a sectores vulnerables. Se centra la atención en el estudio de un caso: se observa, describe y analiza el desarrollo de clases de una docente de Matemática, en una escuela de la ciudad de Bariloche, Provincia de Río Negro, Argentina. En primer lugar, se muestra qué se entiende por prácticas docentes y por contextos vulnerables, conjugando posteriormente ambas ideas para caracterizar las prácticas en estos sectores. Luego se presentan diferentes tendencias didácticas, a fin de determinar rasgos de ellas en la actuación docente y se expone la propuesta curricular de la escuela secundaria de Río Negro. Para realizar la descripción y análisis de las clases se establecen categorías de las cuales, en este trabajo, se presentan dos de ellas: enseñanza del contenido matemático y evaluación. Los primeros resultados indican puntos de encuentro entre las prácticas de la docente y los referentes conceptuales considerados.

Palabras clave: prácticas docentes, enseñanza de la matemática, evaluación, vulnerabilidad

Abstract
This work is part of a research project that aims to investigate the development of teaching practices in secondary public schools attended by vulnerable sectors. It focuses on a case study: the development of a mathematics teacher classes in a school of Bariloche city, Rio Negro´s province, Argentina, which are observed, described and then analysed. In the first place, it shows what do teaching practices and vulnerable social context mean, subsequently combining both ideas in order to characterize the practices in these sectors. Then different didactic tendencies are presented, in order to determine their features in teaching performance, and the curricular proposal of the secondary school of Río Negro is submitted. In order to describe and analyse classes, categories are established, and in this work two of them are presented: mathematic teaching and evaluation. The first results show meeting points between teacher practices and the conceptual considered references.

Key words: teacher practices, mathematical teaching, assessment, vulnerability

Introducción

El presente texto se enmarca en el Proyecto de Investigación "La práctica docente en contextos de vulnerabilidad: Enseñar hoy en las escuelas públicas de Bariloche", actualmente en desarrollo en la Universidad Nacional de Río Negro, Argentina. El proyecto, presentado en Fourés, C., Fernández, M., Birgin, J., Chrestia, M., Fontana, A., Cutsaimanis, A., Ilarri, N., Peña, J., Kalko, L., Casella, V. y Berger, P. (2016), intenta dar respuesta a grandes preguntas tales como ¿Cómo se desarrollan las prácticas docentes en las instituciones de nivel medio públicas que atienden a sectores de la sociedad caracterizados como vulnerables? ¿Cómo se lleva a cabo la enseñanza de las distintas asignaturas? ¿Cómo se resignifica la normativa emanada de Nación y Provincia en las escuelas?

Su propósito es construir conocimiento con el objetivo que el mismo se constituya en herramienta para los docentes de los distintos niveles del sistema educativo en una búsqueda de generar procesos de calidad educativa que ayuden a la inclusión de los alumnos, particularmente de aquellos sectores sociales considerados vulnerables (Castel, 1991). En esta dirección, desde el proyecto se prevé realizar indagaciones en escuelas que albergan jóvenes de dichos sectores sociales, los que cuentan con altos indicadores de repitencia, desgranamiento y sobreedad.

En cuanto a la perspectiva metodológica, el estudio conjuga un enfoque cualitativo, con énfasis en la perspectiva antropológica y los recursos etnográficos (Rockwell, 2009). Las observaciones de sala de clase y las entrevistas en profundidad, así como las indagaciones documentales, son los instrumentos utilizados para la descripción y análisis de los datos recogidos.

En este trabajo centraremos nuestro análisis en las prácticas que realiza una docente de Matemática, en un curso de cuarto año (estudiantes de 15-16 años) de una escuela pública de la ciudad de San Carlos de Bariloche, en la provincia de Río Negro, Argentina. Se describen y analizan dichas prácticas con la intención de responder a las siguientes preguntas problematizadoras: *¿cómo enseña el docente?, ¿cómo son sus intervenciones?, ¿cómo es su trabajo con los contenidos?, ¿qué interacciones se producen en el aula?, ¿cómo el docente, en su trabajo cotidiano, aborda la realidad de los sectores sociales caracterizados como vulnerables?* Estas y otras preguntas fueron guiando nuestras indagaciones.

Marco referencial

Práctica docente

El concepto de *práctica docente* no se limita únicamente al trabajo que el docente desempeña al interior del aula, es decir, no se refiere al momento de "dar clases", sino que se extiende más allá del aula. Se entiende la práctica docente como una praxis social e intencional en la que intervienen los significados, las percepciones y las acciones de los actores implicados en el proceso (maestros, alumnos, autoridades educativas, padres) así como los aspectos político-institucionales, administrativos y normativos que, según el proyecto educativo de cada país, delimitan la función del docente (Fierro, Fortoul & Rosas, 2000).

Diferentes relaciones se suceden en la práctica docente: relación del docente con los alumnos, con las familias de los alumnos, con sus pares y con los directivos, relación de los docentes y alumnos con el saber, como así también con un conjunto de valores, personales, sociales e institucionales que los docentes poseen (Fierro, Fortoul & Rosas, 2000). La práctica docente se reconoce entonces como una actividad compleja, por lo que requiere, al ser analizada, indagar no sólo lo acontecido en el interior de las aulas de las instituciones educativas, sino considerando los contextos económicos, políticos, sociales y culturales donde adquieren significado (Fourés *et al,* 2016).

El análisis de la práctica docente puede realizarse entonces desde una *dimensión personal*, centrándose en la persona que realiza la actividad, reflexionando ella misma sobre su quehacer; o bien desde una *dimensión institucional*, poniendo la atención en cómo influye el contexto institucional en la tarea docente. Por otro lado, la *dimensión interpersonal* permite analizar el trabajo desde un espacio colectivo que implica, entre otros aspectos, el "ponerse de acuerdo" con los otros; en tanto que la *dimensión social* se refiere a indagar en la actividad docente situada en un momento histórico determinado y en un entorno particular.

Un aspecto fundamental es el análisis desde una *dimensión didáctica*, observando y reflexionando acerca del proceso de enseñanza mediante el cual el docente facilita la adquisición de nuevos conocimientos a los alumnos. Y, por último, la *dimensión valoral*, ya que la práctica docente intenta la realización de ciertos logros en los alumnos; estos propósitos del docente dan cuenta de sus preferencias, en base a sus vivencias, formación y creencias (Fierro, Fortoul & Rosas, 2000).

Contextos vulnerables

Para caracterizar la situación de vulnerabilidad a la cual se hará referencia, se toma la conceptualización desarrollada por Castel (1991). Este autor sitúa a todo individuo en relación a dos ejes: el que tiene que ver con la situación laboral y el que hace referencia a la inserción relacional de la persona en la sociedad. En cada uno de estos ejes, distingue diferentes valores que, según sea la intersección entre ellos, generan tres zonas (Figura 1).

Situación Laboral		Inserción Relacional		Zona
Trabajo Estable	+	Inserción Relacional Fuerte	=>	Zona de Integración
Trabajo Precario	+	Fragilidad Relacional	=>	Zona de Vulnerabilidad
No trabajo	+	Aislamiento Social	=>	Zona de Desafiliación

Figura 1. Esquema de conformación de zonas según situación laboral e inserción relacional según Castel (1991).

Estas zonas no son estáticas, sino más bien dinámicas, sus fronteras son cambiantes, y existen pasajes de una a otra de manera incesante. La zona que nos atañe, la de vulnerabilidad, ocupa particularmente una posición estratégica en este movimiento entre zonas: "Es un espacio social de inestabilidad, de turbulencias, poblado de individuos precarios en cuanto a su relación con el trabajo y frágiles en su inserción relacional. De allí el riesgo de caer en la tercera zona, que aparece entonces como el fin del recorrido. Es la vulnerabilidad la que alimenta la marginalidad profunda o la desafiliación" (Castel, 1991, p. 41).

En la selección del caso se utilizó como criterio tomar escuelas de una zona de San Carlos de Bariloche denominada "El Alto", la cual posee la característica de ser un sector de la ciudad en el cual habitan los grupos sociales más vulnerables. No es la única zona de estas características, pero sí la más densamente poblada y la principal de la ciudad.

En el aula observada, encontramos alumnos que provienen de familias que, en general, se encuentran frente a trabajos inestables o precarizados. Son jóvenes que muchas veces ven dificultada su asistencia y continuidad en la escuela por acompañar a familiares mayores a realizar trabajos temporales, o tener que salir ellos mismos a trabajar o realizar tareas del hogar mientras los mayores se encuentran trabajando. Se consideran, entonces, como estudiantes en riesgo de abandonar la escolaridad secundaria.

Las prácticas docentes en contextos de vulnerabilidad

Diferentes autores han estudiado las prácticas docentes en contextos sociales desfavorables. En Villalta Páucar, Martinic Valencia & Guzmán Droguett (2011) se analizan los elementos de la práctica pedagógica docente en la interacción didáctica de la sala de clase, atribuidos al logro del aprendizaje de los estudiantes en contextos vulnerables. Para su estudio se consideraron los discursos de los diferentes actores educativos (directivos, apoderados, docentes y alumnos) así como interacciones en clases, de profesores de educación media de liceos municipalizados ubicados en sectores sociales vulnerables de Chile. En los resultados se señalan algunos ajustes que realizan los profesores en estos contextos que tienen que ver con: *estructurar y realizar un seguimiento en clase* (potencian el trabajo en la clase, la ejercitación de actividades y la revisión de tareas); e*nseñar con afecto* (consideran que el punto de inicio del proceso educativo es la contención afectiva); *conocer y respetar a los alumnos* (tiene que ver con el manejo de los conflictos y la dinámica de exigencia cognitiva en la sala de clase); *vincular enseñanza y experiencia del docente* (relacionar los contenidos de enseñanza con situaciones cotidianas y personales); *definir límites (*las estructuras de enmarcamiento de la clase funcionan porque los estudiantes respetan la autoridad del profesor en el aula); *trabajo reflexivo* (la atención reflexiva al estudiante es importante).

Particularizando en las prácticas de Matemática, en Ritacco Real (2011), se realiza una indagación para identificar acciones relacionadas con lo que denomina la categoría *buenas prácticas* relacionadas con los procesos de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de las matemáticas en contextos de riesgo de exclusión social. Con el objetivo de identificarlas, se lleva a cabo un estudio en España en tres Institutos públicos de Educación Secundaria ubicados en contextos de exclusión social. Como resultado, se establecen subcategorías que reflejan las actuaciones del profesorado de matemáticas y que se asocian con dichas *buenas prácticas*: la *comunicación en el aula*, la *implicación y cercanía en el aprendizaje*, la *atención individualizada*, los *materiales específicos y actividades adaptadas*, los *criterios flexibles en el proceso de evaluación*, y la *búsqueda de aprendizajes significativos*.

Caracterización del docente

A los efectos de poder caracterizar a la docente observada, nos basamos en Carrillo y Contreras (1995), quienes realizan un análisis de las concepciones del profesor acerca de la enseñanza de la matemática. Para ello, estos autores toman las cuatro tendencias didácticas propuestas por Porlán (1989): tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa, y establecen para cada una seis categorías (metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno, papel del profesor y evaluación) con el objetivo de describir cada tendencia, observar diferencias entre ellas, y si existe algún tipo de evolución en el profesor desde la tendencia tradicional hacia la investigativa. En la Figura 2 se muestra un cuadro con la síntesis de lo expuesto por Carrillo y Contreras (1995).

	Tradicional	Tecnológica	Espontaneísta	Investigativa
Metodología	Repetición de ejercicios tipo. Exposición magistral	Reproducir procesos lógicos. Estudio del error	Actividad experimental no reflexiva, conocimiento no organizado.	Situaciones que no poseen soluciones hechas.
Sentido de la asignatura	Adquisición de conceptos y reglas	Carácter práctico para otras asignaturas	Interesan los procedimientos. La matemática inmersa en la problemática real	Adquisición de conceptos, procedimientos, actitudes positivas. Recoge necesidades al planificar.

Concepción del aprendizaje	Memorístico	Memorístico. Apoyado en deducción	Se aprende mediante situaciones que propician el descubrimiento. Interés del alumno	Los objetos de aprendizaje se aplican en otros contextos. Conjetura y generalización
Papel del alumno	Pasivo. Único responsable del aprendizaje	Pasivo. Reproduce los procesos del profesor	Participación activa sin reflexión sobre sus acciones. Trabaja en grupos.	Otorga significado a lo que aprende. Busca respuestas a interrogantes. Actitud crítica.
Papel del profesor	Transmite verbalmente contenidos	Expone contenidos. Utiliza estrategias atractivas	Manejo de dinámica de grupos. Induce al alumno a participar y analiza respuestas	Planifica investigaciones, provoca curiosidad y motivación.
Evaluación	Examen al finalizar cada tema. Asociada a lo numérico.	Examen al finalizar cada tema. Detecta errores para retomarlos	Sensor del aprendizaje. Información cualitativa y personalizada de los alumnos.	Sensor del aprendizaje. Información cualitativa y personalizada de los alumnos. Reformula contenidos.

Figura 2. Concepciones del profesor acerca de la enseñanza de la matemática para las diferentes tendencias didácticas, según Carrillo y Contreras (1995).

Políticas educativas: la propuesta curricular de la ESRN

La educación secundaria en la República Argentina es un nivel educativo cuya obligatoriedad se aprobó por ley en el año 2006, ampliando su cobertura en los últimos años a partir de políticas educativas que persiguieron la inclusión como meta.

En un recorrido de cuestiones críticas atribuidas en las últimas décadas al Nivel Medio encontramos la situación de déficit en las administraciones educativas provinciales que se vio agravada a partir de 1992, con la transferencia del ámbito nacional a las jurisdicciones provinciales de los servicios educativos sin acompañar en esto con el presupuesto necesario para sostenerlos.

En el caso de la provincia de Río Negro, según datos oficiales de los últimos años, los niveles de repitencia y abandono o deserción que se venían registrando en la educación secundaria seguían sin mejoras sustantivas. En el año 2015 se conformó la Comisión Jurisdiccional Curricular para trabajar en la construcción del Diseño Curricular para la "Nueva Escuela" (así denominada por el ámbito de política educativa).

Las escuelas en las cuales se instrumenta la reforma cambiaron su denominación de Centros de Enseñanza Media (CEM) a Escuela Secundaria de Río Negro (ESRN).

La nueva escuela, que comenzó a implementarse en 2017, se estructura en dos ciclos: el básico de dos años y el orientado de tres años, con una nueva organización de trabajo docente por cargos y en siete áreas del conocimiento (Educación Matemática, Educación en Lengua y Literatura, Educación en Ciencias Sociales y Humanidades, Educación Científica y Tecnológica, Segundas Lenguas, Educación en Lenguajes Artísticos, y Educación Física), con un ciclo lectivo dividido en 2 cuatrimestres y en horas reloj para el trabajo en el aula. (Ministerio de Educación y Derechos Humanos de Río Negro, 2017).

En el caso de Bariloche fueron 15 las escuelas que cambiaron su denominación (de CEM a ESRN) y la gran mayoría también su orientación. Así se sostuvieron antiguas orientaciones como Turismo y Arte Musical y se incluyeron nuevas como Artes Audiovisuales, Ciencias Sociales y Humanas, Educación Física y Lengua.

El área de Educación Matemática se compone de tres espacios curriculares: *Matemática* (presente de primero a cuarto año), *Taller de articulación de la matemática con otros campos del conocimiento* (presente en primero y segundo año) y *Taller de resolución de problemas matemáticos* (de tercero a quinto año).

En primero y segundo año, la carga horaria de estos espacios es de tres horas para Matemática y una hora para el Taller. En tercer año, Matemática tiene dos horas y media, y Taller una hora. En cuarto año, cada espacio tiene una hora y media. Y en quinto año, el Taller tiene una carga horaria de dos horas y media.

Metodología

La investigación propuesta aquí es cualitativa de tipo descriptivo e interpretativo de los acontecimientos de clase. Para realizar la descripción y posterior análisis de las clases observadas, hemos establecido cinco categorías, basándonos en los autores mencionados previamente. Nos interesa en particular descubrir acciones que muestren si la docente realiza adecuaciones de su práctica en este tipo de contexto.

Las categorías son las siguientes:

- *Comunicación en el aula:* En esta categoría se detallan aspectos que dan cuenta de la manera que circula la comunicación en la clase. Es decir, qué tipo de lenguaje se utiliza y qué códigos se evidencian.
- *Actitudes en el aula:* En esta categoría se distinguen aquellas actitudes que se dan en el aula, concernientes al aprendizaje de la Matemática. Esto es, describir la manera en que se relacionan docente-alumnos para detallar los sentimientos y emociones que se generan en clase respecto a la disciplina a través de estas interacciones.

- *Atención al estudiante:* Esta categoría recoge aquellas intervenciones, prácticas o actitudes docentes que se dirigen a la atención del estudiante con relación a su aprendizaje.
- *Enseñanza del contenido matemático:* Se describe la manera en que se desarrolla un tema específico matemático en clase, así como el material didáctico que emplea. Así también se da cuenta de la metodología, del tipo de tareas y del contexto en que éstas se proponen, en relación con el tema a enseñar.
- *Evaluación:* En esta categoría se ponen de manifiesto los elementos propios del proceso de evaluación que se presentan en clase: cómo se concibe a la evaluación del aprendizaje, bajo qué criterios o parámetros, en qué instancias, con qué instrumentos, etc.

En cada categoría, se realiza un análisis detallado que permite la elaboración de enunciados descriptivos e interpretativos de acuerdo con los referentes conceptuales mencionados. Para la presentación de los datos, en algunas categorías se transcriben extractos de clase con el fin de reforzar las explicaciones realizadas.

Estudio de caso

Como ya mencionamos, la experiencia se lleva a cabo en una escuela pública de la ciudad de San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro (República Argentina), que atiende a alumnos de sectores vulnerables. Esta institución forma parte del grupo de escuelas que han comenzado a implementar el nuevo diseño curricular. El curso que se observa es cuarto año (estudiantes de 15-16 años), turno tarde. Se realizan observaciones en el espacio curricular de *Matemática,* el que se dicta una vez a la semana durante una hora y media al inicio de la jornada escolar.

Durante las clases observadas se desarrolló el tema "Resolución de triángulos". Nuestra atención se centró en la práctica docente. En este trabajo nos abocamos a describir dos de las categorías mencionadas antes: enseñanza del contenido matemático y evaluación.

Enseñanza del contenido matemático

Durante las clases observadas se desarrolló el tema "Resolución de triángulos". En la primera de dichas clases la docente hizo un repaso del tema anterior: "Razones trigonométricas".
Relatamos a continuación este primer momento de la clase:

La docente dibuja un triángulo rectángulo en el pizarrón cuya hipotenusa mide 18 cm y uno de sus ángulos agudos mide 48°. Escribe una "x" sobre el lado opuesto a ese ángulo. (Figura 3a)
Docente (D): ¿Qué datos conocemos?
Alumnos (A): El ángulo y la hipotenusa.
D: ¿Y qué tenemos que encontrar?
A: El cateto.
D: ¿Qué razón usaremos?
A: El seno.
D: ¿Por qué?
A: Porque está opuesto al ángulo.
La docente escribe en el pizarrón: "sen 48°= ------". Y dice: "vamos a completarlo". Los alumnos responden "arriba va x y abajo 18 cm."
D: ¿Cómo continuamos? Usamos calculadora, ¿cuánto da?
Los alumnos utilizan la calculadora de sus teléfonos celulares para hallar el valor solicitado.
A: 0,743.
Continúa el ejercicio, la docente "despeja" x de la ecuación y obtienen su valor. Escribe en el pizarrón: "x=13,37"

Figura 3. Gráficos realizados por la docente en el pizarrón.

D: Uno más para repasar y empezamos con resolución de problemas.
Dibuja otro triángulo rectángulo, en el cual la incógnita es el ángulo "x" y como datos se tienen las medidas de los dos catetos. (Figura 3 b))
A (otro): Yo no vengo hace dos clases y no entiendo nada.
D: Vas a tener que pedir lo que hicimos.
A: Acá hay que usar la tangente.
D: Queda 15cm /12cm, ¿por qué?
A: Porque el más grande va arriba.
D: si?

A (otro): No, porque es la tangente.
D: ¿Qué hago ahora?
(Lo resuelve con la participación de los alumnos)
Luego la docente da por concluido el repaso.

A continuación, la profesora, haciendo uso de los dos pizarrones del aula, escribe cinco problemas. Les pide a los alumnos que los copien y les explica que "son problemas que hay que resolver aplicando lo que han visto la clase anterior sobre razones trigonométricas." (sic).

Los alumnos trabajan en forma grupal y la docente recorre el aula atendiendo consultas. Al final de la clase los alumnos que han terminado de resolver los ejercicios los entregan a la docente quien se los lleva para corregir y devolver la clase siguiente.

En esta clase la docente intenta que los alumnos se apropien del conocimiento mediante la aplicación de ciertas reglas matemáticas. Aprender las razones trigonométricas significa aplicar correctamente las fórmulas para cada ejercicio o problema planteado. Se trata del conocimiento visto como operación (Edwards, 1993). El conocimiento tiene un fin utilitario: poder aplicar lo aprendido para resolver situaciones dentro del mismo campo en el cual son necesarios esos contenidos. No hay aquí una aplicación a situaciones de la realidad cotidiana del alumno, no se intenta extender los conceptos para poder de alguna manera describir el lugar que ellos habitan.
Por otro lado, se proponen a los alumnos situaciones que intentan ser un problema, al ser redactados como tal, pero que en pocas líneas de texto proporcionan toda la información necesaria para su resolución. El alumno debe entonces detectar los datos volcados en el enunciado y conocer los mecanismos (fórmula, algoritmo, procedimiento) para aplicar esa información. Es decir, él sabe de antemano que esos datos debe utilizarlos –normalmente todos– para llegar a la solución del ejercicio.

La información suministrada por estos "problemas tipo" (Edwards, 1993) no es extraída de una situación real, sino que corresponden a "una *semirrealidad*– no una realidad que de hecho podemos observar, sino una realidad construida, por ejemplo, por el autor de un libro de texto." (Skovsmose, 2000).

Las demás clases observadas siguieron la misma dinámica: al principio la docente realiza una explicación, repasando temas ya vistos y resolviendo algunos ejercicios; luego los alumnos trabajan en grupos resolviendo ejercicios y problemas propuestos por la docente, escritos en el pizarrón o bien en hojas entregadas a cada alumno. Finalmente, los alumnos que concluyen, entregan para que la profesora los corrija.

Por otro lado, las actividades son guiadas, sobre todo en el primer momento de la clase, cuando se hace el repaso. La docente va guiando a los alumnos en la resolución del ejercicio, haciendo preguntas que los llevan directamente a la solución. Este repaso sirve a los alumnos para afianzar su manejo en la aplicación de estas reglas matemáticas.

Nos preguntamos qué tipo de aprendizaje se está produciendo en los alumnos. Por un lado, notamos que la docente insiste en que los alumnos retengan fórmulas y mecanismos que considera necesarios para la resolución de problemas posteriores. Pensamos que la idea subyacente es que este aprendizaje repetitivo y memorístico ayudará a lograr luego un aprendizaje "real". La resolución de problemas es entonces una aplicación de los conceptos aprendidos previamente.

Evaluación

La evaluación se realiza de manera continua durante el desarrollo de las clases. El instrumento utilizado por la docente para la acreditación de los contenidos es la producción de los estudiantes. Esto es, al finalizar cada clase, el alumno entrega lo que realizó ese día, material que la docente devuelve corregido la semana siguiente. Es por ello por lo que, en este tipo de acreditación, la asistencia a clase se hace indispensable. Además, confecciona trabajos prácticos para que los alumnos realicen en sus casas y lo entreguen en alguna fecha estipulada.

La docente lleva un registro de los presentes en cada clase y hace un seguimiento personalizado sobre las entregas o no de los trabajos requeridos. Por esta razón, al comienzo de cada clase pregunta si alguien tiene trabajos para entregar (algunos alumnos, si no terminan lo que se hace en la clase, lo terminan en sus casas y lo entregan la clase siguiente). En caso de no acreditar los contenidos, hay una instancia en diciembre, de tres semanas, en las que el alumno debe concurrir a clases y acreditarlos.

En los siguientes protocolos se vislumbra la manera en que la docente realiza el seguimiento de cada alumno para su evaluación y cómo se explicitan los criterios para la acreditación.

> "Hace mucho que no nos vemos y había algunos alumnos que tenían que entregarme el trabajo, la fotocopia que habíamos estado trabajando la última clase" (va nombrando a cada alumno que lo debería entregar).
>
> > "Hay algunos que ya tuvieron muchas inasistencias hasta acá, hay algunos que vinieron una o dos clases en este cuatrimestre, cada uno sabe" (comienza a nombrarlos). Tengan en cuenta que estamos terminando septiembre, nos quedan dos meses más y ustedes saben que únicamente tenemos los jueves clases. Lo que yo les voy a pedir y recomendar es que vayan completando las carpetas, vayan viendo los temas de las clases que no estuvieron y después aquellos que estuvieron faltando o no hicieron los trabajos, más adelante va a estar la instancia para recuperar (…) (y entregarlos) antes de la finalización del cuatrimestre. Para la primera semana de diciembre ya tiene que estar resuelto quién va a tener que seguir viniendo para recuperar. Hay que cumplir para no ir a recuperar (…) En la medida que vayan cumpliendo con las actividades no va a haber problemas (…) Depende de cómo vayan viniendo y trabajando en cada clase".

Reflexiones finales

Respecto a cómo se enseñan los contenidos matemáticos, observamos que prevalece la tendencia a considerar el conocimiento en su forma operacional, priorizando la resolución de situaciones referidas a matemáticas puras o a una semirrealidad, dejando de lado las situaciones de la vida real. Además, no se propicia generar ambientes de aprendizaje que den lugar a la investigación, sino que prepondera el paradigma del ejercicio (Skovsmose, 2000).

El cambio hacia una enseñanza en la cual el conocimiento sea situacional (Edwards, 1993), es decir, se estructure en torno a su propia realidad, ayudaría a lograr en el alumno un aprendizaje más cercano al significativo.
Creemos que las dificultades con las que un profesor trabaja en el aula en contextos de este tipo llevan a intentar enseñar los contenidos de una manera en la que el docente se siente seguro, además de considerar que podrá evaluarlos de una manera conocida por él, la cual considera confiable.

En contextos en los cuales el alumnado requiere atención casi personalizada, no queda demasiado tiempo para probar nuevos métodos, o realizar otro tipo de actividades (investigaciones, etc.) arriesgándose a no poder enseñar todos los contenidos incluidos en la currícula.

De todos modos, aunque la docente se encuadra en un estilo con características propias de los modelos tradicional y tecnológico (Carrillo & Contreras, 1995), notamos sus intentos por dedicarle el mayor tiempo posible a cada alumno, y de llevar adelante una evaluación continua y flexible, acercándose a una de las características de las buenas prácticas definida en Ritacco Real (2011). Ante la diversidad del alumnado ella trata de contemplar las diferencias entre los estudiantes en cuanto a sus tiempos de aprendizaje. Creemos que es un aspecto importante que ayuda a promover la inclusión educativa.

Referencias bibliográficas

Carrillo, J. y Contreras, L. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, *7(3),* 79-92.

Castel, R. (1991). La dinámica de los procesos de marginalización: de la vulnerabilidad a la exclusión. En Acevedo, M. & Volnovich, J. El espacio Institucional. (pp. 37-53). Buenos Aires: Lugar.

Edwards, V. (1993). La relación de los sujetos con el conocimiento. *Revista colombiana de educación., 27(1),* 23-68.

Fierro, C., Fortoul, B., y Rosas L., (2000). Transformando la práctica docente, una propuesta basada en la investigación acción. México: Paidós.

Fourés, C., Fernández, M., Birgin, J., Chrestia, M., Fontana, A., Cutsaimanis, A., Ilarri, N., Peña, J., Kalko, L., Casella, V. y Berger, P. (2016). La Práctica Docente en contextos de vulnerabilidad: Enseñar hoy en las escuelas públicas en Bariloche. En Actas de las V Jornadas Nacionales y III Latinoamericanas de Investigadores/as en Formación en Educación. Buenos Aires, Argentina, 848-854.

Ministerio de Educación y Derechos Humanos de Río Negro (2017). *Diseño Curricular Escuela Secundaria.* Recuperado de: http://www.educacion.rionegro.gov.ar.

Porlán, R. (1989). *Teoría del conocimiento, Teoría de la enseñanza y Desarrollo Profesional*. Tesis de doctorado no publicada, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Sevilla.

Ritacco Real, M. (2012). La enseñanza de las matemáticas en contextos de riesgo de exclusión social. Buenas prácticas educativas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *79(1)*, 17-46.

Rockwell, E. (2009) La experiencia etnográfica. Historia y cultura en los procesos educativos. Buenos Aires: Paidós.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, *6(1),* 3-26.

Villalta Páucar, M. A., Martinic Valencia, S., y Guzmán Droguett, M. A. (2011). Elementos de la interacción didáctica en la sala de clase que contribuyen al aprendizaje en contexto social vulnerable. *Revista mexicana de investigación educativa*, *16(51),* 1137-1158.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

REFLEXIONES DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN TORNO A LA CREATIVIDAD

PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' REFLECTIONS ON CREATIVITY

Alicia Sánchez, Vicenç Font
Universidad de Barcelona (España)
asanchezb@ub.edu, vfont@ub.edu

Resumen
En el máster de formación de profesorado de educación secundaria y bachillerato, se presentan los criterios de idoneidad didáctica del enfoque ontosemiótico, como herramienta para pautar la reflexión del docente sobre su práctica y mejorar los procesos de instrucción. El objetivo de esta investigación es estudiar cómo las reflexiones de los futuros docentes sobre la mejora de las tareas que ellos diseñaron e implementaron previamente (basadas en los criterios de idoneidad didáctica) se relacionan con promover la creatividad matemática de sus alumnos. Las referencias a la creatividad son relativamente frecuentes en sus trabajos finales de máster. Además, distinguimos en los comentarios diferentes aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que relacionan con la creatividad.

Palabras clave: futuros profesores, criterios de idoneidad didáctica, creatividad, trabajo final de máster

Abstract
In the master's degree in teaching in secondary schools, the didactic suitability criteria of the ontosemiotic approach are presented as a tool to guide the teachers' reflection on their own practice and improve the learning sequences. The aim of this research is to study how the pre-service teachers' reflections on the improvement of the tasks that they had designed and implemented previously (based on the didactic suitability criteria) are related to the enhancement of their students' mathematical creativity. References to creativity are rather common in their master's degree final projects. Also, we recognize in the comment's different elements of the teaching and learning process that are related to creativity.

Key words: pre-service teachers, didactic suitability criteria, creativity, master's degree final project

Introducción

En los últimos años, el interés por la creatividad y su fomento ha aumentado, relacionando esta capacidad con otras como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la comunicación y el uso de nuevas tecnologías (Pásztor, Molnár y Csapó, 2015; Glăveanu, 2016). En el ámbito educativo, también es un concepto recurrente en los discursos pedagógicos innovadores y se considera como objetivo de los sistemas educativos modernos (Pásztor et al., 2015). Algunos autores (Silver, 1997; Sriraman, 2005; Chamberlin y Moon, 2005; Mann, 2006) destacan la necesidad de que los profesores de matemáticas implementen tareas para desarrollar la creatividad de sus alumnos y que se haga de manera inclusiva, no sólo con aquellos estudiantes más aventajados en la asignatura. Sin embargo, habitualmente las clases de matemáticas se basan en la repetición de algoritmos explicados previamente por el docente, dejando poco margen a procesos más creativos.

Lejos de alcanzar un consenso, las investigaciones en creatividad ofrecen una amplia variedad de definiciones y concepciones en torno a este término (Kampylis y Valtanen, 2010). En este trabajo tomamos como referencia la creatividad mini-c del modelo de Kaufman y Beghetto (2009). Estos autores distinguen cuatro tipos de creatividad: Big-C, little-c, Pro-c, y mini-c. Concretamente, la creatividad mini-c se entiende como la interpretación nueva y personal de una experiencia, una acción o un evento, basada en los conocimientos y vivencias previas. Por tanto, se relaciona con los procesos de aprendizaje y, siguiendo este modelo, en nuestro trabajo consideramos este tipo de creatividad.

Esta investigación se enmarca en un dispositivo formativo que se implementa en un máster de formación de profesorado de educación secundaria y bachillerato y en el que se enseña a los futuros profesores una herramienta que les permita analizar y valorar su propia práctica. Con este fin, se les enseña a utilizar los criterios de idoneidad didáctica (Breda y Lima, 2016; Breda, Font y Pino-Fan, 2018) del Enfoque Ontosemiótico y ellos los aplican en sus trabajos finales de máster. El objetivo de nuestra investigación es, a partir del análisis que realizan los futuros profesores sobre su propia práctica, describir qué tipo de reflexiones hacen sobre la creatividad y cómo promoverla con sus alumnos.

Marco teórico

En el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), se distinguen dos competencias principales del profesor de matemáticas, la competencia matemática y la competencia en análisis e intervención didáctica. A su vez, esta última se divide en cinco subcompetencias: competencia de análisis de significados globales, competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, competencia de análisis normativo, y competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. El EOS ofrece herramientas para trabajar cada una de estas competencias. En el caso de la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, en la cual se centra este trabajo, disponemos de los criterios de idoneidad didáctica.

Los criterios de idoneidad didáctica (Breda y Lima, 2016; Breda et al., 2018) contemplan seis facetas o dimensiones en los procesos de enseñanza y aprendizaje: epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica. La idoneidad epistémica se refiere a la calidad de las matemáticas enseñadas, en particular cómo el contenido implementado es representativo de la complejidad del objeto matemático. La idoneidad cognitiva contempla, por una parte, la adecuación del aprendizaje pretendido con el conocimiento previo de los alumnos; y por otra, la relación entre lo que han aprendido los alumnos tras la implementación y lo que se pretendía que aprendiesen. La idoneidad mediacional se identifica con la disponibilidad de recursos materiales y temporales para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje. La idoneidad interaccional corresponde a la efectividad de las interacciones (profesor-alumno o entre alumnos) para identificar y resolver conflictos de significado y para favorecer la autonomía de los alumnos. La idoneidad afectiva se refiere a la implicación de los alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Y la idoneidad ecológica corresponde a la adecuación del proceso al proyecto del centro educativo, el currículo y el entorno social. Estos criterios fueron desarrollados desde una perspectiva consensual, teniendo en cuenta las aportaciones de tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas, los principios del National Council of Teachers of Mathematics y los resultados de las investigaciones en Didáctica de Matemáticas (Breda et al., 2018). Cada criterio de idoneidad tiene asociado un conjunto de componentes e indicadores que los hacen operativos para aplicarlos a priori, durante el diseño de la secuencia didáctica a implementar, o a posteriori, en el análisis y valoración de la implementación.

Metodología

En el máster de formación de profesores de educación secundaria y bachillerato, en la segunda fase de las prácticas en centros escolares, los futuros profesores implementan una unidad didáctica que han diseñado, siguiendo la planificación indicada por su tutor del centro. Tras el período de prácticas, en la asignatura de innovación e investigación del máster se presentan los criterios de idoneidad didáctica del EOS. Los futuros profesores reciben una pauta con los criterios y sus correspondientes componentes e indicadores, además de explicarles cómo utilizarlos y los fundamentos teóricos. Posteriormente, se pide que en el trabajo final de máster (TFM) los futuros profesores incorporen un análisis de la idoneidad didáctica de la implementación realizada durante las prácticas, utilizando la pauta de los criterios de idoneidad. La estructura general de los TFM se compone de: presentación del contexto en el que se desarrolló el proceso de enseñanza y aprendizaje, análisis y valoración de la idoneidad didáctica de la implementación, búsqueda de bibliografía especializada y recursos didácticos, y propuesta de mejora de la unidad didáctica. De esta manera, a través del TFM los futuros profesores desarrollan la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

El objetivo de nuestra investigación es analizar las reflexiones de futuros profesores de matemáticas sobre la creatividad, a través de sus TFM. Las preguntas que nos planteamos son: 1) ¿Hay muchas referencias a la creatividad en los TFM? y 2) ¿qué tipo de comentarios al respecto realizan? En este trabajo presentamos los resultados del análisis de las promociones del máster entre los cursos 2009-2010 y 2014-2015. Actualmente, la investigación no está cerrada y seguimos incorporando los resultados de las siguientes promociones.

En cuanto a la metodología, se realizó un análisis fundamentalmente cualitativo, cuyas fases se detallan a continuación. Primero, se buscaron comentarios sobre creatividad en los TFM. Además de “creatividad”, se utilizaron otros términos relacionados como “imaginación” o “invención”. Sin embargo, en el análisis posterior solo consideramos los comentarios que contenían palabras de la misma familia: creatividad, creativo, creación, …

A continuación, se realizó un registro con datos identificativos de todos los TFM. Con aquellos que tenían comentarios sobre la creatividad, se elaboraron unas fichas que incluyeran los extractos de texto correspondientes. En la tabla 1 aparece un ejemplo de ficha.

Título	Porcentajes
Nombre del alumno	B.I.
Curso del máster	2013-2014
Curso en el que se aplica la unidad	2º de ESO
¿Qué contenido/proceso matemático se estudia?	Aritmética
¿Hay referencias a la creatividad en el trabajo?	Sí
En caso afirmativo, ¿cuántas hay?	1

Extracto	Promover el trabajo en grupo les ayudará a compartir conocimientos, aportar ideas para conseguir resolver dudas, mejorando así los resultados obtenidos, y durante el proceso que los alumnos desarrollen una mayor creatividad, y un compromiso de grupo para conseguir un fin en común. (Berrocal, 2014, p.22)
Comentario	Relaciona el desarrollo de la creatividad con el trabajo en grupo.

Tabla 1.Ejemplo de ficha de un TFM con un comentario sobre creatividad.

Después, se leyeron y resumieron estos TFM con la intención de contextualizar los comentarios y ver qué relevancia tenía la creatividad en el conjunto del trabajo. Los criterios de idoneidad didáctica estructuran el análisis de la implementación, pero también, al proponer mejoras de la unidad didáctica, se alude a aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que están comprendidos en los criterios de idoneidad. Por tanto, al analizar los comentarios sobre creatividad, para ver con qué aspectos se relaciona, tomamos también como referencia los criterios de idoneidad. Esto nos permitió distinguir varias categorías de comentarios en función de los elementos del proceso de enseñanza y aprendizaje con los que los futuros profesores relacionan la creatividad.

Resultados

Se analizaron 198 TFM del máster de formación del profesorado de educación secundaria y bachillerato entre los cursos 2009-2010 y 2014-2015. Encontramos referencias explícitas a la creatividad en 112 TFM.

Curso	TFM con referencias a la creatividad	TFM presentados
2009 – 2010	9	15
2010 – 2011	13	21
2011 – 2012	16	34
2012 – 2013	14	24
2013 – 2014	24	47
2014 – 2015	36	57
TOTAL	112	198

Tabla 2. Relación de los TFM con referencias a la creatividad respecto del total.

Más de la mitad de los TFM incluyen comentarios relativos a la creatividad, aunque no todos tratan el tema de la misma manera. Para poder determinar con qué aspectos de la unidad didáctica relacionan los futuros profesores la creatividad, se leyeron los TFM que contenían comentarios y se buscaron elementos comunes entre ellos. De esta manera, y utilizando los criterios de idoneidad didáctica, se indujeron las siguientes categorías de comentarios.

La creatividad se relaciona con actividades con alta riqueza de procesos (idoneidad epistémica). En algunos TFM se menciona el desarrollo de la creatividad de los alumnos a través de ciertas actividades que se hayan implementado o que se propongan en el rediseño de la unidad didáctica. En esta categoría se incluyen los comentarios en los que las actividades que se explican presentan una alta riqueza de procesos (argumentación, modelización, conjetura, …), uno de los componentes de la idoneidad epistémica. De alguna manera, al ejecutarse estos procesos se espera que los alumnos sean creativos en la resolución de una actividad o se fomente esta capacidad para cuando realicen otras actividades.

La creatividad se relaciona con el uso de recursos materiales o TIC (idoneidad mediacional). En esta categoría se incluyen los comentarios en los cuales el desarrollo de la creatividad se ve reforzado por el uso de material manipulativo o herramientas informáticas, uno de los componentes de la idoneidad mediacional. Los comentarios incluyen actividades que se implementaron o que se proponen en el rediseño de la unidad. En algunos casos no se refieren a una creatividad propiamente matemática, sino más bien a una creatividad plástica o artística para generar un cierto objeto que pueda ser utilizado en una actividad matemática.

La creatividad se relaciona con el desarrollo de otras habilidades útiles en la sociedad actual (idoneidad ecológica). En esta categoría se incluyen los comentarios en los que se hace referencia a una creatividad responsable. En estos casos la creatividad se relaciona con otras habilidades, como el pensamiento crítico, y con el desarrollo de la competencia social y ciudadana. Dado que son comentarios que hacen referencia al entorno del proceso de enseñanza y aprendizaje y al desarrollo de los alumnos para convivir en la sociedad actual, se han relacionado con la idoneidad ecológica.

La creatividad se relaciona con el trabajo en grupo (idoneidad interaccional). Los comentarios de esta categoría hacen referencia a actividades de trabajo cooperativo, en las cuales el desarrollo de la creatividad de los alumnos se vería fomentado por la interacción entre ellos. Se considera que al poner en común sus ideas, aumenta la posibilidad de generar nuevas. Estos comentarios se asocian a la idoneidad interaccional porque la interacción entre los alumnos es uno de sus componentes.

La creatividad forma parte de la evaluación (idoneidad cognitiva, interaccional y afectiva). En esta categoría se incluyen los comentarios en los cuales la creatividad aparece en los criterios de evaluación o en los objetivos que se pretenden conseguir con una actividad concreta. Generalmente, esto va unido a ciertos cambios que se introducen en la propuesta de mejora, como la apuesta por una evaluación competencial, la utilización de rúbricas y el uso compartido de la responsabilidad a la hora de evaluar (diseño de instrumentos de autoevaluación y coevaluación). La evaluación competencial se relaciona con componentes de varias idoneidades: fundamentalmente, con el aprendizaje, componente de la idoneidad cognitiva, y con la evaluación formativa y la autonomía, componentes de la idoneidad interaccional; y en menor medida, con las actitudes y emociones, componentes de la idoneidad afectiva.

Comentarios generales. En esta categoría se han incluido comentarios sobre la faceta creativa de la labor docente a la hora de generar actividades adaptadas a su grupo de alumnos e innovadoras. También se han incluido comentarios sobre la visión actual de la educación, la necesidad de que los alumnos se impliquen en el proceso de enseñanza y aprendizaje siguiendo los principios del constructivismo. En ocasiones, se hace referencia al currículum, y se compara con la manera tradicional de enseñar, basada en la memorización y en la que el aprendizaje significativo del alumno tendría una relevancia menor. Algunos comentarios en esta categoría se refieren especialmente a la enseñanza de las matemáticas. Se destaca el carácter creativo de la actividad matemática, en general, y la necesidad de trasladarlo al aula de secundaria.

En 47 TFM se ha identificado solo un comentario sobre creatividad. En los otros 65 TFM, se han identificado varios comentarios que, en ocasiones, pertenecen a diferentes categorías. Por tanto, encontramos trabajos en los que la creatividad no tiene un papel especialmente relevante en la propuesta del futuro profesor y, en cambio, otros trabajos en los que se asocia a diferentes aspectos de la unidad didáctica.

Categoría	Cantidad de TFM con comentarios en esta categoría
Riqueza de procesos	59
Recursos materiales o TIC	11
Habilidades útiles en la sociedad actual	4
Trabajo en grupo	5
Evaluación	16
Comentarios generales	58

Tabla 3. Relación de TFM que contienen al menos un comentario en las categorías inducidas.

Como se aprecia en la tabla 3, la mayoría de los comentarios asociados a algún criterio de idoneidad se han clasificado en la categoría de comentarios que relacionan la creatividad con la riqueza de procesos. Esto nos ha hecho plantearnos la posibilidad de subdividir esta categoría dependiendo de las características concretas de las actividades con las que se relaciona la creatividad.

En un análisis más pormenorizado, detectamos que en 14 TFM se relaciona el desarrollo de la creatividad con la resolución de problemas abiertos y de investigación. En algunos casos, se concreta más, identificando la creatividad con la fase de búsqueda de una estrategia para resolver el problema. En 12 TFM se hace referencia a la creatividad cuando se pide a los alumnos que formulen problemas, creen situaciones o contextos con los que trabajar matemáticamente o creen diferentes formas de representación. 10 TFM incluyen comentarios que identifican el desarrollo de la creatividad a partir del uso de contextos realistas y significativos para el alumno. Algunos de estos TFM hacen referencia explícita a la Educación Matemática Realista. En 4 TFM aparecen comentarios en los que se relaciona el desarrollo de la creatividad con el trabajo por proyectos. En 1 TFM se relaciona el desarrollo de la creatividad con la propuesta de actividades en forma de juego.

Por otra parte, en esta categoría de comentarios que relacionan la creatividad con la riqueza de procesos, también hay comentarios que hacen referencia explícita a esos procesos: en 6 TFM se hace referencia a la creación de argumentos; en 5 TFM la creatividad se relaciona con establecer conexiones intramatemáticas o con otras disciplinas; en 4 TFM se hace referencia a la creación de fórmulas o hipótesis; y en 3 TFM la creatividad se relaciona con la modelización.

Conclusiones

Encontramos referencias a la creatividad en más de la mitad de los TFM, aunque no siempre tiene una especial relevancia en el conjunto del trabajo. Respecto a la segunda pregunta que nos planteamos, distinguimos diferentes aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje que los futuros profesores relacionan con la creatividad. La clasificación de los comentarios en función de estos aspectos no es definitiva y se prevé ampliarla o modificarla con los resultados de futuros análisis. Por otra parte, se abre la posibilidad de subdividir las categorías que agrupan un mayor número de TFM, especialmente la categoría en la que los comentarios relacionan la creatividad con la riqueza de procesos.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación en formación de profesorado: EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias

Berrocal, I. (2014). *Percentatges, una forma diferent de veure les coses*. Trabajo de fin de máster no publicado, Universidad de Barcelona. España.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores en servicio. *REDIMAT, 5*(1), 74-103.

Chamberlin, S. A. y Moon, S. M. (2005). Model-eliciting activities as a tool to develop and identify creatively gifted mathematicians. *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 37-47.

Glăveanu, V. P. (2016). Introducing creativity and culture, the emerging field. En V. P. Glăvenau (Ed.), *The Palgrave Handbook of Creativity and Culture Research* (pp. 1-12), Londres: Palgrave Macmillan.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Kampylis, P. G. y Valtanen, J. (2010). Redefining creativity – Analyzing definitions, collocations, and consequences. *Journal of Creative Behavior, 44*(3), 191-214.

Kaufman, J. C. y Beghetto, R. A. (2009). Beyond big and little: the four C model of creativity. *Review of General Psychology, 13*(1), 1-12.

Mann, E. L. (2006). Creativity: the essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Pásztor, A., Molnár, G. y Csapó, B. (2015). Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement. *Thinking Skills and Creativity, 18*, 32-42.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM, 29*(3), 75-80.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *The Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20-36.

ESTUDO HISTÓRICO DO PARADOXO DE RUSSELL: A FECUNDIDADE DE UMA MATEMÁTICA FALÍVEL

HISTORICAL STUDY OF RUSSELL'S PARADOX: THE FERTILITY OF A FALLIBLE MATHEMATICS

Aline Germano Fonseca Coury, Denise Silva Vilela
Universidade Federal De São Carlos (ufscar) (Brasil)
alinee_fonseca@hotmail.com, denisevilela@ufscar.br

Resumen
Uma visão de matemática infalível, certa e perfeita é comumente aceita e disseminada em escolas e universidades, o que não condiz com o seu desenvolvimento histórico. Neste trabalho, apresentaremos discussões provenientes de resultados de pesquisa acerca do paradoxo de Russell, um importante registro histórico que mostra que erros e paradoxos foram cruciais para o desenvolvimento da matemática, da lógica e da filosofia. Para o campo da educação, as reflexões que serão apresentadas são fundamentais na formação de professores de matemática dado a relevância do paradoxo de Russell; de Frege, fundador da lógica matemática; da *crise dos fundamentos* na história e filosofia da matemática; e do desenvolvimento de outras lógicas.

Palabras clave: paradoxos; fundamentos matemáticos, lógica matemática

Abstract
Mathematics is frequently seen as infallible, exact and perfect. This view is commonly accepted and disseminated in schools and universities, which is not coherent with its historical development. In this paper, we shall present discussions about Russell's paradox, which is a historical element that shows how errors and paradoxes are fundamental for scientific development. The discussions presented here are significant for the mathematics teacher training due to the relevance of Russell's paradox and its importance for the development of mathematics and logic; Frege's work, since he is considered the mathematical logic founder; the foundation crisis in the history and philosophy of mathematics; and the development of non-classical logics.

Key words: paradoxes; mathematics foundation; mathematical logic

Introdução

Neste artigo, temos por objetivo discutir um dos mais significativos episódios da história da matemática, que corrobora a visão de uma ciência dinâmica, que possui limitações, restrições de validade e está em constante transformação. Trata-se do paradoxo de Russell, ou seja, o paradoxo construído por Bertrand Russell (1872-1970) a partir das obras de Georg Cantor (1845-1918). Ao analisar os trabalhos de outro matemático, Gottlob Frege (1848-1925), Russell percebeu que o mesmo paradoxo era gerado dentro do sistema axiomático construído por Frege para fundamentar a matemática. A discussão aqui apresentada é parte dos resultados de uma pesquisa histórico-bibliográfica que teve como objetivo a reconstrução histórica do paradoxo nas obras de Frege, englobando também as tentativas de solução do mesmo (Coury, 2015). Foram empregadas como fontes primárias as obras de Frege (*Ideografia*, 1879; *Os Fundamentos da Aritmética*, 1884; *As Leis Básicas da Aritmética*, volumes 1 e 2, 1893 e 1903) e, como fontes secundárias, comentadores de sua obra.

A relevância da temática na história da matemática e da lógica justifica a presente abordagem, mediante a qual serão destacados o paradoxo e os resultados que resultam numa visão de matemática como uma construção múltipla e falível. O artigo se justifica também porque, apesar de haver, na história da matemática, incontáveis registros que se contrapõem a uma visão de matemática exata, perfeita e sem erros, como é o caso, por exemplo, dos teoremas da incompletude de Gödel e dos paradoxos matemáticos (Batistela, 2017; Coury, 2016), estes episódios não são muito discutidos no meio acadêmico (Batistela, 2017; Guillen, 1989), o que pode corroborar a perpetuação de uma visão absolutista da verdade matemática nos cursos de licenciatura e, consequentemente, nas escolas.

Em 1900, diante da identificação de paradoxos nas teorias matemáticas, David Hilbert (1862-1943) proclamou a sua convicção na solubilidade de qualquer problema matemático, ou seja, na superação desses paradoxos.

> Esta convicção da solubilidade de um problema matemático nos dá um forte estímulo durante o trabalho, nós ouvimos um grito contínuo que vem de dentro: (...) aí está o problema, procura a solução. Você pode encontrá-la através do pensamento puro, pois na matemática não existe "ignoremos"! (Hilbert, 2003, p. 11)

Essa convicção, que esteve presente também antes de Hilbert, enraizou-se na história da matemática de modo que, ainda atualmente, a matemática é perpetuada como símbolo de verdade, apesar dos paradoxos (Guillen, 1989). Prevalece nos discursos dos professores um ideal de matemática "única, infalível" e que "está isenta das transformações constantes, por vezes, caóticas, as quais tudo e todos estamos sujeitos" (Garnica, 2008, p. 508).

Assim, o estudo dos paradoxos na formação do professor é relevante em termos da sua própria formação e por nos remeter a questões filosóficas. Para ressaltar aspectos da obra de Frege e resultados que possuem desdobramentos importantes na filosofia da matemática, na matemática, na lógica e na filosofia geral, organizamos o texto do seguinte modo. Na primeira seção, apresentaremos um breve panorama histórico acerca da lógica clássica e da matemática, abordando discussões sobre o conceito de verdade e certeza. Apresentaremos também os motivos pelos quais o paradoxo de Russell abalou as teorias matemáticas resultando na crise dos fundamentos no fim do século XIX e começo do século XX. Na seção seguinte, discutiremos o paradoxo de Russell na obra de Frege a partir dos resultados da reconstrução histórica realizada em nossa pesquisa (Coury, 2015), apresentando uma de suas muitas versões. Discutiremos também as consequências dos paradoxos na história da lógica e da matemática, bem como a reação da academia diante dessa contradição. Por fim, na última seção, abordaremos a importância dessas discussões na formação do professor de matemática, problematizando a crença em uma matemática certa, verdadeira e infalível.

A reconstrução histórica de conceitos e problemas matemáticos a partir de textos originais é relevante para o professor de matemática na medida em que proporciona a ele conhecer seu objeto de trabalho e a fundamentação da ciência que este leciona. Dessa forma, na educação matemática, um estudo histórico utilizando fontes primárias é também uma forma de aprofundar os estudos em matemática e lógica.

Da verdade matemática na geometria de Euclides à Crise dos Fundamentos

Apesar de ser “um estado de espírito natural”, a dúvida é desconfortável, incômoda (Garnica, 2008, p. 499). Em contrapartida, a certeza e a verdade, tão almejadas pelo ser humano ao longo de sua história, se comportam como elementos pacificadores. “É como se a certeza fosse um tesouro escondido e desejássemos possuir um mapa que nos levasse até ele” (Guillen, 1989, p.19). Os Elementos, livro apresentado por Euclides por volta de 300 a.C., expunha um modelo matemático para a geometria que parecia alcançar a tão buscada certeza, pelo menos para este ramo da matemática. Euclides utilizou o método dedutivo da lógica aristotélica clássica para construir seu sistema axiomático, partindo de algumas poucas hipóteses e deduzindo as verdades geométricas a partir destas.

Para aquela época, a lógica sistematizada por Aristóteles era uma fonte segura de argumentação, pois distinguia o que era um argumento válido de um falacioso. Aristóteles reelaborou e refinou o método sofista de argumentação dedutiva (Santos, 1993), resultando nos escritos reunidos na obra *Organon*. O método dedutivo proposto por ele seria o caminho para alcançar o conhecimento seguro.

A lógica aristotélica parte de três princípios, que serão expressos a seguir também em linguagem matemática:

1. Princípio da identidade: qualquer coisa é idêntica a si própria, $\forall x(x = x)$;
2. Princípio da não contradição: nada pode simultaneamente ser e não ser, $\neg(A \wedge \neg A)$;
3. Princípio do terceiro excluído: qualquer coisa é verdadeira ou falsa, não havendo uma terceira opção, $(A \vee \neg A)$.

Os três princípios lógicos eram considerados verdades evidentes, intuitivas, ou do senso comum. O princípio da não contradição ocupa um lugar de destaque nas discussões aqui apresentadas, já que, quando este não é satisfeito, ou seja, uma afirmação e sua negação ocorrem, ou são ambas demonstráveis dentro de um mesmo sistema, gera-se um paradoxo.

Na lógica aristotélica, as proposições simples (aquelas que não tem outra proposição entre seus constituintes) são caracterizadas pela tripla: sujeito, predicado e afirmação (ou negação) de algo. No caso de “Todas as plantas com folhas largas são efêmeras”, temos “Todas as plantas com folhas largas” como sujeito e “são efêmeras” como predicado. A partir das proposições, podem ser realizadas cadeias de raciocínio dedutivo, gerando os silogismos aristotélicos. Os silogismos são construídos a partir de três proposições. As duas proposições iniciais, denominadas premissas, possuem uma ligação através de um termo denominado termo médio. Esse termo é o sujeito de uma premissa e também o predicado da outra. Já a terceira proposição, proposição resultante ou conclusão, é aquela deduzida das premissas anteriores.

Se todas as plantas com folhas largas são efêmeras.
E todas as videiras são plantas com folhas largas.
Então todas as videiras são efêmeras.

No exemplo anterior, o termo de ligação entre as premissas é “plantas com folhas largas” que possibilita a dedução da conclusão. Ressaltamos que a validade de um argumento na lógica aristotélica não depende do conteúdo das proposições, ou seja, a lógica aristotélica trata da forma e não do conteúdo dos silogismos e proposições que a constitui. Dessa forma, a verdade ou falsidade das proposições não interferem na validade do argumento. Partindo, portanto, de premissas verdadeiras e utilizando o método dedutivo aristotélico corretamente, a verdade da conclusão decorre. O silogismo acima pode ser representado, então, do seguinte modo (Gomes e D’Ottaviano, 2011):

Enunciado usual
Se todo A é B.

E se todo C é A.
Então C é B.

Enunciado como feito por Aristóteles
(Se) B pertence a todo A.
(E) A pertence a todo C.
(Então) B pertence a todo C.

Dessa forma, o raciocínio é válido, quaisquer que sejam A, B e C, o que não garante a verdade das premissas e, consequentemente, da conclusão. A certeza lógica surge então a partir de uma conclusão que decorre dedutivamente de duas ou mais premissas. Os silogismos aristotélicos, instrumento da razão, pretendiam ser, e assim foram reconhecidos, como a forma de argumentação perfeita. No próprio *Organon*, Aristóteles afirma que "se a veracidade das definições e premissas está garantida, e se elas forem, quanto à quantidade, universais, sua conclusão, conforme as regras dos silogismos, garante uma conclusão *verdadeira*, universal e *eterna*" (Vilela e Deus, 2014, p. 69).

Euclides utilizou em seu sistema axiomático argumentos na forma "se...então" que foram deduzidos de acordo com as regras da lógica. Ao utilizar a lógica de Aristóteles em seu sistema, Euclides suscitou a crença na geometria como uma teoria que descrevia a *verdade* da terra ("medida da terra") e que era fonte da própria certeza matemática: "o *Organon* oferecia o caminho para a certeza lógica, enquanto os *Elementos* eram o tesouro da própria certeza" (Guillen, 1989, p.20). Dessa forma, nos 2000 anos seguintes, a obra *Elementos* de Euclides se tornou sinônimo de certeza, tendo "grande repercussão, ampla apropriação e forte influência no pensamento ocidental, considerada, em muitas ocasiões até o século XIX, um modelo do que o pensamento científico deveria ser". (Vilela e Deus, 2014, p. 64).

O sistema axiomático proposto por Euclides para a geometria possui dez hipóteses iniciais que são uma mistura de senso comum e afirmações admissíveis sobre pontos, linhas e planos (Guillen, 1989). Apesar da grande dose de intuição, ao mesmo tempo em que os axiomas eram admitidos como verdades, era importante garantir que cada um destes não fosse derivável dos outros. O quinto axioma de Euclides, o axioma das paralelas, chamou a atenção por não parecer ser trivial como os outros. De fato, as investigações acerca da derivação deste axioma a partir dos outros resultaram, no século XIX, na elaboração das geometrias não euclidianas, que, em geral, partiam de discussões referentes à não aceitação do quinto axioma. Essas novas geometrias evidenciaram, de certa forma, o fim do reinado da geometria euclidiana. Segundo da Costa, citado por D'Ottaviano e Feitosa (2003), o surgimento das geometrias não euclidianas pode ser percebido como um dos maiores marcos na história da cultura. Segundo Davis e Hersh (1989, p.372), "a perda da certeza na geometria foi filosoficamente intolerável, pois implicou na perda de toda a certeza no conhecimento humano". Isso porque, desde Platão, a geometria tinha servido "como o exemplo supremo da possibilidade dessa certeza" (Davis e Hersh, 1989, p.372).

Apesar de a crença na geometria estar abalada, a confiança dos matemáticos no método dedutivo se manteve e teve como consequência, no final do século XIX, buscar para a aritmética modelos axiomáticos e dedutivos semelhantes ao de Euclides para a aritmética. O ideal era encontrar uma fundamentação para a matemática como um todo, de modo que se a consistência da aritmética fosse garantida, então a consistência da matemática poderia ser reduzida a esta. Organizar a aritmética em um formato lógico foi objetivo de estudo de muitos matemáticos, dentre eles, o alemão Gottlob Frege. Frege trabalhou por mais de 20 anos na construção de uma fundamentação lógica para a aritmética e, em 1902, quando seu último livro estava para ser impresso, Bertrand Russell (1872-1970) comunicou-o da existência de um paradoxo em suas teorias. O *paradoxo de Russell*, como esse resultado contraditório ficou conhecido, foi devastador para a comunidade matemática, pois atacava o solo firme da matemática e da lógica aristotélica clássica, como discutiremos a seguir.

O paradoxo de Russell se destacou em uma época em que a matemática estava cercada por paradoxos (Silva, 2007). O papel central deste paradoxo se deve ao fato de que este atacava "em um nível elementar duas das mais exatas das ciências, a matemática e a lógica", o que instaurou a chamada crise dos fundamentos (Fraenkel, Bar-Hillel e Levy, 1984, p. 2). David Hilbert, já citado neste texto, foi um matemático de grande influência neste período que usou desta influência para incitar seus colegas a buscarem uma solução para a situação incômoda gerada pelos paradoxos: "o estado atual das coisas, em que nos chocamos com paradoxos, é intolerável (...) Se o pensamento matemático é defeituoso, onde encontraremos verdade e certeza"? (Hilbert citado em Davis e Hersh, 1989, p. 378).

A situação gerada pelos paradoxos, em particular pelo paradoxo de Russell, culminou em uma grande mobilização dos matemáticos em torno da busca por uma solução para os paradoxos. A solução dos paradoxos retomaria a garantia de certeza matemática. Alguns matemáticos permaneceram adeptos da lógica clássica, procurando uma maneira de reformular as teorias, sobretudo a teoria dos conjuntos, com o objetivo de evitar os paradoxos e, dessa forma, salvar o projeto de Frege. Outros se voltaram para princípios diferentes, como o formalismo e o intuicionismo (Davis e Hersh, 1989). Por fim, constatou-se que nenhuma dessas três escolas de pensamento poderiam reestabelecer os fundamentos (Davis e Hersh, 1989).

A conclusão inesperada surgiu em 1931 quando o lógico Kurt Gödel abalou a comunidade matemática com seus dois teoremas da incompletude, os quais exibiam provas de que não seria possível construir um sistema lógico dedutivo, utilizando lógica clássica, que fosse capaz de provar todas as afirmações aritméticas dentro do sistema. Ou seja, atestava a impossibilidade de criar um sistema axiomático completo e consistente para aritmética utilizando a lógica clássica. A consequência alarmante é que sempre existirão proposições indecidíveis, afirmações matemáticas as quais não é possível provar se são verdadeiras, nem se são falsas; cada hipótese matemática se tornou uma verdade possivelmente indemonstrável (Guillen, 1989, p. 20). A partir disso, "a maior parte dos matemáticos aprenderam a aceitar a dúvida como uma componente familiar do seu trabalho, conquanto alguns se revelem ainda muito relutantes e acalentem a esperança de recuperar a certeza que em tempos se acreditou ser apanágio da matemática" (Guillen, 1989, p.20). Apesar disso, este resultado e suas consequências não são comumente discutidos nas universidades (Guillen, 1989), mesmo em cursos de licenciatura em matemática (Batistela, 2017), o que perpetua a crença na matemática como fonte de verdade e certeza, o que será discutido mais profundamente adiante.

Segundo Davis e Hersh (1989, p.366), essa crise foi resultado da discrepância entre o "ideal tradicional da matemática", ou seja, o ideal sustentado pelo "mito de Euclides" (matemática como fonte de certeza) e a "realidade da matemática", sistema com paradoxos. De certo modo, a crise se configurou como um resultado de tensões entre a filosofia da matemática e a própria matemática.

A partir do panorama histórico apresentado até aqui, na próxima seção daremos foco à obra de Frege, ressaltando a diferença de sua lógica com relação à lógica aristotélica, a história do sistema lógico construído por ele e as consequências do paradoxo de Russell gerado ali.

■ O caminho de Frege na busca pela verdade e a identificação do paradoxo

A importância do paradoxo de Russell na história da matemática é inquestionável, este teve um papel central na instauração da crise dos fundamentos e as tentativas de superação do mesmo podem ser vistas como precursoras de respeitadas teorias da lógica e da matemática, como será discutido nesta seção. Desta forma, apresentaremos alguns aspectos da teoria de Frege que permitem compreender a maneira como o paradoxo é gerado em seu sistema.

Frege dedicou mais de vinte anos à construção de um sistema lógico axiomático para fundamentar a aritmética. Ele acreditava que a aritmética era um ramo da lógica e que seria possível criar um sistema capaz de descrever e demonstrar todas as verdades aritméticas e, consequentemente, de toda a matemática. Seus trabalhos culminaram na publicação de três obras que esboçam bem o caminho percorrido por ele na tentativa de fundamentar a aritmética, são estas: *Begriffschrift* ou *Ideografia* (1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* ou *Fundamentos da Aritmética* (1884) e Grundgesetze der Arithmetik ou *Leis Básicas da Aritmética* volume 1 (1893) e volume 2 (1902).

A primeira obra de Frege, *Ideografia,* apresenta uma linguagem artificial construída por ele com o intuito de expressar as verdades aritméticas. Apesar de utilizar os princípios da lógica aristotélica e o método dedutivo expresso nos silogismos, Frege acreditava que a linguagem natural (linguagem escrita/falada) não era capaz de abranger as particularidades das proposições matemáticas. Segundo Frege, a linguagem aristotélica é limitada para representar proposições de generalidade múltipla (Sluga, 1999), como "todo filho é a criança de algum pai"; proposições de generalidade múltipla são comuns em matemática. Além disso, ele acreditava ser importante para a sua linguagem não fazer distinções entre proposições que tenham o mesmo conteúdo conceitual, como é o caso das proposições "Os gregos derrotaram os persas na Platea" e "Os persas foram derrotados pelos gregos na Platea".

Dessa forma, ele abandona a caracterização sujeito e predicado, como feita por Aristóteles e adota função e argumento. A mudança pode ser melhor entendida a partir do exemplo dado por Frege na *Ideografia*:

"O hidrogênio é mais leve que o dióxido de carbono".

Pela lógica aristotélica teríamos como sujeito "o hidrogênio" e como predicado "é mais leve que o dióxido de carbono". Utilizando função e argumento, teríamos como argumento "o hidrogênio" e como função "é mais leve do que o dióxido de carbono". O que diferencia os dois modos de delimitar uma proposição é que, para Frege, esta última não é a única possibilidade, ou seja, podemos tomar como argumentos "o hidrogênio" e "o dióxido de carbono" e como função "é mais leve que", ou ainda "dióxido de carbono" como argumento e "mais pesado que o hidrogênio" como a função.

Frege utiliza a simbologia $\varphi(a)$ para representar suas proposições, de modo que $\varphi(\quad)$ é a função, algo que necessita de complemento, enquanto a é o argumento, completo em si. Uma função de dois argumentos seria representada por $\varphi(a,b)$. $\varphi(a)$ também pode ser vista como uma função de argumento φ, que pode ser substituído por outras funções. Esta última afirmação foi questionada por Russell, como veremos a seguir.

A lógica construída por Frege apresenta portanto uma linguagem e simbologia emprestada da própria matemática e, por isso, visualmente distintas da lógica aristotélica. Suas proposições quando verdadeiras são denominadas "juízo" que é representado por ele como $\vdash A$, onde A é uma afirmação. Na *Ideografia*, a proposição condicional, atualmente representada por $B \rightarrow A$, por exemplo, era representada por:

Utilizando esta linguagem e os mesmos princípios lógicos da lógica aristotélica, o sistema lógico de Frege é capaz de representar proposições matemáticas e desenvolver demonstrações a partir do método lógico-dedutivo. A importância da *Ideografia* para a lógica e a matemática é inegável, pois esta caracteriza a instituição de uma lógica matemática (Alcoforado, 2009; Dummett, 1991; Sluga, 1999).

Após a apresentação de seu sistema lógico exposto na *Ideografia*, no seu segundo livro, os *Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número*, Frege discute, sem utilizar a linguagem apresentada na *Ideografia*, uma tentativa de construir um sistema axiomático para a aritmética utilizando a lógica. O objetivo de Frege nos *Fundamentos* é investigar a natureza das verdades aritméticas e a definibilidade do conceito de número através de estruturas lógicas. Para ele o número é um objeto lógico que pode ser adequadamente construído através de noções puramente lógicas, negando qualquer caráter subjetivo ou psicológico na construção desse conceito. É também nesta obra que Frege enuncia, pela primeira vez, a redutibilidade da aritmética à lógica, ou seja, para ele a aritmética nada mais é do que um ramo da lógica.

Nos *Fundamentos*, Frege apresentou pela primeira vez a noção de extensão de um conceito, um paralelo para a noção de classes utilizada atualmente (Silva, 2007), e que foi fundamental na construção de seu sistema axiomático para a aritmética e também possibilitou a geração do paradoxo.

As *Leis Básicas da Aritmética,* cujo primeiro volume foi publicado em 1893, e o segundo em 1902, representavam o desfecho final para o programa de Frege. Nesta obra, encontram-se expressos os ideais de redutibilidade da aritmética à lógica, expostos nos *Fundamentos,* utilizando uma versão mais refinada da linguagem artificial proposta por Frege na *Ideografia*. As *Leis Básicas* possuem forte influência da lógica clássica, sendo proposta como modelo de certeza, pois usou princípios lógicos dedutivos (Guillen, 1989). Em particular, o volume 1 das *Leis Básicas* é importante, como já mencionado acima, pois é a obra na qual o paradoxo é gerado.

Quando o segundo volume das *Leis Básicas* já estava na gráfica, em 1902, Frege recebeu a famosa carta de Russell, na qual ele apontou que, ao estudar a *Ideografia,* encontrou uma contradição: "tenho encontrado uma dificuldade em apenas um ponto. *Sua afirmação (p.17) de que uma função pode também constituir o elemento indeterminado. Isso é o que eu costumava acreditar, mas agora este aspecto me parece ser duvidoso"* (Russell, 1980, p.130). Nessa mesma carta, Russell enunciou a versão predicativa da contradição. "*Seja* w *o predicado de ser um predicado que não pode ser predicado de si mesmo. Pode* w *predicar ele mesmo? Para qualquer resposta segue a contradição*" (Russell, 1980, p. 130). Frege percebeu que esta contradição não poderia ser gerada em seu sistema na *Ideografia*, onde as funções (Frege não utilizava o termo "predicado" em suas teorias) possuem níveis e uma função jamais poderia ser função de si mesma. Entretanto, Russell mencionou mais adiante a versão das classes, a qual Frege reconhece como derivável dentro de seu sistema nas *Leis Básicas*. O paradoxo de Russell pode ser enunciado em linguagem atual como:

Seja C a classe das classes x que não pertencem si mesmas: $C = \{x/x \notin x\}$.

Pergunta-se: C pertence a si mesma?
Se sim, então por pertencer a si mesma, deve possuir as qualidades que esta enuncia e, portanto, não pertence a si mesma. Por outro lado, se C não pertence a si mesma, então, esta possui a qualidade que enuncia e, desse modo, deve pertencer a si mesma. Dessa forma, C pertence a si mesma se, e somente se, não pertence a si mesma, o que infringe o princípio da não contradição, gerando o paradoxo.

$$C \in C \leftrightarrow C \notin C.$$

O paradoxo de Russell foi devastador para os matemáticos, principalmente porque este mostrou que "seguindo as regras da própria lógica, podemos ser levados a resultados contraditórios" (Guillen, 1989, p. 23).

Frege e Russell trocaram correspondências durante os anos de 1902 e 1912 discutindo maneiras de contornar o paradoxo. Apesar de não conseguirem restaurar o sistema de Frege, suas discussões abriram caminho para teorias desenvolvidas posteriormente e que foram bem aceitas pela comunidade matemática para lidar de alguma forma com a situação gerada (Coury, 2015). Este é o caso das formalizações da teoria de conjuntos, cujas mais utilizadas são a Zermelo-Fraenkel (ZF) e a Neumann-Bernays-Gödel (GBN), e a teoria dos tipos de Russell e Alfred Whitehead (1861-1947) (Coury, 2016). Essas teorias têm como base a lógica clássica aristotélica e permitem eliminar os paradoxos parcialmente ou totalmente, mas não garantem uma fundamentação para a matemática.

As lógicas não clássicas também ganharam força após a crise dos fundamentos. Estas se apoiam na manutenção da autorreferência, resultando em alterações fundamentais na lógica clássica aristotélica. Apesar das inúmeras aplicações tecnológicas destas e da riqueza das teorias das lógicas não clássicas, sua criação também não garantiu a fundamentação da matemática clássica, o que nos direciona para uma das possibilidades de solução previstas por Frege para este problema. Ocorreu que, ao receber a carta de Russel, Frege afirma que talvez a construção de uma fundamentação para a aritmética utilizando a lógica não fosse possível, o que posteriormente foi demonstrado pelo lógico Kurt Gödel (1906-1978), em 1931, em seus teoremas da incompletude. Gödel provou através de seus dois teoremas a impossibilidade de criar um sistema lógico completo e consistente capaz de englobar a matemática como um todo.

Dessa forma, os paradoxos, em particular o paradoxo de Russell, as obras de Frege e os teoremas da incompletude de Gödel representam um momento de construção de teorias matemáticas. Estes mostram, por um lado a fertilidade que erros e paradoxos podem trazer para o desenvolvimento das teorias matemáticas, culminando em novas teorias a partir das tentativas de superação dos mesmos e; por outro, que a matemática é uma área de conhecimento em construção e que, segundo Gödel, está longe de ser perfeita e de ser fonte da verdade. Estes episódios contrapõem uma visão historicamente perpetuada de que a matemática é a fonte do conhecimento certo, exato, imutável e verdadeiro.

Concluiremos a presente discussão acentuando, a seguir, a relevância dos paradoxos e dos teoremas da incompletude na formação do professor de matemática.

Conclusões: as consequências de uma matemática falível

As discussões apresentadas anteriormente mostram que a matemática é um campo de conhecimento em construção, em constante desenvolvimento, passível de erros e paradoxos. Além disso, essas discussões mostram também a importância do erro no processo de desenvolvimento científico levando, muitas vezes, a caminhos inexplorados e impensados anteriormente. A história do paradoxo de Russell, de suas consequências e dos teoremas da incompletude de Gödel, são bons exemplos do processo de desenvolvimento matemático.

Apesar disso, a crença na verdade e certeza matemática tem estado presente tanto nas universidades, quanto nas escolas. Nas universidades e cursos de licenciatura em matemática, pouco é discutido acerca dos paradoxos, da crise dos fundamentos e dos teoremas de Gödel (Batistela, 2017; Guillen, 1989). Nas escolas, essas crenças se perpetuam através dos professores, e dos professores dos professores (Batistela, 2017) que, geralmente, concebem a matemática como infalível e verdadeira (Garnica, 2008). Esta crença também se manifesta nas orientações curriculares, como o PNLD (Vilela e Deus, 2014).

Como discutido por Vilela e Deus (2014), os valores de verdade, certeza e irrefutabilidade da matemática entram na escola, dentre outras maneiras, através da demonstração, cuja ausência em um livro didático é um dos critérios eliminatórios na análise dos livros didáticos no PNLD. Dessa forma, o ciclo se mantém: a demonstração, enquanto forma de comprovação de resultados, e a busca pela verdade matemática, ambas valorizadas na academia, chegam nas escolas de ensino fundamental e médio através das orientações curriculares como o PNLD, o que dissemina "valores de rigor, precisão e verdade", perpetuando a "crença no conhecimento verdadeiro" (Vilela e Deus, 2014, p. 73).

De fato, os teoremas da incompletude de Gödel, maior símbolo da incerteza que assombra a matemática, tem sido aparentemente ignorados pela maioria dos matemáticos, tanto na sua prática diária, quanto na divulgação e discussão desses resultados. A discussão se volta para o motivo pelo qual a aceitação do teorema não ocorreu, já que ninguém discutirá ou divulgará resultados matemáticos que confrontem suas próprias crenças.

> Contudo, as disposições mais recentes orientam-se para uma não completa acomodação às incertezas de Gödel. Talvez porque lhes custe conviver com incertezas, os matemáticos preferem viver ainda o

> seu dia a dia como se os acontecimentos fundamentais deste século nunca tivessem ocorrido, ou talvez porque, como sugere Kline, lhes custe imenso acreditar que respeitem à sua atividade as questões levantadas pelas incertezas de Gödel, como se elas fossem uma espécie de desastre que só acontece aos outros. (Guillen, 1987, p.28).

Diante da ausência de discussões sobre o tema, Batistela (2017), propõe a inserção dos teoremas da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura de matemática, indicando inclusive em quais disciplinas essas discussões poderiam ser inseridas. Para a autora, os licenciandos geralmente participam de uma atmosfera que apresenta a matemática como soberana, induzindo a uma visão incompleta da mesma. Dessa forma, as discussões acerca dos teoremas de Gödel e dos paradoxos podem se caracterizar como reguladores das expectativas acerca da matemática.

> É imprescindível que este tema seja trabalhado na Educação Matemática com professores que se ocuparão oficiosamente de ensinar matemática em escolas em qualquer que seja o nível, pois, este teorema apresenta a dimensão de alcance do que a matemática pode produzir, é um teorema que se relaciona aos fundamentos desta ciência. (Batistela, 2017, p. 129).

Neste artigo, optou-se por apresentar a história do paradoxo de Russell, dos teoremas da incompletude de Gödel, tanto em seus aspectos lógicos como filosóficos. Em particular, as discussões acerca dos teoremas de Gödel são relevantes sobretudo para a filosofia da matemática já que traz a possibilidade de problematizar a compreensão atual de rigor matemático (Batistela, 2017). A análise de currículos de cursos de licenciatura no Brasil (Gatti e Nunes, 2009) apontam a quase total ausência de discussões filosóficas. Isto acentua a relevância da presente abordagem.

O professor de matemática pode, por esta discussão do paradoxo de Russell e dos teoremas de Gödel, conhecer mais profundamente seu objeto de trabalho e aspectos da sua história, o que pode favorecer novas formas de pensar e ensinar matemática (Baroni e Nobre, 1999).

Referências

Alcoforado, P. (2009). *Lógica e Filosofia da Linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo.

Baroni, R., Teixeira, M. e Nobre, S. (2011) História da Matemática em Contextos da Educação Matemática: contribuições do GPHM. *Boletim de Educação Matemática* 25(41), 153-171.

Batistela, R. F. (2017). *O teorema da incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em matemática*. Tese de Doutorado não publicada. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, Brasil.

Coury, A. G. F. (2015). *Frege e as leis da aritmética: do ideal de fundamentação ao paradoxo*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Coury, A. G. F. (2016). O impacto dos paradoxos na história e desenvolvimento das teorias da matemática. Em Vilela, D. S. e Monteiro, A. (org.) *Paradoxos do infinito e os limites da linguagem* (pp.129-160). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Davis, P.J. e Hersh, R. (1989). *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves.

D'Ottavianno, I. M. L e Feitosa, H. A. (2003). *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas.* Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência/Unicamp. Recuperado dia 05 de agosto de 2018 de ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/arquivos/educacional/ArtGT.pdf

Dummett, M. (1991). *Frege: philosophy of mathematics*. London: Duckworth.

Fraenkel, A., Bar-Hillel, Y. e Levy, A. (1984). *Foundations of set theory.* Netherland: Elsevier Science Publishing.

Frege, G. (1970). *Begriffsschrift: a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought.* Cambridge: Harvard.

Frege, G. (1983). *Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número.* São Paulo: Abril Cultural.

Frege, G. (1964). *The Basic Laws of Arithmetic: exposition of the system*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press.

Garnica, A. V. F. (2008) Um ensaio sobre as concepções de professores de matemática: possibilidades metodológicas e um exercício de pesquisa. *Educação e Pesquisa* 34(3), 495 – 510.

Gatti, B. A. e Nunes, M. R. (2009) *Formação de professores para o Ensino Fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em Pedagogia, Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Biológicas.* São Paulo: FCC.

Gomes, E.L. e D'Ottaviano, I. M. L. *Um panorama da teoria aristotélica do silogismo categórico*. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência/Unicamp. Recuperado dia 05 de agosto de 2018 de ftp://ftp.cle.unicamp.br/pub/Thematic-LogCons-FAPESP/Report-01-2011/ [DG12].pdf

Grattan-Guinness, I. (1978). How Bertrand Russell Discovered his Paradox. *Historia Mathematica* 5(2), 127-137.

Guillen, M. (1983). *Pontes para o Infinito: o lado humano das matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Hilbert, D. (2003). Problemas Matemáticos: conferência proferia no 2° congresso internacional de matemáticos realizado em Paris em 1900. Nobre, S. (tradução). *Revista Brasileira de História da Matemática* 3(5), 5-12.

Nagel, E. e Newman, J. P. (1958). *Gödel's proof*. New York: New York University Press.

Russell, B. (1980). *Gottlob Frege: Philosophical and Mathematical Correspondence*. Chicago: University of Chicago Press.

Santos, L.H.L. (1993). A essência da proposição e a essência do mundo. Em Wittgenstein, L. *Tractatus Logico-Philosophicus* (pp. 11-112). São Paulo: Editora Universidade de São Paulo.

Silva, J. J. (2007). *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora Unesp.

Sluga, H. D. (1999). *The Arguments of the Philosophers: Gottlob Frege*. London: Routledge.

Vilela, D. (1996). *Análise das Críticas de Frege à Cantor: a noção de número e o emprego da abstração nas definições*. Dissertação de Mestrado não publicada. Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

Vilela, D. S e Deus, K. A. (2014). Matemática, adjetivo: a demonstração pela ótica da cultura. *Revista Horizontes* 32(2), 63-76.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

PERCEPÇÕES E REFLEXÕES DE PROFESSORES AO ANALISAREM UMA QUESTÃO SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

TEACHER PERCEPTIONS AND REFLECTIONS WHEN ANALYZING A QUESTION ABOUT MAXIMUM AND MINIMUM QUADRATIC FUNCTION

Vera Mônica Ribeiro, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
veramonica@terra.com.br, nielce.lobo@gmail.com

Resumo
Este artigo é um recorte de pesquisa de mestrado, cujo objetivo foi, num processo formativo sobre avaliação da aprendizagem, identificar percepções e reflexões de oito professores de matemática de São Paulo ao analisarem uma questão sobre valor máximo de uma função quadrática. O alicerce teórico quanto às percepções dos professores veio de Leibniz e Piaget, quanto à reflexão, das pesquisas de Perrenoud e Alarcão e sobre avaliação a base veio de Haydt. A metodologia foi qualitativa do tipo pesquisa-ação estratégica, segundo Ghedin e Franco. Os resultados indicaram que as percepções ocorreram principalmente quanto às características técnicas da questão em análise, tais como clareza do enunciado, grau de dificuldade, contextualização, erro conceitual, coerência nas alternativas e as reflexões, a partir das possíveis resoluções da questão, considerando o conteúdo matemático envolvido, as estratégias de resolução, a forma de abordagem do conteúdo e sobre a prática docente.

Palavras-chave: percepção, reflexão, avaliação, formação continuada

Abstract
This article is part of a master's research study, whose objective was to identify perceptions and reflections of eight mathematics teachers of São Paulo done in an educational process about learning evaluation when analyzing a mathematical question involving maximum value of a quadratic function. The theoretical basis on the teachers' perceptions came from Leibniz and Piaget, on teachers' reflection came from Perrenoud and Alarcão researches and on Haydt's studies on evaluation. The methodology was qualitative of the research-strategic-strategic type, according Ghedin & Franco. The results indicated that the perceptions occurred mainly in the technical characteristics and the reflections from the possible resolutions of the question.

Key words: perception, reflection, evaluation, continuous education

Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa de mestrado, da linha de formação de professores, que investigou um processo formativo com professores de Matemática na rede pública do Estado de São Paulo. O processo formativo focou a Avaliação da Aprendizagem em Processo (AAP) e teve a intenção de viabilizar discussões e reflexões sobre tal tipo de avaliação, mais pontualmente sobre as questões nela contidas que abordaram o conteúdo de funções.

A Avaliação da Aprendizagem em Processo é aplicada na Rede Pública do Estado de São Paulo desde o segundo semestre de 2011 e tem por finalidade, segundo seus elaboradores, diagnosticar os conhecimentos dos alunos da Rede. Por intermédio da AAP pode-se obter informações sobre as habilidades cognitivas, noções e procedimentos matemáticos desenvolvidas pelos educandos, e propiciar ao professor subsídios para a organização dos processos de ensino e aprendizagem.

A AAP é uma ação desenvolvida por colaboração entre a Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas da Secretaria da Educação (CENP), as Diretorias Regionais de Ensino da Coordenadoria do Ensino do Interior (CEI) e a Coordenadoria de Ensino da Região Metropolitana da Grande São Paulo (COGESP). Para tais órgãos públicos, os resultados da AAP devem contribuir para as práticas didáticas, em particular aquelas focadas nos processos de recuperação continuada e paralela dos alunos. Eles entendem que a AAP contribui e favorece os professores de Língua Portuguesa e de Matemática atuantes na Educação Básica da Rede Estadual de São Paulo, ao fornecer resultados e feedback sobre a aprendizagem dos seus alunos.

A implantação da AAP ocorreu em 2011, com foco no 6º ano do Ensino Fundamental e na 1ª série do Ensino Médio, hoje compreende todos os anos e séries da Educação Básica nas escolas da rede estadual paulista.

A AAP é considerada uma avaliação interna mesmo sendo estruturada fora da escola, pois é desenhada para a escola estadual paulista e ela pode apontar quais são as habilidades matemáticas que o aluno é capaz de disponibilizar ou acionar para resolver as questões propostas, as quais estão em consonância com o Currículo oficial do Estado de São Paulo. Contudo, em nossa compreensão ela é uma avaliação que tem seus limites, ou seja, ela pode não abranger a extensão dos conteúdos curriculares e nem as habilidades efetivamente desenvolvidas pelos educandos, apresentando um desenho que pode estar em desacordo com os conteúdos efetivamente abordados em aula pelo professor e dessa maneira diagnosticar nem sempre de modo apropriado.

Na pesquisa maior, à qual este artigo se reporta, questões contidas na AAP, relativas ao conteúdo de funções, foram analisadas por professores de Matemática do Ensino Médio (E.M.). Tal pesquisa se desenvolveu no âmbito de um Projeto do Programa Observatório da Educação, da CAPES/ Inep (nº 19366 Edital 49/2012), aqui intitulado Projeto OBEDUC Práticas. Nesta publicação o objetivo é o de discutir o tema máximos e mínimos de funções quadráticas; a análise foi feita a partir das reflexões dos professores participantes no Projeto sobre uma questão matemática contida na AAP.

Fundamentação teórica

Para a fundamentação teórica estudamos autores do campo da psicologia e da filosofia de modo a obter subsídios para definir o significado de "percepção". Na psicologia a percepção é entendida como um processo cognitivo, o instante em que o indivíduo capta a informação e inicia o processo de assimilação e compreensão da mesma incorporando os novos estímulos as estruturas cognitivas que já possui.

Piaget (1996) em seus estudos sobre a teoria de equilibração descreve que no processo de percepção que a mente utiliza elementos já processados na memória, utilizando-se da interpretação dos estímulos recebidos e que propiciam a possibilidade de adaptação, referindo-se a um mecanismo regulador entre o indivíduo e o meio ambiente,como a um ponto de equilíbrio entre a assimilação e a acomodação. De acordo com a teoria de Piaget (1996), o indivíduo constrói esquemas mentais de assimilação para tratar a realidade e na sequência, por meio de acomodações fazem parte às suas estruturas cognitivas. O autor mostra que o meio não causa apenas o registro de impressões ou a formação de reproduções, mas provoca ajustamentos produtivos.

No campo da filosofia Leibniz conceitua percepção como "a primeira faculdade da alma que é ocupada pelas nossas ideias. É também a primeira e a mais simples idéia que recebemos pela reflexão". (Leibniz, 1978, p.80)

Na obra "Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano", Leibniz cogita que o pensamento quer dizer, muitas vezes, operação de espírito sobre suas próprias ideias e quando executa ,acha ou julga algo com certa importância o indivíduo passa a ter "percepção".As percepções são expressões exteriorizadas pelo indivíduo em uma simultaneidade perfeita com o todo e, que são complementadas com a capacidade de refletir, que decorre a ação no momento em que se encontra consciência para isso. Leibniz (1978) pondera que no racionalismo a sensação e a percepção precisam do sujeito do conhecimento e o objeto externo é a ocasião favorável para que a sensação e a percepção ocorram.

Para o autor,

> ... as ideias que nos vêm por sensação, são muitas vezes alteradas pelo julgamento do espírito das pessoas adultas sem que elas se dêem conta. (Leibniz,1978 p.80-81).

As percepções que dão existência as opiniões, as características dos sentidos que formam no indivíduo e a interação com o universo exterior podem mudar dependendo do estado de espírito em que o indivíduo se encontra sem ele ter entendimento dessa mudança.
Para tratar da reflexão docente e da prática reflexiva, tomamos como suporte estudos de Perrenoud (2002). O autor aborda o tema "reflexão" como sendo uma técnica elaborada e metodológica, sem deixar de considerar a individualidade, no que referência ao conhecimento adquirido através da experiência.

Perrenoud (2002) tem como verdadeiro que refletir deveria ser uma das práticas mais utilizadas pelo homem, seja antes ou depois de uma ação, mas a indecisão consiste em saber se isso o faz um ser reflexivo ou não. Para ele, "A reflexão sobre a ação introduz, então uma reflexão sobre o relacionamento, sobre nossa forma de criar ou manter vínculos com o outro, assim como sobre as dinâmicas do grupo e das organizações" (Perrenoud, 2002, p. 41)

A reflexão sobre a ação tem como sustentação a própria ação realizada, os procedimentos que foram desenvolvidos e como foram desenvolvidos compõem a reflexividade imprescindível para o trabalho docente. Então

> [...] a noção de professor reflexivo baseia-se na consciência da capacidade de pensamento e reflexão que caracteriza o ser humano criativo e não como mero reprodutor de ideias e práticas que lhe são exteriores. É central, nesta conceptualização, a noção do profissional como uma pessoa que, nas situações profissionais, tantas vezes incertas e imprevistas, atua de forma inteligente e flexível, situada a reativa. (Alarcão, 2010, p. 44)

O indivíduo tem conhecimento processual de refletir sobre qualquer coisa, mas refletir apenas por refletir, como uma prática desirmanada ou isolada não o torna um profissional reflexivo segundo indica Alarcão (2010), em concordância com os estudos de Perrenoud (2002, p 13) que declara que "a verdadeira prática reflexiva, essa postura deve-se tornar quase permanente, inserir-se em uma relação analítica com a ação".

Por consequência a reflexão que ocorre com a competência de compreender e entender do professor reflexivo se torna duradouro e incessante possibilitando ao professor, analisar, observar com criatividade e redirecionar suas ações quando necessário.

Alarcão (2010) aponta primordialmente a reflexão crítica; salientando a sua dimensão coletiva e assinalando um conjunto de estratégias de formação que impulsionam o desenvolvimento de educadores reflexivos.

A fundamentação teórica no que concerne à avaliação da aprendizagem e suas funções, vem de Haydt (1997), que as caracteriza como: diagnóstica, formativa e somativa. A avaliação diagnóstica, praticada geralmente no início de um processo de aprendizagem, tem como intenção averiguar os conhecimentos prévios detectando as dificuldades e prováveis causas, na tentativa de retificá-las. A avaliação formativa averigua se os objetivos previstos estão sendo obtidos e fornece informações para aperfeiçoar o processo de ensino e de aprendizagem, portanto é habitualmente realizada no desenrolar do processo. A avaliação somativa apresenta como finalidade a classificação dos resultados obtidos através de níveis de aproveitamento anteriormente estabelecidos, sendo realizada normalmente na etapa da finalização do processo.

Em conformidade com os estudos de Haydt (1997), a avaliação educacional consiste em acompanhar o processo de ensino e aprendizagem, suas particularidades e as condições que a envolvem. A autora complementa que a avaliação é igualmente funcional, orientadora e integral. Funcional porque conduz com base nos propósitos que pretende alcançar. Considerando os objetivos, os elementos norteadores da avaliação, o aluno será avaliado em seu desempenho tendo como referência os objetivos. Orientadora, porque assinala os avanços e dificuldades do aluno, permitindo ao professor reformular seu planejamento e orientar o aluno com métodos e procedimentos alternativos para atingir os objetivos. Integral, ao conceber a avaliação como um instrumento que vai além da desagregação do saber, ampliando para elementos cognitivos, afetivos e psicomotores.

Haydt (1997, p.23) expõe que a avaliação "... permite determinar a presença ou ausência dos pré-requisitos necessários para que as novas aprendizagens possam efetivar-se. Mas a avaliação diagnóstica tem, também, outro propósito: identificar as dificuldades de aprendizagem, tentando discriminar e caracterizar suas possíveis causas." A autora afirma que as avaliações periódicas criam condições propícias favorecendo referências das aprendizagens dos alunos e os incentivando a estudar constantemente. É necessário ressaltar que a avaliação não é um fim em si mesmo, mas é um meio de aperfeiçoar os processos de ensino e de aprendizagem colaborando na realização da aprendizagem dos alunos e para promover reflexão sobre a prática docente.

Metodologia

A metodologia da pesquisa se enquadra como qualitativa do tipo pesquisa-ação. Trata-se de pesquisa qualitativa por ser de natureza exploratória, incitando os sujeitos a pensarem livremente sobre um determinado tema ou conceito. Para mais, exibe de maneira natural e espontânea conceitos específicos e atinge motivações e estímulos não explícitos ou mesmo conscientes de modo espontâneo. Esse tipo de pesquisa é conveniente quando se busca discernimento e entendimento sobre a natureza geral de uma questão permitindo discussão.

A pesquisa-ação proporciona a interação entre pesquisador e participantes da pesquisa, e apresenta a relevância dos problemas abordados e as soluções como resultados dessa relação.

Respaldamo-nos em Ghedin e Franco (2011) que especificam diferentes modalidades, conforme as características da pesquisa-ação em desenvolvimento. Os autores identificam três modalidades, a saber:

Colaborativa, quando a busca de transformação é solicitada pelos colaboradores e, cabe ao pesquisador se integrar e dar um enfoque científico ao processo. Crítica, quando se percebe a necessidade da transformação no início do processo e valoriza a construção cognitiva da experiência favorecendo reflexão crítica coletiva. Estratégica, quando a transformação for antecipadamente planejada sem a participação dos colaboradores tendo seus efeitos acompanhados e os resultados avaliados somente pelos pesquisadores. Seguindo Ghedin e Franco (2011), consideramos que, quanto às transformações a serem oportunizadas pelas ações desta pesquisa-ação, averiguamos que ela se classifica como estratégica, uma vez que ela se mostra estruturada pedagogicamente, com a formação exclusivamente estritamente compromissada com a práxis dos participantes.

Partimos da conjectura que a pesquisa caminhando junto com a ação pode modificar a prática pedagógica. A pesquisa foi desenvolvida em três etapas:

1ª etapa – Análise documental

Compreendeu a pesquisa de documentos, tais como, as Avaliações da Aprendizagem em Processo, no período de 2011 ao primeiro semestre de 2015, os Comentários e Recomendações Pedagógicas – subsídios para o Professor da 1ª série a 3ª série do Ensino Médio até a 8ª edição, o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, os Cadernos do professor (CP) e a Matriz de Referência do Sistema de Avaliação do Estado de São Paulo.

2ª etapa – Elaboração do Processo Formativo e dos Instrumentos de coleta.

Essa etapa envolveu a elaboração das atividades para serem incluídas no processo formativo. Para tanto, fez-se necessária a seleção de todas as questões que apresentavam o conteúdo de funções presente nas AAP (conteúdo que perpassa todas as séries do Ensino Médio). Elaboração de dois questionários; um de entrada e um de saída.

3ª etapa – Pesquisa em Campo

A pesquisa de campo se desenvolveu em cinco encontros semanais de três horas. A coleta de dados se deu por meio de dois questionários, dos protocolos das atividades desenvolvidas ao longo dos encontros, do diário de bordo da pesquisadora e das gravações em áudio e vídeo dos encontros. Coletados os dados, a análise foi interpretativa a partir do estabelecimento de categorias a posteriori, com vistas a identificar as reflexões feitas pelos professores durante o processo formativo.

Neste artigo apresentamos duas categorias; uma sobre percepções da questão de função presente na Avaliação da Aprendizagem em Processo (PER-QF) e outra sobre reflexões sobre a questão de função presente na AAP, (REF-QF). Utilizamos principalmente o vídeo como instrumento de pesquisa por oferecer registros de ações em tempo real de forma visual e oral. A vídeo-filmagem possibilitou-nos uma visualização meticulosa dos dados facilitando analisar as percepções dos professores.

A análise dos vídeos foi realizada de acordo com o modelo exposto por Powell, Francisco e Maher (2004). Esses autores argumentam que

> [...]a capacidade de gravar em vídeo o desvendar momento-a-momento de sons e imagens de um fenômeno tem se transformado numa ampla e poderosa ferramenta de comunidade de pesquisa em Educação Matemática. Utilizando os registros de vídeo como dados, pesquisadores tem produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas. (Powell; Francisco; Maher, 2004, p. 85)

Na pesquisa descrevemos os encontros de formação permeada pelos registros dos professores e a partir do conhecimento dos conteúdos dos vídeos, identificamos momentos significativos para a pesquisa, os quais são denominados eventos críticos.

Resultados

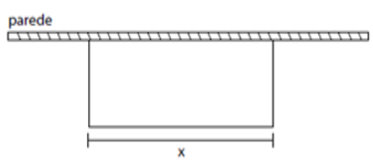
Os resultados são focados em um episódio do processo formativo e nas reflexões dos professores sobre uma das questões da AAP, conforme já exposto.

Foi proposta uma atividade em grupo que consistiu em escolher uma questão sobre funções entre as diversas disponíveis nas AAP. Na sequência os professores deveriam resolver, classificar e analisar a referida questão, apresentando também a síntese da tarefa matemática a ser realizada pelo aluno ao resolvê-la.

A questão escolhida pelo grupo de professores foi da 7ª edição da AAP, para a 1ª série do Ensino Médio, referente ao conteúdo de função polinomial do 2º. Grau. Tal questão está apresentada na figura 1

Dona Bete, uma dona de casa, deseja circundar com uma malha de arame uma região retangular junto a uma parede em seu jardim para plantio de algumas hortaliças. Sabe-se que as medidas das possíveis áreas da região retangular são encontradas a partir da função $f(x) = 10x - \frac{x^2}{2}$, sendo x a medida em metros da base da região retangular, conforme indica a figura a seguir.

Observe.



Podemos afirmar que a quantidade de arame que dispõe dona Bete para circundar a região retangular é de

(A) 9,5 m.

(B) 10 m.

(C) 18 m.

(D) 20 m.

Figura 1. Questão da 7ª Edição da AAP - 2014- 1ª série E.M.
Fonte: Ribeiro (2017, p. 117)

Evidenciamos as percepções, reflexões e resoluções da questão por parte dos professores e identificamos as categorias de análise, sendo elas: Percepção sobre a Questão de Função (PER-QF) e Reflexão sobre a Questão de Função (REF-QF).

O critério para a escolha da questão para ser resolvida pelo grupo de professores foi que, se trata de uma questão interessante por abordar as representações algébricas e geométricas, entretanto ela apresenta um vocabulário rebuscado para o entendimento dos alunos (PER-QF). No enunciado está: "quantidade de arame que dispõe dona Bete para circundar a região retangular é: ...".

O professor HS argumentou que “a palavra circundar possibilita o entendimento de perímetro (incluindo a parede), e esse raciocínio está errado”. (REF-QF). Ao analisar o enunciado os professores percebem que a questão está posta no contexto da matemática (PER-QF) e que é um problema clássico de perímetro e área. (PER-QF). A questão é proposta de forma contextualizada, entretanto trata-se de contextualização um tanto forçada (PER-QF).

A malha de arame que circundará o terreno é também uma área retangular e dela pede-se o comprimento de um lado, entretanto o enunciado questiona sobre a quantidade de arame, referindo-se a uma medida linear (PER-QF).

Na percepção dos professores esta questão se mostra de forma objetiva, de categoria de seleção, apresentada por uma pergunta direta com quatro alternativas, as quais se apresentam como possíveis soluções, sendo que uma delas é a resposta correta. (PER-QF).

Considerando as categorias e classificação de questões indicadas por estudiosos em avaliação, tais como Haydt (1997), quanto à questão citada, verificamos que se trata de questão objetiva, de categoria de seleção, apresentada por uma pergunta direta com quatro alternativas, as quais se apresentam como possíveis soluções, sendo que uma delas é a resposta correta. Nesse aspecto ressaltamos que a autora considera que:

> o item de múltipla escolha é um tipo de questão objetiva muito usada devido a sua flexibilidade, pois se adapta bem a uma grande variedade de objetivos instrucionais e conteúdo de ensino. Pode medir conhecimento de fatos, como também a capacidade de compreensão e aplicação. (Haydt, 1997, p.109)

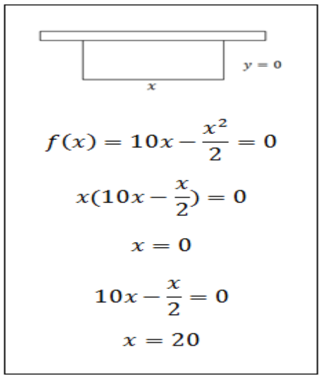
Assim sendo, trata-se de uma questão posta no contexto da matemática, apresentando uma pergunta direta ao aluno, de modo a identificar se ele coordena a representação gráfica da função dada e a sua correspondente representação algébrica.

Para os professores participantes, a questão apresenta nível alto de dificuldade (PER-QF), principalmente, devido ao enunciado que pode afetar o desempenho dos alunos.

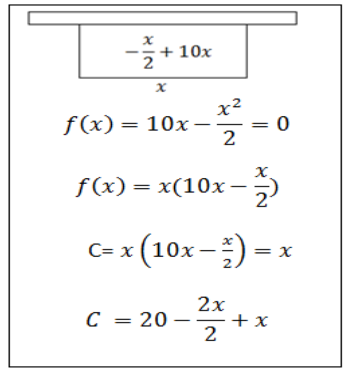
Como síntese da tarefa deve-se encontrar, por meio da função polinomial do 2º grau que expressa a área da região retangular, o valor da medida perimetral do retângulo excluindo o lado que pertence à parede, verificando que o arame circunda somente três lados do retângulo da figura. (REF-QF)

Os professores, ao resolver a questão, identificaram a capacidade de mobilizar conhecimentos matemáticos e recursos cognitivos para o enfrentamento desse tipo de situação. (REF-QF)

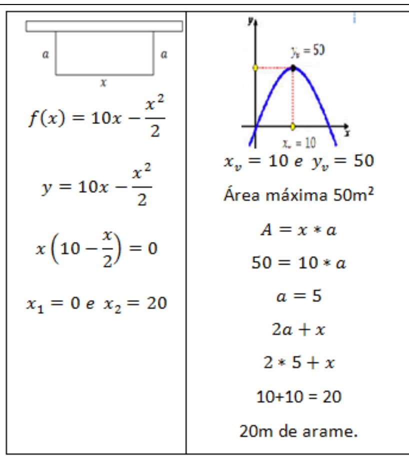
Quanto à resolução, surgiram quatro maneiras diferentes, que foram expostas no quadro e discutidas coletivamente (REF-QF)



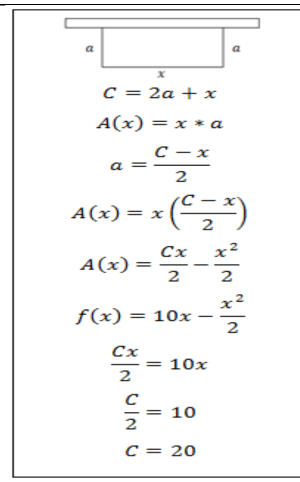
A 1ª resolução envolve a determinação das Raízes da equação e a análise que x = 20 corresponde a uma situação limite na qual y = 0.



A 2ª resolução envolve fatoração da expressão algébrica da função f(x) e análise de cada fator identificando-os como base e altura da região retangular.



Envolve o cálculo de área retangular e das coordenadas do vértice que representam o valor máximo para o comprimento x e a área máxima da área Retangular dada



Envolve a igualdade entre duas funções C(x) e A(x).

Figura 2. Resoluções da Questão da 7ª Edição da AAP - 2014 - 1ª série E.M.
Fonte: Acervo das autoras

A predisposição de mobilizar recursos cognitivos para a contraposição de situações mantem-se nas competências que mobilizam, compõem e organizam saberes e essa movimentação se torna pertinente em situações em que as competências são construídas na formação e na prática.

Conclusão

O processo formativo que abrangeu a análise e resolução de uma questão que envolveu o valor máximo de uma função quadrática proporcionou a identificação das categorias de análise da percepção e da reflexão sobre a questão.

As percepções sobre as características técnicas e conteúdo abordado referem-se a: clareza do enunciado, grau de dificuldade, contextualização, erro conceitual, coerência nos itens das alternativas

As reflexões que emergiram a partir das resoluções das questões sobre funções foram: sobre o conteúdo matemático, as estratégias de resolução, abordagem do conteúdo com o aluno e prática docente.

Os professores tiveram a oportunidade de refletir sobre a matemática envolvida e sobre o ensino de funções no sentido de repensar sua prática.

Agradecimentos

Agradeço o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 por oportunizar a pesquisa e no âmbito do Projeto nº 19366 do Programa Observatório da Educação.

Referências bibliográficas

Alarcão, I. (2010). *Professores Reflexivos em uma Escola Reflexiva* (7ª ed., Vol. 8). São Paulo, SP, Brasil: Cortez (Coleção questões da nossa época: v.8).

Ghedin, E., & Franco, M. (2011). *Questões de método na construção da pesquisa em educação*. São Paulo: Cortez.

Haydt, R. C. (1997). *Avaliação do Processo Ensino-Aprendizagem*. São Paulo: Ática.

Kant, E. (2008) *Crítica da Razão Pura* (J. Rodrigues de Merege, Trad.) Créditos da digitalização: Membros do grupo de discussão Acrópolis (Filosofia) Recuperado de: http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cv000016.pdf

Leibniz, G. W. (1978). *Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*. (Vol. Capítulo IX). (L. J. Baraúna, Trad.) São Paulo: Abril.

Perrenoud, P. (2002). *A prática reflexiva no ofício de professor: profissionalização e razão pedagógica*. (C. Schilling, Trad.) Porto Alegre, Rio Grqande do Sul, Brasil: Artmed.

Piaget, J. (1996). *Biologia e Conhecimento* (2ª ed.). Petrópolis: Vozes

Powell, A. B., Francisco, J., & Maher, C. (2004). *Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes*. BOLEMA Boletim de Educação Matemática, 17, 81-140.

Ribeiro, V.M. (2017). *Reflexões de Professores de Matemática sobre Funções na Avaliação da Aprendizagem em Processo*. Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ERRORES RECURRENTES EN EXÁMENES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

COMMON ERRORS IN EXAMS OF DIFFERENTIAL CALCULUS

Lorena Salazar Solórzano; Leiner Víquez García
Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr, leiner.viquez@ucr.ac.cr

Resumen
Este estudio busca determinar errores frecuentes de los estudiantes en exámenes de cálculo diferencial, con el fin de buscar medidas correctivas para superarlos. Para ello se seleccionó una muestra de 50 exámenes resueltos por estudiantes de un proyecto de evaluación a distancia de la Universidad de Costa Rica (ExMa) que tiene 10 años de experiencia en evaluaciones de aprendizajes matemáticos, en cuyo período se han archivado cientos de exámenes de cálculo. Se determinan errores recurrentes de los estudiantes en sus soluciones, se hace una clasificación de los mismos y se establecen posibles causas para terminar con algunas recomendaciones a los docentes para la anticipación y superación de los mismos.

Palabras clave: cálculo diferencial, errores frecuentes, evaluación matemática

Abstract
This study intends to determine frequent errors of students in differential calculus exams, in order to seek corrective measures to overcome them. For this purpose, a sample of 50 exams was selected from a project of the University of Costa Rica (ExMa) who has 10 years of experience in mathematical evaluations, during which hundreds of calculus exams have been recollected. Recurrent errors of the students in their solutions are determined, a classification of them is made and possible causes are established to finish with some recommendations to the teachers for the anticipation and overcoming of the same ones.

Key words: differential calculus, frequent errors, mathematical evaluation

Introducción

Existen muchas publicaciones sobre errores en diversos temas de matemática (incluyendo el cálculo diferencial) que han dado diferentes clasificaciones de errores, por lo que un nuevo estudio como el planteado en este artículo parecería ser innecesario. Sin embargo, también estas investigaciones señalan la conveniencia de realizar más estudios relacionados con errores en matemática, debido a la complejidad involucrada al intentar determinar sus causas y porque tienen relación con muchas variables del proceso educativo: el profesor, el currículo, el entorno social en el que se enmarca la escuela, el medio cultural y sus relaciones, así como las posibles interacciones entre estas variables (Rico, 1998).

En Costa Rica los cursos introductorios presenciales de cálculo diferencial e integral presentan muy bajos niveles de promoción. Esto coincide con los resultados de exámenes del proyecto ExMa (Exámenes de Matemática) de la Universidad de Costa Rica (UCR), el cual cuenta con aproximadamente una década de ofrecer una alternativa, diferente a la presencial, de aprobar cursos de matemática mediante la aprobación de tres exámenes para los cuales el alumno se prepara en forma independiente. Originalmente se presentó como una nueva vía para que los estudiantes, principalmente repitentes, se prepararan por sí mismos y demostraran que habían alcanzado los objetivos que demandan los cursos de matemática inscritos en el proyecto, sin embargo, actualmente se ofrece a cualquier estudiante que así lo requiera, incluyendo alumnos destacados. Al momento se cuenta con cientos de exámenes resueltos que constituyen el principal insumo para el presente estudio. Los profesores calificadores de los exámenes de este proyecto han detectado una serie de errores que los estudiantes repiten persistentemente y que evidencian un patrón a nivel colectivo. Esto se relaciona con características comunes que podrían asociarse con la formación recibida previamente o con el carácter autodidáctico de la preparación de los alumnos.

En general, existe una percepción negativa hacia los errores y usualmente se culpabiliza al estudiante de estos, cuando es claro que otros aspectos (por ejemplo, un docente) pueden tener un rol fundamental tanto en la aparición como en la erradicación de esos errores. Rico (1998) afirma que el error expresa el carácter incompleto de un conocimiento y esto permite al profesor ayudarle a completar ese conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal. Con esta investigación se busca determinar cuáles errores ocurren en el contexto particular de la UCR y generar espacios para una reflexión conjunta con los docentes que imparten cursos de Cálculo. Específicamente, se detalla a continuación lo que se pretende con este estudio.

Objetivo: Determinar los errores recurrentes que cometen los estudiantes en temas de cálculo diferencial con el fin de buscar medidas correctivas que orienten, tanto a los alumnos autodidactas como a los docentes que enseñan estos temas, a la superación de estos.

Marco teórico

Todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, y en estudiantes autodidactas, es natural y esperable. Según Rico (1998), “el error es una actividad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos” (p. 70). De modo que los errores deben ser aceptados como parte del proceso de aprender y no como algo necesariamente negativo. Se aprende de los errores, dado que este permite percatarse de forma consiente del mismo y de su erradicación. Barrantes (2006) ejemplifica algunas de las ideas de Brousseau acerca de los errores en la construcción del conocimiento matemático como producto de obstáculos epistemológicos, los cuales no hacen referencia únicamente a conocimientos previos erróneos; sino a tipos de conocimiento que, tal vez sin ser erróneos, están obstaculizando la construcción o adquisición de nuevos conocimientos. En este sentido, un conocimiento que es funcional en un ámbito puede ser disfuncional en otro más amplio. Un ejemplo de esto es la derivada de un producto, la cual no cumple ser el producto de las derivadas, aspecto que sí resulta ser válido en otros contextos ajenos al cálculo diferencial. Según este mismo autor, “la función de una lección no es solamente aportar un saber nuevo que se yuxtapone armoniosamente con los precedentes y que se debe aprender, sino que debe destruir las antiguas concepciones, que eran útiles pero que son incompatibles con el nuevo conocimiento”. (Barrantes, 2006, p.3). Esto, debe ser asimilado de forma consiente por los docentes, para enfatizar en lo que es válido y no es válido en cada contexto.

Según Rico (1998) los errores son extremadamente persistentes y para superarlos es preciso una reorganización del conocimiento de los alumnos. Por otro lado afirma que los errores ignoran el significado de los símbolos y conceptos con los que están trabajando; de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se cuestionan. En la misma línea Portillos y Díaz (2015) afirman que “los estudiantes parecen no comprender el significado de lo que están operando (semántica) lo cual desencadena en errores de sintaxis. La sintaxis se refiere a la estructura del lenguaje, en este caso del lenguaje de la matemática y la semántica al concepto detrás del lenguaje” (p. 133). Según estos autores, los alumnos parecen seguir *recetas*, sin una comprensión profunda (en ocasiones ni siquiera una comprensión media) de los conceptos y esto los lleva a cometer errores. Dentro de las medidas correctivas, recomiendan a los docentes en ejercicio que después de cada evaluación, muestren y discutan con los estudiantes algunos de los errores cometidos y hagan de esto una práctica consistente en las clases. De ahí que adquiere importancia que un docente se encuentre a la expectativa de los errores que pueden surgir para prevenirlos. En ese sentido, un aspecto que podría ser considerado es el que señala Díaz (2009) cuando afirma que hay patrones consistentes en los errores a dos niveles: individual (puesto que las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios) y colectivo (ya que diferentes personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje).

Clasificación de errores

En este estudio se ha tomado en cuenta una combinación de las clasificaciones de los errores dadas por Radatz (1979), Orton (1983) y Hirst (2002), las cuales se adaptaron (Tabla 1), y en algunos casos se unieron cuando se referían al mismo tipo de error.

Tabla 1. Tipificación de errores en el estudio.

Tipo de error	Descripción	Autor
Extrapolación procedimental.	Generalización sin criterio de procedimientos algorítmicos que, aunque funcionan con éxito en ciertos contextos, no son exitosos en otros casos.	Hirst, Radatz
Estructurales por comprensión.	Falta de capacidad para apreciar las relaciones involucradas o los principios esenciales que se utilizan para encontrar la solución a un problema.	Orton
Arbitrarios sistemáticos.	Cuando no se toma en cuenta las restricciones involucradas en el problema, datos mal utilizados, falta de verificación de la solución.	Orton
Interpretación inadecuada de lenguaje.	La falta de comprensión semántica o el uso de lenguaje matemático, interpretaciones a partir de una gráfica.	Radatz
Deficiencias en conocimientos y habilidades previas.	La deficiencia en el aprendizaje de conocimientos previos necesarios incluye aplicación incorrecta de algoritmos, así como el conocimiento insuficiente de conceptos y símbolos.	Radatz
Rigidez de pensamiento o asociaciones incorrectas.	Inadecuada flexibilidad en la decodificación y recodificación de nueva información que genera rigidez de pensamiento usando operaciones cognitivas incluso si las condiciones de la tarea matemática hayan cambiado.	Radatz
Arbitrarios no sistemáticos.	Errores de transcripción u otra situación azarosa, olvido de un signo o datos.	propia

Fuente: elaboración propia

Metodología

Para el presente estudio, se tomó como población el conjunto de exámenes recopilados en los diez años de vigencia del proyecto ExMa. Se siguieron diferentes fases para la detección de errores frecuentes de soluciones de exámenes de estudiantes participantes del proyecto.

Fase 1 Detección de errores frecuentes: Haciendo uso de los reportes individuales con los errores cometidos que se les entregan a los estudiantes, se determinaron los errores que con mayor frecuencia (al menos en 5 veces) se repetían en las soluciones de exámenes.
Fase 2 Selección de la muestra: Se seleccionó una muestra de 50 exámenes al azar, tomando al menos 5 exámenes de cada uno de los años de vigencia del proyecto EXMA, para comparar los errores cometidos y su permanencia a través de los 10 años.
Fase 3 Análisis de las soluciones: Se analizaron los errores presentes en cada uno de los exámenes contabilizando cuántos y cuáles de los errores *frecuentes* hallados en la primera fase, se presentaban en la muestra.
Fase 4 Análisis de los resultados: se clasificaron los errores hallados en la muestra siguiendo la tipificación de la tabla 1, la cual fue adaptada para este estudio al tema específico de derivación.
Fase 5 Causas y medidas correctivas: Se realizó una reflexión conjunta entre los docentes del proyecto ExMa para tratar de buscar posibles causas y proponer medidas correctivas.

Resultados

En esta sección se hace un recuento de los principales errores hallados según la clasificación adaptada de tabla 1, se detalla en la tabla 2.

Tabla 2. Ejemplos específicos para la tipificación de errores en el estudio.

Tipo de error	Errores específicos frecuentes
Extrapolación procedimental.	1. Aplica mal la regla para derivar de un producto y cociente. 2. No logra generalizar la regla de la derivada de un producto a tres funciones.
Estructurales por comprensión.	1. No aplica correctamente la regla de la cadena. Deriva mal implícitamente. 2. No tiene claro el concepto de derivada de una función por definición. No identifica las coordenadas (x, y) del máximo o mínimo relativos en una gráfica. 3. No logra plantear las ecuaciones de las asíntotas lineales de una función a partir de información dada de la función como el valor de ciertos límites conocidos al infinito o límites infinitos cuando x tiende a un valor. 4. No establece relaciones entre los signos de la primera y segunda derivada con los intervalos de crecimiento o monotonía de la función. 5. No calcula la pendiente de la recta normal a partir de la recta tangente a la curva en el punto.
Arbitrarios sistemáticos.	1. No establece relaciones entre las variables dadas para que la función a optimizar quede en una variable. 2. No descarta los números críticos que no pertenecen al intervalo dado. 3. No evalúa los números críticos para dar como respuesta final, las dimensiones solicitadas en un problema de optimización. 4. No evalúa el número crítico o los extremos del intervalo cerrado (dominio) para comparar sus imágenes.

	5. No define una variable no declarada en el mismo. 6. No verifica que el número crítico encontrado en efecto fuera un máximo o mínimo. 7. Construye una gráfica que sólo cumple algunos de los requerimientos dados.
Interpretación inadecuada de lenguaje, simbología o gráficas.	1. No identifica el signo de la primera o segunda derivada de una función a partir de la gráfica. 2. No identifica el valor específico de la primera derivada evaluada en un punto específico a partir de la información de la gráfica. 3. No identifica (a partir de la gráfica de la primera derivada), los valores en los que g' se hace cero o se indefine, por lo que no llega a dar los números críticos. 4. No identifica (a partir de la gráfica de la primera derivada), los intervalos en los que g' es creciente o decreciente. 5. No identifica donde la concavidad cambia de signo y se da un punto de inflexión. 6. No logra plantear correctamente la ecuación de la recta tangente y/o la recta normal a la curva. 7. No identifica todos los números críticos de una función a partir del criterio de la derivada.
Deficiencias en conocimientos y habilidades previas.	1. Comete errores algebraicos en el procedimiento para identificar si hay asíntotas horizontales y oblicuas. 2. Comete errores de derivación a la hora de aplicar la Regla de L'Hôpital. 3. No llega a replantear bien la función y aplica incorrectamente la regla de L'Hôpital. 4. Comete errores de simplificación a la hora de aplicar la Regla de L'Hôpital. 5. Aplica bien la Regla de L'Hôpital, pero evalúa mal en x=0 por lo que no llega al resultado correcto. 6. Comete errores de simplificación o derivación que no le permiten determinar correctamente los números críticos. 7. No coloca un paréntesis necesario, sin el cual la respuesta no es equivalente a la correcta. 8. No tiene procedimientos correctos. 9. Aplica mal las propiedades de los logaritmos. 10. Deriva bien a ambos lados de una ecuación para hacer derivación implícita, pero luego despeja mal. 11. Simplifica un radical incorrectamente. 12. Arrastra los errores por lo que no llega a las respuestas correctas. 13. No calcula correctamente la intersección (b) de la recta tangente y/o la recta normal a la curva. 14. No calcula la totalidad de los números críticos y comete errores en el cálculo de las imágenes, por lo que no llega correctamente a los extremos absolutos. 15. Extrae un factor común inexistente. 16. Comete un error algebraico al extraer el factor común. 17. Comete errores de despeje o de simplificación en el cálculo de y'. 18. No factoriza correctamente el criterio de la primera derivada. 19. Comete errores en el cálculo de la derivada o la simplificación de la misma que no le permiten llegar al número crítico perteneciente al dominio.
Rigidez de pensamiento o asociaciones incorrectas.	1. Calcula erróneamente derivada de orden superior de funciones cuyo criterio es dado explícitamente. 2. Plantea mal el problema de optimización. 3. No plantea bien el problema de razones de cambio. 4. No utiliza el dato obtenido en la ecuación auxiliar para que la función a optimizar quedara en una variable y con un dominio conveniente. 5. No aplica el procedimiento para trabajar un límite de la forma 0/0, 1^{∞},

	$0^{\infty}, \infty^{0}, 0 \cdot \infty$. 6. No efectúa (o justifica) la resta algebraica de fracciones para evitar la forma indeterminada $\infty - \infty$.
Arbitrarios no sistemáticos.	1. Deja perdido un signo, arrastra el error por lo que llega a una respuesta incorrecta. 2. Transcribe mal el ejercicio. 3. No sigue instrucciones del ejercicio. 4. Comete errores de transcripción, cambia el ejercicio. 5. Interpreta mal el ejercicio. 6. Invierte innecesariamente tiempo en el cálculo del criterio de las derivadas. 7. No necesitaba calcularlas porque se le daban los signos de las derivadas.

Fuente: elaboración propia

Como puede observarse en la tabla anterior, se ha tratado de tipificar los errores, aunque es claro que hay una estrecha relación entre ellos, por lo que algunos de los errores hallados, podrían perfectamente calzar en otra casilla. Los errores de extrapolación procedimental son muy típicos, como por ejemplo el derivar un cociente de dos funciones como el cociente de las derivadas. Esto indica que como docentes se debe dedicar un espacio a insistir en la validez de las propiedades matemáticas de acuerdo a los diferentes contextos que se tengan. Los errores de comprensión se dan con bastante regularidad, pero estos podrían deberse a deficiencias de estudio y a la incomprensión de los conceptos por parte de los alumnos. Es claro que la complejidad de los objetos matemáticos involucrados afecta en esta comprensión, y que el docente debe buscar metodologías alternativas, como el uso de tecnologías, para lograr la asimilación y así erradicar los errores que se dan. Los errores arbitrarios sistemáticos hallados indican una falta de rigurosidad matemática a la hora de expresarse por escrito (aunque sabemos que también los comenten en forma oral). Una posible causa de estos errores es precisamente que muchos de estos temas se enseñan bajo una modalidad magistral y en forma mecánica, de modo que, a la hora de escribir los estudiantes dejan de lado muchos detalles, como por ejemplo en no verificar que el número crítico encontrado es un máximo o mínimo. Esto está relacionado con los errores debido al uso del lenguaje, en los que se ha detectado que los estudiantes no lo manejan en la forma que se requiere, incluyendo las representaciones gráficas. En este punto estos errores parecieran estar relacionados también con la comprensión de los conceptos y como estos se reflejan en una gráfica, por ejemplo.

Los errores debido a deficiencias en conocimientos previos son los que se dan en su gran mayoría (errores algebraicos, factorización, ecuaciones, y aspectos relacionados a simplificaciones), lo que lleva a replantear la necesidad de llevar un curso de precálculo que les provea las bases para el curso de cálculo diferencial e integral. Los errores debido a rigidez de pensamiento se dan en su gran mayoría en los problemas de optimización, velocidad y razones de cambio. Si logran resolver un tipo de estos problemas, intentan persistentemente hacer lo mismo en otro problema, con condiciones diferentes. Lo mismo ocurre con errores al aplicar la regla de L'Hôspital, en los que derivan sin verificar el tipo de indeterminación y los casos que estos conllevan. Finalmente, los errores no sistemáticos, categoría que no es mencionada en otros estudios, se ha incluido dado que, si entraron como errores frecuentes, olvidar un signo, transcribir mal un ejercicio, que, aunque no son fundamentales, no dejan de afectar los resultados de un examen. A manera de ilustración, las figuras siguientes muestran algunos ejemplos de los errores frecuentes hallados.

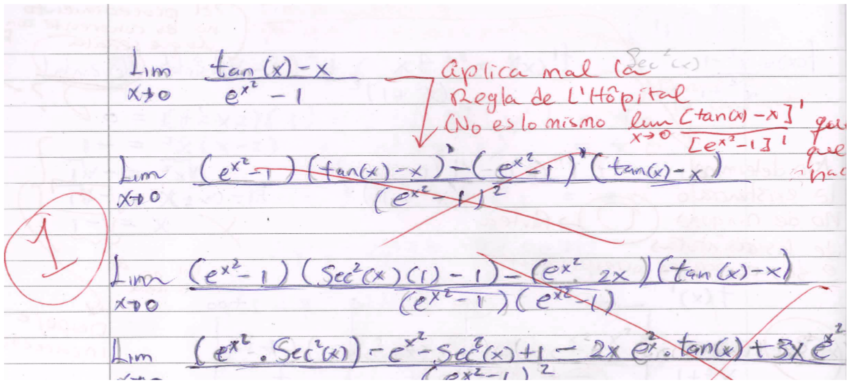


Figura 1. Error de extrapolación procedimental.
Fuente. Captura tomada de exámenes del proyecto ExMa

La figura 1 muestra un error que apareció con mucha frecuencia, donde extrapola una regla que, si bien puede ser válida en otro contexto, no lo es en el cálculo diferencial, confunde la derivada de un cociente con el cociente de las derivadas.

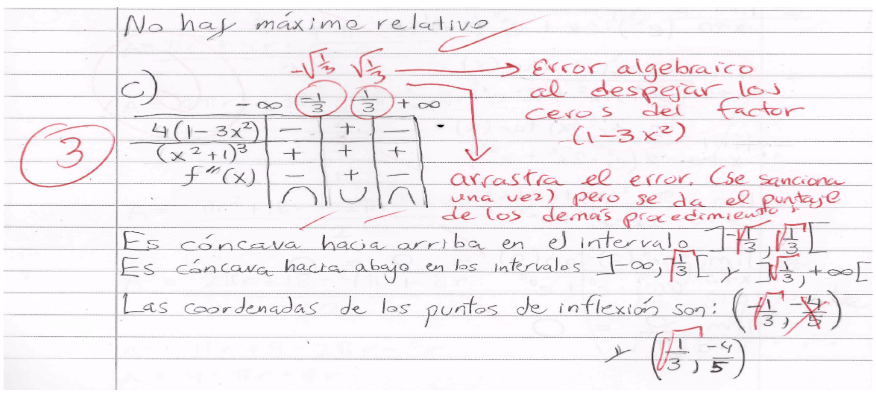


Figura 2. Error algebraico.
Fuente. Captura tomada de exámenes del proyecto ExMa

La figura 2 refleja que, aunque el estudiante conoce como hacer un cuadro de variación, lamentablemente errores de conocimientos previos lo llevan a obtener resultados erróneos.

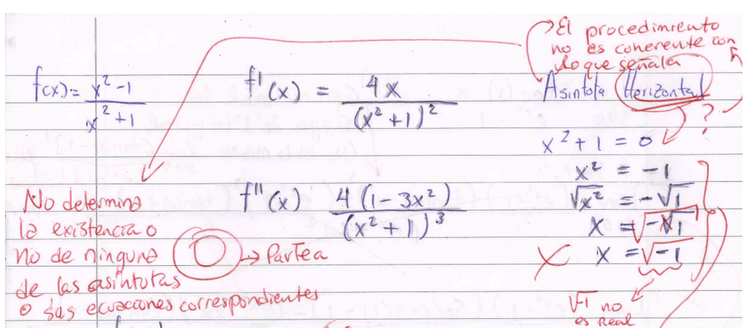


Figura 3. Error estructural por comprensión.
Fuente. Captura tomada de exámenes del proyecto ExMa

La figura 3 muestra un error que podría catalogarse como un error de comprensión, dado que confunde el concepto de asíntota horizontal con el procedimiento para hallar una asíntota vertical, pero además comete un error de conocimientos previos. Se da cuenta que la raíz de un número negativo no existe por lo que deja el signo menos, fuera de la raíz.

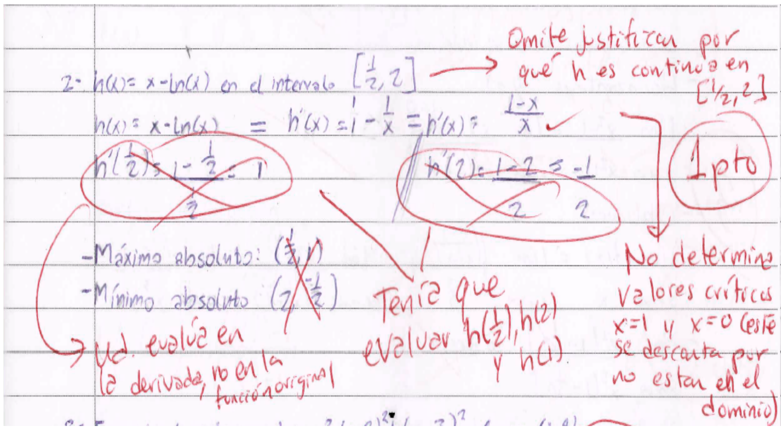


Figura 4. Error arbitrario sistemático.
Fuente. Captura tomada de exámenes del proyecto ExMa

La figura 4 muestra como la estudiante obvia verificar las hipótesis del teorema de máximo y mínimo absoluto en un intervalo cerrado y acotado. También comete errores de interpretación de la tesis de tal teorema, no logra hallar los puntos críticos y finalmente evalúa en la derivada. Hay errores de comprensión también, mostrando una vez más la complejidad del querer encasillar los errores, cuando en casos como este, hay una combinación de varios de ellos.

Consideraciones finales

Aunque se trató de tipificar los errores hallados dentro de las clasificaciones hechas por diferentes investigadores, resultó difícil encasillarlos dentro de una categoría u otra dada la complejidad de estos, por lo que en algunos casos se hizo una adaptación o se contempló la combinación de varias. Buscar las causas y medidas correctivas, no es una tarea fácil, dado que hay muchas variables en juego, por lo que poder definir una estrategia eficiente para disminuir los errores en los estudiantes, es una tarea que se recomienda consensuarla con los docentes después de una reflexión conjunta. Sin embargo, damos algunas conclusiones y recomendaciones, que podrían servir de base a esta reflexión.

La complejidad de los objetos matemáticos involucrados podría estar relacionados con errores de comprensión y errores de extrapolación procedimental, por lo que se recomiendan metodologías alternativas, como el uso de tecnologías, para lograr una mejor asimilación de los conceptos matemáticos y dedicar un espacio en las aulas para insistir en la validez de las propiedades matemáticas de acuerdo con los diferentes contextos que se tengan. Para evitar errores arbitrarios sistemáticos, se debe insistir en la rigurosidad matemática a la hora de expresarse por escrito, al igual que el manejo de un lenguaje adecuado, que muchas veces se da por un hecho, cuando los errores hallados en este estudio indican lo contrario. Los errores debido a deficiencias en conocimientos previos son los que se dan en su gran mayoría (errores algebraicos, factorización, ecuaciones, y aspectos relacionados a simplificaciones), lo que lleva a replantear la necesidad de llevar un curso de precálculo que les provea las bases para el curso de cálculo diferencial e integral. Los errores debido a rigidez de pensamiento se dan en su gran mayoría en los problemas de optimización, velocidad y razones de cambio, por lo que se deben definir estrategias de resolución de problemas en las aulas universitarias, y no asumir que se conocen. Finalmente, se hallaron errores no sistemáticos, categoría que, aunque no está al alcance del docente de erradicar, si se debe comentar con los estudiantes para que sean más cuidadosos y ordenados al trabajar para no dejar perdido un signo o no usar paréntesis. Finalmente, es necesario aplicar la política de dedicar tiempo de clases a la discusión con los estudiantes de este tipo de errores, mostrando capturas de los mismos para que los alumnos tomen conciencia de los mismos y juntos buscar medidas correctivas para su superación.

Referencias bibliográficas

Barrantes, H (2006). Obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*. 2006, Año 1, Número 2.

Díaz, J. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza*. I. 91-97.

Hirst, K.E. (2002). Classifying students mistakes in Calculus. *Proceedings of theSecond International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level.* 01 - 06 Jul 2002. pp. 440-445.

Orton, A. (1983). Students Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Portillos, R., Díaz, L. (2015). Errores en el Aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. En: Actas del *IX CIEMAC Congreso Internacional de la Enseñanza de la Matemática asistida por computadoras*. Costa Rica, 128-137.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-172. doi:10.2307/748804

Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En: *Educación Matemática. Historia. Errores y dificultades de los estudiantes.* Resolución de problemas. Evaluación. (Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (editores)). “una empresa docente” & Grupo editorial Iberoamérica. Colombia. pp. 69-108.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

SIGNIFICADOS DE LA ECUACIÓN LINEAL DE PROFESORES DE SECUNDARIAS MEXICANAS

MEANINGS OF LINEAR EQUATION OF MEXICAN ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

Graciela Rubi Acevedo Cardelas, Ramiro Ávila Godoy
Universidad de Sonora (México)
grasick@gmail.com, ravilag@mat.uson.mx

Resumen
Se muestran los avances de un proyecto de investigación donde se busca indagar en la relación existente entre las concepciones que los profesores de secundaria tienen respecto a la enseñanza de ecuaciones lineales y sus prácticas docentes. Tanto en el diseño como en el desarrollo del proyecto se han utilizado como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), en particular las premisas relativas a los Significados Institucionales de Referencia, Pretendido e Implementado. La investigación es de corte cualitativo donde se utilizarán los tres primeros de análisis que propone el EOS: identificación de prácticas, elaboración de configuraciones de objetos y procesos matemáticos y análisis de las trayectorias e interacciones didácticas. Dado que lo que aquí se informa es un trabajo en desarrollo, en el cual se están elaborando instrumentos para la recopilación de información que aún no se aplican, no se cuenta con resultados o conclusiones.

Palabras clave: enfoque ontosemiótico, pensamiento algebraico, profesores, ecuaciones lineales

Abstract
This paper shows the progress of a research project that has been developed to inquire the relationship between secondary teachers' conceptions about linear equation teaching and their didactic practices. Both in the design and in the development of this project the Ontosemiotic Approach of Knowledge and Mathematical Instruction (OSA) has been used, particularly the notions of Referential, Intended and Implemented Institutional Meaning. The research has a qualitative approach and the levels of analysis proposed by OSA will be applied: identification of practices, configuration of objects and mathematical processes and analysis of didactical paths and interactions. As this is a work in progress, in which the instruments to collect information are been developed and are not applied yet, we do not have any results or conclusions.

Key words: Ontosemiotic approach, algebraic thinking, teachers, linear equations

Introducción

En este documento se describen las características del proyecto de investigación que se ha desarrollado para indagar en las acciones discursivas y operativas de los docentes de matemáticas de secundaria al enseñar ecuaciones lineales, enfocándonos en contrastar su planeación con su implementación. Se trata de dar respuesta a la pregunta ¿Qué relación existe entre las acciones operativas y discursivas llevadas a cabo por los profesores en su planeación con las realizadas en su implementación en el aula, en la enseñanza de las ecuaciones lineales?

En un primer momento se presentan los resultados de la investigación bibliográfica realizada hasta el momento, donde se mencionan resultados de investigaciones relacionadas con las concepciones sobre la enseñanza del álgebra de profesores y la manera en la que promueven el pensamiento algebraico. Dado que este estudio está centrado en las ecuaciones lineales, se ha hecho un bosquejo general de las investigaciones relacionadas con este objeto matemático. Estos elementos constituyen la problemática que ha sido detectada.

Posteriormente, se mencionan algunos rasgos del contexto en el que se desenvolverán los docentes que participarán en la investigación y más adelante, se mencionan los elementos teóricos, propios del EOS, que dan fundamento y validez al proyecto, así como los objetivos que han sido planteados para dar respuesta a la pregunta de investigación y finalmente, la metodología que guiará el desarrollo de este trabajo.

Problemática

Al indagar en las prácticas que realizan los docentes de secundaria mexicanos al realizar su labor encontramos que los resultados de evaluaciones realizadas por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE) a dichos profesores muestran que los docentes de Matemáticas son quienes, prioritariamente, dirigen y explican las actividades (INEE, 2017); sin embargo, no se profundiza en cómo realizan esas acciones ni da cuenta de porqué los profesores toman esas decisiones. Estos cuestionamientos se convirtieron en una de las primeras motivaciones de este trabajo.

Una de las preguntas que nos planteamos fue ¿en qué medida las concepciones y creencias de los docentes inciden en sus prácticas al enseñar álgebra? Encontrando que hay autores como Nathan y Koedinger (2000) que señalan que dichas creencias conforman las acciones y decisiones que toman los profesores, las cuales afectan directamente el aprendizaje de los alumnos.

Si bien consideramos que existen otros elementos que pueden influir en las acciones que toman los docentes al realizar su labor, el hecho de que las concepciones y creencias tengan alguna injerencia en dichas acciones de los docentes, justifica la importancia de que sean investigadas.

Una vez que se surgieron estos cuestionamientos, centramos nuestro interés en conocer las acciones que realizan los profesores que enseñan álgebra, ya que encontramos que han sido poco explorados los conocimientos y las prácticas de los profesores, así como la manera en que interpretan y adaptan los libros de texto, el uso que hacen de la tecnología y cómo identifican los conocimientos que los alumnos poseen, respecto al álgebra (Doerr, 2004).

Lo anterior derivó en una revisión de investigaciones relaciones con profesores y sus concepciones sobre álgebra, el pensamiento algebraico y su desarrollo, algunas de las cuales se comentan a continuación.

Dentro de las investigaciones relacionadas con el razonamiento algebraico y su relación con los docentes, Aké Tec (2013) en un estudió realizado a profesores en formación mexicanos muestra sus carencias en el conocimiento común, avanzado y especializado y destaca lo notorio de las limitaciones respecto al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, así mismo, señala que la identificación de objetos matemáticos, en particular los algebraicos, son un reto para ellos y añade que "identifican al álgebra con la manipulación simbólica y el uso exclusivo de letras".

Así mismo, la investigación realizada por Stephens (2008) añade que los docentes en formación consideran las respuestas de los alumnos como no-algebraicas si utilizan pensamiento relacional o identifican otras estrategias de razonamiento, las cuales son vistas como "atajos" en vez de una forma de pensamiento algebraico.

En este mismo sentido, Tunks & Weller (2009) señalan que muchos docentes de educación básica conciben al álgebra como un conjunto de reglas para manipular variables, sus concepciones se basan en la manera en la que ellos estudiaron y esta percepción persiste después de entrar al magisterio. Para estos profesores el álgebra consiste en determinar cantidades desconocidas, contrario a la visión del álgebra como una actividad de razonamiento que involucra la noción de indeterminación.

Lo anterior produce, como mencionan Doerr (2004) y Stein, Baxter, & Leinhardt (1990), un favorecimiento del desarrollo de habilidades procedimentales, minimizando el uso conceptual de las representaciones, descontextualizando ambas actividades. En este sentido, Aké, Castro, & Godino (2015) destacan la necesidad de que los maestros participen de la visión ampliada del álgebra y mencionan como un punto crucial a "la elección de tareas que los profesores proponen a sus estudiantes con la finalidad de fomentar en ellos la reflexión sobre los objetos matemáticos".

Finalmente, Herscovics & Lichevski (1994) mencionan como otros aspectos a tomar en cuenta en esta problemática al ritmo en el que son abordados estos temas, así como la aproximación usada para su enseñanza.

Dado que dentro de la enseñanza del álgebra se movilizan diversas nociones matemáticas, para el desarrollo de este trabajo hemos elegido centrar nuestra atención en el caso particular de la enseñanza de las ecuaciones lineales, encontrando que el estudio de este objeto matemático permitirá apreciar cómo los profesores afrontan las situaciones que se han planteado en los párrafos anteriores.

La trasendecia de las ecuaciones lineales queda en manifiesto, entre otros aspectos, en la gran cantidad de investigaciones que se han desarrollado donde se estudia a este objeto matemático desde diferentes perspectivas, como las que se muestran a continuación.

Londoño Orrego, Muñoz Mesa, Jaramillo López, & Villa Ochoa (2011) mencionan que cuando los estudiantes observan expresiones como $2x + z$, sienten la necesidad de "seguir operando", lo cual lleva a asignar expresiones como xy o $5x$ para representar la solución de $x + y$ y de $3x + 2$, respectivamente. Es decir, los estudiantes consideran que estas últimas expresiones están incompletas en algún sentido y se sienten obligados a expresarlas como una igualdad, en este caso $x + y = xy$ o $3x + 2 = 5x$. Además, en un estudio elaborado por Kieran (1983) referido en Kieran & Filloy Yagüe (1989), "se encontró que algunos de los estudiantes no podían asignar significado alguno a a en la expresión $a + 3$ porque la expresión carecía de un signo igual y un miembro de la derecha".

Otras investigaciones refieren que la aproximación más usual en la enseñanza del álgebra al resolver problemas verbales es formular una ecuación (o sistema de ecuaciones) que involucran incógnitas y operaciones y a través de manipulación algebraica despejar la incógnita para encontrar la solución (Kieran, 1992). Para ello, los estudiantes tienden a usar la "traducción directa" para resolver problemas verbales a través de ecuaciones, la cual involucra una traducción frase por frase de dicho problema en una ecuación que contiene números, variables y operaciones; para lo cual se requiere de algunos conocimientos semánticos, pero generalmente solo se utilizan reglas sintácticas.

Kieran & Filloy Yagüe (1989) mencionan los problemas que conlleva el presentar ecuaciones fuera del contexto de situaciones auténticas en problemas verbales, señalando que este acercamiento provoca que "los niños casi nunca usan ecuaciones para representar los problemas aritméticos verbales y, si se les pide una ecuación, los niños resuelven primero el problema y luego intentan dar la ecuación". En este sentido, Kieran (1992) menciona que, en este contexto, si un niño escribe la ecuación que se ha pedido, usualmente representa la operación que ha llevado a cabo para encontrar la respuesta al problema.

A esto se añaden lo dicho por Londoño Orrego, Muñoz Mesa, Jaramillo López, & Villa Ochoa (2011), quienes apuntan que otra dificultad en la resolución de problemas a través de ecuaciones, están asociadas a la relación entre lenguaje natural y algebraico, ya que a pesar de que se conozcan y comprendan ambos lenguajes, la "traducción" de uno al otro no es automática.

Por otra parte, uno de los requisitos para generar e interpretar adecuadamente representaciones como las ecuaciones, es la concepción del carácter simétrico y transitivo de la igualdad. Kieran (1981) señala que entre los estudiantes que inician sus estudios de álgebra se percibe que la noción del signo igual es una "señal de hacer algo" en vez de un símbolo de equivalencia entre el lado derecho e izquierdo de la ecuación, lo que se observa en el rechazo de expresiones como $4 + 3 = 6 + 1$ o $3 = 3$. Los alumnos consideran que el lado derecho debe indicar la respuesta como en $4 + 3 = 7$. Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg, & Stephens (2005) recalcan esta dificultad y enfatizan que un aspecto crucial en el aprendizaje del álgebra es que el "signo igual" debe ser visto como un símbolo relacional más que operacional.

En cuanto a las estrategias de resolución de ecuaciones Kieran (1992) clasifica estos métodos como: uso de datos numéricos, uso de técnicas de conteo, "tapar" la incógnita, trabajar "hacia atrás", sustitución por prueba y error, transposición (esto es, cambia de lado – cambia de signo) y realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación. Los dos últimos son conocidos como métodos formales de resolución de ecuaciones. En el mismo texto, la autora menciona que los métodos de "prueba y error" que involucran sustituciones numéricas, así como otras técnicas informales tales como "cubrir" el valor a ser "encontrado" y trabajar "hacia atrás" son usados comúnmente para iniciar la enseñanza de resolución de ecuaciones, sin embargo, rápidamente se cambia a un método "formal". También se señalan diversas investigaciones donde se ha analizado la relación entre la enseñanza con estos distintos métodos y sus implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes, dejando clara la dificultad que cada aproximación, o combinación de métodos, implica en el aprendizaje de la resolución de ecuaciones lineales.

Otra aproximación a la enseñanza de la resolución de ecuaciones lineales, implica el utilizar modelos concretos, en este sentido Kieran & Filloy Yagüe (1989) indican que al utilizar dichos modelos en experimentos de enseñanza "muchos estudiantes tendían a anclarse en los modelos y parecían incapaces de ver los lazos entre las operaciones que ejecutaban en el modelo y las operaciones algebraicas correspondientes" a tal grado que utilizaban el modelo aun cuando las ecuaciones podían ser fácilmente resueltas mediante métodos intuitivos.

Ahora bien, las ecuaciones lineales generalmente se encuentran asociadas a la transición entre el aritmética y el álgebra, en ese sentido Linsell (2009), en una investigación con estudiantes, refiere que existe una fuerte relación entre el buen entendimiento que tengan los estudiantes de estructuras aritméticas con la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, para resolver una ecuación por el método de "ir hacia atrás" es importante una buena comprensión de las operaciones inversas.

Por otro lado, trabajos como el de Herscovics & Lichevski (1994) ven a la demarcación entre aritmética y álgebra en términos de una brecha cognitiva (cognitive gap) caracterizada por la inhabilidad de los estudiantes de operar con o en la incógnita, es decir con cantidades desconocidas.

Así mismo, Londoño Orrego, Muñoz Mesa, Jaramillo López, & Villa Ochoa (2011) mencionan una variedad de investigaciones enfocadas a la transición entre la aritmética y el álgebra y señalan que éstas han sugerido "que el estudio de la ecuación lineal debe superar el excesivo énfasis que se hace a los aspectos procedimentales o algorítmicos así mismo trascender la idea de que una ecuación sólo se limita buscar el valor de una incógnita", lo cual conlleva a una aproximación donde se analice lo variante e invariante de una ecuación, mediante procesos de planteamiento, solución e interpretación de ecuaciones.

Finalmente, en la enseñanza de las ecuaciones lineales intervienen factores como los libros de texto, analizar cómo se abordan las ecuaciones dichos texto cobra relevancia en tanto que muchos profesores, según señala Kieran (1992), los utilizan como guía de sus clases y tienden a cubrir los temas según sea marcado por los textos.

Hernández Ponce, Rodríguez Vásquez, & Romero Valencia (2012) realizaron un estudio del concepto de ecuación en los libros de texto mexicanos, donde resaltan el carácter primordialmente algorítmico y el uso de ejercicios que se resuelven de manera mecánica. Mientras que aspectos históricos o diagramáticos se utilizan como recursos motivacionales al inicio del proceso de enseñanza. También McNeil et. Al. (2006) en un análisis de cuatro libros de texto encontraron que estos pueden no estar adecuadamente diseñados para ayudar a los estudiantes a adquirir una noción relacional del signo igual. Frecuentemente presentan el "signo igual" en un contexto de *operaciones igual a resultado* (operations equals answer) como el caso de $3+4=$ ____ o 12-4 $+2=$ ___, y rara vez lo presentaban en contexto de *operaciones en ambos lados* (operations on both sides) como en $3+4+5=3+$ ____.

Como se ha mencionado, la ecuación lineal es un ejemplo de las dificultades en la enseñanza del álgebra y el desarrollo del pensamiento algebraico, en general. Es interés de este trabajo indagar, primeramente, en qué medida los docentes son conscientes de estas dificultades, analizando sus acciones discursivas y operativas manifestadas en su planeación de la enseñanza de la ecuación lineal y posteriormente, analizar qué tan consistentes resultan estas acciones con las efectivamente llevadas a cabo en su implementación en el aula.

Contexto

La Secretaría de Educación Pública mexicana ha anunciado que a partir del ciclo 2018-2019, momento en el que se llevará a cabo la investigación, se implementará en primero de secundaria el Nuevo Modelo Educativo (SEP, 2017) del cual se desprende el programa de estudios para el campo formativo Pensamiento Matemático.

El Enfoque pedagógico que propone este programa es usar los problemas tanto como un medio para desarrollar los contenidos matemáticos como un fin del aprendizaje, de tal manera que los estudiantes sean capaces de usar de manera flexible conceptos, técnicas, métodos y contenidos, así como analizar, comparar y obtener conclusiones dando justificaciones de las mismas. Dichos problemas habrán de ser interesantes para los alumnos, al tiempo que serán contextualizados en actividades tanto intra-matemáticas como extra-matemáticas, ello promoviendo el trabajo colaborativo y desarrollando las capacidades comunicativas de los alumnos. Para lograr esto, el profesor será quien seleccione los problemas, verifique que los alumnos comprendan a fondo lo que en ellos se pide y la información necesaria para resolverlos, incentive que sean ellos quienes planteen las rutas de solución, promueva el trabajo colaborativo, fomente la reflexión de los alumnos sobre sus planteamientos, así como la institucionalización del contenido que desarrollen.

En cuanto a los contenidos matemáticos, la organización curricular consta de tres ejes temáticos:

- Número, álgebra y variación
- Forma, espacio y medida
- Análisis de datos

Dentro del primer eje se desprenden los siguientes temas:

- Número
- Adición y sustracción
- Multiplicación y división

- Proporcionalidad
- Ecuaciones
- Funciones
- Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes

En el tema de ecuaciones el currículo plantea que se deben abordar los siguientes aprendizajes esperados:

- En 1° de secundaria: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales.
- En 2° de secundaria: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- En 3° de secundaria: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones cuadráticas.

Es por esto que nuestro trabajo se centrará en las acciones que realicen profesores de primero de secundaria en el proceso de enseñanza para lograr el aprendizaje esperado “resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de ecuaciones lineales”.

Marco teórico

En este apartado se hace un resumen de los constructos, propios de este enfoque, que se manejarán a lo largo de este trabajo.

En el EOS, con la noción de *sistemas de prácticas* se hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en que se apoya este modelo. Se considera una *práctica matemática* a “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino & Batanero, 1994, pág. 332). En el estudio de las matemáticas, más que el estudio de una práctica en particular, interesa analizar los sistemas de prácticas realizados ante una situación-problema. Como mencionan Font & Ramos (2005), una forma de conceptualizar las prácticas matemáticas es considerarlas como una combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva, que permite la reflexión sobre la práctica.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos y no ostensivos, que evocamos al hacerlas y que son representados en forma textual, oral, gráfica o gestual (Godino, Batanero, & Font, 2008). Derivado de los sistemas de prácticas se postula la emergencia de *objetos personales* e *institucionales*. En el EOS “los objetos matemáticos se pueden considerar como entes abstractos que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas que se desarrollan en una institución y están ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos” (Font & Ramos, 2005, pág. 311). Dado que las prácticas matemáticas pueden ser realizadas tanto por uno o varios individuos, se distinguen los o*bjetos institucionales* considerados como emergentes del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas compartidas en el seno de una *institución*, entendida como un grupo de personas involucradas en una misma clase de situaciones problema, y los o*bjetos personales* entendidos como el sistema de prácticas de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge un objeto matemático, en un momento dado.

Los objetos que emergen al realizar dichas prácticas son de distinta naturaleza (Díaz Godino, 2003; Godino, Batanero , & Font, 2008): Al alumno se le plantean *situaciones-problema* de distintos tipos, entendidos en un sentido amplio, incluyendo tanto problemas como ejercicios simples en contextos intra y extramatemáticos; para resolverlos, generalizar su solución o describirlos utiliza *lenguaje matemático* como términos, expresiones, notaciones, gráficos, entre otros; estas situaciones-problema son resueltas a través de diversos *procedimientos* como operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo y estrategias; al realizarlos no sólo se realizan acciones sobre los símbolos u objetos materiales con los que se opera sino que se necesita evocar diferentes *conceptos* o nociones matemáticas que se conocen previamente, al tiempo que se realizan descripciones y definiciones; las características específicas de estas situaciones serán sus *propiedades* o atributos, es decir, las condiciones de realización de las acciones o relaciones entre objetos, etc.; todas estas acciones y objetos se ligan entre sí mediante *argumentos* y razonamientos que se usan para comproblar las soluciones de los problemas, explicar y justificar la solución, las cuales pueden ser deductivas o de otro tipo.

Dado que este enfoque apela a un modelo pragmático de la cognición, “el *significado* de los objetos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con los objetos” (Godino & Batanero, 1994) estas acciones son lo que se ha denominado *sistemas de prácticas*. Dado que se han contemplado *sistemas de prácticas personales* e *institucionales*, se distinguirá entre *significados institucionales* y *personales*. Por las características de este trabajo, únicamente se utilizarán los *significados institucionales* que se describen en seguida.

Interesa distinguir cuatro tipos de *significados institucionales* de un objeto matemático: significado institucional de *referencia, pretendido* e *implementado*. Al momento de planificar un proceso de instrucción sobre un objeto matemático, el profesor ha de indagar en lo que los expertos han dicho sobre él, cómo se ha construido históricamente, lo que el currículo plantea y lo que dicen los libros de texto o los materiales que utilice para impartir su clase. Estos elementos, constituyen el *significado de refencia* de ese objeto matemático. A partir de dichos elementos, el profesor selecciona, ordena y delimita la parte específica que propondrá a sus alumnos, lo cual es nombrado *significado pretendido*. Al momento de poner en práctica lo pretendido surgen nuevas cuestiones y la planeación se va adecuando a las circunstancias que van apareciendo, estas prácticas que efectivamente son llevadas a cabo en el aula y que son referencia para el estudio de los alumnos y evaluación de los aprendizajes, son conocidas como *significado implementado* (Font & Ramos, 2005).

La noción de *configuración ontosemiótica* “responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones – problemas” (Godino J. D., 2017) y permite identificar posibles conflictos de aprendizaje. Los objetos matemáticos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas pueden ser considerados desde las facetas *personal* (mental) – *institucional* (sociocultural), o*stensivo* (material) – *no ostensivo* (inmaterial), *expresión – contenido* (antecedente -significante- y consecuente -significado-, respectivamente, de una función semiótica), e*xtensivo* (particular) – *intensivo* (general), y *unitario* (como regla) – *sistémico* (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos). El proceso mediante el cual emergen los objetos conlleva a otros procesos cognitivos - epistémicos más básicos: generalización, idealización, unitarización, significación, representación, etc.

■ Objetivos y metodología

De acuerdo con las nociones que se han descrito, la pregunta de investigación en términos del EOS, ha sido replanteada como ¿Qué relación existe entre el significado institucional pretendido y el implementado, de los profesores de secundaria, respecto a la ecuación lineal?

De lo anterior se desprende que el Objetivo General (O_G) de la investigación es determinar la relación entre el significado pretendido y el implementado por profesores de matemáticas de secundaria, respecto a la ecuación lineal.

Para lograr el Objetivo General, se han establecido los siguientes Objetivos Específicos:

- OE_1. Caracterizar el significado institucional de referencia de la noción de ecuación lineal.

- OE_2. Determinar el significado institucional pretendido por profesores de la noción de ecuación lineal.
- OE_3. Determinar el significado institucional implementado por profesores de la noción de ecuación lineal.
- OE_4. Analizar la relación entre el significado institucional pretendido y el implementado.

La investigación propuesta es de corte cualitativo para la cual se trabajará con tres docentes en servicio que impartan clase en primero de secundaria, la característica que se tomará en cuenta para su selección es que no tengan los mismos rasgos (formación, experiencia y tipo de escuela -privada o pública-).

Para la consecución de cada uno de los objetivos mencionados anteriormente se han establecido las siguientes acciones metodológicas:

Para el OE_1:
- Caracterizar las prácticas que son promovidas en el programa de estudios de Matemáticas de Secundaria para el estudio de las ecuaciones lineales.
- Caracterizar las prácticas que son promovidas en libros de texto para la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Para el OE_2:
- Elaborar una guía que permita realizar una entrevista para indagar en las concepciones de los docentes referentes al pensamiento algebraico, en la enseñanza de las ecuaciones lineales.
- Realizar un pilotaje de dicha guía, así como someterla a juicio de expertos, para su mejora.
- Implementar la entrevista a los profesores y con base en ella caracterizar las concepciones de los docentes respecto al pensamiento algebraico, en el caso de la enseñanza de las ecuaciones lineales.

Para el OE_3:
- Diseñar una guía de observación de clase que permita investigar y describir las prácticas efectivamente llevadas a cabo por los profesores al enseñar ecuaciones lineales.
- Realizar un pilotaje de dicha guía, así como someterla a juicio de expertos, para su mejora.
- Implementar la guía de observación de clase, ya refinada, y con base en lo observado caracterizar las prácticas implementadas por los profesores.

Para el OE_4:
- Realizar un contraste general entre el significado pretendido e implementado por los docentes sobre la ecuación lineal.
- Analizar la correspondencia entre el significado pretendido e implementado relativo a la ecuación lineal, de los profesores.

Al ser un estudio exploratorio, se pretende únicamente describir cada uno de los significados y distinguir su correspondencia, sin llegar a ser un trabajo que busque emitir algún juicio de valor respecto a dichas concepciones o prácticas, tampoco es interés de esta investigación el poder generalizarlo para docentes con características similares.

Hasta aquí se ha presentado el proyecto desarrollado para realizar esta investigación; a la fecha se están elaborando los instrumentos que serán aplicados, razón por la cual aún no se cuenta con resultados o conclusiones derivadas de los mismos.

Referencias

Aké Tec, L. P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.

Aké, L. P., Castro, W. F., & Godino, J. D. (2015). *Niveles de razonamiento algebraico en la actividad matemática de maestros en formación: Análisis de una tarea estructural*. Acta Latinoamerica de Matemática Educativa (30), 1524-1532.

Doerr, H. M. (2004). *Teachers' knowledge and the teaching of algebra.* En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal, Future of the teaching and learning of algebra (págs. 267-290). Kluwer Academic Publishers.

Font, V., & Ramos, A. B. (2005). *Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.* Revista de Educación, 309-346.

Godino, J. D. (2017). *Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática.* En P. A.-M. J. M. Contreras (Ed.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématiques, 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 7-37.

Hernández Ponce, C., Rodríguez Vásquez, F., & Romero Valencia, J. (2012). *Estudio didáctico del concepto ecuación en la educación básica.* En R. Flores (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25 (p.p. 17-26). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Herscovics, N., & Lichevski, L. (1994). *A cognitive gap between arithmetic and algebra.* Educational Studies in Mathematics, 59-78.

INEE. (2017). *La Educación Obligatoria en México.* México: INEE.

Kieran, C. (1981). *Concepts associated with the equality symbol.* Educational Studies in Mathematics, 12, 317-326.

Kieran, C. (1983). *Relationships between novices's views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures.* En Bergeron y Herscovics, (eds). Vol.1, pp. 161-168

Kieran, C. (1992). *The learning and teaching of school algebra.* En D. A. Grouws, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics (págs. 390-419). New York: Macmillan Publishing.

Kieran, C., & Filloy Yagüe, E. (1989). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.* Enseñanza de las Ciencias, 229-240.

Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., & Stephens, A. (2005). *Middle school students' understanding of core algebraic concepts: equivalence and variable.* ZDM (37), 68-76.

Linsell, C. (2009). *Students' knowledge and Strategies for Solving Equations.* Findings from the New Zeland Secondary Numeracy Project 2008, 29-43.

Londoño Orrego, S. M., Muñoz Mesa, L. M., Jaramillo López, C. M., & Villa Ochoa, J. A. (2011). *Una aproximación a la noción de ecuación lineal.* XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

McNeil, N., Grandau, L., Knuth, E., Alibali, M., Stephens, A., Hattikudur, S., & Krill, D. (2006). *Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help.* Cognition and Instruction, 24(3), 367-385.

Nathan, M., & Koedinger, K. (2000). *An Investigation of Teachers' Beliefs of Students' Algebra Development.* Cognition and Instruction, 209-237.

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral.* México: SEP.

Stein, M., Baxter, J., & Leinhardt, G. (1990). *27ubject- Matter Knowledge and Elementary Instruction: A Case from Functions and Graphing.* American Educational Research Journal, 639-663.

Stephens, A. C. (2008). *What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers?* Journal of Mathematicl Behavior, 33-47.

Tunks, J., & Weller, K. (2009). *Changing Practice, Changing Minds, froma Arithmetical to Algebraic Thinking: An Application of the Concernsbased Adoption Model (CBAM).* Educational Studies in Mathematics, 161-183.

¿RAZONES Y NÚMEROS: ¿COMPLEMENTARIEDAD O COMPETENCIA?

RATIO AND NUMBER: COMPLEMENTARITY OR COMPETITION?

Gilberto Obando Zapata
Universidad de Antioquia (Colombia)
gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen
Actualmente, el concepto de número real ha desplazado al concepto de razón como tema de preocupación de las comunidades científicas, pero en el campo educativo sigue siendo tema central, sobre todo, por su utilidad en las actividades de la vida cotidiana. ¿Cómo se han dado esos movimientos entre número y razón? ¿Cómo se constituyen primacías de lo uno hacia lo otro en determinadas épocas y lugares? No hay una respuesta única, pero en este artículo se presentan hipótesis sobre posibles respuestas. Así, a partir de un análisis de las prácticas matemáticas en diferentes épocas y lugares se identifican formas de actividad matemática relacionadas con el concepto de número y el concepto de razón. En algunas de ellas se identifica la existencia de una teoría de razones y proporciones sin que sea claro el estatus de las razones como números. En otras, es claro el lugar de la razón como número, pero sin una referencia explícita a una teoría de razones y proporciones. De esta manera el estudio realizado permite una aproximación a los conceptos de número y de razón que puede ser útil para orientar los proceso, de enseñanza de estos en contextos escolares.

Palabras clave: razón, proporción, proporcionalidad, números racionales

Abstract
Currently, the concept of real number has displaced the concept of ratio as a matter of concern for scientific communities, but in the field of education, it remains a central issue, above all, for its usefulness in the activities of daily life. How have those movements occurred between number and ratio? How are primacies constituted from one to the other in certain times and places? There is no single answer, but in this paper present hypotheses about possible answers. Thus, from an analysis of mathematical practices in different times and places identified forms of mathematical activity related to the concept of number and the concept of ratio. In some of them exists a theory of ratios and proportions without the status of the ratio being clear as numbers. In others, the place of ratio as a number is clear, but there is not explicit reference to a theory of ratios and proportions. In this way, the study allows an approximation to the concepts of number and ratio that can be useful to guide the process of teaching them in school contexts.

Key words: ratio, proportion, proportionality, rational numbers

Introducción

Nociones relativas a las razones (y por qué no, de proporción y proporcionalidad) se pueden identificar desde la antigüedad en relación con ciertos tipos de problemas y las técnicas para resolverlos. En todos estos casos, y quizás sin un nombre para referirla explícitamente, esa idea de razón responde a una pregunta crucial; ¿cuánto es una cantidad comparada con otra (en principio, de la misma naturaleza) tomada como referencia? (Obando, 2015). La herencia griega nos enseñó a llamar razones (que no números) a esas entidades con las cuáles responder dichos tipos de problema (Théon (de Smyrne), 1892); pero no fue ese el caso en otras culturas, en donde las fracciones de unidad fueron la respuesta (Caveing, 1992; Chemla, 1992), y estas eran reconocidas como números (que no necesariamente la idea moderna de número de la cultura occidental). Para occidente, tener las razones como números implicó una profunda reorganización del sistema de prácticas matemáticas asociadas a la cantidad, al número (ver, por ejemplo, Stevin, 1634).

Así entonces, en este artículo se analizarán algunos momentos de la historia de las matemáticas, buscando la configuración epistémica del sistema de prácticas en el cual se sitúan. Se indagará por los tipos de problemas que resolvían, las formas de representación utilizadas, los procedimientos y técnicas presentes, al igual que los objetos de conocimiento objetivos como emergentes de ciertas prácticas históricamente situadas De esta manera, el resultado es en relación con las posibles configuraciones de la actividad matemática: la relación número y magnitud a través de la noción de razón entre cantidades de magnitud; el valor epistémico de las razones en la constitución de la noción de número.

Marco teórico

La actividad matemática de los individuos en diferentes épocas y lugares tiene una estructura (forma de organización lógica) que se fija en los patrones de la actividad (prácticas matemáticas específicas) que despliegan los individuos en un marco institucional determinado, y, en consecuencia, el análisis histórico y epistemológico busca las formas de ser de esos objetos de conocimiento en el marco de sistemas de actividad específico. Como lo plantean Jankvist y Kjeldsen, se trata de

> Tomar la práctica de los matemáticos como punto de partida para la historia de las matemáticas, con el fin de comprender cómo las matemáticas han sido practicadas y comprendidas, cómo el conocimiento matemático ha sido producido a través del tiempo en diferentes lugares, en diferentes culturas y en diferentes contextos intelectuales, así como tales comprensiones y producciones han cambiado, localiza la historia de las matemáticas en un lugar y en un medio intelectual. Una aproximación tal involucra estudiar episodios concretos de la historia de las matemáticas para obtener luces en asuntos tales como: por qué los matemáticos se preguntaron las cuestiones que trataron, porque ellos tratan los problemas de la manera como lo hicieron, qué tipo de pruebas o argumentos daban, y cómo éstos fueron percibidas o recibidas dentro de la comunidad matemática de momento, por qué ellos introdujeron ciertos objetos matemáticos, definiciones y áreas de investigación etc.; y cómo todo lo anterior influencia desarrollos futuros en las matemáticas así como cambios en las percepciones sobre las matemáticas. (Jankvist & Kjeldsen, 2010, p. 836)

Así, en línea con los planteamientos de Ferreirós (2010), Kitcher (1984) y Obando. (2015), las prácticas matemáticas caracterizan la actividad de las personas de una época y lugar en función de la manera como interrelacionan diversidad de lenguajes (lenguaje natural, expresiones técnicas, medios simbólicos, etc.), de formas de enunciar (proposiciones, teoremas, afirmaciones, etc.), de métodos y formas de razonamiento, y de problemas por resolver. Estos elementos en su conjunto, en las personas y en las comunidades, toman forma en, a la vez que moldean, la acción matemática específica de las personas. Esta noción de práctica matemática está en la dirección de Jankvist and Kjeldsen (2010) o Epple (2004) sobre la noción de configuración epistémica, la cual refieren al conjunto de recursos intelectuales disponibles en un episodio histórico específico, y que determinan el curso de la actividad matemática de un matemático o grupo de matemáticos en esa época y lugar.

En este sentido, el análisis histórico no busca un desarrollo cronológico o internalista de los objetos de conocimiento, sino estudiar los sistemas de actividad, es decir, identificar los tipos de problemas que se resolvían, los instrumentos y las técnicas para resolver tales problemas, y los objetos y conceptos constituidos en tales sistemas de prácticas. Siguiendo a Mosvold, Jakobsen, and Jankvist (2013), se buscan desde la historia de las matemáticas, lecciones pedagógicas que permitan: (1) orientar los procesos de estudio de los estudiantes, (2) mejorar la comprensión de los objetos de conocimiento que se pretende enseñar, y (3) tener mejores elementos en la comprensión de lo que hacen los estudiantes. Con esto no se espera que haya un paralelismo entre el desarrollo histórico y el proceso de aprendizaje de estudiante, sino que por el contrario “lograr una manera productiva de aprender a escuchar a los estudiantes” (Clark, 2012, p. 70), o como dice Vasco (1995), se espera a identificar sobre la base de los acontecimientos del ayer, fuentes heurísticas para planificar los eventos de aprendizaje de las escuelas del mañana.

Metodología: estudiar históricamente las prácticas matemáticas

Cómo se expresó antes, el objeto central de este artículo es ver, en diferentes momentos del desarrollo histórico de las matemáticas, *los tipos de problemas* que se enfrentaron y, a través de las soluciones encontradas, las *formas de representación* y las *técnicas instrumentadas* relacionadas con esas formas de representación. Así entonces, a partir de un estudio documental se intenta comprender la manera como razones, proporciones y proporcionalidad han vivido en el seno de diferentes culturas, en épocas y lugares diversos y cómo es que dichos objetos de conocimiento matemático fueron usados, comprendidos, organizados en unos sistemas de prácticas locales. Igualmente se analiza cómo a pesar de estas diferencias conservaron ciertos elementos estructurales que hacen posible su puesta en diálogo, su comunicación de un sistema a otro, su transformación, su síntesis en nuevos sistemas más globales y, a la vez, más potentes.

Épocas y lugares estudiados

Se identificaron autores u obras paradigmáticas o representativas de la cultura matemática de épocas y lugares específicos (por ejemplo, la obra de Euclides o Arquímedes, para la cultura griega) o autores especializados que hubieran realizado estudios detallados de las matemáticas de un periodo específico en alguna de estas culturas (por ejemplo, Robson (2007) o Rashed and Vahabzadeh (1999) para la matemática en la cultura islámica de la edad media). La consulta a los autores especializados permitió identificar potenciales autores y obras paradigmáticas de épocas y lugares.

Las fuentes documentales

Las fuentes documentales se pueden clasificar como primarias o secundarias. Entendemos por fuentes documentales primarias aquellas que se corresponden con obras publicadas por autores de la época y lugar en estudio, y secundarias a las que se corresponden o que son traducciones modernas (al inglés o español) de dichas obras clásicas, o que son compilaciones analíticas realizadas por autores modernos sobre las matemáticas de una época y lugar determinado.

Las fuentes primarias

Las fuentes primarias fueron recuperadas a través de proyectos de virtualización de obras con valor histórico, entre los que se pueden citar, DML: Digital Mathematics Library, The Cornell University Historical Mathematics

Monographs, Gallica, Biblioteca nacional de Francia, Internet Archive, The University of Michigan Historical Mathematics Collection, Google Books.

Las fuentes secundarias

Las fuentes secundarias fueron de dos tipos: traducciones al inglés, francés o español de textos clásicos publicados en idiomas diferentes; artículos publicados en revistas especializadas en historia de las matemáticas; o libros publicados por autores especializados en ciertos momentos de una determinada cultura.

Algunos de los documentos consultados fueron traducciones (al inglés o al francés) de textos escritos originalmente en otros idiomas como el griego, el latín, el árabe, entre otros (no conocidos por el autor de la tesis). En algunos casos, los textos originales (en latín y árabe) que sirvieron de base para tales traducciones (al inglés y el francés) fueron a su vez traducciones de textos en otros idiomas (algunos ya perdidos). Esto se puede catalogar como una dificultad en el acceso a las fuentes, pero, donde fue posible, esta dificultad se compensó con la consulta de versiones del mismo texto traducidas por diferentes autores o en diferentes idiomas, o consultando textos de diferentes autores de la misma época y lugar. De esta manera se logró tener un sentido más completo del sistema de prácticas matemáticas que se cristalizan a través de dichas obras.

El tratamiento de las fuentes

A través de las diferentes fuentes documentales se analizaron los tipos de situaciones en las que el objeto razón era aquello hacia donde se orientaba la actividad, o era instrumento para la actividad misma. Se indagó por las formas de mediación instrumental que permitían poner este objeto en el centro de la actividad, y por las formas de objetividad logradas en el marco de dichos sistemas de actividad.

Por supuesto, dependiendo de la época y lugar, la palabra razón no está, o ni siquiera existe; por lo tanto, lo que se buscaba no eran las palabras, sino si en esas diferentes épocas y lugares se configuraban unos sistemas de práctica en los que se pudieran identificar unas acciones mediadas por unos objetos cuya función fuera identificable con las formas de acción mediada de aquellas culturas en las que sí estaban presentes estas palabras para nombrar tales objetos de mediación. Se analizó entonces la estructura de la actividad mediada por tales objetos, y se demarcaron trazas comunes a dichas formas de actividad. Así entonces, se identificaron ideas relacionadas con la cantidad, su representación, la operación con las cantidades a través de dichas formas de representación, y la relación de todo lo anterior con los problemas que se debían resolver; estos fueron principios claves para encontrar esas caracterizaciones de las prácticas matemáticas relativas a las razones.

Resultados

Por tomar un punto de partida, se puede referir la idea griega de razón. Si bien es claro que en los griegos la razón no es un número (pues solo eran números los naturales), si se puede afirmar que éstas gozaban de un estatus de cantidad, aunque diferente al de los números y de las magnitudes. Las definiciones y proposiciones sobre las razones que aparecen en el libro *Data* de Euclides (1806), al igual que el tratamiento dado a las razones y a las proporciones en los libros V y VII de los *Elementos* (en donde se muestra que las razones son susceptibles de comparación por igualación y por diferencia), hacen evidente que ellas cumplen con las dos características esenciales para que algo pueda ser cantidad: se deben poder igualar, y debe ser posible establecer la diferencia entre ellas. Sin embargo, no se tiene evidencia de un texto matemático griego en el que se manifieste de manera explícita el carácter de cantidad de la razón.

La declaración explicita de las razones como cantidades se evidencia en los textos de los matemáticos árabes de finales del primer milenio de la era cristiana. Esa declaración de la razón como cantidad, vino de la mano de una lectura crítica de los textos matemáticos griegos por parte de los matemáticos árabes y, por ende, de una reconceptualización de nociones claves de los *Elementos*, como la definición de proporcionalidad, en particular, la definición dada en el libro V. Es así que Rashed y Vahabzadeh (1999), en la traducción que presentan de algunos textos del matemático persa Al-Khayyam, mencionan varios trabajos en los que se critica la definición 5 del libro V de los *Elementos*, pues se considera que la noción de equimúltiplo sobre la que se basa no es de fácil aplicación, y que, además, la separación dada en los libros V y VII profundiza la confusión, pues la definición de proporción en el libro VII es de más fácil uso.

En particular, Al-Khayyam, al comienzo del libro segundo (este libro segundo lleva por título *Exposición sobre las razones y la noción de proporcionalidad y sobre su verdadera naturaleza*), dice: el autor de los *Elementos* ha dicho, a propósito de la verdadera naturaleza de la razón: "*es la esencia de la medida de dos magnitudes homogéneas, la una relativamente a la otra*." (Rashed & Vahabzadeh, 1999, p. 340), aclarando luego que dichas magnitudes deben cumplir la propiedad arquimediana (este autor considera, siguiendo la tradición Aristotélica, cuatro géneros de cantidad: la línea (longitud), la superficie, el sólido (volumen), y el tiempo – considerado como la medida del movimiento de los cuerpos). Para él, la medida relativa de una magnitud a otra remite a establecer de manera exhaustiva cuánto es una con relación a la otra, "bien sea determinando qué fracción es, o bien sea de alguna otra manera" (La expresión "de alguna otra manera" refiere a las magnitudes no conmensurables, para las cuales su medida no se puede expresar con una fracción (razón entre un par de números naturales). Luego argumenta que la razón comporta dos aspectos: poner en relación dos magnitudes comparadas a través de su diferencia (diferencia pensada en términos de cociente), y que ella en sí misma posee la característica de cantidad: dos razones pueden ser comparadas en la igualdad y en la diferencia (desde Euclides, estas dos propiedades expresan la esencia de una cantidad).

Posteriormente analiza las implicaciones de considerar estos dos principios sobre las razones, cuando se consideran entre números o entre magnitudes. Así entonces, partiendo del hecho de que establecer la razón entre dos números es medir el uno con respecto al otro, concluye entonces que la razón determina el valor de la medida relativa entre los dos números, y que, para hallar dicha medida se divide el uno por el otro, cuando la misma es exacta. Para el caso en que el número menor no mide de forma exacta al mayor, (el mayor no es múltiplo del menor), la división del mayor por el menor, en virtud de la indivisibilidad de la unidad, siempre termina en uno (la unidad es la medida de todos los números). Es más, el autor, apoyado en las proposiciones 1 y 2 del libro VII muestra que dados dos números donde el menor no mide al mayor, la aplicación sucesiva del algoritmo de Euclides permite determinar la medida relativa de un número con respecto al otro.

Cuando este principio del algoritmo euclideo se utiliza para determinar la medida relativa entre dos magnitudes (continuas), entonces Al-Khayyam muestra que la dificultad radica en que, para el caso de las magnitudes, no todas las sustracciones sucesivas de los residuos (la división euclidea) terminan en un número finito de pasos, en tanto que las divisiones sucesivas para el caso de las magnitudes continuas no tienen como límite la unidad. Sin embargo, dice, esto no imposibilita afirmar que la verdadera naturaleza de la razón esté en la medida relativa entre magnitudes, y que la división euclidiana sea el principio a partir del cual determinar el tamaño, la cantidad de la razón que relaciona las dos cantidades para las cuales se establece la razón.

De esta manera, el estudio de las razones entre magnitudes se separa en dos: el caso en que son conmensurables, y el caso en que no lo son.
Si lo primero, Alkhayyam dice (expresado en términos modernos) dadas cuatro magnitudes A, B, C y D, donde A es el mismo múltiplo de B que C es de D, o A es la misma fracción de B, que lo es C de D, entonces la razón de A a B es inevitablemente la misma que la de C a D. En este caso extiende la definición de proporcionalidad entre números del libro VII de los Elementos de Euclides, al caso de magnitudes conmensurables.
Si lo segundo, dadas cuatro cantidades A, B, C y D, donde el mismo múltiplo m_o de veces que se puede sustraer B de A, sobrando un residuo r_o, es el múltiplo de veces que se sustrae D de C, sobrando un residuo s_o; y si el mismo

múltiplo m_1 de veces que se puede sustraer r_o de B, sobrando un residuo r_1, es el múltiplo de veces que se sustrae s_o de D, sobrando un residuo s_1; y si el mismo múltiplo m_1 de veces que se puede sustraer r_1 de r_o, sobrando un residuo r_2, es el múltiplo de veces que se sustrae s_1 de s_o, sobrando un residuo s_2; y así sucesivamente, encontrando que la serie infinita de números $m_0, m_1, m_2, \ldots,$ es la misma número a número para ambas razones, entonces la razón de A a B es inevitablemente igual a la razón de C a D.

Esta nueva forma de establecer la proporcionalidad entre dos parejas de magnitudes no conmensurables entre sí tiene gran importancia: en primer lugar, se identifica un mecanismo único y universal para encontrar la cantidad de una razón que relaciona dos magnitudes, a saber, la división de una por la otra. En segundo lugar, el uso de una técnica que siglos más tarde será llamada la representación en fracciones continuas para aproximar razones entre magnitudes no conmensurables. En tercer lugar, la objetivación de la razón a través de la secuencia de números obtenida a partir de las divisiones sucesivas. Pero en este momento, la razón, si bien objetivada en una representación (la secuencia de residuos), aun no es número.

Este procedimiento para calcular y comparar razones fue ampliamente utilizado en la Edad Media dando importantes avances en la representación simbólica de los números y las razones y, por ende, en las técnicas para operar con estas nuevas cantidades. Por ejemplo: Bombelli introduce de manera sistemática el uso de las fracciones continuas (llamadas así más tarde por Wallis) para expresar cantidades racionales e irracionales (las fracciones continuas, conservan la esencia del método de divisiones sucesivas de Alkhayyam, pero convergen más rápidamente en el sistema de numeración decimal). Oresme desarrolla un estudio sistemático de las proporciones continuas mostrando nuevas técnicas de representación que facilitaron los cálculos con las potencias y las raíces (Oresme & Grant, 1965); Napier introduce los logaritmos proporcionando nuevas técnicas de cálculos entre cantidades que cambian proporcionalmente con respecto al tiempo.

Hechos como estos fueron determinantes en el desarrollo de nuevas formas de representación para las cantidades y los números, nuevas técnicas para calcular con estas cantidades y, por ende, nuevas formas para resolver los problemas, y por qué no, nuevos problemas que permiten la constitución de un escenario en el que números y razones cambian rápidamente, conceptualmente hablando.

Estos cambios se evidencian, por ejemplo, en el trabajo de Vieta, en donde a partir de un programa unificador que le permitiera aplicar el análisis no solo a lo geométrico (en el sentido de Pappus), sino también a lo aritmético (en el sentido de Diofanto), desarrolla una conceptualización sobre el análisis y la síntesis que aplica por igual a ambas ramas del conocimiento, basado, por supuesto, en una teoría de proporciones que aplica entonces tanto a números como a magnitudes, con lo que efectivamente asume el álgebra no solo como una teoría sobre las ecuaciones, sino como una teoría general de las proporciones (Klein, 1992). Es así entonces que para Vieta una proporción puede decirse es la constitución de una ecuación, y la ecuación, la manera de resolver una proporción (Viete, 1630, 1630/1983), Igualmente afirma (finalizando el capítulo 1) que este obtener las proporciones y las ecuaciones se apoya en los principios generales de la lógica, del silogismo, en las nociones comunes, en los axiomas y teoremas ya conocidos (refiriéndose a los elementos de Euclides), como se evidencia en el capítulo II donde enuncia los principios generales, tomados de los elementos, sobre los cuales se fundamentan los símbolos para las ecuaciones y las proporciones

Pero, así como el álgebra se constituye en una teoría general de las proporciones, aplicables tanto al número como a las magnitudes, los símbolos usados por Vieta para representar las magnitudes o los números comportan igualmente una noción de cantidad generalizada. Así entonces, la incógnita se hace la representación generalizada de la cantidad o de la magnitud, se opera con ella como si fuera un número, y por qué no, se constituye una nueva forma de cálculo (Klein, 1992). En palabras de Vieta, una "logística especiosa" (cálculo con lo simbólico), en la cual los símbolos usados representan la forma de la cosa, y no la cosa en sí misma, es decir son signos con estructura espacial usados para representar la naturaleza de las magnitudes, y en el mismo sentido, las ecuaciones son construcciones que representan las relaciones (las proporciones) entre las magnitudes involucradas en la situación, y estos signos se hacen cosas, como objetos del pensamiento, con las que se puede operar. Es en este sentido que Klein afirma que en Vieta está el nacimiento del concepto moderno de número, no medido tanto por su nivel de abstracción, sino por su capacidad para el cálculo simbólico, y eso es lo que se encuentra en el conjunto de reglas establecidas para el cálculo especioso, las cuales, a la manera de un sistema axiomático, crean un contexto dentro del cual se define el objeto mismo con el que se tratará, a saber, la incógnita como número generalizado.

Esta formulación de la razón como número se hace explícita en otros matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Por ejemplo, Newton, en su texto *Aritmethica Universalis* (Newton, 1720, 1972), define número de la siguiente manera: "por número comprendemos, no tanto una multitud de unidades, como la *razón* abstraída de cualquier cantidad a otra cantidad del mismo tipo, la cual tomamos como unidad" (Newton, 1720, p. 2). En esta definición de número hay profundas raíces de la herencia cartesiana, pero a diferencia de este, se hace explícito el carácter de número presente en las razones. En la misma página, Newton afirma la existencia de tres tipos de números: *enteros (whole)*, los que son un múltiplo entero de veces la unidad; *fracciones*, los que son una parte submúltiple (*submultiple part*) de la unidad de medida, y *absurdos (surds)*, los que no son conmensurables con la unidad. Nótese entonces la relación explícita entre los números, las razones, la medida y, por ende, las cantidades en general, y las magnitudes en particular. Adicionalmente es interesante mencionar que al explicar el valor posicional de las cifras utilizadas para la notación de los números (explícitamente afirma, en una nota al pie de página, que la notación nos enseña a expresar en caracteres (símbolos) cualquier número expresado en palabras, y la inversa, como enunciar cualquier número propuesto en caracteres), las fracciones de unidad expresadas en esta notación son llamadas *fracciones decimales* puesto que ellas siempre decrecen en una razón decimal, mientras que las partes enteras son llamadas la clase de las unidades, las decenas, las centenas,…, en tanto van en una razón *décuple*.

El conjunto de caracteres que expresan un número es llamado la *figura* del número (como se hacía desde la Edad Media). Más adelante define las cantidades como positivas o negativas, identificando con esto aquellas que son mayores que, o menores que cero (la nada), dando ejemplos con respecto a los bienes que se poseen, las deudas, los movimientos adelante o atrás, los aumentos o las disminuciones, líneas orientadas, etc. Nótese como Newton aún no reconoce las cantidades negativas como números, como sí sucede con los racionales y los irracionales, pero sí caracteriza la negatividad como una especie de atributo de la cantidad que expresa dos tipos de movimientos de la cantidad, uno de los cuales es opuesto al otro (aumentar disminuir, poseer no poseer, derecha izquierda). Desde el punto de vista pedagógico esta observación es interesante, pues, así como la medición, en donde la magnitud de referencia se identifica con el "1" fue clave en la comprensión de las razones como números y, por ende, de aceptar los irracionales como números, entonces el movimiento de las cantidades, la identificación de esos dos movimientos uno como opuesto del otro, puede ser la clave para la comprensión de las cantidades negativas como números por parte de los estudiantes. Todo lo anterior subraya que, desde el punto de vista epistemológico, esta comprensión no es evidente, o al menos, como lo muestra Emmanuel Lizcano (1993) en su libro *Imaginario Colectivo y Creación Matemática*, no es evidente en la cultura occidental, no siendo este el caso para otras culturas, como el caso de las matemáticas en la antigua China.

Conclusiones

Como lo expresan Rashed y Vahabzadeh (1999), en el trabajo de Alkhayyam cada razón queda identificada con una sucesión de números que la identifican de manera univoca, haciendo que la razón pueda ser analizada en sí misma, y no, como en el caso de la definición euclidea del libro V, en donde una razón siempre debe ser analizada con respecto a otra (la que es igual, o menor o mayor. Esto es sin duda un importante avance en la objetivación de la razón como cantidad, dotando a las razones de un estatus simbólico, lo que permite generar nuevas técnicas para actuar con estos objetos matemáticos (operar con los símbolos), ganando así autonomía como entidad con naturaleza propia. Nótese que esta nueva caracterización simbólica de la razón permite unificar en una sola entidad simbólica las razones entre cantidades discretas y entre cantidades continuas, y, además, unifica las técnicas y procedimientos que antes respondían a formas de actividad diferenciada (las formas de hacer en la aritmética diferían de las formas de hacer en geometría, no solo porque la naturaleza de los objetos difiere, sino por el tipo de instrumentos utilizados). De esta forma la idea de razón se reconoce en las operaciones que permite sobre las cantidades a las que se aplica, en las formas de representación del resultado de esta operación (Rashed, R., & Vahabzadeh, B., 1999), y en las operaciones y relaciones que se pueden configurar con esta nueva entidad simbólica

En relación con la notación como emergente de un proceso de división, la razón remite de una u otra forma a una representación de la cantidad no entera, proceso solucionado en algunos momentos a partir del sistema de numeración existente, o a partir de la invención de formas especiales de notación, como es el caso de las fracciones en la antigua China, quienes usaron las fracciones tal como las conocemos hoy en día. Este aspecto de la representación y la operación con la representación es clave, pues podría decirse es lo que permite dar el estatus de número a cantidades que no son enteras (fracciones, raíces). Si bien a lo largo de la Edad Media se constituyeron como entidades simbólicas con las cuales se podía operar, que representaban las razones y proporciones entre números o magnitudes, admitiendo su naturaleza de cantidad, no se asumían como números en tanto se conservaba la conceptualización griega del número. Es así que, en la edad media, con el refinamiento de las técnicas para operar con las razones (por ejemplo, los procedimientos asociados con las fracciones continuas), y la difusión del conocimiento sobre las fracciones (que llega a Europa en la edad media gracias al contacto con los árabes, quienes a su vez lo aprendieron del os hindúes), se desarrollan nuevas comprensiones del número, y de sus formas de notación. Es notable entonces el trabajo de Stevin, que permite unificar las nociones de unidad aritmética y geométrica, al igual que reconoce el status numérico, tanto de la unidad, como de las fracciones de unidad. Este proceso de objetivación de la razón como número, se ve con toda claridad en la noción de número expresada por Newton, quien a su vez la había aprendido de su maestro Barrow, al expresar que el número es la esencia de lo que queda luego de abstraer de las razones, toda referencia a las magnitudes de las cuales ellas expresan su medida relativa (relación cuantitativa).

Esta idea, muy similar a la idea moderna de número, expresada por Russell en términos lógicos (a partir de las nociones de cardinal y clase), hace prácticamente indisociable las nociones de número y razón. Es más muestras cómo detrás del concepto de moderno de número, la base fenomenológica, descansa sobre la una idea de razón. Pero este reconocimiento del número como esencia abstraída de la razón, va de la mano, como ya lo había indicado Vieta, de la posibilidad de reconocer en el signo un objeto con el cual se opera, de alguna manera definido por dicha estructura operatoria. Este discurso sobre el símbolo, donde el número se refiere no tanto a las cantidades sensibles a través de los sentidos, sino a la estructura definida por el símbolo y sus operaciones, hace posible una racionalidad en la que se aprehende a través de la razón aquello que, en otro momento, se había considerado por fuera de la razón misma. Sin embargo, esta apertura al discurso simbólico del número no implica un rompimiento con los fundamentos intuitivos de este; es decir, la naturaleza misma del número, los fundamentos primarios de este, siguen siendo puestos con respecto a esas cantidades sensibles de las cuales el número es una abstracción simbólica, y en donde el símbolo gana independencia, por así decirlo, de esa fuente fenomenológica primaria. Es una objetivación del número en el símbolo.

■ **Reconocimientos**: Este artículo toma como referencia los resultados de la Tesis Doctoral del autor (Obando, 2015).

Referencias bibliográficas

Caveing, M. (1992). Le statut arithmetique du quantieme egyptien. In P. Benoit, K. Chemla, & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp. 39-52). Berlin: Birkhäuser Verlag.

Chemla, K. (1992). Les fractions comme modèle formel en Chine ancienne. In P. Benoit, K. Chemla, & J. Ritter (Eds.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire* (pp. 189-208). Berlin: Birkhäuser Verlag.

Clark, K. M. (2012). History of mathematics: illuminating understanding of school mathematics concepts for prospective mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 67-84. doi:10.1007/s10649-011-9361-y

Epple, M. (2004). Knot Invariants in Vienna and Princeton during the 1920s: Epistemic configurations of mathematical research. *Science in Context, 17*, 131-164.

Euclid. (1806). Data. In R. Simpson (Ed.), *Euclid's Data*. Philadelphia, PA: WM. F. M'laughlin.

Ferreirós, J. (2010). Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices. In M. Suárez, M. Dorato, & M. Rédei (Eds.), *EPSA Philosophical Issues in the Sciences* (pp. 64-64). Dordrecht: Springer Netherlands.

Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2010). New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring. *Science & Education, 20*, 831-862. doi:10.1007/s11191-010-9315-2

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge* (1 ed.). New York, NY: Oxford University Press.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). New York, NY: Dover Publications, Inc.

Lizcano, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matematica. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*. Barcelona: Editorial Gedisa, S. A.

Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2013). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Science & Education. 23, 47-60*. doi: https://doi.org/10.1007/s11191-013-9612-7

Newton, I. (1720). Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution (M. J. Raphson, Trans.). In *Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically*. London: J. Senex.

Newton, I. (1972). Universal Aritmetic. In D. T. Whiteside (Ed.), *The Mathematical papers of Isaac Newton* (Vol. 5). Cambridge: Cambridge University Press.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica.* (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Co. Retrieved from http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

Oresme, N., & Grant, E. (1965). Part I of Nicole Oresme's Algorismus proportionum. *ISIS, 56*(3), 327-341.

Rashed, R., & Vahabzadeh, B. (1999). *Al-Khayyam mathématicien*. Paris: Editions Albert Blanchard.

Robson, E. (2007). Mesopotamian mathematics. In V. Katz (Ed.), *The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam: a sourcebook* (pp. 57-186). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Stevin, S. (1634). L'Arithmetique. In A. Girard (Ed.), *Les Oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges*. Leyden: Bonaventine et Abraham Elsevier.

Théon (de Smyrne). (1892). Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de platon (J. Dupuis, Trans.). In *Oevres de Théon de Smyrne*. Paris: Librairie Hachette.

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West, & M. Stone Wiske (Eds.), *Software goes to school: teaching for understanding with new technologies* (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

Viete, F. (1630). Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre (J.-L. Vaulezard, Trans.). In J. Jacquin (Ed.), (pp. 79). Paris: Chez Lulian Lacquin.

Viete, F. (1630/1983). The analytic art (T. R. Witmer, Trans.). In *The analytic art. Nine studies in algebra, geometry and trigonometry from the opus restitutae mathematicae analyseos, seu algebra nova*. New York, NY: Dover Publications Inc.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

INVESTIGAÇÕES BRASILEIRAS SOBRE OS EGRESSOS DE LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA QUE VIVENCIARAM PRÁTICAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA

BRAZILIAN RESEARCHES REGARDING GRADUATES OF THE MATHEMATICS DEGREE WHO HAVE EXPERIENCED INTRODUCTORY TEACHING PRACTICE

José Fernández da Silva; Ana Lúcia Manrique
Instituto Federal de Minas Gerais, Pontificia Universidade católica de São Paulo (Brasil)
Jose.fernandes@ifmg.edu.br, analuciamanrique@gmail.com

Resumo
Esta investigação teve como objetivo central realizar um levantamento sobre como as pesquisas de mestrado e doutorado têm repercutido aspectos do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - Pibid na vida profissional dos egressos da Licenciatura em Matemática que desta política pública participaram. É uma investigação qualitativa, com realização de levantamento de dados no repositório de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Capes. O levantamento realizado permite afirmar que existe uma carência de pesquisas acadêmicas relacionadas aos egressos das Licenciaturas em Matemática que participaram do Pibid.

Palavras-chave: PIBID, formação de professores, professores de matemática

Abstract
The main objective of this research was to conduct a survey on how the master's and doctoral researches present aspects of the Institutional Program of Introductory Teaching Practice (PIBID) in the professional life of graduates of the Mathematics Degree, who participated in this public policy. It is a qualitative research, with data collection in the repository of thesis and dissertations of the Coordination of Improvement of Higher Education Personnel (CAPES. The survey made it possible to affirm that there is a lack of academic research related to the graduates of the Mathematics Degree who participated in this program.

Key words: PIBID, teacher training, mathematics teachers

Introdução

A formação de professores está na pauta das principais discussões mundiais relacionadas à educação. Diante de um mundo em constante transformação, é cada vez maior o número de pesquisadores que se dedicam a investigar a formação de professores, em especial a formação inicial de professores de Matemática. Muitas mudanças ocorrem, reiteradamente, no seio da sociedade e, neste contexto, é presente a preocupação sobre como os novos professores estão sendo formados para lidar com as novas gerações. Como exemplo, pode-se citar a dicotomia existente entre as práticas tecnológicas no âmbito das licenciaturas e as práticas tecnológicas das crianças, adolescentes e jovens. Estes, de posse de celulares e computadores acessam e categorizam diferentes informações em tempo real, comunicam sincronicamente e compartilham experiências. Essa é apenas, uma das vertentes, da problemática que envolve a formação de professores.

A complexidade da formação de professores tem impulsionado a comunidade de pesquisadores da área a definir determinados consensos, entre eles, que o professor necessita adquirir novas habilidades, novas competências e novos conhecimentos profissionais para que ele possa interferir, positivamente, na formação dos alunos. Neste sentido, é importante que "a Formação de Professores deve ser pensada como um amálgama, uma mistura de ações formativas que, mesmo diversas, contribuem para formar o professor, e como um processo *continuum*" (Manrique, Tinti, Lima, 2011, p.90).

Documentos legais, também, buscaram apontar diretrizes para a formação de professores. No raiar dos anos 2000, o Brasil começa a discutir as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica - DCN, pois o país necessitava após a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – LDB 9494/1996 repensar a formação de professores que se apresentava nos moldes tradicionais do chamado "3 + 1", onde prevaleciam, segundo Moreira (2012), os três anos de estudos específicos da área de formação (no caso a Matemática) e acrescentava-se um ano de estudos pedagógicos.

Tais diretrizes se efetivam no ano de 2002, com a publicação das Resoluções CNE/CP 01, de 18 de fevereiro de 2002 e CNE/CP 02, de 18 de fevereiro de 2002. Em síntese, tais dispositivos legais, enunciam um conjunto de princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados pelas instituições formadoras no que tange à organização curricular dos cursos de licenciaturas. Ademais, estabelecem espaços e tempos para a Prática Pedagógica, Estágio Supervisionado, Conteúdos de Formação específica e Atividades Acadêmicas, Científicas e Culturais.

Percebe-se pela legislação uma tentativa de rompimento com as diferentes formas de organização curricular que colocavam as licenciaturas em subserviência aos bacharelados. Contudo, a necessidade de romper com este modelo de formação de professores, em especial no contexto da Licenciatura em Matemática, ainda se constitui um desafio para as políticas públicas e para os formadores que possuem uma visão crítica sobre esta perspectiva formadora.

Para Gatti (2010), o modelo tradicional de formação de professores ainda persiste no âmbito das nossas licenciaturas. Para a citada autora, a publicação da Lei n. 9.294/96 e a publicação das diretrizes para a formação de professores, em 2002, não foram suficientes para promover reflexões profundas no contexto das licenciaturas, pois, ainda é presente a forte prevalência de formação com foco na área disciplinar específica, com pequeno espaço para a formação pedagógica.

No âmbito da estrutura política, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Nível Superior – CAPES/Brasil assumiu, em 2007, a coordenação de ações destinadas à formação de professores. As experiências desta instituição no âmbito do gerenciamento dos cursos de pós-graduação *stricto sensu* do país foram preponderantes para que ela, também, passasse a fomentar políticas para a formação inicial e continuada de professores para o Magistério na Educação Básica. Dentre estas políticas, iniciaram-se ações no contexto do Programa de Consolidação das Licenciaturas -

Prodocência, Observatório da Educação – Obeduc, Programa de Apoio a Laboratórios Interdisciplinares de Formação de Educadores – Life e Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - Pibid, entre outros.

Das políticas públicas supracitadas o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid possibilitou repercussões importantes no contexto da formação inicial de professores que ensinam Matemática. Essa política promoveu uma articulação entre os professores formadores das Instituições de Ensino Superior - IES, os futuros professores e os professores da escola de Educação Básica.

Levando em consideração a importância desse programa, esta investigação teve como objetivo central realizar um levantamento sobre como as pesquisas têm apresentado aspectos do Pibid na vida profissional dos egressos da Licenciatura em Matemática que participaram desse programa. É uma investigação qualitativa e para trilhar o percurso desta elaborou-se a seguinte questão norteadora: como as pesquisas acadêmicas têm apresentado as influências do Pibid na vida profissional de professores egressos da Licenciatura em Matemática no que concerne à mobilização dos seus conhecimentos?

Marco teórico

O marco teórico deste artigo foi construído com base nas discussões de Godino (2009), Pino-Fan, Godino e Font (2013), Pino-Fan e Godino (2015) que repercutem aspectos do Conhecimento Didático Matemático – CDM.

Para Godino (2009), não existe um consenso na literatura disponível para apontar os conhecimentos que os professores mobilizam durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Para o autor:

> Seria útil dispor de modelos que permitam uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que se põem em jogo num ensino efetivo (proficiente, eficaz, idôneo) da Matemática. Ele permitiria orientar o desenho de ações formativas e a elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos do professor. (Godino, 2009, p. 19).

Reportando às contribuições da Psicologia, da Matemática, da epistemologia, da Pedagogia, da Sociologia, da Semiótica e outras áreas da Didática da Matemática, Godino (2009) defende que o uso do termo - Conhecimento Didático-Matemático do professor – CDM - é mais adequado para se referir à complexidade de conhecimentos profissionais.

Como aprofundamento sobre os conhecimentos necessários ao professor, Godino (2009) propõe um conjunto de facetas que são categorias que organizam e estendem estes conhecimentos. A figura 1 ilustra as facetas e os níveis propostos no âmbito do CDM.

Figura 1. Facetas e níveis do conhecimento didático-matemático do professor (Godino, 2009, p.21)

De acordo com o esquema poliédrico elaborado por Godino (2009), as facetas do conhecimento didático e matemático dos professores possuem quatro níveis de análise, mas ele destaca que, embora na representação eles apareçam separados, na prática, se interagem.
A seguir, de acordo com as perspectivas de Godino (2009) e Pino-Fan e Godino (2015), apresenta-se uma abordagem sobre cada faceta:

Epistêmica: está relacionada com os conhecimentos matemáticos envolvidos no contexto educacional e sua organização para o processo de ensino. Fazem parte desta faceta os problemas selecionados, a linguagem elaborada, os procedimentos, as definições e os argumentos utilizados pelo professor. Nesta perspectiva, é substancial que o professor busque outras soluções para um mesmo problema, busque a compreensão dos estudantes sobre um problema que não tenham logrado êxito na resolução e perceba os conhecimentos que se estabelecem ao resolver uma tarefa proposta.

Cognitiva: esta faceta possibilita que os professores tenham conhecimentos que lhes permitam conhecer melhor seus alunos, pois, com a reflexão e a avaliação, é possível, do ponto de vista da instituição educativa, acompanhar o processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, o professor pode realizar um bom planejamento das suas aulas prevendo possíveis erros e dificuldades. Além disso, durante o processo de ensino, o professor pode avaliar as produções dos alunos e detectar concepções errôneas, dificuldades para encontrar respostas e realizar intervenções, buscando outros recursos para auxiliar o contato dos alunos com a Matemática.

Afetiva: é a faceta que permite aos professores lidar com a parte afetiva que está compreendida por elementos relacionados às atitudes, emoções, crenças e valores dos alunos no ambiente de estudos da Matemática. Neste sentido, o professor necessita conhecer e perceber o estado de ânimo de seus alunos para enfrentar os problemas matemáticos propostos.

Mediacional: refere-se aos conhecimentos do professor relacionados à capacidade de articular materiais e tecnologias para o ensino. Além disso, o professor necessita ter condições de delimitar tempo para as ações no âmbito do processo de ensinar um conteúdo.

Interacional: trata-se da capacidade de o professor compreender, prever, implementar e avaliar as interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem. Neste processo, as relações se estabelecem em contexto: entre professores e alunos, entre os alunos, entre alunos e os recursos estabelecidos e entre os professores e os recursos e os alunos.

Ecológica: o professor que dispõe de conhecimentos no âmbito desta faceta é capaz de perceber o currículo como uma janela que estabelece enlaces com o entorno social, político e econômico.

Levando em consideração a complexidade resultante do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, Godino (2009) destaca a necessidade de examinar as facetas do conhecimento didático matemático, propostas por ele, de acordo com os níveis: práticas matemáticas e didáticas, configurações matemáticas e didáticas, normas e idoneidade.

As práticas matemáticas se constituem na descrição das ações realizadas para resolver as tarefas matemáticas propostas pelo professor para contextualizar os conteúdos e promover as aprendizagens requeridas. Ainda neste nível, é possível descrever as linhas de atuação dos professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem. Nas configurações, os processos matemáticos e didáticos são descritos perante as práticas com finalidade de explicitar a complexidade de objetos e significados envolvidos nestes processos. Trata-se de um nível explicativo dos conflitos e da progressão de aprendizagens.

No que tange às normas e metanormas, busca-se a identificação do conjunto de regras, hábitos e normas que condicionam e tornam possível o processo de estudo e que afeta a cada faceta e suas interações.

A respeito do nível denominado idoneidade, Godino (2009) o destaca como o nível importante para identificar potenciais melhorias do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Diante do exposto, é possível afirmar que a abordagem do CDM promove uma ampliação sobre o conjunto de conhecimentos necessários aos professores que ensinam Matemática. Estudos nacionais apontam as contribuições do CDM como suporte para discutir o conjunto de conhecimentos dos professores de Matemática, entre eles, pode-se destacar Carvalho (2016), Breda (2016) e Silva (2017). Carvalho (2016) realizou investigações com professores em fase de inicial que participavam do Pibid, envolvendo análise de práticas de docência. Tal estudo explicita a importância da reflexão sobre os conteúdos a serem ensinados e das dimensões que estes envolvem. Breda (2016) realizou um estudo sobre dissertações de mestrado oriundas do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – Profmat. A autora aponta a importância da implementação crítica de propostas didáticas, a qual demanda uma base conhecimento ampliada dos professores de Matemática. Ainda sobre as repercussões de projetos e programas na formação inicial de professores de Matemática, Silva (2017), realizou um estudo sobre conhecimentos de professores participantes do Programa de Consolidação das Licenciaturas – Prodocência, apontando elementos que ilustram aspectos das facetas do Conhecimento Didático Matemático – CDM.

Metodologia

A pesquisa é qualitativa de cunho bibliográfica, sendo realizada em quatro fases: delimitação e contextualização do problema, revisão de literatura, levantamento de dados, análise e reflexão sobre os dados. Buscou-se no banco de dissertações e teses da Capes/Brasil as produções relacionadas ao Pibid. Neste levantamento, selecionaram-se as produções que trataram, em sua totalidade, de analisar a relação entre o Pibid e a formação de professores de Matemática. Para Gil (2002) as teses e dissertações são fontes importantes para a pesquisa, pois são constituídas por relatórios de investigações científicas originais ou acuradas revisões bibliográficas.

Foram selecionadas as produções que tratavam, exclusivamente, das incidências do Pibid na formação inicial de professores de Matemática e/ou na vida profissional dos egressos.

Delimitou-se que seriam consideradas as teses e dissertações produzidas entre 2012 e 2018. Destas, apenas uma tese foi tomada como objeto de análise, pois foi a única a explicitar o objetivo de estudo de conhecimentos de professores da Educação Básica que vivenciaram práticas de iniciação à docência.

Resultados

O processo de investigação foi desencadeado, conforme apontado na metodologia, em quatro fases. No primeiro momento, houve a delimitação e contextualização do problema que se constituiu num momento de reflexão sobre como as pesquisas acadêmicas têm abordado a incidência do Pibid nas práticas dos egressos deste programa. De posse do escopo inicial das motivações para a investigação, avançou-se para as leituras de referencial teórico/literário atinentes aos objetivos propostos.

É importante salientar que o processo de pesquisa no âmbito do banco de teses e dissertações da Capes apresentou algumas limitações, dentre elas: algumas produções não apresentavam o link de acesso ao texto completo o que acarretava o trabalho de buscar no repositório das próprias universidades. Ao longo desta busca foi possível perceber que algumas produções, de programas de mestrado e doutorado, com reconhecida importância, não se encontravam cadastradas no repositório da Capes, contudo, deliberou-se por considerar tais estudos dada a pertinência dos mesmos.

Ao todo foram encontradas 35 produções, sendo 21 dissertações e 14 teses oriundas de programas de mestrado e doutorado das áreas de Educação, Ensino de Ciências e Matemática e Educação Matemática.

No âmbito das dissertações, 16 delas apresentam discussões que relacionam o Pibid com a formação inicial dos professores, ou seja, investigam contextos que envolvem os futuros professores enquanto bolsistas do citado programa. Destaca-se a pertinência de tais estudos, uma vez que estes contribuem para reflexões importantes que podem subsidiar a tomada de decisões sobre a manutenção e criação de novas políticas públicas para a formação de professores, contudo, ressalta-se que tais investigações, embora busquem caracterizar a atuação dos bolsistas no contexto da educação básica, estas não avançam no sentido de explicitar o conhecimento didático matemático dos futuros professores.

As outras cinco dissertações apresentam estudos em contextos que envolvem egressos das Licenciaturas em Matemática. Da mesma forma, não se questiona a importância e a justificabilidade de tais estudos, contudo, no que concerne às práticas matemáticas de sala de aula, estas aparecem de forma implícita. Aparecem, mais fortemente, nestes estudos os levantamentos de percepções, olhares e narrações de práticas vividas no Pibid, enquanto licenciandos. As metodologias usadas nestes estudos estão centradas em narrativas autobiográficas, história oral e aplicação de questionários. Tais cenários metodológicos podem justificar o aspecto mais generalista das investigações.

No que concerne às teses, estas se constituem num conjunto de 14 estudos, também, de diferentes programas de pós-graduação do Brasil. 13 destes estudos, abordam relações, potencialidades, representações, interfaces, características, contribuições, limites e desafios do Pibid ao longo da formação inicial. Apenas um deles, o de Almeida (2015), busca desvelar as incidências do Pibid na prática de professores em início de carreira. Para esta análise trouxemos elementos desta tese para discussão. Trata-se de um estudo qualitativo, que teve como objetivo central "[...] investigar as contribuições do Pibid da UFS (Universidade Federal de Sergipe), campus Itabaiana, no processo de construção da prática docente de professores de Matemática, participantes desse programa". (Almeida, 2015, p. 37).

No que concerne à coleta de dados, o autor destaca que esta foi realizada por meio de entrevistas semiestruturadas e recolhimento de "protocolos" dos professores a respeito da análise das situações-problema propostas.

A tese de Almeida (2015) delimita o aporte teórico da seguinte forma:

> Para analisar os conhecimentos dos professores sobre os conteúdos das quatro operações e de noções relativas à proporcionalidade, nos pautamos pelos estudos de Shulman (1986) e Ball, Thames e Phelps (2008). Por outro lado, a fim de compreender melhor os discursos e a prática relatada pelos professores, se fez necessário compreender suas concepções sobre a Matemática e seu ensino e, para isso, nos pautamos pelo estudo de Ponte (1992). (Almeida, 2015, p. 40).

Participaram do estudo de Almeida (2015) quatro professores em início de carreira que se voluntariaram a contribuir com a investigação proposta. As análises do autor foram realizadas levando em consideração as seguintes categorias: contribuições do Pibid para o início de carreira, contribuições do Pibid para a prática dos professores e para os conhecimentos dos professores sobre as quatro operações e proporcionalidade.

Almeida (2015) declara, em suas reflexões finais, que para realizar o estudo ele partiu do pressuposto que o professor de Matemática deve dominar diferentes conhecimentos, entre eles, Didáticos e Curriculares – que possibilitam o professor tomar decisões e analisar as produções e estratégias dos alunos na resolução de situações-problemas propostas.

Para Almeida (2015), no que concerne ao Pibid, este:

- Ameniza o choque de realidade que o professor normalmente sofre ao chegar na escola;
- Preenche de fato uma lacuna na formação universitária, pois coloca o futuro professor em contato direto com a realidade da escola;
- Constitui um importante espaço para as reflexões sobre a futura profissão docente;
- Contribui para o trabalho colaborativo;
- Contribui para a permanência do professor recém-formado na carreira docente.

No que concerne à mobilização de conhecimentos didáticos e matemáticos Almeida (2015) destaca que os professores relatam dificuldades em inovar diante do processo de ensino e aprendizagem. As constatações do autor apontam que:

- Os professores estão, fortemente, ligados ao paradigma do exercício e não da resolução de problemas;
- Possuem o livro didático como elemento base para os seus planejamentos de aulas;
- Os conhecimentos dos professores sobre os diferentes significados das operações básicas são bastante frágeis;
- Suas compreensões sobre o ensino de proporcionalidade são também restritas.
  Diante das constatações enumeradas, Almeida (2015) afirma:

> Os professores também não souberam interpretar adequadamente as diferentes resoluções ou estratégias dos alunos para resolverem os problemas. Os dados indicam que eles possuem o Conhecimento Comum do Conteúdo segundo Ball, Thames e Phelps (2008), mas não desenvolveram de forma suficiente o denominado Conhecimento Especializado do Conteúdo, o que compromete o domínio do Conhecimento do Conteúdo e Ensino e do Conhecimento do Conteúdo e do Estudante. (Almeida, 2015, p. 137).

Diante do exposto é importante afirmar que as discussões teóricas do Conhecimento Didático-Matemático do professor – CDM proposto por Pino-Fan, Godino e Font (2013) e Pino-Fan e Godino (2015) podem explicitar um conjunto maior de detalhes diante da relação do professor com os conteúdos matemáticos em sua prática pedagógica, isto é, a qualidade da matemática ensinada (faceta epistêmica), os recursos utilizados (faceta mediacional), a compreensão sobre as aprendizagens dos alunos (faceta cognitiva), a influência das crenças, das relações com a matemática (faceta afetiva), as interações necessárias (faceta interacional) e o contexto do processo de ensino e aprendizagem, os currículos e as variáveis sociais, culturais, econômicas (faceta ecológica). Neste sentido, quando Almeida (2015) cita que os conhecimentos dos professores sobre operações básicas e proporcionalidade são frágeis, é sinal de problemas no âmbito da faceta epistêmica, ou seja, existem dificuldades relacionadas à parte conceitual destes conteúdo. Quanto ao uso do livro didático, pode-se dizer que os professores possuem limitações (pouco hábito de pesquisa, falta de tempo para leituras e reflexões com os pares, entre outros) na busca de outros elementos que possam fazer parte de suas aulas: jogos, materiais lúdicos, tecnologia, entre outros. Isto é, a faceta mediacional necessita ser desenvolvida na prática dos professores investigados. Estas são exemplificações do potencial das abordagens do CDM para analisar as práticas pedagógicas dos professores que é o espaço onde estes põem em jogo seus conhecimentos.

Considerações finais

A formação de professores tem sido objeto de investigações que se encarregam, pelas lentes de diferentes perspectivas teóricas, de explicitar as possibilidades e os desafios, tanto na inicial, quanto na continuada.

O cenário da formação de professores no Brasil, a partir da publicação das Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN, no ano de 2002, passou por mudanças significativas. A legislação propôs uma reorganização curricular e, aliado a estas mudanças, políticas públicas foram criadas no sentido de fomentar e financiar as estruturas dos cursos de licenciaturas no âmbito das instituições públicas. O Pibid, como uma dessas políticas, tomou um espaço importante, estando há cerca de dez anos presente nos cursos de formação de professores, em especial, na formação de professores de Matemática.

Neste sentido, esta investigação buscou explicitar como a academia tem direcionado suas investigações relacionadas ao Pibid no âmbito da formação de professores de Matemática. Dado que essa política pública se faz presente desde 2008, muitos professores que hoje estão lecionando em escolas de Educação Básica, vivenciaram práticas de iniciação à docência na formação inicial.

Os dados apontam que as investigações acadêmicas têm focado, em larga maioria, nas repercussões do Pibid na prática de futuros professores. Entendemos que é relevante investigar como os professores, que vivenciaram práticas de iniciação à docência, mobilizam seus conhecimentos nas práticas profissionais.

O estudo da tese de Almeida (2015), demonstra a importância de desvelar as contribuições e limitações dos projetos e programas voltados à formação inicial. Além disso, o estudo permitiu identificar a importância das abordagens teóricas do Conhecimento Didático Matemático – CDM para discutir e avaliar os conhecimentos dos professores de Matemática.

O Pibid tem se constituído em uma política de aproximação entre a formação inicial e a Educação Básica, constituindo num fator determinador para a escolha da profissão docente, contudo, os dados evidenciam a falta de reflexões sobre as práticas vivenciadas.

As investigações acadêmicas sobre o Pibid devem avançar, além da formação inicial, explicitando os impactos deste no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas de Educação Básica. O atual momento do Brasil, composto pelos abalos na continuidade de políticas públicas, carece, além das lutas democráticas, da sustentação das pesquisas acadêmicas que mostrem as reais contribuições do Pibid para os conhecimentos dos professores que ensinam matemática.

Referências bibliográficas

Almeida, R. N. (2015). Professores de matemática em início de carreira: contribuições do Pibid. Tese de Doutorado não publicada, Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Breda, A. (2016). Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado Profmat no Rio Grande do Sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso. Tese de Doutorado não publicada, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Brasil.

Carvalho, M. P. (2016). Um estudo da inserção de estudantes da licenciatura em matemática no contexto da escola pública: contribuições do PIBID. Tese Doutorado não publicada. Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

Gatti, A. B. (2010). Formação de professores no Brasil: características e problemas. Educação e Sociedade. Campinas, 31(113), 1355-1379.

Gil, A. C. (2002). Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: Atlas.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20, 13 – 31.

Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Recuperado de http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm

Manrique, A. L., Tinti, D.S. e Lima, M.A.M. (2011). Formação inicial e continuada: contribuições para o desenvolvimento profissional de professores de matemática. Praxis & Saber - *Revista de Investigación en Educación y Pedagogía, 2*(3), 87-102

Moreira, P. C. (2012). 3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26(44), 1137-1150.

Pino-fan, L. e Godino, A. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36 (1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. e Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). Revemat, 8, Ed. Especial (dez.), 1 – 47.

Resolução CNE/CP nº 1, de 18 de fevereiro de 2002. Institui diretrizes curriculares nacionais para a formação de professores da educação básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/res1_2.pdf

Resolução CNE/CP nº 2, de 19 de fevereiro de 2002. Institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da educação básica em nível superior. Recuperado de http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CP022002.pdf

Silva, J. F. (2017). *Um estudo do programa de consolidação das licenciaturas no contexto da formação inicial de professores de matemática*. Tese Doutorado não publicada. Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

LA FORMACIÓN DEL FUTURO PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y LA CONSTRUCCIÓN DE LA IDENTIDAD DISCIPLINAR

PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS' TRAINING AND THE CONSTITUTION OF THEIR DISCIPLINARY IDENTITY

Claudio Enrique Opazo Arellano, Francisco Cordero Osorio y Héctor Alejandro Silva Crocci
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México), Universidad de Santiago de Chile (Chile)
copazo@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx, hector.silva.c@usach.cl

Resumen

Se reportan los avances de investigación acerca de la formación inicial de estudiantes de pedagogía en matemáticas. En este escenario se ha identificado una problemática con relación a cómo estos estudiantes, de formación inicial, se adhieren a lo que desde la teoría socioepistemológica se ha conceptualizado como discurso Matemático Escolar. En términos genéricos, esta problemática radica en que ese estudiante ha sido excluido de la construcción social del conocimiento matemático en su formación inicial. Con el propósito de contrapesar dicha problemática se propone que en esa formación inicial se debe promover una matemática escolar que valore los usos y significados del conocimiento matemático del que aprende, así como construir una horizontalidad recíproca entre la matemática escolar y la realidad de la gente. En este contexto, se destaca la *identidad disciplinar* y *la función del docente* como elementos que son opacados por la problemática identificada.

Palabras clave: adherencia, sujeto olvidado, resignificación

Abstract

Research advances are reported on the initial training of students of pedagogy in mathematics. In this scenario, a problem has been identified in relation to how these students, of initial formation, adhere to what from the socioepistemological theory has been conceptualized as School Mathematical discourse. In generic terms, this problem lies in the fact this student has been excluded from the social construction of mathematical knowledge in his initial formation. In order to counterbalance this problem, it is proposed that in this initial training a school mathematics that legitimize the uses and meanings of the mathematical knowledge of the learner should be promoted, as well as the construction of a reciprocal horizontality between school mathematics and the reality of the people. In this context, disciplinary identity and teacher's function are highlighted as elements that are overshadowed by the identified problem.

Key words: adherence, forgotten subject, redefinition

Introducción

En esta investigación se destaca un principio: valorar, en el cotidiano escolar de la formación inicial que vive el futuro profesor de matemáticas, los usos y significados del conocimiento matemático (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, en prensa (a)). Para tal fin, se debate la hegemonía del discurso Matemático Escolar (dME) a partir del fenómeno de adherencia. Y, propone a la identidad disciplinar como una expresión de resistencia al dME. Lo que define, a su vez, *la función del docente de matemáticas*. Este planteamiento se basa en las ideas propuestas en el programa Socioepistemológico Sujeto Olvidado y la Transversalidad de Saberes (Cordero, 2016b).

En lo habitual de la formación inicial del futuro profesor de matemáticas surge la consigna de *aprender para enseñar* (Blanco y Mercedes, 2005). Pero ¿Qué aprende el futuro profesor de matemáticas? Atender esta pregunta es complejo por lo situacional de cada uno de los programas de formación inicial que existen en la actualidad. Sin embargo, las investigaciones en Matemática Educativa que orientan una discusión sobre el docente y, particularmente, sobre el futuro profesor de matemáticas permiten debatir al respecto.

Un aspecto a señalar son los ejes disciplinares que -en general- se identifican en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas, estos son: la Matemática, la Educación y la Matemática Educativa. Cabe señalar que, algunos programas, también, incorporan a la Ciencia de la Computación como un cuarto eje (Soto, 2013). Cada uno de estos ejes, desde nuestra perspectiva, contribuye a la visión de la enseñanza y del conocimiento matemático que construye el que aprende para enseñar. En este sentido, surgen nuevas preguntas: ¿Cuál es la visión que tiene el futuro profesor de matemáticas del conocimiento matemático? ¿Cómo afecta esta visión en la enseñanza de la matemática escolar? ¿Cómo se expresa la función del docente de matemáticas en sus prácticas escolares? Lo anterior, estará inscrito en futuras reflexiones.

El conocimiento matemático que norma lo habitual de la enseñanza del futuro profesor, al menos en los cursos tradicionales de matemática, tiene una centración en definiciones y conceptos de la matemática escolar (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018a y 2018b; Soto, 2014). Soslayando, los usos y significados del conocimiento matemático del que aprende para enseñar.

Una consecuencia, de lo anterior, es que el futuro profesor no trastoca el conocimiento matemático pero tampoco la enseñanza de la matemática. Por lo tanto, *no cambia o modifica la función del dME*. Dicho con otras palabras, no cambia la hegemonía del dME en la enseñanza de la matemática. Sin embargo, bajo estas condiciones el futuro profesor aprende y enseña la matemática escolar.

En este contexto, Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015) afirman que el dME genera adherencia a un tipo de pensamiento matemático. Lo que supone opacidad de la pluralidad epistemológica y exclusión de la construcción social del conocimiento matemático de la gente. Lo que repercute en, no hacer visible lo situacional de la construcción del conocimiento matemático del futuro profesor en sus fases de preparación en torno a la enseñanza de la matemática. Por lo que, no se consideran las argumentaciones funcionales en escenarios como: la escuela, el trabajo y la ciudad (Cordero, 2016a).

Es decir, el conocimiento institucional que norma la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas *olvidó su conocimiento matemático.*

Este planteamiento llama la atención sobre lo nocivo que resulta dejar invariante la enseñanza de la matemática escolar en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas. Ya que el carácter nocivo, en este caso, se expresa en que el dME impide que *el futuro profesor participe de la construcción social del conocimiento matemático*. Esto último, responde a la génesis de este conocimiento. El que fue seleccionado para que la gente lo adquiera y reproduzca en problemas específicos de la matemática escolar, soslayando los usos del conocimiento que emergen del futuro profesor de matemáticas en función de su actividad humana (Cordero, 2001 y 2016b).

Entonces, el futuro profesor usa el conocimiento matemático en su cotidiano escolar pero la hegemonía que fomenta el dME provoca adherencia a los significados y procedimientos que norman la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018a). Por lo tanto, la adherencia no le permite legitimar los usos y significados del que aprende: *la matemática funcional*. Ya que sólo centra la atención en las definiciones y conceptos de la matemática. Se destaca que la adherencia se genera cuando el conocimiento se concibe como una verdad absoluta, por lo que no se cuestiona ni transforma (Cordero y Silva-Crocci, 2012; Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018b).

El programa Socioepistemológico Sujeto Olvidado y la Transversalidad de Saberes (SOLTSA)

El constructo *función del docente* nace a la luz de un programa de investigación con más de 20 años de producción académica dirigido por el Dr. Francisco Cordero Osorio, quien en su reflexión considera al núcleo de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: *la práctica social* (Cantoral y Farfán, 2003; Cantoral, 2013) como un conocimiento matemático que no está en la escuela, pero sí en el cotidiano disciplinar o profesional de la gente. Esto último se ha conceptualizado como un *sujeto olvidado*.

Reconocer un sujeto olvidado implica valorar el conocimiento matemático, sus usos y significados que deben ser *recuperados y puesto horizontalmente en reciprocidad* con la realidad del que aprende (Cordero, 2016b). Aquí está la tarea pendiente en la enseñanza de la matemática escolar y, también, en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas. Ya que la epistemología que predomina en lo habitual de la enseñanza de la matemática escolar, es hegemónica. Contrario es el caso de la epistemología que es producto de la actividad humana, ya que ésta se soslaya y no se legitima en el cotidiano escolar.

Para ahondar en las ideas germinales del programa SOLTSA se puede revisar a Cordero (2016b y 2017). Sin embargo, se destaca que el SOLTSA expresa un trabajo colaborativo donde investigaciones de estudiantes de maestría y doctorado han contribuido al desarrollo de la *construcción social del conocimiento matemático* a partir de un principio: *valorar el conocimiento matemático de la gente en los diferentes escenarios, la escuela, el trabajo o la ciudad.*

Específicamente, el SOLTSA propone *revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones* en las comunidades de conocimiento de la gente (Cordero, 2017). Para tal fin, el SOLTSA se desarrolla a través de dos líneas de trabajo simultáneas: la resignificación del conocimiento matemático y su impacto educativo. En la primera se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades entre diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: el dME, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad. En la segunda línea se conforman los multifactores y estadios que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas (Cordero, 2016b y 2017). Los multifactores son los elementos que contribuyen a lograr un resultado pero que han estado ausentes y es necesario recuperarlos, tales como: *identidad*, inclusión, socialización, emancipación, empoderamiento, entre otros (Ver Figura 1).

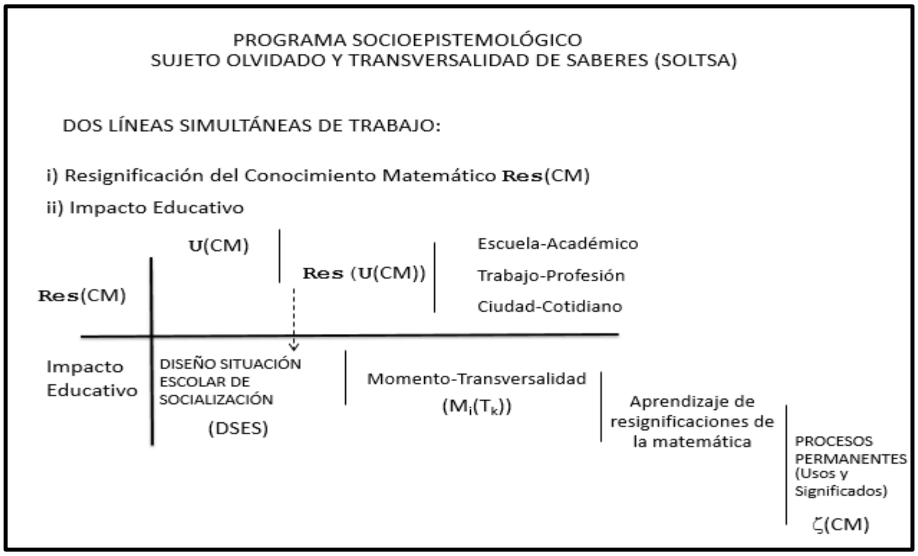


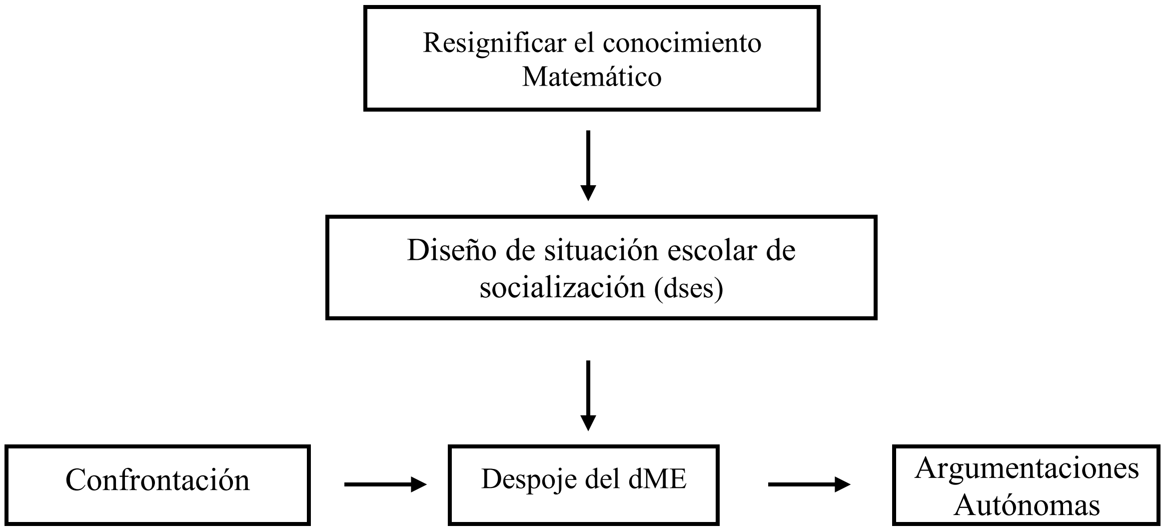
Figura 1: Programa Socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA) (Cordero, 2017).

Cabe señalar que ante la problemática específica de la adherencia al dME, la identidad disciplinar emerge como un factor que coadyuva en la resignificación del conocimiento matemático. Tarea que la TSME asume como un desafío, de ahí que el programa SOLTSA abraza a la resignificación como la primera línea de acción. Ya que ésta favorece la emergencia del conocimiento matemático donde una consecuencia es la transformación de la enseñanza de la matemática escolar (Cordero, 2017).

Por lo anterior, la identidad disciplinar es un factor relevante en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas ya que promueve trastocar la función del dME. Lo que implica, emancipar la hegemonía que norma la enseñanza de la matemática escolar. Para tal fin, es fundamental un programa permanente en torno a la construcción social del conocimiento matemático ya que será por este intermedio que se legitime el conocimiento matemático. Es decir, los usos y significados del que aprende para enseñar.

Entonces, emancipar la hegemonía implica despojar la centración en las definiciones y conceptos de la matemática escolar y legitimar el cotidiano escolar del futuro profesor de matemáticas. Un hilo conductor, en este sentido, es *la resignificación del conocimiento matemático*. De ahí que, el diseño de una situación escolar de socialización -constructo teórico desarrollado por el SOLTSA (Cordero, 2016b)- es el que orquesta la relación recíproca y horizontal entre el conocimiento matemático y la realidad del que aprende.

En este contexto, se articulan tres momentos: *la confrontación, el despoje del dME y las argumentaciones autónomas*. Cada uno de estos tres elementos, compone un momento específico del diseño de situación escolar de socialización con perspectiva de identidad disciplinar. Por ejemplo, en la confrontación se cuestiona la matemática escolar. Luego, en el despoje se proponen significaciones y procedimientos que promueven la construcción de un patrón gráfico o analítico. Lo que habitualmente en la enseñanza de la matemática escolar se soslaya a la luz de las definiciones y conceptos que norman la epistemología de la matemática escolar. Por último, emergen las argumentaciones autónomas de los participantes (Ver Esquema 1). Esto implica que nadie le enseña al futuro profesor de matemáticas el nuevo conocimiento matemático, sino que emerge de él (Cordero, 2017).



Esquema 1: De la matemática escolar a los usos y significados del futuro profesor de matemáticas.

La emergencia de las argumentaciones autónomas está en estrecha relación con contrapesar la hegemonía del dME, de ahí que este proceso es fundamental en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas. Se destaca que, lo anterior, es un tipo de escenario donde se ve reflejada la identidad disciplinar. Otro, lo son los diseños de actividades que construyen los que aprenden para enseñar. Este último, es el resultado de una visión de la enseñanza y, también, del conocimiento matemático. Ahora bien, ambos tienen la misma función pero procesos distintos. El primero, es local ya que se interviene de manera directa con el profesor o futuro profesor de matemáticas a partir de la resignificación de su conocimiento matemático. En el segundo, respectivamente, es el futuro profesor de matemáticas quien asume la tarea de intervenir en la enseñanza de la matemática escolar a través de una propuesta que legitima los usos y significados del conocimiento matemático que es propio de la actividad humana.

La función del docente y su impacto en la formación inicial del docente de matemática

Transformar la formación inicial del futuro profesor de matemáticas, desde nuestra perspectiva, implica construir una *identidad disciplinar* que denote lo situacional de la construcción social del conocimiento matemático. *Esto es una resistencia al dME.* Para tal fin, es fundamental valorar las argumentaciones del futuro profesor de matemáticas con el objetivo de legitimar la diversidad y contrarrestar la desigualdad que provoca la hegemonía del dME (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, en prensa (a)).
En este contexto, las categorías del conocimiento matemático son importantes ya que sirven de base para generar diseños de situación escolar de socialización.

Por lo anterior, en el grupo SOLTSA se han desarrollado estudios con comunidades de conocimiento matemático específicas, por ejemplo: Sordos, Ñuu Savi y estudiantes de Pedagogía en Matemáticas (Méndez, Opazo-Arellano, Parra, Pérez y Cordero, 2015). A partir de estas y otras investigaciones, bajo situaciones específicas, se ha identificado el uso del conocimiento matemático que está presente en el cotidiano profesional o disciplinar en diferentes comunidades. Lo anterior, se manifiesta en argumentaciones como la predicción, el comportamiento tendencial de las funciones y la analiticidad de las funciones (Cordero, 2008), así como la optimización (Del Valle, 2015) (Ver Figura 2).

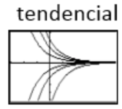
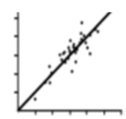
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	VARIACIÓN	TRANSFORMACIÓN	APROXIMACIÓN	SELECCIÓN
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos Estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación/ Resignificaciones	Predicción $E_o+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+...$	Optimación 

Figura 2: Una socioepistemología del cálculo y análisis (Cordero, 2008).

Con esta base de conocimiento, la tarea es crear y mantener los entornos de reciprocidad entre la matemática escolar y la realidad del que aprende. Esto, es la *función del docente de matemáticas* (Cordero, 2016b).

Dicho de otra forma, el constructo *función del docente* promueve dar a la matemática escolar y al conocimiento matemático del futuro profesor de matemáticas el mismo estatus epistemológico. Ello conlleva legitimar los usos y significados del estudiante de pedagogía en matemáticas. Pero también, construir una identidad disciplinar desde la construcción social del conocimiento matemático ya que contrarresta la adherencia que provoca el dME y su hegemonía a partir del conocimiento matemático que es producto de la actividad humana.

A manera de conclusión

Con este reporte se acentúa, teóricamente, cómo en los programas de formación inicial de estudiantes de pedagogía en matemáticas se expresa una problemática cuya naturaleza está en la hegemonía del discurso Matemático Escolar. De ahí el planteamiento que en la formación inicial se debe promover una matemática escolar que reconozca la construcción social del conocimiento matemático en estos programas de formación, de tal suerte, que se contrapese la hegemonía señalada.

En este escenario se deja como prospectivas el estudio de un programa de formación de estudiantes de pedagogía en matemáticas, de una universidad chilena, con el que se espera profundizar desde la empírea, determinados factores que nutran el planteamiento reportado en este documento. De este modo, el debate se centrará en la naturaleza del conocimiento matemático. Más específicamente, sobre el rol que desempeña el dME en los procesos de enseñanza y aprendizaje y cómo su hegemonía afecta la visión sobre la enseñanza de la matemática escolar. Para ello se estudiarán diseños de actividades en los cuales se esperan *manifestaciones* de la identidad disciplinar que denoten una resignificación de la matemática escolar desde la construcción social del conocimiento matemático.

Las categorías del conocimiento matemático, expresadas en una socioepistemología del cálculo y el análisis (figura 2), son el núcleo de la resignificación. Y, simultáneamente, fundamentales para el estudio ya que proveen una epistemología que emerge desde la actividad humana.

Referencias bibliográficas

Blanco, G., y Mercedes, M. (2015). La formación de profesores de matemáticas. Un campo de estudio y preocupación. *Educación Matemática* 17 (2), 153-166.

Cantoral, R., y Farfán, R.M. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6 (1), 27-40.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 4(2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15 (3), 295-318.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez y D. Zakaryan (Eds). *XX actas Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile:_SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/xxjnem

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: Un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica.* Tesis de Doctorado no publicada. Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Opazo-Arellano, C., Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2018a). ¿Por qué estudiar la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas? *Premisa*, 20 (77), 5-20.

Opazo-Arellano, C., Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2018b). La identidad disciplinar: un instrumento de recuperación de las argumentaciones autónomas del docente en formación. En Flores, R. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 31 (2), 1702-1709. México, D.F. Comité Latinoamericano de Matemática educativa A. C.

Opazo-Arellano, C., Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (en prensa (a)). Valorar los usos y significados del conocimiento matemático del estudiante de Pedagogía en Matemáticas: una tarea pendiente. F. Cordero (comp.) *Diálogo* *entre grupos de investigación. Reflexiones sobre la conformación de programas de investigación en la Matemática Educativa*. Barcelona, España: Gedisa.

Méndez, C., Opazo-Arellano, C., Parra, T., Pérez, R., y Cordero, F. (2015). Comunidad de Conocimiento Matemático. En Flores, R. (Ed). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 1001-1008. México, D.F. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

Soto, D. (2013). El campo de la formación del profesorado de matemáticas y la exclusión de la construcción social del conocimiento matemático. El caso de un programa específico. En Dolores, C., Socorro, M., Hernández, J., Sosa, L. *Matemática Educativa: La Formación de Profesores* (121-139). México, D.F: Díaz Santos.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F. México.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: EMPLEO DE ELEMENTOS HISTÓRICOS EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS IN MATHEMATICS EDUCATION: USE OF HISTORICAL ELEMENTS IN INITIAL TEACHER TRAINING

Gerardo Cruz-Márquez, Fabián W. Romero, Ma. Elena Gavarrete V

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México), Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)

gerardo.cruz@cinvestav.mx, fabian.romero@ucr.ac.cr, maria.gavarrette.villaverde@una.cr

Resumen

En esta sesión del Grupo de Discusión nos preocupamos por debatir el uso de elementos de la historia de la matemática en la formación inicial docente, esto con base en dos experiencias, planteadas desde distintas posturas teóricas, planos educativos y regiones de Latinoamérica. En la primera, la historia de la matemática funge como punto de partida para una investigación sobre el 'dialogo' de los saberes docentes y el rol que estos juegan al tomar decisiones de diseño, implementación y análisis de actividades de aula. Mientras que, en la segunda, los elementos históricos funcionan como medio para detonar la reflexión de los profesores en formación sobre el abordaje didáctico de nociones matemáticas específicas. Entre los productos de esta sesión ubicamos los cuestionamientos respecto a otros usos de los elementos históricos –en el análisis de libros de textos, por ejemplo– y sobre los nexos y diferencias existentes entre la Historia de la Matemática, la Historia de la Educación Matemática y la Historia de la Matemática Educativa.

Palabras clave: análisis histórico-epistemológico, formación docente

Abstract

In this Discussion Group, we will focus on talking about the use of mathematic history elements in initial teacher training. Based on two experiences, raised from different theoretical positions, educational plans and regions of Latin America. In the first one, the history of mathematics serves as a starting point for research on the 'dialogue' of *«saberes docents»* and the role it plays in making decisions on the design, implementation and analysis of classroom activities. While in the second one, the historical elements work as a means to trigger the reflection of prospective teachers on the didactic treat of specific mathematical notions. Among the products of this session we locate the questions regarding other uses of historical elements –in the analysis of textbooks, for example– and about the links and differences between the History of Mathematics, the History of the Mathematics Teaching and the History of Mathematic Education.

Key words: historical-epistemological analysis, initial training

Introducción

Las preocupaciones por la enseñanza de la matemática y por su mejora progresiva "son tan antiguas como la enseñanza misma y ésta tan antigua como la vida en sociedad" (Cantoral y Farfán, 2003, p. 28). Sin embargo, es hasta los años 70, al constatarse la imposibilidad de un enfoque general para explicar y atender los fenómenos particulares de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que se comienzan a gestar investigaciones que incorporan "elementos de la epistemología genética y de la historia de los conceptos matemáticos a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto" (Rojano, 1994, p. 46).

Actualmente, esta línea de investigación, que se ha denominado tácitamente *análisis histórico-epistemológico*, tiene como objetivo identificar, a la luz de la historia de las ideas, elementos que fundamenten hipótesis que ayuden a resolver los problemas observados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Gómez, 2003). En este sentido, el Grupo de Discusión de *Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa* pretende –de unos años a la fecha– constituir un espacio de reflexión sobre los fundamentos, métodos, resultados y aplicaciones de los estudios de corte histórico-epistemológico realizados en nuestra disciplina.

En las sesiones de la edición anterior del Grupo de Discusión, llevadas a cabo en el marco de la XXXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 31), reflexionamos sobre los diversos *métodos de análisis de fuentes históricas* (Cruz-Márquez y Romero, 2017). Así, en las sesiones programadas para la Relme 32, nos propusimos comenzar la discusión sobre los usos que damos a los resultados de estos análisis.

Ahora bien, el abanico de aplicaciones de las investigaciones de este corte, al igual que las perspectivas teóricas y las estructuras metodológicas desde las cuales se realizan, es muy amplio, siendo útiles desde fundamento para propuestas de enseñanza hasta para el análisis de libros de texto (Gómez, 2003). Es así como, para esa edición, decidimos enfocarnos en el *empleo de elementos histórico-epistemológicos en la formación inicial docente*.

Los análisis histórico-epistemológicos y la formación inicial docente

Diversos estudios en nuestra disciplina coinciden en que la historia de las matemáticas puede constituir un recurso importante en la formación inicial docente en matemáticas, con distintos propósitos y a diversos niveles. Larios (2001), por ejemplo, considera que la incorporación de la filosofía e historia de la matemática en la formación de los profesores de Matemática "resulta importante, pues proporciona elementos al docente para su práctica didáctica, para la interpretación de la investigación educativa y para su propia concepción de la ciencia matemática" (p. 64). Sin embargo, mucho menos consenso existe respecto a cómo y cuándo incorporar elementos de la historia de la matemática en la formación inicial, a qué historia de la matemática, e incluso a qué matemática nos referimos.

Para comenzar este debate, tuvimos a bien invitar a dos investigadores que, desde distintas posturas teóricas, planos educativos e incluso regiones de Latinoamérica, emplean elementos de la historia de las matemáticas en la investigación y el ejercicio de la formación inicial docente: el Mgtr. Gerardo Cruz-Márquez y la Dra. María Elena Gavarrete, respectivamente.

El Mgtr. Cruz-Márquez nos presentó una propuesta de investigación sobre el 'dialogo' de los saberes docentes y el rol que estos juegan al tomar decisiones de diseño, implementación y análisis de actividades de aula, específicamente al trabajar con profesores de matemáticas en formación inicial y partiendo de una problematización de las nociones trigonométricas llevada a cabo en un escenario histórico.

Mientras que la Dra. Gavarrete nos compartió los resultados de una experiencia de formación docente desarrollada en el curso Historia de la Matemática que se imparte en la Universidad Nacional de Costa Rica. Esta incluye un componente de investigación histórica, con el propósito de generar reflexiones críticas en los docentes en formación, acerca de la evolución y cambios del abordaje didáctico-matemático para diversas temáticas, y cómo estas reflexiones pueden incidir en el desarrollo profesional de los docentes.

A continuación, describimos –por separado– ambos aportes.

Problematización de la trigonometría y la formación inicial docente

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) sostiene que, en tanto el saber matemático se ha construido socialmente en ámbitos no escolares, su introducción en el sistema educativo –fruto de su valioso papel en la formación ciudadana– obliga a un proceso de transposición didáctica. Esto es, la matemática (en tanto saber humano) se somete a un conjunto progresivo de modificaciones que permiten seleccionar, organizar y estructurar los conocimientos que son incluidos en la Matemática (en tanto espacio escolar) (Reyes-Gasperini, 2016). Al sistema de razón que determina estas modificaciones –y, en consecuencia, la estructura y funcionamiento de la Matemática– es lo que, desde esta teoría, se denomina discurso Matemático Escolar (dME).

Una de las características del dME asociado a la trigonometría, que se manifiesta de forma natural a través de los distintos planos educativos, como el discurso escolar, los planes y programas de estudio, los libros de texto, y las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general (Montiel y Jácome, 2014), es su enfoque en el dominio aritmético de las nociones trigonométricas y una marcada disociación entre la trigonometría escolar y la geometría –que históricamente le dio origen y la precede de manera general en los programas y planes de estudio–. Consecuencia de este fenómeno, denominado *aritmetización de la trigonometría* (Montiel, 2011), se admite un significado lineal y se promueve un significado aritmético para las nociones trigonométricas, al mismo tiempo que se reduce su uso al de una técnica de cálculo de un valor faltante (Montiel y Jácome, 2014).

Ante esta problemática, y desde la perspectiva que ofrece la TSME, en el estudio De Sirio a Ptolomeo: Una Problematización de las Nociones Trigonométricas (Cruz-Márquez, 2018), nos planteamos un proyecto de investigación cuya hipótesis implícita de partida es que al extender los usos de las nociones trigonométricas y aminorar la brecha existente entre el estudio de la trigonometría y las nociones y procedimientos geométricos, es posible confrontar la aritmetización de la trigonometría y sus fenómenos asociados.

Esta conjetura nos orilló, en primera instancia, a respondernos tres preguntas: ¿qué usos le son propios a las nociones trigonométricas, en especial la razón?, ¿cómo acercar las nociones y procedimientos geométricos a la introducción y evolución de las nociones trigonométricas? y ¿qué nociones y procedimientos geométricos son pertinentes a la introducción de las nociones trigonométricas? Y, en segunda instancia, a confrontar nuestra hipótesis, llevando las respuestas esbozadas para las preguntas anteriores a un ambiente escolar.

Así, dicha investigación constó de dos grandes etapas. La primera –denominada historización– tuvo como objetivo, mediante un análisis sociohistórico-documental, acercarnos a la naturaleza de las nociones trigonométricas y a las circunstancias sociales, culturales e institucionales que propiciaron su emergencia y evolución en el Almagesto de Ptolomeo. Mientras que la segunda –denominada dialectización–, consistió en una visita académica a un centro de formación inicial docente y tuvo la intensión de ser un espacio de confrontación de los elementos identificados en la etapa anterior con un escenario didáctico.

Como principales resultados de esta investigación –y atendiendo tres preguntas de partida–, propusimos y dimos evidencia empírica de que la *medición indirecta de distancias en el contexto del círculo* constituye un escenario apropiado para hacer frente al fenómeno de aritmetización de la trigonometría, esto es, confrontar el significado lineal y aritmético asociado a la razón trigonométrica bajo el dME actual, así como para promover su resignificación mediante el uso. A la vez, nos hizo consientes de la importancia del *trabajo geométrico* –en tanto sinergia de usos: como herramientas de construcción, como herramientas teóricas y como herramientas aritmético-algebraicas–, sobre nociones geométricas como el *círculo*, el *triángulo rectángulo* y la *proporcionalidad*, para dicho proceso.

Posterior a este estudio, y con el objetivo de enriquecer la información obtenida en la primera aplicación del diseño, realizamos una segunda experiencia de aula. La secuencia se presentó como un taller extra clase, compuesto por dos sesiones de aproximadamente dos horas cada una, y se llevó a cabo con estudiantes que cursaban el espacio de Práctica Profesional, ubicado en el octavo semestre del Plan de Estudios (PE 2004–2), y los estudiantes que cursaban el espacio de Geometría Analítica, ubicado en el sexto semestre del Plan de Estudios (PE 2014–2), de la Licenciatura en Docencia de la Matemática que oferta la Universidad Autónoma de Baja California (UABC), Campus Mexicali, Baja California Norte, México.

Como principal resultado de esta segunda experiencia de aula, advertimos que la situación de medición indirecta de distancias presentada a los estudiantes produjo –en el grupo de octavo semestre–, no solo la confrontación y resignificación matemática que habíamos reportado en la experiencia de aula llevada a cabo anteriormente, sino cierto cuestionamiento respecto a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en juego. Por ejemplo, comenzaron a utilizar frases como ‘Porque es lo que nos ha inculcado toda la vida…’ para justificar el uso de una herramienta matemática particular; y respuestas como ‘Porque así es el teorema y ya…’ al cuestionarse sobre qué le dirían a sus futuros estudiantes en caso de que preguntarán por qué funciona dicha herramienta.

En consecuencia, nos planteamos preguntas como: *¿problematizar (confrontar y resignificar) las nociones trigonométricas –mediante el diseño construido– permite o propicia la reflexión y análisis respecto a aspectos asociados a su enseñanza y aprendizaje?*, esto es, *¿problematizar las nociones trigonométricas ‘moviliza’ otros conocimientos docentes no disciplinares?, ¿cómo?*

En consecuencia, y con la intención de dar forma a estas observaciones y cuestiones, comenzamos con la revisión bibliográfica alrededor de la formación inicial docente, general y en matemáticas. Los estudios sobre las formación inicial y continua de los profesores en general, y de matemáticas en particular, se han llevado a cabo por profesionales de diversos ámbitos y desde una gran variedad de campos científicos. Así, es posible encontrar desde estudios de caso que analizan la relación entre las creencias de un profesor y su práctica, como el realizado por Lloyd (2005), hasta proyectos de investigación como The Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M) (Tatto et al., 2012), un estudio comparativo internacional a gran escala sobre la formación de los profesores de matemáticas en el nivel de primaria y de primer ciclo de secundaria, llevado a cabo durante cinco años y tomando en cuenta 17 países.

En los últimos años, las investigaciones de corte social han comenzado a tomar cierto realce en nuestra disciplina y especialmente en la formación inicial docente respecto al conocimiento del futuro docente de matemáticas. De manera general, los investigadores adscritos a esta perspectiva consideran que la “discusión sobre el conocimiento del profesor de matemáticas debería estar moldeada por el contexto en el que el profesor desarrolla su trabajo” (Sánchez, 2011, p. 135, [Traducción nuestra]). En este sentido cobran interés preguntas como: “¿Qué bases de conocimiento (son necesarias) para enseñar a estudiantes cultural y lingüísticamente diversos? ¿Y por enseñar en escuelas urbanas y rurales de escasos recursos?” (Adler, 2000 en Sánchez, 2011, p. 135, [Traducción nuestra]).

Dentro de estas, y desde una óptica más bien etnográfica, destaca la propuesta de los Saberes Docentes de Mercado (1991, 1994, 2002). En ella, la autora plantea a los saberes docentes como saberes cotidianos, en tanto “*conocimiento* [énfasis agregado] sobre la realidad que *utilizamos* [énfasis agregado] de un modo efectivo en la vida cotidiana, del modo más heterogéneo (como guía para las acciones, como temas de conversación, etcétera)” (Heller, 1977 en Mercado, 2002, p. 13).

Bajo esta perspectiva, el docente solo se apropia de los saberes que estima necesarios para su labor. En el transcurso de este proceso de apropiación el docente genera nuevos saberes a la vez que integra o rechaza conocimientos provenientes de distintos ámbitos sociales y momentos históricos. En consecuencia, y como puede ser evidente en este punto, los saberes docentes son considerados –bajo esta perspectiva teórica– de carácter histórico, dialógicos y socialmente construidos (Mercado, 2002).

El carácter histórico de los saberes docentes refiere a que, al tomar una decisión, los docentes ponen en juego 'voces' provenientes de distintos momentos históricos, reformas educativas pasadas o vigentes, experiencias de formación inicial o de actualización docente, la experiencia docente en general, por ejemplo. Por otro lado, el carácter dialógico de los saberes docentes, que Mercado retoma de Bajhtin (1989), refiere a que –desde esta perspectiva– las acciones y expresiones de los docentes sobre su enseñanza no pueden verse únicamente desde una perspectiva individual, sino que deben entenderse como "producto de construcciones sociales, históricas, ya que representan huellas provenientes de distintas épocas y ámbitos sociales con las cuales *dialogan* [énfasis agregado] las percepciones individuales" (Mercado, 2002, p. 15).

Con base en los elementos presentados y discutidos anteriormente, en especial los referentes al estudio del conocimiento docente y la postura teórica propuesta por Mercado (1991, 1994, 2002), nos replanteamos las interrogantes propuestas como fruto de nuestra investigación de partida, así como sus objetivos asociados. En consecuencia, en este punto de nuestra investigación, nos preguntamos *¿cómo la problematización de las nociones trigonométricas dialoga con los demás saberes docentes de los futuros profesores de matemáticas?, ¿cuáles son esos 'otros saberes'?* y *¿qué rol –con relación a los demás saberes docentes– juega la problematización de las nociones trigonométricas al momento de tomar decisiones de diseño, implementación y análisis de actividades de aula?*

Historia de las Matemáticas y empoderamiento docente en Costa Rica

El reconocimiento de la Matemática Educativa como una disciplina científica ha impulsado la investigación en este campo. En Costa Rica, al igual que en otras latitudes, los esfuerzos por documentar su evolución o desarrollo llevan pocos años.

En este apartado se describe una experiencia de formación docente llevada a cabo en el marco del curso de Historia de la Matemática que se imparte en la Universidad Nacional de Costa Rica. Esta incluye el componente de investigación histórica desde un enfoque didáctico que favorece la reflexión sobre las conexiones entre historia universal, matemáticas, ciencias, artes y culturas, para favorecer el empoderamiento docente y la contextualización de la matemática desde la visión sociocultural.

En concreto, el trabajo final del curso se titula "El abordaje de la Historia de la Matemática como recurso didáctico" y abarca tres tipos distintos de tareas. En la primera de ellas, los estudiantes realizan una investigación histórica a partir de libros antiguos; la segunda, corresponde a un análisis comparativo de los libros antiguos con respecto a los libros de la actualidad; y la tercera, es una reacción creativa a partir de la reflexión que se suscita en la comparación y que se presenta en un poster científico.

Para realizar el trabajo es requerido revisar, elegir y justificar la elección de un eje temático del Plan de Estudios de Educación Secundaria del Ministerio de Educación Pública (MEP) de Costa Rica e investigar cómo ese contenido fue abordado en épocas pasadas, a través de la investigación de libros antiguos, con el propósito de generar reflexiones críticas en los profesores en formación que participan en el curso sobre cómo ha cambiado (o no) el abordaje didáctico-matemático y cómo la revisión histórica puede incidir en la práctica docente.

La Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica cuenta con un acervo de libros antiguos, como fruto del proyecto titulado "Museo Juan Félix Martínez de Historia y Filosofía de las Matemáticas desde una Visión

Sociocultural”. El museo cuenta con más de 150 tomos de libros de matemática, el más antiguo publicado en 1795. Muchas de estas obras provienen de la donación de la familia del profesor Juan Félix Martínez, otros han sido donados por docentes jubilados de la Escuela de Matemática.

Los libros del Museo tienen un valor histórico invaluable y han servido para promover la investigación en la Educación Matemática en Costa Rica, puesto que existen libros que están escritos en inglés o francés, ya que fueron editados e impresos en países extranjeros, traídos a Costa Rica a finales del Siglo XIX para ser usados como recursos para el aprendizaje de la matemática y constituyen los primeros libros utilizados para impartir clases de matemáticas en la Universidad de Santo Tomás, que fue la primera universidad de Costa Rica (Jiménez y Palmer, 1997).

Otra parte de la colección se compone de las primeras publicaciones hechas en nuestro país sobre esta materia, bajo la autoría de los profesores José Joaquín Trejos y Gil Chaverri, por ejemplo. Consisten tanto en adaptaciones de los traídos del extranjero, como en creaciones de los talentos nacionales con que se contaba al momento.

El trabajo con los libros antiguos que fue propuesto a los estudiantes tuvo como propósito *Promover investigaciones en los estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional acerca de la Historia de las Matemáticas en Costa Rica, considerando aspectos socioculturales que favorezcan el empoderamiento como gremio profesional.* Para el cumplimiento de este objetivo, se contemplaron las siguientes fases:

A. *Motivación y Contextualización:* en esta fase se mostró a los estudiantes la colección de libros antiguos, así como algunos matices sobre la historia de la enseñanza de la matemática en Costa Rica, donde los libros estuvieron involucrados. Por otra parte, se realizó un taller de formación en investigación para explicar la metodología para desarrollar entrevistas semiestructuradas, con la finalidad de poder invitar a la clase docentes de matemática jubilados, que hubieran trabajado, tanto en educación secundaria como universitaria y que pudieran compartir su experiencia.

B. *Indagación y Análisis:* en esta fase los estudiantes tuvieron acceso a revisar libros antiguos, además realizaron una comparación entre las maneras de plantear el desarrollo de diversos contenidos en el pasado y en la actualidad. Asimismo, en esta fase los estudiantes realizaron entrevistas a docentes jubilados, bajo una actividad que se denominó “Por favor: cuéntenos”, donde incluyeron aspectos tales como anécdotas sobre su formación en la escuela primaria y en la secundaria, así como también respecto a la situación social, política y económica de Costa Rica durante la época en que era estudiante, y sobre las exigencias experimentadas durante la época de formación como docente en la Universidad; sus primeras experiencias como profesor de matemática y sus creencias sobre la vocación y la filosofía de trabajo de un profesor de matemáticas. Por ejemplo, acerca de la Vocación y Filosofía para la enseñanza de la matemática, se consideraron preguntas tales como: ¿Qué es lo más profundo de esta profesión?, ¿qué es lo indispensable para ser un buen profesor de matemáticas?, o bien, ¿qué nos puede aconsejar para mejorar nuestro desarrollo como profesores de matemática desde su experiencia?

En esta sección, cabe destacar que tanto los libros antiguos como los docentes entrevistados, refieren al cambio promovido por la Reforma Matemática que se desarrolló en el país, en la cual se desarrolló una transición en la forma que se enseñaba la matemática en los centros educativos para empezar a enseñar todo lo relacionado con la Teoría de Conjuntos. Tal como lo afirman Alfaro, Alpízar, Morales, Ramírez y Salas (2013), este cambio se desarrolló entre los años 1960 y 1970, y consistió en una reforma educativa nacional inspirada por grandes matemáticos del momento, su ideología de las matemáticas modernas fue en aquel momento adoptada como forma y método para la enseñanza de la Matemática en todos los niveles (primaria, secundaria y universidad), se enfatizaba los aspectos formales, deductivos, axiomáticos y más abstractos.

Durante la experiencia, los estudiantes toman en cuenta que los conocimientos matemáticos son el reflejo de la sociedad y la cultura que permite y guía su desarrollo durante una época (White, 1982). De esta forma, los libros de texto utilizados como recurso didáctico en la mediación pedagógica de la matemática durante la Educación General Básica (estudiantes de 7 a 15 años) y el Ciclo Diversificado (estudiantes de 16 a 17 años), contienen destellos del acontecer en la historia de la educación matemática de Costa Rica, la realidad sociopolítica y económica del país de edición o de destino como las corrientes de pensamiento presentes en el gobierno, los fines de la educación y las teorías psicopedagógicas del momento.

Para realizar el trabajo, los estudiantes eligen y caracterizan las categorías de análisis que permiten establecer un criterio comparativo entre los libros en diversos aspectos, tales como:

- Programas de estudios de Matemática, donde se visualizan semejanzas y diferencias entre los contenidos y habilidades u objetivos de estudio que se pretenden alcanzar según el programa de estudios vigente en el momento a partir de los libros.
- Formato y diseño de las unidades didácticas, en lo que respecta a la estructura y la organización de estas.
- Nivel de abstracción de los ejercicios propuestos, donde se contempla si son de índole demostrativo, para reforzar o replantea terminologías; o bien si se tratan de propuestas meramente prácticas, que promueven la mecanización de procedimientos.
- Presencia de la historia de la matemática, donde se verifica la inclusión y la forma en que se presenta y el uso que se le da, bien sea como introducción, como recurso didáctico, como medio de contextualización de problemas, entre otros.

C. *Reflexión y Reacción Creativa:* en esta fase se propone a los estudiantes desarrollar reflexiones sobre la experiencia de investigación, así como plasmar los resultados del trabajo en un ensayo crítico y en un poster científico. Esta actividad conlleva a reflexiones acerca del empoderamiento docente, puesto que favorece en ellos un discurso cautivador, donde la Historia de la Enseñanza de la Matemática y el saber matemático escolar son fundamentales para generar cambios significativos en la educación y la Didáctica de la Matemática.

Algunas conclusiones y prospectivas

En suma, durante esta sesión del Grupo de Discusión Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa dialogamos, con base en las experiencias didácticas y de investigación presentadas por nuestros invitados, así como los aportes de los participantes, sobre cómo la historia de las matemáticas representa un elemento importante en la formación de los futuros profesores de matemáticas, no solo en aspectos disciplinares, sino pedagógicos, curriculares, didácticos, etcétera.

Además, dejó algunas problemáticas sobre la mesa, las que podrían constituir futuras temáticas de discusión. La investigación del Mgtr. Cruz-Márquez nos hizo reflexionar respecto a otros campos de aplicación de los elementos histórico-epistemológicos, entre ellos: como herramienta para preveer obstáculos que pueden presentar los estudiantes al construir una noción matemática específica, como base para la formulación de propuestas didácticas innovadoras y como instrumento para el análisis de libros de texto. Mientras que la experiencia de aula presentada por la Dra. Gavarrete nos hizo cuestionarnos respecto a las diferencias y relaciones entre la Historia de la Matemática, la Historia de la Enseñanza de la Matemática y la Historia de la Matemática Educativa, así como sus usos en contextos de formación docente.

Referencias bibliográficas

Alfaro, A., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez, M. y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 131-179.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6* (1), 27-40.

Cruz-Márquez, G. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: Una Problematización de las Nociones Trigonométricas*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav). doi: 10.13140/RG.2.2.18095.64166

Cruz-Márquez, G. y Romero, F. [cruzmarquezg]. (2017, 4 de octubre). *Grupo de Discusión: Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa | Relme31* [Archivo de video]. Disponible en https://goo.gl/gekQZg

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en Didáctica de la Matemática. En E. Castro (Ed.), *Investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp. 79-86). Granada: Universidad de Granada.

Jiménez, I. M., y Palmer, S. P. (1997). *Historia de Costa Rica: breve, actualizada y con ilustraciones*. Editorial Universidad de Costa Rica.

Larios, V. (2001). Filosofía e historia de la matemática en la formación docente. *Educación Matemática*, *13*(3), 64-74.

Lloyd, G. M. (2005). Beliefs about the teacher's role in the mathematics classroom: One student teacher's exploration in fiction and in practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 441–467.

Mercado, R. (1991). Los saberes docentes en el trabajo cotidiano de los maestros. *Infancia y aprendizaje*, *14*(55), 59-72.

Mercado, R. (1994). Saberes and social voices in teaching. *Education as cultural construction*, 61-70.

Mercado, R. (2002). *Los saberes docentes como construcción social. La enseñanza centrada en los niños*. México: Fondo de Cultural Económica.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio Socioepistemológico.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Montiel, G. y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de Doctorado no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav).

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje: Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 12*(1), 45-56.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, *5*(4), 129-145.

Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M., y Rowley, G. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M).* Amsterdam: International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).

White, L. (1982). El locus de la realidad matemática. La ciencia de la cultura: Un estudio sobre el hombre y la civilización. Barcelona: Paidós.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

DISEÑO CURRICULAR EN MATEMÁTICAS Y LA FORMACIÓN DOCENTE

CURRICULUM DESIGN IN MATHEMATICS AND TRAINING TEACHER

Liliana Suárez Téllez, María Eugenia Ramírez Solís, Guadalupe Ángel González Chávez, Víctor Hugo Luna Acevedo
Instituto Politécnico Nacional, CGFIE-ENCB-IPN. (México)
lsuarez@ipn.mx, meramire@ipn.mx, gagonzalez@ipn.mx, vhluna@ipn.mx

Resumen
En este artículo de investigación se reporta un estudio sobre la participación de los profesores de matemáticas en los procesos de diseño y rediseño curricular en una institución de educación superior en México, en los niveles medio superior y superior. El marco de los currículos se toma de referencia para diseñar una investigación cualitativa que indaga sobre las principales problemáticas que las instituciones y los actores enfrentan en el diseño curricular. Con una fase de entrevistas se profundiza en las relaciones que tienen los profesores de matemáticas en el rediseño de planes y programas de estudio. Entre las principales conclusiones se encuentra la necesidad de incluir marcos de la didáctica específica para dar sentido a los cambios a realizar los programas de estudio y mediar la participación de los profesores en este proyecto institucional.

Palabras clave: currículo, formación de profesores, educación superior

Abstract
In this research paper, we report a study on the participation of mathematics teachers in the processes of curriculum design and re-design in a high education institution in Mexico, in high school and colleges levels. The framework of the curricula (Schmidt et al, 2007) is taken as a reference to design a qualitative research that investigates the main problems that institutions and actors face in the curricular design. With a phase of interviews deepens in the relationships that teachers of mathematics have in the redesign of plans and programs of study. Among the main conclusions is the need to include specific didactic frameworks to make sense of the changes in the program of study and the participation of teachers in this institutional project.

Key words: curricula, teacher training, high school

Introducción

El trabajo de un profesor de matemáticas está principalmente asociado al diseño, instrumentación y evaluación de situaciones didácticas para lograr que sus estudiantes aprendan matemáticas. Actualmente, aunado a esta importante tarea, se ha identificado que el profesor debe participar activamente en su propia formación y en proyectos de mejora continua de su escuela y de apoyo a su gestión. La complejidad educativa en la que todo profesor debe participar puede ser descrita a partir de los procesos educativos que intervienen, uno de ellos es la Elaboración de planes y programas de estudio. Para el caso del profesor de matemáticas de educación superior es importante entender cómo participa en este proceso que también se conoce como Diseño curricular.

Dolores y García (2012) presentan una obra donde se indaga sobre los cambios curriculares que se han llevado a cabo en el área de matemáticas en los subsistemas de educación media superior en México. En este estudio profesores e investigadores del campo de la matemática aportan una reflexión acerca del rumbo que pudieran tomar esas reformas. Croda y Tamayo (2017) relatan una experiencia de diseño curricular basado en una estrategia de comunidad profesional de aprendizaje. En un principio, se consideró que los valores asociados a una cultura de la colaboración, un clima de inclusión y la práctica profesional, pero el estudio configuró otras categorías importantes para los profesores involucrados en el diseño curricular como el liderazgo y la formación docente. Soto y Sánchez (2017) hacen un estudio para identificar el perfil del innovador curricular de nivel superior. Identifican competencias específicas de la teoría curricular y competencias genéricas en los ámbitos instrumentales, interpersonales y sistémicos, concluyen que un modelo de competencias y atributos contribuirá a definir un perfil de egreso en las acciones de formación docente, en particular, proponen un diplomado para la profesionalización de la innovación curricular. Esta acción de formación debe proporcionar los fundamentos, apoyos y herramientas requeridas para la apropiación, rediseño e implantación de las nuevas propuestas curriculares, pero es importante el diseño de una estrategia de asesoramiento pedagógico-curricular. En el ámbito de la matemática educativa, Angulo, Moreno y Reducindo (2017) reportan los elementos más importantes que resultaron de la evaluación curricular realizada a la licenciatura en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. En esta evaluación curricular los investigadores observaron que el currículo había sufrido, durante la práctica, una serie de adecuaciones. A partir de los resultados de este estudio ellos proponen siete dimensiones metodológicas entre las que destacan el análisis del discurso curricular docente y discente y la construcción de la estructura conceptual científica de la disciplina.

A partir de los autores anteriores, podemos observar que, en el proceso del rediseño curricular, la intervención de diferentes agentes educativos para gestionar, diseñar y autorizar los planes y programas de estudio, entre otras actividades, implica decisiones fundamentadas en los marcos actuales de la educación.

En el Instituto Politécnico Nacional, los actores que participan en la Comisión del Diseño Curricular cuentan con experiencia en la disciplina y el campo laboral, pero no son expertos en diseño curricular. Es importante, entonces, plantearse investigaciones para indagar las estrategias de formación que deben implementarse para dotar de competencias específicas a los actores educativos (Jiménez, 2002) que participan en rediseño curricular en las diferentes etapas.

Elementos de la teoría curricular para la formación de los profesores

El currículo es un plan operativo que detalla lo que los alumnos deben saber, qué deben hacer los profesores para conseguir que sus alumnos desarrollen sus competencias y cuál debe ser el contexto en el que tenga lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje, especificando, los criterios que se aplicarán para evaluar qué ha aprendido el alumno. El Instituto Politécnico Nacional ha vivido un proceso de cambio curricular que, de acuerdo con el marco de los currículos (Suárez, Torres y Ortega, 2012), se ha concentrado en influir en el currículo aplicado para determinar con mayor eficacia en el currículo logrado.

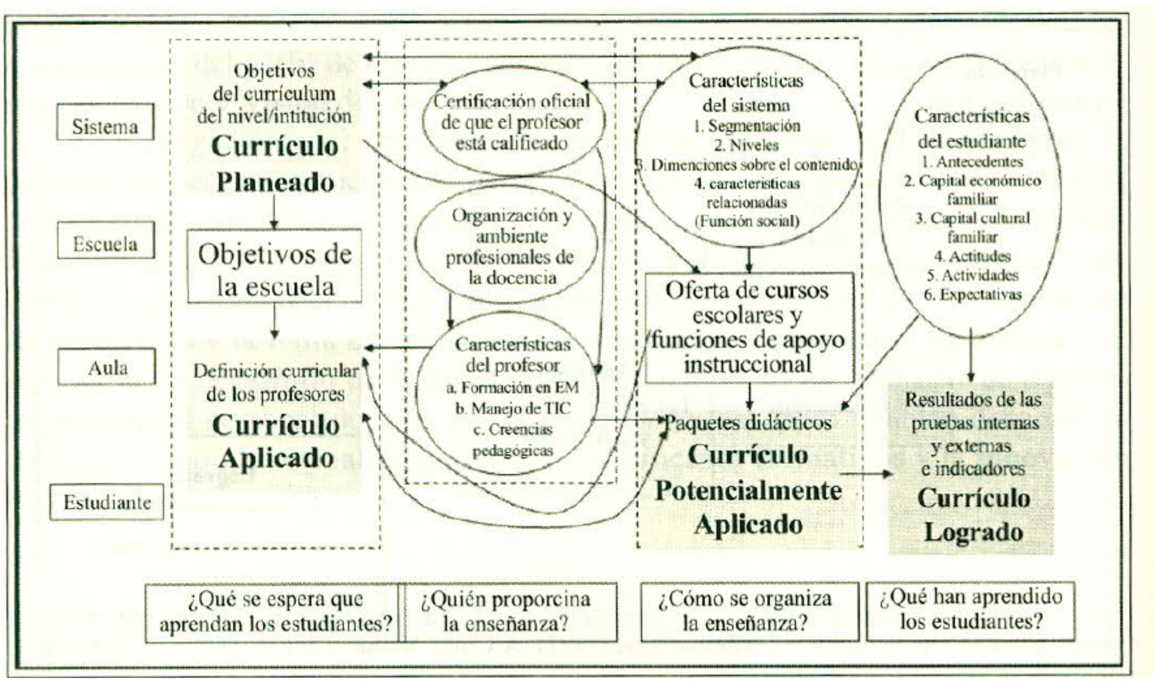


Figura1. Traducción de Suárez, Torres y Ortega (2012) tomado de Schmidt el al, 1997.

Schmidt y otros investigadores (1997), hacen explícitos los diferentes currículos que existen, el Currículo Planeado, también conocido como es currículo oficial, es el que establece los objetivos del currículo y se establecen los planes y programas de estudio: el Currículo Aplicado es el que los profesores implementan en sus salones de clase a partir de la interpretación que hacen del currículo planeado, el Currículo Potencialmente Aplicado, una aportación interesante de Schmitdt y otros (1997) en el que se establece un conjunto de materiales y acciones que permitan una mejor interpretación de los profesores y estudiante de las metas propuestas en el currículo oficial y el Currículo Logrado que es la formación de los estudiantes y que se puede medir a través de diferentes indicadores, internos o externos, y locales, nacionales o internacionales.

La explicitación de los currículos permite entender cuáles son las diferentes relaciones entre ellos y cómo están relacionados los diferentes autores con cada uno de ellos. El ámbito de acción de un profesor, el profesor de matemáticas en particular se ubica en el nivel del aula y del currículo que él planea. Existen cuatro relaciones importantes, la relación de esta planeación con los objetivos educativos, la relación con sus propias características (formación, manejo de TIC, creencias pedagógicas), la relación entre cómo se organizar la enseñanza a través de materiales y acciones que apoyen su labor docente. En particular, el propósito de este estudio es, a partir de la indagación en una muestra de profesores que participaron en el rediseño curricular en matemáticas, explorar la participación del profesor de matemáticas en el diseño curricular de los planes y programas de estudio de matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

Método

El estudio es de enfoque cualitativo en dos etapas, en la primera etapa se hizo una encuesta para averiguar cuáles son los principales problemas que los profesores han tenido en su participación en el proceso de diseño curricular. La encuesta se realizó a actores de diverdas unidades académicas que acudieron a un taller para fortalecer sus competencias en los fundamentos teóricos para el rediseño curricular. La muestra de los encuestados fue elida por oportunidad y conveniencia. En la segunda etapa se entrevistó a 2 profesores de los niveles medio superior (bachillerato) y 2 profesores de superior (universitario) para conocer más a fondo cómo han participado en los procesos de rediseño curricular de los planes y programas de estudio de matemáticas en el Instituto Politécnico Nacional.

Resultados

Principales dificultades en las Unidades Académicas

Las dificultades a las que se enfrentan las escuelas en sus procesos de rediseño curricular están asociadas principalmente a cuestiones organizacionales. Los participantes no perciben que la institución proporcione los apoyos para llevar a cabo la tarea de rediseño como formación en el área curricular, claridad en las definiciones y los procedimientos, y seguimiento al trabajo para lograr concretarlo, también piensan que hay actores que no son tomados en cuentas, como los estudiantes. Por otro lado, los funcionarios no perciben una participación completamente comprometida de los profesores que conforman las comisiones, hay poca iniciativa en la realización de las tareas, sus intereses están orientados a su materia y no al plan de estudios en general y existe resistencia al cambio, entre otros.

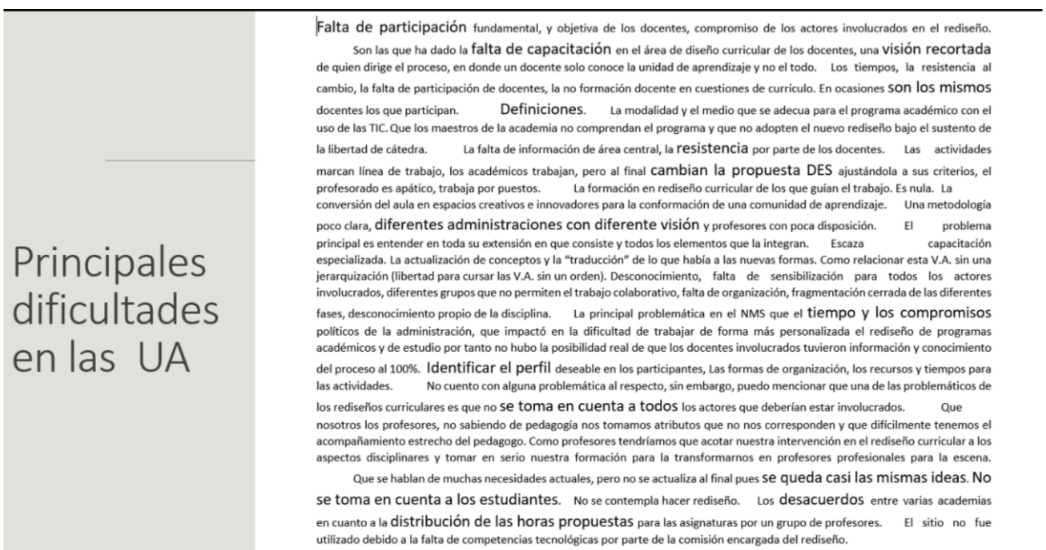


Figura 2. Dificultades en los procesos de rediseño curricular I. (Elaboración propia)

En estas dificultades que se presentan en las unidades académicas hay una discusión ausente en las respuestas de los sujetos de investigación y se refiere a cuestiones epistemológicas, es decir, no se problematiza la importancia, pertinencia y configuración del contenido, matemático en este caso.

Principales dificultades en los participantes

Las dificultades que enfrentan los individuos que participan en las comisiones de rediseño curricular se centran en: el trabajo colaborativo con profesores de su propia asignatura, de otras asignaturas y con los funcionarios encargados de coordinar los trabajos; en su falta de formación e información en el área de trabajo curricular y en otros ámbitos como el sector productivo.

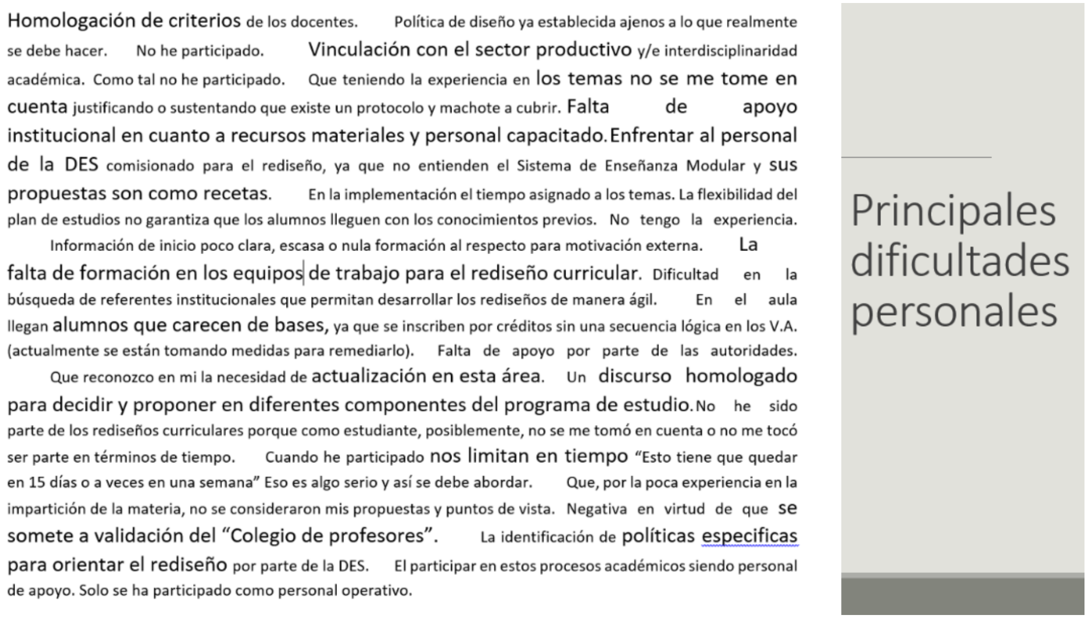


Figura 3. Dificultades en los procesos de rediseño curricular II. (Elaboración propia)

La falta de formación e información que mencionan, si bien la atribuyen, como en el rubro anterior a la falta de una directriz clara desde los funcionarios que organizan el proceso, también reconocen limitaciones de su desconocimiento a procesos más amplios del papel de su asignatura en la formación en una carrera específica, a la formación integral y a la atención a las demandas de la sociedad actual.

Participación de los profesores de matemáticas en el rediseño curricular

Las encuestas realizadas a profesores no permitieron identificar problemáticas ligadas a la naturaleza misma del conocimiento matemático. Por lo que el diseño de la investigación consideró una segunda fase en la que se tuviera un acercamiento mayor con los profesores a través de unas entrevistas. A continuación, a manera ilustrativa, ofrecemos extractos de las respuestas de cuatro de los profesores de matemáticas con los que conversamos sobre su participación en los procesos de rediseño curricular.

a) Objetivos del rediseño curricular desde la perspectiva de una profesora de bachillerato:
[El propósito de mi participación era] homogeneizar que se hicieran materiales similares a los primeros libros de la academia institucional, la incorporación de problemas contextualizados. Sin embargo, no convenció a los docentes. Ellos preferían los teorizados y la forma algorítmica de desarrollar fórmulas y ejercitarlos. [Me eligieron por] tener dominio en la disciplina (estar formado en matemáticas) y haber impartido los 6 programas [Además,] Las indicaciones eran revisar los contenidos, clarificamos la justificación, los objetivos, la metodología. [Para mí. ¨] Lo más sencillo, la estructuración de los temas, […] Lo más complejo era la redacción de aspectos como la fundamentación, los objetivos, …

b) Acciones de formación tomadas por un docente universitario
La gran mayoría han sido de áreas disciplinares, aunque he llegado a tomar cursos sobre planeación estratégica, otros relacionados al diseño curricular y unos de pedagogía. Sin embargo, en las escuelas o

unidades de Ingeniería del Instituto los cursos de diseño curricular o de aspectos pedagógicos son impartidos por docentes del área de las ciencias sociales, lo cual no produce los mejores resultados, porque ambas partes (instructores y estudiantes) desconocen la actividad de su contraparte, lo cual complica que en los cursos se le enseñen a uno métodos o estrategias que difícilmente se aplican en el aula.

c) Conocimientos y habilidades que debo poseer en el diseñado curricular universitario
Tener conocimiento del modelo educativo y el reglamento del IPN, su misión y visión del IPN, su historia y conocimientos del desarrollo industrial del país, así como el plan nacional y su papel en el contexto de la globalización. Tener habilidades de integración de la información y de trabajo en equipo, tener habilidades de liderazgo y de buena comunicación. Los valores de responsabilidad y respeto de las ideas. Compromiso.

d) Acciones formativas para preparar ante los rediseños curriculares
[Estoy impartiendo] Adaptaciones Curriculares, pero más allá de lo que es una necesidad educativa especial, no lo que es una necesidad educativa especial, si no lo que está detrás es ese concepto de escuela para todos, inclusión educativa, entonces uno se da cuenta conforme va leyendo que podemos con nuestro discurso estar discriminando a nuestros alumnos en lo que hacemos, entonces también el discurso puede ser un elemento de exclusión de los estudiantes, cuando les decimos "Estudiante para ti no te van las matemáticas", ya estamos haciendo un momento de exclusión, entonces el tipo de lecturas, el tipo de análisis que a veces hacemos en estos grupos de investigación que pertenecemos o de la academia de docentes que trabajamos me ha permitido ampliar mucho más la perspectiva […].

Para el proyecto ha sido muy valioso recuperar la perspectiva de los actores curriculares.

Avances y conclusiones

El diseño de la investigación nos ha permitido ir de lo general a lo particular. En la primera fase pudimos identificar una serie de factores organizacionales, es decir, los que pertenecen a la gestión o administración de los procesos, y una ausencia de los aspectos medulares de un rediseño en matemáticas, nos referimos a los aspectos epistemológicos, cognitivos y didácticos. El trabajo más profundo en las entrevistas, si bien nos permitió un mayor acercamiento a las necesidades de formación de los profesores de matemáticas, aún se refieren mucho a la problemática de construcción en comunidad. La investigación continuará para comprender mejor las necesidades de los profesores de matemáticas que participarían en la etapa de elaboración de planes y programas de estudio, haciendo un seguimiento de lo que ocurre en las etapas también de desarrollo e implementación y evaluación del currículo con la finalidad de hacer una propuesta de trayectoria formativa, a la manera que proponen Nicastro y Greco (2012) donde se involucre la complejidad del quehacer del profesor de matemáticas como actor del rediseño curricular.

Referencias

Angulo, R.G., Moreno, N. y Reducindo, I. (2017). Evaluación curricular de la licenciatura en Matemática Educativa en la UASLP. Una experiencia en marcha. *Memorias del XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa,* 1-13.

Croda, G. y Tamayo, N. M. (2017). Diseño curricular basado en comunidades profesionales de aprendizaje como estrategia metodológica. *Análisis de una experiencia. Memorias del XIV Congreso Nacional de Investigación Educativa, 1*-11.

Dolores, C. y García, M.S. (2012 *¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato?* Plaza y Valdés Editores: México.dt

Jiménez, E. (2002). La participación de los académicos en el diseño curricular de planes y programas de estudio en la UNAM. *Perfiles Educativos. 24* (96), 73-96.

Nicastro y Greco (2012). Entre trayectorias. Escenas y pensamientos en espacios de formación. *Homosapiens* Ediciones: Rosario.

Schmidt, W.H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1997). *Many Visions, Many Aims*, Volume 1: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Soto, A. Y. y Sánchez, J.A. (2017). Perfil del innovador curricular: Una propuesta de profesionalización docente para una institución de educación superior tecnológica. En Debates en Evaluación y Currículo. *Congreso Internacional de Educación.* Universidad Autónoma de Tlaxcala (pp.1- 9). México

Suárez, L.; Torres, J.L.; Ortega, P. (2012). *Las matemáticas del bachillerato en el instituto politécnico nacional.* En C. Dolores. (Ed.) ¿Hacia dónde reorientar el currículum de matemáticas del Bachillerato? Plaza y Valdés: México.

PRESENCIA DEL FENÓMENO "CONTRATO DIDÁCTICO" EN EL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO EN DOS DIFERENTES CONTEXTOS

PRESENCE OF THE PHENOMENON "DIDACTIC CONTRACT" IN THE PERFORMANCE OF THE STUDENTS IN THE RESOLUTION OF A MATHEMATICAL PROBLEM IN TWO DIFFERENT CONTEXTS

Brisa Mónica Izamar Rodríguez Jiménez, Josip Slisko Ignjatov, Lidia Aurora Hernández Rebollar
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
b_miza@hotmail.com, josipslisko47@gmail.com; lidiahr06@hotmail.com

Resumen
Esta investigación busca identificar la presencia y las formas del "contrato didáctico" en el desempeño de los estudiantes, así como la influencia del contexto para que se presente este fenómeno. Se analiza el desempeño de estudiantes de bachillerato en una actividad en la que se les pidió una representación visual de un problema matemático redactado en dos contextos diferentes. La investigación es cualitativa y de tipo exploratorio. Inicialmente se ha detectado que el "contrato didáctico" apareció más en la actividad que incluía al problema con un contexto poco familiar para los estudiantes. Las formas en que aparece este fenómeno incluyen operaciones arbitrarias para resolver el problema y la representación aleatoria de los elementos contenidos en el texto.

Palabras clave: contrato didáctico, influencia del contexto, representación visual

Abstract
This research seeks to identify the presence and the forms of the "didactic contract" in students' performances, as well as the influence of the context so that it can present this phenomenon. The performance of high school students is analyzed an activity in which they were asked a visual representation a mathematical problem written in two different contexts. The research is qualitative and exploratory. Initially it was detected that the "didactic contract" appeared more in the activity that included the problem with an unfamiliar context for the students. The ways in which this phenomenon appears include arbitrary operations to solve the problem and the random representation of the elements contained in the text.

Key words: didactic contract, context influence, visual representation

Introducción

Los problemas matemáticos se presentan día a día en el salón de clases como parte de actividades para el aprendizaje de las matemáticas. El propósito de la siguiente investigación pretende identificar la presencia y las formas en que aparece el "contrato didáctico" en el desempeño de estudiantes al realizar una representación visual de un problema.

La primera pregunta de investigación fue: ¿En qué formas se manifiesta el "contrato didáctico" al realizar una representación visual de un problema sin solicitar la solución? Existen problemas en los libros de texto donde el contexto utilizado es desconocido para el alumno. A partir de aquí, surge la segunda peg unta de investigación: ¿El fenómeno del contrato didáctico se presenta más con un contexto cotidiano o alejado del estudiante?

Marco teórico

Los alumnos suelen estar "acostumbrados" a la situación: si el profesor les da un problema, siempre deben dar una respuesta numérica, sin importar lo que las instrucciones soliciten. Brousseau define "contrato didáctico" como:

> En una situación de enseñanza, preparada y realizada por un docente, el estudiante tiene, generalmente como tarea, resolver un problema (matemático), que le es presentado; pero el acceso a esta tarea se realiza a través de una interpretación de las preguntas hechas, de las informaciones proporcionadas, de las obligaciones impuestas, que son las constantes de la forma de enseñar del docente. Estos hábitos (específicos) del docente esperados por el estudiante y los comportamientos del estudiante esperados por el docente constituyen el contrato didáctico (citado en D'Amore, Fandiño, Marazzani, y Sbaragl, 2010, p.153)

El contrato didáctico tiene distintas cláusulas. En la que nosotros nos enfocaremos es en la cláusula de delegación formal, que dice: "se trata de interpretar aritméticamente el texto, pasando de su formulación en lengua natural a la expresión aritmética que lleva de los datos al resultado" (D'Amore y Martini, 1997). Una vez que el estudiante pasa por esta cláusula, suele olvidarse del resto del texto o enunciado y solo ubica los datos numéricos para poder "resolver" dicho problema, sin tomar en cuenta lo que solicita dicho texto. De aquí surge dicha investigación, donde el estudiante deja de razonar o controlar las instrucciones del problema y se vuelve un compromiso para el estudiante dar un resultado cuando no se solicita.

"Los conocimientos sobre el mundo del sujeto contribuyen a que el alumno represente los problemas matemáticos" (Vicente y Orrantia, 2007). El alumno puede relacionar los conocimientos de su vida cotidiana con lo enunciado en los problemas, enfrentándose a una dificultad muy grande cuando no conoce los elementos a los que se refiere el contexto del problema. Van Dijik (2001) menciona que "La estructura de los modelos mentales se define con un esquema que consiste de algunas categorías muy generales, como Escenario (Tiempo, Lugar), Participantes (y sus varios roles), y un Evento o Acción". Es decir, el alumno puede relacionar los conocimientos de su vida cotidiana con lo enunciado en los problemas, enfrentándose a una dificultad muy grande cuando no conoce los elementos a los que se refiere el contexto del problema.

Rellensmann, Schukajlow y Leopold (2016), examinaron la interacción entre los estudiantes, el conocimiento estratégico sobre el dibujo, la precisión de los dibujos creados y el rendimiento en los modelos matemáticos. A partir de esta investigación se utilizarán los conceptos de *dibujo situacional* y *dibujo matemático* para la representación del modelo situacional, lo cuales describen de la siguiente manera:

Describen al dibujo situacional como la representación exteriorizada del modelo de situación que representa gráficamente los objetos descritos en la situación del problema de acuerdo con su apariencia visual, siendo menos abstracta. Al dibujo matemático lo describen como un dibujo abstracto porque proporciona una representación externa del modelo matemático, mencionando que un dibujo matemático muestra solo los objetos relevantes para la solución de la situación del problema, y estos se reducen a sus características matemáticas relevantes.

Metodología

La investigación es cualitativa y de tipo exploratorio. Se aplicó un problema matemático en dos contextos diferentes, pero manteniendo la misma formulación. El problema es extraído de un libro de texto que maneja un contexto con la tripulación de un barco, un acantilado y un alpinista. A dicho problema, se le modificó el contexto (tripulación → bombero; acantilado → edificio; alpinista → limpiador de vidrios), pero se mantiene la estructura lingüística y matemática. Se pidió a los alumnos que realizaran una representación visual de ambos problemas, pero NO se solicitó la solución de los mismos. Las formulaciones de los problemas utilizados fueron:

1. Problema original: "Los tripulantes de un barco situado a 500 m del pie de un acantilado, observan la cima de éste con un ángulo de 35º, cuando descubren a un alpinista en el ángulo de 30º. ¿Cuánto le falta al alpinista para llegar a la cumbre del acantilado?" (Almaguer, 2008, p. 133)
2. Problema con nuevo contexto: Un bombero, situado 200 m de un edificio, observa el techo de éste con un ángulo de 20º cuando descubre a un limpiador de ventanas en el ángulo de 15º. ¿Cuánto le falta al limpiador para llegar al techo del edificio?

Los participantes en la investigación fueron 100 alumnos entre 15 y 16 años de edad, de nivel medio superior de un bachillerato público del Estado de Puebla en México, en una zona completamente urbana.

Análisis de resultados

El análisis de las respuestas a la primera pregunta de investigación se realizó de manera general por problema. Posteriormente, las respuestas a la segunda pregunta se analizaron de forma individual para ambos problemas.

Se inicia con la categorización utilizada para el análisis de las respuestas a la primera pregunta de investigación:

¿En qué formas se manifiesta el "contrato didáctico" al realizar una representación visual de un problema sin solicitar la solución?

Se detectaron dos formas de manifestación. La primera, consiste en el uso arbitrario de todos los datos numéricos del texto en la representación visual o colocados de manera arbitraria sin operar dichas cantidades, es decir, en la hoja del problema plasman los datos numéricos del problema sin orden y sin congruencia con lo que dice el problema; como se muestra en la imagen 1:

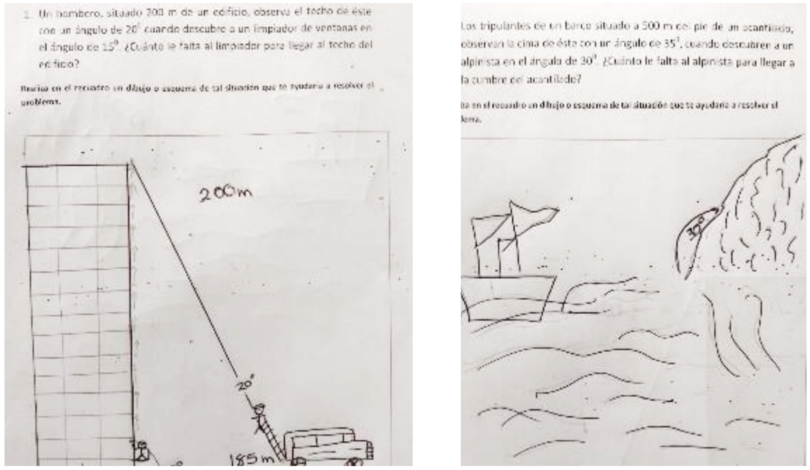


Imagen 1. Alumno #48. Presencia de la primera forma de contrato didáctico

En su representación visual del problema del limpiador el alumno coloca los 200 metros del enunciado en una parte de la hoja sin formar parte del dibujo, al igual que los 15º y 20º, no opera las cantidades, pero las coloca de forma arbitraria en el dibujo. En el problema del alpinista únicamente representa el barco mencionado en el enunciado, así como una idea de lo que es un "acantilado" y únicamente utiliza la cantidad de 30º colocándolo de manera arbitraria en el dibujo.

En la segunda forma, los alumnos operan las cantidades del texto para obtener la solución al problema (a pesar de que no se solicitó la solución), utilizando alguna operación aritmética como sumas, restas, multiplicación y división en distintas combinaciones, se presenta un ejemplo de esta segunda forma:

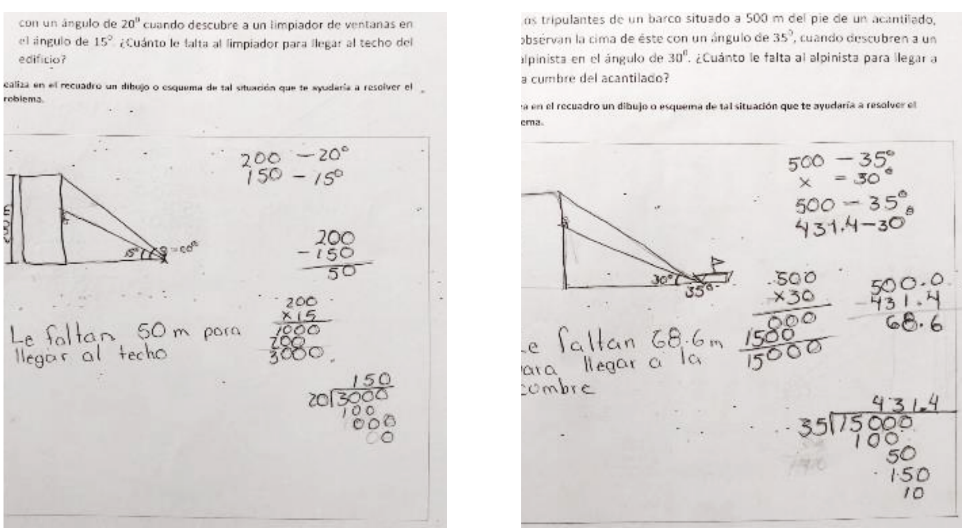


Imagen 2. Alumno #38 presenta contrato didáctico en la segunda forma

El alumno utiliza las cantidades para intentar resolver los problemas con una regla de tres, operando los metros con los ángulos, realiza el mismo proceso en ambos problemas.

A continuación, se presenta la frecuencia de representaciones realizadas en cada problema a nivel general.

Tabla 1. Representaciones realizadas en problema de contexto original	
Problema del alpinista (contexto original)	
Representación realizada	Frecuencia de alumnos
Representación visual idónea	13
Contrato didáctico	73
Dejaron en blanco	14

Tabla 2. Representaciones realizadas en problema de nuevo contexto	
Problema del Limpiador (nuevo contexto)	
Representación realizada	Frecuencia de alumnos
Representación visual idónea	47
Contrato didáctico	53
Dejaron en blanco	0

Cabe mencionar que esta investigación se centra en identificar primordialmente las formas en que se presenta el contrato didáctico. Sin embargo, se mencionarán brevemente los resultados de las representaciones visuales (dibujo situacional o dibujo matemático) realizadas en cada problema. En el problema del Limpiador existe una mejor representación visual, siendo 47 alumnos los que representaron el problema con un dibujo de la situación adecuado, sin presencia de contrato didáctico.

En el problema del Alpinista fueron solamente 13 representaciones idóneas a la situación planteada. En la detección de contrato didáctico se encontraron 73 alumnos en el problema del alpinista y 53 en el problema del limpiador, algunos realizaban un dibujo, pero con presencia del contrato didáctico, las cuales se desglosarán más adelante y 14 alumnos dejaron en blanco el problema del alpinista.

En la tabla 3 se muestra la frecuencia de las formas del contrato didáctico:

Tabla 3. Frecuencia de las formas de contrato didáctico

	Problema Alpinista (contexto original)	**Problema Limpiador (nuevo contexto)**
Forma 1 Uso arbitrario de todos los datos numéricos del texto sin operar dichas cantidades.	48	32
Forma 2 Operan las cantidades del texto para obtener la solución al problema	25	21

La primera forma de contrato didáctico se encontró con mayor frecuencia cuando los alumnos realizan la representación visual, porque los datos del problema no los colocan en la forma correcta, lo que hacen es "cumplir" poniéndolos en alguna parte de la hoja; los alumnos que tienen esta presencia de contrato didáctico sin representación visual, son debido a que colocaron ángulos y cantidades sin realizar algún tipo de operación o representación de los personajes, como se muestra en las imágenes 3 y 4.

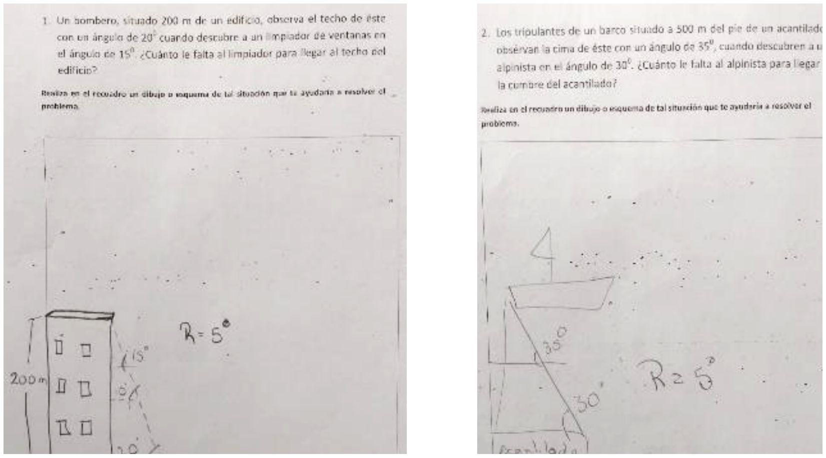


Imagen 3. El Alumno #42 coloca medida de ángulos arbitrariamente en ambos problemas.

Se puede observar en la imagen 3 las representaciones realizadas por un mismo alumno en ambos problemas: dibuja algunos personajes del contexto, coloca los datos numéricos que proporcionan, en la representación del problema del limpiador marca las cantidades en distintas partes del dibujo; en la representación del problema del alpinista dibuja el barco e intenta dibujar un acantilado colocando su nombre para identificar que ese es el acantilado.

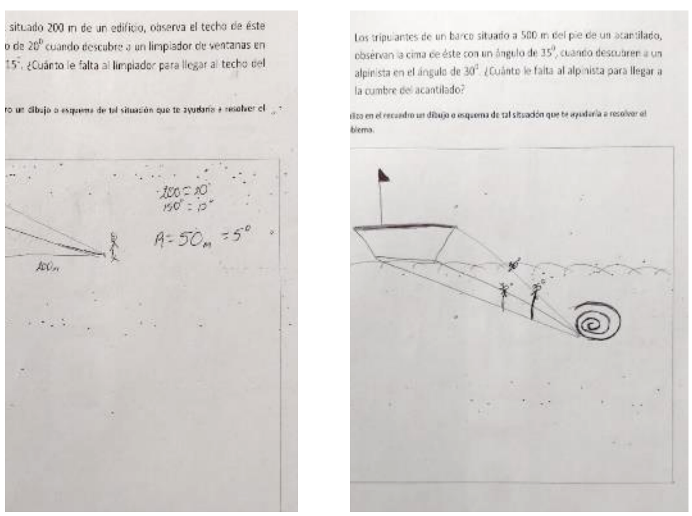


Imagen 4. Alumno #11 Realiza una representación idónea con el problema del limpiador.

El alumno de la imagen 4 colocó elementos del texto correctamente en su representación, da un resultado, pero no muestra operaciones utilizadas y en el problema del alpinista coloca los elementos del texto arbitrariamente.

En la segunda forma de contrato didáctico, los alumnos operan los datos numéricos mencionados en los problemas, utilizan sumas, restas, multiplicaciones, reglas de tres, teorema de Pitágoras e incluso algunos hacen mención de las funciones trigonométricas, pero de manera errónea, en la tabla 4 se presenta la frecuencia en que operan las cantidades:

Tabla 4. Presencia de contrato didáctico Forma 2 (operan los datos numéricos)	Frecuencia Alpinista (contexto original)	Frecuencia Limpiador (nuevo contexto)
1) utilizan regla de tres	7	6
2) Hacen mención o utiliza el teorema de Pitágoras	1	2
3) realizan sumas, restas, multiplicación o división con esas cantidades.	11	9
4) hacen mención o utilizan funciones trigonométricas.	6	4

En los problemas NO se solicita la resolución, sin embargo, tres alumnos los resolvieron correctamente con el uso de las funciones trigonométricas, dos de ellos resolvieron ambos problemas, pero uno solo resolvió el problema del limpiador dejando en blanco el problema del alpinista; estos tres alumnos están contabilizados en la tabla 4, ya que la indicación fue realizar una representación visual y no la solución al problema.
A continuación, se muestran ejemplos de la segunda forma de presencia de contrato didáctico en las imágenes 5 y 6.

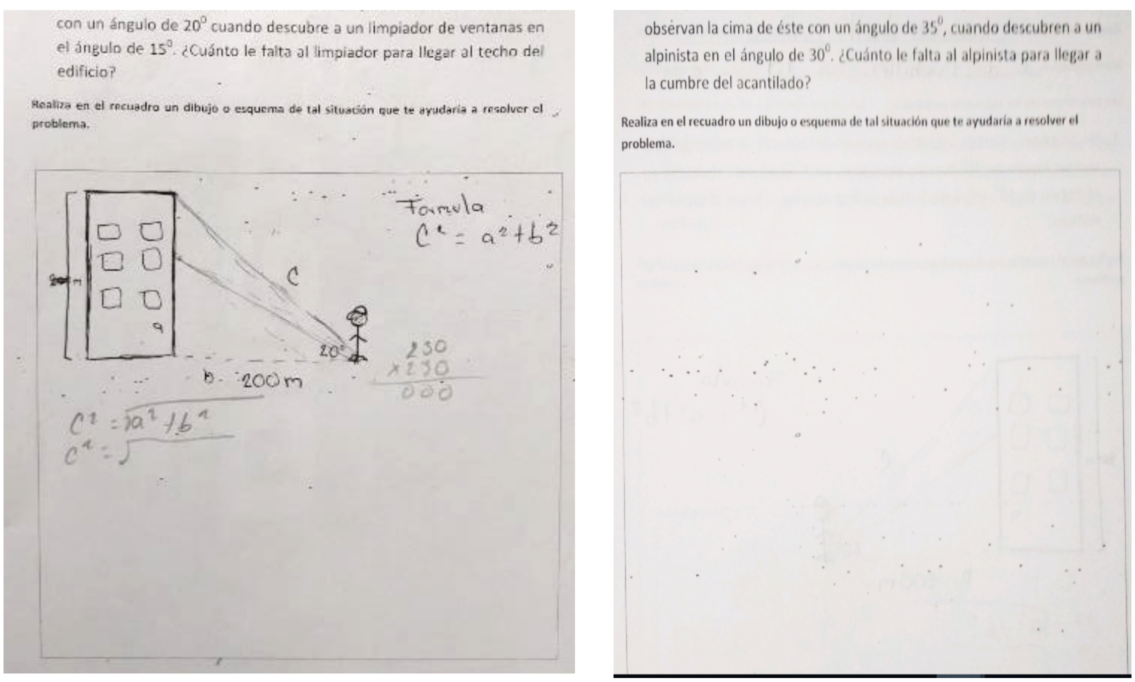


Imagen 5. Alumno #79 utiliza teorema de Pitágoras en el problema del bombeo, pero deja en blanco el problema del alpinista.

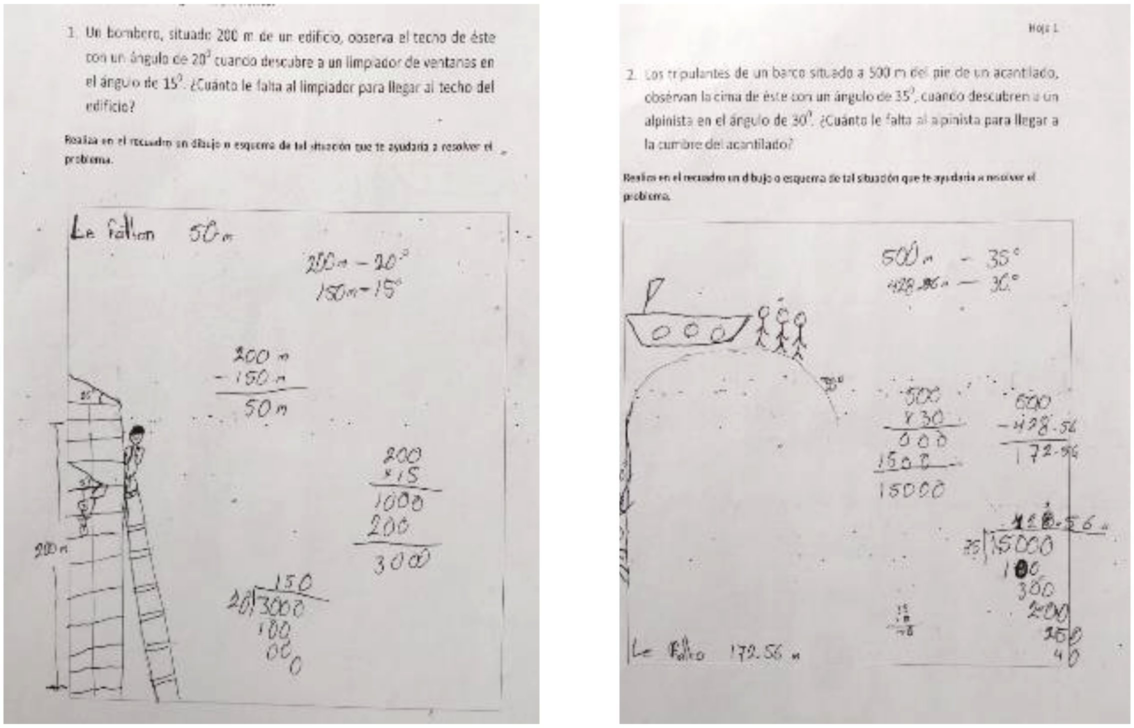


Imagen 6. Alumno #36 realiza representaciones en ambos problemas.

En la imagen 6 las representaciones que realiza el alumno son no idóneas a la situación mencionada en los problemas, junto con sus representaciones el alumno opera las cantidades utilizando regla de tres en ambos problemas.

En relación con la segunda pregunta de investigación (¿El fenómeno del contrato didáctico se presenta más con un contexto cotidiano o alejado del estudiante?), se detectó que el contrato didáctico, en alguna de las dos formas, se presentó con mayor frecuencia en el problema de el alpinista, a diferencia del problema del limpiador de ventanas, donde es menor el número de alumnos con dicha situación. Sin embargo, el contrato didáctico está presente en ambos contextos, pero la visualización de la situación en el contexto del limpiador es mejor.

En el 7% de los alumnos se detectó el contrato didáctico replicando las operaciones o datos numéricos contenidos en los enunciados de ambos problemas. A continuación, se presenta la tabla 5 que hace referencia a tales casos de lo anterior.

Tabla 5. Representaciones por cada alumno en ambos problemas	**Frecuencia**
Contrato didáctico en ambos problemas	7
En limpiador: Representación visual idónea En alpinista: contrato didáctico/ dejo en blanco	76
en limpiador: contrato didáctico en alpinista: representación visual idónea	17
Total de instrumentos	**100**

Se puede apreciar en la tabla 5 que existe un mejor desempeño en la representación del problema del limpiador y con poco contrato didáctico, a diferencia del problema del alpinista en donde es mayor el número de alumnos que presentan contrato didáctico en este problema y una representación no idónea del problema. La imagen 7 muestra lo anteriormente mencionado.

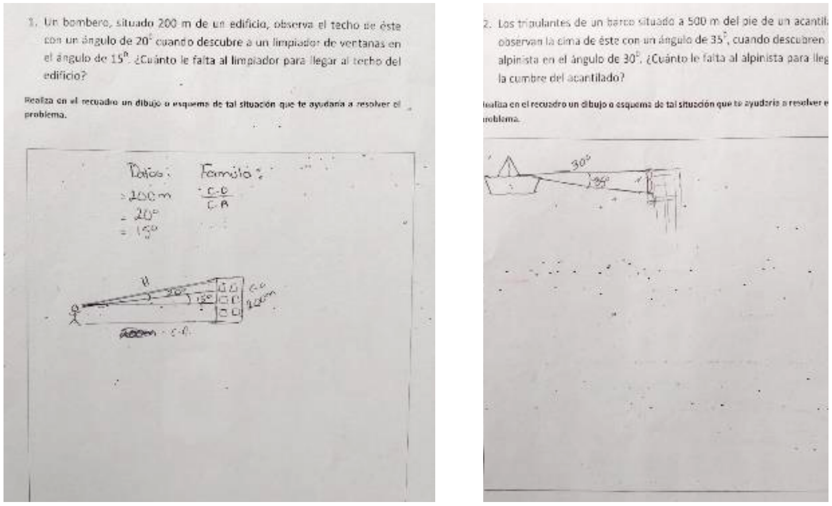


Imagen 7. Alumno #85, se puede observar que el alumno realiza una representación idónea con el problema del limpiador, pero en el problema del alpinista su representación cambia.

Se han encontrado 13 casos en donde el fenómeno del contrato didáctico se hace presente con el problema del alpinista y no en el problema del limpiador realizando únicamente la representación visual solicitada. Dentro de estos 13 alumnos son 4 los que dejaron en blanco el problema del alpinista, pero realizaron una representación visual idónea con la situación del limpiador.

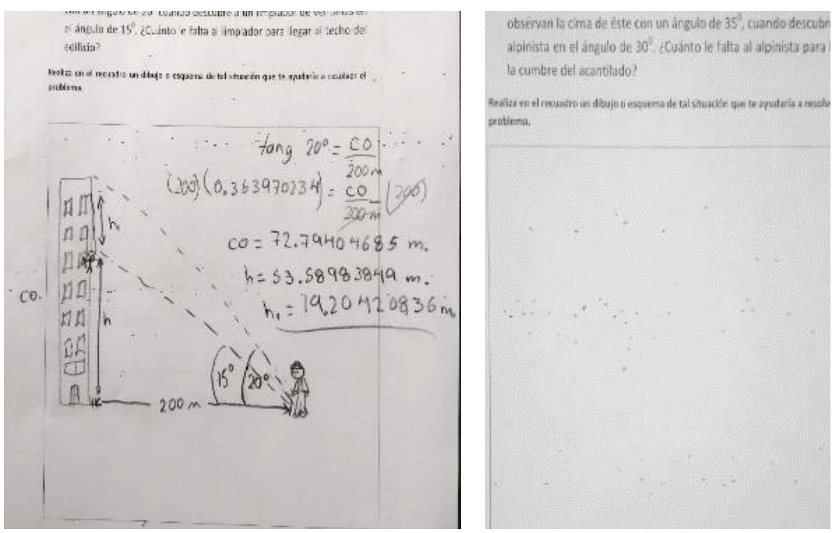


Imagen 8. Alumno #84, realiza representación visual idónea y resuelve el problema del limpiador utilizando y desarrollando correctamente las funciones trigonométricas; sin embargo, deja en blanco el problema del alpinista.

Conclusiones

A pesar de que el instrumento solicita una representación visual y no la solución al problema, un número considerable de alumnos decide dar un resultado numérico, operando o registrando los datos que se mencionan en los enunciados, dibujando los ángulos arbitrariamente, revelando así la presencia del fenómeno "contrato didáctico".

Realizando el análisis por alumno en sus dos problemas, se observa que tienen una mejor representación con el problema del limpiador de ventanas; a diferencia del problema del alpinista en el que se presenta mayor número de formas del contrato didáctico, siendo así, que están más familiarizados con el primer contexto y realizan una representación más adecuada de él. A pesar de que hubo casos donde el dibujo situacional del limpiador fue satisfactorio, en el problema del alpinista no se logró un puntaje similar, al contrario, existen deficiencias en la representación de este problema, y algunos simplemente decidieron no realizarlo.

De tal manera, esta investigación inicial parece mostrar que el contexto del problema sí influye en la representación visual del problema y en la presencia del contrato didáctico.
Ese resultado está en resonancia con los resultados reportados en otras investigaciones que afirman que los alumnos jóvenes resuelven mejor los problemas aritméticos formulados con referencias a situaciones familiares (Vlahovič-Štetić, Rovan & Mendek, 2004).

Referencias bibliográficas

Almaguer, G., Rodríguez Arizpe, L., Cantú, F., Rodríguez, R. (2008) *Matemáticas 3*. México: Limusa, p. 133.

D'Amore, B., Fandiño, M. Marazzani, I. y Sbaragl, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje.* Bogotá: Editorial Magisterio.

D'Amore, B. y Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas.* 32, 26-42.

Rellensmann, J., Schukajlow, S. y Leopold, C. (2016). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*. *95*, 53-78.

Van Dijk, T. (2001). Algunos principios de una teoría del contexto. *Revista latinoamericana de estudios del discurso*, 1 (1), 69-81.

Vicente, S. y Orrantia, J. (2007). Resolución de problemas y comprensión situacional. *Cultura y Educación,* 19(1), 61-85.

Vlahović-Štetić, V., Rovan, D., & Mendek, Ž (2004). Solving mathematical word problems. *Review of Psychology, 11*(1–2), 25–33.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ESTADÍSTICA POR PROYECTOS, CONSTRUCCIÓN DE TABLAS Y GRÁFICOS

PROJECT-BASED STATISTICS, CONSTRUCTION OF TABLES AND GRAPHS

Hélver Rincón Márquez
Universidad Santo Tomás Seccional Tunja. (Colombia)
helver.rincon@usantoto.edu.co

Resumen
Este artículo presenta resultados parciales de una investigación en curso acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la estadística por proyectos, a nivel de pregrado. El objetivo del estudio radica en describir los procesos de enseñanza y aprendizaje en la construcción de tablas y gráficos. La investigación adopta un enfoque cualitativo interpretativo, pues pretende explorar y contextualizar una realidad educativa. El estudio surge de la necesidad de implementar una nueva metodología en el aula de estadística que permita dinamizar el proceso tanto de enseñanza como del aprendizaje del análisis tabular y gráfico en la estadística descriptiva.

Palabras clave: estadística, proyectos, enseñanza-aprendizaje, tablas, gráficas

Abstract
This paper shows partial results of an ongoing research about the teaching and learning of statistics by projects, at the undergraduate level. The objective of the study is to describe the teaching and learning processes in the construction of tables and graphs. The research adopts a qualitative interpretative approach, since it aims to explore and contextualize an educational reality. The study arises from the need to implement a new methodology in the statistical classroom that allows to dynamize the process of teaching as well as the learning of tabular and graphic analysis in descriptive statistics.

Key words: statistics, projects, teaching-learning, tables, graphs

Introducción

La estadística en la actualidad ha cobrado gran importancia en aspectos tales como la cultura, el trabajo profesional y la investigación. Para Batanero, Gea, Arteaga, & Contreras, (2014) este fenómeno se debe a la abundancia de información a la que un ciudadano debe enfrentarse en su trabajo diario. La información estadística se caracteriza por la diversidad de gráficas y tablas que aparecen en diferentes medios de comunicación visual, impresos y a través de sitios web, donde se presenta al ciudadano información relevante de muchos fenómenos de interés, como lo afirma López (2014).

Sin embargo, dicha información se está recibiendo sin que algunas personas tengan la capacidad de entenderla debido a la ausencia de una cultura estadística. En ese sentido, Gal (2002), describe dos habilidades directamente relacionadas que debe tener una persona estadísticamente culta: "la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística y la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas" (pp. 2-3).

A diario, los ciudadanos están recibiendo información a través de diferentes fuentes informativas, como periódicos, noticieros de televisión, redes sociales y hasta en establecimientos públicos es común encontrar grandes pantallas que presentan la información en tablas y gráficos, siendo necesario que los ciudadanos sean capaces de comprenderla y usarla. De esta manera, la estadística no solo tiene el objeto de ayudar a mejorar el razonamiento estadístico de cada ciudadano, sino que también puede apoyar la toma de decisiones en situaciones de la vida cotidiana (Del Pino & Estrella, 2012).

Algunas de esas situaciones están relacionadas con información financiera, encuestas de opinión, rating de programas de televisión, intención de voto, entre otras. Por lo anterior, una persona tendría mejor bienestar individual y contribuiría con el colectivo de los ciudadanos si invirtiera en la alfabetización estadística. Al respecto Shaughnessy, Garfield & Greer (1996, citado en Batanero, 2013) afirman que en investigaciones recientes se ha encontrado que algunos estudiantes de educación media y nivel universitario tienen concepciones erróneas o no logran hacer una interpretación adecuada de los resultados estadísticos presentados en tablas y gráficos. Es por esto que la metodología de la estadística por proyectos para la enseñanza de la estadística, en general se hace necesaria, debido a que los estudiantes requieren de actividades y tareas que permitan generar conciencia acerca de la importancia de la estadística en la descripción e interpretación de fenómenos estocásticos.

Con relación a la enseñanza de la matemática y estadística se tienen algunos resultados de un estudio realizado sobre deserción y mortalidad académica en las áreas de matemáticas y estadística, orientadas por docentes del Departamento de Ciencias Básicas en la Universidad Santo Tomás de Tunja (Aponte, González & Rincón, 2012). Allí se encontró que, "los estudiantes presentan muy bajos niveles de lectura compresiva y escritura. Se observa un alto porcentaje de estudiantes que no presentan el nivel requerido para afrontar el currículo que las facultades de ingeniería prescriben" (pp. 71,75). Además, uno de los problemas detectados en algunos docentes fue "la falta de actualización docente en los campos de la didáctica, la metodología y los procesos de evaluación".

Otro estudio llevado a cabo por González (2017) en la misma Universidad con estudiantes de Ingeniería de Sistemas, relacionado con la organización y el tratamiento de datos en estadística descriptiva, a través de la metodología de Aulas Investigativas afirma que los estudiantes presentaron dificultad para aplicar los conceptos de la estadística en contexto, es decir en el análisis de un conjunto de datos generado a través de una experiencia investigativa. De otra parte, también se identificó, que algunos docentes que orientan la asignatura "Estadística y probabilidad" son profesores con formación en matemáticas y tienden a dedicar la mayor parte del tiempo a los temas de probabilidad, restándole importancia, por ejemplo, al análisis exploratorio de datos.

De acuerdo con lo establecido anteriormente, surge el siguiente cuestionamiento como eje movilizador del trabajo de investigación: ¿Cómo se da el proceso de enseñanza y aprendizaje en la construcción de tablas y gráficas a través de la estadística por proyectos?

Referentes teóricos

La enseñanza de la estadística por proyectos consiste en una propuesta didáctica que comprende un conjunto de tareas, organizadas y secuenciadas, llevadas a cabo mediante el trabajo colaborativo con el objetivo de obtener un resultado o producto determinado. Al desarrollar un proyecto, el estudiante además de aplicar los contenidos y métodos estadísticos desarrolla otras destrezas propias del trabajo en equipo, tales como organización, comunicación, planificación, toma de decisiones, todas éstas, necesarias para su desarrollo personal y futuro profesional (Gil Armas, 2010).

Batanero & Díaz (2011) citado en Aguayo, Cortés & Díaz (2014), sugieren incluir en el aula de clase el trabajo por proyectos para un efectivo proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística, ya que evita el aprendizaje fragmentado de los conceptos estadísticos. Los proyectos se distinguen por tener los mismos pasos que una investigación, es decir, la identificación del tema de estudio y formulación de las preguntas, la recolección del conjunto de datos, el análisis de los datos y su interpretación en función de la pregunta planteada y la redacción del informe del proyecto.

Para Holmes, (1997) una de las principales características de un curso basado en proyectos es el énfasis que se da a las tareas, al considerarlas realistas en un contexto determinado. Además, considera que la estadística por proyectos se destaca por los siguientes aspectos:

- Los proyectos permiten contextualizar la estadística y hacerla más relevante. Si los datos surgen de un problema, son datos con significado y deben ser interpretados.
- Los proyectos refuerzan el interés, sobre todo si los estudiantes son los que eligen el tema.
- Se aprende mejor con los datos reales que con datos inventados por el profesor.

De acuerdo con Batanero & Díaz (2011), las fases que se desarrollan en la estadística por proyectos son:

Fase de elección del tema del proyecto: en esta fase lo ideal es que los mismos estudiantes tomen la iniciativa de proponer un tema en el que quieren trabajar el proyecto, se sugiere conformar equipos de trabajo de dos o tres estudiantes.

Fase de planteamiento de preguntas: puede decirse que es una de las complejas para el inicio del proyecto, debido a que los estudiantes rara vez tienen claridad en la formulación del proyecto. En algunos casos los estudiantes comienzan sin preguntas claramente definidas. Aquí el profesor debe ayudar a pasar de un tema muy general a una pregunta que pueda ser respondida.

Fase de recolección de datos: en algunos casos los datos se encuentran disponibles, pero es necesario saber localizarlos en diferentes fuentes como libros, bases de datos, o anuarios estadísticos. En otros casos los datos son recolectados directamente por los estudiantes por medio de un formulario de encuesta o través de la realización de un experimento.

Fase de organización, análisis e interpretación de resultados: uno de los objetivos en el análisis exploratorio de datos debe ser que los estudiantes desarrollen la capacidad de recoger, organizar, depurar, representar y analizar sistemas de datos reales.

Al representar y analizar los datos, el estudiante debe hacer la traducción de lo representado en la tabla o el gráfico y la realidad. Por consiguiente, se requiere de un conocimiento tanto de la realidad misma como de elementos mínimos que deben tenerse en cuenta al construir las gráficas. Según Friel, Curcio y Bright (2001, citado en Arteaga, 2009) reconocen los siguientes elementos estructurales en un gráfico:

- El título y las etiquetas, donde se indica el contenido contextual del gráfico.
- El marco del gráfico, que suministra información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas.
- Los especificadores del gráfico son elementos empleados para representar los datos y pueden ser puntos en el caso de un diagrama de dispersión o rectángulos en el caso de un histograma.

Metodología

El estudio adoptó un enfoque cualitativo interpretativo, según Nieto (2012) este enfoque busca explorar y contextualizar una realidad educativa ya que el investigador se puede acercar a los sujetos observados y describir las interacciones de los alumnos en el aula de clase. El trabajo se llevó a cabo en la Universidad Santo Tomás, Seccional Tunja, con un grupo de 18 estudiantes de la Facultad de Ingeniería Civil.

Basados en la metodología de estadística por proyectos se diseñaron tres tareas: la preparación de las preguntas de investigación, la organización y representación estadística de un conjunto de datos y la presentación del informe. Para el desarrollo de cada tarea se programaron dos sesiones de dos horas para cada una de éstas. Antes de comenzar cada tarea se hizo la sensibilización a los estudiantes, debido a que no habían tenido la oportunidad de trabajar con esta metodología.

El objetivo de la primera tarea fue promover en los estudiantes situaciones que les permitieran identificar diferentes tipos de variables, su clasificación y la escala de medición, alrededor de la discusión propuesta por el profesor sobre un tema de interés, en particular cuáles son las características que se consideran importantes al elegir una película de dibujos animados. Para el desarrollo de esta tarea el profesor formuló las siguientes preguntas a los estudiantes en el aula de clase.

1. ¿Qué criterios cree que son importantes a la hora de elegir una película animada para niños?
2. De las películas infantiles que usted haya visto, ¿recuerda algunas características que no le haya parecido adecuada para el público infantil?
3. Elija una de las variables que identificó como no adecuadas y regístrela.
4. Formule una pregunta para la característica que eligió. ¿Qué tipo de respuestas cree que va a encontrar para esta variable?
5. Para poder analizar la variable de interés, usted puede elegir una película de dibujos animados para niños. ¿Cuál película eligió? ¿Por qué le llamó la atención esta película?
6. Plantee algunas formas que utilizaría para la recolección de los datos. ¿Cómo organizaría este conjunto de datos?

La segunda tarea tuvo como finalidad que los estudiantes desarrollaran la habilidad de explorar estadísticamente un conjunto de datos y utilizaran diferentes procedimientos tabulares y gráficos. Para esto, se utilizó una base de datos tomada de Goldstein, Sobel & Newman (1999) donde se presenta el análisis de 50 películas animadas para niños que se presentaron entre 1937 y 1997, producidas por cinco compañías cinematográficas. En cada película se mide el tiempo en segundos de la cantidad de imágenes que contiene el uso de tabaco y alcohol por los personajes dentro de la película. Para esta tarea se dieron las siguientes indicaciones.

1. Clasifique las variables incluidas en este estudio.
2. Discuta con sus compañeros como organizaría el conjunto de datos.
3. Organice de manera creativa el conjunto de datos (tablas y gráficas) para cada característica, de acuerdo con las siguientes indicaciones:

    - Número de películas producidas por compañía.
    - Clasificación por compañías vs presencia o no, de alcohol.
    - Categorización por compañías vs presencia o no, de tabaco.

La tercera tarea consistió en la redacción de un informe que incluyera como mínimo el análisis gráfico y tabular sobre los datos presentados en el estudio de las películas. Para la elaboración de esta tarea el profesor formuló las siguientes preguntas en contexto:

1. Si usted tuviera un niño a cargo, ¿permitiría que viera estas películas animadas?
2. ¿Cuáles serían las cinco películas que no permitiría que un niño viera? Justifique estadísticamente su elección.
3. ¿Cree que un niño debe ver alguna de estas películas solo o es necesario la compañía de un adulto? ¿Por qué?
4. De las cinco compañías (Walt Disney Co, MGM/United Artists, Warner Brothers Studios, Universal Studios y 20th Century Fox) presentadas en el estudio, ¿cuál recomendaría que un niño viera? Expliquen sus razones.
5. Elabore un informe escrito en donde presente su punto de vista de manera crítica sobre los fenómenos sociales que se presentan en este estudio, argumentando estadísticamente estas afirmaciones.

Para el desarrollo de las tres tareas se conformaron seis grupos de tres estudiantes cada uno. Al inicio de cada tarea se eligió un monitor quien sirvió como relator y moderador de cada una de las actividades propuestas a los alumnos. Cada monitor grabó en audio los diálogos que surgieron en su respectivo grupo. Esto permitió a cada grupo ir registrando las ideas principales y conjeturas que surgieron a través del desarrollo de esta tarea.

La recolección de la información se hizo a través de los reportes e informes estadísticos que cada grupo de estudiantes presentó al terminar cada tarea, incluidas las grabaciones en audio y el diario de campo del profesor.

Resultados

El Rol del docente. El docente tuvo el reto de proponer el proyecto a los estudiantes a través de la metodología por proyectos. Se conformaron grupos de trabajo y cada uno expuso el tema de interés, durante las exposiciones se observó que en la mayoría no había claridad en la formulación del proyecto, debido a que no tenían claras las preguntas que pretendían responder y los objetivos no daban respuesta a las mismas.

El profesor ayudó a cada grupo para que las ideas generales que tenían como posible tema de investigación se pudieran reescribir como preguntas particulares que pudieran responderse a través del proyecto. Sin embargo, no fue posible que los grupos replantearan la propuesta para el proyecto, les hizo falta interés por proponer algo diferente a lo expuesto. Se tuvieron en cuenta las preguntas sugeridas en Batanero y Diaz (2011), para ayudar a los estudiantes a consolidar la propuesta. Como una alternativa se tuvo que proponer un tema específico para que todos los grupos desarrollaran, esta opción se contempla dentro de la metodología de la estadística por proyectos y ya se había preparado en caso de que no resultar exitosa la primera.

El rol del estudiante. Inicialmente se mostraron muy interesados en hacer un proyecto utilizando la estadística. Enunciaron muchos de temas de interés de manea verbal para trabajar. No obstante, al tener que formular el proyecto de forma escrita se evidenció la dificultad para redactarlo. Algunos estudiantes manifestaron que estaría mejor si el profesor les asignara un tema para desarrollar el proyecto.

Una característica bien marcada fue que los estudiantes están acostumbrados a que el profesor sea quien les da las indicaciones de lo que deben hacer. No obstante, cuando son ellos quienes deben proponer lo que quieren trabajar, algunos no quieren salir de la zona de comodidad en la que se encuentran. Este fenómeno ocurre no solamente en el de estadística sino también en matemáticas. Al proponerles una nueva forma de trabajar en estadística se mostraron muy receptivos. Empero, cuando llegó el momento de comenzar a proponer ideas y realizar algunas tareas específicas disminuyó considerablemente la motivación. Las fases de elección del tema y formulación de preguntas fueron las más dispendiosas de llevarse a cabo.

Teniendo en cuenta los informes de los proyectos presentados por los estudiantes, se eligieron algunos gráficos para analizar qué elementos estructurales se incluyeron. De acuerdo con Curcio et al. (1989) para que un estudiante haga una interpretación correcta de un gráfico estadístico, éste debe reconocer los elementos mínimos que un gráfico debe incluir:

- Las palabras que aparecen en el gráfico: se refiere a los títulos, los nombres de las etiquetas de los ejes y las escalas, que permiten comprender los elementos representados.
- El contenido matemático subyacente: está relacionado con los conjuntos numéricos empleados, es decir, los conceptos matemáticos implícitos en un diagrama circular como el área o la longitud en un gráfico de líneas.
- Los convenios específicos: se usan en cada tipo de gráfico y se deben conocer para poder realizar la lectura o construcción correcta del mismo.

A continuación, se presenta una tabla de verificación de los elementos incluidos en los gráficos. En ésta se observa que tan solo el 17% de los gráficos analizados incluyen el título. Además, en el 70% no se incluyeron las etiquetas de los ejes. En el 60% se identifican las variables representadas. De otra parte, con respecto al marco del gráfico en el 90% se hizo un uso adecuado de los ejes. No obstante, en el 13% se utilizó una escala de referencia en los ejes. Finalmente, en el 90% de los gráficos se evidenció el uso adecuado de los especificadores del gráfico.

Tabla 1. Análisis de los elementos estructurales del gráfico

		SI	NO
Título y etiquetas	Título del gráfico	17%	83%
	etiqueta de los ejes	30%	70%
	Identificación de las variables representadas	60%	40%
Marco del gráfico	Representación adecuada de los ejes	90%	10%
	Escala de referencia en los ejes	13%	87%
	Marca de referencia en los ejes	N A	N A
Especificadores del gráfico	Uso adecuado de formas (rectángulos, puntos etc.)	90%	10%

Fuente: Autor (2018)

Conclusiones

La implementación de la estadística por proyectos permitió a los estudiantes adquirir destrezas para la organización y descripción del conjunto de datos. Así mismo, el desarrollo de competencias comunicativas y el pensamiento crítico evidenciado a través de la redacción y sustentación del informe final del proyecto.

La inclusión de una nueva metodología en la asignatura de Probabilidad y estadística conllevó un proceso lento, debido a que los estudiantes tuvieron que adaptarse a esta nueva estrategia didáctica para aprender estadística. Además, el docente no tenía la suficiente experiencia para gestionar la clase, es decir, orientar a los estudiantes para la elección del tema y la posterior formulación de preguntas, resultando ser ésta la etapa más difícil del proyecto.

A pesar de que los informes escritos dieron cuenta de las competencias desarrolladas por los estudiantes, se hace necesario dedicar más tiempo a la construcción de los gráficos a través de los paquetes estadísticos utilizados, pues en muchos casos los estudiantes delegaron la responsabilidad en el programa y no se tuvo en cuenta los elementos estructurales que debe tener un gráfico para una mejor interpretación.

Referencias bibliográficas

Aguayo, C., Cortés T, C., & Díaz L, D. (2014). Enseñanza de la Estadística mediante proyectos y su relación con teorías de aprendizaje. *Revista Premisa*, 12-23.

Aponte Torres, J. d., González Fiaga, S. B., & Rincón Márquez, H. (Enero - Junio de 2012). Búsqueda de soluciones a la deserción y la mortalidad en el área de matemáticas en el Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Santo Tomás Seccional Tunja. *Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía, 5*(1), 65-77. Recuperado el 2018

Arteaga , P. (2009). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos.* Universidad de Granada. Granada España: Grupo de investigación en Educación Estadística. Departamento de Didáctica de la Matemática.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *Revista de didáctica de la Estadística*, 55-61. Recuperado el 2018

Batanero, C., & Díaz, C. (2011). *Estadística con Proyectos.* Granada: Departamento de didáctica de la Matemática.

Batanero, C., Gea, M., Arteaga, P., & Contreras, J. (2014). La estadística en la educación obligatoria: Análisis del curriculo español. *Revista digital. Matemática, Educación e Internet, 14*(2). Recuperado el 2018

Curcio, F. (1989). Developing graph comprehension . *Reston, VA: N.C.T.M.*

Del Pino, G., & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, 49*(1), 53-64. doi:10.7764/PEL.49.1.2012.5

Gal, I. (2002). Adult´s statistical Literacy. Meanings,components,responsibilities. *International Statistical Review, 70*, 1-25.

Gil Armas, A. (Noviembre de 2010). Proyecto de Estadística en Primaria. Material editado por el Instituto Canario de Estadística (ISTAC). *Revista Didactica de las Matemáticas, 75*, 121-129.

Goldstein, A., Sobel, R., & Newman, G. (1999). Tobacco and Alcohol Usein G-Rated Children's Animated Films. *American Medical Association*, 1131-1136.

González Fiaga, S. B. (2017). *Organización y tratamiento de datos en la estadística descriptiva a través de una experiencia investigativa en el aula.* Tesis de Maestría, Universidad Santo Tomás Tunja, Tunja.

Holmes, P. (1997). Assessing project work by external examiners. . *En I Gal y J.B: Garfiel (Eds.),The assesment Challenge in statistics*, 153 - 164.

López M, G. (2014). *Una propuesta didáctica para fortalecer las competencias de lectura y construcción de tablas y gráficos estadísticos.* Bogotá: Universidad Sergio Arboleda.

Nieto M, S. (2012). *Principios , Métodos y Técnicas esenciales para la Investigación Educativa.* Madrid: DYKINSON,S.L.

Watson, J. M. (2011). *Statistical literacy at School: Growth and goals.* New York: Routledge Taylor & Francis Group. Recuperado el 2018

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

ENTRETEJIDOS DE PENSAMIENTO NARRATIVO Y PARADIGMÁTICO EMERGENTES DE NARRATIVAS DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

INTERWEAVES OF PARADIGMATIC AND NARRATIVE THINKING THAT EMERGE FROM MATHEMATICS TEACHERS' NARRATIVES

Claudia Salazar Amaya
Universidad Pedagógica Nacional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)
csalazar@pedagogica.edu.co

Resumen
Este artículo presenta resultados parciales de una investigación que contribuye a comprender cómo se constituyen las subjetividades de los profesores de matemáticas y se entretejen los pensamientos paradigmático y narrativo en el marco de su experiencia profesional. Para ello se utiliza una metodología hermenéutica narrativa. Como antecedentes son considerados los trabajos relacionados con narrativas e identidad de profesores de matemáticas; reconstrucción de emociones negativas de profesores asociadas a las matemáticas a través de autobiografías; y, caracterización de la educación en matemáticas desde narrativas de maestros. Los resultados parciales que se presentan están relacionados con los entretejidos de pensamiento paradigmático y narrativo que emergen de la interpretación que hacen los profesores de las narrativas de sus estudiantes, en un ambiente de formación en el que prevalece el modo de pensar narrativo. Estos resultados develan el poder de las narrativas como detonante epistémico en la formación de profesores de matemáticas.

Palabras clave: pensamiento narrativo, pensamiento paradigmático, profesores de matemáticas

Abstract
This paper presents partial results of a research which contributes to understand how are constituted the mathematics teachers' subjectivities and how the paradigmatic and narrative thinking interweaves in the professional experience frame. For make it, the research uses a narrative hermeneutic methodology. As background this paper considers the works related to mathematic teachers' narratives and identity; the reconstruction of teachers' negative emotions associated to the mathematics by means of autobiographies; and, the characterization of the education in mathematics from teachers' narratives. The partial results that are presented, are related with the thinkings interweaves that emerge from the interpretation that is made by the teachers about their students' narratives, in an environment which prevail the narrative way thinking. These results reveal the narratives power as an epistemic detonating in the teachers training.

Key words: narrative thinking, paradigmatic thinking, mathematics teachers

Planteamiento del problema

El problema al que se pretende contribuir con esta investigación tiene que ver con la falta de comprensión que se ha logrado, desde el campo de la educación matemática, acerca de cómo se constituyen las subjetividades de los profesores de matemáticas y cómo se entretejen los pensamientos paradigmático y narrativo en el marco de la experiencia profesional y en las trayectorias de formación. En coherencia con McEwan (2012), en esta investigación se considera que el pensamiento docente se ha circunscrito en una limitada franja de operaciones formales que supuestamente indican con precisión los rasgos distintivos del raciocinio o razonamiento pedagógico. Lo anterior conduce a ignorar "la significación que tiene para la docencia una capacidad de pensamiento más amplio, como también la capacidad de construir sentido e interpretar sentido para otros" (McEwan, 2012, p.236). Para este autor llevar a cabo estas descripciones formales conduce a desconocer que cuando los docentes reflexionan sobre sus actos y tratan de hacerlos inteligibles, para ellos y para los otros, tienden a formular sus explicaciones en forma de relato.

En Colombia es claro que la modalidad de pensamiento paradigmático o lógico científico ha sido hegemónica en la mayoría de los programas de formación de profesores de matemáticas. Bruner (1998) caracteriza esta modalidad de pensamiento como rigurosa y formal, por privilegiar sus formas propias y específicas de razonar. Este modo de pensar trata de cumplir el ideal de un sistema matemático formal de descripción y explicación. En el marco de esta modalidad de pensamiento, el conocimiento matemático refleja los valores enunciados por Bishop (2005): el progreso y el cambio, el poder y control, el racionalismo y el objetismo. Estos valores hacen que los profesores reconozcan las matemáticas por su

> (…) racionalismo claro y lógica fría, su precisión, sus llamados hechos "objetivos" (aparentemente independientes de la cultura y de los valores), su ausencia de debilidades humanas, su poder de predicción y control, su estímulo a los retos y a las preguntas y su empuje hacia un conocimiento más seguro (…) (Bishop, 2005, p.36).

A pesar de los aportes innegables de esta modalidad de pensamiento paradigmático, Bruner (1998) propone una modalidad de pensamiento complementaria o incluso prevaleciente para la construcción de mundo y la *self* (creencias, conceptos y representaciones subjetivas de sí mismo) de las personas: el pensamiento narrativo. Este pensamiento se caracteriza por su esencia en la preocupación por la condición humana. Mediante la narrativa —según Bruner— construimos, reconstruimos, hasta reinventamos, nuestro ayer y nuestro mañana; pues en las narrativas se encuentra una fusión entre la memoria y la imaginación. Bruner (1998 citando a Goodman 1990) advierte que esa relación entre memoria y ficción es la que posibilita crear mundos extrapolados de los mundos que conocemos, esto es, intercambiar posibilidades humanas y no certidumbres establecidas. Por ende, la potencia de la narrativa es que permite "(…) 'subjuntivizar' los pormenores obvios de la vida de todos los días" (Bruner, 2003, p. 26).

A pesar de las potencialidades de la modalidad de pensamiento narrativo, la escuela —en su acepción más general— parece haberla desconocido. Para Jackson (2012) el lugar de la narrativa no se ha considerado con seriedad en la enseñanza debido a que se menosprecia por su uso en las prácticas sociales cotidianas. Paradójicamente, parece indiscutible su valor educativo, aunque su preponderancia en los asuntos escolares pase desapercibida. Jackson plantea que el imaginario que se tiene en torno a los relatos que se presentan en la escuela pone de manifiesto una dimensión ética, moral y política de estos. Se considera que los relatos nos hacen mejores personas, que promueven cambios y éstos son duraderos; sin embargo, no se reconoce que en un relato hay más que un modo de narrar pues también está presente un cierto modo de conocer; en tanto a través del relato modelamos nuestra experiencia del mundo.

En concordancia con los planteamientos anteriores, Rivas argumenta que disponer de modelos generales sobre la realidad no puede ser el único referente para pensar el mundo y actuar sobre él (Rivas y Herrera, 2010). Este autor advierte que reconocer la experiencia de los sujetos nos permite comprender cómo concretan los modelos generales en diferentes construcciones particulares y cómo interpretan su mundo. Así, el punto de vista narrativo se debe asumir como una forma de apropiación de los marcos teóricos y de su construcción, a través de las cuales se instauran modos de participación en la historia colectiva del conocimiento. Al respecto Kushner plantea que la posibilidad de interacción cognitiva a través de la narración se debe a que propicia la construcción colectiva del conocimiento y actúa como detonante epistémico

> (…) el poder real que hay detrás de las narraciones subjetivas reposa en su capacidad para provocar intersubjetividad, armazones de resistencia contra la despersonalización que depende del reconocimiento mutuo para su legitimación, redes de acuerdos, consensos solapados como control de calidad intelectual (…) (Kushner, 2010, p.10).

De acuerdo con los planteamientos de Bruner (1998, 2003) y Rivas y Herrera (2010), puede inferirse que la creación de esas construcciones particulares para la comprensión del mundo y de nosotros mismos solo es posible si cohabitan las modalidades de pensamiento paradigmático y narrativo. A estas construcciones en las que las dos modalidades de pensamiento se relacionan, complementan o solapan las denominamos en esta investigación *entretejidos de pensamiento paradigmático y narrativo.*

Cabe aclarar que esta es una investigación en curso que se desarrolla como tesis en el Doctorado en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia). En este artículo se presentan resultados parciales relacionados con los *entretejidos de pensamiento paradigmático y narrativo* que emergen en el marco de una experiencia con profesores de matemáticas, en la que los profesores llevan a cabo la interpretación de narrativas de sus estudiantes y de sus narrativas autobiográficas.

Antecedentes investigativos

A continuación, se presenta una categorización de algunos antecedentes investigativos en los que se aprecia el papel preponderante que asume la narrativa en el desarrollo de la experiencia de formación de maestros de matemáticas, a saber: (i) narrativa e identidad en la formación; (ii) narrativa y reconstrucción de la experiencia estudiantil en clase de matemáticas; y, (iii) narrativas de la historia de la educación en matemáticas.

En lo que respecta a narrativa e identidad, se encuentran investigaciones cuyo punto de convergencia es que la identidad de los profesores de matemáticas y los cambios que pueden evidenciar están relacionados con la manera como asumen los propósitos de la enseñanza y la visión de las matemáticas, así como las intenciones de mejoramiento de la práctica docente. En investigaciones como Prusak y Sfard (2005), Smith (2006) o Mofino y Ochoviet (2015) se conciben aspectos acerca de la identidad del profesor en matemáticas mediante el estudio de narrativas en figuras como las bitácoras y el auto-estudio. Incluso estos investigadores coinciden en que las identidades, vistas como conjuntos de historias que son afectadas por narrativas colectivas, conllevan a comprender la importancia de la narración en la formación docente por sus posibilidades de evaluación y subjuntivación.

En cuanto a la categoría de narrativa y reconstrucción de la experiencia estudiantil en clases de matemáticas, existen hallazgos investigativos acerca del papel preponderante de la recuperación de los recorridos personales, las historias propias escolares y los modos de aprender de los profesores en formación, cuya incidencia mediante narrativas, permite reconfigurar, reinterpretar y resignificar la experiencia en favor de la formación como profesor de matemáticas. Estudios como Kaasila y Lutovac (2011) o Blanco y Barrantes (2003) privilegian el proceso de evaluación que llevan a cabo los profesores en formación cuando se narran mediante técnicas autobiográficas, así como de la denominada “rehabilitación narrativa”. Allí, la narrativa y la reconstrucción de la experiencia humana enaltecen la experiencia, así como la reconstrucción y examen que se puede hacer sobre ésta.

Por último, la categoría de narrativas de la historia de la educación en matemáticas agrupa trabajos investigativos que confluyen en la necesidad de distintas narrativas para la comprensión de los fenómenos asociados a las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en una comunidad. Estudios como Garnica (2003, 2011) permiten evidenciar, mediante el análisis de Historias Orales (enfoque de investigación cualitativo que relaciona oralidad y memoria), versiones alternativas acerca de lo que han sido las prácticas en educación matemática, construidas a partir de las voces de los profesores de matemáticas de distintas épocas. De esta forma, la ubicación de las prácticas de la educación matemática geográfica e históricamente permite analizar, desde las voces de los protagonistas de estas prácticas, la participación que las matemáticas han tenido en los procesos socioculturales y en la constitución de ciertos capitales culturales. Estas investigaciones permiten evidenciar la no neutralidad de las matemáticas y su participación en la configuración de estructuras sociales y procesos de inclusión/exclusión (Valero, 2012).

Referentes teóricos

Para Bruner (1998) el pensamiento paradigmático pretende capturar y abstraer la esencia de determinadas características del mundo real en un modelo conceptual, expresado en un lenguaje formal y regulado por requisitos de coherencia y no contradicción. Sin embargo, su ámbito y alcance está definido no sólo por entidades observables sino también por la serie de mundos posibles que pueden generarse lógicamente y verificarse frente a las entidades observables. Según el autor, la aplicación imaginativa en la modalidad paradigmática tiene que ver con la capacidad de ver conexiones formales posibles antes de poder probarlas de cualquier modo formal, pero no se desconoce que estas construcciones dan como resultado una teoría sólida, un análisis preciso, una prueba lógica, argumentaciones firmes y descubrimientos empíricos guiados por una hipótesis razonada. Esta modalidad de pensamiento está desprovista de sentimiento puesto que es conducida por premisas, conclusiones y observaciones. Su fin, en últimas, es trascender lo particular buscando niveles de abstracción cada vez mayores y rechaza en teoría todo valor explicativo en el que intervenga lo particular.

La segunda de las modalidades, el pensamiento narrativo, se ocupa de las intenciones y acciones humanas y de las vicisitudes de la intención y consecuencias que marca su transcurso. Sitúa la experiencia en el tiempo y el espacio. Bruner (1998) retoma los planteamientos de Paul Ricoeur para afirmar que la narrativa se basa en la preocupación por la condición humana: los relatos tienen desenlaces tristes, cómicos o absurdos. Así, Bruner plantea que el pensamiento paradigmático se ocupa de verificar las proposiciones bien formuladas acerca de cómo son las cosas, mientras el narrativo se ocupa de cómo podrían ser o haber sido. El pensamiento narrativo a través de los relatos genera "modelos para volver a describir el mundo" sin que el relato se constituya en sí mismo en el modelo, pues éste resulta ser más bien una representación de los modelos que tenemos en nuestra mente. Por su parte, McEwan y Egan (2012) plantean que la narrativa capta una forma que ya estaba presente en las vidas que relata:

> Lo que distingue a la narrativa es que adopta la forma, aunque atenuada, de un ritmo que en última instancia surge de las pautas implícitas en la vida y los actos de los seres humanos. Una lista sólo proporciona las partes; una narrativa refleja una simetría estructural entre sus contenidos y la vida humana. (McEwan y Egan, 2012, p. 10).

Ahora bien, para Bruner (2003) las narrativas nos permiten construir una versión de nosotros mismos en el mundo y a través de estas narraciones se ofrecen modelos de identidad y acción a los miembros de una cultura. Esto es, la sensibilidad a la narrativa proporciona el principal vínculo entre la propia sensación del *self*, la sensación acerca de los demás y la del mundo social que nos rodea.

Metodología

Esta investigación se inscribe en el paradigma interpretativo y utiliza métodos cualitativos. Siguiendo a Vasilachis de Gialdino considera que el investigador sólo puede conocer desde adentro. Además, por el tipo de investigación que se propone, se asume como lo plantea Giddens (1987 citado en Vasilachis de Gialdino, 1992) que la realidad simbólicamente pre estructurada no puede ser comprendida por un observador exterior, es la inmersión y la utilización del "conocimiento mutuo" como esquema interpretativo, lo que permite entender la actividad social y lo que compete a los participantes en ella. Estas consideraciones imponen la exaltación recíproca de la perspectiva de los otros (Vasilachis de Gialdino, 2011).

Por lo anterior, esta investigación ha requerido el diseño de ambientes, con profesores de matemáticas, en los que se favorece el modo de pensar narrativo. Estos ambientes permiten concretar los principios metodológicos que se asumen en esta investigación: la interacción cognitiva entre investigador y profesores; y, la doble hermenéutica para la interpretación y comprensión de las tramas narrativas. En estos ambientes se proponen distintas estrategias de narración para la recolección de información y posterior consolidación de los datos de la investigación. Para la interpretación y comprensión de las tramas narrativas se propone la triangulación de fuentes (distintos tipos de narrativas) y la triangulación de investigadores (investigador y profesores). Además, para la interpretación y análisis de las narrativas orales y escritas se adaptaron algunas características de las fases de la investigación hermenéutica narrativa propuesta por Quintero (2018 en prensa). En la propuesta de Quintero se formulan cuatro momentos inspirados en la perspectiva hermenéutica Ricoeuriana: (i)Transcripción, enumeración de enunciados y asignación de códigos de identificación; (ii) Identificación de los elementos de la pre-concepción de la trama narrativa; (iii) construcción de la trama narrativa: identificación de espacialidades y temporalidades; y (iv) Reconfiguración de la trama narrativa.

El desarrollo de estos ambientes se llevó a cabo con 30 profesores de matemáticas vinculados a dos programas de maestría. Estos profesores llevan a cabo sus estudios de posgrado en los programas Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional en Colombia y la Maestría en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA) de México (esta experiencia contó con la colaboración un profesor de este programa, Dr. Francisco Javier Lezama Andalón).

Las estrategias narrativas usadas en las dos experiencias con maestros pretendían "narrar la vida en la clase de matemáticas", por ello las narraciones involucraban tanto la voz del profesor como la voz de los estudiantes. Así, los profesores se juegan los roles de autor y protagonistas de sus narrativas, pero también son los lectores e intérpretes de sus propias narrativas y de las narrativas de sus estudiantes. Las estrategias narrativas fueron:

- *Las foto-tramas*: Una de las formas de narración usada en estas experiencias con maestros fue la foto-trama, que consiste en una secuencia de 15 imágenes (fotografías o imágenes prediseñadas) con las que profesores y estudiantes relataban como "viven" la clase de matemáticas. Esta actividad se basa en la potencia narrativa que se le atribuye a la imagen cuando se presenta con una "intención" y como parte de una "estrategia discursiva"; es claro que solo así puede ser comprendida como relato. Cabe anotar que la presente investigación solo considera las foto-tramas, aunque no desconoce que la imagen narrativa también incluye narraciones icónicas, sonoras y audiovisuales; narraciones que podrían favorecer el diseño de otros ambientes que podrían desarrollarse con los maestros.
- *Narrativas orales temáticas*: Las narrativas orales temáticas son relatos (orales) que el profesor o los estudiantes hacen en torno a un asunto específico de su experiencia. En el caso particular se esta investigación, se desarrollaron en torno a las preguntas: ¿qué son y qué producen las matemáticas en mí y en el mundo? ¿cómo las vivo?
- *Narrativas escritas autobiográficas* (en el caso de los profesores se incluyen narrativas profesionales temáticas y narrativas autobiográficas intelectuales): Son relatos de tipo autobiográfico que centran su

atención en un asunto de la experiencia de los estudiantes o los profesores, por ejemplo, la experiencia en el ámbito de lo profesional o su experiencia en clases de matemáticas. Algunas preguntas sugeridas para motivar la narración fueron: ¿cómo ha sido mi experiencia como profesor o estudiante en clases de matemáticas? ¿qué es lo más relevante que encuentro en ellas? ¿cómo me han determinado estas experiencias como persona o como profesional? ¿qué emociones están vinculadas a mi experiencia en la clase de matemáticas? ¿qué aprendizajes han caracterizado mi experiencia como estudiante o como profesor en las clases de matemáticas?, por citar algunos ejemplos. En algunos casos a la elaboración de estas narrativas profesionales lo antecede la elaboración de hojas de vida comentadas.

Resultados parciales

Se han elegido para este artículo algunos ejemplos de las reflexiones que se suscitaron con los profesores de matemáticas en torno a las espacialidades y temporalidades que atraviesan la experiencia de los estudiantes en clase. La elección obedece a que estas temporalidades o espacialidades identificadas en las narrativas de los estudiantes, confrontaron las comprensiones de los profesores acerca de lo que acontece en la clase y la experiencia de sus estudiantes en ella. Es en los procesos de interpretación de las narrativas de los estudiantes y las reflexiones que propician en los maestros donde emergen entretejidos de pensamiento paradigmático y narrativo.

Reflexiones de los profesores en torno a las espacialidades identificadas en narrativas de sus estudiantes.

Si bien en las tramas narrativas aparecen referencias al espacio geográfico y éstas contextualizan la experiencia narrada por el estudiante, se hacen más interesantes los espacios simbólicos que los profesores identifican en las narrativas de sus estudiantes. Cabe aclarar que se entiende por espacios simbólicos aquellos “lugares” que sin existir como espacios geográficos aparecen en la narración como “esferas” en los que “algo” sucede. Se pueden develar a partir de las foto-tramas o narrativas orales y escritas.

El cuaderno como espacio simbólico: Al observar la *foto-trama* de un estudiante en la cual se presentaban de manera reiterada imágenes de su cuaderno en las que se apreciaba su producción en la clase (ideas, intentos, preguntas), dos profesores identifican que el cuaderno se configura como un espacio simbólico para los estudiantes. El siguiente fragmento presenta la interpretación del profesor del cuaderno como espacio simbólico:

> “(…) Por otra parte, se interpreta que el cuaderno podría ser visto como un espacio propio donde la exploración, la incertidumbre, la libertad y la creatividad personal del alumno pueden ponerse en juego, muchas veces en solitario y otras tantas en compañía de otros, pero que queda fuera de la vista pública, permaneciendo en lo privado (…)” (profesor A)

La aparición de este espacio simbólico suscitó la reflexión de los profesores en torno al uso del cuaderno en la clase de matemáticas, como se aprecia en el siguiente fragmento:

> “(…) El cuaderno ha sido interpretado como un instrumento para tomar las notas del tablero o para registrar las aclaraciones que hace el maestro. Hoy los estudiantes ya no llevan cuaderno, algunos toman fotografías del tablero o hacen grabaciones de audio de momentos de la clase (…) estas imágenes me hacen pensar diferente del papel del cuaderno en mis clases (…)” (profesor B)

El proceso de interpretación de esta *foto-trama* condujo a los profesores a cuestionar si las prácticas promovidas en sus clases de matemáticas y las normas que las regulan (sociales, socio-matemáticas y matemáticas) hacen que algunos de sus estudiantes construyan este espacio simbólico para no sentirse excluidos del ambiente de aprendizaje. Además de reconocer que este espacio simbólico resulta invisible en muchas ocasiones para el profesor.

El cuerpo como espacio simbólico: La figura 1 hace parte de la foto-trama de un estudiante, de una clase de geometría en la que el profesor usa representaciones dinámicas para los objetos y construcciones geométricas. En varias imágenes de la secuencia se puede apreciar cómo el profesor configura su cuerpo como espacio simbólico, es decir, el cuerpo del profesor es usado como espacio de *representación* de objetos matemáticos. La discusión que provoca esta *foto-trama,* con los profesores, gira en torno a las razones por las cuáles el profesor considera que la representación gráfica que ofrece el software es insuficiente para que los estudiantes identifiquen ciertas características de la construcción o atributos de los objetos matemáticos involucrados. También se reflexiona sobre la razón que lleva a los estudiantes a exaltar el cuerpo del profesor y no las imágenes que proporciona el software para describir lo que acontece en la clase.

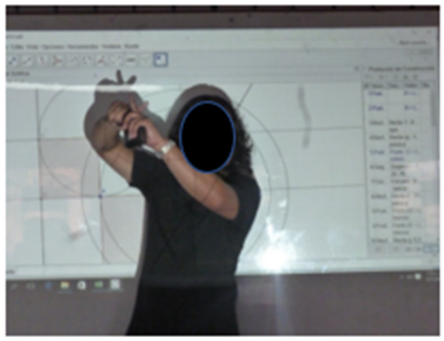


Figura 1. El cuerpo espacio simbólico

El profesor involucrado en la imagen argumenta que el software ofrece una representación dinámica y precisa de la construcción geométrica y sus elementos, pero esta herramienta no establece niveles de importancia en las condiciones de la construcción y por ello como profesor usa el cuerpo para explicitarlos.

Reflexiones de los profesores en torno a las temporalidades identificadas en narrativas de sus estudiantes

El papel de las emociones en la experiencia de la temporalidad de la clase: El fragmento que se presenta a continuación hace parte de la reflexión elaborada por una profesora después de hacer la interpretación de las *foto-tramas* construidas por sus estudiantes. Ella identifica en las *foto-tramas* la temporalidad experimentada por sus estudiantes en clase de matemáticas. Esto favorece su reflexión acerca de los tiempos simbólicos de la clase: el tiempo de duda, miedo, frustración, satisfacción o reconocimiento que se viven en ella.

> "(…) Las foto-tramas de mis estudiantes me mostraron que la clase de matemática repercute de diferentes formas en ellos, y se presentan sentimientos antagónicos desde el momento que no logran realizar determinadas actividades hasta que las concretan. Creo que son alentadoras algunas imágenes que muestran esperanza y llevan a pensar en la importancia del mensaje que transmite el profesor sobre el alcance de los logros futuros que puedan tener nuestros estudiantes y la necesidad de replantearnos en forma continua nuestro rol para promover e impulsar la autoconfianza en nuestros estudiantes. Por otra parte, lleva a reflexionar cómo hacer para diluir ese sentimiento de frustración o desesperación que puede generar la matemática cuando no logran ir concretando los aprendizajes (…)" (Profesora A)

El tiempo cronológico de la clase y el tiempo de los aprendizajes: Los siguientes fragmentos tomados de las narrativas escritas autobiográficas de distintos estudiantes, permitieron a los profesores discutir en torno a qué aspectos tener en cuenta para establecer el tiempo necesario para el desarrollo de la actividad matemática que se pretende en la clase. A partir del contraste de fragmentos de las narrativas de los estudiantes y de las narrativas de ellos mismos como profesores — en las que relatan cómo ha sido su experiencia en las clases de matemáticas—se asume como objeto de reflexión y discusión la diferencia entre el tiempo de acción en la clase y el tiempo del aprendizaje. Estas narrativas incitan el debate en torno a qué y quienes establecen el ritmo de la clase y si el tiempo de respuesta es indicador o evidencia de aprendizaje.

> "(…) me gustaría que la profe fuera como Julio profe porque a él yo le puedo poner pausa o volver a repetir (…)" (Estudiante A -noveno grado)
>
> "(…) y en clase yo me demoro más que Javier en responder, pero Javier se equivoca más a menudo- -en cambio yo-- pienso y me tomo mi tiempo para responder y me equivoco menos-- pero a la profesora le gusta que uno responda rápido así se equivoque (…)" (Estudiante C-séptimo grado)
>
> "(…) el profe cree que -a mi— no me cuesta hacer las tareas que él propone porque me va bien y es muy frustrante sentir que yo necesito cinco veces el tiempo que necesitan mis compañeros para lograr entender lo que ellos comprenden más rápido (…)" (Estudiante E-décimo grado)
>
> "(…) Una de las experiencias más determinantes ha sido que por lo general tiendo a demorar más para la resolución de problemas que los demás, lo que implica que el docente tiende a realizar la resolución colectiva antes de que termine, lo que no me permite acomodar totalmente esa desestructuración que genera el problema y no me da el tiempo a que entienda del todo la situación (…)" (Estudiante B-décimo grado)

Cuestiones abiertas

Por ser una investigación en desarrollo, presentamos algunas conclusiones iniciales:
Interpretar las temporalidades y espacialidades que atraviesan la experiencia de los estudiantes en clase de matemáticas, promueve que los profesores asuman genuinamente como objeto de crítica sus modos de comprender los fenómenos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Interpretar las narrativas de sus estudiantes permite a los profesores confrontar sus propias narraciones acerca de lo que acontece en su clase. Además, les permite reconfigurar sus tramas narrativas y subjuntivizar los pormenores de la clase de matemáticas.

Fomentar ambientes en los que prevalece el modo de pensar narrativo con profesores de matemáticas permite que ellos examinen su práctica profesional. Esta investigación permite concluir que no solo a partir de narrativas biográficas el profesor puede tomar distancia de su experiencia y volverla objeto de reflexión, como lo señaló Huberman (2012), sino también a través de la interpretación de narrativas de sus estudiantes sobre la experiencia en su clase.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la Educación Matemática.* Santiago de Cali: Ed. Universidad del Valle.

Blanco, L. y Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6*(2), 107-132.

Bruner, J. (1998). *Realidad mental y mundos posibles.* Barcelona: Gedisa.

Bruner, J. (2003). *La fábrica de historias. Derecho, literatura, vida.* Buenos Aires: Fondo de cultura económica.

Garnica, A. (2003). História Oral e Educação Matemática: do inventário à regulação, Zetetiké. 11(19). 9-55.

Garnica, A. (2011). ¿Cómo se puede implementar la historia oral en la educación matemática? *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59). 67-83.

Huberman, M. (2012) 9. Trabajando con narrativas biográficas. En H. McEwan y K. Egan (Eds.), *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación.* (pp. 183-235) Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

Jackson, P. (2012) 1. Sobre el lugar de la narrativa en la enseñanza. En H. McEwan y K. Egan (Eds.), La *narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación.* (pp. 25-51) Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

Kaasila, R. y Lutovac, S. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education*. *16*(2), 225-236. DOI: 10.1080 / 13562517.2010.515025

Kushner, S. (2010). Recuperar lo personal. En J. Rivas y D. Herrera (Eds.), *Voz y educación. La narrativa como enfoque de interpretación de la realidad*. (pp. 9-16). Barcelona, España: Editorial Octaedro.

McEwan, H. (2012). Las narrativas en el estudio de la docencia. En H. McEwan y K. Egan (Eds.), *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación.* Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

McEwan, H. y Egan, K. (Eds.). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación*. Buenos Aires, Argentina: Amorrortu editores.

Mofino, V. y Ochoviet, C. (2015). Un estudio discursivo de la identidad de profesores de matemática en formación de posgrado. *Perspectiva educacional. Formación de profesores. 54*(2), 74-91.

Prusak, A.y Sfard, A. (2005). Telling Identities: In search of Analityc tool for Investigating Learning as a culturally shaped activity. *Educational researcher*. *34*(4), 14-22.

Quintero, M. (2018 en prensa). Propuesta de investigación hermenéutica narrativa, PIHN. En *Narrativas: enfoques teóricos e investigativos*. Bogotá, Colombia: Centro Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rivas, J. y Herrera, D. (2010). *Voz y educación. La narrativa como enfoque de interpretación de la realidad*. Barcelona, España: Editorial Octaedro.

Smith, T. (2006). Autoaprendizaje a través de la investigación narrativa: fomento de la identidad en la formación de profesores de matemáticas. En *MERGA 29: Identidades, culturas y espacios de aprendizaje* (pp. 471-478). Adelaida, Australia: MERGA Inc.

Valero, P. y Skovsmose, O. (2012). Educación matemática crítica como agenda de investigación en Educación Matemática. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación Matemática Crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. (pp. 1-64) Bogotá, Colombia: Ediciones Uniandes.

Vasilachis de Gialdino, I. (1992). *Métodos Cualitativos I. Los problemas teórico-epistemológicos.* Buenos Aires, Argentina: Centro Editor de América Latina.

Vasilachis de Gialdino, I. (2011). Nuevas formas de conocer, de representar, de incluir: el paso de la ocupación al diálogo. *Discurso & Sociedad. 5*(1), 132-157.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

EDUCAÇÃO FINANCEIRA E A FORMAÇÃO CONTINUADA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

FINANCIAL EDUCATION AND CONTINUOURS FORMATION OF THE MATH TEACHER

Maria Elisabette Brisola Brito Prado, Adriana Pereira dos Santos, Maria das Graças Bezerra Barreto
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
bette.prado@gmail.com, drijuca@ig.com.br, magrabela@uol.com.br

Resumo
Este artigo aborda as possibilidades de um processo formativo para desenvolver a Educação Financeira voltada à Educação Básica. A trajetória investigativa baseou-se na metodologia qualitativa e de intervenção para compreender como um grupo de professores de Matemática da rede pública lida com situações do dia a dia relacionadas à Educação Financeira. O referencial teórico pautou-se na Educação Matemática Crítica de Skovsmose, nos documentos oficiais e nas ideias de formação continuada de Imbernón e Zeichner. O grupo desenvolveu atividades abrangendo questões do cotidiano, que demandavam soluções matemáticas aliadas às reflexões sobre finanças e análise crítica para a tomada de decisão. Ficou evidenciada a necessidade da formação continuada, de reflexões sobre a prática e de uma proposta atuante na vida do aluno, que possa cooperar com as competências e habilidades necessárias para promover tomadas de decisões consciente nos mais diferentes âmbitos de sua uma vida financeira e profissional.

Palavras-chave: formação continuada, matemática crítica, educação financeira

Abstract
This article deals with the possibilities of a training process to develop financial education focused on basic education. The research project was based on the qualitative and intervention methodology to understand how a group of mathematics teachers of the public network faces daily situations related to Financial Education. The theoretical reference was based on the ideas of Skovsmose on critical Mathematics, on the official documents and ideas of continuing training of Imbernón and Zeichner. The group developed activities involving daily issues, which required matematical solutions linked to reflections on finance and critical análisis for decision making. The findings evidence the need for continuing training, reflections on the practice and a proposal that can cooperate with the skills and abilities necessary to promote conscious decision making in the most different spheres of teacher's financial and profesional life.

Key words: continuing education, critical mathematics, financial education

Introdução

A Educação Financeira tem sido uma preocupação apontada por diversos setores da sociedade brasileira. Embora, atualmente, as pessoas tenham mais facilidade de acesso às informações sobre questões financeiras, por meio das diversas mídias, os estudos mostram que existe grande parte da população, independentemente do nível de escolaridade, que desconhece modos de gerir as finanças pessoais. Esta situação reforça a necessidade de ter ações educativas que possam oportunizar os estudantes de diferentes classes sociais e níveis de escolaridade a aprenderem lidar com os vários aspectos relativos às finanças pessoais. A Educação Financeira é uma possibilidade que pode auxiliar na tomada de decisões relacionadas ao consumo de forma mais consciente para que as pessoas possam gerir suas finanças e ter um planejamento financeiro de acordo com sua realidade.

Além dos documentos educacionais oficiais como a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (Brasil, 2017), diversas pesquisas, tais como, Cunha (2015), Teixeira (2015), Kistermann Jr. (2014), Sá (2012), entre outras, destacam a importância das escolas de educação básica, mais especificamente da disciplina de matemática desenvolver atividades relacionadas à Educação Financeira.

O fato é que nem sempre as questões que envolvem finanças e consumo são tratadas nas aulas de matemática de forma crítica, a ênfase é dada, segundo Sá (2012), apenas nas aplicações de fórmulas, cálculo de juros, parcelamentos, etc., ou seja, nos procedimentos que não exploram o pensamento crítico do aluno. Santos (2012) em sua pesquisa também constatou que alguns professores do Ensino Médio apresentavam dificuldades para desenvolver os conteúdos de matemática envolvendo a questão financeira de forma contextualizada e optavam por seguir o modelo encontrado em livros didáticos que enfatizam exercícios para a aplicação de fórmulas. Esse autor evidenciou a necessidade de ampliar a discussão sobre a Educação Financeira em formações continuadas, visando em preparar o professor para atender essa demanda social.

Assim, considerando a problemática acerca dessas questões, esse artigo tem como objetivo identificar e analisar como um grupo de professores de matemática lida com situações do dia a dia relacionadas à Educação Financeira. Para tanto, foi desenvolvida uma formação continuada contemplando situações de vivências reflexivas no sentido destacado por Zeichner (1993) e Imbernón (2011), bem como privilegiando os cenários investigativos, os quais, segundo Skovsmose (2010), caracterizam por situações inesperadas e imprevistas favorecendo o desenvolvimento do ensino da matemática na perspectiva crítica.

Fundamentação teórica

A educação matemática crítica, adotada por Skovsmose (2007), não deve ser vista como uma nova teoria e sim como uma forma de promover a reflexão sobre os caminhos que podem ser percorridos no ensino de matemática. Sob esse mesmo enfoque, ressaltamos as ideias de Freire (1970) em relação à pedagogia problematizadora, a qual deixa claro a importância de a prática educativa contemplar os saberes, a realidade e necessidades do aluno, assim como instigar a sua curiosidade e a visão crítica no processo de aprendizagem. De igual maneira, Skovsmose (2010) alerta para que seja revisto a abordagem do ensino tradicional de matemática no que se refere à predominância da execução de exercícios rotineiros, muitas vezes sem atribuição de sentido pelo aluno. O autor argumenta que o ensino da matemática deve propor atividades de caráter investigativo, questionador, oportunizando ao aluno o desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo na busca de soluções.

No entanto, atuar nesta perspectiva nem sempre é fácil, pois segundo Borba e Penteado (2001), pode significar para o professor sair da sua "zona de conforto", aquela garantida pelas rotinas de práticas já consolidadas ao longo do tempo. Para Skovsmose (2010) o desenvolvimento da educação matemática crítica pode ocorrer no percurso de diferentes ambientes de aprendizagem, proporcionando novos recursos que ajudem os alunos a agir e a refletir de forma crítica.

Nesse sentido, um dos movimentos que vem ganhando força ultimamente é o de abordar nas escolas de educação básica, mais especificamente na disciplina de matemática, a discussão da resolução de problemas relacionados à educação financeira. Sobre esse enfoque, "o objetivo da educação não deveria ser voltado apenas para o desenvolvimento dos conceitos tradicionais curriculares, mas também de permitir que as pessoas tenham acesso às informações e aos conceitos relacionados ao cotidiano" (Prado, 2015 como citado em Dowbor, 2006, p.17).

Entretanto, nas escolas dificilmente isto acontece. A pesquisa de Sá (2012), mostra que na educação básica quando questões sobre o consumo e finanças são abordadas nas aulas de matemática, geralmente o foco é dado apenas na aplicação de fórmulas, cálculo de juros, parcelamentos, etc., ou seja, nos procedimentos de resolução, não explorando o pensamento crítico do aluno. O autor destaca a necessidade de rever esse enfoque de forma a tratar tais questões na perspectiva da educação matemática crítica, permitindo dessa forma construir um elo de ligação entre o saber curricular, a experiência de vida de alunos e professores e as constantes transformações do mundo em que vivemos.

Diante desta preocupação e apelo social, torna-se cada vez mais necessário repensar o papel da escola e da prática pedagógica do professor. A partir da questão: Que matemática deve ser ensinada na escola de hoje? D'Ambrósio em Sá (2012, p. 03) faz a seguinte reflexão:

> Cidadania tem tudo a ver com a capacidade de lidar com situações novas. Se lida com situações conhecidas e rotineiras a partir de regras que são memorizadas e, obedecidas. Mas o grande desafio está em tomar decisões sobre situações imprevistas e inesperadas, que hoje são cada vez mais frequentes. A tomada de decisão exige criatividade e ética. A matemática é um instrumento importantíssimo para a tomada de decisões, pois apela para a criatividade. Ao mesmo tempo, a matemática fornece os instrumentos necessários para uma avaliação das consequências da decisão escolhida. A essência do comportamento ético resulta do conhecimento das consequências das decisões que tomamos. (Sá, 2017, p.3).

Ao repensar o papel do professor de matemática nessa abordagem, fica evidenciada a necessidade de desenvolver ações formativas que contemplem as situações inovadoras, salientadas por Imbernón (2011) e Zeichner (1993), sendo aquelas que requerem a vivência e a reflexão do professor sobre o seu fazer pedagógico. Nesse sentido, as situações de aprendizagem devem ser desenvolvidas num cenário investigativo que, segundo Skovsmose (2010), se constituem de situações inesperadas e imprevistas. Para tanto, propor cenários para investigação constitui criar um ambiente de aprendizagem que convida os alunos a formularem questões e a procurar explicações. Este convite promove um desafio ao aluno e o leva a refletir sobre os elementos de um cenário, fazendo conjecturas, questionamentos de modo fugir do padrão de exercícios. No entanto, essa situação pode colocar o professor na zona de risco. Skovsmose (2010) salienta que:

> Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que alunos e professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. (Skovsmose, 2010, p. 37).

No caso, da educação financeira, Kistemann Jr. (2016) apoiado em Skovsmose (2007) defende a ideia de propiciar ao aluno a tomada de decisão em situações reais. Desse modo, a educação financeira alinhada com a abordagem da educação matemática crítica de Skvsmose (2010) nos inspirou na realização da formação continuada de um grupo de professores assim como, na análise dessa experiência.

Ao propor uma formação em que o professor exercite a capacidade reflexiva sobre sua prática no desenvolvimento de atividades de caráter investigativo, acreditamos que essa prática possa colaborar para que o aluno se torne um cidadão crítico e capaz de tomar decisões de acordo com seu contexto de vida.

Segundo Imbernón (2011), a formação continuada do professor deve gerar um conhecimento ativo e não passivo, ou seja, o conhecimento articulado entre a teoria e a prática, aquele que possibilita ao professor a reconstruir constantemente a própria prática pedagógica em sala de aula. Tais princípios são fundamentais para orientar as ações formativas no sentido de desenvolver e promover a educação financeira na perspectiva crítica.

Metodologia

Esta pesquisa caracteriza-se como uma investigação de natureza qualitativa, que segundo Bogdan e Biklen (1994), se desenvolve com prioridade na fonte direta dos dados, ou seja, no ambiente natural, constituindo o investigador, o instrumento principal. Nessa perspectiva, os dados coletados são de essência descritiva e analisados de forma indutiva. Na pesquisa qualitativa a visão dos participantes em relação ao assunto abordado, assume especial importância, assim como a valorização dos processos em detrimento aos resultados ou produtos.

A presente pesquisa envolveu a descrição e interpretação dos dados coletados por meio da interação entre a pesquisadora e um grupo de dez professores de matemática do ensino fundamental e médio da rede estadual de São Paulo, participantes de uma formação continuada que teve como foco o tratamento de questões relativas à matemática no contexto da educação financeira. As ações formativas foram realizadas em dez encontros presenciais em uma escola pública de educação básica localizada em uma cidade do estado de São Paulo.
Os instrumentos utilizados para a coleta de dados foram: questionário de perfil, entrevista semiestruturada registrada em áudio, protocolos das atividades e relatórios desenvolvidos pelos professores participantes. A análise de dados desenvolveu-se com base interpretativa, fundamentada no referencial teórico relacionado ao tema do estudo.

Análise e resultados

O grupo de professores participantes revelou nos primeiros encontros de formação, que o tema Educação Financeira era uma novidade, pois nenhum deles havia cursado na Licenciatura de Matemática alguma disciplina que tratasse questões relativas à Educação Financeira.

Para conhecer como esse grupo pensa e age em relação às finanças pessoais foi colocada a questão: *Financeiramente, como tomamos nossas decisões?* A partir dessa questão cada participante expressou suas ideias, argumentando com base em suas experiências e concepções, como mostra as falas dos professores a seguir:

-Com certeza não olho o valor final, me interesso apenas pelo valor da parcela. (Prof.5)
-Até olho o montante a ser pago no final, mas ele não influencia na minha compra, procuro sempre um parcelamento de acordo com meu salário e também porque se olharmos só para o montante não compramos nada! (Prof.3)

Analisando os argumentos compartilhados durante o encontro formativo, constatamos que os professores participantes não tinham hábito de fazer o planejamento financeiro no seu cotidiano. A maioria dos participantes concordaram com a colocação do Prof.3 e se posicionaram a favor de um parcelamento que seja compatível ao seu salário, esclareceram ainda que pesquisam para verificar onde as parcelas são menores diante do mesmo produto.

Durante os vários momentos de compartilhamento das experiências em relação às finanças pessoais dos participantes, o grupo foi fazendo uma autoanálise sobre o comportamento humano, uma vez que os professores foram relatando como estavam se vendo ou se sentindo naquele momento.

-Não me preocupo em fazer as contas dos meus consumos, pois conta sempre com o dinheiro da minha família para completar minha renda, se por acaso, falte. (Prof.1)

-Uso o dinheiro até acabar, e depois, se precisar, peço ajuda para os pais ou fico sem, pois não tenho hábito de fazer planejamento financeira e ficar controlando (Prof.8)

-Não consigo poupar, mas como não tenho a quem recorrer caso falte dinheiro, sou bem controlado em relação às minhas finanças. Teve que aprender isto com a realidade e dificuldades que já passei pela vida. Este assunto nunca foi tratado com pela família, escola ou faculdade. (Prof.4)

É possível verificar que o grupo não demonstrou ter conhecimento sobre a importância do planejamento financeiro para a vida, e que, de acordo com a fala do Prof.4, esta questão sempre “passou em branco”, ou seja, foi tratada de forma superficial durante a sua formação como estudante da educação básica e na graduação. Estas constatações foram evidenciadas também na pesquisa de Sá (2012), ao destacar que as ideias sobre educação financeira ainda estão bastante distantes das salas de aula dos cursos de Licenciatura em Matemática e consequentemente da prática de sala de aula do professor.

Para ampliar a reflexão e discussão sobre o tema foi colocado no grupo a seguinte questão: *E nossos alunos? Em que momento podem ser orientamos sobre a tomada de decisões envolvendo finanças*? Após alguns instantes de silêncio, demonstrando preocupação e dificuldade em responder como abordar este assunto com os alunos, alguns professores expressaram suas ideias:

-Poderia perguntar para os alunos qual a diferença, entre cartão de crédito e de débito? (Prof.5)

-Acho que é uma boa ideia, eu iria explicar que o cartão de débito é aquele que debita (tira) o valor usado da sua conta corrente na hora, e, o de crédito, é aquele que você compra com um limite e paga tudo de uma vez no dia do vencimento da fatura. (Prof.9)

-Mas eu não sei como é feita a cobrança de juros do cartão de crédito? É sobre o montante da minha fatura ou sobre o que deixei de pagar? (Prof.2)

-É sobre o que você deixou de pagar. (Prof.9)

-Gente, como vou ensinar isso para o meu aluno, se nem eu sei como me cobram, e pior ainda, pago sem questionar. (Prof.1)

-Como isso nunca foi relacionado com as aulas de Matemática? (Prof.6)

-Precisamos trazer estas questões com urgência para nossas aulas. (Prof.4)

Nesse momento, o grupo demonstrou que a matemática desenvolvida na prática escolar não tem relação com o cotidiano e tampouco se desenvolve numa perspectiva crítica, conforme salientam Skovsmose (2010) e D’Ambrósio (2005). Para tanto, com base nas ideias desses autores, as ações formativas tiveram como foco inicialmente provocar a reflexão dos participantes sobre suas vivências com as questões relacionadas às finanças pessoais para que pudessem atribuir significado sobre o tema e perceber a relação com a matemática.

De fato, o grupo foi ampliando o debate e aos poucos os professores foram destacando os conteúdos matemáticos que estavam envolvidos nas colocações dos colegas, tais como: porcentagem, juros simples, juros compostos, as quatro operações básicas (principalmente a divisão para falar de parcelamento) e fração.

-Só agora, depois desses encontros e reflexões no grupo que estou percebendo que podemos trabalhar nas nossas aulas com os conteúdos matemáticos [...] percebo que tem relação com a matemática financeira, mas ainda não sei como desenvolver este assunto em minhas aulas. (Prof.4)

-É muito importante, acho que se isso tivesse sido desenvolvido comigo durante a educação básica, eu não teria passado por tantas dificuldades financeiras no início da minha vida adulta. (Prof.2)

Os professores reconheceram a importância e a necessidade de abordar o assunto em suas aulas de matemática, mas afirmaram também que não sabiam como fazer isso acontecer. De fato, o grupo demonstrou que há fragilidades em desenvolver este assunto em sala de aula. Isto nos mostrou que além da necessidade da formação inicial e continuada há também carência de materiais didáticos para o ensino da matemática voltado para a educação financeira. A pesquisa de Farias (2013) também deixou evidente que, além de o professor não ter a formação necessária para trabalhar este conteúdo, ele não encontra material disponível nos livros didáticos para tratar o assunto.

Considerando essa realidade, nos encontros formativos, as atividades propostas eram alinhadas em torno de situações-problema que pudessem ser desenvolvidas na prática com os alunos do ensino fundamental e médio, envolvendo o uso de conceitos matemáticos no contexto da educação financeira. Para tanto, os professores deveriam selecionar problemas de cunho financeiro que pudessem usar as ferramentas matemáticas para resolvê-lo. Como não seria possível resolver e explorar todos os problemas, durante o período do encontro, foi decidido que a escolha do problema seria aleatória e assim o problema do Prof.6 foi o selecionado para ser analisado no grupo.

Quadro 1. Problema apresentado pelo Prof.6

ENEM 2011: Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro: Poupança: 0,560% (Rendimento Mensal) e Imposto de Renda (Isento) CDB: 0,876% (Rendimento Mensal) e 4% sobre o ganho (Imposto de Renda) Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é: a) a poupança, pois totalizará um montante de R$502,80. b) a poupança, pois totalizará um montante de R$500,56. c) o CDB, pois totalizará um montante de R$504,38. d) o CDB, pois totalizará um montante de R$504,21.

Fonte: Santos, 2017, p.58

O grupo resolveu o problema rapidamente fazendo uso de calculadora e, para desafiá-los a refletir sobre a relação entre os dois tipos de investimentos foram propostas duas questões, que deveriam ser analisadas e resolvidas sem o uso da calculadora:

1) Se o jovem tivesse R$5.000,00 ainda compensaria aplicar no CDB (Certificados de Depósito Bancário)? Se fosse R$10.000,00?
2) Posso afirmar que isso serve para qualquer quantia?

A intenção em propor estas duas questões foi a de observar e de analisar os caminhos que o grupo percorreria com os cálculos matemáticos; qual seria a tomada de decisão sobre o tipo de investimento e quais os argumentos que o grupo usaria para tomar esta decisão.

Analisando as resoluções apresentadas pelo grupo, foi possível verificar que somente a solução feita pela dupla Prof.5 e Prof.6, a matemática foi usada como instrumento para tomada de decisão. Nas demais resoluções, embora as duplas de professores tenham feito os cálculos, não conseguiram se apoiar neles para a tomar suas decisões.

Durante vários encontros formativos os professores vivenciaram uma forma de aprender e refletir sobre como uma situação de cenário investigativo exige a busca de estratégias de solução apoiada em ferramentas matemáticas que possam colaborar para a tomada de decisões. Assim, após a realização desse tipo de atividade as resoluções eram compartilhadas e analisadas pelo grupo, despertando um novo olhar para os conteúdos matemáticos.

Depois dessa vivência, o foco da formação foi em auxiliar o grupo no processo reconstrução da prática pedagógico. Para isto uma das ações proposta de criar ou selecionar um problema com características de um cenário investigativo para ser desenvolvido com seus alunos em sala de aula. Os professores se organizaram e dupla para realizar esta atividade e apresentaram quatro problemas e dentre eles foi escolhido um foi escolhido para ser estudado no coletivo do grupo. O problema "Alô e Olá" elaborado pela dupla Prof.6 e Prof.7 foi escolhido, conforme consta no quadro 2:

Quadro 2: Problema "Alô e Olá"

Duas operadoras de telefonia "ALO" e "OLÁ" cobram pelos seus serviços da seguinte maneira:
ALÔ R$ 8,00 fixo + R$ 0,12 por minuto utilizado
OLÁ R$ 12,00 fixo + R$ 0,10 por minuto utilizado
a) Vendo o anúncio das duas operadoras, qual delas você escolheria?
b) Qual o valor a ser pago para cada operadora por 30 minutos? E por 100 minutos? E por 250 minutos?
c) É viável contratar a empresa ALÔ independente dos minutos utilizados?
d) Uma pessoa que utiliza 500 minutos por mês deve contratar qual operadora? Explique por quê.

Fonte: Santos, 2017, p. 73.

As argumentações feitas na escolha do problema demonstraram a interação e a preocupação do grupo para com a tomada de decisão, ou seja, pudemos verificar um direcionamento para esta vertente, o que antes não era presente nos encontros. Isso nos faz concordar com Santos, Veiga e Sá (2011) quando afirmam que a matemática financeira deve propiciar aos alunos o desenvolvimento de capacidades que lhes favoreçam a intervir na realidade para transformá-la. Nesse sentido, Reis (2013) também afirma que a matemática financeira deve proporcionar ao aluno condições de analisar uma situação crítica e a buscar alternativas para resolvê-la. Para tanto, é necessário que o professor proponha situações que reflitam a realidade do aluno para que ele possa tornar significativa a sua aprendizagem.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (Brasil, 2000, p.111)

Finalizada a prática com os alunos (Problema Alô Olá), cada professor relatou no grupo a sua experiência. No geral, houve unanimidade sobre a dificuldade que tiveram em relação à tomada de decisão por parte dos alunos e também dos cálculos com números decimais, como ilustra o trecho a seguir:

> *-Quando vi que eles não conseguiam analisar o problema, pensei [...] eles não sabem interpretar mesmo [...] mas quando vi que a maioria apresentou dificuldade em usar os números decimais, então me questionei [...] para que serve a Matemática que estou ensinando, já que meu aluno não consegue resolver um problema simples, fazer operações simples [...] a sensação foi de fracasso. Quero introduzir mais situações que promovam reflexão, me dei conta da importância de compreender o conteúdo, precisamos deixar a mecanização de lado [...]. (Prof.6)*

Diante do relato do Prof.6 foi possível notar que a reflexão proposta nos encontros formativos foi incorporada por ele. O seu relato nos leva a constatar e concordar ao que diz Libâneo (2002, p. 28), "se queremos um aluno crítico reflexivo, é preciso um professor crítico reflexivo". Nesta experiência com os alunos os professores reconheceram a necessidade de trabalhar com os cenários investigativos, conforme mostra o relato a seguir:

-Com problemas mais reflexivos, podemos dar um sentido mais palpável ao conteúdo, será possível mostrar a sua importância na prática. (Prof.6)

Analisando os relatos sobre as experiências desenvolvidas com os alunos fica evidente que alguns professores, uns mais e outros menos, compreenderam a necessidade de dar sentido ao conteúdo a partir da vivência reflexiva, assim como aconteceu com o grupo durante os encontros de formação.

O processo reflexivo e compartilhado entre os professores como uma prática social no sentido dado por Zeichner (1993) favoreceu ao grupo reconhecer a necessidade de rever o ensino de matemática priorizando questões ligadas à realidade do aluno, no caso à educação financeira. Isto ficou evidenciado no momento em que o grupo manifestou a necessidade de estender o período da formação para que em conjunto pudessem elaborar um material didático para dar suporte as aulas de matemática, visando propiciar aos alunos a reflexão e a tomada de decisões de forma crítica e consciente sobre as questões relativas ao contexto financeiro.
Assim, atendendo a demanda do grupo, os professores tiveram oportunidade de desenvolver um material composto por onze situações problemas. Esse material foi elaborado com o propósito de ser utilizado na prática de sala de aula a fim de contribuir com uma formação crítica, em que o aluno se apropria de habilidades e competências que colaborem com a estruturação do seu pensamento, contribuindo para que este seja capaz de analisar, avaliar e argumentar diante de uma situação que tenha que tomar uma decisão.

Conclusão

Esta pesquisa nos mostrou a importância da formação continuada de professores atuantes na Educação Básica no sentido de propiciar a reconstrução do seu fazer matemática integrando situações do dia a dia relacionadas à Educação Financeira.

Durante os encontros de formação, ficou evidenciado que os professores buscaram conhecer o novo, a refletir sobre suas práticas e a criar cenários investigativos para aprendizagem de matemática de forma crítica, permitindo com isso que os alunos desenvolvam as competências e as habilidades necessárias para promover tomadas de decisões conscientes sobre finanças.

Saber gerir as finanças tanto no âmbito pessoal como profissional é fundamental para o desenvolvimento humano e para isto é necessário abordar e promover a reflexão sobre o conhecimento matemático voltado para desempenhar este papel, contribuindo com uma visão de mundo que possa fortalecer e desenvolver capacidades que serão exigidas na vida social e profissional do aluno, sendo este o papel primordial da educação financeira na educação básica.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., e Biklen, S., (1994). *Investigação Qualitativa em Educação* – uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Borba, M. C., e Penteado, M. G. (2001). *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Brasil (2017). *Base Nacional Curricular Comum* – BNCC. Brasília: Ministério da Educação. Recuperado de http://basenacionalcomum.mec.gov.br

Brasil (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais* - PCNEM. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental.

D'Ambrósio. U. (2005). Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, 31(1) pp. 99-120.

Cunha, C. L. (2015). A Matemática Financeira Caminha para a Educação Financeira. *Anais do XIV CIAEM – Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Chiapas, México.

Dowbor, L. (2016). *Educação e Desenvolvimento local*. Recuperado de http://dowbor.org/

Farias, G.V. (2013). *A Matemática Financeira na Educação Básica e sua importância para a formação de um cidadão consciente*. Dissertação de mestrado profissional em Matemática. UNIRIO. Rio de Janeiro.

Freire, P. (1970). *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Imbernón, F. (2011). *Formação Docente e Profissional* – Formar-se para a mudança e a incerteza. São Paulo: Cortez.

Kistemann Jr., M. A. (2016). Uma discussão sobre a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e o tema integrador "Consumo e Educação Financeira" e o Currículo de Matemática. *ENEM*. Universidade Federal de Juiz de Fora.

Libâneo, J. C. (2002). Reflexividade e formação de professores: outra oscilação do pensamento pedagógico brasileiro? Em: Pimenta, S. G., Ghedin, E. (orgs.). *Professor reflexivo no Brasil*: gênese e crítica de um conceito. 2. ed. São Paulo: Cortez.

Prado, A.B.B. (2015). *Educação Financeira: a visão de jovens universitários sobre as finanças familiares*. Dissertação de Mestrado em Administração. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP.

Reis, S.R. dos. (2013). *Matemática Financeira na Perspectiva da Educação Matemática Crítica*. Dissertação de mestrado profissional. Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul.

Sá, I. P. de. (2012). *A Educação Matemática Crítica e a Matemática Financeira na Formação de Professores*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Universidade Bandeirante de São Paulo.

Santos, A.P. dos. (2017). *Educação financeira na perspectiva da matemática crítica e a formação continuada do professor do ensino médio*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo.

Santos, R. P. dos. (2012). *Uma Proposta de Formação Continuada sobre Matemática Financeira para Professores de Matemática do Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Severino Sombra, Vassouras, Rio de Janeiro.

Santos, R. P. dos., Veiga, J., e Sá, I.P. (2011). Uma proposta de Formação Continuada sobre Matemática Financeira para professores de Matemática do Ensino Médio. *Revista Eletrônica TECCEN*, Vassouras, 5(2) pp. 5-30.

Skovsmose, O. (2010). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica*. São Paulo: Papirus.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica*: Incerteza, Matemática, Responsabilidade. São Paulo: Cortez.

Teixeira, J. (2015). *Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre Educação Financeira e Matemática Financeira*. Tese de Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade de São Paulo PUCSP.

Zeichner, K.M. (1993). *A Formação Reflexiva de Professor*: Ideias e Práticas. Lisboa: Educa.

COMUNIDAD DE PRÁCTICA EN INACAP: UN ESPACIO PARA EL MEJORAMIENTO DE PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS

PRACTICE COMMUNITY IN INACAP: A SPACE TO IMPROVE PEDAGOGICAL PRACTICES

Juan Pablo Vargas Herrera, María Eugenia Lucero Martínez, Karen Cecilia González Flores
Universidad Tecnológica de Chile – INACAP (Chile)
jvargash@inacap.cl, Maria.Lucero10@inacapmail.cl, Karen.gonzalez15@inacapmail.cl

Resumen
El presente documento, relata la conformación y ejecución de una Comunidad de Práctica, que permitió el diálogo entre los diferentes campos disciplinares encargados de la formación de futuros técnicos y profesionales en una universidad privada de Chile. La Comunidad orientó reformas de prácticas pedagógicas en la enseñanza de las matemáticas, logrando un rediseño del Discurso Matemático tradicional, establecido en la institución. Su implementación, permitió al finalizar, obtener materiales para la enseñanza de las matemáticas, aportar al sistema de formación permanente de los docentes y el delineamiento de buenas prácticas pedagógicas.

Palabras clave: socioepistemología, aprendizaje, cooperativo, formación, profesores

Abstract
This document describes the formation and execution of a Community of Practice, which allowed the dialogue between the different disciplinary fields responsible of future technician´s education and professionals in a private university in Chile. The Community oriented reforms of pedagogical practices in the teaching of mathematics, achieving a redesign of the traditional Mathematical Discourse, established in the institution. Its implementation allowed at the end, obtain materials for teaching mathematics, contribute to the system of permanent training of teachers and the delineation of good pedagogical practices.

Key words: socioepistemology, learning, cooperative, training, teachers

Introducción

El proyecto Comunidad de Práctica: Una estrategia para el Mejoramiento de Prácticas Pedagógicas, es una propuesta de innovación que se adjudicó, para el periodo otoño 2018 los fondos correspondientes al concurso de innovación docente del Centro de Innovación en Educación CIEDU, perteneciente a la Universidad Tecnológica de Chile, conocida como INACAP.

Esta innovación, buscó entre otras cosas, constituir una Comunidad de Práctica entre Académicos de la sede Rancagua, para el mejoramiento de las prácticas pedagógicas en clases de Matemáticas, que permitiera su transferencia a otras ramas del conocimiento y su escalabilidad a diferentes sedes de la Universidad.

Actualmente está finalizado, y cuenta con un equipo interdisciplinario de Académicos de la sede de Rancagua, los cuales se han reunido periódicamente, a debatir en torno de la pregunta: ¿qué y cómo enseñar matemáticas a futuros técnicos y profesionales de diferentes áreas del conocimiento?, así como ¿cuáles son las estrategias pedagógicas y metodológicas que aseguran la calidad de la enseñanza de las matemáticas y los buenos resultados académicos involucrando a todos los actores del proceso educativo: docentes, estudiantes y administrativos?

En este sentido, la Comunidad de Práctica (CdP) ha generado material de enseñanza de las matemáticas, para el curso de Matemática 1, del programa de Ingeniería en Construcción. Este material ya ha sido implementado en un grupo experimental y se cuenta actualmente con las grabaciones de todas las sesiones de la comunidad, así como también con los videos de las clases en las cuales se aplicaron las situaciones de aprendizaje.

La Comunidad de Práctica permitió a los Académicos de INACAP generar estrategias metodológicas y debates en torno al aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, mediante la implementación de un espacio en el cual se analizó el concepto de función, imagen, pre-imagen y aquellos elementos característicos como el dominio y recorrido; se discutió en torno a las diferentes representaciones de una función y su implicancia en la educación matemática y, se estudió el concepto de función lineal; todo lo anterior, a partir de diversas situaciones propias del área de la construcción.

En este documento, encontrará algunos aportes sobre el marco teórico que sustentó toda la implementación, así como una descripción muy puntual, de algunos pasos que se siguieron para la constitución de la comunidad; en un último apartado se presentan algunos resultados y una discusión sobre las implicaciones que tienen la constitución de este tipo de espacios dentro de los procesos de mejoramiento del proceso de la enseñanza de las matemáticas.

Marco referencial

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) plantea la necesidad de *alcanzar una democratización del aprendizaje de las matemáticas***,** entendiendo esto como la obtención de las herramientas, procedimientos y epistemologías que permitan presentar una matemática no centrada en un objeto y para la cual no se haga primordial la hegemonización de los conocimientos; lo que según (Cantoral, 2013), consiste en “aceptar un cambio de centración que va de la mirada platónica, focalizada en objetos abstractos ajenos a la realidad, a una visión socioepistemológica que asume a las prácticas sociales como la base misma de la construcción de significado en matemáticas”.

Desde esta perspectiva, se reconoce que existe un sistema de razón que norma la enseñanza de las matemáticas, denominado Discurso Matemático Escolar (dME), el cual ha sido caracterizado y analizado desde diferentes nociones, (Buendía, 2004; Cantoral, 1990; Cordero, 1994; Farfán, 2012; Montiel, 2005) han abordado éste tópico y, se ha logrado consensuar que, el dME es un *sistema de razón* que norma y regula los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar y su estudio ha evidenciado *fenómenos,* originados por el mismo, que permiten su continuidad y hegemonía en las aulas regulares de clase.

Ante dicha realidad, la TSME propone consolidar mediante la reflexión y el análisis de lo establecido, rediseños al discurso matemático escolar, planteándolo en dos modalidades: el rdME y el RdME, los cuales, si bien a simple vista parecen ser lo mismo, difieren en su naturaleza, de ahí que su distinción se haga mediante una “r” minúscula y otra “R” mayúscula; esto se describe en Cantoral (2013) citado por Reyes Gasperini (2016, p.43)

- Rediseño del discurso Matemático Escolar (rdME) “r minúscula”: refiere a la elaboración de propuestas de enseñanza basadas en una epistemología renovada, que será palpable en situaciones de aprendizaje llevadas al aula por los profesores. Aquí están las estructuras objetivables del dME: libros de texto, currículo, programas de estudio, evaluaciones nacionales, entre otras.

- Rediseño del discurso Matemático Escolar (RdME) “R mayúscula**”:** refiere a una ruptura de orden epistemológico que precisa de un nuevo paradigma respecto al conocimiento matemático escolar.

Estos dos momentos, se hacen observables en cuanto el docente de matemáticas se convierte en un problematizador del saber y debate con la matemática escolar, reconociendo la necesidad de dar significado a las experiencias, las construcciones y los saberes que cada uno de los actores educativos o *sujetos* poseen dentro y fuera del aula; sin embargo, el transcurso de un estadio al otro requiere de diversos factores como un análisis y concientización de la realidad sobre el problema de la construcción del conocimiento matemático, además del dialogo, debate y resistencia ante diferentes entidades encargadas de la reproducción y mantenimiento del Discurso Matemático Escolar.

En este sentido, surge la idea de comunidades, bajo la premisa que el diálogo entre diferentes disciplinas permite la co-construcción de los conocimientos desde una mirada de su funcionalidad versus lo establecido en el dME de su carácter utilitario, reconociendo, además que: “intervenir la problemática actual consistirá en crear instrumentos de recuperación que pongan en dialogo horizontal la matemática escolar y la matemática del cotidiano” (Cordero, 2016, p. 24). Por ende, se hace inmediato y necesaria, la consolidación de más equipos multidisciplinarios que cuestionen el Saber Matemático Escolar y se constituyan en diferentes tipos de Comunidades.

Ante esta necesidad de constituir Comunidades y, teniendo en cuenta que se quiere poner en dialogo el conocimiento en sus diferentes categorías, vale la pena resaltar lo siguiente:

> Es posible identificar tres tipos de conocimientos matemáticos: el de la obra, el de la escuela y el de la ciudad. Los dos primeros son sistematizados e institucionalizados, y el tercero tal vez ni se conozca. Sus génesis son de naturaleza diferentes, una pertenece a la cientificidad y la otra a la humanización. (Cordero, Méndez, Parra, y Pérez, 2014, p. 74)

Estos conocimientos, desarrollan agrupaciones de personas que conocen de manera distinta y por ello razonan de manera, a su vez, diferente. El primer tipo de conocimiento, está dedicado a la labor matemática y por tanto carece de contexto y realidad, pues forma parte de un conglomerado de reglas, axiomas y teoremas que permiten la constitución de la matemática como disciplina científica; los segundos, están normados en la escuela, en donde se le ha añadido un contexto (ficticio normalmente) pero que impone ideas y realidades, olvidando y opacando la historia, necesidad y funcionalidad del mismo; finalmente el conocimiento de la ciudad, de la gente y de las comunidades el cual normalmente es soslayado de los anteriores y olvidado en el proceso educativo.

Ante dicha separación y siendo conscientes de la problemática ya descrita, sobre la no funcionalidad del conocimiento matemático y por tanto su no aprendizaje ni democratización, se plantea en Cordero, Méndez, Parra y Pérez, (2014) que:

> Es tarea ahora, la constitución y caracterización de lo que son las comunidades, reconociendo particularmente que se diferencian de cualquier agrupación de personas debido a su reciprocidad, su intimidad y su localidad:
>
> a. Reciprocidad: el conocimiento se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
> b. Intimidad: es el uso de conocimiento propio y privado que no es público.
> c. Localidad: el conocimiento es local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, la región, entre otros. (p.75)

Desde allí, se reconoce entonces que el problema de la construcción social del conocimiento matemático requiere, entre otras cosas, la constitución de comunidades, que permitan el diálogo entre distintos actores del proceso educativo, para la democratización del aprendizaje, integrando los diferentes tipos de conocimiento, su funcionalidad y rescatando elementos propios de su epistemología que den lugar a su constitución como un saber.

Los elementos anteriormente nombrados, se pudieron identificar en la Comunidad de Práctica en INACAP, en dicha agrupación, cada uno de los integrantes compartía un gusto por la enseñanza, por encontrar estrategias, metodologías y conocimientos necesarios para darle sentido a lo que se planteaba como objetivo de enseñanza (reciprocidad); fue un grupo bastante heterogéneo, constituido por al menos cuatro campos disciplinares diferentes, algunos tan distantes como la matemática y el periodismo; sin embargo, desde su experiencia, cada uno de los integrantes, logró aportar a la discusión en conjunto, poniendo en evidencia, sus creencias y convicciones y constituyendo el camino a seguir para el proceso de construcción de los conocimientos declarados en los alumnos (Intimidad); aún con las diferencias declaradas, de profesión, técnica y convicción, todos los integrantes coincidían en su práctica profesional (enseñanza), además pertenecían a la misma institución, por tanto, poseían estructuras y valores similares propios de la Universidad que los acoge(Localidad).

A partir de dicha caracterización y, gracias al reconocimiento del equipo como una *comunidad*, fue posible estructurar rediseños al dME, a partir de discusiones y construcción de situaciones de aprendizaje que recuperaran argumentos de la cotidianidad de los alumnos y los pusieran en constante duda sobre la validez o no, de los mismos; se quiso siempre lograr responder a las siguientes preguntas: ¿cómo usar determinado objeto matemático? y ¿para qué usarlo?

De igual forma, la comunidad de Práctica, fue evidenciando que el discurso propio de los académicos participantes, iba cambiando; así, por ejemplo, habían sesiones de trabajo, en las que se centraba la discusión no en el objeto matemático en sí, sino más allá, realizando preguntas desde la perspectiva del otro, del que aprende y del que construye un conocimiento en matemáticas, se buscaban diferentes funcionalidades y usos del conocimiento y, lo más importante, era que cada uno desde su propia disciplina y profesión, intentaba explicar a los demás lo que aquel conocimiento significaba en su realidad, para que desde dicho punto, se lograra convencer al otro, debatirlo o refutarlo.

Metodología

La creación y ejecución de la Comunidad de Práctica, contempló cuatro fases: Reclutamiento, Planificación, Ejecución, Análisis y Reflexión.

Reclutamiento

En esta primera fase se hizo un llamado a todos los académicos del área de ciencias básicas a participar en los espacios de discusión que se realizarían, logrando en primera instancia 12 postulaciones, de las cuales se seleccionaron a 10 participantes, de acuerdo con las necesidades del proyecto, así como con la disponibilidad presupuestaria; los académicos seleccionados fueron clasificados en cada uno de los siguientes campos disciplinares:

Campo disciplinar	Perfil	Académicos
Matemáticas	Licenciados en matemáticas	2 académicos
Pedagogía	Profesores de matemáticas	2 académicos
Ingeniería	Ingenieros de diferentes áreas	2 académicos
Matemática Educativa	Magíster en Matemática Educativa	1 académico
Comunicación efectiva	Periodista	1 académico
Empleabilidad	Trabajador social Profesora	2 académicos

Tabla 1. Académicos Seleccionados, Comunidad de Práctica INACAP. Fuente: Diseño propio

La selección y clasificación de la tabla 1, sigue la metodología y estrategia de acción presentada en Vargas (2016), investigación en la cual se trabajó con el departamento de matemáticas y ciencias de la computación de la Universidad de Santiago de Chile USACH, para lograr determinar cuáles eran los campos de formación del profesor de matemáticas, sus puntos de dialogo y su diferenciación; por lo tanto, a partir de la experiencia allí narrada, se intentó delimitar campos disciplinares similares, pero en ésta ocasión, dedicados a la formación en educación técnica-profesional.

Planificación

En esta fase, se seleccionaron los programas de asignatura que se buscaba intervenir, coincidiendo en que se realizaría en el área de construcción, particularmente en el programa de estudios de Ingeniería en Construcción, para alumnos de primer año; luego de ello, se revisó la metodología, los objetivos de aprendizaje, el modelo pedagógico, criterios de evaluación y demás elementos que entrega el programa de asignatura, de modo que todos los académicos participantes de la CdP, estuvieran al tanto de lo que se esperaba lograr.

Luego de la selección, la comunidad, marcó los momentos hitos dentro de la asignatura, concluyendo que el camino a seguir, para abordar la unidad de funciones polinómicas sería: 1. Partir por la función lineal y sus elementos constituyentes, 2. Desarrollar la idea de función cuadrática y sus características y 3. Buscar aplicaciones de cada una de las anteriores de modo que, a partir de un argumento real, se pudiera dar paso a la construcción de dichos conocimientos.

Finalmente se realizó el diseño de material consistente en tres situaciones de aprendizaje, cada una con tres momentos, que abordaban los elementos clasificados como momentos hitos del objeto que se estudiaba. Este material fue construido, validado y evaluado por todos los académicos participantes de la comunidad, y como se debatió constantemente sobre él, todos tenían conocimiento de cómo ejecutarlo en el aula de clase.

Ejecución

Se realizaron cuatro clases planificadas por la comunidad en el grupo experimental constituido por cinco secciones del curso Matemática I, mediante lo cual se pudo asegurar un muestreo y análisis estadístico correcto en pro de la conclusión de la actividad; Algunas de las sesiones de clase, así como las discusiones que se llevaban en paralelo por la comunidad, se fueron grabando, de modo que a futuro se pudieran revisar y analizar, obteniendo mayor profundidad en lo que se dialogó, así como en las ideas base y fuerza de todo el proceso.

Análisis y reflexión

En esta etapa de análisis y reflexión la comunidad de práctica utilizó los vídeos de cada una de las sesiones de clase y bajo la mirada del análisis crítico del discurso de Van Dijk (1999), se reconocieron elementos característicos de una buena práctica pedagógica; a partir del análisis de los vídeos y la reflexión en conjunto, se pudo concluir, a grandes rasgos, lo siguiente:

Una buena práctica pedagógica, se da, cuando un académico:

a. Formula preguntas sin una única respuesta.
b. No responde a los alumnos si algo está bien o mal, por el contrario, lo orienta con más preguntas a que sea él mismo quien se responda y se valide.
c. Responde las preguntas de los alumnos, re-dirigiéndola a una nueva pregunta, de forma que se constituyan como problematizadores del conocimiento y no como reproductores del mismo.
d. Genera espacios de diálogo entre los alumnos para su propia discusión.
e. Formaliza únicamente lo necesario para finalizar la clase.

Cada uno de estos elementos se hizo determinante en los análisis de las clases, en tanto todos los campos disciplinares que se encontraban en debate reconocían la riqueza de estos elementos y permitían que tanto el alumno como el docente se sintieran vinculados y responsables de la formación y de la construcción del conocimiento matemático.

Resultados

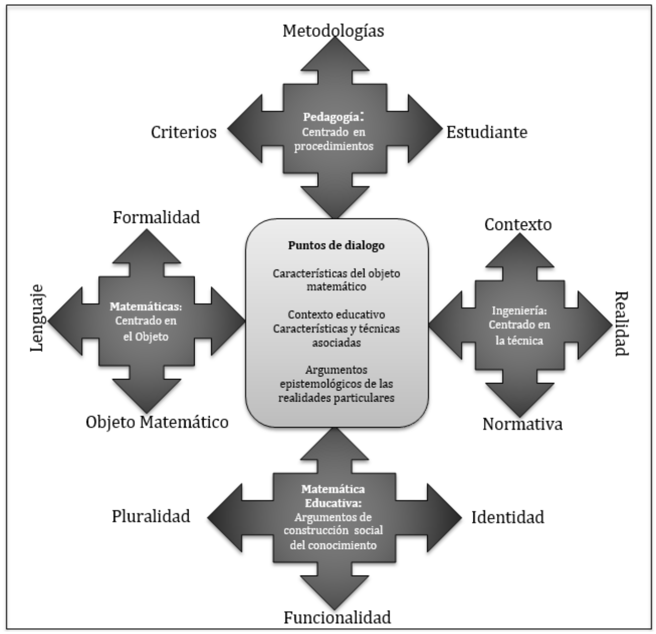
Dentro de los resultados que a la fecha se reportan en esta investigación se presentan dos elementos puntuales, el primero, hace referencia a la caracterización de los académicos de cada uno de los campos disciplinares que conviven en la Universidad Tecnológica de Chile y los puntos de dialogo mediante los cuales se puede llegar a un consenso de la pregunta problema y, el segundo, referido al material de situaciones didácticas diseñadas por la comunidad; se espera que con el análisis que se obtenga al finalizar las implementaciones, se pueda dar respuesta a la pregunta planteada. Se presentarán los resultados en dos grandes dimensiones: *Caracterización de los campos y Diseño de situaciones*.

Caracterización de los campos

Es posible presentar el siguiente esquema que resume la caracterización de cada uno de los campos disciplinares presentes en la universidad.

En el campo de las matemáticas hay una preocupación profunda sobre lo que matemáticamente significa cualquier enunciado, se crean fuertes enlaces entre el significado de una palabra y su implicación matemática, de ahí que "comportamiento gráfico", "tendencia" y "cercanía", se entiendan desde una lógica formal en la cotidianidad, pero se les de otro significado desde la perspectiva matemática. Se reconoce la formalidad y la exactitud como características claras del desarrollo matemático, pues se asume que únicamente en la medida en que un objeto matemático esté formalmente definido será entendido por un usuario, en este caso, por un estudiante.

Al discutir sobre lo que un estudiante del nivel técnico necesita saber de matemáticas, los representantes del campo de la matemática se centran en los objetos y lo que, desde su formalidad, se debe saber (análisis teórico).
En el campo de la pedagogía, es claro que se concibe un proceso diferente, en este campo se entiende al estudiante y su proceso de aprendizaje como el centro de la actividad, constantemente se encuentra que sus representantes tienen una fuerte preocupación sobre el objetivo de las actividades propuestas y el tipo de estudiante al cual está dirigido, los académicos representantes de este campo demuestran que dependiendo del tipo de estudiante se hace necesario modificar prácticas pedagógicas, teniendo siempre como objetivo principal la consolidación de los conocimientos en los estudiantes, aprovechando diferentes tipos de herramientas propias del ser y de la actividad que se está realizando.



Gráfica 1. Caracterización de los campos disciplinares Formación matemática, Universidad Tecnológica de

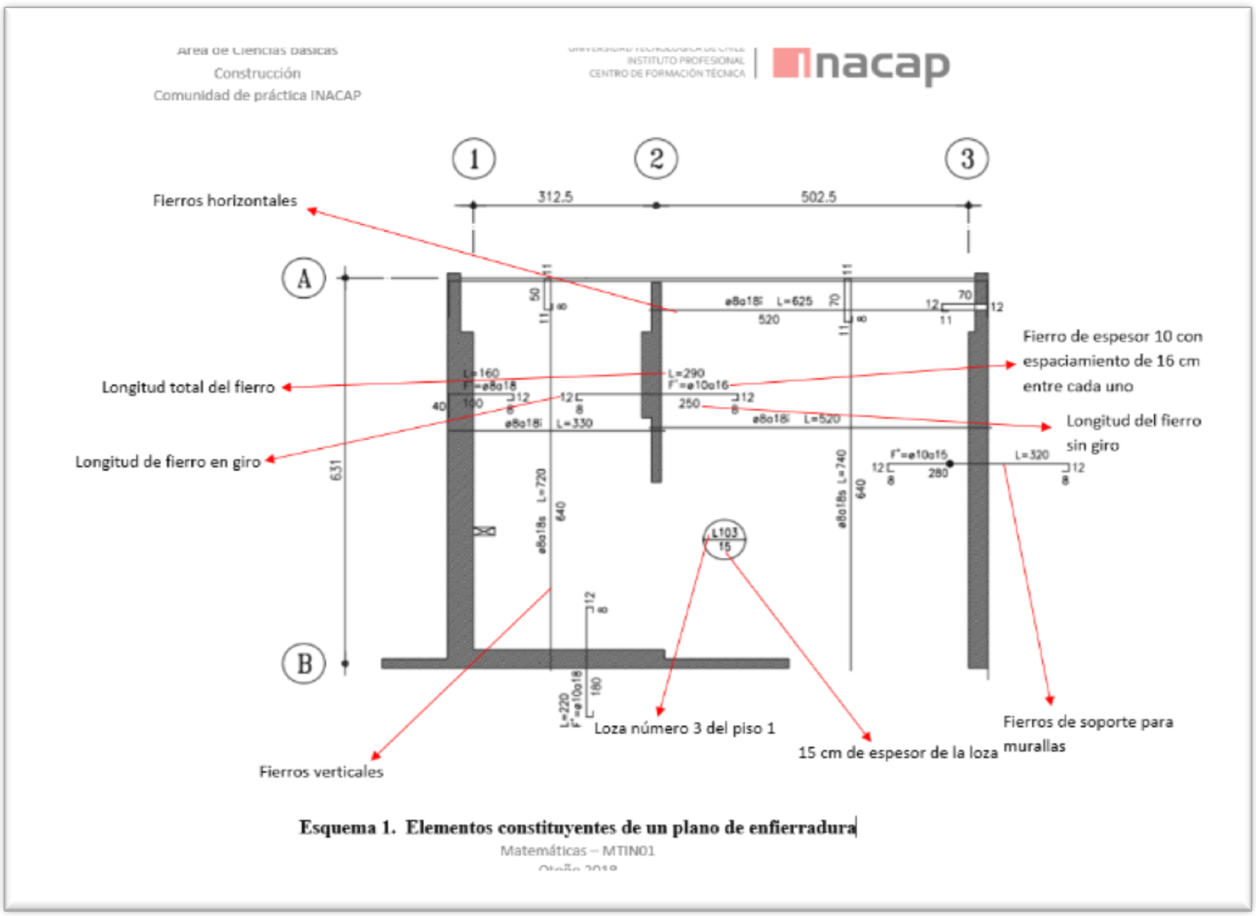
Por otra parte, los representantes del campo de la ingeniería centran su atención en la utilidad de cada uno de los elementos de estudio, en este sentido, buscan responder siempre a la pregunta: ¿para qué se utiliza eso? y, constantemente están relacionando los contenidos matemáticos con alguna aplicación dentro de su propia ingeniería. Este campo generó en un primer momento muchas discusiones en cuanto al futuro y las implicaciones de cada una de las actividades matemáticas que se estaban proponiendo en la comunidad, en tanto muchos de los elementos de estudio tienen sentido y cobran mucha relevancia en un contexto ficticio; sin embargo, la Comunidad de Práctica INACAP, trabajó sobre un contexto real, particularmente con una práctica conocida en Construcción como la cubicación, en esta medida, fueron los ingenieros los que detectaron en primer momento que no todos los elementos que se querían estudiar podían abordarse de la manera tradicional o con los parámetros usuales a los que se utilizan en las aulas regulares, permitiendo un dialogo continuo con los demás campos y generando lo que anteriormente se describió como un rediseño del dME.

Finalmente, en el discurso de los representantes del campo de la Matemática Educativa es claro el reconocimiento del aprendizaje de las matemáticas como un proceso de construcción social, en el que se deben tener en cuenta tanto el contexto de los estudiantes como las vivencias que dentro y fuera del aula se tienen, de ahí que por ejemplo en la discusión se plantearan hechos históricos como desencadenantes de una actividad matemática, tal como las distintas representaciones de una función, buscando además, que tal argumento de construcción fuera protagonista en la situación que se diseñaba.

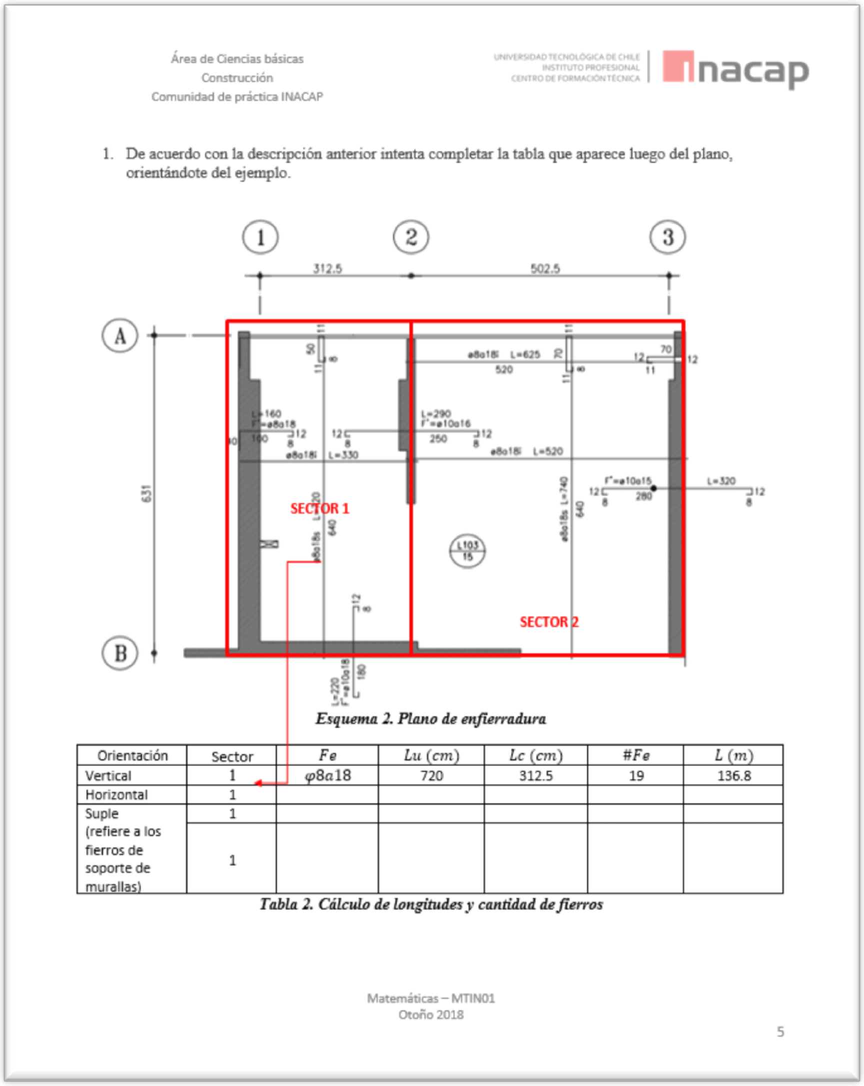
Se concibe que hay un carácter social dado por el proceso de construcción mediante el cual se accede al conocimiento, que difiere de la perspectiva sociológica y centra su atención en las actividades del ser humano derivadas a la educación, así por ejemplo se entiende que para construir en matemáticas se requieren significados, argumentos y procedimientos que problematicen el saber y den al estudiante una mirada crítica sobre lo que está estudiando, de modo que sea él mismo quien discierna sobre su conocimiento y resignifique los elementos que en cualquier lugar se crean con relación a las matemáticas.

Diseño de situaciones

Como segundo gran resultado, la comunidad logró construir material para cada una de las sesiones de clase que se planificaron, en esta medida, es importante destacar que cada una de las actividades, plantea la construcción de un objeto matemático sin centrarse en el objeto, sino rescatando la propia epistemología de la carrera de Ingeniería en Construcción. Un ejemplo de las actividades realizadas se presenta en las siguientes gráficas.



Gráfica 2. Ejemplos situaciones de aprendizaje. Diseño propio



Área de Ciencias básicas
Construcción
Comunidad de práctica INACAP

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE CHILE INSTITUTO PROFESIONAL CENTRO DE FORMACIÓN TÉCNICA | inacap

1. De acuerdo con la descripción anterior intenta completar la tabla que aparece luego del plano, orientándote del ejemplo.

Esquema 2. Plano de enfierradura

Orientación	Sector	Fe	$Lu\ (cm)$	$Lc\ (cm)$	$\#Fe$	$L\ (m)$
Vertical	1	$\varphi 8a18$	720	312.5	19	136.8
Horizontal	1					
Suple	1					
(refiere a los fierros de soporte de murallas)	1					

Tabla 2. Cálculo de longitudes y cantidad de fierros

Matemáticas – MTIN01
Otoño 2018

5

Gráfica 3. Ejemplos situaciones de aprendizaje. Diseño propio

Conclusiones

Las Comunidades de Práctica enriquecen el diálogo entre campos disciplinares y se constituyen en espacios para la reflexión pedagógica, el Rediseño del discurso Matemático Escolar y la problematización del Saber Matemático Escolar; en esta medida, la consolidación de estos espacios abre un abanico de posibilidades para las instituciones educativas, entre las cuales se encuentran por ejemplo: (a) el trabajo colaborativo entre pares académicos, (b) los procesos de formación permanente de cada uno de los docentes, pues a través del dialogo permiten su reflexión e introspección para el mejoramiento continuo y (c) la transversalidad de los saberes escolares, lo cual es fácilmente escalable a diferentes disciplinas, dándole un valor al conocimiento desde el reconocimiento de sus usos y las prácticas que lo acontecen.

El diálogo entre campos disciplinares permite una visión holística del problema de la construcción social del conocimiento matemático y de cualquier otro tipo de conocimiento, pues en la medida en que las comunidades convoquen a diferentes actores educativos y gestores de conocimiento, el producto final será cada vez de mejor calidad; la transversalidad y la multidisciplinariedad, cobrarán acá un particular sentido, en tanto a través del otro, cada uno de los profesores se pueda nutrir y empoderar de su propio conocimiento para poder entablar una conversación.

Basados en la idea de comunidad de Cordero, Méndez, Parra, y Pérez (2014), se evidencia en estos espacios de dialogo o comunidades de práctica, elementos como: la reciprocidad, la intimidad y la localidad; en tanto, (1) existe un compromiso mutuo, (2) hay un uso propio del conocimiento que se pone en juego y (3) hay coincidencia en ideas, jerga disciplinar, trabajo u oficio. Por ende, partiendo del compromiso propio de cada uno de los profesores y a través de sus conocimientos, se puede lograr un cambio en los paradigmas tradicionales y una mirada completa al problema de la educación, lo cual transita desde una educación tradicionalista centrada en el objeto a una nueva visión de esta, en la que todos los sujetos se sientan incluidos en el proceso de construcción, y desde allí, aporten a su propia formación.

Finalmente es posible indicar en este momento que la presente investigación continuará en el segundo semestre de 2018, en una fase de escalabilidad, análisis y transferencia a diferentes sedes de la misma universidad y se experimentará la creación de la misma en otras áreas del conocimiento, inicialmente el área de inglés.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2004). *Una epistemología de los aspectos periódicos de la función en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (1990) C*ategorías relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas. Simbiosis y predación entre las nociones de "el praediciere" y "lo analítico*". Tesis Doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Editorial Gedisa, S.A.

Cordero, F. (1994). Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar. Tesis Doctoral. México: Cinvestav.

Cordero, F., Méndez, C., Parra, T., y Pérez, R. (2014). Atención a la Diversidad. La Matemática Educativa y la Teoría Socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 71-90.

Cordero, F. (2016) La función Social del docente de matemáticas: Pluralidad, Transversalidad y Reciprocidad. *Actas de la XX Jornadas de Educación Matemática. Instituto de Matemática Aplicada*. Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, diciembre 2016, Chile.

Dijk, T. A. (1999). *El análisis crítico del discurso*. Anthropos (Barcelona), 186, septiembre-octubre, pp.23-36

Farfán, R. (2012) *Socioepistemologia y Ciencia. EL caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

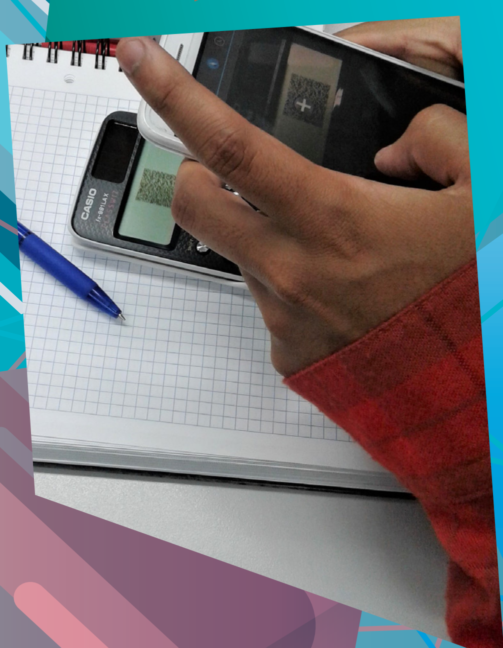
Montiel, G. (2005) *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. México: CICATA del IPN

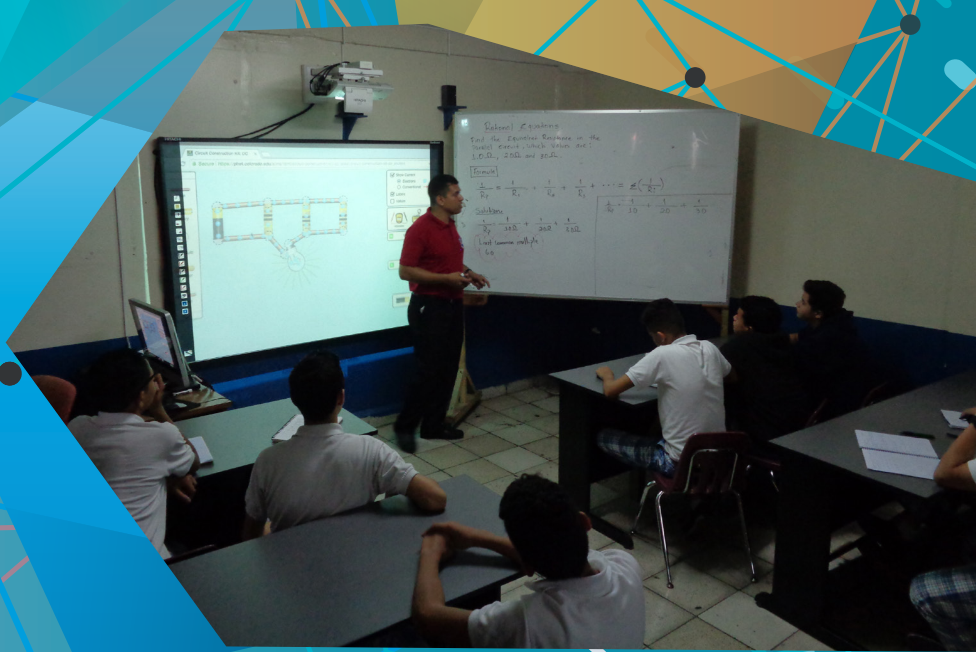
Reyes, D. (2016) *Empoderamiento Docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Editorial Gedisa. México

Vargas, J. (2016) *Caracterización de los campos de formación del profesor de matemáticas. Un estudio para el desarrollo de la identidad disciplinar*. Tesis de Maestría. No publicada. Universidad de Santiago de Chile – USACH. Santiago de Chile, Chile.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS





VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

USO DE DESMOS PARA LA MODELACION MATEMATICA COMO APOYO AL PROCESO ENSEÑANZA- APRENDIZAJE EN EL AULA: EL CASO DE LAS ECUACIONES

USE OF DEMOS FOR MATHEMATICAL MODELING AS SUPPORT TO THE TEACHING-LEARNING PROCESS IN THE CLASSROOM: THE CASE OF THE EQUATIONS

José Vicente Samacá Ramírez, Edelmira Ochoa Camacho
Universidad Santo Tomás, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Colombia)
jose.samaca01@usantoto.edu.co, edelmira.ochocamacho@uptc.edu.co

Resumen
Este artículo presenta, el reporte de la realización de un taller, con un grupo de docentes asistentes a Relme 32, en la interacción con ecuaciones e inecuaciones para la modelación de dibujos (por ejemplo, un payaso) con uso del paquete informático DESMOS. Para su desarrollo se planteó una metodología activa que comprendió tres momentos: 1) sensibilización: aspectos teórico- prácticos; 2) creación: los participantes de manera individual realizaron un diseño a papel y lápiz para luego implementarlo en DESMOS; 3) reflexión: los participantes socializaron las actividades realizadas, así como sus comentarios y reflexiones. Para los docentes de matemáticas asistentes al Relme32, la participación en este tipo de talleres con el uso de tecnologías (DESMOS), les permite resignificar sus prácticas en el aula y crear ambientes de aprendizaje contextualizados.

Palabras clave: ecuación, DESMOS, matemáticas, aprendizaje, docentes

Abstract
This article presents the report of the realization of a workshop, with a group of teachers attending Relme 32, in the interaction with equations and inequations for the modeling of drawings (for example, a clown) with the use of the DESMOS software package. For its development, an active methodology was proposed that comprised three moments: 1) sensitization: theoretical-practical aspects; 2) creation: the participants individually made a paper and pencil design and then implement it in DESMOS; 3) reflection: the participants socialized the activities carried out as well as their comments and reflections. For the teachers of mathematics attending the Relme32, participation in this type of workshops with the use of technologies (DESMOS), allows them to re-signify their practices in the classroom and create contextualized learning environments.

Key words: equation, DESMOS, mathematics, learning, teachers

Introducción

El presente taller se propuso como respuesta de un proceso de investigación, que tuvo como objetivo, evaluar las creencias y actitudes presentes en los estudiantes de Ingeniería Civil de una universidad, en la construcción de modelos matemáticos con el uso de dispositivos móviles. Los resultados reclaman la necesidad de conocer cómo aprenden los estudiantes las matemáticas, y a la vez, se reafirma el uso de recursos tecnológicos como herramientas de apoyo que motiven el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas. En este caso, la modelación de objetos de la naturaleza con expresiones algebraicas permitirá al estudiante interactuar con los diferentes tipos de ecuaciones (lineal, cuadrática, cubica, cónicas, etc.). Por lo tanto, el taller se propuso atraer la atención de un grupo de docentes asistentes a Relme32 a la interacción con ecuaciones e inecuaciones para la modelación de dibujos (p.e un payaso) con uso del paquete informático DESMOS. Para el desarrollo del taller se define, ecuación como "una igualdad entre dos expresiones matemáticas formadas por datos conocidos e incógnitas", y expresión algebraica como: "expresión en la que aparecen números y letras combinadas con operaciones aritméticas. Por ejemplo, $x^2 - 2x + 3$ es una expresión algebraica" (Diccionario esencial Matemáticas, 2011, p. 145).

La calculadora gráfica DESMOS (DESMOS, 2014), es una herramienta para Windows que requiere internet, y para Android, no requiere internet por ser instalable en tableta o celular la cual permite a los usuarios graficar ecuaciones y tablas de datos, explorar transformaciones y muchas más operaciones matemáticas con procedimientos sencillos y didácticos mediante deslizadores (variable que oscila en un intervalo dado), los cuales permiten ver movimientos de ecuaciones tanto en el eje x como en el eje y. (Samacá-Ramírez, Monsalve-Pulido y Aponte-Novoa, 2016).

Se pretendió la reflexión por parte de los participantes en el taller, frente al proceso enseñanza - aprendizaje de las matemáticas con el uso de DESMOS, con el propósito de sugerir su aplicabilidad en el aula de clase y así continuar fortaleciendo la didáctica de la matemática, la utilización de recursos cognitivos en los estudiantes (D'Amore, 2006), el gusto por la matemática, y su impacto en la sociedad (Jiménez, 2010). El Foro Educativo Nacional (2014), considera que

> La formación debe incluir aspectos específicos de la práctica de enseñar y, aspectos relativos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por último, se destaca la necesidad de que se aprenda en y desde la práctica de enseñar matemáticas, toda vez que los docentes requieren aprender en contextos cercanos a los que se espera desarrollen sus prácticas. (p. 12)

Metodología del taller

Este taller planteó la base de su propuesta a partir de los resultados de una investigación realizada en Tunja, Boyacá, relacionada con la construcción de modelos matemáticos con el uso de dispositivos móviles en un grupo de estudiantes de una universidad. El taller se dirigió a un grupo de docentes participantes en Relme32 para su desarrollo; y usó una metodología activa (Espejo y Sarmiento, 2017), que implicó a los participantes en el taller en "el hacer y en la reflexión sobre lo que están haciendo" (p.6). Comprendió tres momentos para dos sesiones de hora y media: sensibilización, creación y reflexión frente al proceso enseñanza – aprendizaje de las matemáticas y el uso de tecnologías para mejorar las prácticas en el aula.

Momento 1. Sensibilización: exposición teórica por parte de los talleristas e interacción con el software.
Momento 2. Creación: los participantes en el taller de manera individual realizaron un diseño sencillo a papel y lápiz de un dibujo (payaso, flor, etcétera).
Momento 3. Reflexión: los participantes en el taller socializaron con sus compañeros el trabajo realizado, así como sus comentarios y reflexiones al respecto.

Desarrollo del taller

A continuación, se exponen las actividades más relevantes para cada uno de los momentos propuestos para el desarrollo del taller:

Momento 1: Sensibilización. Este momento comprendió: exposición teórica por parte de los talleristas e interacción con el software.

Se realizó una exposición teórica formalizada acerca de la clasificación de las expresiones algebraicas: polinomios, cónicas y expresiones racionales que involucraban ecuaciones e inecuaciones para su posterior aplicación; a su vez se mostró el movimiento de las expresiones tanto en el eje *x* como en el eje *y*, en el programa DESMOS.
Se mostraron algunos ejemplos en los cuales se utilizó DESMOS (Fig. 1, Fig. 2 y Fig.3):

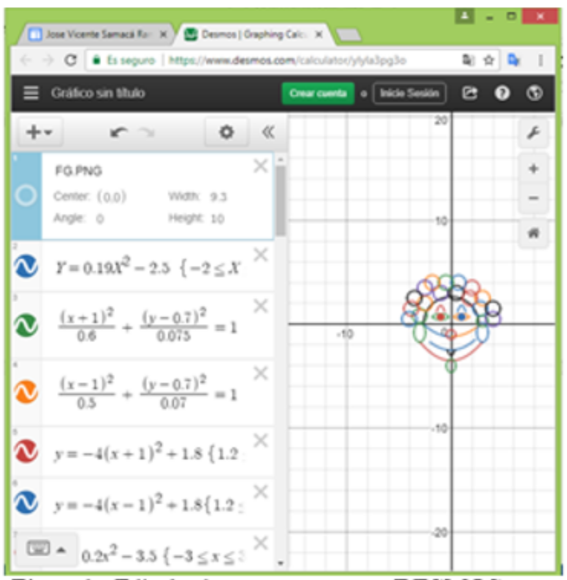


Figura 1. Dibujo de un payaso con DESMOS
Fuente: https://www.desmos.com/calculator/ylyla3pg3o

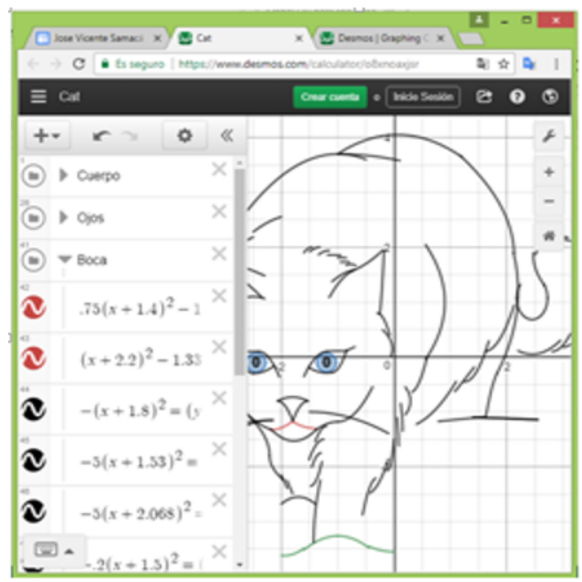


Figura 2. Dibujo de un gato con DESMOS
Fuente: https://www.desmos.com/calculator/o8xnoaxjsr

Figura 3. Dibujo del escudo de Real Madrid
Fuente: https://www.desmos.com/calculator/j8yfmdbtl2

Interacción con el software: en una sala de informática los participantes de manera individual realizaron reconocimiento del programa DESMOS para apropiarse del manejo y uso (deslizadores, =, ≤, ≥). A continuación, de acuerdo con las orientaciones dadas para el uso del software los participantes elaboraron un plano cartesiano y modelaron una función parabólica, base para las nuevas parábolas que se desplazan a la derecha e izquierda, arriba y abajo; este mismo proceso se realizó con la circunferencia y elipse. Se utilizó DESMOS por ser un programa orientado específicamente para graficar expresiones algebraicas implícitas y explicitas, lo cual es una fortaleza a la hora de la interacción entre el usuario y la máquina.

*Momento 2***:** Creación. Los participantes de manera individual realizaron un diseño sencillo de un dibujo a papel y lápiz (payaso) y en Paint (flor): se sugirió dibujar por ejemplo un payaso por su riqueza en curvas de la cara, pelo, orejas, entre otras características. Pero no solamente diseñaron payasos sino también flores entre otros dibujos, a ser graficados con expresiones algebraicas, esto en aras de propiciar la creatividad de las personas (Fig. 4 y Fig. 5).

Figura 4. Diseño de un payaso a papel y lápiz por un participante en el taller

Figura 5. Diseño de una flor en Paint por un participante

Una vez seleccionado y plasmado el modelo en el papel o en Paint se procedió a importar estos dibujos al programa DESMOS, con el que se fueron identificando los tipos de ecuaciones correspondientes a cada elemento característico, por ejemplo, del payaso: la forma de la cara, el pelo, etcétera; de la flor, la forma de los pétalos, del tallo, etcétera. Luego, con ayuda de los deslizadores del software, se identificaron los modelos de parábolas a partir de la función principal, también se enfatizó en los símbolos =, ≤ e ≥ para el manejo de las figuras coloreadas (Fig. 6 y Fig. 7).

Durante este momento los asistentes estuvieron acompañados por los talleristas para resolver las dudas que pudieran surgir.

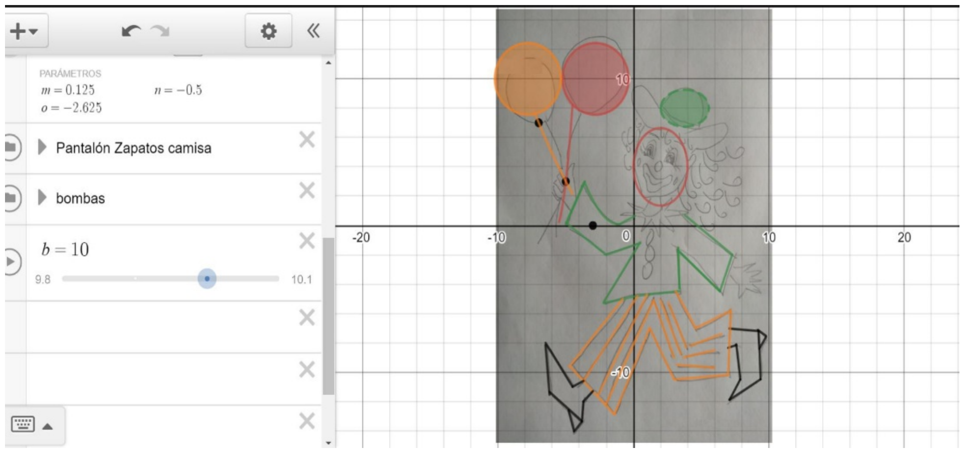


Figura 6. Payaso modelado en DESMOS por un participante

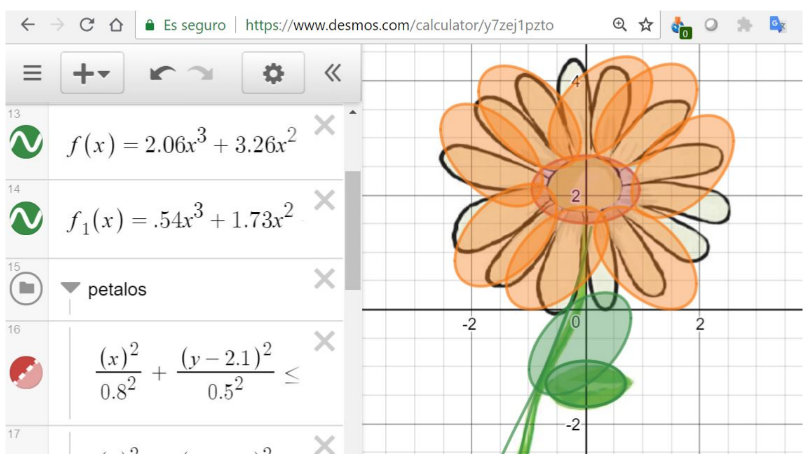


Figura 7. Flor modelada en DESMOS por un participante.

Momento 3: Reflexión. Los participantes socializaron con sus compañeros las actividades realizadas, así como sus comentarios y reflexiones al respecto.

A continuación, se exponen algunos comentarios y reflexiones relacionados con el desarrollo del taller por parte de los participantes (P):

> P 1: “DESMOS es un programa que funciona en varios sistemas operativos (celular y Android) y de fácil acceso a la comunidad escolar. Sus funciones principales, son la modelación de expresiones algebraicas y los ajustes polinómicos”.

> P 2: “Al diseñar y modelar dibujos, permite al estudiante fortalecer sus conocimientos de ecuaciones y sus traslaciones en el plano cartesiano”.

P 3: "Este programa no requiere de conocimientos avanzados para su aplicación en el sector educativo de nuestro país".

P4: "La disponibilidad de los deslizadores permite a la persona interactividad con las funciones básicas como polinomios, por ejemplo, graficar un modelo de un polinomio y moverlo con respecto al origen en cualquier dirección".

P5: "El programa DESMOS puede ser usado por su fácil manejo, para docentes y estudiantes en el aula, de tal manera que el estudiante solo digita la expresión algebraica".

Consideraciones finales

El trabajo realizado en el taller permitió a los participantes asumir actitudes críticas y reflexivas frente a su práctica pedagógica en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en el álgebra y su representación gráfica en el plano cartesiano.

Los dibujos como excusa para atraer la curiosidad de los participantes, en la modelación de ecuaciones, permitió efectuar las operaciones básicas y movimientos en el plano cartesiano (arriba, abajo, derecha e izquierda) e involucrar graficas definidas en un intervalo. En el caso de la flor, por ejemplo, se hacen transformaciones de la ecuación de la elipse y se crean los demás pétalos de la flor, asimismo, el tallo se obtiene a través de la ecuación de una recta definida en un intervalo. En el caso del payaso, mientras tanto, se pueden evidenciar rectas, parábolas, circunferencias e incluso desigualdades.

Para los docentes de matemáticas asistentes al Relme32, la participación en este tipo de talleres con el uso de tecnologías (DESMOS), les permite re-significar sus prácticas en el aula y crear ambientes de aprendizaje contextualizados. Gamboa (2017), señala que "el uso de varios sistemas de representación y de la tecnología permiten dar significado concreto a los conocimientos matemáticos". (p.22)

Referencias bibliográficas

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio.

DESMOS. (2014). Obtenido de https://www.desmosDESMOS.com

Diccionario esencial Matemáticas. (2011). *Definiciones, ejemplos, ejercicios, gráficos.* Editorial Larousse. Segunda edición. Barcelona. Disponible en: https://es.scribd.com/doc/309820041/Matematicas-Diccionario-Esencial-de-Matematicas-pdf

Espejo, R. y Sarmiento, R. (2017). *Manual de apoyo docente. Metodologías activas para el aprendizaje*. Disponible en: http://www.ucentral.cl/prontus_ucentral2012/site/artic/20170830/asocfile/20170830100642/manual_metodologias.pdf

Foro Educativo Nacional. (2014). *Ciudadanos matemáticamente competentes*. Disponible en: https://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-342931_recurso_1.pdf

Gamboa, R. (2017). *Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.* Disponible en: http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno3/cuaderno3_c1.pdf

Jiménez, E. A. (2010). *La naturaleza de la Matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase.* núm. 13. Tunja: UPTC. Obtenido de http://virtual.uptc.edu.co/revistas2013f/index.php/educacion_y_ciencia/article/view/765

Samacá-Ramírez, J., Monsalve-Pulido, J., y Aponte-Novoa, F. (2016). *Los dispositivos móviles como herramienta de apoyo en la comprensión de modelos matemáticos en el aula.* 3(1): 32-42

FUNCIÓN EXPONENCIAL: UNA EXPERIENCIA MEDIADA POR TECNOLOGÍA DIGITAL CON ESTUDIANTES DE CARRERAS DE HUMANIDADES

EXPONENTIAL FUNCTION: A DIGITAL TECHNOLOGY MEDIATED EXPERIENCE WITH STUDENTS OF HUMANITIES DEGREE COURSES

Flor Carrillo, Cristian Julian, Jesús Flores
Pontificia Universidad Católica del Perú, Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP (Perú)
f.carrillo@pucp.edu.pe, ecjuliant@pucp.pe, jvflores@pucp.pe

Resumen
En el artículo se muestra una tarea que permite trabajar la noción de función exponencial en un primer curso de matemáticas, dirigido a estudiantes de carreras de humanidades de una universidad particular de Lima-Perú. Se consideran aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como marco teórico y la metodología es cualitativa. Para la resolución de la tarea, se usó la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz*, en la que se identificó la coordinación de los diferentes registros de representación semiótica de los estudiantes cuando resuelven una tarea sobre función exponencial. Los resultados revelaron que coordinaron los registros algebraicos y lengua natural. Además, se evidenció la pertinencia de la mediación de la tecnología.

Palabras clave: función exponencial, representaciones, calculadora

Abstract
The article shows a task that allows working the notion of an exponential function in a first mathematics course. It is addressed to students of humanities degree courses of a private university of Lima-Peru. We consider aspects of the Theory of Registers of Semiotic Representation as a theoretical framework; and we used a qualitative methodology. The scientific calculator Casio fx-991 ClassWiz is used to solve the task. In this task, we identified how the students coordinate the different registers of semiotic representation when they solve an exponential function task. The results reveal that the students coordinated the natural and algebraic language registers. In addition, the appropriate use of technology is evident.

Key words: exponential function, representations, calculator

Introducción

La investigación presenta una tarea elaborada que permite movilizar la noción de función exponencial, con estudiantes del curso matemática básica del primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad particular de Lima-Perú. La tarea que se presenta se elaboró tomando como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995), ya que define los distintos tipos de registros para un mismo objeto matemático, para nuestra tarea emplearemos los registro en lengua natural, tabular y algebraico; además se considera pertinente como mediador la calculadora científica Casio *fx-991 ClassWiz.* En cuanto a la metodología empleada es de corte cualitativo, en el sentido de Borba (2004), quien explica la eficacia de este tipo de metodología cuando se realizan investigaciones en Educación Matemática.

Este artículo se inicia con la presentación de aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica y aspectos metodológicos a emplear en el análisis de la tarea, luego una reflexión sobre la pertinencia de la tecnología digital, después se realiza una breve descripción de la experiencia realizada en el aula para finalmente presentar el análisis y resultados de la investigación.

Teoría de registros de representación semiótica: aspectos considerados

Para el análisis de la tarea se toma como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) porque según el autor, aprender matemáticas involucra actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas; además, afirma que en la actividad matemática se deberían coordinar diferentes registros de representación semiótica como el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro figural y el registro gráfico; en nuestro trabajo se pretende que los estudiantes participantes coordinen los registros de lengua natural y algebraico.

Con relación a la coordinación de registros, el investigador afirma que "la coordinación de muchos registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos, es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles" (Duval 2012, p. 5). También manifiesta que los tratamientos son las distintas transformaciones realizadas en una representación dentro de un mismo registro los cuales obedecen las reglas propias de la representación tales, representación de una curva, una función en el plano cartesiano (registro gráfico), expresiones algebraicas (registro algebraico) etc.; y que la conversión se realiza cuando la transformación es externa, es decir al cambiar de registro (Duval, 2012, p. 15).

En ese sentido, en la figura 1 se muestra las conversiones y tratamientos de las diferentes representaciones de la función exponencial y cómo estos registros se coordinan.

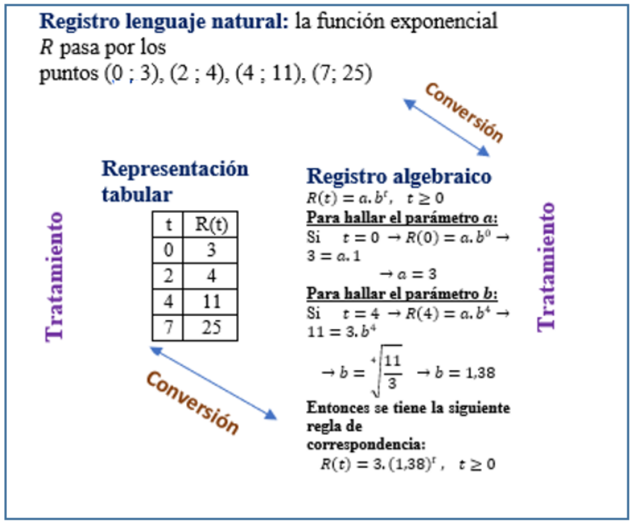


Figura 1. Tratamientos y conversiones en las representaciones de la función exponencial

Como se observa en la figura 1 la tarea proporciona información sobre cuatro puntos de paso de la representación de la función exponencial R (representación en lenguaje natural), lo que permite plantear una expresión matemática que describe a esa función. También se distingue la representación tabular a partir del registro en lenguaje natural. Luego, se realiza la *conversión* de la representación en tablas (registro tabular) al registro algebraico en que por medio de relaciones y operaciones algebraicas se determinan los parámetros a y b esto muestra los *tratamientos* necesarios en el registro algebraico.

En la representación algebraica resultante es posible identificar los puntos de paso de la función R que se han empleado lo que se espera es la coordinación de los registros de lengua natural y algebraico. Como ese proceso es cíclico, es posible que se realice en forma inversa. Es en ese sentido, el presente trabajo tiene como foco analizar la coordinación de los registros lengua natural, tabular y algebraico que realizan los estudiantes al desarrollar la tarea en la que utilizan calculadora científica.

Con respecto a la metodología de la investigación, es cualitativa ya que las investigaciones cualitativas expanden la información de un tema significativo de investigación y estudia el todo integrado como una unidad en distintas tareas. Según Taylor y Bogdan (2000), la metodología cualitativa es inductiva ya que el investigador ve el escenario y a las personas en una perspectiva holística; las personas, los escenarios o grupos no son reducidos a variables sino son considerados como un todo. Además, de acuerdo con Borba (2004), la investigación cualitativa prioriza los procedimientos, la descripción y el análisis.

Calculadora científica como interfaz

En este estudio se explora el uso de la tecnología digital, calculadora *Casio fx-991 ClassWiz***,** con la finalidad de favorecer la movilización del concepto función exponencial en estudiantes de los primeros ciclos de las carreras de humanidades. Para ello, se presentó a los estudiantes una tarea de función exponencial dada en registro en lengua natural, siendo el objetivo determinar la regla de correspondencia de dicha función, es decir, la conversión al registro algebraico.

Para el desarrollo de la tarea se considera necesario incorporar progresivamente el uso de este modelo de calculadora debido a que sus funciones y comandos permiten que se realicen diferentes tratamientos, etc. Por ejemplo, permite realizar conversiones, visualizar su representación algebraica y gráfica en línea mediante el uso de código QR, esto gracias a que con esta calculadora se puede interactuar con otras tecnologías como los teléfonos inteligentes, tabletas, etc.

Es en ese sentido, pensamos que el uso de esta tecnología permite simplificar procesos algorítmicos y orientar la atención a la exploración, manipulación, contraste e interpretación de los resultados, para que el estudiante se concentre en la comprensión de la tarea y en el análisis de la solución de esta, pues favorece la construcción de un nuevo ambiente de aprendizaje. Al respecto Trouche (2005), expresa que tareas con el uso de calculadoras necesitan ser construidas por los docentes. Además, señala que la tecnología no simplifica el trabajo del docente ni del estudiante, sino que ayuda a la construcción de conocimiento matemático en un ambiente diferente al lápiz y papel.

A continuación, se presenta la tarea, su desarrollo esperado y lo efectivamente realizado por el estudiante que es sujeto de análisis en este artículo.

Tarea sobre función exponencial

La experiencia se realizó con estudiantes de carreras de humanidades de una universidad privada de Lima-Perú, cuyas edades van desde los 16 a 18 años. Se trabajó en una sesión, primero se les presentó una tarea sobre función exponencial en la que se les pidió determinar la regla correspondencia donde era indispensable el uso de la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz,* además se les proporcionó una ficha con el procedimiento a seguir para el desarrollo de dicha tarea.

Cabe resaltar que los estudiantes del curso de matemática básica trabajaron de manera individual, durante 20 minutos. La tarea fue aplicada a un total de 20 de estudiantes de los que, para la presente comunicación, presentamos la producción de uno de ellos, a quien llamamos Juan. La selección de este estudiante se realizó debido a que presentaba una asistencia regular a las clases y sus notas están sobre el promedio de las notas del horario. En primer lugar, se presentó una tarea de función exponencial dada en lengua natural y se mediado por el uso de calculadora Casio fx-991 ClassWiz se pide hallar la regla de correspondencia de dicha función. Luego, se propuso la ruta a seguir por cada estudiante para lograr la solución de lo solicitado. El objetivo de esta tarea es que los estudiantes coordinen el registro de lengua natural y algebraico. Cabe resaltar que la tarea debe ser desarrollada utilizando la tecnología digital y/u otros medios que tengan a su alcance. La tarea propuesta a los estudiantes, la mostramos en la figura 2 a continuación.

Función exponencial y calculadora

En los comienzos de la década de 1990, *Flovic S.A.* entró al mercado de venta al por menor con la Flovic Presario, y fue uno de los primeros fabricantes de a mediados de los noventas en vender una PC a un precio inferior a mil dólares. El informe realizado de la compañía por el New York Times nos manifiesta lo siguiente: Ingresos de ventas de computadores *Flovic S.A.* (una marca ahora extinguida) son mostrados en la siguiente tabla, donde t representa años desde 1990. Obtenga el modelo exponencial para los datos.

t: años (1990 = 0)	0	2	4	7
$R\ (t)$: ingresos ($ billones)	3	4	11	25

- $\boldsymbol{R}(t)$ es aproximado.
  Dada la información, complete con 4 decimales: $R(t) = a(b)^t =$ ______________________________

Figura 2: Tarea propuesta a los estudiantes

La tarea propuesta (ver figura 2) exige que los estudiantes realicen la conversión del lenguaje natural al registro algebraico; es decir, a partir del enunciado empleen las interfaces de la calculadora para determinar la regla de correspondencia.

En esta parte, es necesario aclarar que la resolución de la tarea se realiza con apoyo e la calculadora.

A continuación, se muestra la propuesta del procedimiento esperado, con el uso de la calculadora:

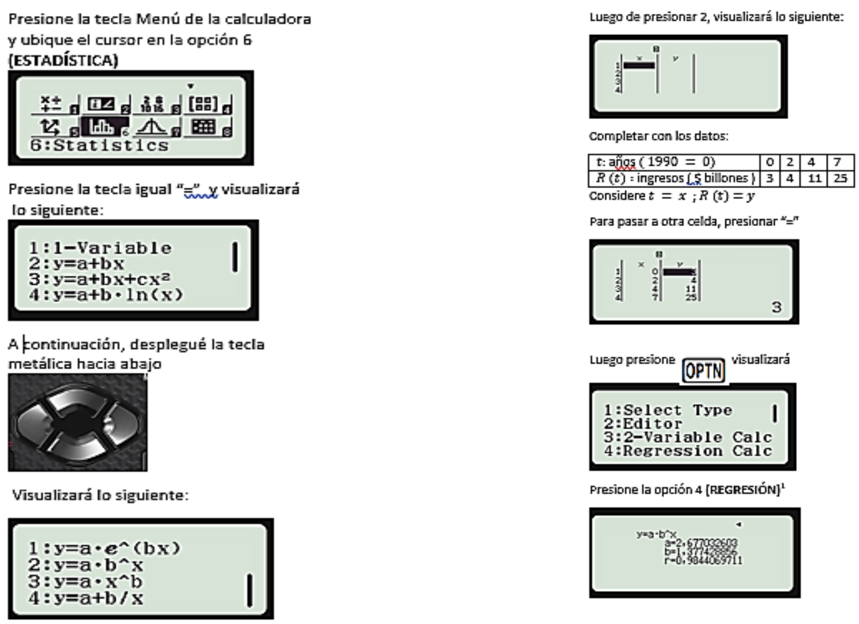


Figura 3: Procedimiento para la resolución de la tarea.

De acuerdo con el procedimiento realizado en la figura 3, se obtiene la regla de correspondencia de la función: $R(t) = 2{,}6770.(1{,}3774)^t,\ t \geq 0$

Análisis de la tarea

Para el desarrollo de la tarea es necesario que se realice una conversión (representación tabular) mediada por la calculadora; esto se puede observar de la secuencia anterior. En primer lugar, se debe identificar la forma de la expresión algebraica a la que se quiere llegar $y = a.b^x$, luego se debe trabajar en representación tabular (ingreso de datos de la tarea), finalmente, se obtienen los parámetros necesarios para resolver la tarea propuesta; es decir los valores de a y b.

En la aplicación de la tarea 17 de 20 estudiantes realizaron la conversión al registro algebraico. Por otro lado, algunos estudiantes desarrollaron la tarea empleando lápiz y papel.

En la figura 4, se presenta lo realizado por Juan, con el uso de la calculadora, en el proceso de resolución de la tarea de función exponencial.

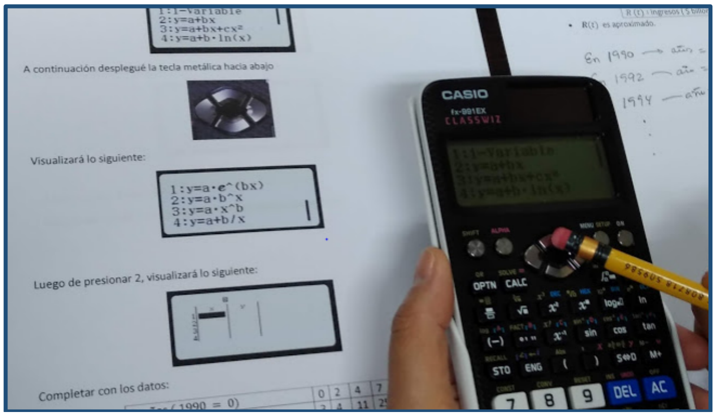


Figura 4: Procedimiento para la resolución de la tarea.

Se observa como Juan selecciona la forma de la ecuación que se desea modelar. Es decir que sigue las indicaciones dada en la ficha y luego ingresa los datos de la tabla en la calculadora (de acuerdo con la opción que se solicita).

A seguir, como se puede observar en la figura 5, el estudiante asocia la información del enunciado de la tarea, el tiempo dado en años con $t = 0, t = 1, t = 2$, etc. Es decir que interpreta el enunciado dado en lenguaje natural y lo lleva al registro tabular.

También, se observa que ingresa los datos y transcribe a la ficha los datos de la tabla de la calculadora.

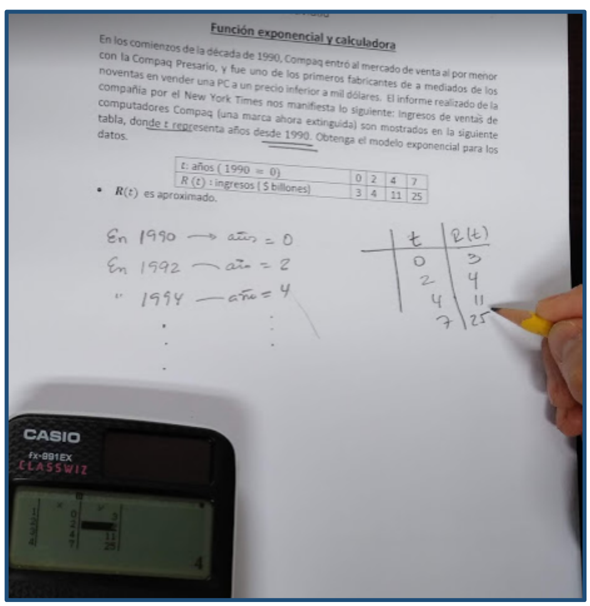


Figura 5: Ingreso de datos de la tarea.

Finalmente, después de continuar con todo el procedimiento propuesto, Juan llega a la respuesta esperada como podemos observar en la figura 6.

Figura 6: Respuesta de la tarea propuesta.

Por otro lado, el uso de la calculadora para el desarrollo de la tarea fue exitoso ya que todos los estudiantes tienen una gran facilidad para operar con aparatos tecnológicos, no mostraron dificultad alguna en el procedimiento, por lo contrario, podemos manifestar cuando realizan las cuentas con lápiz y papel continuamente presentan errores de operaciones y cálculos tanto aritméticos como algebraicos.

Una eficaz coordinación de los diferentes registros de representación de la función exponencial, en este caso registro en lengua natural cuando realiza el ingreso de los datos en la calculadora y el reconocimiento adecuado de los parámetros les permite determinar la regla de correspondencia para la función exponencial.

Algunas consideraciones finales

Como consecuencia del desarrollo de la tarea propuesta sobre la función exponencial, notamos que los estudiantes coordinaron el registro natural, tabular y algebraico. Además, los estudiantes lograron determinar la regla de correspondencia de la función exponencial haciendo uso de la interfaz ESTADISTICA (Statistics) de la calculadora.

Por otro lado, mediante tareas apropiadas es posible reconocer las diferentes reglas de correspondencia de la una función exponencial a partir de su representación natural. Por lo general, la enseñanza de funciones está, en la mayoría de los casos, enfocada con predominancia del registro algebraico dejándose de lado la representación en los registros natural y tabular. Es por ello que, se afirma que el hecho de presentar objetos matemáticos por medio de sus diferentes representaciones y coordinarlas entre sí permite atender a ciertas particularidades de aprendizaje de estudiantes, en función de sus estilos cognitivos.

El presentar la representación natural de la función R permitió que por medio de la secuencia presentada sea posible identificar los parámetros a y b para luego ser empleados en la representación algebraica, es decir en la regla de correspondencia de la función exponencial. Por otro lado, se puede evidenciar que la calculadora es un medio que permite movilizar conocimientos mediante la coordinación de diferentes registros de representación semiótica de la función exponencial. Por ejemplo, como la calculadora permite generar una tabla de datos (registro tabular) y luego con la opción REGRESIÓN permite realizar la conversión al registro algebraico.

Se piensa que al incorporar de manera progresiva el uso de la calculadora ClassWiz fx 991 se puede explorar las distintas funciones de sus interfaces, que son ideales para la enseñanza de diferentes contenidos matemáticos, ya que admite realizar la conversión entre los diferentes registros. Es por ello, que esta experiencia sirve de evidencia de la pertinencia del uso de la tecnología digital en tareas que favorezcan la exploración, indagación y conjetura de propiedades de los objetos matemáticos que se pueden representar con este medio tecnológico.

Agradecimientos

Agradecemos al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas a la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP), específicamente a la línea investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM por el apoyo brindado (actividad PO0068-001-1802-07). También agradecemos el apoyo brindado por el Sr. César Lau, quien lidera el equipo académico de *Casio Latinoamérica*, por sus aportes en las actividades con calculadoras científicas Casio del modelo *fx-991.*

Referencias

Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG*.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.

Taylor, S. y Bogdan, R. (2000). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Barcelona: Paidós. Recuperado de: https://asodea.files.wordpress.com/2009/09/ taylor-s-j-bogdan-r-metodologia-cualitativa.pdf

Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators.* New York, USA: Springer

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL: MEDIACIÓN DE LA CALCULADORA CIENTÍFICA

REAL FUNCTION OF REAL VARIABLE; MEDIATION OF THE SCIENTIFIC CALCULATOR

Jesús Victoria Flores Salazar; Verónica Neira Fernández; Flor Isabel Carrillo Lara; Tito Nelson Peñaloza Vara
Pontificia Universidad Católica del Perú- Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP-grupo TecVEM (Perú)
jvflores@pucp.pe, vneira@pucp.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe, a20123933@pucp.pe

Resumen
El artículo tiene como finalidad evidenciar cómo, por medio de la interacción con la calculadora científica Casio fx-991 ClassWiz, es posible movilizar conceptos y características de funciones reales de variable real, específicamente de la función cuadrática. La tarea que se analiza es una de las dos trabajadas en el curso corto realizado con profesores en formación continua en la que se presenta la descripción y análisis matemático y didáctico de la misma. Para ello, se toman aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica. En relación con la metodología, esta es cualitativa. Los resultados evidencian que al utilizar diferentes representaciones y la calculadora como medio tecnológico se favorece la movilización de conceptos sobre funciones reales de variable real.

Palabras clave: función cuadrática, formación docente, tecnología

Abstract
The paper aims at demonstrating how interacting with the scientific calculator Casio fx-991 ClassWiz makes it possible to mobilize concepts and characteristics of real functions of a real variable, specifically those of the quadratic function. One of the two tasks done in a short course carried out with teachers in continuous learning is analyzed to present its description, as well as its mathematical and didactic analysis. In order to do that, aspects from the Theory of Registers of Semiotic Representation are taken into account. The methodology is qualitative. Finally, it becomes evident that the use different representations, so the calculator is relevant as a technological means that favors the mobilization of concepts of real functions of a real variable.

Key words: quadratic function, teacher training, technology

Introducción

El trabajo tiene por finalidad evidenciar cómo, por medio de la interacción con la calculadora científica, es posible que docentes en formación continua movilicen conceptos y características de funciones reales de variable real. Se presenta en el artículo aspectos del curso dirigido a docentes en formación continua, quienes desarrollaron dos tareas mediadas por la calculadora científica *Casio ClassWiz fx-991.* Específicamente, se expone la tarea sobre función cuadrática y se realiza un análisis matemático y didáctico de la misma.

En cuanto a la función cuadrática, existen investigaciones como las de Surichaqui (2018), Ruiz et al. (2016), Salazar (2015) y Gómez (2011) y en las que la utilización de recursos tecnológicos (Ambientes de Representación Dinámica-ARD, Software con herramientas CAS, calculadoras científicas, entre otras) son presentados como medios para realizar tratamientos en las representaciones gráficas diferentes objetos matemáticos. Por ejemplo, las investigaciones de Gómez (2004, 2005) muestran que el uso de las calculadoras en el proceso de enseñanza y de aprendizaje no se utilizan sólo como herramientas de cálculo, sino como un medio en contextos de problemas para movilizar conocimientos matemáticos y señala que, para ello, los docentes deben estar familiarizados con la tecnología y con la manera en cómo deben incorporarla a sus clases.

Es importante aclarar el uso de la tecnología digital (Calculadora *Casio ClassWiz fx-991*) con la finalidad de favorecer la movilización del concepto función cuadrática. Se considera necesario incorporar progresivamente el uso de este modelo de calculadora, debido a que sus interfaces, tales como tabla y estadística ideales para los diferentes niveles de educación, permite la visualización en línea mediante el uso de código *QR,* es decir, que los gráficos y otros elementos se pueden visualizar en las pantallas de los teléfonos inteligentes o tabletas.

En ese sentido, se afirma que la tecnología puede simplificar procesos algorítmicos (técnicos) y enfocar la atención en la exploración, manipulación, contraste e interpretación de los resultados de cálculo, con lo que es posible realizar conjeturas de las propiedades y/o conceptos matemáticos involucrados en la tarea, ya que permite que la atención se centre en el análisis de la solución de esta.

Al respecto, Trouche (2004) manifiesta que en el trabajo con calculadoras necesita ser construido por los docentes de manera que potencien en sus estudiantes actitudes favorables y una mejor relación con el conocimiento matemático. En cuanto a los aspectos del análisis de la tarea, se utiliza como base teórica aspectos de la teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (2004) y la metodología utilizada es cualitativa.

Aspectos teóricos y metodológicos

En cuanto a la teoría de Registros de Representación Semiótica, Duval (2004) aclara que un objeto matemático no es factible de ser manipulado directamente sino a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representación semiótica. Según el autor, dichos registros son: Lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

De acuerdo con Duval (1995), para que el aprendizaje de un objeto matemático exista, necesariamente el sujeto debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica distintos. Es en este salto cognitivo donde el sujeto articula las distintas aprehensiones de la representación en un registro, movilizando nociones y conocimientos previos mediante el planteamiento de estrategias que permitan dar solución a la situación, lo cual evidencia, según el autor, el aprendizaje del objeto matemático. Además, el autor definió las aprehensiones perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva en el registro figural. En este artículo, se toman los aportes Peñaloza y Salazar (2018) en cuanto a las aprehensiones en el Registro Gráfico Dinámico, RGD.

Las distintas transformaciones realizadas en una representación dentro de un mismo registro se denomina, según el autor, *tratamientos*, los cuales obedecen las reglas propias de la representación, tales como operaciones algebraicas (Registro algebraico), traslación y rotación de figuras (Registro figural), aproximación gráfica de la recta secante a la tangente de una curva (Registro gráfico), entre otros, y al cambiar la representación de un registro de representación a otro distinto se denomina *conversión*.

Por ejemplo, la figura 1 muestra los registros de representación semiótica de la función cuadrática, así como las conversiones entre sus representaciones y los tratamientos en el registro algebraico.

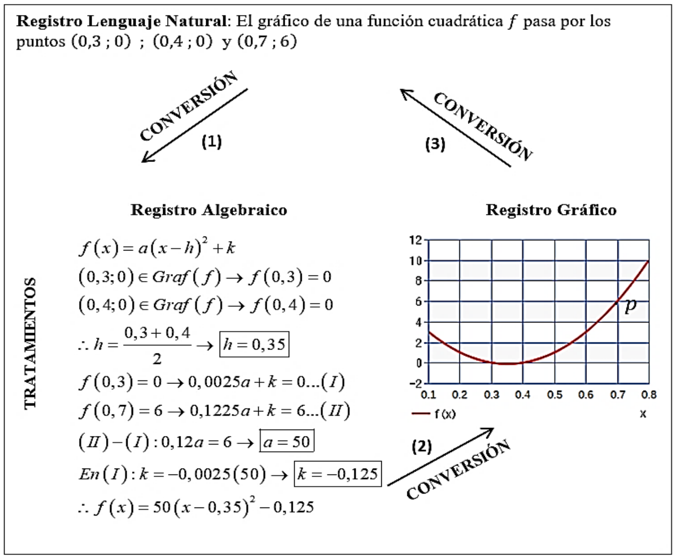


Figura 1. Tratamientos y conversiones en las representaciones de la función cuadrática
Fuente: Adaptado de Duval (2004, p.146)

En la figura 1 se observa que la información proporcionada sobre tres puntos de paso de la representación de la función cuadrática f (representación en lenguaje natural) permite plantear un modelo matemático que representa a dicha función con constantes desconocidas [conversión (1)], donde, por medio de los datos y las leyes del Álgebra, se determinan los valores de las constantes (tratamientos en el registro algebraico). Dada la representación algebraica de f, por medios tecnológicos (lápiz y papel, software graficador, calculadoras, entre otros), es factible representarla gráficamente [conversión (2)] y de la representación gráfica resultante puede identificarse los puntos de paso [conversión (3)], dando a este proceso un comportamiento cíclico, el cual también puede ser realizado en forma inversa ($3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$).

La representación de f en el registro gráfico, mostrado en la figura 1, ha sido realizada mediante la calculadora *ClassWiz fx-991*. Como se observa, no están representados los ejes X e Y, pero para propósitos del minicurso consideramos que los ejes cartesianos están *ocultos* o *fuera de la pantalla* y en los márgenes izquierdo e inferior se indican las intersecciones de cada cuadrícula guía con los ejes, por lo cual las coordenadas del punto p son $(0,7; 6)$.

En relación con los aspectos metodológicos, el estudio es de corte cualitativo. En ese sentido, Borba (2010), fundamentado en Bogdan y Biklen, describe las características de una investigación cualitativa y señala que una investigación cualitativa tiene la fuente directa de los datos en el medio natural; una investigación cualitativa es descriptiva; los investigadores cualitativos tienen más interés por el proceso que a los resultados o productos.

Procedimientos metodológicos

Para el desarrollo del curso, por medio de la utilización de la calculadora *ClassWiz fx-991*, se propuso la tarea sobre función cuadrática a los docentes participantes para que realicen el ciclo de conversiones (1 → 2 →3) mostrado en la figura 1, así como el ciclo de forma inversa (3 → 2 →1) y variantes.

Cabe resaltar que las representaciones semióticas dadas en lenguaje natural consisten en puntos de paso dados u obtenidos en forma de pares ordenados o en una tabla de datos.
Las representaciones gráficas se presentan en la tarea o pueden ser realizadas por medio del comando *SHIFT QR* y la aplicación *CASIO EDU+*. Las reglas de correspondencia de las funciones cuadráticas (representaciones algebraicas) se obtienen a lápiz y papel o por medio del comando *OPTN 2 – opción 4*.

A continuación, se presenta la descripción y respectivo análisis matemático y didáctico de la tarea.

Descripción y análisis de la tarea: función cuadrática

Esta tarea consta de dos actividades que procedemos a describir.

1. *Primera actividad:* dadas tres representaciones gráficas que llamamos A, B y C de distintas funciones cuadráticas.

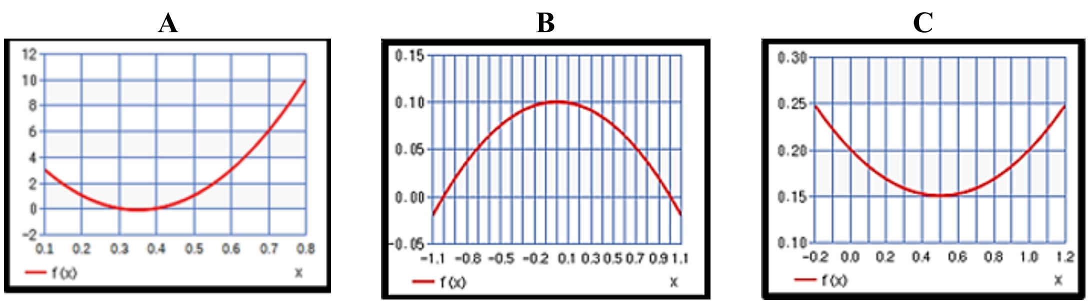


Figura 2. Representaciones gráficas A, B y C de la tarea.

Dadas las representaciones gráficas A, B y C que representan a una función cuadrática:

a) Determine la regla de correspondencia de cada una de ellas.
b) Replique las gráficas dadas haciendo uso de su calculadora.

En la figura 2, se muestra las representaciones gráficas en las que por simple lectura pueden obtenerse puntos de paso, obtener la regla de correspondencia de cada una de ellas y verificarlas realizando las gráficas correspondientes y compararlas con las dadas inicialmente.

Esta tarea corresponde a los tratamientos en el registro algebraico mostrado en la figura 1 y, por medio del uso de la calculadora, se obtiene directamente la representación algebraica en la forma general. En esta tarea, se efectúa el ciclo (3 → 1 →2) realizándose conversiones en tres registros de representación semiótica distintos.

2. *Segunda actividad:* se presentan dos tablas (Tablas 1 y 2) con datos y luego se pide responder a una serie de preguntas. La actividad se muestra a seguir:

   Dadas las siguientes tablas:

TABLA 1		*TABLA 2*	
x_i	$f(x_i)$	x_i	$g(x_i)$
-7	-4.80	-7	-4.80
-6	-4.55	-6	-3.92
-5	-4.20	-5	-3.18
-4	-3.75	-4	-2.55
-3	-3.20	-3	-2.00
-2	-2.55	-2	-1.50
-1	-1.80	-1	-1.02
0	-0.95	0	-0.53
1	0.00	1	0.00
2	1.05	2	0.60
3	2.20	3	1.30
4	3.45	4	2.13
5	4.80	5	3.12
6	6.25	6	4.30
7	7.80	7	5.70
8	9.45	8	7.35
9	11.20	9	9.28
10	13.05	10	11.52
11	15.00	11	14.10
12	17.05	12	17.05

Determine:

a) ¿Cuál de las tablas contiene datos que pertenecen a una función cuadrática?
b) Explique, ¿Qué procedimientos realizó para hacer dicha determinación?
c) Para aquella tabla cuyos valores no corresponden a una función cuadrática, ¿Podría afirmar entonces de qué tipo es?
d) Determine con los datos proporcionados en las tablas la regla de correspondencia de la función cuadrática.
e)

En la tabla 1, se observa que, según el crecimiento de los valores x_i , los valores$f(x_i)$ también aumentan, por lo cual f es creciente en los valores de x_i. Se puede elaborar la columna A con las diferencias $f(x_{i+1}) - f(x_i)$ y comprobar que esa diferencia se incrementa constantemente y en progresión aritmética cuya razón es 0.10, lo cual puede verificarse en la columna B.

TABLA 1			
x_i	$f(x_i)$	*A*	*B*
-7	-4.80	0.25	0.10
-6	-4.55	0.35	0.10
-5	-4.20	0.45	0.10
-4	-3.75	0.55	0.10
-3	-3.20	0.65	0.10
-2	-2.55	0.75	0.10
-1	-1.80	0.85	0.10
0	-0.95	0.95	0.10
1	0.00	1.05	0.10
2	1.05	1.15	0.10
3	2.20	1.25	0.10
4	3.45	1.35	0.10
5	4.80	1.45	0.10
6	6.25	1.55	0.10
7	7.80	1.65	0.10
8	9.45	1.75	0.10
9	11.20	1.85	0.10
10	13.05	1.95	0.10
11	15.00	2.05	
12	17.05		

Es posible afirmar que los datos de la tabla 1 sí corresponden a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c;\ -7 \leq x \leq 12$ y dado a que la variación de la variación es constante: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 2a = 0.10$, el coeficiente del término cuadrático es $a = 0.05$, valor obtenido sólo con los datos de la tabla 1 y sin ningún cálculo riguroso.

De la tabla se obtiene que $f(0) = -0.95$, por lo tanto $c = -0.95$, y dado que $f(1) = a + b + c = 0$, entonces $b = -(a + c) = -(0.05 - 0.95) = 0.9$, por lo tanto, la regla de correspondencia de f es: $f(x) = 0.05x^2 + 0.9x - 0.95;\ -7 \leq x \leq 12$.

TABLA 2				
x_i	$g(x_i)$	C	D	E
-7	-4.80	0.88	-0.14	0.03
-6	-3.92	0.74	-0.11	0.03
-5	-3.18	0.63	-0.08	0.03
-4	-2.55	0.55	-0.05	0.03
-3	-2.00	0.50	-0.02	0.03
-2	-1.50	0.48	0.01	0.03
-1	-1.02	0.49	0.04	0.03
0	-0.53	0.53	0.07	0.03
1	0.00	0.60	0.10	0.03
2	0.60	0.70	0.13	0.03
3	1.30	0.83	0.16	0.03
4	2.13	0.99	0.19	0.03
5	3.12	1.18	0.22	0.03
6	4.30	1.40	0.25	0.03
7	5.70	1.65	0.28	0.03
8	7.35	1.93	0.31	0.03
9	9.28	2.24	0.34	0.03
10	11.52	2.58	0.37	0.03
11	14.10	2.95	0.40	0.03
12	17.05	3.35	0.43	0.03

En la tabla 2, mediante un procedimiento similar al anterior, se encuentra que en la diferencia de valores consecutivos de la función g registrados en la columna C, no se aprecia un incremento constante, por lo cual se generó la columna D con valores correspondientes a la variación de la variación de valores de la función g. En la columna D, sí se aprecia una progresión aritmética de razón constante igual a 0.03, lo cual puede verificarse generando los datos en la columna E correspondientes a la diferencia de valores consecutivos de los datos de la columna D.

Por lo tanto, los valores $g(x)$ de la tabla 2 no corresponden a una función cuadrática, sino a una función cúbica.

Análisis de la tarea:

Con respecto a la primera actividad, el propósito es que los docentes reflexionen a partir de las representaciones gráficas dadas sobre los elementos y propiedades de la función cuadrática, además que empleen las diferentes maneras de expresar la regla de correspondencia de una función cuadrática.

A partir de la información que se observa en las representaciones gráficas (ver figura 2A), los docentes deberían identificar tres puntos, como mínimo, para poder hallar los parámetros a, b y c de la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ (Usando la calculadora o lápiz y papel). Por otro lado, en la figura 2B, se puede considerar los puntos de corte de la gráfica de la función f con el eje X en el que se obtiene la siguiente expresión: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Finalmente, en la figura 2C se puede identificar el vértice de la gráfica dada, reflexionando con respecto a la propiedad de simetría y así obtener la regla de correspondencia a partir de la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

En la figura 3, se muestra el desarrollo presentado por uno de los docentes participantes, en donde se aprecia que, al hacer una aprehensión perceptiva, identificó algunos puntos de la representación gráfica y luego realizó tratamientos en el registro algebraico para poder escribir las reglas de correspondencia.

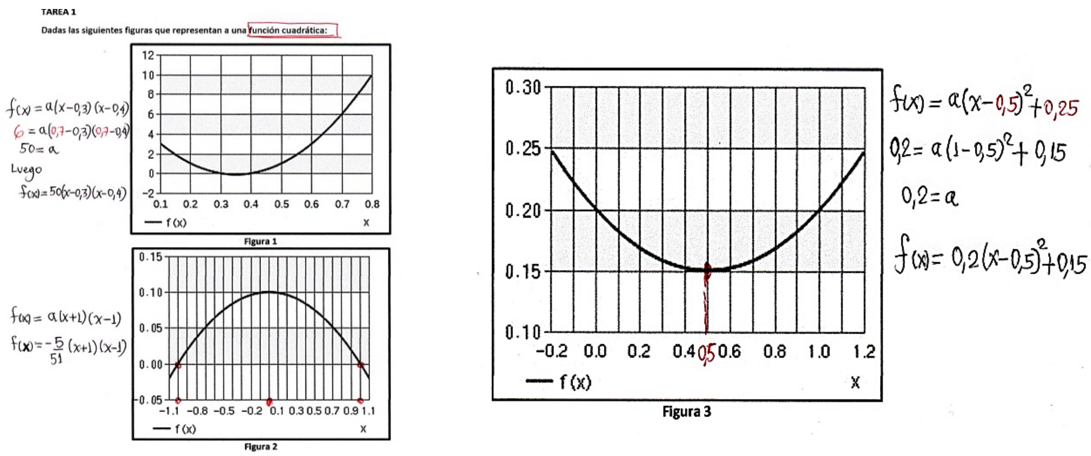


Figura 3. Desarrollo de la primera actividad presentada por uno de los docentes.

Con respecto a la segunda actividad, a partir de una tabla de valores, esperamos que el profesor comprenda el comportamiento de las sucesiones de las diferencias de ordenadas consecutivas cuando x toma valores en progresión aritmética, lo cual le permite identificar a una función cuadrática.

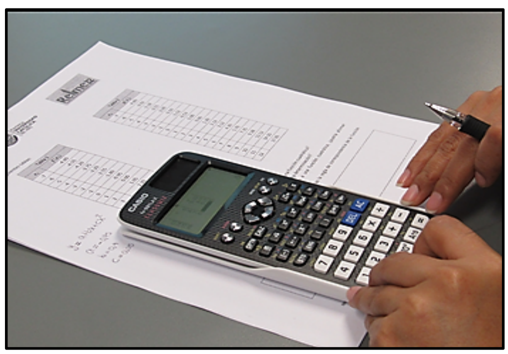


Figura 4. Desarrollo de la primera actividad con calculadora presentada por uno de los docentes.

En la figura 4, se muestra el momento en el que el docente ingresa los datos de las tablas en la calculadora que luego le permitirá crear el código *QR* para ver la representación gráfica a la que pertenecen los puntos dados y así indicar cuál de las tablas contiene datos que corresponde a la representación gráfica de una función cuadrática.

Conclusiones

Mediante tareas apropiadas es posible reconocer las diferentes reglas de correspondencia de la función cuadrática a partir de su representación gráfica, además de sus elementos (raíces, vértice, tres puntos no colineales definen una función cuadrática, valor máximo, valor mínimo) y propiedades (función par, simetría).

Por lo general, la enseñanza de funciones está, en la mayoría de los casos, enfocada con predominancia del registro algebraico, dejándose de lado la representación en los registros gráfico y tabular. Es por ello que se afirma que el hecho de presentar objetos matemáticos, por medio de sus diferentes representaciones y coordinarlas entre sí, permite atender a ciertas particularidades de aprendizaje de estudiantes en función de sus estilos cognitivos.

El presentar la tarea en el registro gráfico permitió, por medio de la aprehensión perceptiva, que sea posible identificar puntos de paso que luego pueden ser utilizados en la representación algebraica. Es decir, en la regla de correspondencia de cada representación gráfica presentada. También permite realizar tratamientos en el registro de representación gráfica para identificar el punto que representa al vértice, a las raíces de la función y eje de simetría.

Por otro lado, se puede evidenciar que la calculadora es un medio que permite movilizar conocimientos mediante la coordinación de diferentes registros de representación semiótica de la función cuadrática. Por ejemplo, como la calculadora permite generar una tabla de datos (registro tabular), con el uso de un código permite el cambio al registro gráfico.

Se piensa que al incorporar de manera progresiva el uso de la $ClassWiz\ \ fx\, 991$, se puede explorar las distintas funciones de sus interfaces, que son ideales para la enseñanza de diferentes contenidos matemáticos, ya que admite realizar la conversión entre los diferentes registros.

Agradecimientos

Agradecemos a la línea investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM por el apoyo brindado para concretizar la presente investigación (PUCP-ID 054-06-01).

También agradecemos el apoyo brindado por el equipo académico de Casio Latinoamérica, representado en el Perú por el Sr. César Lau, por sus aportes en el diseño y desarrollo de las actividades con calculadoras científicas Casio del modelo fx-991 LAX.

Referencias bibliográficas

Borba, M. (2010). Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. São Paulo : Autentica.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang. Duval, R. (2012). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revista Electrónica de Educación Matemática, REVEMAT*, *7*(2). pp. 266-297. Doi: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.

Gómez, P. (2005). *Complejidad de las matemáticas escolares y diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje con tecnología. Revista EMA. Investigación e innovación en Educación matemática*, *10*(2 y 3), pp. 354-374.

Gómez, P. (2004). *Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas.* En Peñas, M.; Moreno, A.; Lupiáñez, J. L. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: tecnologías de la información y la comunicación* (pp. 73-95). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, F. (2011*). Implementación de una propuesta de una unidad didáctica interactiva mediada en las nuevas tecnologías para propiciar el aprendizaje de la función cuadrática en el grado noveno del Colegio Calasanz.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Peñaloza, T. N. y Salazar, J.V.F. (2018). Aprehensiones y modificaciones en el registro gráfico dinámico del paraboloide elíptico. *Educação Matemática Pesquisa*, *20* (1), pp. 61-83. Recuperado de: https://revistas.pucsp.br/index. php/emp/article/view/34170/pdf

Ruiz, O., Flores, S., Luna, J., González, M., Salazar, M., Cruz, M., Ramírez, O. (2016). Uso de tecnología para la diferenciación a través del concepto de variación. Parte I. *Revista Orientación Educacional*, *30*(57), pp. 83-94.

Salazar, J.V.F. (2015). Génesis Instrumental: el caso de la función cuadrática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, UNION*, *1* (41), pp. 57-67. Recuperado de: http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/Artigo 3.pdf

Surichaqui, F. (2018). *Aplicación del software GeoGebra en el aprendizaje de las funciones cuadráticas en los estudiantes del primer ciclo de la universidad para el desarrollo andino.* Tesis de maestría. Universidad Nacional Hermilio Valdizán, Huánuco, Perú.

Touche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized *learning* environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281–307.

MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LA ERA DIGITAL: RECURSOS EDUCATIVOS ABIERTOS INTEGRANDO PRÁCTICAS Y TECNOLOGÍAS DIGITALES

MATHEMATICS EDUCATION IN THE DIGITAL AGE: OPEN EDUCATIONAL RESOURCES INTEGRATING DIGITAL PRACTICES AND TECHNOLOGIES

Sergio Rubio-Pizzorno, Carlos León Salinas, Daysi García-Cuéllar, Juan Luis Prieto G.
Instituto GeoGebra Internacional (México - Chile). Universidad La Gran Colombia (Colombia), Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú). Universidad del Zulia (Venezuela)
zergiorubio@gmail.com, carlos.leon@ugc.edu.co, garcia.daysi@pucp.pe, juanl.prietog@gmail.com

Resumen
Uno de los tópicos más difundidos y discutidos sobre el uso de tecnologías digitales en educación es el impacto de los recursos educativos abiertos que integran tecnologías o prácticas digitales. Así también, éste se presenta como un asunto transversal entre las actividades de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana (práctica educativa, aspectos técnicos, trabajo con profesorado, academia y funcionamiento de la Comunidad). Esta temática nos permite reflexionar respecto de la visibilización y articulación de la Comunidad, mediante la presentación de ejemplos de uso, elaboración búsqueda de REA realizada por sus miembros a la luz de la construcción social de la tecnología digital.

Palabras clave: recursos educativos abiertos, instrumentación, simuladores, videotutoriales, GeoGebra

Abstract
One of the most widespread and discussed topics on the use of digital technologies in education is the impact of open educational resources that integrate digital technologies or practices. Likewise, this is presented as a cross-cutting issue between the activities of the Latin American GeoGebra Community (educational practice, technical aspects, work with teachers, academia and the functioning of the Community). This theme allows us to reflect on the visibility and articulation of the Community, through the presentation of examples of use, development and search of OER made by its members in light of the social construction of digital technology.

Key words: open educational resources, instrumentation, simulators, video tutorials, GeoGebra

Introducción

El Grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital* se conformó en la Relme 31 con la intención de realizar una reflexión desde Latinoamérica sobre el estado de la disciplina en la era digital, con énfasis en el rol de la Comunidad GeoGebra en la región. Producto de la discusión llevada a cabo se plantearon dos propósitos generales de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana (CGL): "(1) visibilizar los aportes realizados en nuestra región, y (2) explorar opciones que permitan una permanente articulación de la CGL" (Rubio-Pizzorno, León Salinas, León Ríos, Córdoba-Gómez y Abar, 2018, p. 1919).

Uno de los primeros pasos para abordar el propósito de visibilización consistió en reflexionar sobre las diversas actividades que realiza la CGL, a fin de tener un panorama general de los diferentes campos de acción de la CGL en la región. De esta reflexión se emerge la tematización (Imagen 1) de las actividades realizadas por la CGL en la región. (Rubio-Pizzorno et at, 2018).

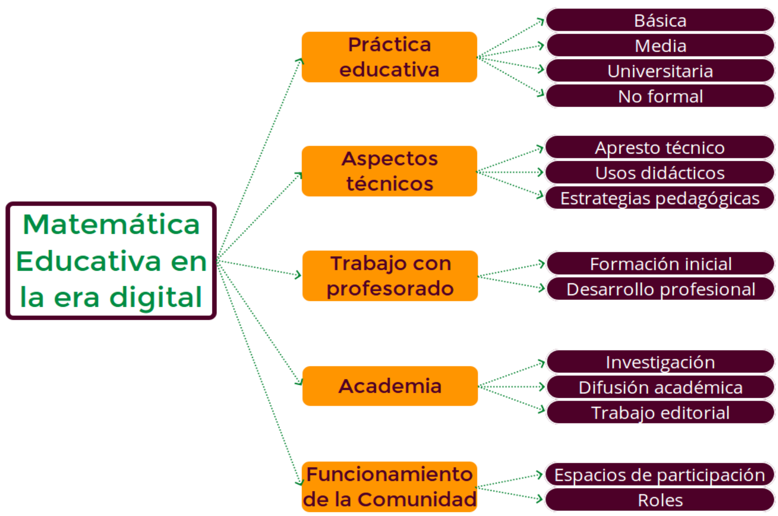


Imagen 1. Tematización de las actividades realizadas por la CGL en la región. (Rubio-Pizzorno *et at*, 2018).

En el caso del propósito de la articulación se planteó seguir con el Grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital*, llevando a cabo su segunda edición en la Relme 32. Esto supuso el desafío de proponer una temática de discusión atractiva para los asistentes, que fuese transversal a los diversos campos de acción de la CGL y que nos permitiera abordar los propósitos ya declarados. De esta manera, la temática escogida para la segunda edición del Grupo de discusión fue una relacionada con los recursos digitales, puesto que corresponde a un aspecto transversal a todos los momentos o temas que caracterizan a la Comunidad, manifestándose con diferentes énfasis según cada tema. En su producción, se atiende a aspectos técnicos y de uso de GeoGebra; en las prácticas educativas y el trabajo con el profesorado (en ejercicio y formación) se enfatiza en el sentido didáctico de integrar recursos digitales de manera efectiva; y en la Comunidad se realza el sentido colaborativo de difundir los recursos en los diferentes espacios para elaborar, compartir y buscar recursos digitales.

Debido a las características de apertura de la Comunidad GeoGebra, la discusión y la reflexión sobre los recursos digitales se plantea desde el paradigma de Educación Abierta, específicamente respecto de los Recursos Educativos Abiertos (REA), los cuales corresponden a:

> Cualquier recurso educativo (incluso mapas curriculares, materiales de curso, libros de estudio, *streaming* de videos, aplicaciones multimedia, *podcasts* y cualquier material que haya sido diseñado

> para la enseñanza y el aprendizaje) que esté plenamente disponible para ser usado por educadores y estudiantes, sin que haya necesidad de pagar regalías o derechos de licencia. (UNESCO, 2015, p. 5).

De esta manera, se propone a los *Recursos Educativos Abiertos integrando Prácticas y Tecnologías digitales* como la temática de la segunda edición del Grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital*.

Construcción social de geogebra

Para aportar a los propósitos de visibilización y articulación de la CGL, utilizamos el planteamiento de Rubio-Pizzorno (2018a) respecto de la construcción social de la tecnología digital, con el objetivo de reflexionar, a la luz de las presentaciones y la discusión desarrolladas en el Grupo, en formas de aportar al desarrollo y consolidación de la CGL, entendida como una comunidad que se organiza alrededor de una tecnología digital abierta. Para ello, empleamos las siguientes preguntas directrices para realizar la reflexión: ¿cómo se moldea socialmente la tecnología digital? y ¿cómo se moldea tecnológicamente la sociedad? (Rubio-Pizzorno, 2018a).

La manera de organizar tanto la discusión durante el Grupo como la reflexión desarrollada en el presente escrito, se realiza mediante la presentación de ejemplos que representan a diferentes actividades realizadas por la CGL alrededor del uso, la elaboración y la curaduría de REA, siguiendo la tematización propuesta por Rubio-Pizzorno *et al* (2018).

Experiencias de integración de REA en la CGL

Para abordar esta temática, se invitaron a integrantes de la CGL de diferentes países de la región, para compartir sus experiencias en la integración de REA desde diferentes escenarios, como la práctica educativa, la investigación, actividades de socialización, entre otras. Así, se presentaron colegas de Perú, Venezuela, Colombia y México, cuyas presentaciones están disponibles en el Libro GeoGebra de esta edición del Grupo de discusión (Rubio-Pizzorno, 2018b).

Diseño de REA fundamentados en la investigación

Existen diversas investigaciones sobre el uso de las tecnologías digitales en la Matemática Educativa, así como varios referenciales teóricos sobre la integración de las tecnologías en el aula de matemáticas como son el Enfoque Instrumental, Transposición Informática, Orquestación Instrumental, la Mediación semiótica y Seres humanos con medios, entre otras. (García-Cuéllar, 2018; Pérez, 2014; Drijvers, Kieran, y Mariotti, 2009). Por ello, nos preguntamos ¿de qué manera los referentes teóricos pueden aportan en la construcción de recursos didácticos integrando tecnologías digitales?

Para abordar dicha pregunta, nos centramos en la investigación de García-Cuéllar (2014), la cual se enmarca teóricamente en el Enfoque Instrumental (Rabardel, 1995) para el estudio de la simetría axial. Su objetivo general es propiciar la instrumentación de la noción simetría axial mediado por GeoGebra en alumnos de primer grado de educación secundaria (12 años) y como objetivos específicos diseñar una secuencia de actividades en la que se utilice GeoGebra como mediador para el aprendizaje de la simetría axial e identificar por medio de las acciones de los estudiantes los posibles esquemas de utilización.

Un ejemplo de los recursos creados en la investigación de García-Cuéllar (2014) es la siguiente actividad (ver Imagen 2), donde los estudiantes pueden mover la recta L, mediante el arrastre del punto O, lo cual permite modificar su inclinación.

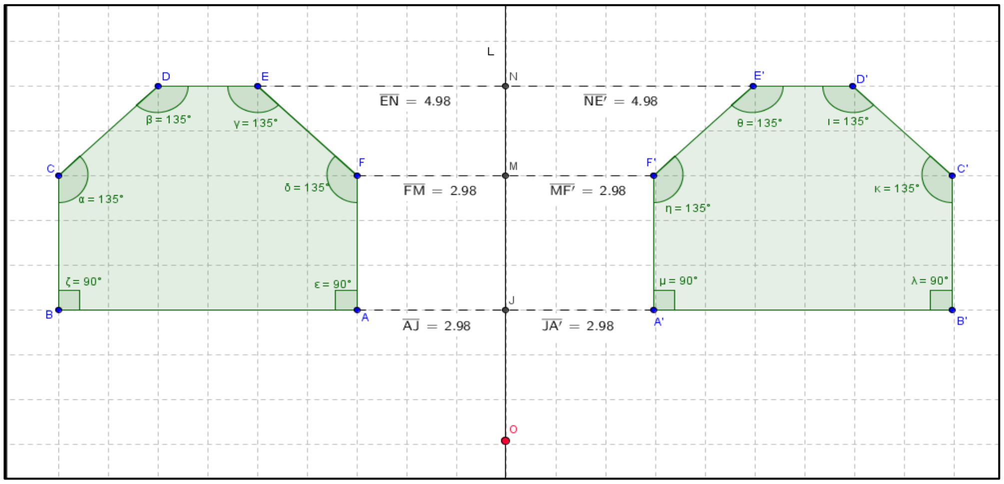


Imagen 2. Recurso creado con GeoGebra para el estudio de la simetría axial (García-Cuéllar, 2014).

Los estudiantes realizaron las siguientes acciones: Trazaron los segmentos FM y MF', los midieron y se percataron que ambos segmentos tienen igual longitud respecto a la recta L y manifestaron que estas medidas varían si se arrastra la recta L pero continúa su congruencia. Con respecto a las medidas de los ángulos internos de los polígonos ABCDEF y A'B'C'D'E'F' sostuvieron que se mantienen igual a pesar de que se arrastre la recta. Cuando movilizaron el punto O, manifestaron que la figura rotó, las medidas de los segmentos variaron, pero se mantienen la congruencia de sus medidas respecto a la recta L y las medidas de los ángulos internos del polígono se mantuvieron. A la conclusión que llegaron los estudiantes, con respecto a la recta L y los polígonos, es que los polígonos mantienen su forma y medida a pesar de que se arrastre dicha recta. La distancia de los vértices a la recta L siempre es igual a pesar de que se movilice la recta L.

De lo anterior, y por medio de las acciones de los estudiantes, se pudo observar que movilizaron esquemas de uso como segmento, ángulos, congruencia, puntos, perpendicularidad, medida de segmentos. Así como crearon el esquema de acción instrumental "eje de simetría" considerando sus características, perpendicularidad y equidistancia de la figura con su simétrico. Es por ello, se pudo afirmar los estudiantes instrumentaron la noción de eje de simetría, que luego se pudo verificar en otras actividades de la secuencia didáctica que no se va a tratar en este escrito.

En conclusión, se destaca que los referenciales teóricos aportan para la construcción de los recursos de una secuencia instruccional o didáctica y también para analizar su aplicación con estudiantes, de tal manera que contribuya al desarrollo del aprendizaje del objeto matemático en estudio.

Instancias de educación no formal de creación de REA por parte de estudiantes

Desde su creación en 2011, el *Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática* se ha dedicado a diseñar y poner en práctica actividades (formales y no formales) de integración del GeoGebra en las prácticas matemáticas escolares de la región zuliana. Es así como el GeoGebra se ha convertido en la principal herramienta de trabajo del grupo, para la atención de las necesidades educativas de alumnos y profesores de matemática en distintos escenarios de actuación: formación profesional docente, producción de recursos para el aprendizaje, investigación y labor social (Prieto, 2017).

Desde el ámbito de labor social, una de las iniciativas más importantes del Grupo TEM ha sido el *Proyecto Club GeoGebra* (PCG), el cual comienza a implementarse en 2013 como una estrategia de vinculación del estudiante de la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física de la Universidad del Zulia, con una realidad escolar particular en donde surgen fuertes tensiones entre las prácticas tradicionales del aula y las aspiraciones formativas de unos alumnos que conviven y crecen en un mundo mediado por tecnologías digitales (Prieto, 2017). A través de la *elaboración de simuladores con GeoGebra*, el PCG busca promover en los alumnos sus capacidades para razonar geométricamente mientras construyen modelos computacionales que revelan las cualidades de forma, dimensión y movimiento presentes en determinadas realidades (Gutiérrez, Prieto y Ortiz, 2017). La elaboración de simuladores con GeoGebra implica el tránsito por un ciclo de modelación (ver Imagen 3) compuesto por cuatro etapas (fenómeno real, modelo real, modelo matemático, modelo computacional) y cuatro procesos (problematización, matematización, trabajo matemático e interpretación) que favorecen el tránsito de una etapa a la otra (Prieto, 2017).

Imagen 3. Ciclo de modelación para la elaboración de simuladores con GeoGebra (Prieto, 2017).

Hasta el momento, el Grupo TEM ha realizado tres *Encuentros de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* en los cuales los alumnos, estudiantes para profesores y profesores de matemática han tenido la oportunidad de socializar sus experiencias en la elaboración de este tipo de simuladores.

■ Elaboración de tutoriales por parte de jóvenes, para el uso de GeoGebra

Desde hace tres años, la universidad La Gran Colombia viene desarrollando el proyecto Mathema Kids, el cual es un espacio en el que niños entre 10 y 14 años, realizan ejercicios de investigación que tienen como objetivo vincular los problemas de su cotidianidad con prácticas de indagación y de construcción colectiva de saberes (León, 2017). En el desarrollo del proyecto ha sido muy importante el uso de la tecnología como herramienta para el análisis de datos y de comparación de resultados, lo que ha permitido que los estudiantes utilicen el *software* GeoGebra para este fin, logrando por las mismas características del programa, el desarrollo de competencias en el trabajo colaborativo.

Hoy en día, los niños se han convertido en autores de recursos didácticos derivados de sus ejercicios de investigación que tienden a compartir y explicar a otros niños, conformando una comunidad que discute acerca de la manera de realizar actividades matemáticas con el *software* y así determinar las formas más claras y eficaces para divulgar el uso de GeoGebra. Una de las formas en que el grupo Mathema Kids está compartiendo sus conocimientos con la Comunidad es mediante la creación de videotutoriales (ver Imagen 4) sobre el uso de GeoGebra para el desarrollo de actividades.

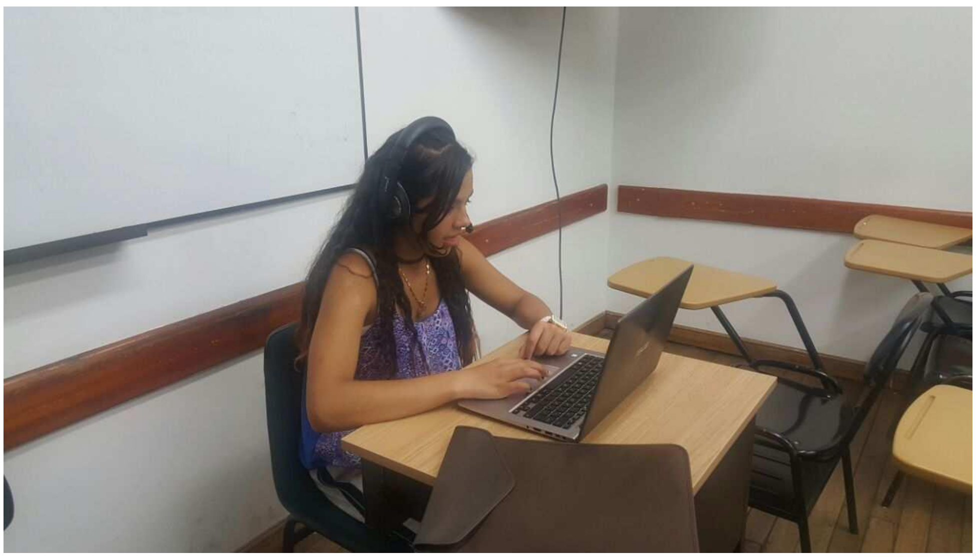


Imagen 7. Miembro de Mathema Kids elaborando videotutorial sobre el uso de GeoGebra.

Reorganización de la Comunidad, en tanto espacios y roles, alrededor de los REA

A finales de 2017 el repositorio *Recursos para el aula* de GeoGebra (GeoGebra, s.f.) alcanzó la cifra de un millón de recursos alojados en él, los cuales están elaborados en los ambientes Actividad y Libro GeoGebra, y están compartidos de manera abierta (GeoGebra, 2017). Cabe destacar que los recursos publicados en *Recursos para el aula* son creados, en su gran mayoría, por miembros de la Comunidad GeoGebra alrededor de todo el mundo y solo una pequeña porción de ellos son creados por el Equipo GeoGebra, los cuales son usualmente guías de uso de los diferentes ambientes de GeoGebra.

Ante esta enorme cantidad de recursos compartidos en *Recursos para el aula*, desde el Instituto GeoGebra Internacional se analizó este fenómeno de organizar tales recursos para hacerlos accesibles de manera abierta a todos los usuarios, esto significa, además de que estén disponible gratuitamente para cualquier persona que ingrese al sitio web, que las búsquedas realizadas por los usuarios arrojen los mejores resultados según el tema buscado, el idioma y la región desde donde se está realizando la búsqueda. Así, se procede a una reorganización de la Comunidad, en tanto sus espacios y roles en ella, alrededor de los recursos didácticos.

En cuanto al espacio, se reestructura el repositorio *Recursos GeoGebra* para mostrar los recursos según los niveles educativos de la región desde donde se accede al sitio, por ejemplo, desde México, las actividades están organizadas en los niveles 6 - 10 años (primaria), 11 - 14 años (secundaria), 15 - 18 años (bachillerato) y nivel universitario. Los recursos que se muestran en esta sección del repositorio han sido revisados por miembros de la Comunidad que han asumido el nuevo rol de *moderadores*, quienes tienen la responsabilidad de evaluar y difundir en el sitio web aquellos recursos que sean considerados *de excelencia*, según los siguientes parámetros:

- Que sean un recurso que funcione y que sea matemáticamente correcto.
- Que sea útil y autoexplicativo para otros profesores o estudiantes, es decir, ellos deberían saber de qué se trata o qué hay que hacer con el material. Un texto, aunque sea breve, puede ayudar a este objetivo.
- Que luzca bien y sea de uso amigable: que el tamaño del *applet* encaje bien, que la vista algebraica esté oculta cuando no sea necesaria, que tenga buen uso de colores, etc.
- Que tenga al menos una etiqueta: se recomienda usar etiquetas en inglés.
- Que declare un nivel educativo: se sugiere usar un rango de edad para cada nivel educativo, según su país.

Esta estrategia de curaduría de recursos se vislumbra fundamental para contar con un acervo de recursos didácticos digitales de calidad, que respondan a las necesidades educativas de nuestra región, en términos generales y locales. Hasta el momento el grupo de moderadores de la CGL está integrado por nueve miembros, cuatro para la curaduría en español y cinco en portugués.

Discusión y conclusiones

Los casos presentados durante la segunda edición del Grupo de discusión en la Relme 32 son ejemplos de la marcada presencia de la tecnología y las prácticas digitales en la Matemática Educativa en Latinoamérica, tanto en las clases de matemáticas, en la realización de investigaciones que integran aspectos digitales, como en instancias poco usuales en la educación, pero que están comenzando a demostrar un gran impacto en los aprendizajes de los estudiantes, como la creación de videotutoriales y simuladores.

A la luz de este escenario y las preguntas directrices planteadas por Rubio-Pizzorno (2018a) respecto de la construcción social de la tecnología digital, podemos declarar que:

1. La tecnología digital, específicamente los REA elaborados con GeoGebra, son moldeados socialmente en su elaboración, uso y curaduría que responder a la atención de los contextos locales, aprovechando los aportes de la Comunidad a nivel global o local (investigaciones, herramientas teóricas, REA elaborados en otras regiones, etc.).
2. La sociedad se moldeada tecnológicamente mediante la articulación de los esfuerzos locales e individuales, por ejemplo, los relacionados con los REA, para constituir o fortalecer -mediante la visibilización y la articulación- a la CGL.

Estos elementos nos permiten reconocer que la construcción de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, en términos sociales y relacionada con una tecnología digital abierta, es una empresa en la cual cada uno de los miembros puede aportar, ya sea a través aspectos materiales como el uso, la creación o la curación de REA, o inmateriales como la incorporar prácticas digitales que organizan los espacios de la Comunidad.
Ejemplo de este último punto, es la idea de organizar un Coloquio de la CGL como un espacio de reflexión permanente y sistemática, que nos permita compartir a los miembros de la Comunidad nuestras experiencias docentes o de investigación relacionadas con GeoGebra. Este proyecto se planteó durante la segunda edición del Grupo de discusión, con el objetivo de llevarlo a cabo a partir del 2019, lo cual puede configurarse como la temática a abordar en la próxima edición del Grupo.

Referencias bibliográficas

Drijvers, P., Kieran, C. y Mariotti, M. (2009). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: Hoyles C., Lagrange JB. (eds) *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*. New ICMI Study Series, vol 13. Springer, Boston, MA, 89 - 132.

García-Cuéllar, D. (2014). *Simetría axial mediada por el Geogebra: un estudio con estudiantes de primer grado de educación secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima.

García-Cuéllar, D. (2018). Enfoques teóricos en investigación con tecnología en educación matemática. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), 1402-1409.

GeoGebra (s.f.). Recursos para el aula. Recuperado de geogebra.org/materials

GeoGebra. (2017). *Find over 1 million free and interactive classroom resources on geogebra.org/materials. Search for a topic and share! [tuit]*. Recuperado de twitter.com/geogebra/status/932586021010714624

Gutiérrez, R., Prieto, J. L. y Ortiz, J. (2017). Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. *Educación Matemática, 29*(2), 37-68.

León, C. (2017). El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. *Tecné, Episteme y Didaxis, ted, 42*, 159-171.

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores, 53*(2), 129-150.

Prieto, J. L. (2017). *Proyectos de simulación con GeoGebra: una estrategia del desarrollo del pensamiento científico desde el servicio comunitario*. Facultad de Humanidades y Educación, Universidad del Zulia, Maracaibo.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. Université Paris. Armand Colin. Recuperado de http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/

Rubio-Pizzorno, S. (2018a). *Integración digital a la práctica del docente de geometría*. Tesis de Maestría no publicada. Ciudad de México, México: Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav). DOI: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1

Rubio-Pizzorno, S. (2018b). *Matemática Educativa en la Era digital - 2da edición [Libro GeoGebra]*. DOI: 10.13140/RG.2.2.31589.24806

Rubio-Pizzorno, S., León Salinas, C., León Ríos, J., Córdoba-Gómez, F. y Abar, C. (2018). Matemática educativa en la era digital: visibilización y articulación de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. En L.A. Serna Martínez (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(2), (pp. 1917-1923). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 2448-6469.

UNESCO (2015). *Guía Básica de Recursos Educativos Abiertos (REA)*. Organización de las Naciones Unidas Para la Educación, la Ciencia y la Cultura: París, Francia. ISBN: 978-92-3-300020-9

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

O PROCESSO DE CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADO DE CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS EM UM ENTORNO TECNOLÓGICO

THE PROCESS OF CONSTRUCTION OF MEANING OF TRIGONOMETRIC CONCEPTS IN A TECHNOLOGICAL ENVIRONMENT

Nielce Meneguelo Lobo da Costa, Sonner Arfux de Figueiredo, Salvador Cisar Llinares, Julia Valls González
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, Universidade Anhanguera de São Paulo-UNIAN, Universidad de Alicante-UA, Universidad de Alicante – UA (Brasil, España)
sarfux@uems.br, nielce.lobo@gmail.com, sllinares@ua.es, juliavalls@ua.es

Resumen
Neste artigo se discute, num experimento de ensino, como futuros professores constroem e consolidam conceitos trigonométricos em ambientes com tecnologia. O estudo se desenvolveu em um Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, no Brasil. O aporte teórico desse recorte da pesquisa maior veio dos estudos sobre abstração reflexiva de Piaget particularmente como indicada por Simon e Tzur. A metodologia da pesquisa foi qualitativa com características do *Design-Based Research*, e a análise foi interpretativa. Uma trajetória hipotética de aprendizagem *(Hypothetical Learning Trajectory-HLT)*, segundo Simon *et al*, foi desenvolvida e nela utilizada uma abordagem exploratória-investigativa de ensino. Os sujeitos foram dezesseis iniciantes do Curso. Os resultados indicaram desenvolvimento da competência matemática dos futuros professores e uma compreensão significativa sobre o aprender a construir e interpretar representações, de forma a melhor entender o pensamento dos alunos e seu processo de construção de conceitos trigonométricos.

Palavras-chave: ensino de trigonometria com tecnologia, níveis cognitivos de aprendizagem

Abstract
This article discusses, in a teaching experiment, how future teachers construct and consolidate trigonometric concepts in a technological environment. The study was developed in a Pre-service Mathematics Teacher Education course from the Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Brazil. The theoretical foundation of this part of the broader research came from the studies on Piaget's reflexive abstraction particularly as indicated by Simon and Tzur. The research methodology was qualitative with characteristics of *Design-Based Research*, by Cobb et al, and the analysis was interpretive. A hypothetical learning trajectory (HLT), according to Simon et al, was developed and an exploratory-investigative approach to teaching was used in it. The subjects were sixteen beginners of the Course. The results indicated the development of the mathematical competence of the future teachers and a significant understanding about the learning to construct and interpret representations, in order to better understand students' thinking and their process of constructing trigonometric concepts.

Key words: teaching of trigonometry with technology, cognitive levels of learning

Introdução

O impacto das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) na sociedade em geral levam ao desenvolvimento de programas com o objetivo central de promover a integração educativa das TDIC. É possível encontrar, em diversas das políticas públicas implementadas características, tais como: 1) o aparelhamento das escolas com equipamentos e, 2) a formação dos professores na área das TDIC. Entretanto, mesmo com os esforços feitos nas últimas décadas por meio de diversos projetos que envolviam tanto a formação de professores quanto o aparelhamento tecnológico para as escolas, ainda é um desafio integrar as TDIC na educação, principalmente no ensino de matemática. Muitas vezes o que tem ocorrido é a inserção da tecnologia para ensinar sem, contudo, haver alteração significativa na metodologia do ensino.

No contexto atual, de constante mudança, é imprescindível estarmos atentos aos impactos da globalização, assim diversos autores, tais como, Kenski (2007) salientam os novos papéis que deve assumir o professor no contexto da sociedade do conhecimento e da aprendizagem em que hoje vivemos. Dependendo da situação didática o professor assume o papel de gestor da informação, de mediador das aprendizagens, de guia das cognições, de facilitador, de planejador, ou de orquestrador do processo educativo.

Um campo de pesquisa que vem se desenvolvendo nos últimos vinte anos está ligado ao tipo de conhecimento que um professor capaz de inovar com as TDIC na sala de aula precisa ter e as competências ser capaz de demonstrar. Conhecer e operacionalizar tais conhecimentos reveste-se de grande importância num momento em que se pretende organizar e/ou desenhar um modelo de formação em TDIC que se revele capaz de desenvolver no professor atitudes positivas e competências de utilização da TDIC como ferramentas cognitivas no processo didático, como enfatiza (Coutinho, 2009).

Neste artigo discutimos, num experimento de ensino, como professores em formação inicial constroem e consolidam conceitos trigonométricos em ambientes com tecnologia. O estudo foi desenvolvido em um Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, UEMS, Brasil. A pesquisa se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como o acadêmico constrói os significados em uma situação de aprendizagem em uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem *(Hypothetical Learning Trajectory-HLT)*, contemplando uma abordagem exploratória-investigativa em um estudo exploratório dos conceitos de trigonometria no ciclo trigonométrico.

Marco teórico

O processo de construção de conhecimentos profissionais se inicia na formação inicial com os conhecimentos necessários para ensinar matemática, segundo Shulman (1986), visto como um processo pelo qual os estudantes para professor (acadêmicos) dotam de sentido e ideias procedentes a da didática da matemática em situações de ensino. A partir da perspectiva do desenvolvimento da competência matemática, ou seja, de aprender a construir e interpretar representações, de forma a conjecturar e validar os conceitos estudados no processo de apropriação do pensamento matemático, no qual a visualização em torno de um recurso tecnológico, representa um componente do processo de representação, processo pelo qual as representações mentais podem ser criadas. Essa competência está ligada à intuição e compreensão, surge como um processo de formar imagens e utilizá-las eficazmente na descoberta e construção dos conceitos matemáticos.

A perspectiva teórica adotada procede a uma particularização da ideia de abstração reflexiva elaborada a partir das ideias de Piaget (1977) e utilizada por Simon e Tzur (2004). Estes autores apontam que as ações dos estudantes produzem diferentes efeitos que podem ser considerados por ele no desenvolvimento de seus processos de abstração.

O enfoque proposto por Simon (1995) e por Simon e Tzur, (2004), para a aprendizagem profissional propõe um modelo de análise da prática do professor que permite, com posterioridade, incorporar resultados aos programas de formação de professores. Explicam os autores ainda que, enquanto os alunos se concentram nas atividades seguindo sua meta eles criam registros mentais, a experiência é gravada no intelecto e desenvolve uma interação que produz um efeito.Para tanto, o mecanismo baseia-se na descrição de Piaget (1977), sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, onde as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) de ações na próxima. O segundo aspecto é um reflexo, onde uma reorganização entre ações ocorre.

Os autores distinguem dois tipos de reflexão realizados pelos estudantes em seus registros da experiência e assumem que os processos mentais dos estudantes são elementos constituintes da compreensão de um objeto que envolve duas fases: a fase participativa, onde o estudante desenvolve diferentes atividades guiadas por um objetivo de resolver uma tarefa matemática; a fase antecipatória, em que antes de uma determinada tarefa cuja resolução envolve o uso de um conceito matemático pelo aluno, ele seleciona e considera pertinente o uso do referido conceito para a resolução dessa tarefa. Neste caso, o aluno pode usar o conceito de forma adequada, independentemente do contexto ou da tarefa. Para isto os autores propõem um mecanismo sobre a atividade durante as tarefas na HLT, que denominam de *Mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito na HLT*.

O Mecanismo de reflexão sobre a atividade-efeito em uma trajetória hipotética de aprendizagem (HLT - hypothetical learning trajectory) proposta por Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), elaborada a partir das ideias de Piaget sobre abstração reflexiva. Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração.

Para alcançar seu objetivo, o estudante realiza uma determinada tarefa (atividade dirigida por um objetivo) proporcionando a possibilidade de prestar atenção nos efeitos da atividade realizada (efeito das atividades), neste processo de observação dos efeitos na atividade o estudante cria registros mentais (registro da relação atividade-efeitos). Assim para entender o desenvolvimento das estruturas mentais dos estudantes, é necessário estabelecer explicitamente as relações entre o caminho desenhado na HLT para os estudantes e características das sequências de ensino (identificar os objetivos de aprendizagem, definir fluxos de trabalho e contribuir uma avaliação detalhada dos entendimentos de matemática do estudante. Simon y Tzur (2004) identificaram três tipos de tarefas com potencial para auxiliar os alunos na construção de um novo conceito para a compreensão, na perspectiva da reflexão sobre a relação atividade-efeito.

Para os autores as tarefas matemáticas proporcionam as ferramentas para promover a aprendizagem dos conceitos matemáticos específicos e, portanto, são elementos chave no processo de ensino. Dada a natureza hipotética inerente ao processo, o professor se verá obrigado a modificar constantemente cada aspecto da HLT, quando ela se torna uma trajetória real de ensino.

Os autores denominam de *tarefas iniciais* as que podem ser realizadas por estudantes que usam seu conhecimento prévio, já as tarefas que permitem que os alunos reflitam sobre ela própria relacionando-a com tarefas ja desenvolvidas, de modo a gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito, são denominam por eles de *tarefas de reflexão* e, um terceiro tipo que eles caracterizam são as nomeadas de *tarefas de antecipação*, as quais são realizadas durante uma HLT e para realização requerem que o aluno produza uma abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

As *tarefas iniciais* são usadas para a criação e o reconhecimento de certas experiências; as *tarefas reflexivas* são para direcionar a atenção dos alunos para a relação atividade-efeito e as *tarefas de antecipação* têm o intuito de levar os estudantes a identificar e analisar regularidades. Segundo Simon e Tzur (2004), as metas de aprendizagem que os alunos podem alcançar estão relacionadas com suas concepções correntes e com as tarefas que lhes são disponibilizadas. Assim sendo, para o professor, entra em cena o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito quando consideramos sua necessidade de selecionar, entre as atividades disponíveis, tarefas que possam impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

Nesta perspectiva, torna-se necessário que o licenciando saiba utilizar pedagogicamente os recursos tecnológicos compreendendo o seu potencial como mais uma forma de representação do conhecimento a ser explorado, como ensina Duval (1988).

Sob o enfoque de se fazer uso integrado das TDIC ao currículo pesquisas, tais como as de Almeida e Valente (2011), Lobo da Costa e Prado (2015), apontam que os recursos tecnológicos potencializam tanto uma nova estrutura comunicacional como imprimem uma nova maneira de as pessoas se relacionarem, de se comunicarem e de aprenderem.

■ Desenho da pesquisa

A metodologia da pesquisa foi o *Design Based Research*, segundo Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003) e os sujeitos de pesquisa foram dezesseis acadêmicos de uma turma ingressante de um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Brasil.

O experimento teve duração de 12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos, sendo que os módulos I e III foram com duas seções cada e os módulos II e IV com quatro sessões cada. No experimento de ensino elaboramos uma HLT para o estudo dos conceitos trigonométricos e nela utilizamos tarefas matemáticas envolvendo recursos tecnológicos, na concepção de formação inicial de professores para uso da informática integrada à prática pedagógica.

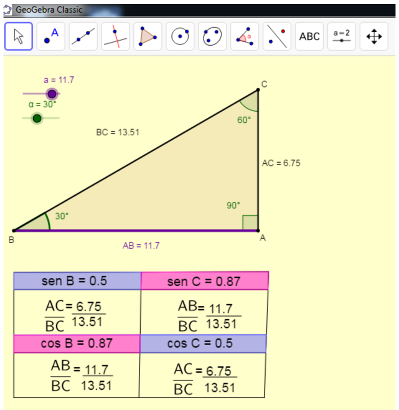
As tarefas propostas se dividiram em três momentos distintos: (1) estudo dos conceitos trigonométricos para o triângulo retângulo e para o triângulo qualquer com o Software GeoGebra; (2) Resolução de tarefas matemáticas envolvendo os conceitos abordados com o GeoGebra; (3) Exploração, validação e sistematização dos conceitos trigonométricos em um entorno tecnológico com o uso do Software GeoGebra. Cabe destacar que neste artigo trazemos a discussão em torno do conceito das razões trigonométricas: seno, cosseno e tangente.

Procuramos desenvolver a proposta para levar os licenciando à compreensão dos conceitos trigonométricos no intuito de favorecer a integração de conteúdos e a aprendizagem por meio das transformações e interações que as tecnologias digitais de informação e da comunicação podem trazer para a educação matemática. Mesmo em momentos distintos do experimento a análise interpretativa considerou todo o processo ao promover o uso de novas tecnologias de informação para favorecer a construção/consolidação do significado dos conceitos trigonométricos pelos futuros professores. Na investigação sobre a formação inicial destacamos, quanto à abordagem exploratória-investigativa e o modo de interagir as TDIC na resolução das tarefas matemáticas, a importância de discutir com os futuros professores: como iniciar as propostas e atividades em sala de aula, como auxiliar os seus alunos vindouros a construir os conceitos trigonométricos e a partilhar com a classe suas conjecturas e descobertas.

■ O experimento de ensino

O que discutimos é como processa a aprendizagem em um entorno tecnológico dos conceitos trigonométricos para o seno, cosseno e tangente, e resultados indicativos de interações dinâmicas. Com o uso da tecnologia (*Software* GeoGebra) em um HLT trazemos momentos de discussão ao qual favorecem a generalização necessária nos

processos de construção de conceitos trigonométricos para o estudo do seno, do cosseno e da tangente em triângulos retângulos e em triângulos quaisquer.
Na perspectiva de aprender a construir e interpretar representações, a fim de conjecturar e validar os conceitos estudados no processo de apropriação do pensamento matemático, em que a visualização em torno de um recurso tecnológico, representa um componente do processo de representação, processo pelo qual você pode criar representações mentais.



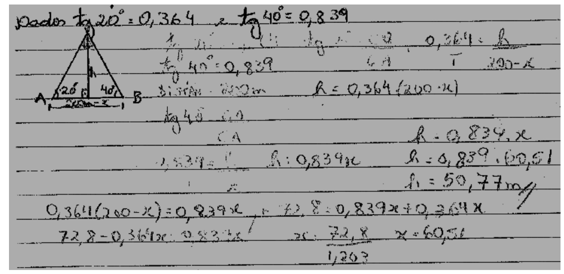


Figura 1: As Razões trigonométricas no triângulo, B resolução de atividades em um entorno tecnológico
Fonte: Figueiredo, 2015

A partir do software GeoGebra a resolução da atividade, destacamos a retomada das definições das razões trigonométricas para o triângulo retângulo, bem como as deduções geométricas de uma tabela de valores notáveis serviu de sustentação para o desenvolvimento de diversos conceitos e relações abordadas no decorrer das tarefas. Cabe destacar que o licenciando pode manipular o valor de "**a**" para o tamanho do segmento AB da figura 1-A e o parâmetro para o ângulo em B, e estes projetavam o coeficiente angular também para o ângulo em C abordando, assim, a complementaridade dos ângulos no triângulo retângulo movimentando tanto o ângulo como a medida do segmento AB.

No processo de construção do conhecimento matemático, do ponto de vista "neopiagetiano" (González, 1991), assumimos que a aprendizagem está constituída por "saltos qualitativos" (salto de nível), onde se permite que os indivíduos vejam o conhecimento desde perspectivas diferentes como a constante de proporcionalidade do seno ao ampliar o tamanho do triângulo ou o arco correspondente ao ângulo do triângulo. Assim as condições que o professor cria em aula pode-se dar ou não estes "saltos qualitativos" no processo de construção do conhecimento do conceito matemático.

Em seu texto, Simon (1995) destaca os domínios do conhecimento do professor necessários para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem: conhecimento do ensino a respeito do conceito a ser desenvolvido (provindo de pesquisas, livros ou da própria experiência docente); conhecimento de materiais e recursos disponíveis para o desenvolvimento do tema e conhecimento de variadas atividades que permitem melhor compreensão do assunto.

Estas condições previstas nos recursos didáticos com a finalidade de favorecer os mecanismos cognitivos dos licenciandos – neste caso a interiorização nas ações dos licenciandos vinculadas na ideia de seno, cosseno e tangente generalizada no triângulo se manifestam na ênfase de poder visualizar a constante gerada pelas razões dos seguimentos AB, BC, e AC do triângulo retângulo.

Na resposta pata a tarefa na figura 1-B acima, observamos um elemento geométrico, - esboço do desenho do enunciado da tarefa - que foi utilizado pelo licenciando no sentido de fixar as informações do enunciado, em seguida, o cálculo algébrico para a sua solução. Para isto foi necessário a reflexão sobre as tarefas realizadas em momentos anterior, estabelecendo o uso do conceito de tangente corretamente, aplicando a ideia da situação anterior e estendendo ao novo problema utilizando duas variáveis, em uma relação de dependência entre elas.

Estas atividades caracterizam o processo de construção do significado do conceito de razões trigonométricas no triângulo retângulo, onde os licenciandos, através da reflexão sobre um conjunto de tentativas que lhe rendem resultados positivos, abstraíam de uma relação entre a atividade e seu efeito, sendo que o efeito é um pensamento, uma atividade mental com base na sua concepção de unidades compostas, por exemplo, na atividade 1 “o licenciando identifica a ação e aplica a fórmula”, e através de uma série de tarefas na atividade 3, “ele distingue uma regularidade” como chegar à altura do balão em função da tangente do ângulo dado.

Em nossa análise observamos as ações dos licenciandos com relação a dois pontos: a de generalização e a de generalização e reflexão (Simon *et al,* 2004). Na primeira observamos a atividade mental dos licenciandos a qual infere a partir de sua ações sobre os objetos e seu discurso captados durante a realização das atividades, assim consideramos as ações de relacionar, buscar e extender.

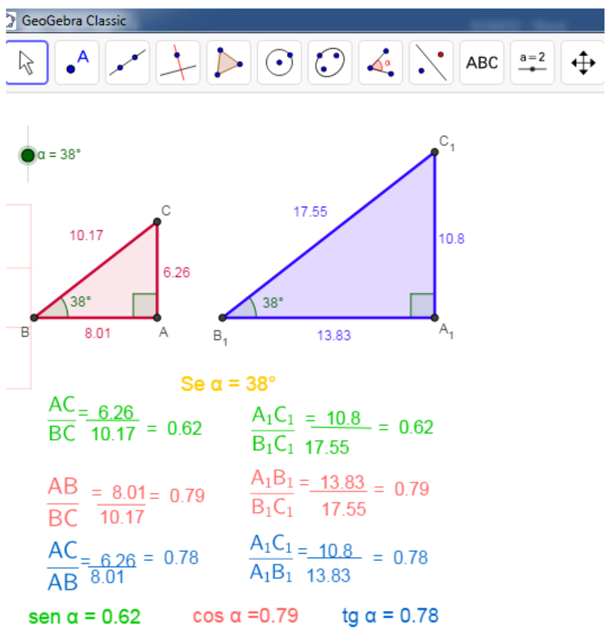


Figura 2: Applet sobre triângulos semelhantes e razões trigonométricas
Fonte: Figueiredo, 2015

Estas condições previstas nos recursos didáticos com a finalidade de favorecer os mecanismos cognitivos dos licenciandos – neste caso a interiorização nas ações dos licenciandos vinculadas na ideia de seno, cosseno e tangente, generalizada no triângulo retângulo se manifestam na ênfase de poder visualizar a constante gerada pelas razões dos seguimentos AB, BC, e AC do triângulo retângulo e respectivamente aos seguimentos A_1B_1, B_1 C_1, e A_1C_1 para o triângulo retângulo semelhante no *applet.*

Na atividade apresentamos uma situação hipotética cuja uma pessoa teria que atravessar um rio. Com uma ilustração da margem do rio, o objetivo foi fazer com que o licenciando refletisse na ação proposta a ser tomada na tarefa e sob diferentes representações tomasse a decisão correta na resolução, por exemplo: na atividade ele tem que esboçar o desenho geométrico para que faça a resolução.

Em um dos relatos durante a resolução da atividade verificamos os licenciandos relacionando o que acontece no *applet no* GeoGebra com os conceitos já estudados e definidos anteriormente e generalizando os conceitos discutidos em momentos anteriores.

- Licenciando A: medida que aumentamos o ângulo a relação do seguimento AC para BC vai alterando, olha!
- Licenciando B: Sim na figura aumentando o ângulo do triângulo e a medida de AC vai aumentando e diminuindo.
- Licenciando A: Isto, mas por que não altera a medida dos outros lados dos triângulos.
- Licenciando B: Por que quando mexe no ângulo só a medida do outro lado dele é que mexe os outros são fixos.
- Licenciando A: Bom, então vamos trabalhar com o ponto B e B_1 respectivamente, o que acontece?
- Agora vou movimentar o ponto A e A_1, respectivamente o que acontece. Olha a relação matemática entre estas medidas "aqui" e "aqui" (se referindo a medida dos seguimentos AC e AB) é uma razão.
- Licenciando B: Sim ai é um razão não é professor?
- Professor: Sim uma razão entre estes seguimentos, todos estão conseguindo observar as razões destes seguimentos aqui <se referindo as razões para o seno, cosseno e tangente>.

Na discussão acima relacionada a figura 2, relatamos algumas interações; fica evidente as interações dinâmicas com o uso do *applet* de modo a evoluir sua compreensão do conceito já visto, e também a fase de participação de Tzur et al (2004) em uma THA.

O objetivo destas tarefas é que o licenciando associem as relações trigonométricas expressa em uma representação gráfica de forma analitica gerando um conjunto diferente de representações sobre a relação entre a atividade de modificar os parâmetros no *applet* e os efeitos que produz na representação gráfica das relações trigonométricas, sendo assim, como forma de entender o desenvolvimento do conceito de aprendizagem por parte do licenciando e verificar a transição da fase participativa para a fase de antecipação, em que uma determinada tarefa cuja resolução invoca no licenciando um conceito matemático na resolução das atividades.

Propomos a atividade abaixo. Na resolução da tarefa proposta, em um dos trechos o licenciando aponta para a definição no caderno relacionando o que está projetado para a tangente na resolução da tarefa que trazemos e verifica os valores.

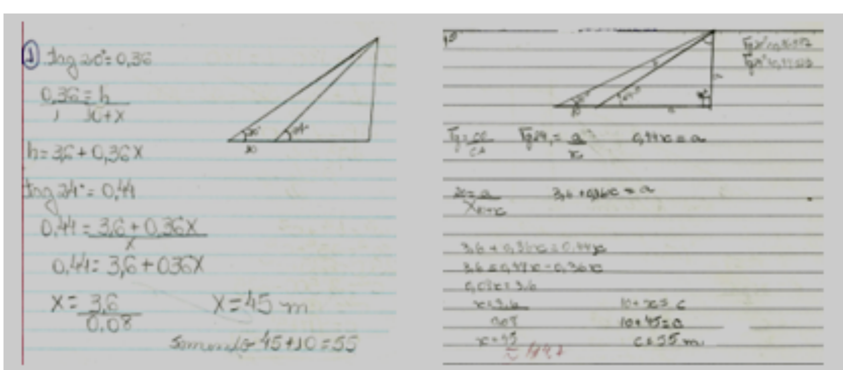


Figura 3: Resolução da tarefa proposta
Fonte: Figueiredo, 2015

Juntamente com do *applet* da figura 2 sobre as razões trigonométricas para triângulos semelhantes, apresentamos uma situação hipotética cuja pessoa teria que atravessar um rio. Com uma ilustração da margem do rio, O licenciando representou no esboço as informações e realizou; observamos que, para realizar a resolução da atividade o licenciando, desenvolveu três fases, a primeira foi fazer uma leitura e retirar as informações, vamos chamar de imersão no problema; em seguida, o licenciando teve que associar a este problema diferentes representações, o geométrico e o algébrico, assim constroem conexões influídos por sua experiência própria procedendo uma organização entre os diferentes mecanismos de reflexão. E na terceira que vamos denominar de resolução da atividade, ou sistematização da atividade, há uma generalização do mecanismo de construção do conhecimento, como a coordenação entre os modos de representação.

Consideramos que o processo de construção dos conceitos trigonométricos no triângulo retângulo no processo de aprendizagem em um entorno tecnológico dos conceitos trigonométricos para o seno, cosseno e tangente, continha na HLT até então, nos permitiu refletir que as ações assumidas e as análises dos dados nos mostra que os licenciandos faziam o uso do conceito ao responder corretamente os problemas.

Considerações finais

Com o Software GeoGebra na HLT foi possível evidenciar entre as múltiplas representações de forma que se assume que as várias representações do mesmo conceito devem complementar-se e eventualmente devem mesmo integrar-se numa única representação. No *applet*, convidamos os licenciandos para manusear interagindo com a tecnologia de forma a observar o movimento dos lados do triângulo no *applet* e verificar se as relações trigonométricas existentes entre os lados do triângulo estão de acordo com as definições das razões trigonométrica para o seno, cosseno e tangente. Em entendemos que os acadêmicos foram consolidando os conceitos trigonométricos na tarefa matemática em um entorno tecnológico na HLT, houve formulação de conjectura, validação de resposta e desenvolvimento do significado do conceito trigonométricos, seja no momento que o acadêmico de licenciatura pode validar suas ideias pertinentes para a resolução que em momentos estavam só disponível para o contexto da tarefa ou nos momentos que abstraia regularidades com relação abordagem exploratória-investigativa no GeoGebra. Durante a investigação evidenciamos a habilidade dos participantes da pesquisa em identificar e usar uma generalização a partir de uma tarefa anterior, pois durante o processo de investigação observamos que o participante aplica uma ideia de uma situação, no caso na tarefa e aplica na resolução de novo problema tarefa seguinte.

A diferença entre estas situações está nas inferencias de suas ações, ou seja, quando o licenciando faz uma afirmação acerca de uma generalização em sua resolução, sendo possível reconstruir seu raciocínio prévio até chegar à ação que deram origem a sua observação. Esta análise é uma parte importante do entendimento do conceito de seno, cosseno e tangente do triângulo retângulo em relação à trigonometria, pois estas ideias serão generalizadas e extendidas no estudo da trigonometria para triângulos quaisquer e principalmente no estudo da trigonometria para o ciclo trigonométrico. Ressaltamos aqui que o processo descrito não é indutivo, mas construtivo, uma distinção feita por Piaget (1977) e outros, a distinção de ser entre a abstração empírica e reflexiva). Aprendizagem não é um resultado de reflexão sobre um padrão nos resultados, ou seja, um tamanho único é encontrado. Pelo contrário, é uma reflexão sobre um padrão na relação atividade - efeito que leva à nova concepção do conceito matemático, (Simon *et al*, 2004).

Os resultados indicaram ganhos progressivos do nível abstração, bem como na abstração e complexidade na sistematização do conceito e equação proporcionando uma aprendizagem significativa no estudo como se processa o aprendizado em um entorno tecnológico de conceitos trigonométricos, e resultados indicativos de que as interações dinâmicas com o sistema tecnológico em uma HLT podem favorecer a generalização necessária nos processos de construção de conceitos trigonométricos para o estudo do seno, do cosseno e da tangente em triângulos retângulos e em triângulos quaisquer e incidem na compreensão das características trigonométricas. Para tal demanda-se conhecimentos diversos os quais são necessários para que o professor de matemática em formação possa "raciocinar com", "criar com" e "ensinar com" tecnologia. Ensinar, não apenas inserindo-as na sala de aula, mas integrando-as e explorando adequadamente o que elas potencializam para o ensino e a aprendizagem em Matemática.

Agradecimentos

A FUNDECT pelo financiamento do Projeto nº59/300.304/2016, CIAFEM 26150, ao qual se refere este artigo.

Referências bibliográficas

Almeida, M.E.B.; Valente, J.A. (2011). *Tecnologias e currículo*: trajetórias convergentes ou divergentes? São Paulo: Paulus.

Coutinho, C. P. (2009). Challenges for Teacher Education in the Learning Society: Case Studies of Promising Practice. In H. H. Yang & S. H. Yuen (eds.), Handbook of Research and Practices in *E-Learning: Issues and Trends.* Chapter 23 (pp. 385-401). Hershey, New York: Information Science Reference - IGI Global.

Coob, P., Confrey, J., Disessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003.). Design experiments in education research. *Educational Researcher, v.32*(n.1), pp. 9-13.

Duval, R. (1988). *Geometry from a cognitive point of view*. En C. Mammana and.Villani (eds.) Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Figueiredo, S. A., (2015). *Formação inicial de Professores e a Integração da Pratica como Componente Curricular*. Tese de Doutorado. Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN. 285f.: il; 30cm. Brasil.

González, R. R. (1991). Aportaciones del enfoque evolutivo neopiagetiano al processo ensenãanza-aprendizaje. Aula aberta, n. 58, p. 3-16.

Kenski, V. M. (2007) *Educação e tecnologias*. 2 ed. Campinas, SP: Papirus.

Lobo Da Costa, N.M.; Prado, M.E.B.B. (2015). *A integração das tecnologias digitais ao ensino de matemática:* desafio constante no cotidiano escolar do professor. Rev. Perspectivas Educ. Matemática, v.8, n.16, p..99-120.

Piaget, J. (1977). *Studies in Reflecting Abstraction*. Sussex: Psychology Press.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education.* 26 (2), 114-145.

Simon, M. A., Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R, Heinz, K and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(5), 305-329.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educ. Res.*, v.15, n .2, p. 4-14.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA PARA EL CRITERIO DE SEGUNDA DERIVADA. UN ESTUDIO DESDE LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN

A DIDACTIC ENGINEERING FOR THE SECOND-DERIVATIVE TEST. A STUDY FROM MODELING-GRAPHING

Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando, José David Zaldívar Rojas
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
amaranta.jimenez@hotmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx

Resumen
En este trabajo presentamos algunos resultados de una investigación en curso que tiene como objetivo resignificar la noción del criterio de la segunda derivada a través de la Modelación-Graficación y de una situación de modelación del movimiento (SMM). Adoptamos como metodología a la Ingeniería Didáctica, de la cual está concluido el análisis preliminar que consta de las dimensiones: epistemológica, cognitiva y didáctica. Posteriormente se implementó un instrumento que incorpora elementos tecnológicos tales como la calculadora graficadora y sensores de movimiento, a un grupo de estudiantes de nivel superior. El producto de este reporte es el rediseño de la SMM, que incorpora elementos tecnológicos. Actualmente la investigación se encuentra en una etapa de procesamiento de información para poder llegar a una fase de validación.

Palabras clave: ingeniería didáctica, modelación-graficación, derivada.

Abstract
In this paper we present some results of an ongoing research that aims to resignify the notion of the second derivative criterion through Modeling-Graphing and a movement modeling situation (SMM). We adopted as a methodology the Didactic Engineering, from which the preliminary analysis consisting of the epistemological, cognitive and didactic dimensions is concluded. Subsequently, an instrument was implemented that incorporates technological elements such as the graphing calculator and motion sensors, to a group of upper level students. The product of this report is the redesign of the SMM, which incorporates technological elements. Currently the research is in an information processing stage to reach a validation phase.

Key words: didactic engineering, modeling-graphing, derivative criteria.

Introducción

Nuestro objeto matemático de estudio es el criterio de la segunda derivada, el cual generalmente es estudiado desde una perspectiva algorítmica en un registro de representación principalmente algebraico (Ver, por ejemplo: Leithold (1998), Stewart (2012) y Larson, Hostetler y Edwards (2006)).

En diversas investigaciones dentro de la Matemática Educativa, se han destacado diversas dificultades de los estudiantes con respecto a la noción de límite o el concepto de Derivada (Salazar, Díaz y Bautista, 2009). Con respecto a la última noción, esta generalmente se interpreta en términos de un proceso algorítmico, algebraico y de procesos límite, además se ponen de manifiesto las dificultades que tiene los estudiantes para transitar de la gráfica de la función a la gráfica de la función derivada (Salazar *et al.*, 2009). En particular, cuando los estudiantes se enfrentan a los criterios de la derivada dentro de un curso regular de cálculo, dichas nociones parecería que sólo se usan para realizar gráficas "complicadas" y se dejan de lado los aspectos variacionales relacionados con las nociones de máximos, mínimos y la concavidad. De manera que el estudiante se queda con una presentación acotada de dichos criterios y el llenado de tablas para decidir si un punto es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada en dicho punto.

De lo anterior emana la siguiente pregunta de investigación, ¿Cómo se puede resignificar el criterio de la primera y segunda derivada haciendo uso de la tecnología? De manera que dichos criterios desarrollen el Pensamiento y Lenguaje Variacional en los estudiantes. La resignificación propuesta en nuestro trabajo se realiza con base en la categoría de Modelación-Graficación desarrollada en los trabajos de Suarez y Cordero (2010) y de la implementación de una situación de modelación del movimiento (SMM).

Problemática de investigación

Existe una extensa cantidad de bibliografía que habla sobre las dificultades del aprendizaje del cálculo. Al respecto, Hitt (2003) menciona que, si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegaran a una comprensión profunda del cálculo. En el diseño de nuestra situación pondremos especial énfasis en que el estudiante sea capaz de pasar de una representación gráfica a una verbal y viceversa.

Por su parte, Vinner (1989) reporta que entre los estudiantes que tienen éxito en matemáticas, el modo algebraico es más común cuando se resuelven problemas rutinarios o casi rutinarios. Las afirmaciones anteriores deben considerarse como reflejo de la situación actual en el aprendizaje de las matemáticas, donde el éxito se mide esencialmente por problemas de rutina que no requieren habilidad visual. En la situación que propondremos el estudiante requiere de habilidades visuales para poder resolver la tarea diseñada. Además, se pretende que por medio de la visualización el estudiante llegue a la resignificación del conocimiento.

Además, no se ha encontrado bibliografía que hable específicamente sobre los problemas de aprendizaje del criterio de la primera y de la segunda derivada, a pesar de que existe una extensa bibliografía que habla sobre los problemas de aprendizaje respecto al concepto de derivada.

La ingeniería didáctica

La ingeniería didáctica surgió en los años ochenta en Francia como una forma de encontrar una relación entre la investigación y la realización didáctica, sobre lo cual Artigue escribió lo siguiente: "Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico" (Artigue, Douady, Moreno y Gómez 1995, p. 33). Puede decirse que la ingeniería didáctica consta de cuatro fases principales: la planeación, el diseño, la experimentación y la validación.

Analizamos los criterios de primera y segunda derivada, y proponemos una Ingeniería Didáctica apoyada en la tecnología que ayude al estudiante a resignificar este concepto. Se ha realizado la parte del análisis preliminar, el cual consta de tres dimensiones, didáctica, cognitiva y epistemológica; además de un diseño de situación, del cual se realizó una prueba piloto, concluyendo la primera parte de esta investigación con la propuesta de un rediseño.

Análisis preliminar

Dimensión didáctica

Dentro de la dimensión didáctica, se realizó una revisión bibliográfica de cuatro textos clásicos de cálculo, los cuales son los siguientes: Stewart (2012), Leithold (1998), Larson *et al.* (2006) y Spivak (1996), específicamente sobre cuatro ejes: i) cómo presentan el criterio, ii) los registros de representación que priorizan, iii) el momento en el cual aparece el criterio durante el estudio del cálculo diferencial y iv) la función del criterio. Tras analizarlos, encontramos significativas semejanzas entre ellos, ya que privilegian lo algebraico sobre lo geométrico y se observa el empleo del llenado de tablas que algoritmizan el criterio y que pareciera que se deja como una herramienta para la graficación de funciones complicadas, tal y como se muestra en el ejemplo de la Figura 1.

Punto	$(-1, -2)$	$(1, 2)$	$(0, 0)$
Signo de $f''(x)$	$f''(-1) > 0$	$f''(1) < 0$	$f''(0) = 0$
Conclusión	Mínimo relativo	Máximo relativo	Falla de la prueba

Figura 1. Tomado de Larson et al. (2006, p. 194).

Otra de las dificultades se pone de manifiesto en el fragmento mostrado en la Figura 2 ya que se puede observar que la hipótesis de derivabilidad de la función es omitida, dando como resultado una presentación del concepto de una forma incompleta e imprecisa, pudiendo provocar en el estudiante dificultades o errores en la adquisición del concepto.

Prueba de la primera derivada Supongamos que $x = c$ es un número crítico de una función continua f.

a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
b) Si f' cambia de negativo a positivo en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
c) Si f' no cambia de signo en c (p. ej., si f' es positiva por ambos lados de c o negativa por ambos lados), entonces f no tiene ningún máximo o mínimo local en c.

Figura 2. Tomado de Stewart (2012, p. 291).

En síntesis y de acuerdo con los ejes de análisis de los textos donde se presenta el criterio, se observa que las situaciones donde es "aplicado" el criterio son particularmente para realizar gráficas de funciones "complicadas" y establecer intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos de la función. Se deja de

lado así, aspectos variacionales importantes como el comportamiento en el cual una función crece o decrece, es decir, aspectos de segunda variación.
Dimensión cognitiva

Muchas investigaciones han hablado sobre las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo. Por ejemplo, Cuevas, Pluvinage y Dorier (2013) señalan entre otras cosas la primacía de las representaciones algebraicas sobre otras representaciones de índole visual, así como la importancia de situaciones de contexto para abordar contenido matemático.

Uno de los elementos a utilizar en nuestra propuesta es la derivada resignificada como una velocidad, respecto de lo cual Zandieh (2000) menciona que el concepto de derivada puede ser representado gráficamente, como la pendiente de la recta tangente, verbalmente, como la razón de cambio instantánea, físicamente como la rapidez o velocidad, y simbólicamente como el límite del cociente de las diferencias. En su estudio destacó que los estudiantes tienen un entendimiento parcial del concepto de derivada, y que un entendimiento más completo debe englobar distintas formas en que el concepto se manifiesta y sus diferentes usos.

Dimensión epistemológica

El cálculo tardó más de un siglo en desarrollarse, es probable que debido a esto los estudiantes encuentren dificultades en la comprensión de las bases del cálculo. En el siglo XVIII el cálculo fue utilizado en grandes descubrimientos, pero los matemáticos de la época no se preocupaban por demostrarlo rigurosamente, por lo tanto, las manipulaciones con los infinitesimales eran permitidas sin una demostración previa. A finales del siglo XVIII aumentó el interés por parte de los matemáticos hacia la rigurosidad del cálculo debido a la necesidad de su difusión como cuerpo de conocimiento. El álgebra de desigualdades era una herramienta usada en la aproximación de soluciones, y es aquí donde Cauchy le dió un giro a la utilización de esta herramienta, ya que el álgebra de desigualdades sienta las bases de la rigurosidad del Cálculo (Grabiner, 1983).

Asimismo, y con respecto a la dimensión epistemológica, se ha puesto especial énfasis en la lectura de lo que se considera el primer libro de cálculo diferencial e integral de la historia, escrito por Agnesi (1748). En dicha obra, se propone un método para calcular máximos y mínimos, pero es interesante recalcar que la interpretación emana de un punto de vista geométrico, careciendo de un marco de referencia cartesiano como lo tenemos hoy en día. De aquí que para Agnesi un máximo se refiere a la máxima magnitud de la ordenada y el mínimo corresponde a la mínima magnitud de la misma, la cual puede tomar como mínimo valor cero. Estos cálculos fueron realizados obteniendo la tangente de la curva por medio de la primera fluxión y su igualación con cero (para encontrar el máximo), y la igualación con infinito para encontrar el mínimo.

Diseño

Con la intención de proponer una alternativa al estudio de los criterios de la derivada, y a partir de nuestro análisis preliminar, se decidió realizar un diseño de situación donde se resaltará un análisis Variacional de una SMM (Suárez y Cordero, 2010). Una SMM que se sustenta en la categoría de Modelación-Graficación, propicia una resignificación de la variación. A partir de la Categoría se realiza el diseño de la SMM cuyo argumento central será el *uso de la gráfica*, es decir, el argumento considera a las gráficas de las funciones como herramientas para modelar el cambio intrínseco a las funciones de posición, velocidad y aceleración, donde intervienen los conceptos de: razón de cambio, relación función-derivada, manejo de órdenes de variación, máximos y mínimos y acumulación. La SMM en sí permite provocar un escenario propicio para la aparición de la argumentación que responde a la situación.

En nuestro caso partiremos de la gráfica como un elemento central en explicaciones, tales como la caracterización de los puntos extremos y la relación física-numérica que guardan.
Se realizó un primer diseño de situación que constó de tareas y se aplicó una prueba piloto de la situación con un grupo de 20 estudiantes de segundo semestre de la carrera de Ingeniería Física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. En el momento de la implementación, los estudiantes no habían estudiado en su curso de cálculo el criterio de la segunda derivada.

Para la realización de las tareas, se permitió a los estudiantes el empleo de tecnología, que en nuestro caso constó de una calculadora graficadora conectada a un sensor de movimiento, algunos ejemplos de gráficas que se pueden generar con el sensor se muestran en la Figura 3. La sesión fue videograbada y se recopilaron las producciones escritas de los estudiantes a través de las hojas de trabajo. El análisis se realiza tomando en consideración las producciones escritas y la revisión del video de la implementación.

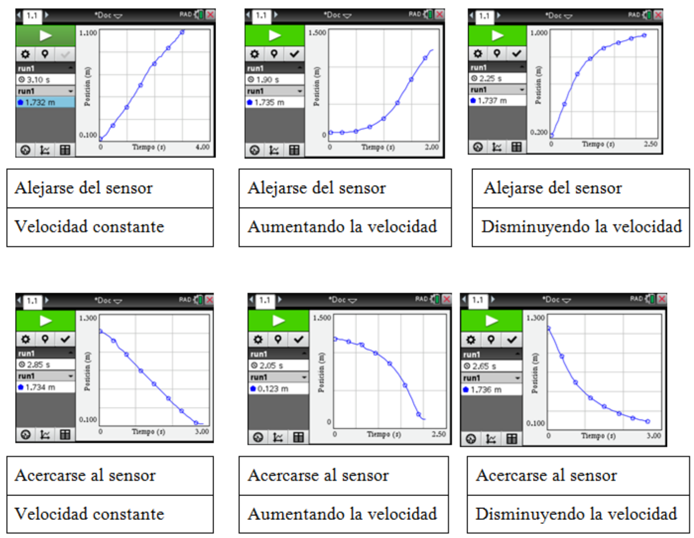


Figura 3. Ejemplos de las gráficas que se pueden generar con el sensor y la calculadora, debajo de cada una de ellas se describe el movimiento que se tiene que realizar para generarlas.

Análisis a priori de la pueba piloto

La primera actividad tiene como título “adivina la gráfica” y tiene como objetivo que el estudiante dibuje sobre cuatro ejes cartesianos la curva que se producirá realizando combinaciones de movimientos, como lo son: alejarse o acercarse del sensor, aumentar, disminuir o moverse con velocidad constante, cabe mencionar que se le hace explícito al estudiante que los ejes representan la posición vs tiempo. Posteriormente se pide al estudiante que realice dichos movimientos con el sensor para comprobar en cuáles de ellos su hipótesis fue correcta. Se pregunta al estudiante si existe alguna otra forma de moverse, aparte de las que puso en los ejes cartesianos con los movimientos solicitados. Existen otras dos formas de moverse que no fueron puestas en los ejes cartesianos a propósito y se pretende que el estudiante deduzca que esos son los movimientos faltantes. En nuestro caso la respuesta esperada es alejarse del sensor disminuyendo la velocidad y acercarse al sensor aumentando la velocidad.

En la segunda actividad titulada: “¿Cómo es mi velocidad?”, se le proporcionan al estudiante seis curvas, de las cuales debe describir el movimiento que realizó en cada una de ellas (acercarse, alejarse, aumentar o disminuir velocidad, o velocidad constante) posteriormente se cuestiona al estudiante, preguntas cuyas respuestas se esperan sean concernientes al crecimiento o decrecimiento, y a la relación que existe entre la pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea en un punto.

La tercera actividad se titula “Viaje sencillo o viaje redondo”, cuyo propósito es que el estudiante realice un desplazamiento de retorno hacia un punto, produciéndose así un máximo o un mínimo. Se pretende que el estudiante estudie las posibilidades de realizar dicho movimiento mediante la variación de la velocidad.

La cuarta actividad tiene como título “El criterio de la primera y segunda derivada”, y tiene como objetivo el resignificar el criterio de la primera y segunda derivada, por medio del análisis de la variación de la velocidad en 4 curvas propuestas, además se pretende que el estudiante comprenda que la condición de continuidad y derivabilidad en el intervalo es necesaria para poder usar los criterios.

Resultados del pilotaje

En la primera actividad los estudiantes no tuvieron dificultades para predecir las gráficas, sin embargo, ninguno de ellos pudo deducir las formas faltantes de moverse (alejarse del sensor disminuyendo la velocidad y acercarse al sensor aumentando la velocidad), dando como respuestas formas más complejas de graficación como lo es la función escalonada (Función que estrictamente hablando es físicamente imposible de conseguir utilizando el sensor de movimiento), o movimientos armónicos, como se puede observar en la Figura 4.

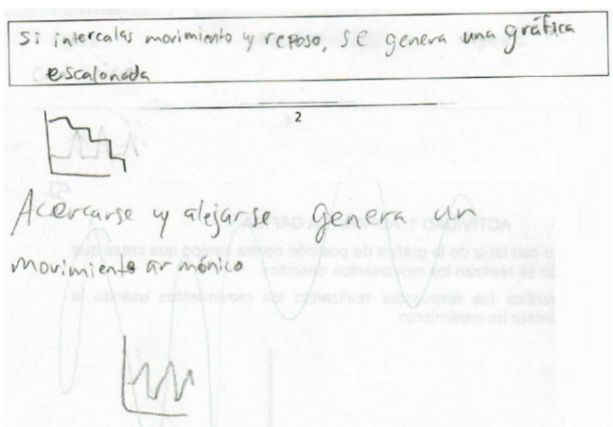


Figura 4. Ejemplo de los movimientos frente al sensor propuestos por los estudiantes.

En la segunda actividad, dada la orientación de los encuestados (ingenieros físicos en formación), se obtuvieron respuestas como: Movimiento Rectilíneo Uniforme y uniformemente acelerado. Cuando esperábamos respuestas como función creciente o función decreciente, recibimos respuestas interesantes similares a las esperadas, como lo son: "se acercan al eje x", "empiezan abajo y terminan arriba", "que cada vez las imágenes tienden más y más a cero". La mayoría de los estudiantes pudo relacionar la pendiente de la recta tangente con la velocidad instantánea en un punto.

Otra de las cosas que se pudieron observar (Figura 5) es que algunos estudiantes consideran la pendiente de la recta tangente en un punto y la velocidad en dicho punto como cosas distintas. El planteamiento de dicha pregunta pone de manifiesto otra dificultad ya que los estudiantes no pudieron llegar a la conclusión de que la velocidad en la Figura 6 es cero, y solo lo ven en términos de la posición, ya que una posición constante corresponde a una velocidad cero.

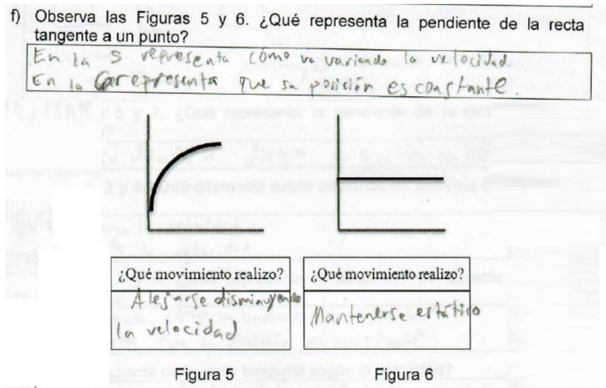


Figura 5. Los estudiantes consideran la pendiente de la recta tangente y la velocidad como cosas distintas.

En la tercera actividad se obtuvieron resultados interesantes, ya que algunos estudiantes plantearon soluciones que eran físicamente imposibles, cabe destacar que con el sensor solo se pueden realizar gráficas de funciones continuas y derivables, debido a la naturaleza de los fenómenos de movimiento clásico. Ya que por ejemplo, para realizar con ayuda del sensor y la calculadora una gráfica continua pero no derivable en todos sus puntos, implicaría, en el punto donde no es derivable, un cambio repentino en la pendiente de la recta tangente, que en este caso se refiere a un cambio repentino en la velocidad, el cuál es imposible de generar, como se puede observar en las dos últimas gráficas de la Figura 5.

En la cuarta actividad los estudiantes tenían claro el signo de las pendientes analizando una curva en dos partes, además de las nociones de crecimiento y decrecimiento de las funciones, resignificadas como la acción de alejarse o acercarse.

En el análisis anterior de la etapa de pilotaje se puede observar también que la gráfica fue usada para comprender el fenómeno a partir de las formas de las gráficas que se obtenían con la tecnología.

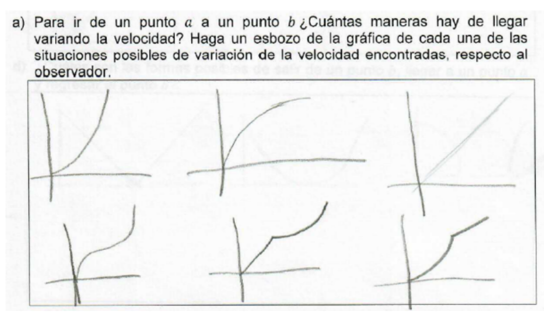


Figura 6. Las últimas dos gráficas muestran soluciones físicamente imposibles de realizar frente al sensor.

Resultado: El rediseño

Tras analizar la prueba piloto se llegó a un rediseño que toma en cuenta las respuestas de los estudiantes en la etapa de pilotaje, ya que los estudiantes tuvieron algunas dificultades con las instrucciones de las tareas. Así, el rediseño se hizo de una manera más concreta para evitar soluciones ambiguas por parte de los estudiantes.

El rediseño consta de tres momentos de los cuales a cada uno tiene asociada una tarea, cada una con un propósito que conduce, finalmente a la resignificación del criterio de la segunda derivada.

Momento 1: establecer funciones crecientes y decrecientes
Tarea 1: Tiene como propósito que el estudiante identifique qué relación existe entre el signo de la pendiente de la recta tangente y el crecimiento o decrecimiento de la función.

Momento 2: reconocer la variación igual a cero (máximos y mínimos)
Tarea 2: Tiene como finalidad que el estudiante identifique que si necesita regresar a un mismo punto obligatoriamente necesita pasar por una velocidad cero, lo cual resignifica el Teorema de Rolle, el cual, como podemos recordar, establece que: si $f(x)$ es una función derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$ entonces existe un punto intermedio c, esto es $a < c < b$, tal que $f'(c) = 0$.

Momento 3: reconocer la variación en el comportamiento que varía.
Tarea 3: Habla sobre la variación de la velocidad, es decir, el cambio del cambio, lo cual finalmente conduce al criterio de la primera y de la segunda derivada.

Comentarios finales

El rediseño fue aplicado a un grupo de nueve estudiantes de 7º y 8º semestres de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. El análisis de estos resultados se encuentra en proceso. Para ello se considera la videograbación de la sesión con los estudiantes que duró aproximadamente 2 horas, así como las producciones escritas de los mismos.

Es importante mencionar que cuando el estudiante analiza la variación de la velocidad a través de la gráfica de posición que ha sido creada por medio de una situación de modelación de movimiento, se crea un escenario que conducirá a un significado del criterio de la segunda derivada, distinto al que se muestra en el ámbito académico actual.; un escenario donde la concavidad de la curva se entiende a través de un cambio en la velocidad.

Por último, consideramos que el dejar que la ecuación sea el elemento central de una explicación matemática, podría ser para el estudiante difícil de comprender o visualizar, pero, por el contrario, si se muestra una situación de modelación de movimiento, se presenta otra alternativa a la enseñanza, donde el estudiante resignifica su conocimiento.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. G. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Milán, Italia: Regia Ducal Corte.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Cuevas, C., Pluvinage, F. y Dorier, J. (2013). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral*. México: Pearson Educación.

Grabiner, J. V. (1983). Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90(3):185-194.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. In *XI Meeting of Middle-Higher Level Mathematics Teachers, Michoacan University San Nicolás de Hidalgo, Morelia (Mexico)*.

Larson, R., Hostetler, R., y Edwards, B. (2006). *Cálculo con geometría analítica.* México: McGraw-HiII Interamericana.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. México: Oxford University Press.

Salazar, C., Díaz, H. y Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis: Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, (26), 62-82.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal*. México: Reverté.

Stewart, J. (2012). *Cálculo, trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4), 319-333.

Vinner, S. (1989). The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 149-56.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103-127.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

FORMAÇÃO CONTINUADA A DISTÂNCIA: ATIVIDADES DE VIVÊNCIA PARA SUBSIDIAR A PRÁTICA DE ENSINO COM TECNOLOGIA

CONTINUING DISTANCE LEARNING: DIDACTIC EXPERIENCE ACTIVITIES TO SUPPPORT TEACHING PRACTICE USING TECHNOLOGY

Fábio Henrique Patriarca, Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
patriark@uol.com.br, nielce.lobo@gmail.com

Resumen

Este artigo discute resultados de pesquisa sobre uma formação continuada à distância para professores de Matemática atuantes em escolas estaduais de São Paulo, Brasil. A formação abordou conteúdos de Trigonometria do Ensino Médio. Neste recorte foi privilegiada a discussão de parte da formação na qual se desenvolveram atividades de vivência com objetivo de integrar tecnologias ao ensino e subsidiar a prática docente. Entre essas atividades foi selecionado para discussão o experimento "A Roda Gigante". A fundamentação sobre o fomento do desenvolvimento profissional docente em processos formativos veio das ideias de Imbernón, sobre a prática de ensino integrando tecnologia, adveio dos estudos de Bittar e, sobre os conhecimentos profissionais para ensino, das pesquisas de Mishra e Khoeler. Os dados foram coletados do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) do curso e os resultados evidenciaram que houve impulso na reflexão sobre a prática e na integração de tecnologia ao ensino.

Palavras-chave: formação continuada; tecnologia; atividade de vivência

Abstract

This article discusses research results on distance learning for mathematics teachers working in state schools in São Paulo, Brazil. The training addressed contents of Trigonometry of High School. The focus was on the discussion of part of the training in which life activities were developed in order to integrate technologies into teaching and to subsidize teaching practice. Among these activities was selected to discuss the experiment "The Giant Wheel". The reasoning about the promotion of professional development in teaching processes came from the ideas of Imbernón, on the practice of teaching integrating technology, following the studies of Bittar and, on professional knowledge for teaching, the researches of Mishra and Khoeler. The data were collected from the Virtual Learning Environment (AVA) of the course and the results showed that there was an impulse in the reflection about the practice and the integration of technology in teaching.

Key words: continuous teacher education; technology; didactic experience

Introdução

A pesquisa que subsidia este artigo foi desenvolvida no contexto de um curso de formação continuada de um Programa intitulado "M@tmídias". Esse Programa, que foi desenvolvido e implementado pela Escola de Formação e Aperfeiçoamento de Professores do Estado de São Paulo (EFAP/SP), Brasil, se propôs a promover formação continuada a distância aos docentes, com objetivo de subsidiar a utilização, em sala de aula, de recursos tecnológicos, tais como: vídeo, áudios, softwares e experimentos e subsidiar a prática docente. As atividades propostas no Programa foram aliadas à Situações de Aprendizagens constantes nos materiais impressos disponíveis para professores e alunos das escolas públicas estaduais de São Paulo. O Programa M@tmídias foi composto de três cursos a distância contemplando todos os conteúdos matemáticos do Ensino Médio do Currículo Oficial paulista, abordados com a tecnologia, utilizando para isto objetos de aprendizagem. O Ensino Médio é o segmento da Educação Básica brasileira que inclui alunos na faixa etária de 15 aos 17 anos.

A pesquisa foi delimitada à investigação da segunda edição do Curso de Formação Continuada de Professores de Matemática do Ensino Médio, denominado: M@tmídias 2 – Objetos de Aprendizagem multimídia para o ensino de Matemática. O curso M@tmídias 2 contemplou, entre outros, o ensino de trigonometria e teve como público alvo professores atuantes no segundo ano do Ensino Médio (alunos de aproximadamente 16 anos).

Este curso foi composto por cinco módulos, sendo os quatro primeiros para estudo de objetos de aprendizagem, aos quais foram atreladas atividades avaliativas, a saber: um fórum de discussão, uma questão dissertativa e uma questão objetiva. O quinto módulo propôs uma atividade didática de vivência em sala de aula, na qual os cursistas deveriam aplicar aos seus alunos um objeto de aprendizagem, - associado sempre ao conteúdo curricular da respectiva série. Deveriam ainda documentar a aplicação, produzindo um relatório a ser anexado no ambiente virtual de aprendizagem do curso (AVA – EFAP).

No curso o termo "Objeto de Aprendizagem" foi definido como sendo: *qualquer recurso que possa ser reutilizado para dar suporte ao aprendizado. Sua principal ideia é 'quebrar' o conteúdo educacional disciplinar em pequenos trechos que podem ser reutilizados em vários ambientes de aprendizagem.*

Vale ressaltar que o ensino de Trigonometria tem sido considerado como um grande desafio para os professores da rede pública estadual paulista pois, como afirma (Amaral, 2002) "é o conteúdo considerado como um dos de mais difícil compreensão dos alunos, acreditamos que essa dificuldade se deva ao seu grau de abstração e a forma expositivo-transmissiva em que é ensinada" (p.11). Assim sendo, partimos do pressuposto que um curso de formação continuada que discuta metodologias com uso de tecnologia pode impactar a prática docente e auxiliar a quebrar a forma puramente expositiva como o conteúdo de trigonometria tem sido abordado em sala de aula.

Outra dificuldade apontada pelos professores da rede estadual paulista, em pesquisa realizada em todas as Diretorias de Ensino do Estado de São Paulo, é a complexidade em justificar aos alunos a importância em se aprender trigonometria. Nesse sentido, o curso procurou apoiar uma abordagem de ensino na qual o aluno possa "dar sentido" aos conceitos trigonométricos, tais como: a periodicidade, as funções trigonométricas, o conceito de amplitude, o gráfico de seno e cosseno por meio do uso de objetos de aprendizagem pode ser relevante para a prática docente. Para tanto, foram discutidos um vídeo "A Dança do Sol", com foco no estudo do movimento periódico do sol e no analema formado no céu, um experimento "A Roda Gigante", para discussões sobre movimento circular e periódico da roda e sobre o formato do gráfico do deslocamento em função do tempo, por último, o software "Ondas Trigonométricas", cujo cerne foi a discussão dos gráficos das funções trigonométricas.

Neste artigo privilegiamos a discussão do quinto módulo do curso no qual foram empreendidas atividades de vivência no ensino de trigonometria com tecnologias, procurando subsidiar a prática docente. Entre as atividades de vivência postadas no AVA discutiremos as relativas ao experimento "A Roda Gigante".

Fundamentação teórica

A fundamentação teórica da pesquisa à qual esteve artigo se refere, no tocante à formação continuada foi construída pelos princípios de (Imbernón, 2009) para o qual está deve "fomentar o desenvolvimento pessoal, profissional e institucional do professorado, potencializando um trabalho colaborativo para mudar a prática" (p.49). Para o autor, são necessárias duas condições principais para que verdadeiramente na formação continuada aconteça: a reflexão sobre a prática em sala de aula e uma maior autonomia na formação, com direta intervenção dos professores de acordo com as necessidades de cada um, que uma formação tenha começo, meio e fim e não reuniões estanques. Para o autor, uma formação continuada deve centrar-se em cinco princípios:

> 1. A reflexão prático-teórica sobre a própria prática, mediante uma análise da realidade educacional e social de seu país, sua compreensão, interpretação e intervenção sobre a mesma realidade. A capacidade dos professores de gerar conhecimento pedagógico por meio da análise da prática educativa. 2. A troca de experiências, escolares, de vida, etc. e a reflexão entre indivíduos iguais para possibilitar a atualização em todos os campos de intervenção educacional e aumentar a comunicação entre os professores. 3. A união da formação a um projeto de trabalho, e não ao contrário (primeiro realizar a formação e depois um projeto). 4. A formação como arma crítica contra práticas laborais como a hierarquia, o sexismo, a proletarização, o individualismo e etc., e contra práticas sociais, como a exclusão e a intolerância. 5. O desenvolvimento profissional da instituição educacional mediante o trabalho colaborativo, reconhecendo que a escola está constituída por todos e coincidimos na intenção de transformar essa prática. Possibilitar a passagem da experiência de inovação isolada e celular para a inovação institucional. (Imbernón, 2009, p. 49)

Com isso, na profissão docente, o professor necessita mobilizar vários conhecimentos a fim de planejar, desenvolver e avaliar suas ações pedagógicas trata-se de um contexto de atuação.

Quanto à integração de tecnologia ao ensino, entendemos neste texto tal integração no sentido dado por (Bittar, Guimaraes e Vasconcelos, 2008) para quem integrar tecnologia significa não apenas inseri-la na sala de aula, mas promover uma transformação no modo de ensinar, que o uso do computador seja rotineiro em sala de aula, que seja avaliado como um instrumento qualquer, seja o giz, um material concreto, ou outro que seja usado e faça parte das atividades ditas como "normais" em sala de aula. E para isso aconteça o professor deve conhecer os materiais didáticos, ele precisa participar de cursos de formação continuada para que possa desenvolver além do conhecimento do currículo, os saberes tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo necessários para atuar, isto é, para a prática de ensinar em um ambiente com tecnologia. Mas hoje ainda o que tem sido feito é:

> ... para nós o que tem sido feito na maioria das escolas, é a inserção da tecnologia, os professores usam, mas sem que isso provoque uma aprendizagem diferente do que se fazia antes e, mais que isso, o computador fica sendo um instrumento estranho à prática pedagógica, usado em situações extraclasse que não serão avaliadas. (Bittar, Guimaraes e Vasconcelos, 2008, p. 86)

Corroboramos com as ideias de Bittar et all (2008), quanto à importância de integrar a tecnologia ao currículo e não apenas inseri-las por modismo.

Em relação aos conhecimentos profissionais docentes na presença da tecnologia o fundamento veio das pesquisas de Mishra e Khoeler (2006) que construíram um modelo a partir das ideias da Base de Conhecimento de (Shulman, 1987), especificamente aquelas relativas ao Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, que se encontra na intersecção do Conhecimento Pedagógico com o Conhecimento do Conteúdo. Os autores Mishra e Khoeler integraram à base de conhecimentos para ensino o conhecimento tecnológico. Tal conhecimento se intercepta com os que (Shulman, 1986; 1987) identificou, gerando um novo tipo de conhecimento: o TPACK (*technological pedagogical contente* *knowledge*) que se apoia na ação docente e cuja construção se dá na prática pedagógica. Este conhecimento, na verdade, é mais do que apenas a junção entre o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico e o conhecimento tecnológico. Ele é complexo e envolve o ensino de conteúdos curriculares por meio de técnicas pedagógicas, métodos ou estratégias de ensino, que utilizam adequadamente tecnologia para ensinar o conteúdo de forma diferenciada e de acordo com as necessidades dos alunos. (Mishra e Koehler, 2006) o definem como o conhecimento necessário ao Professor de como utilizar a tecnologia para o ensino de qualidade do conteúdo, usando suas bases de maneira integrada e observando suas relações complexas:

> ...conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo é uma forma emergente de conhecimento que vai além de todos os três componentes (conteúdo, pedagogia e tecnologia) [...]. A integração da tecnologia produtiva no ensino precisa considerar todas as três questões não isoladamente, mas dentro das complexas relações no sistema definido pelos três elementos-chave. (Mishra e Koehler, 2006, pp. 1028-1029) tradução livre

Assim sendo, o TPACK fornece a base de conhecimentos para o ensino, que engloba a integração de tecnologias, no nosso caso, a matemática e a pedagogia, que os professores devem mobilizar quando ensinam conteúdos curriculares.

Metodologia da pesquisa

A metodologia da pesquisa a qual se refere este texto foi documental, na acepção de (Gil, 2008). Esta pesquisa qualitativa se classifica, quanto aos fins, como exploratória e descritiva. Consideramos como sendo pesquisa exploratória, pois busca identificar as possibilidades de uma formação continuada à distância para auxiliar o professor a (1) integrar tecnologia ao ensinar e (2) construir conhecimento pedagógico tecnológico do conteúdo.

A pesquisa foi descritiva, pois considerou as percepções de professores participantes do curso. Os dados coletados no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) da formação investigada foram referentes às inserções dos participantes nos fóruns, às respostas à questão dissertativa proposta e aos relatórios da atividade final intitulada “Atividade de Vivência”. Tal atividade consistiu na aplicação em sala de aula, com alunos, de um dos objetos de aprendizagem discutidos no curso. A aplicação documentada deveria produzir um relatório para ser anexado ao AVA. A pesquisa se desenvolveu em três etapas: A primeira foi à coleta dos dados do contexto da pesquisa referentes ao ensino de trigonometria e a questões curriculares; coleta de dados sobre a constituição e desenvolvimento da Escola de Formação e Aperfeiçoamento de professores do Estado de São Paulo – EFAP; coleta referente ao histórico dos cursos on-line oferecidos pela EFAP e à concepção e estrutura do Programa M@tmídias. A segunda etapa foi a seleção e organização dos materiais estocados no AVA– EFAP do programa, relativos à segunda edição do curso de Formação Continuada de Professores de Matemática, M@tmídias 2 – Objetos de Aprendizagem multimídia para o ensino de Matemática, relativos ao conteúdo de Trigonometria do Currículo Oficial do Estado de São Paulo, da 2ª série do Ensino Médio. A terceira etapa foi o tratamento e análise dos dados. O tratamento e a análise dos dados foram feitos de forma interpretativa por análise de conteúdo e análise documental, segundo (Bardin, 2011).

A análise documental se assemelha à análise de conteúdo em alguns procedimentos, existindo diferenças essenciais, tal como:

> A documentação trabalha com documentos; a análise de conteúdo com mensagens (comunicação); a análise documental faz-se, principalmente, por classificação-indexação; a análise categórica temática é, entre outras, uma das técnicas da análise de conteúdo; o objetivo da análise documental é a representação condensada da informação, para consulta e armazenamento; o da análise de conteúdo é

> a manipulação de mensagens (conteúdos e expressão desse conteúdo) para evidenciar os indicadores que permitam inferir sobre outra realidade que não a da mensagem. (Bardin, 2011, p. 52)

Corroboramos com as ideias de (Bardin, 2011), quanto à "manipulação de mensagens", "representação condensada da informação", pois nessa pesquisa, os registros dos cursistas referentes à questão dissertativa, ao fórum de discussão investigados foram lidos, identificadas semelhanças e diferenças por meio de tabelas condensadas no Excel, e então, agrupados de modo a evidenciar categorias de análise. A partir do estabelecimento dessas categorias, a análise foi interpretativa utilizando análise de conteúdo e análise documental. Quanto aos registros estocados no AVA, a análise envolveu os objetos de aprendizagem referentes à trigonometria e as Atividades de Vivência anexadas no ambiente virtual. Os dados foram separados e condensadas as informações, particularmente por tabelas no Excel elaboradas para apontarmos os pontos comuns, os dispares e obtermos uma síntese que nos aproximasse dos objetivos de pesquisa.

■ Atividades de vivência para a prática com tecnologia

As atividades de vivência como citadas anteriormente, foram propostas para que o participante do curso planejasse uma aula utilizando preferencialmente um dos objetos de aprendizagem analisados no curso e, então a desenvolvesse em classe. A aula deveria ser documentada e, a partir dela, redigido um relatório a ser postado no AVA – EFAP.

O relatório deveria incluir informações, tais como: Nome da Escola onde realizou a atividade; Série do Ensino Médio que foi realizada a atividade; Número de alunos participantes; vinculação ao conteúdo curricular; nome do objeto de aprendizagem selecionado e o link da página em que está disponibilizado; formas de avaliação dos alunos; objetivos de aprendizagem alcançados; formas de registro da atividade aplicada (documentos, fotos, gravações, etc.); grau de dificuldade/facilidade no uso do objeto de aprendizagem pelos alunos; interesse despertado nos alunos pelo conteúdo trabalhado com a utilização do objeto; contribuições do uso do objeto para a construção dos conceitos matemáticos envolvidos; adaptações ou diferentes formas de aplicação identificadas pós aplicações e considerações finais sobre a atividade.

Enfatizamos que o curso M@tmídias 2 segunda edição teve 600 participantes distribuídos em 15 turmas com 40 cursistas em cada uma delas. As Atividades de vivência de todas as 15 turmas do curso, turma 1 (T1) a turma 15 (T15), foram lidas e classificadas nesta pesquisa. A partir disso, identificamos as atividades de vivência com foco em Trigonometria. Os dados estuados permitem deduzir que, de um total de 600 professores cursistas matriculados por adesão, 37,6% foram considerados evadidos, pois não postaram atividade de vivência ou deixaram de participar de mais de um módulo ou por algum motivo particular. Dos 62,4% professores cursistas que concluíram o curso, 7,75% escolheram o conteúdo de Trigonometria, ou seja, 29 cursistas postaram atividade de vivência com conteúdo de Trigonometria. Das atividades de vivência sobre Trigonometria, 14 foram sobre "A Roda Gigante", 8 foram sobre "A Dança do Sol", 5 foram sobre o "Ondas Trigonométrica" e 2 foram sobre outros objetos relacionados à Trigonometria – não estudados no curso, porém do repositório indicado.

O quadro a seguir sintetiza as escolhas de objetos de aprendizagem pelos participantes

Quadro 1: Objetos de aprendizagem escolhidos pelos participantes do curso

Atividades de Vivência	Quantidade de Cursistas
A Dança do Sol vídeo	8
A Roda Gigante experimento	14
Ondas Trigonométricas softwares	5
Outros Objetos envolvendo Trigonometria	2
TOTAL	29

Fonte: (Patriarca, 2016)

Observamos que,dos 29 participantes que aplicaram objetos de aprendizagem relativos à trigonometria na sua Atividade de Vivência, a maior frequência de escolha foi para o experimento “A Roda Gigante”, a qual discutimos a seguir

O Experimento “A Roda Gigante”

O experimento “A Roda Gigante”, foi o segundo objeto de aprendizagem estudado no curso M@tímidias 2, proposto para integração da tecnologia à prática do ensino de Trigonometria.

O experimento Roda Gigante sugere a construção de um modelo, ou seja, uma miniatura dessa atração dos parques de diversão. Nesse modelo, os alunos poderão coletar diversas medidas referentes ao movimento desse brinquedo e podem, por exemplo, constatar regularidades, tais como o período de rotação. O experimento tem como objetivo introduzir o conceito de movimentos oscilatórios, período, pontos de máximo e mínimo em funções periódicas, também relacionar o experimento com a introdução do círculo trigonométrico.

A partir da exploração do experimento, os alunos obtêm informações e podem construir gráficos, os quais podem ser vinculados às sugestões de atividade dos materiais curriculares distribuídos na rede pública estadual paulista, com o “objetivo de fazer com que os alunos visualizem mais claramente o movimento da “onda” como uma das possíveis formas para a representação cartesiana” (Patriarca, 2016). O primeiro passo é proceder à construção dessa miniatura da Roda Gigante, necessária para desenvolver o experimento. Está sugerida a utilização de materiais recicláveis e simples tais como régua, algumas tampinhas de garrafa pet, cola, barbante, tesoura e pequenos círculos de papelão. As orientações para a construção dessa miniatura estão disponíveis nas fichas do experimento para os alunos encontradas no site do repositório M³ da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP e no ambiente do curso M@tmídias 2. Além disso, há uma videoaula para que os professores cursistas acompanhassem a construção da Roda Gigante.

No repositório M³ há um Guia do Professor e nele estão orientações para a aplicação desse experimento com seus alunos, estão explicitados os objetivos desse experimento, sugestões de atividades, exercícios, motivação, de modo a subsidiar o professor a estabelecer relação entre o experimento e o Currículo Oficial do Estado de São Paulo. Entre as atividades estudadas nesse experimento, o Guia do Professor sugere através de uma primeira atividade que o professor comece definindo o conceito de radiano, como segunda atividade sugere que seja estudado o sobe e desce das cadeiras da Roda Gigante e que também seja abordado ponto de máximo e mínimo e a construção de gráfico, a partir do qual sejam discutidos os períodos de intervalos regulares, ou seja, a função seno e cosseno e, por fim, seja proposta uma atividade para a generalização dessas funções. O acesso ao Guia do Professor é livre e para maiores informações, consulte http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1033. Além disso, também estão elencadas as possibilidades de integração de tecnologia na aula de trigonometria uma vez que o professor participante deve participar ativamente desde a construção da miniatura até a construção dos gráficos com seus alunos e, segundo Bittar *et all* (2008), é nesse momento que o professor estão integrando a tecnologia, quando ele faz parte da construção da atividade, da sua aula, para que isso não seja mais uma aula com computadores sem necessidade do recurso tecnológico para a análise dos dados obtidos com a construção do experimento. Nesse objeto de aprendizagem também estão explicitas as características do Conhecimento Específico do Conteúdo, Conhecimento do Currículo e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo apresentados por (Shulman, Knowledge and teaching: foundations of the new reform, 1987). Além disso, o objeto de aprendizagem "Roda Gigante" evidencia a possibilidades didáticas para integração de tecnologia ao currículo Entendemos que as discussões propostas sobre esse objeto de aprendizagem e sua aplicação em sala de aula podem possibilitar uma nova abordagem desse conteúdo nas aulas de Trigonometria no Ensino Médio, especialmente integrando a tecnologia ao ensino. Na proposta da formação continuada, o cursista deveria construir sua atividade de vivência, planejando desde a escolha do objeto de aprendizagem até a forma de mediação da sala de aula; deveria aplicar a sequência, analisar os resultados e elaborar o relatório para, então, postá-lo no AVA.

Na sequência analisamos atividades de vivência estocadas no AVA relacionadas a esse objeto de aprendizagem.

■ As atividades de vivência e o experimento Roda Gigante

O curso de formação continuada aqui analisado (M@tmídias 2, 2ª edição) teve 600 professores matriculados e 375 concluintes, com 29 cursistas escolhendo a trigonometria para aplicar como atividade de vivência. Das 29 atividades de vivência sobre Trigonometria, o experimento "A Roda Gigante", foi escolhido por 14 dos professores. Um dos principais motivos dessa escolha, segundo os cursistas, foi que esse objeto de aprendizagem remete a construção de um produto, nesse caso a miniatura de uma roda gigante, objeto que mostra concretamente o seu funcionamento, o que pode motivar muito o aluno e possibilitar interessantes discussões em sala de aula. Essa prática não é comum no Ensino Médio, particularmente quanto ao uso de material concreto e talvez isso tenha sido fundamental para a escolha do professor, pensando em motivar e prender a atenção dos alunos. Outra possibilidade para explicar a escolha é que esse experimento pode auxiliar na concretização sobre o funcionamento de um movimento periódico, o que auxiliaria os alunos a compreenderem melhor o fenômeno ali analisado.

O excerto a seguir foi retirado do fórum sobre o objeto de aprendizagem "A Roda Gigante" e corrobora essa constatação:

> 4/8/2014 12:19 ...Também penso que a realização do experimento favorece o desenvolvimento dos conceitos envolvidos de forma investigativa e significativa(...), mas, o que mais gosto no trabalho articulado com o currículo, é o quanto ganhamos na sistematização dos conceitos trigonométricos envolvidos, de forma significativa e contextualizada

O cursista menciona também a importância de articular o conteúdo curricular com atividades que favoreçam a participação ativa e investigativa do aluno. Na figura 1 apresentamos um exemplo de ilustração contida em relatório de vivência de um professor cursista.

Figura 1: Alunos construindo o experimento Roda Gigante
Fonte: (Patriarca, 2016)

A ilustração acima mostra alunos construindo a miniatura da roda gigante em sala de aula com o auxílio do professor. Sobre as aulas nas quais a atividade de vivência foi desenvolvida, podemos constatar no depoimento dos professores constante nos relatórios de vivência que:

> Foram aulas diferenciadas que fizeram a diferença para vários alunos, embora eu tenha utilizado mais aulas do que o previsto, quando analiso o processo, verifico que foi muito produtivo, foi a primeira vez que desenvolvi tal atividade. Também foi a primeira vez que estive numa sala de informática com meus alunos, foi uma experiência incrível, sair da zona de conforto é assustador, e mesmo não sabendo tanto de informática, pude ajuda-los com meu conhecimento. Eu já tinha trabalhado o círculo trigonométrico com eles, usando EVA, mas nem todos conseguiram entender que ângulos de 60º e 120º possuem o mesmo seno, e com a experiência da roda gigante eles perceberam facilmente que os valores eram iguais. Costumo dizer que é preciso formar uma imagem para depois abstrair e tal imagem foi formada com a ajuda da roda gigante. (Professor CLD – relatório de vivência).

Podemos observar no depoimento desse professor que a sala de informática na escola não é usada no cotidiano, não é algo trivial, rotineiro, ainda assusta professores. Mas alguns desses, como podemos observar pelo o depoimento acima, age como parceiro dos alunos, quando o professor não domina a tecnologia, e a experiência acabam sendo incríveis como relatado, e o trabalho proposto no início se conclui a contento.

Considerando o conjunto das 29 experiências de vivência, a partir da análise dos relatórios de vivência, observamos que o experimento Roda Gigante foi aplicado em todas as séries do Ensino Médio e, apenas ele, sem utilização de qualquer outro objeto de aprendizagem como apoio para a aula. Dos quatorze professores que utilizaram a "Roda Gigante", treze deles a integraram ao conteúdo da segunda série do Ensino Médio, que tinha como assunto principal, a periodicidade e o modelo da circunferência trigonométrica, tal como discutido na videoaula do curso. Houve um professor que a integrou ao conteúdo de equações trigonométricas.

Observamos que, do total dos professores que utilizaram esse objeto de aprendizagem em sua atividade de vivência, onze aplicaram na 2ª Série do Ensino Médio, tendo, objetivo central, a introdução de conceitos de funções periódicas e a relação entre a amplitude da função, a periodicidade., a aplicação de funções trigonométricas de forma lúdica e para concretizar a aplicação das funções trigonométricas. Dois professores aplicaram na 1ª Série do Ensino Médio, com objetivo de relacionar o objeto de aprendizagem com funções trigonométricas, dois utilizaram esse objeto na 3ª Série do Ensino Médio, sendo que um deles abordou como revisão de funções (gráficos e características) e o outro utilizou para desenvolver o conteúdo de funções da 2ª Série em um Centro Estadual de Educação de Jovens e Adultos, no qual a frequência é flexível e os alunos recebem atendimentos individualizados, o professor desenvolveu a atividade juntamente com alunos da segunda série (conforme Relatório de Vivência do professor JOA).

De acordo com os dados analisados acima, identificamos nas atividades de vivência evidências de mobilização de conhecimento pedagógico como verificamos no trecho:

> Utilizar os objetos de aprendizagem, tais como o vídeo, o experimento e o software, permite ao professor trabalhar com uma metodologia diferente e mais atraente para o aluno. Obviamente, o professor precisa de muito tempo para preparar toda a sequência da apresentação; porém, o resultado é gratificante, quando o aluno demonstra mais interesse e consegue aprender. (Professor RSD)-relatório de vivência

Nesse excerto observamos que o professor mobilizou conhecimento pedagógico, uma vez que explicita que o uso de objetos de aprendizagem faz com que se mude a metodologia e, com isso, os alunos ficam mais motivados a aprender e que, realmente, aprendem.

Sobre a forma de avaliar os alunos e o aprendizado quando da aplicação desse objeto, podemos verificar nos relatórios de vivência que, oito professores relataram que a avaliação foi por observação durante a construção da "Roda Gigante" e por meio de relatórios e exercícios. Um professor avaliou os alunos por meio de um debate entre eles. Cinco professores não mencionaram se fizeram a avaliação ou como a fizeram.

Considerações finais

Feitas as análises, a partir dos resultados alcançados pudemos concluir que o curso M@tmídias 2 foi uma formação continuada desenhada contemplando os três primeiros princípios de (Imbernón, 2009) quais sejam: (1) a presença de reflexão prático teórica sobre a própria prática, particularmente viabilizada pelas atividades de vivência (2) a troca de experiências escolares, de vida, etc. viabilizadas principalmente pela proposta de fórum de discussão e (3) a união da formação a um projeto de trabalho, especialmente pela proposta de atividade de vivência.

Entendemos que a atividade de vivência proposta no curso foi relevante para permitir ao professor vivenciar – na condição de aluno – o objeto de aprendizagem e depois aplicar o experimento em sua sala de aula. Para escrever o relatório, seguindo esse roteiro, concluímos que o professor necessita planejar como será a aula e promover as adaptações adequadas para a sua turma, observando como, por exemplo, irá avaliar registrar a aplicação da atividade, identificar as dificuldades encontradas pelos alunos e também o que auxiliou ou facilitou a compreensão e quais foram às possibilidades e contribuições do uso do objeto para a aprendizagem. Assim sendo, ao aplicar a atividade de vivência aos alunos o professor ao atentar a todos esses pontos durante o desenvolvimento de sua aula poderá refletir sobre sua prática docente, o uso do objeto para a aprendizagem, para o ensino e a integração de tecnologia ao ensino.

A atividade de vivência provavelmente auxiliou os professores cursistas a construir conhecimentos pedagógicos (PK) e tecnológicos (TK), como afirmam (Mishra & Koehler, 2006). Constatamos que esse objeto de aprendizagem foi o que apresentou maior frequência de escolha entre os objetos de aprendizagem estudados, embora fosse trabalhoso e demorado o seu uso, pois envolvia a construção de uma miniatura de Roda Gigante. Os professores foram unanimes em citar em suas vivências a importância de mostrar o concreto para seus alunos, metodologia que é difícil de acontecer nessa fase da Educação Básica. Além disso, foi frequentemente citada a importância da utilização desse objeto para a discussão da periodicidade e do círculo trigonométrico.

Acreditamos que as discussões propostas sobre esse objeto de aprendizagem e sua aplicação em sala de aula podem possibilitar uma nova abordagem desse conteúdo nas aulas de Trigonometria no Ensino Médio, especialmente integrando a tecnologia ao ensino.

Referências

Amaral, F. J. (2002). *Ensino da trigonometria via resolução de problemas mediado por dinâmicas de grupo, analogias e recursos informáticos* Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica Belo Horizonte.

Bardin, L. (2011). *Análise de Conteúdo* São Paulo: Edições 70.

Bittar, M., Guimaraes, S. D., Vasconcelos, M. (2008). A Integração da Tecnologia na Prática de Professor que Ensina Matemática na Educação Básica: uma propósta de pesquisa-ção. *REVMAT Revista Eletronica de Educação matemática V.3, 84 - 94.*

Gil, A. C. (2008). *Como Elaborar projetos de pesquisa.* São Paulo: Atlas.

Imbernón, F. (2009). *Formação permanente do professorado – novas tendências.* São Paulo: Cortez.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A new framework for teacher knowledge. *Teachers College Record 108*, 1017 - 1054.

Patriarca, F. H. (2016). *Contribuições do Programa M@tmídias para a Integração de Tecnologia às Aulas de Trigonometria no Ensino Médio.* Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós Graduação em Eduação Matemática, São Paulo.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*, 1-22.

VOL 32, NÚMERO 2, AÑO 2019

INTERPRETACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS CARTESIANAS POR ESTUDIANTES DE INGENIERÍA EN UN CONTEXTO DE LABORATORIO

INTERPRETATION AND CONSTRUCTION OF CARTESIAN GRAPHS BY ENGINEERING STUDENTS IN A LABORATORY CONTEXT

Arianna Berenice Garza Kanagusico, José David Zaldívar Rojas, Carlos Eduardo Rodríguez García
Universidad Autónoma de Coahuila (México)
ariannagarzak@hotmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx, crodriguezgarcia@uadec.edu.mx

Resumen
La presente investigación en curso tiene por objetivo el análisis de la interpretación y construcción de gráficas cartesianas en estudiantes de primer semestre de Ingeniería Física, dentro de situaciones experimentales en un contexto de laboratorio de física. Para ello, utilizamos una metodología etnográfica para la toma de datos e integramos a esta investigación un marco de referencia donde se considera a la graficación desde un enfoque de práctica social. Para el análisis se hace uso de cinco componentes en ambientes científicos según los trabajos de Roth (1999). La intención es dar cuenta de los enfrentamientos, dificultades y participación de los estudiantes en la práctica social de graficación analizada a la luz de las componentes propuestas por Roth. Se presentan algunos primeros resultados del análisis de las dificultades en la interpretación y construcción de gráficas cuando los estudiantes discuten datos tomados de un experimento relacionado con el movimiento rectilíneo uniforme.

Palabras clave: graficación, experimentación, etnografía, práctica social

Abstract
This ongoing investigation is aimed at analyzing the interpretation and construction of Cartesian graphs by first-semester students of Physics Engineering, within experimental situations in the context of a physics laboratory. With this aim in mind, we used an ethnography methodology for data collection and integrated a frame of reference where graph representation is considered from a social-practice approach. For the analysis, five components in scientific environments, according to the works of Roth (1999), are used. It is intended to give an account of the confrontations, difficulties and participation of students in the social practice of graph representation analyzed according to the components proposed by Roth. Some results of the analysis of the difficulties in the interpretation and construction of graphs are shown when the students discuss data taken from an experiment related to the uniform rectilinear movement.

Key words: graphing, experimentation, ethnography, social practice

Introducción

Hoy en día existe una clara separación entre la matemática escolar y el contexto de nuestros estudiantes, así como también con otras disciplinas. Por ejemplo, ¿cuántas veces se nos presenta el estudio de algún fenómeno físico o biológico para aprender conceptos matemáticos?, ¿cuántas veces en la clase de matemáticas se brinda la oportunidad al estudiante de modelar algún fenómeno real? De hecho, ¿en cuántas ocasiones se permite al estudiante experimentar dentro de la clase de matemáticas usando otros contextos? Para ello, es evidente la necesidad de contar con variables, datos, graficas, ecuaciones, pero ¿se tiene claridad sobre cómo obtienen y manejan la información los estudiantes?, ¿qué tan difícil es para ellos obtener la solución o la respuesta del problema con el uso de las matemáticas? En ocasiones, varios de los problemas que se plantean dentro de carreras de ciencias requieren el manejo de datos e información que se obtiene de manera experimental, para después analizarse e interpretarse usando una gráfica. Lo anterior se debe principalmente a que las gráficas son piezas fundamentales para compartir y expresar una gran cantidad de información de manera concreta, además de que permiten trabajar con una gran cantidad de variables y visualizar patrones (Zaldívar, 2017). Con respecto al último aspecto, es importante mencionar que la transferencia de un contexto a otro, como lo es en la física, no es algo trivial para los estudiantes.

Por lo anterior, los estudiantes deben contar con competencias en el manejo de información y en la interpretación y construcción de gráficas cartesianas que expliquen el comportamiento de un fenómeno. A raíz de esto surge la interrogante que guía nuestra investigación: *¿cuáles son las principales confusiones o interrogantes de los estudiantes con respecto a la interpretación y construcción de gráficas cuando estas se elaboran con base en datos experimentales tomados de un fenómeno físico real?*

Revisión bibliográfica

Al respecto de dificultades en la interpretación y construcción de gráficas cartesianas en la clase de matemáticas, es importante mencionar los trabajos de Leinhardt, Stein y Zaslavsky (1990). Estas autoras, llaman la atención a las problemáticas centradas en las funciones y sus gráficas, debido al creciente reconocimiento de la potencialidad organizativa del concepto de función y la importancia de la gráfica cartesiana como herramienta científica para representar una gran cantidad de datos de manera visual y concreta.

Además, las principales dificultades que presentan los estudiantes y que las autoras anteriores señalan en su investigación dentro del tema de funciones y gráficas son las siguientes:

- Errores conceptuales sobre lo que es una función y cómo representar una función.
- Dificultades en relación con el concepto de variable.
- Problemas con notación.
- Dificultades en fijar escalas en los ejes del plano cartesiano.
- Tendencia hacia la linealidad.
- Poca noción del significado de regla de correspondencia.
- Confusión en el término intervalo/punto, altura/pendiente.
- Interpretaciones icónicas de gráficas cartesianas.
- La disponibilidad de tecnología gráfica afecta los resultados de interés de profesores y estudiantes.

Como se puede observar, la lectura de gráficas y su adecuada interpretación no parecen ser actividades triviales dentro de la escuela, aun cuando se le brinda importancia debido principalmente a las relaciones que guarda la gráfica con la noción de función. De hecho, Bowen y Roth (como se cita en Zaldívar, 2017), afirman que la *práctica de construir e interpretar gráficas*, es de central importancia en la realización de cualquier disciplina científica y que uno de los aspectos primordiales es alcanzar un cierto grado de culturización en dicha práctica, esto es, cuando se es capaz de usar e interpretar gráficas de maneras que son típicas en una disciplina.

Por razones como las anteriores es que enfatizamos la dirección de este trabajo de investigación: caracterizar las dificultades de los estudiantes de nivel superior cuando construyen e interpretan gráficas cartesianas en el estudio de fenómenos realizados en ambientes experimentales, siendo este, nuestro objetivo de investigación. Trabajamos desde un enfoque cualitativo a la investigación, tomado para construir un marco de referencia que permita establecer las acciones e interacciones de los estudiantes al interpretar y construir gráficas cartesianas. Los investigadores que trabajan desde este enfoque, como lo es Roth, menciona que "el uso de las gráficas es una práctica social clave en el ámbito profesional científico" (Bowen, Roth y McGinn,1999, p.1020).

Marco conceptual: la graficación como práctica social

Dentro de nuestro marco teórico consideramos los trabajos de Roth (Bowen, Roth, y McGinn, 1999) quien nos brinda una serie de componentes de análisis para la interpretación y construcción de gráficas, ya que ha dedicado sus investigaciones considerando a la Graficación como una Práctica Social. Al respecto, Roth menciona: "A menos que los estudiantes hayan participado suficientemente en la graficación como una práctica social, durante la cual experimentan cómo se toman las decisiones, sobre qué transformaciones ocurren a medida que los datos se obtienen y luego se trazan en gráficas, es poco probable que lleguen a interpretaciones" (Bowen, Roth, y McGinn, 1999, p. 1021).

Roth menciona que la graficación no debe considerarse una información procedimental que solo se "transfiere" a la cabeza de los estudiantes. Desde la perspectiva de Roth ver a la graficación como una práctica social se refiere a los grados de participación cada vez mayor en la construcción del conocimiento (Bowen, Roth, y McGinn, 1999, p. 1021). En otras palabras, la Práctica Social para Roth es la participación significativa, la práctica y la experiencia para la toma de sentido colectivo (Roth y McGinn, 1997, p. 92).

En Boowen, Roth y McGinn (1999) se mencionan las 5 componentes de una Práctica Social, las cuales son consideradas en nuestra investigación:

1. *Inquietudes en desarrollo*. Esta componente se refiere a las preocupaciones constantes de los miembros de una comunidad bien definida, e incluye sus objetivos en común, intereses y miedos.
2. *Prácticas Estándar*. Se refiere a las prácticas propias de cada situación, es decir, los conocimientos necesarios para elaborar las actividades que les son propias a los miembros de la comunidad.
3. *Recursos Materiales*. Esta componente incluye los artefactos y/o materiales utilizados, tales como herramientas y equipos que los miembros usan como parte de sus prácticas estándar.
4. *Recursos Lingüísticos* usados por los miembros de la comunidad para referirse y explicar los resultados de su análisis y hacer distinciones importantes en las actividades competentes y eficientes en el campo.
5. *Rupturas* por parte de los participantes, que son mejor expresadas como las interrupciones de las prácticas estándar que frenan el progreso de la actividad.

De manera que a partir de estos cinco componentes elaboraremos descripciones de la práctica de graficación que emerge específicamente cuando estudiantes de primer semestre de ingeniería se enfrentan a prácticas de Laboratorio donde se discuten conceptos físicos de manera experimental. Nuestro interés además se dirige al análisis de las dificultades que presentan dichos estudiantes en la interpretación y construcción de gráficas.

Aspectos metodológicos y la población de estudio

Dentro de la investigación, se considera a la etnografía como metodología de investigación para la toma de datos. Se realizaron observaciones no participantes de las experimentaciones realizadas de un grupo de estudiantes de nivel superior en un escenario de laboratorio. Además, se usó como instrumento de investigación a la triangulación de datos (diario de apuntes, reportes de estudiantes y prácticas experimentales del docente). Para la toma de datos, se realizaron videograbaciones de las sesiones donde los estudiantes realizaban las prácticas de laboratorio, así como de las clases teóricas que tuvieron previas al enfrentamiento con la práctica de laboratorio.

Nuestra población de estudio que participó en esta investigación fueron 44 estudiantes de primer semestre de la carrera de Ingeniería Física de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila en la materia de Laboratorio de Física I. Dentro de la asignatura mencionada, el trabajo de los estudiantes se divide en dos etapas: en la primera, los estudiantes presencian una clase teórica impartida por el profesor de la materia y éste explica el contenido teórico y conceptual de algunas nociones físicas y se comenta la forma en la cual se llevará a cabo la práctica experimental que será realizada en un escenario de laboratorio; mientras que la segunda etapa consiste en que los estudiantes, reunidos en equipos, realizan experimentalmente las tareas asignadas en la práctica (toman datos o reproducen un experimento) en un laboratorio donde se cuenta con el material experimental. Una vez que los estudiantes realizan experimentalmente las tareas de la práctica, realizan un reporte de la práctica de laboratorio.

Ahora bien, para la toma de datos dentro de nuestr investigación, se realizaron videograbaciones de ocho experimentaciones de los equipos de estudiantes en el laboratorio durante el periodo Agosto-Noviembre del año 2017, llegando a un total de grabación de 11 horas para la clase teórica y 16 horas para la clase experimental. Como se mencionó, la clase teórica es la impartida por un profesor y simultáneamente se realizaba la lectura de la práctica y se daba un espacio de tiempo a los alumnos para dudas o comentarios. En cuanto a la clase experimental, consistía en realizar el experimento en el aula de Laboratorio de física y utilizar las herramientas e instrumentos necesarios para elaborarla. Las videograbaciones fueron transcritas y se contó además con los reportes de laboratorio que los estudiantes entregan al profesor como parte de su evaluación.

Las prácticas de laboratorio a las que se enfrentaron los estudiantes fueron diseñadas previamente por el docente encargado de la asignatura de Laboratorio de física I. En dichas tareas se discuten conceptos físicos como: medición, densidad, movimiento rectilíneo uniforme y acelerado, caída libre, entre otros. Además, estas prácticas de laboratorio exigen un trabajo colaborativo de los estudiantes quienes se reúnen en grupos de trabajo para atenderlas, en cada una de ellas los estudiantes deben tomar datos y elaborar un reporte individual. Las tareas contienen un protocolo del experimento, el material e instrumentos necesario para llevarlas a cabo, añadiendo que deben realizarse en un ambiente de laboratorio. El grupo de los estudiantes acude al laboratorio y realiza el experimento en equipos de trabajo, los cuales se conforman desde el inicio del semestre.

En este manuscrito, se presenta un análisis de un primer momento del trabajo de los estudiantes mientras realizaban el experimento asociado a la práctica de Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) y Acelerado (MUA) en el laboratorio. Una vez tomados los datos, los estudiantes realizan un análisis de la información usando paquetería de software.

El reporte de laboratorio elaborado por los estudiantes contiene los siguientes apartados: resumen, introducción, metodología experimental, resultados, discusión, conclusiones y bibliografía del tema en estudio, todo esto solicitado por el profesor. Dentro de este reporte, para la práctica #5 los alumnos debían plasmar dentro del contenido, respuestas implícitamente a algunas preguntas: 1) La velocidad promedio, 2) ¿Cómo influye el coeficiente de fricción del riel y el carrito? 3) ¿Qué valores promedio de la aceleración? y 4) ¿Qué tipo de comportamiento tiene la posición, la velocidad y la aceleración?

Sobre la práctica #5: Movimiento rectilíneo uniforme y acelerado. Riel de Aire

Esta práctica se realizó los días 20 al 27 del mes de octubre del año 2017 con el objetivo de estudiar el comportamiento de movimiento de objeto (carrito) sobre un riel de aire impulsándolo inicialmente en forma horizontal (Figura 1) y dejándolo caer libremente de una inclinación de 30° bajo la acción de la gravedad (Figura 2). En esta práctica se discuten los conceptos físicos de: velocidad, fricción, aceleración, posición, y los modelos cuadrático y lineal.

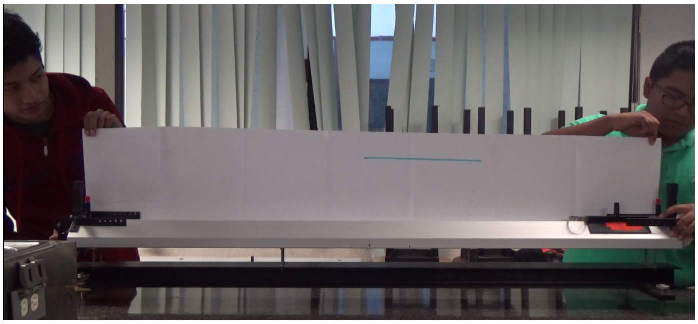


Figura 1. Movimiento del carrito sobre el riel de aire caso horizontal.

Figura 2. Movimiento del carrito sobre el riel de aire caso inclinado a 30°.

La razón por la cual se optó elegir esta práctica es que hubo la necesidad de construir e interpretar gráficas por ser un fenómeno de movimiento, además de encontrar tendencias como: x versus tiempo, rapidez en x versus tiempo, rapidez en y versus tiempo y aceleración versus tiempo. Se realizó el análisis de la posición (r), velocidad (v) y aceleración (a).

Para la resolución de las tareas contenidas en la práctica experimental y analizar la información obtenida se utilizaron dos softwares: *Tracker* y *Origin*.

Tracker es una herramienta de análisis de video. Al grabar cualquier movimiento, es fácil usar el video para rastrear el movimiento de un objeto y producir un gráfico de distancia y tiempo mediante la calibración de una distancia conocida en la pantalla (Kinchin, 2016, p. 1).

El análisis de video de Tracker se destaca como uno de los nuevos enfoques innovadores para la enseñanza y el aprendizaje de la física. Con Tracker, el modelado y el análisis del movimiento de objetos en videos es posible y fácil usando simplemente al superponer modelos dinámicos en los videos directamente. Este modelo se sincronizará automáticamente y se escalará al video para una comparación directa con el mundo real (Ramli, 2016, p. 298), (Figura 3).

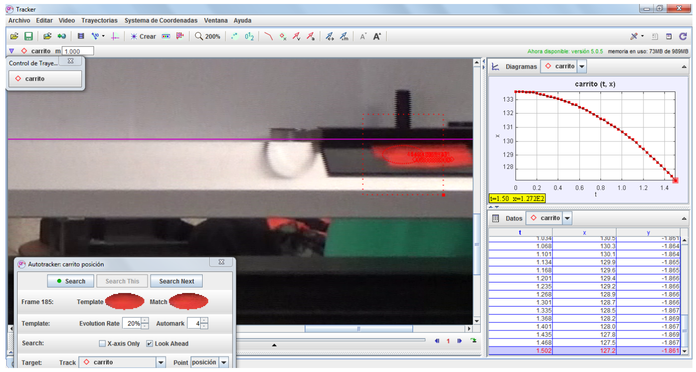


Figura 3. Funcionamiento del programa Tracker. Transportar el video al programa, ajuste del tiempo de lectura al video, colocación de vara de calibración y ejes cartesianos, crear masa puntal para asignar el objeto que se seguirá y por último buscar (se empieza a leer el movimiento y aparecen los datos y gráficas).

Por su parte, Origin es un software que se aplica para el análisis de datos y proporciona gráficos adecuados para los estudiantes en ingeniería y ciencias. Es un programa que tiene lo requerido para analizar información (Figura 4).

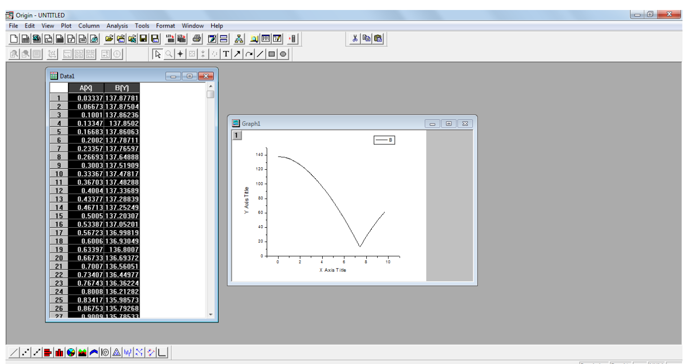


Figura 4. Graficación en el programa Origin.

Es aquí el momento donde el estudiante utiliza el software como herramienta para construir gráficas a partir de los datos recabados. En este momento, lo importante es la interpretación posterior que realiza de dichas gráficas a partir de lo que se solicita en las tareas de la práctica. Por ejemplo, los estudiantes utilizan técnicas de regresión lineal para elaborar un modelo algebraico de las relaciones.

Avance de resultados

En el siguiente extracto, se presenta una discusión entre un equipo de estudiantes mientras realizaban el análisis de los datos que se solicitaron en la práctica de laboratorio. El momento de diálogo se presenta una vez que los estudiantes videograbaron un video cuando el carrito se encontraba en el riel de aire de manera horizontal. Posterior a la grabación del video, este se corre en el programa Tracker y se analiza por medio de tablas y gráficas que el mismo programa despliega.

Una vez realizado el análisis y los ajustes dentro del Tracker, se presenta un momento donde los estudiantes discuten sobre los ejes de la gráfica que obtienen al ejecutar el video del movimiento del carrito sobre el riel de aire en el caso horizontal en el programa Tracker y sobre el nombramiento de las variables *x* y *y* (Ver extracto 1).

19. J. – ¿Qué es *x*? [*J realiza la pregunta de manera general a sus compañeros sobre la variable que el Tracker pone*]
20. R. – *x* es la posición en el eje de las *X* [*R se refiere al eje que el programa Tracker asigna*].
21. F. – Es la posición de en dónde está.
22. J. – ¿Pero en este caso, va a ser tiempo, ¿Va a ser qué?
23. LA. – *x* es distancia.
24. R. – *x* es distancia que va a ser dada en centímetros.
25. J. – Y la *y* ¿Qué es?
26. L. – La altura, pero se supone que en esta parte no se iba a mover [*solamente se está trabajando con el riel, pero sin inclinación*].
27. LA. – No, porque se supone que está sobre la superficie [*LA se refiere al caso horizontal*].
28. J. – En dónde sí lo vamos a poder ver va a ser en el de treinta grados.
29. LA. – ¡Si! Ahí sí.

Extracto 1. Diálogo ente los estudiantes sobre la variable *x*.

Para entender mejor este extracto, presentamos la Figura 5, donde se puede observar la preparación del análisis del movimiento del carrito dentro del ambiente del Tracker, así como también que la variable "*x*" se asigna dentro del programa como la posición o la distancia del carrito con respecto al origen que los estudiantes ubican previamente en la preparación del programa.

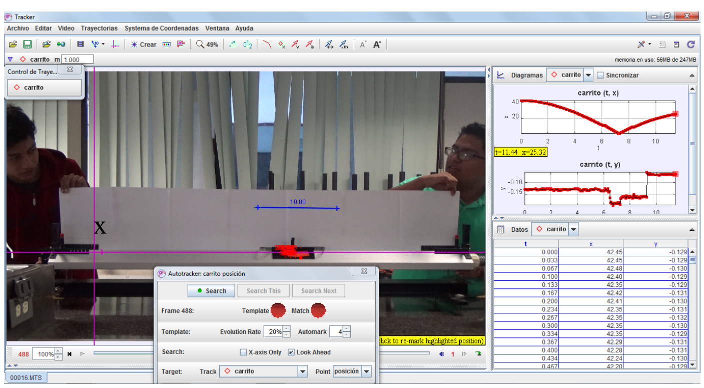


Figura 5. Lectura del video caso horizontal en el programa Tracker.

A partir del extracto, se puede observar que el cuestionamiento del estudiante se refiere a una forma no-tradicional de nombrar a los ejes, puesto que el eje horizontal (variable independiente) se denomina *X* en la mayoría de las ocasiones. Sin embargo, dentro del ambiente del programa Tracker la forma de nombrar a las variables es distinto, porque la variable independiente "tiempo", viene dada por "default". Esto indica que las preguntas de los estudiantes en cierta medida también surgen a partir del manejo del software, es decir, tienen que confrontar el conocimiento escolar que ya se tiene sobre los ejes con el manejo de estos mismos ahora en un ambiente tecnológico. En este sentido, los elementos de la práctica de graficación evolucionan con estas interrogantes que los mismos estudiantes se realizan desde el manejo del software. Consideramos además que la discusión del equipo es rica en elementos conceptuales, puesto que los estudiantes deben reinterpretar las nociones teóricas dentro del ambiente tecnológico mientras construyen las gráficas asociadas al fenómeno, puesto que la variable x, ahora se define como la posición horizontal de la partícula y cuando se construye la gráfica cartesiana se tendrá una función x(t). De hecho, al parecer el estudiante presenta un conflicto con esta forma de nombrar a la variable y a lo que "mide", porque probablemente contradice lo que dentro de la práctica escolar se dice con respecto a los ejes y a la forma de nombrar las variables independiente y dependiente.

A partir de ese momento de discusión sobre la elaboración de la gráfica y la forma de nombrar las variables, se identificaron algunas de las componentes particulares de la práctica social de graficación, lo cual da cuenta de aquellos elementos que intervienen y participan en la interpretación de la gráfica cartesiana que el programa Tracker presenta:
Inquietudes en desarrollo de tipo conceptual:

- Reconocer la variable posición y tiempo a partir del movimiento del objeto y como eso se traduce en la gráfica cartesiana obtenida con ejes (línea 23, 25 y 26).
- Reconocer la variable x como la posición del carrito con respecto al rigen dispuesto en Tracker de manera horizontal. Esto es, x es la distancia horizontal que existe entre el origen y el carrito (línea 27).

Recursos lingüísticos:
- Los alumnos hablan del nombramiento de cada variable, utilizan términos como x, y, distancia, altura y tiempo (línea 22, 23 y 26).

Prácticas estándar:
- La manera tradicional de nombrar los ejes en el plano cartesiano contra la forma en la que se nombran los ejes dentro del programa Tracker (21, 22, 26 y 27).
- La noción de función como relación entre dos variables.

Rupturas:
- Reconocer a la variable t (tiempo) y x (posición) como la variable independiente y dependiente respectivamente, en contraposición con la práctica estándar de la manera en la cual se nombran los ejes cartesianos como x y y para la variable independiente y dependiente respectivamente. Es decir, la variable x ahora es una variable dependiente, la cual rompe con la estructura matemática estándar para referirse a las funciones.

Este ejemplo que se acaba de considerar deja ver que una de las dificultades que tienen los estudiantes al momento de construir e interpretar gráficas está referido a los significados que las variables toman en la experimentación. Ya que, al momento de cambiar el nombre de las variables o la posición de las variables de un plano ya conocido a uno similar, como en el analizador de videos (Tracker), se provocan confusiones entre los estudiantes.

Es muy importante mencionar que no todos los componentes de nuestro marco de referencia aparecerán en cada diálogo de los estudiantes, así como pueden aparecer todos, puede aparecer solo unos cuantos de ellos.

Conclusiones

Hemos llegado a la conclusión de que los cinco componentes de Roth nos ayudan a identificar algunas dificultades que presentan los estudiantes al momento de interpretar y construir gráficas en ambientes científicos, en este caso en el aprendizaje de un fenómeno físico. En este manuscrito quisimos mostrar únicamente un ejemplo del tipo de análisis que realizamos, con la intención de caracterizar las principales dificultades que se presentan cuando los estudiantes hechan mano de la gráficación para analizar un fenómeno a través de la experimentación. Entre estas dificultades reportamos las siguientes: el manejo de la tecnología (Tracker y Origin) y el nombramiento de variables según el significado dentro del marco de referencia que utiliza el software. En este análisis, con estos cinco componentes mencionados por Roth, nos damos cuenta de la importancia que tiene la participación de los estudiantes en la elaboración de prácticas para poder entender el fenómeno.

Con el análisis de los videos, hemos podido identificar que mientras los estudiantes realizan los experimentos y trabajan en la realización de su reporte en forma colectiva, es donde surgen más inquietudes y rupturas que en ocasiones entran en conflicto con las prácticas estándar que el profesor explica teóricamente, mientras que en el reporte final plasman lo aprendido. Consideramos que este análisis con las componentes de Roth nos deja ver lo que realmente sucede y los conflictos por los que los estudiantes pasan al momento de interpretar y construir gráficas cartesianas.

Con estos componentes podemos apreciar desde las palabras que utilizan los estudiantes para comunicare sobre el conocimiento en juego, las inquietudes en cuanto a la tecnología usada, los conocimientos que ya han adquirido en la clase anteriormente, los recursos materiales o herramientas para poder elaborar la práctica de laboratorio y por último esas ideas que se rompen sobre los conocimientos que ya tenían.

Como mencionamos anteriormente, esta investigación es un trabajo de tesis en proceso. Por lo cual seguimos en la identificación de los cinco componentes correspondientes a nuestro marco teórico en todo el trabajo videograbado a los estudiantes y en el análisis de los reporten estregados por los integrantes del equipo, para conocer lo que ellos plasmaron al final de su trabajo.

Referencias bibliográficas

Berg, C.A. y Smith, P. (1994). Assessing students´ abilities to construct and interpret line graphs: Disparities between multiple-choice and free-response instruments. *Science Education 78(6)*, 527-554.

Bowen, M. y Roth, W. (1998). Lecturing graphing: What features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs? *Research in Science Education, 28(1)*, 77-90.

Bowen, M., Roth, W. y McGinn, M. (1999). Interpretations of Graphs by University Biology Students and Practicing Scientists: Toward a Social Practice View of Scientific Representation Practices. *Journal of Research in Science Teaching 36(9)*, 1020-1043.

Kinchin, J. (2016). Using Tracker to prove the simple harmonic motion equation. *Physics Education (51)*, 1-2.

Leinhardt, G., Stein, M. K. y Zaslavsky, O. (1990). *Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning and Teaching.* United States: American Educational Research Association, *60(1)*, 1-64.

Ramli, M.H., Chan, K.T. y Yap W.F. (2016). Study of simple pendulum using Tracker video analysis and camera: an interactive approach to analyze oscillatory motion. *Solid State Science and Technology, 24(2)*, 297-305.

Roth, W. y McGinn, M. (1997). Graphing: Cognitive Ability or Practice? *Science Education, 81(1)*, 91-106.

Zaldívar, J. (2017). Reflexiones en torno al uso de las gráficas en la enseñanza de las ciencias. *Tlahuizcalli 3(9)*, 13-24.

UMA LENTE TEÓRICA PARA ANALISAR O POTENCIAL DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

A THEORETICAL LENS TO ANALYZE THE POTENTIAL OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN EXPLORATORY TEACHING OF MATHEMATICS

Maria Ivete Basniak, Everton José Goldoni Estevam
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR (Brasil)
basniak2000@yahoo.com.br, evertonjgestevam@gmail.com

Resumen
Tomando como referência a Teoria das Abordagens Instrumentais/Instrumentação e a Mediação e Mediação Semiótica na integração de Tecnologias Digitais (TD) na Educação Matemática, investigamos as possibilidades que as TD oferecem para práticas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM). Assumimos uma perspectiva metodológica de caráter qualitativo, pautada na Teoria Fundamentada nos Dados. Elaboramos um quadro de descritores das TD como meio para acessar o conhecimento matemático, que possibilita a mobilização de formas complexas de pensamento, por meio da interação aluno/computador e da interpretação de representações matemáticas. Este quadro teórico revela os contributos das TD às quatro dimensões do EEM.

Palabras clave: tecnologia, ensino superior e educação básica, pesquisa qualitativa

Abstract
Taking as a reference the Theory of Instrumental/Instrumentation Approaches and the Mediation and Semiotic Mediation in the integration of Digital Technologies (TD) in Mathematics Education, we investigated the possibilities that the TD offer for practices based on the Exploratory Mathematics Teaching (EEM). We assume a methodological perspective of qualitative character, based on the Theory Based on the Data. We elaborate a table of TD descriptors as a means to access mathematical knowledge, which enables the mobilization of complex forms of thought, through student/computer interaction and the interpretation of mathematical representations. This theoretical framework reveals the contributions of TDs to the four dimensions of EEM.

Key words: technology, higher education and basic education, qualitative research

Introdução

As relações entre Educação Matemática e Tecnologia têm sido preocupação de pesquisas da *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)* desde meados da década de 1980 (Beatty & Geiger, 2010), quando os microcomputadores passaram a ter impacto significativo nos contextos educacionais. O relatório sobre o tema relacionado ao potencial do uso de computadores no ensino de Matemática do Simpósio *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching* (Churchhouse 1986), citado por (Beatty & Geiger, 2010), inicia com uma discussão sobre o que a matemática e a atividade matemática devem incluir no futuro em sala de aula. Ele destacou o desejo crescente de que o ensino de Matemática privilegie aspectos experimentais da matemática, de forma que os alunos adquiriram habilidades em experimentar, observar e explorar, fazendo previsões, testando hipóteses, conduzindo ensaios, controlando variáveis e simulando.

Neste sentido, pesquisas brasileiras sobre as tecnologias e o ensino de Matemática evidenciam que as tecnologias digitais podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de matemática, à medida que práticas investigativas e exploratórias de matemática sejam privilegiadas e permitam compreender a natureza da atividade matemática desencadeada (Basniak, Silva e Gaulovski, 2017).

Em suma, as pesquisas brasileiras e internacionais salientam diferentes aspectos do potencial da Tecnologia Digital (TD) para o ensino de Matemática em atividades exploratórias e investigativas. Entretanto, deparamo-nos com a inexistência de pesquisas que evidenciem aspectos teóricos relacionados à integração de TD e o Ensino Exploratório de Matemática (EEM). A fim de elucidar esta questão, investigamos as possibilidades que as TD podem oferecer para práticas assentes no EEM, por meio de uma pesquisa teórica de pressupostos distintos, em que assumimos uma perspectiva metodológica de caráter qualitativo, pautada na Teoria Fundamentada nos Dados (*Grounded Theory*) (Strauss e Corbin, 1998). A próxima seção discute as dimensões do EEM.

Ensino exploratório de matemática nas suas 4 dimensões

O EEM emerge na literatura em contraposição àquele denominado direto ou expositivo (Ponte, 2005) e, situado em uma perspectiva mais alargada de *enquiry-based teaching* (Oliveira e Cyrino, 2013), admite como dimensões fundamentais o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração (Chapman e Heater, 2010). No léxico da língua portuguesa não é consensual a tradução de *inquiry*, o qual geralmente é traduzido como inquirição ou investigação. Contudo, consideramos que nenhum destes termos corresponde adequadamente ao significado de *inquiry* e, portanto, no intuito de evitar interpretações equivocadas, optamos pela manutenção do termo em inglês.

Compreendido como um conceito pedagógico, o *inquiry* tem origem nos trabalhos de Dewey (1938), para quem significa tanto a base da descoberta quanto da aprendizagem. Ele o define como "a transformação controlada ou dirigida de uma situação indeterminada em outra que é tão determinada, em suas distinções e relações constituintes, a ponto de converter os elementos da situação original em um todo unificado" (p. 104-105). Cabe salientar que, para o autor, uma situação é concebida como o conjunto de interações entre um organismo, um indivíduo e seu ambiente, e o *inquiry* como um processo geral, não reservado à atividade científica.

Desta forma, segundo Artigue e Blomhøj (2013)

> O processo de *inquiry* desenvolve-se como interação entre conhecimentos e desconhecimentos em situações em que algum indivíduo ou grupo de indivíduos enfrenta um desafio. Isso supõe que alguma parte do desconhecido existe em uma situação e está sendo reconhecida como desafiadora ou simplesmente intrigante; mas o *inquiry* só pode se desenvolver porque essa parte do desconhecido pode

ser abordada com o que já é conhecido, porque dados e referências podem sugerir hipóteses e inferências (p. 798-799).

Dewey (1938) considera a inquirição reflexiva como a chave para ir além da distinção entre conhecer e fazer. Ele vê a aprendizagem como "um processo adaptativo, no qual a experiência é o motor para criar conexões entre sensações e ideias, por meio de um processo controlado e reflexivo, rotulado de inquirição reflexiva" (Artigue e Blomhøj, 2013). Portanto, a organização da experiência dos alunos e o desenvolvimento de hábitos gerais da mente para aprender por meio da inquirição reflexiva configuram uma função essencial da educação (Dewey, 1938).

A *reflexão* surge, assim, como uma segunda dimensão do EEM que, articulada às demais, salienta a premissa de que a ação não é suficiente para a aprendizagem, enquanto avanços cognitivos significativos são percebidos quando essas ações são admitidas como objetos de pensamento (Wheatley, 1992). Isto porque há "evidências sólidas de que o ensino que tem a reflexão como componente principal permite que os alunos construam relações matemáticas robustas" (Wheatley, 1992, p. 540). Como consequência, aqueles que experimentam a aprendizagem centrada na reflexão são capazes de resolver problemas não rotineiros e construir novos conhecimentos autonomamente.

Em decorrência da admissão da inquirição reflexiva como princípio de aprendizagem, o EEM salienta a influência da natureza da conversação, seus propósitos e funções nas diferentes fases da aula (Cyrino e Oliveira, 2016). Ao considerar o ensino como um processo em que os alunos interagem entre si e com o professor, no intuito de construir e compartilhar significados, esta perspectiva de ensino salienta a *comunicação* como uma de suas dimensões fundamentais.

Durante as interações sociais, normas sociais e sociomatemáticas guiam professor e alunos em suas ações. Estas normas estão relacionadas às formas de como comunicar e reagir diante das intervenções dos outros em sala de aula. Contudo, elas não devem ser entendidas como impostas pelo professor, mas como sujeitas a uma negociação de significados, aceitando várias e diferentes considerações que venham a surgir (Guerreiro, 2014). Desta forma, "a norma não é uma regra que determina a ação individual, é uma noção coletiva de ação, traduzida na adequação e no valor das intervenções dos alunos e do professor, quando interagem uns com os outros na sala de aula" (Guerreiro, 2014, p. 243).

Trata-se de considerar a inquirição dialógica como orientação do processo pedagógica, a qual considera que as aprendizagens não são desenvolvidas isoladamente ou apenas na relação entre agente, objeto e ação, mas também estão situadas nas relações interpessoais entre os participantes na atividade e discurso que produzem juntos (Wells, 2004).

Nesse sentido, evidencia-se a quarta dimensão do EEM– a *colaboração*, a qual articula as três primeiras. Ela pressupõe que o desenvolvimento individual e de grupo é interdependente, cuja relação se constitui reflexivamente nos diálogos inquiridores. Isto porque se admite que o conhecimento é elaborado e reelaborado pelos participantes nesses diálogos, quando interagem e comunicam ideias e refletem sobre elas, com vistas ao cumprimento de objetivos colaborativos emergentes no curso da atividade (Wells, 2004). Trata-se de considerar que, se por um lado, as atividades matemáticas individuais podem ser limitadas pela participação na constituição interativa de uma base compartilhada para a atividade matemática, por outro, essa base é interativamente constituída, à medida que se tenta coordenar a atividade matemática de cada um com a dos outras.

Neste cenário, ao mesmo tempo em que evidenciam a complexidade que permeia a prática letiva assente no EEM, os aspectos que alicerçam suas dimensões fundamentais sinalizam o potencial desta perspectiva de ensino para a aprendizagem matemática. Particularmente, sinalizam seu potencial para mobilização de formas complexas de pensamento que, dialogicamente, articulam representações e conceitos diversos, em busca de um significado compartilhado (Cyrino e Oliveira, 2016). Neste sentido, vislumbramos potencialidades da integração da tecnologia ao EEM, cuja busca por uma lente de análise alicerça a próxima seção.

Aspectos teóricos emergentes da integração da tecnologia na educação matemática

Diferentes recursos podem ser empregados no sentido de favorecer ou evidenciar as quatro dimensões do EEM, sendo as TD um deles. Para tanto, é patente a elucidação de lentes teóricas que permitam a análise do papel desses recursos no ensino. Nesta perspectiva, Drijvers, Kieran, Mariotti, Ainley, Andresen, Chan, Dana-Picard, Gueudet, Kidron, Leung e Meagheret (2010), a partir de teorias antecedentes, como a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (Brousseau, 1998), Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1990) e Semiótica (Radford, 2003), discutem a Teoria das Abordagens Instrumentais/Instrumentação (Vérillon & Rabardel, 1995; Rabardel, 2002) e a Mediação e Mediação Semiótica (Balacheff & Kaput, 1996) como teorias relevantes para elucidar o potencial da integração das TD na Educação Matemática.

Drijvers et al. (2010) salientam que a palavra *Instrumentação* tem significado duplo: no quadro de Abordagens Instrumentais, ela se refere à teoria da Instrumentação como um todo; no contexto mais específico da Gênese Instrumental, refere-se à forma como o artefato afeta o comportamento e o pensamento do aluno, em oposição à instrumentalização, que diz respeito à forma como o pensamento do aluno afeta o artefato.
Nesta perspectiva, Drijvers et al. (2010) esclarecem que a Instrumentação enfatiza a importância das técnicas, que tendem a ser subestimadas nas discussões sobre a integração da tecnologia. Para Artigue (2002) e Lagrande (2000), citados por Drijvers et al. (2010), a técnica é compreendida como o estudo da tecnologia, e enfatiza os três T: tarefa, técnica e teoria.

Nesta compreensão, enquanto *esquemas* referem maneiras de lidar com situações e tarefas específicas, as *técnicas* são compreendidas como modos de resolver uma tarefa que exige um conjunto complexo de raciocínio e trabalho, o qual ultrapassa aquele exigido em tarefas rotineiras.

A Instrumentação permite diferenciar artefato de instrumento, de forma que "Instrumento = Artefato + Esquemas e Técnicas, para um determinado tipo de tarefa" (Drijvers et al., 2010, p. 108). Enquanto artefato compreende algo, não necessariamente um objeto físico, o instrumento é mais que um artefato, no sentido que exige um indivíduo que utilize o artefato na realização de uma tarefa, aplicando técnicas.

Neste contexto, é chamado Gênese Instrumental o processo pelo qual um artefato torna-se parte de um instrumento, no decurso de sua utilização por um usuário – por exemplo, o aluno (Drijvers et al., 2010). Para Abar e Alencar (2013), "a Abordagem Instrumental estuda os aspectos próprios que existem no artefato e no instrumento, e processos que envolvem a transformação progressiva do artefato em instrumento" (p. 352).

A Gênese Instrumental parte, portanto, da dualidade de possibilidades do artefato: por um lado, de moldar o pensamento do aluno (instrumentação) e, por outro, de o pensamento do aluno moldar o artefato (instrumentalização). Ou seja, dentro da Gênese Instrumental, a instrumentação remete à influência de recursos e restrições de um artefato sobre as estratégias de resolução de problemas e as concepções que dela emergem, enquanto a instrumentalização refere o pensamento do aluno, orientando a forma como o artefato é usado.

No que se refere à Teoria da Mediação e Mediação Semiótica, discutida por Drijvers et al. (2010), a tecnologia é compreendida como meio para acessar o conhecimento matemático. Assim, na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1998), o meio, *milieu*, envolve todos "aqueles objetos com os quais os alunos têm uma familiaridade matemática tal que podem manipulá-los com toda segurança e cujas propriedades lhes parecem inquestionáveis [...] por intermédio dos quais se contextualiza a matemática ensinada" (p. 217).

Estes objetos são necessários para que relações entre os conhecimentos e desconhecimentos possam ser estabelecidas, porque dada a natureza epistemológica da Matemática, é impossível estabelecer uma relação imediata com os objetos matemáticos, de forma que qualquer relação passa por um processo de Mediação Semiótica. A interpretação simbólica dos dados inseridos no computador pelo aluno, por exemplo, e aqueles retornados como resposta deste àquele permitem sua leitura como um fenômeno matemático que ocorre por meio da interação entre um aluno e um computador.

Nesta perspectiva, os artefatos são considerados meio não apenas para realizar uma tarefa, mas para que os alunos possam acessar o conhecimento matemático, permitindo que diferentes representações sejam exploradas. O potencial mediador do artefato está na dupla ligação semiótica que ele tem com os significados emergentes de seu uso para realizar uma tarefa e os significados matemáticos evocados por esse uso (Drijvers et al., 2010).

Desta forma, a ação do professor incidirá nos níveis cognitivo e meta-cognitivo, ambos promovendo a evolução dos significados e orientando os alunos a estarem conscientes de seu estado matemático (Drijvers et al., 2010).

■ A articulação entre os dois quadros teóricos – Pressupostos metodológicos

Para discutir teoricamente o potencial pedagógico da TD para o EEM, assumimos uma perspectiva metodológica de caráter qualitativo, pautada na Teoria Fundamentada nos Dados (*Grounded Theory*) (Strauss e Corbin, 1998). Portanto, a análise de dados envolveu três etapas interdependentes e cíclicas: a codificação aberta, codificação axial e codificação seletiva.

A codificação aberta, segundo Strauss e Corbin (1998), descreve o processo analítico pelo qual os conceitos são identificados e desenvolvidos em relação a suas propriedades e dimensões, originando códigos preliminares e conceituais. Em nosso trabalho, abarcou a leitura de textos sobre EEM e teorias relacionadas à integração de TD no ensino de Matemática, que favoreceram visualizar categorias preliminares que possibilitassem relacionar o EEM e os contributos das TD para o ensino de Matemática. Por meio da codificação axial, essas categorias foram aprimoradas e agrupadas por meio de conexões entre elas. Nesta fase, desenhamos que o EEM favorece relações entre o conhecido e o desconhecido e se constitui reflexivamente, nos diálogos inquiridores, por meio de suas quatro dimensões:

- *inquiry* - possibilita que uma situação indeterminada se transforme, por meio de uma ação controlada ou dirigida, em outra capaz de permitir que os elementos da situação original sejam entrelaçados e unificados;
- *reflexão* – permite questionar as ideias iniciais a partir do (re)pensar constante sobre suas validade e adequabilidade;
- *comunicação* – propicia ordenar ideias ao compartilhar significados;
- *colaboração* – permite o desenvolvimento individual e de grupo, favorecendo aprendizagens interdependentes.

Utilizamos, deste modo, estes elementos como lente de seleção de aspectos salientes nas Teorias que discutem a integração das TD no ensino de Matemática. Identificamos, em um primeiro momento, que as Teorias da Instrumentação e Mediação e Mediação Semiótica abarcavam contributos das demais teorias relacionadas, o que nos levou às categorias de análise sistematizadas no Quadro 1 como síntese da fase de codificação axial.

Quadro 1. Categorias de análise dos contributos das TD no EEM

Teoria	Categoria	Descritores
Abordagem Instrumental	Instrumentação na Gênese Instrumental	Forma como o artefato afeta o comportamento e o pensamento do aluno.
	Instrumentalização na Gênese Instrumental	Forma como o pensamento do aluno afeta o artefato.
	Técnica	Maneira de resolver uma tarefa que exige um conjunto complexo de raciocínio e trabalho, o qual ultrapassa aquele exigido em tarefas rotineiras.
Mediação e Mediação Semiótica	Tecnologia como meio para acessar o conhecimento	Relações entre os conhecimentos e desconhecimentos.
	Representação no artefato	Representações, dada a natureza epistemológica da Matemática.
	Significação matemática por meio de um artefato	Ligação semiótica com os significados emergentes do uso do artefato para realizar uma tarefa e os significados matemáticos evocados por esse uso.
	Professor como mediador	Evolução dos significados e orientação dos alunos a estarem conscientes de seu estado matemático.

Segundo Strauss e Corbin (1998), na codificação seletiva ou redação da teoria, o pesquisador integra e refina as categorias em um nível mais abstrato, buscando a percepção de convergências que subsidiem sua teorização acerca do processo investigado. Desta forma, nesta fase, integramos os dois quadros teóricos relacionando os contributos das TD no ensino de Matemática às dimensões do EEM, cuja síntese compõe a seção de resultados que segue.

Contributos das tecnologias digitais para o ensino exploratório de matemática

Drijvers et al. (2010) destacam que o aluno pode tomar consciência dos significados relacionados à matemática por meio da expressão representada de diferentes formas - palavras, gestos, desenhos, e assim por diante – em que os significados emergem por meio da expressão a partir de representações, para que novos sinais (para os alunos) possam ser socialmente compartilhados. A característica principal destes sinais é o seu forte vínculo com as ações realizadas com o artefato. Quando este processo semiótico ocorre na sala de aula, a interação social pode assumir um objetivo comum, orientado para o ensino e aprendizagem de Matemática, em que tanto os alunos quanto o professor podem estar envolvidos na evolução da compreensão dos sinais matemáticos (Drijvers et al., 2010). Ao atuar no nível metacognitivo, o papel do professor é de mediador cultural; em outras palavras, busca introduzir os alunos na cultura matemática, englobando propositadamente o indivíduo e suas perspectivas sociais, tornando o artefato um mediador semiótico e não simplesmente qualquer mediador (Drijvers et al., 2010). Assim, qualquer artefato será referido como instrumento de mediação semiótica enquanto estiver (ou for concebido para ser) intencionalmente usado pelo professor para mediar um conteúdo matemático, por meio de uma intervenção didática projetada.

Tomando os pressupostos teóricos da Instrumentação, identificamos potencial das TD quanto a seus principais contributos para as quatro dimensões do EEM. Quando o aluno é desafiado a resolver uma tarefa, em que precisa utilizar seus conhecimentos para inserir informações no computador para que este retorne uma resposta relacionada a seus desconhecimentos, a dimensão do *inquiry* é favorecida. Isto porque a parte do desconhecido pode ser abordada com o que lhe é conhecido, e o aluno precisa conseguir se *comunicar* com o computador para que possa inserir as informações que precisa e para que consiga ler aquelas que o computador retorna. Por exemplo, para marcar um ponto A (2,57; 3,45) com precisão em um software que relacione álgebra e geometria, como o GeoGebra, e inserir as coordenadas deste ponto na caixa de entrada, deve digitar o nome do ponto em maiúsculas seguido do sinal de igual, com as coordenadas separadas por vírgula, e a parte decimal com ponto *A=(2.57,3.45)*. O programa mostrará este ponto na janela gráfica, informação que o aluno precisará ler para continuar a desenvolver a tarefa proposta. Isto corrobora para desencadear a dimensão *reflexiva*, por meio da organização e interpretação dos dados que precisa inserir no computador e daquilo que ele retorna, permitindo depurar e ajustar raciocínios a partir destas ações.

Neste momento, o computador deixa de ser um artefato, em que apenas o aluno insere informações para obter respostas esperadas (por exemplo, quando utiliza como máquina de calcular, digitando operações para que o computador realize cálculos com mais rapidez e eficiência) para se tornar um instrumento de aprendizagem, em que o aluno precisa interpretar aquilo que o computador retorna, e *refletir* sobre o que precisa realizar para que consiga resolver a tarefa proposta. Por exemplo, se a tarefa solicitar que, a partir deste ponto, seja construído um quadrado de lado 2 unidades, ele precisará relacionar conhecimentos sobre as propriedades do quadrado, a medidas de ângulos, retas, segmentos de retas e, enfim, outros mais, dependendo da(s) estratégia(s) que utilizar. O aluno precisa utilizar sua experiência e conhecimentos anteriores para conseguir se *comunicar* com o computador, interpretando as respostas retornadas por ele, e/ou ainda *comunicar* seus achados e reflexões com o professor e colegas, *colaborando* com sua aprendizagem e com a dos demais para que consigam, todos, resolver a tarefa proposta. Estendemos, aqui, a dimensão da *comunicação*, não só entre humanos (professor-aluno-professor e aluno-aluno), pois a inserção de dados no computador e/ou ainda a manipulação e construção de representações matemáticas no computador, exige(m) do aluno que consiga se *comunicar* com o artefato utilizado, e que interprete as respostas por ele fornecidas, para que o utilize como instrumento de construção do conhecimento matemático. Tais respostas podem gerar novas questões, constituindo um ciclo de *inquirição, reflexão, comunicação,* em que o artefato molda o comportamento e o pensamento do aluno, ao mesmo tempo em que o pensamento do aluno faz do artefato um instrumento para resolver a tarefa, que exige um complexo conjunto de raciocínio. Isto pode se desencadear na dimensão *colaborativa*, permeada pela ação do professor e dos colegas, o que remete à Instrumentação na Gênese Instrumental, em que há influência de recursos e restrições de uma ferramenta sobre as estratégias de resolução de problemas e as concepções que daí emergem, favorecendo avanços cognitivos expressivos que beneficiam a resolução de tarefas não rotineiras e a construção de novos conhecimentos autonomamente. Este último referindo-se a Instrumentalização na Gênese Instrumental, em que o pensamento do aluno orienta a forma como a ferramenta é usada.

Neste contexto, ao expandirmos a compreensão da dimensão da *comunicação* às formas de como comunicar e interpretar as respostas retornadas pelo computador, a tecnologia é meio para o aluno acessar o conhecimento (teoria da Mediação). A interação entre aluno e computador, baseada na interpretação simbólica dos dados inseridos pelo aluno no artefato e as respostas retornadas pelo instrumento, favorece a *reflexão* e a tomada de consciência dos significados relacionados à Matemática, por meio da necessidade de representação, leitura e interpretação de símbolos matemáticos no artefato que, neste processo, passa a ser utilizado como um instrumento de aprendizagem. Este processo desencadeia-se de forma *colaborativa,* quando estas representações no instrumento atuam como vínculo de ações realizadas com o artefato. Trata-se de um processo que favorece a interação social quando, tanto professor quanto aluno, envolvem-se na compreensão dos sinais que se referem aos significados compartilhados, em que o conhecimento é elaborado e reelaborado pelos participantes durante este processo *interativo*. Nele, *comunicam* ideias e *refletem* sobre elas, mediados pela tecnologia, para que possam acessar o conhecimento matemático, e pelo professor, para que possam tomar consciência deste conhecimento matemático, sendo introduzidos na cultura matemática.

Considerações finais

Tomando os pressupostos teóricos da Instrumentação, identificamos contributos das TD relacionados às quatro dimensões do EEM. Na Gênese Instrumental, tanto na instrumentação quanto na instrumentalização, quando o aluno é desafiado a resolver uma tarefa, e precisa utilizar seus conhecimentos para inserir informações no computador para que este retorne uma resposta relacionada a seus desconhecimentos, favorece que o *inquiry* seja desenvolvido, porque a parte do desconhecido pode ser abordada com o que lhe é conhecido. Isto colabora para desencadear, segundo a Instrumentalização na Gênese Instrumental, a dimensão *reflexiva*, organizando e interpretando sua experiência, de modo que consiga se *comunicar* com o computador, interpretando as respostas retornadas por ele.

Estendemos, aqui, a dimensão da *comunicação*, na Gênese Instrumental, tanto na Instrumentação quanto na Instrumentalização, não só entre humanos (professor-aluno-professor e aluno-aluno), mas entre aluno e computador. Isto porque a inserção de dados no computador e/ou ainda a manipulação e construção de representações matemáticas exige que o aluno consiga se comunicar com o artefato utilizado, e que interprete as respostas por ele retornadas, para que se torne instrumento de construção do conhecimento matemático. Tais respostas podem gerar novas questões, em que o artefato molda o comportamento e o pensamento do aluno (Instrumentação na Gênese Instrumental), evoluindo para um ciclo de *inquirição, reflexão* e *comunicação* em que o pensamento do aluno faz do artefato um instrumento para resolver a tarefa, que exige um complexo conjunto de raciocínio (Instrumentalização na Gênese Instrumental). Isto se desencadeia na dimensão *colaborativa*, permeada pela ação do professor e dos colegas, e pela influência de recursos e restrições de uma ferramenta sobre as estratégias de resolução de problemas e as concepções que emergem no processo de comunicação de significados.

Neste contexto, ao expandirmos a compreensão da dimensão da *comunicação* ao processo de *inquirir* e *refletir* sobre as respostas retornadas pelo computador, as TD constituem meio para o aluno acessar o conhecimento (teoria da Mediação). Isto porque a interação entre aluno e computador, permeada pela *reflexão*, baseada na interpretação simbólica da representação no artefato dos dados inseridos pelo primeiro e as respostas retornadas pelo segundo, favorece a tomada de consciência dos significados relacionados à Matemática. Neste cenário, o professor atua como mediador cultural, inserindo o aluno na cultura matemática, em um processo *colaborativo* permeado pela *inquirição* das representações matemáticas no artefato, em que a *comunicação* entre professor-aluno-professor e aluno-aluno favorece a *reflexão* e significação matemática.

Desta forma, sintetizamos nossas análises no Quadro 2, que relaciona diretamente os contributos das TD no ensino da Matemática às quatro dimensões do EEM, o qual oferece elementos para ações e pesquisas em duas dimensões: orientar o planejamento e a realização de práticas envolvendo TD e assentes no EEM, bem como oferece elementos para analisar estas práticas.

Quadro 2. Descritores que articulam contributos das TD ao EEM

Teorias	Descritores	Inq	Ref	Com	Col
Instrumentação	Instrumentação na Gênese Instrumental	X		X	
	Instrumentalização na Gênese Instrumental	X	X	X	X
	Técnica	X	X	X	X
Mediação e Mediação Semiótica	Tecnologia como meio para acessar o conhecimento	X	X	X	
	Representação no artefato		X	X	
	Significação matemática por meio de um artefato	X	X	X	
	Professor como mediador	X	X	X	X

Concluímos, assim, que a Tecnologia oferece contributos para o EEM, que estão associados à necessidade de o aluno interagir com o computador na realização de uma tarefa, cuja resolução exige o emprego de técnicas em que o computador é meio para acessar o conhecimento matemático. O aluno é inquirido a utilizar e interpretar representações matemáticas, refletindo sobre seus significados, mobilizando formas complexas de pensamento que, dialogicamente, articulam representações e conceitos diversos, em busca de um significado compartilhado e validado.

Agradecimento

Agradecemos à Fundação Araucária, CNPq e à PRPPG da Unespar pelo financiamento para a realização da pesquisa.

Referências

Abar, C. A. A. P. & Alencar, S. V. (2013). A Gênese Instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de matemática. *Boletim de Educação Matemática*: Rio Claro, 27(46).

Artigue, M. e Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45 (6), 797-810.

Balacheff, N. e Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics.
In: Bishop, A. J.; Clements, K.; Keitel, C.; Kilpatrick, J.; Laborde, J. (Ed.), *International Handbook of Mathematics* Education. Dordrecht: Kluwer, 429-501.

Basniak, M.I.; Silva, S.C.R. e Gaulovski, J.M. (2017). Tecnologias digitais e ensino da matemática no Brasil: uma revisão da literatura de 2010-2017**.** *Revista Tecnologias na Educação.* 23.

Beatty, R. e Geiger, V. (2010) Technology, Communication and Collaboration: Re-thinking Communities of Inquiry, Learning and Practice In: Hoyles, Lagrange, J.B.C. Internacional Comission on Mathematical Instruction. *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain - The 17th ICMI Study*, Springer: New York, 251-287.

Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics*: didactique des mathématiques, 1970–1990 (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, and V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

Chapman, O. e Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education 13*(6), 445-458.

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 19, 221–266.

Chevallard, Y; Bosch, M. e Gáscon, J. (2001). *Estudar matemáticas:* o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes, Porto Alegre: Artmed Editora.

Cyrino, M.C.C.T. e Oliveira, H. M. (2016). Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In M. C. C. T. Cyrino (Ed.), *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática*: *elaboração e perspectivas* (pp. 19-32). Londrina, Brasil: EDUEL.

Dewey, J. (1938). *Logic*: The theory of inquiry. New York: Henry Holt and Company.

Drijvers. P., Kieran, C., Mariotti, M.-A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y. C., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A., e Meagheret, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. In: Hoyles, Lagrange, J.B.C. Internacional Comission on Mathematical Instruction. *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain - The 17th ICMI Study*, Springer: New York, 89-133.

Guerreiro, A. (2014). Comunicação matemática na sala de aula: conexões entre questionamento, padrões de interação, negociação de significados e normas sociais e sociomatemáticas. In: PONTE, J. P. *Práticas profissionais dos professores de Matemática*. Lisboa: IE, 237-260.

Oliveira, H. e Cyrino, M. (2013). Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: one study with prospective mathematics teachers. *SISYPHUS – Journal of Education, 1*(3), 214-245.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular.* Lisboa: APM, 11-34.

Rabardel, P. (2002). People *and Technology* – A Cognitive Approach to Contemporary Instruments.

Radford, L. (2003). *Gestures, speech, and the sprouting of signs:* A semiotic-cultural approach to students' types of generalization, Mathematical Thinking and Learning, 37-70.

Strauss, A. L. e Corbin, J. M. (1998). *Basics of Qualitative Research:* Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory. 2 ed. Thousand Oaks: SAGE.

Vergnaud, G. (1990). *La* théorie *des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 133–170.

Vérillon, P. e Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity, *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77–103.

Wells, G. (2004). *Dialogic inquiry:* Towards a sociocultural practice and theory of education. Cambridge: Cambridge University Press.

Wheatley, G. H. (1992). *The role of reflection in mathematics learning*. Educational Studies in Mathematics, 23, 529-541.

O MODELO TPACK COMO METODOLOGIA PARA A CONSTRUÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM COM O GEOGEBRA

TPACK MODEL AS A METHODOLOGY FOR THE CONSTRUCTION OF LEARNING OBJECTS WITH GEOGEBRA

Stephanie Díaz-Urdaneta, Luzia Narok Pereira, Marco Aurélio Kalinke
Universidade Federal do Paraná (Brasil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Brasil), Asociación Aprender en Red (Venezuela).
stephaniediazurdaneta@gmail.com, matematicaluzia@gmail.com, kalinke@utfpr.edu.br

Resumo
Neste trabalho se faz uma apresentação do Modelo TPACK como uma metodologia para a construção de Objetos de Aprendizagem (OA) com o software GeoGebra. Para tal, é conceituado a ideia sobre OA como um recurso de aprendizagem que apoia o ensino de algum conteúdo específico. Também se descreve o Modelo TPACK, que é conhecido como um método que ajuda à integração eficiente das tecnologias na Educação, particularmente na Educação Matemática. Para alcançar o objetivo deste trabalho, foram analisados cinco artigos que descrevem como foram criados os Objetos de Aprendizagem com o GeoGebra, nos quais se percebeu aspectos do Modelo TPACK. Entre os resultados obtidos, destacam-se que mesmo não sendo o TPACK considerado como um modelo para a construção de OA, nos trabalhos analisados evidencia-se sua presença, o que pode permitir considerá-lo como uma metodologia para construir OA, ao menos com o GeoGebra, um software considerado accessível e com qualidades para a construção destes recursos digitais.

Palavras-chave: objetos de aprendizagem, modelo tpack, geogebra

Abstract
In this paper, TPACK Model is presented as a methodology for the construction of Learning Objects with the software GeoGebra. For this, the idea about Learning Objects is conceptualized as a learning resource that supports the teaching of some specific content. It also described the TPACK Model, which is known as a method that helps the efficient integration of technologies in education, particularly in Mathematics Education. In order to reach the objective of this work, five articles were analyzed which describe how the Learning Objects were created with GeoGebra, in which different aspects of TPACK Model were perceived. Among the results obtained, it is highlighted that even though TPACK is not considered as a model for the construction of Learning Objects, in the analyzed works its presence is evidenced, which may allow to consider it as a methodology to construct Learning Objects, at least with the GeoGebra, that is a software considered as accessible and with qualities for the construction of these digital resources.

Key words: learning objects, tpack model, geogebra

Introdução

A utilização de Objetos de Aprendizagem (OA) como recursos para a abordagem de alguns conteúdos tornou-se uma ferramenta bastante utilizada nos últimos anos, o que se deve ao aumento do uso de Tecnologias Digitais (TD) na Educação Matemática. Uma amostra disso são os repositórios que existem atualmente e que têm uma gama de OA disponíveis para professores em Educação Matemática. No entanto, estamos conscientes de que as possibilidades de ensino e de aprendizagem variam de acordo com os grupos de trabalho em que são realizados. Diante disso, pode haver professores que preferem desenvolver seus próprios OA ou que desejem contribuir para a comunidade de educadores com o desenvolvimento desses recursos.

Frente a essa realidade, os autores deste trabalho, discutindo as ideias dos OA, refletem sobre questões um professor precisa considerar para construir seus próprios recursos e trazem um software pode ser utilizado para estas construções. Em relação à primeira, uma metodologia que pode orientar as considerações para tal construção é oferecida pelo Modelo TPACK, de Mishra e Koehler (2006). Quanto ao software que pode ser utilizado, considera-se que a elaboração requer o uso de ferramentas sofisticadas, mas que há evidências de softwares acessíveis para a construção destes recursos, como é o caso do GeoGebra (Díaz y Rubio, 2016).

Nesse sentido, considera-se adequado contribuir com evidências que sirvam de suporte para professores com interesses em construir seus próprios OA, e este artigo descreve como o modelo TPACK e o software GeoGebra foram usados para esta tarefa.

Metodologia

Como já foi citado, o Modelo TPACK de Mishra e Koehler (2006) é considerado uma metodologia para a integração eficiente das TD em sala de aula e uma dessas tecnologias que estão sendo incluídas nas aulas de Matemática são os OA. Um software que pode ser considerado acessível e com qualidades para a construção de OA é o GeoGebra, como foi relatado no trabalho de Díaz y Rubio (2016). Nesse sentido, o desenvolvimento deste trabalho, numa perspectiva qualitativa, se faz a partir dos três elementos do Modelo TPACK necessários para a integração eficiente das TD na construção de OA com o GeoGebra.

Para isso, fez-se uma leitura detalhada nos trabalhos de Castillo, Gutiérrez e Prieto (2013), Cervantes, Rubio e Prieto (2015), Gutiérrez e Prieto (2015), Rubio, Prieto e Ortiz (2016) e Díaz-Urdaneta, Prieto e Duarte (2017) para identificar o *Conhecimento de conteúdo*, o *Conhecimento Pedagógico* e o *Conhecimento Tecnológico*, com a intuito de descrever como se encontram evidências desse modelo sobre cada um dos trabalhos. Tal descrição desses conhecimentos em cada um dos textos se fez destacando aqueles fragmentos dos escritos onde se evidencia cada conhecimento.

Em seguida, faz-se a descrição das evidências do Modelo TPACK na criação dos OA construídos com GeoGebra reportados nos trabalhos considerados. Considera-se importante destacar que em alguns casos não foi definido *a priori* que o recurso estava concebido como um OA ou ainda que sua construção foi baseada no modelo TPACK. Entretanto, devido às características destacadas na construção, eles aqui são considerados nesta perspectiva, pois se encaixam nas definições que serão utilizadas nas próximas seções.

Objetos de aprendizagem

Devido ao desenvolvimento das TD, o interesse de usá-las nas escolas vem aumentando, e a comunidade de educadores busca compreender como conceber recursos digitais, que muitas das vezes são identificados como OA.

As ideias conceituais sobre os OA são variadas, tendo, no entanto, aspectos em comum: são recursos tecnológicos utilizados para abordar determinado conteúdo específico. Nesse sentido, o Grupo de Pesquisa em Tecnologias da Educação Matemática (GPTEM) conseguiu consolidar, ao longo de vários anos de discussões e reflexões, um conceito sobre OA, compreendendo-o como “qualquer recurso virtual multimídia, que pode ser usado e reutilizado com o intuito de dar suporte a aprendizagem de um conteúdo específico, por meio de atividade interativa, apresentada na forma de animação ou simulação” (Kalinke e Oliveira, 2016, p. 25).

Os OA veem sendo utilizados em várias disciplinas escolares e mantêm características comuns, entre as quais destacam-se as indicadas por Mendes, Souza e Caregnato (2007) que as apresentam como:

- Acessibilidade – pode-se acessar e usar o OA em qualquer lugar.
- Adaptabilidade – o OA pode ser usado em diferentes ambientes ou plataformas.
- Granularidade – refere-se ao tamanho do OA; quanto menor a quantidade de conteúdo, maior é a granularidade.
- Durabilidade – adaptação do OA às mudanças na tecnologia, sem necessidade de recodificação.
- Reusabilidade – refere-se ao OA ter a possibilidade de ser utilizado em diversos ambientes ou oportunidades.
- Interoperabilidade – capacidade do OA de operar em diferentes sistemas operacionais sem necessidade de modificações.

Destaca-se a questão de reusabilidade dos OA, pois essa característica abre um leque de possibilidades para adaptações às necessidades individuais dos alunos em relação aos modos de aprendizagem ou interesses, conforme salientam Kalinke e Oliveira (2016).

O Modelo TPACK

O modelo TPACK pode ser considerada uma metodologia que contribui para a integração eficiente de Tecnologias Digitais nas aulas. Para Mishra e Koehler (2006), este modelo representa uma forma emergente de conhecimento, no qual as TD e o conteúdo interagem entre si. Nesse sentido, é necessário que o professor possua conhecimentos técnico-pedagógicos que o auxiliem a utilizar as tecnologias na construção dos conhecimentos pelos envolvidos, explorando-os do mais simples ao mais complexo. A figura 1 mostra uma adaptação de Mishra e Koehler (2006) que representa graficamente o conceito de TPACK, mostrando a interação entre os três conhecimentos que um professor deve ter: Conteúdo, Pedagógico e Tecnológico.

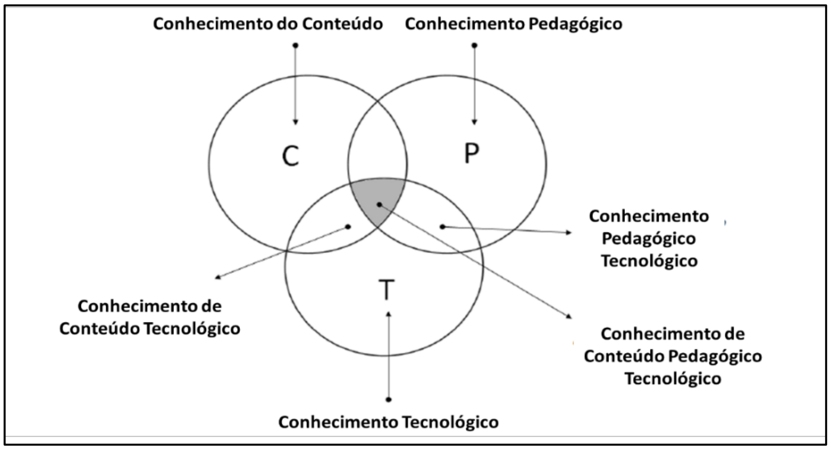


Figura 1. Modelo TPACK (Mishra y Koehler, 2006)

Com base em uma revisão teórica realizada por Gonçales e Anunciato (2017) do Modelo TPACK, apresentaremos cada um dos conhecimentos necessários para a integração eficiente de tecnologias em sala de aula.

O *conhecimento do conteúdo* está relacionado ao que se pretende que seja ensinado ou aprendido e envolve as definições, estruturas e procedimentos a serem seguidos quando um determinado conteúdo está sendo abordado. O *conhecimento pedagógico* está vinculado à didática da disciplina, ao currículo, planejamento, estratégias, objetivos e avaliação dos alunos com a finalidade de obter resultados favoráveis. Por fim, o *conhecimento tecnológico* envolve o conhecimento de possíveis tecnologias, desde as mais tradicionais até as TD, a serem utilizadas para ensinar um conteúdo específico. Este último conhecimento supõe não apenas saber utilizá-lo, mas também como utilizá-lo de maneira favorável no ensino, de forma a não se tornar um obstáculo nas atividades desenvolvidas.

O GeoGebra

O GeoGebra é um Software de Matemática Dinâmica de acesso livre e código aberto que permite o trabalho de diversas representações de objetos e símbolos matemáticos em tempo real (Hohenwarter, 2006, Diković, 2009). Atualmente está na versão 6, com a qual se pode abordar aspectos de Álgebra, Geometria, Cálculo, Probabilidade, Estatística e outras áreas da Matemática. A sua mais recente adição é o "Modo Exame", com o qual é possível que o professor e seus alunos usem o software durante as avaliações formais, sem dispensar o papel e lápis, uma vez que possibilita restringir o acesso à Internet e outros softwares que não devem ser utilizados durante a avaliação.

Dada a diversidade de funcionalidades deste software e o livre acesso a ele, considera-se o GeoGebra um meio que pode ser utilizado na construção de OA, entendidos de acordo com Kalinke e Oliveira (2016), já que a facilidade de representação de diferentes formas de um mesmo conceito matemático pode auxiliar a potencializar as possibilidades de exploração e visualização dos usuários neste tipo de recursos digitais (Hohenwarter, 2006; Diković, 2009; Artigue, 2012; Díaz e Rubio, 2016).

Modelo de TPACK, Objetos de Aprendizagem e o GeoGebra

Nesta seção serão apresentadas as evidências da presença do Modelo TPACK na criação dos OA construídos com GeoGebra reportados nos trabalhos analisados para este trabalho, a saber: Castillo, Gutiérrez e Prieto (2013), Cervantes, Rubio e Prieto (2015), Gutiérrez e Prieto (2015), Rubio, Prieto e Ortiz (2016) e Díaz-Urdaneta, Prieto e Duarte (2017).

Conhecimento do conteúdo:

Em Castillo, Gutiérrez e Prieto (2013) o conhecimento do conteúdo é visto na seção "Considerações teóricas" ao comentar sobre as diferentes transformações que podem surgir na função $f(x) = e^{ax}$ com $a \neq 0$ ao variar o parâmetro a.

> Em primeiro lugar, consideramos que as mudanças nos valores do parâmetro de função $f(x) = e^{ax}$ com $a \neq 0$ produzem dois tipos de transformações geométricas nos gráficos correspondentes, conhecidos como "deformação" (tipo horizontal) e "reflexão". Ambos os efeitos são caracterizados pelas qualidades que possuem alguma curva da família de $f(x) = e^{ax}$ que atua como referente do efeito. (Castillo, Gutiérrez e Prieto, 2013, p. 85) (tradução pelos autores).

Na parte de "Considerações teóricas do design", Cervantes, Rubio e Prieto (2015) descrevem o modelo matemático associado à velocidade da luz em um meio determinado, definindo cada uma das variáveis envolvidas, quando se evidencia o conteúdo na construção do OA reportado por esses autores.

> A partir disso, é possível estabelecer uma medida da redução da velocidade da luz causada por um meio de propagação, que é chamado de "índice de refração" (n) e é dado pela razão $\frac{c}{v}$, onde c y v representa a velocidade da luz no vácuo e no meio de propagação, respectivamente (Cervantes, Rubio e Prieto, 2015, p. 21) (tradução pelos autores).

Em Gutiérrez e Prieto (2015) pode-se encontrar o conhecimento do conteúdo na seção "Em relação ao objeto matemático" enquadrado em "Considerações da análise" que comentam sobre as transformações da função $g(x) = ax^2$ (com $a \in \mathbb{R}^*$) variando o parâmetro a.

> Dada a natureza da função determinada pela expressão $g(x) = ax^2$ (com $a \in \mathbb{R}^*$), que é o foco desta análise e que dá origem a uma família particular de parábolas (aquelas com vértice na origem da Sistema Coordenado Cartesiano), a sequência proposta leva em consideração dois tipos de transformações geométricas: deformação e reflexão, que estão relacionadas a mudanças nos valores do parâmetro a de $g(x)$. (Gutiérrez e Prieto, 2015, p. 118) (tradução pelos autores).

No trabalho de Rubio, Prieto e Ortiz (2016), o conhecimento do conteúdo é evidenciado na seção "Considerações teóricas" na qual o assunto considerado foi Movimento Retilíneo Uniformemente Variado, e para isso foram consideradas as fórmulas matemáticas que podem ser observadas na figura 2.

Fundamentales	Aplicadas a la caída libre	Utilizadas en el simulador
$\vec{v}=\vec{v_i}+\vec{a}\cdot\Delta t$	$\vec{v}=\vec{v_i}-\vec{g}\cdot t$	$v=g\cdot t$
$\Delta\vec{x}=\vec{v_i}\cdot\Delta t+\frac{\vec{a}\cdot\Delta t^2}{2}$	$\vec{y}=y_i+\vec{v_i}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot\vec{g}\cdot t^2$	$y=\frac{g\cdot t^2}{2}$
$\vec{v}^2=\vec{v_i}^2+2\cdot\vec{a}\cdot\Delta\vec{x}$	$\vec{v}^2=\vec{v_i}^2-2\cdot\vec{g}\cdot(\vec{y}-\vec{y_i})$	No fue utilizada

Figura 2. Fórmulas matemáticas do conteúdo considerado em Rubio, Prieto e Ortiz (2016)

Por fim, em Díaz-Urdaneta, Prieto e Duarte (2017) na parte de "Considerações Conceituais" as considerações de conteúdo são evidenciadas na definição dos diferentes aspectos envolvidos na circunferência trigonométrica: circunferência unitária, ângulo central, os sinais do seno e os coeficientes do cosseno e tangente na circunferência trigonométrica, as quais foram representadas por vetores, como se vê na figura 3.

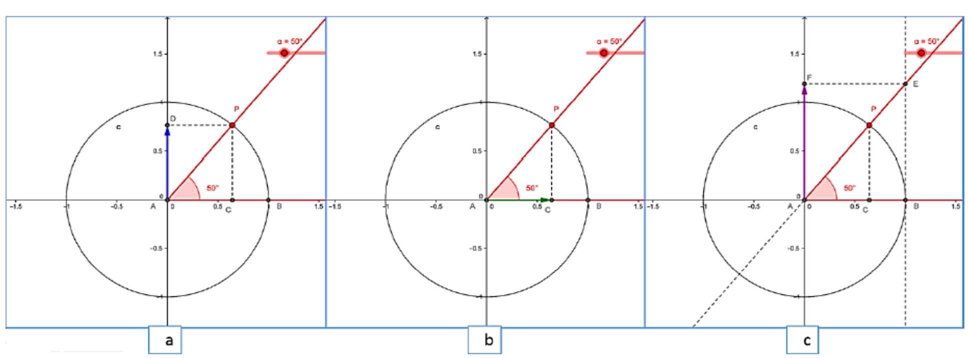


Figura 3. Representação gráfica das definições feitas em Díaz-Urdaneta, Prieto e Castillo (2017)

Conhecimento pedagógico:

O conhecimento pedagógico em Castillo, Gutiérrez e Prieto (2013) é evidente na seção "Considerações Didáticas" quando sugere que as diferentes transformações que eles descrevem no trabalho sobre a função $f(x) = e^{ax}$ com $a \neq 0$ sejam feitas separadamente.

> Finalmente, como a variação do parâmetro produz dois tipos de transformações nos gráficos de $f(x) = e^{ax}$, a análise da deformação e reflexão é realizada separadamente. Em ambos os casos, o estudo baseia-se em estabelecer os intervalos em que o parâmetro a deve variar para visualizar um ou outro efeito. (Castillo, Gutiérrez e Prieto, 2013, p. 85) (tradução pelos autores).

Em Cervantes, Rubio e Prieto (2015), esse conhecimento é enquadrado na seção "Descrição da sequência" ao sugerir uma maneira para usar o OA. "Tendo em conta as considerações acima, uma sequência para analisar a refração e a reflexão interna total com o GeoGebra é descrita abaixo" (Cervantes, Rubio e Prieto, 2015, p. 23) (tradução pelos autores).

No trabalho de Gutiérrez e Prieto (2015) o conhecimento pedagógico está na seção "Quanto ao procedimento de análise" onde é sugerido fazer a análise a partir das diferentes transformações que a função $g(x) = ax^2$ (con $a \in \mathbb{R}^*$) sofre, ao variar o parâmetro a. Esta sugestão é aprofundada na parte de "Sequência das análises" na qual se descrevem três momentos de como fazer o estudo sobre as diferentes transformações da função $g(x) = ax^2$ (con $a \in \mathbb{R}^*$) quando o parâmetro a varia em certos intervalos.

> A sequência que segue consiste em três momentos. O primeiro passo é estabelecer os intervalos de variação do parâmetro para os quais é possível caracterizar as transformações de deformação e reflexão associadas com $g(x) = ax^2$. O segundo momento é dedicado à análise da deformação. Neste os ajustes apropriados são feitos pelo cursor, variado para visualizar o efeito e as parábolas associadas são caracterizadas em relação a ele. O terceiro momento se desenvolve de forma análoga ao momento anterior, caracterizando desta vez o efeito reflexivo. (Gutiérrez e Prieto, 2015, p.119) (tradução pelos autores)

Em Rubio, Prieto e Ortiz (2016) este conhecimento é apresentado na seção "Considerações curriculares", na qual é feita uma descrição sobre o conteúdo selecionado dentro dos documentos oficiais que determinam como um determinado conteúdo deve ser ensinado.

> No currículo, consideramos os propósitos de ensinar o movimento em queda livre dentro dos programas e manuais escolares oficiais na Venezuela como elementos que possam justificar a proposta do simulador. Por um lado, a presença desse conteúdo é destacada nos atuais programas de Física de nível médio (Ministério da Educação, 1987) e em outras propostas de reforma curricular mais atual (Ministério do Poder Popular para a Educação, 2007). (Rubio, Prieto e Ortiz, 2016, p. 95) (tradução pelos autores).

Finalmente, em Díaz-Urdaneta, Prieto e Duarte (2017) o conhecimento pedagógico se reflete em "Considerações didáticas" nas quais os signos das razões trigonométricas recebem significado a partir do sentido do vetor que representa cada uma delas. Este assunto é estudado em profundidade na seção "Sequência de análise", que descreve uma forma de como usar o OA com base no que é descrito nas "Considerações didáticas".

> Dado que a construção da circunferência unitária se realiza sobre o sistema de coordenadas cartesianas, sugere-se realizar a análise para cada quadrante do plano cartesiano por separado, ajustando o deslizador em intervalos de amplitudes angulares associadas à cada quadrante. Desta maneira, é

> possível também fazer o uso dos botões para visualizar o comportamento dos vetores referidos às razões Seno, Cosseno e Tangente separadamente. (Díaz-Urdaneta, Prieto y Castillo, 2017, p. 84).

Conhecimento tecnológico:

Na obra de Castillo, Gutiérrez e Prieto (2013), este conhecimento é apresentado na seção "Considerações instrumentais" na qual o uso da ferramenta "Controle deslizante" do GeoGebra representa uma peça-chave para a variação do parâmetro a da função $f(x) = e^{ax}$ com $a \neq 0$.

> Os controles deslizantes podem ser associados aos parâmetros de expressões algébricas, como na função $f(x) = e^{ax}$, para visualizar as mudanças sofridas pelas curvas associadas à expressão à medida que o parâmetro muda valor (Castillo, Gutiérrez e Prieto, 2013, p. 85) (tradução pelos autores).

Em Cervantes, Rubio e Prieto (2015), pode-se evidenciar na parte de "Considerações técnicas do design" quando se fazem modelos matemáticos para a construção do OA e se utiliza um polígono e controles deslizantes para as variáveis que são apresentadas.

> Em segundo lugar, considera-se que usando as ferramentas do próprio GeoGebra, alguns fenômenos físicos podem ser simulados, incluindo os casos de refração e reflexão interna total, uma vez que são subjacentes a certas relações matemáticas ou fórmulas que modelam seu comportamento. A partir dessas fórmulas, é possível desenvolver um procedimento de construção consistente que sirva de base para a simulação dos fenômenos no programa. [...]. Para simular os fenômenos supracitados é suficiente representar os dois meios de propagação da luz através da ferramenta Polígono; crie três controles deslizantes associados ao ângulo de incidência do feixe e os índices de refração de ambos os meios e construa o ângulo de incidência, refração e reflexão interna total para visualizar o que acontece com eles em cada um dos momentos mencionados acima. (Cervantes, Rubio e Prieto, 2015, p. 22) (tradução pelos autores).

Gutiérrez e Prieto (2015) mostram este conhecimento tecnológico na seção "Em relação ao GeoGebra" na qual o uso do "controle deslizante" é destacado para variar o parâmetro a da função $g(x) = ax^2$ (con $a \in \mathbb{R}^*$)

> Para representar as transformações de deformação e reflexão no GeoGebra, a sequência considera o uso de um controle deslizante, ferramenta de software que permite ao usuário interligar, em tempo real, intervalos de valores contínuos ou discretos a parâmetros que fazem parte de expressões algébricas mais complexas, faça os ajustes necessários nos extremos do intervalo e visualize dinamicamente as mudanças sofridas pelas expressões envolvidas e suas representações analógicas (por exemplo, as curvas, no caso de funções) enquanto o parâmetro assume valores diferentes. (Gutiérrez e Prieto, 2015, p. 118) (tradução pelos autores).

Em Rubio, Prieto e Ortiz (2016) este conhecimento é evidenciado na seção "Descrição da sequência de construção" na qual cada um dos passos seguidos para a criação do OA descrito é desenvolvido a partir das diferentes ferramentas do GeoGebra. "Do exposto, seguimos para o desenvolvimento do simulador com o GeoGebra. Uma reflexão sobre o processo de construção conduziu ao estabelecimento de uma sequência de etapas de construção estruturadas em sete tarefas principais" (Rubio, Prieto e Ortiz, 2016, p. 96).
Por fim, em Díaz-Urdaneta, Prieto e Duarte (2017), o conhecimento tecnológico é evidenciado na seção "Considerações instrumentais", que comenta duas ferramentas utilizadas pelo GeoGebra: 1) "Controle deslizante" e 2) "Botões". O primeiro é usado para variar o valor do ângulo e em relação ao segundo e ambos foram criados para mostrar ou ocultar certos elementos construídos no OA, com base nas considerações que precisam usar esse objeto.

> Para a representação dos signos das razões trigonométricas no GeoGebra, considerou-se o uso de um deslizador e três botões. O deslizador é uma ferramenta que permite representar um conjunto de valores, incluindo medidas angulares. Com isso é possível fazer variar a amplitude do ângulo em tempo real. [...]. Os botões são ferramentas do GeoGebra que têm uma diversidade de aplicações no software, as quais dependerão da utilidade que lhe dê o usuário. Para nosso caso, utilizou-se para mostrar e ocultar alguns dos objetos representados na interface gráfica do programa, segundo considerou-se apropriado. (Díaz-Urdaneta, Prieto e Castillo, 2017, p. 84) (tradução pelos autores).

Reflexões finais

Ao longo deste texto foi feita a descrição de como o Modelo TPACK, mesmo que não tenha sido utilizado a priori, pode estar presente na construção de Objetos de Aprendizagem com o GeoGebra, relatada nos trabalhos de Castillo, Gutiérrez e Prieto (2013), Cervantes, Rubio e Prieto (2015), Gutiérrez e Prieto (2015), Rubio, Prieto e Ortiz (2016) e Díaz-Urdaneta, Prieto e Duarte (2017). Apesar de não ter considerado o modelo TPACK como referência metodológica para a construção dos recursos digitais reportados nos trabalhos, fica evidente como o conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo tem sua presença no desenho dos OA. Outra questão a ser destacada é que em todos os trabalhos considerados, os recursos não são definidos como OA, mas de acordo com sua estrutura e as sequências que eles propõem, podem ser classificados como OA construídos com o GeoGebra.

Nesse sentido, pode-se considerar que o Modelo TPACK gera contribuições para a construção de OA e que o GeoGebra é um software com o qual é possível a construção deste tipo de recursos. Com isso, entretanto, não se afirma que o Modelo TPACK seja a única, ou melhor, maneira de construir um OA ou que o GeoGebra é o melhor software para construí-los. No entanto, as contribuições do Modelo TPACK para a construção de OA e as possibilidades de construção desses recursos no GeoGebra ficaram evidentes no trabalho.

Para concluir, gostaríamos de destacar que outras evidências são encontradas em Prieto e Gutiérrez (2016) onde a construção de recursos digitais é relatada com o GeoGebra, mas não foram baseadas literalmente no Modelo TPACK e tais recursos não foram definidos como OA. No entanto, na revisão dos textos pode-se evidenciar como os conhecimentos do conteúdo, do pedagógico e do tecnológico são revelados durante a elaboração dos recursos, construídos para o estudo de um conteúdo específico.

Agradecimentos

À Comissão de Aperfeiçoamento de Pessoal do Nível Superior (CAPES) e ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciência e em Matemática (PPGECM) da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Referências bibliográficas

Artigue, M. (2012). Le défi technologique. En UNESCO (Ed.) Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base, (43-45). UNESCO: Paris.

Castillo, L., Gutiérrez, R., e Prieto, J. L. (2013). Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función $f(x) = e^{ax}$ utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 2*(2), 81-92.

Cervantes, A., Rubio, L. e Prieto, J.L. (2015). Una propuesta para el abordaje de la refracción y reflexión total interna utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 4*(1), 18-28.

Díaz-Urdaneta, S. C., Prieto G., J. L. e Duarte C., A. (2017). Interpretação geométrica dos signos das razões trigonométricas com GeoGebra. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 13*(28), 78-89.

Díaz, S., e Rubio, L. (2016). Movimiento rectilíneo uniforme con GeoGebra. Un simulador para la enseñanza de la Física. Em J.L. Prieto e R.E. Gutiérrez (Comps.), *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia* (pp. 156-168). Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

Diković, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6* (2), 191-203.

Gonçales, C. R. A., e Anunciato, O. R. M. M. (2017). TPACK-Conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo: uma revisão teórica. *Imagens da Educação, 7* (2), 11.

Gutiérrez, R. E., e Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = ax^2$. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 88* (Marzo de 2015), 115-126.

Hohenwarter, M. (2006). Dynamic investigation of functions using GeoGebra. Proceedings of Dresden International Symposium on Technology and its Integration into Mathematics Education. Recuperado de: http://archive.geogebra.org/static/publications/2006-DES-TIME.pdf

Kalinke, M. A. e Oliveira, B. R., (2016). Lousas Digitais e Objetos de Aprendizagem. Em M. A. Kalinkey L. Ferreira Mocrosky (Comps.), *A Lousa Digital y Outras Tecnologias na Educação Matemática*. Curitiba, Brasil: Editora CVR.

Mendes, R. M., Souza, V. I., e Caregnato, S. E. (2004). A propriedade intelectual na elaboração de objetos de aprendizagem. *Encontro Nacional de Ciência da Informação*, 5.

Mishra, P., e Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record, 108* (6), 1017.

Prieto, J.L. e Gutiérrez, R.E. (Comps.). (2016). *Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia*. Maracaibo, Venezuela: A.C. Aprender en Red.

FUNCIÓN POR TRAMOS: UNA EXPERIENCIA MEDIADA POR TECNOLOGÍA DIGITAL CON ESTUDIANTES DE CARRERAS DE HUMANIDADES

A DIGITAL TECHNOLOGY-MEDIATED EXPERIENCE WITH STUDENTS OF HUMANITIES

Edwin Cristian Julian Trujillo, Flor Carrillo Lara, Jesús Flores Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú, Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas IREM-PUCP (Perú)
ecjuliant@pucp.pe, f.carrillo@pucp.edu.pe, jvflores@pucp.pe

Resumen
En el artículo se presenta una tarea que permite movilizar la noción de función por tramos en un curso de matemáticas con diez estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad de Lima-Perú. El trabajo es de corte cualitativo y considera aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica como referencial teórico. Se utiliza como medio la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz.* Se analiza, en las producciones de los estudiantes, la coordinación de diferentes registros de la función por tramos. También, los resultados revelan que los estudiantes coordinan los registros de lengua natural, algebraico y gráfico. Asimismo, muestran la pertinencia de la tecnología digital utilizada.

Palabras clave: función por tramos, representaciones, calculadora

Abstract
This paper shows a sequence of tasks that allows mobilizing the notion of function by sections in a course of mathematics with first-year students of Humanities degree courses at a university of Lima-Peru. It is a qualitative research where the Theory of Records of Semiotic Representation constitutes the theoretical framework. The Casio fx-991 ClassWiz calculator is used as a teaching aid. It is possible to analyze how the students coordinate different registers of semiotic representation of the function by sections, in their tasks. In addition, the results reveal that they coordinate natural language, algebraic and graphic registers. They also show the relevance of the digital technology they used.

Key words: function by sections, theory of registers of semiotic representation, technology

Introducción

El trabajo que se presenta muestra una tarea de las dos elaboradas en una secuencia didáctica que permite movilizar la noción de función por tramos en un primer curso de matemáticas con estudiantes de primer ciclo de carreras de humanidades de una universidad particular de Lima-Perú. La tarea fue elaborada tomando como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) y en la que se utiliza como medio la calculadora científica Casio *fx-991 ClassWiz*. En cuanto a la metodología empleada es de corte cualitativo porque estamos interesados en analizar los procesos que realizan los estudiantes cuando trabajan con diferentes representaciones de la función por tramos. Además, ya que se utiliza como medio una calculadora científica, es necesario señalar la pertinencia de la tecnología digital como parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje. Después se consideran aspectos importantes de la Teoría de Registros de Representación Semiótica para analizar las producciones de los estudiantes y finalmente se presentan algunos de los resultados obtenidos.

La calculadora científica como medio

En este artículo se explora el uso de la calculadora *Casio fx-991 ClassWiz***,** ya que favorece la movilización del concepto función por tramos. Para esta tarea consideramos tramos de dos tipos de funciones: lineal afín y cuadrática.

Nos interesa incorporar progresivamente el uso de esta calculadora debido a que es una potente interfaz ideal para la enseñanza, ya que permite, por ejemplo, interactuar con otras herramientas tecnológicas (celular e internet) mediante el uso de código QR, es decir las representaciones gráficas y otros elementos se pueden “visualizar” en las pantallas de los celulares, tabletas, etc.

Esta interacción apoya la idea de que la tecnología simplifica procesos algorítmicos y enfoca la atención a la exploración, manipulación e interpretación de resultados más que resultados de simples cálculo y con ello, permite concentrarse en la comprensión de las tareas y en el análisis de la solución de estas, pues favorece la construcción de un nuevo ambiente de aprendizaje.

En ese sentido, Trouche (2005) afirma que es necesario que los docentes construyan tareas en las que se utilicen calculadoras u otras tecnologías de manera que potencien en sus estudiantes actitudes favorables para una mejor relación con el conocimiento matemático. Además, el autor acota que la tecnología no simplifica el trabajo del docente ni del estudiante, sino que requiere la construcción de una enseñanza compleja y un ambiente de aprendizaje adecuado.

A continuación, se presentan aspectos teóricos y metodológicos, utilizados en desarrollo y análisis de la tarea presentada.

Aspectos de la teoría de registros de representación semiótica

Se toma como base aspectos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1995) porque de acuerdo con el investigador, aprender matemáticas involucra actividades cognitivas como la conceptualización, el razonamiento y la resolución de problemas; además, afirma que en la actividad matemática se deberían coordinar diferentes registros de representación semiótica como el registro de lengua natural, el registro algebraico, el registro figural y el registro gráfico.

En relación a la coordinación de registros, el investigador afirma que “la coordinación de muchos registros de representación semiótica es fundamental para una aprehensión conceptual de objetos, es preciso que un objeto no sea confundido con sus representaciones y que sea reconocido en cada una sus representaciones posibles" (Duval, 2012, p. 5). También afirma que las transformaciones de las representaciones, tratamientos y conversiones, que son internas es decir en un mismo registro u externas, entre registros respectivamente favorecen el proceso de apropiación de conceptos matemáticos.

Para ilustrar lo explicitado anteriormente, en la figura 1 se muestra las conversiones y tratamientos de las diferentes representaciones de la función por tramos.

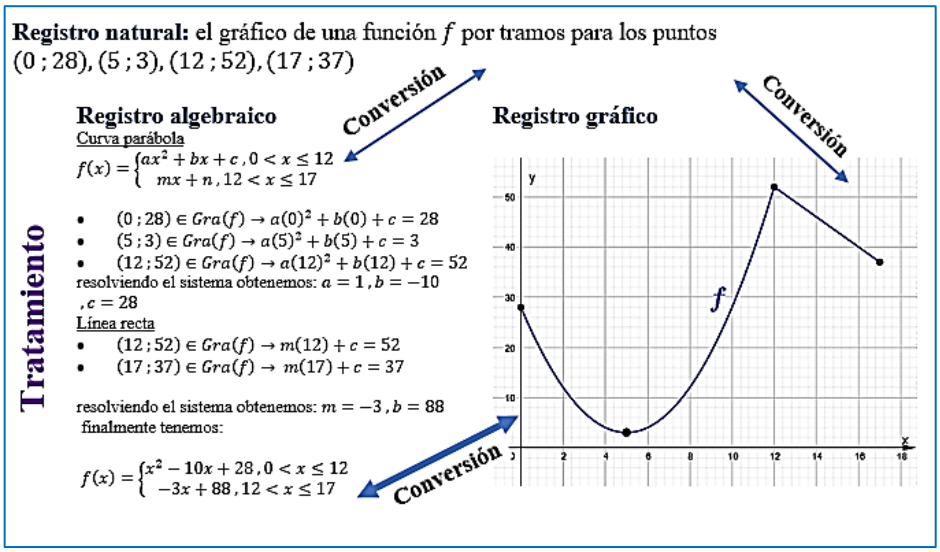


Figura 1. Tratamientos y conversiones en las representaciones de la función por tramos
Fuente: Adaptado de Duval, 2006, p.146

Como muestra la figura 1 se proporciona información sobre tres puntos de paso de la representación de la función por tramos f (representación en lenguaje natural) que permite plantear una expresión matemática que describe a esa función. También se observa la conversión del registro de lengua natural al algebraico, en la que por medio de los relaciones y operaciones algebraicas se determinan los parámetros a, b, c, m y n lo que configura tratamientos en el registro algebraico. En cuanto a la representación gráfica de f, esta se puede realizar por medio de un software como el GeoGebra, calculadora o lápiz y papel.

En la representación gráfica es posible identificar los puntos de paso, esto significa una coordinación entre el registro gráfico y de lengua natural. Como ese proceso es cíclico, es posible que se realice en forma inversa. Es en ese sentido, en el presente trabajo nos centraremos a analizar la coordinación de los registros lengua natural, algebraico y gráfico.

Antes de presentar la tarea, es necesario señalar que la metodología que se emplea en el presente trabajo es de corte cualitativo (Borba, 2004), ya que se priorizan los procedimientos, la descripción y el análisis pues conocimiento explícitamente admite una interferencia subjetiva.

La tarea: función por tramos

Se ha elaborado y aplicado una tarea sobre función por tramos. Cabe señalar que antes de esta tarea se ha realizado una breve inducción a los diez estudiantes de carreras de humanidades de una universidad privada de Lima-Perú, cuyas edades van desde los 16 a 18 años sobre el uso de la calculadora científica.

Por otro lado, en la presente tarea los estudiantes trabajan en duplas ya que se desea promover el trabajo colaborativo.

Además, la tarea que se presenta tarea ha sido trabajada en dos sesiones de clase de 50 minutos cada una, en el primer ítem de la tarea se explora la función afín y cuadrática haciendo uso de la calculadora científica y en el segundo ítem que corresponde a la segunda sesión, se trabaja con la función por tramos (afín y cuadrática). A continuación, se presenta la tarea dada a los estudiantes:

La cadena radial Radio Programas del Perú (RPP) cuenta con el siguiente gráfico, que relaciona la variación en puntos porcentuales de denuncias telefónicas $D(t)$ *en función de las* (t) *horas del día de ayer. De acuerdo a la ello, determine la regla de correspondencia de la función por tramos* f

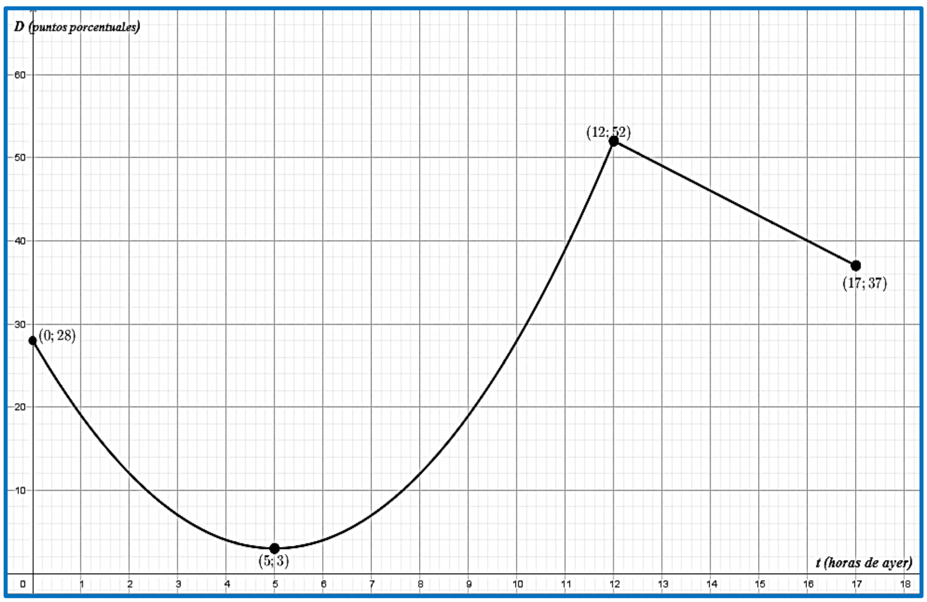


Figura 2. Representación gráfica de la tarea.

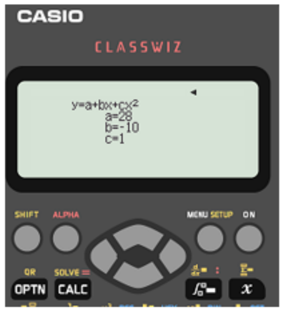
Se presenta (ver figura 2) la representación gráfica de la función por tramos en la que, por medio de la aprehensión perceptiva de la representación gráfica de la función, es posible identificar que la función dada tiene un tramo lineal y otro cuadrático. Además, como en la representación gráfica de la función se observan los puntos de paso, también es posible realizar la conversión al registro algebraico, en el que por medio de las herramientas de la calculadora científica se obtiene la representación algebraica en la forma general. Es decir, es posible realizar conversiones.

El propósito de esta tarea es que los estudiantes coordinen el registro gráfico, algebraico y de lengua natural y, a partir de la representación gráfica dada sobre los elementos y propiedades de la función por tramos, además que empleen las diferentes maneras de expresar la regla de correspondencia de una función f.

Cabe destacar que en la tarea se utiliza la calculadora científica Casio *fx-991 ClassWiz.* En la figura 2 se muestra cómo se puede extraer puntos que pertenecen a los dos tramos de la tarea, así para los puntos del tramo cuadrático se identifican los puntos $(0\,;28)$, $(5\,;3)$, $(12\,;52)$ y para el tramo lineal $(12\,;52)$, $(17\,;37)$.

Tramo cuadrático

x	y
0	28
5	3
12	52



Tramo lineal

x	y
12	52
17	37

Figura 3. Uso de la interfaz ESTADÍSTICA.

Por otro lado, en la figura 3, se muestra que al utilizar la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz*, se puede ingresar al menú (ESTADISTICA) opción 6. Para el tramo cuadrático, se presiona la opción 3, la cual tiene la forma ($y = a + bx + cx^2$) se completan con los puntos $(0\,;28), (5\,;3), (12\,;52)$ luego se utiliza regresión y se obtienen los valores numéricos de los parámetros a, b y c esto es $28, -10$ y 1 respetivamente es decir $y = x^2 - 10x + 28$.

Se realiza el mismo procedimiento para el tramo lineal y se obtiene la regla de correspondencia de la función f tal como se ve en la figura (ver figura 3-derecha). Finalmente, se obtiene la regla de correspondencia (registro algebraico).

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + 28\,; & 0 < x \leq 12 \\ -3x + 88\,; & 12 < x \leq 17 \end{cases}$$

En la que se evidencia la conversión del registro gráfico al algebraico.

Análisis de la producción de los estudiantes

Para el desarrollo de la tarea (ver figura 2), se pidió a los diez estudiantes que trabajen en duplas. Las duplas de estudiantes debían leer el enunciado, y responder a la pregunta dada en la misma. Cabe señalar que previamente se realizó una inducción del uso de la calculadora científica Casio *fx-991 ClassWiz*, haciendo énfasis en la interfaz *ESTADISTICA*. La tarea solicitaba que en base a la representación gráfica, determinen la regla de correspondencia de la función por tramos f.

En el primer tramo cuadrático se observa que los estudiantes no establecen una relación específica entre las expresiones: $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$, en la cual $(h; k)$ determinan el vértice de la parábola, debido a ello con el uso de la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz* y la interfaz *ESTADISTICA* los estudiantes seleccionan la expresión a trabajar $y = a + bx + cx^2$ para luego construir una tabla de valores con los puntos $(x\,; y)$, todo esto lo hacían empleando un análisis de variable independiente y dependiente, a partir de ello identificaron tres puntos como mínimo para poder hallar los parámetros a, b y c de del tramo cuadrático. En el segundo tramo y de acuerdo a las características de una función afín, las duplas optan por la opción 2 esto es hacer uso de la regla $y = a + bx$.

En las producciones de las duplas formadas por los diez estudiantes, se observa que para el tramo 1 a partir de la representación gráfica, las duplas identifican los puntos de paso. Con esta información proporcionada, hacen uso de la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz*, y en la interfaz *ESTADISTICA* identifican la regla de correspondencia a usar para luego representar algebraicamente la función f.

Debido a ello notamos la coordinación por parte de las duplas de estudiantes de los diferentes registros de la función por tramos, es decir revelan la coordinación entre los registros de lengua natural, algebraico y gráfico.

Asimismo, muestran la pertinencia de la tecnología digital optimizando el tiempo para el cálculo y centrándose en las características que cada una de las funciones (cuadrática y afín), es decir se simplifica procesos algorítmicos y enfoca la atención a la exploración, manipulación e interpretación de resultados más que resultados de simples cálculo y con ello, permite concentrarse en la comprensión de la tareas y en el análisis de la solución de las mismas con la finalidad de favorecer la movilización del concepto función por tramos.

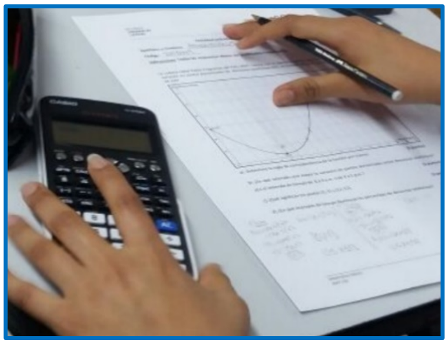


Figura 4. Desarrollo de la tarea presentada por una dupla de los estudiantes.

En la figura 4, se muestra el momento en el que el estudiante ingresa los datos de las tablas en la calculadora es decir hace uso de la interfaz *ESTADISTICA*, a partir de ahí hallar la regla de correspondencia de la función por tramos f .

Consideraciones finales

Luego del desarrollo de la tarea notamos que los estudiantes coordinaron el registro gráfico y algebraico. Además, los estudiantes lograron determinar la regla de correspondencia de la función tramos haciendo uso de la interfaz ESTADISTICA de la calculadora Casio *fx-991 ClassWiz* . Por otro lado, mediante tareas apropiadas es posible reconocer las diferentes reglas de correspondencia de una función por tramos a partir de su representación gráfica. Por lo general, la enseñanza de funciones está, en la mayoría de los casos, enfocada con predominancia del registro algebraico dejándose de lado la representación en los registros gráfico y tabular. Es por ello que, se afirma que el hecho de presentar objetos matemáticos por medio de sus diferentes representaciones y coordinarlas entre sí permite atender a ciertas particularidades de aprendizaje de estudiantes, en función de sus estilos cognitivos.

El presentar la representación gráfica de la función f permitió que por medio de la aprehensión perceptiva sea posible identificar puntos de paso que luego pueden ser utilizados en la representación algebraica, es decir en la regla de correspondencia de cada representación gráfica presentada. Por otro lado, se puede evidenciar que la calculadora es un medio que permite movilizar conocimientos mediante la coordinación de diferentes registros de representación semiótica de la función cuadrática.

Se piensa que al incorporar de manera progresiva el uso de la calculadora Casio fx-991 ClassWiz se puede explorar las distintas funciones de sus interfaces, que son ideales para la enseñanza de diferentes contenidos matemáticos, ya que admite realizar la conversión entre los diferentes registros.

Esta experiencia sirve de evidencia de la pertinencia del uso de la tecnología digital en tareas que favorezcan la exploración, indagación y conjetura de propiedades de los objetos matemáticos que se pueden representar con este medio tecnológico.

Agradecimientos

Agradecemos al Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas a la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP), específicamente a la línea investigación Tecnologías y Visualización en Educación Matemática – TecVEM (actividad PO0068-001-1802-07).

También agradecemos el apoyo del Sr. César Lau, quien lidera el equipo académico de *Casio Latinoamérica*, por sus aportes en el diseño de las actividades con calculadoras científicas Casio del modelo *fx-991.*

Referencias

Borba, M. (2004). A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. *CD nos Anais da 27ª reunião anual da Anped, Caxambu, MG*.

Casio http://www.casio-intl.com/latin/es/calc/scientific/classwiz/

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9*(1), *pp. 143-168.*

Duval, R. (2012). *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento.* (M. Thadeu, Trad.) Florianópolis, Brasil.

Trouche, L. (2005). Calculators in Mathematics Education: A rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. New York, USA: Springer

RETOS Y DESAFÍOS EN UN AMBIENTE BLENDED PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS DE LOS PRIMEROS CICLOS DE ESTUDIANTES ADULTOS

CHALLENGES IN A BLENDED-ENVIRONMENT FOR MATHEMATICS LEARNING IN THE FIRST CYCLES OF ADULT STUDENTS

Juan Carlos Sandoval Peña
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas (Perú)
juan.sandoval@upc.edu.pe

Resumen
La presente investigación "Retos y desafíos en un ambiente blended para el aprendizaje de las matemáticas de los primeros ciclos de estudiantes adultos", plantea, desarrolla y evalúa los resultados y logros de aplicar una metodología de enseñanza-aprendizaje en un sistema semipresencial, al aprendizaje de las matemáticas en estudiantes adultos. El diseño de investigación es mixto. La población objetivo de la investigación está constituida por los ingresantes al programa de adultos de una universidad particular de Lima-Perú. El investigador para gestionar la intervención en la especialidad de Administración considera que la población accesible está conformada por estudiantes elegidos aleatoriamente.

Palabras clave: Andragogía, aprendizaje, blended-learning, rendimiento

Abstract
The present research "Challenges in a blended-environment for the mathematics learning in the first cycles of adult students", proposes, develops and evaluates the results and achievements of applying a teaching-learning methodology in a blended- mode, to adult students' mathematics learning. The research design is mixed. The research target population is made up by those who enter the program for adults at a private university in Lima-Peru. To manage the intervention in the specialty of Administration, the researcher considers that the approachable population is made up of randomly chosen students

Key words: Andragogy, learning, blended-learning, performance.

Introducción

La escuela tradicional está en crisis en la educación peruana y en el mundo entero. Esto es fácil de comprender si se tiene en cuenta que una escuela centrada hasta el momento en la rutina, el aprendizaje mecánico, el cumplimiento y la obediencia, no tiene sentido en la época contemporánea, donde la ubicuidad y las limitaciones espacio-temporales ya trascendieron las paredes de escuela tradicional.

La investigación pretende abordar los retos principales de la educación en un mundo globalizado y virtualizado. Se trata de describir las características principales del siglo XXI, desarrollando algunas de sus implicaciones sociales y políticas para, finalmente, analizar los principales desafíos a los que se enfrenta la educación peruana en la actualidad. En este contexto vamos a profundizar en el papel del maestro, del estudiante, de las tecnologías y de los modelos didácticos en nuevos contextos educativos, que requieren desarrollar otras competencias intelectuales y afectivas. El problema de la estandarización, en dialéctica con lo singular de cada circunstancia, se define como el núcleo esencial de esta “nueva cuestión educativa”.

En el trabajo expuesto se explora el dominio de las tecnologías de la información y comunicación como medio para potenciar el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes adultos que nacieron con el surgimiento de la internet y cuya contribución pretende dar como respuesta al problema de describir, catalogar y compartir conocimiento dentro del paradigma de la sociedad del conocimiento (Torres, 2016).

El presente trabajo constituye un valioso aporte al desarrollo de la educación en el contexto peruano debido a que nos permitirá conocer más cerca las variables que configuran los sistemas de educación semipresencial, estudio fundamental para el desarrollo de la educación soportado en la red para el contexto peruano y así mismo a través de él: permitirá diagnosticar el estado del arte en lo referente a la influencia que ejerce los materiales didácticos, estrategias didácticas, plataforma virtual, tutoría virtual, trabajo colaborativo y la comunicación virtual, el aprendizaje logrado de las matemáticas en estudiantes adultos de la universidad en estudio. Por estas razones es necesario y propicio seguir incentivando el desarrollo de la investigación no solo a nivel pedagógico sino también a nivel disciplinar y tecnológico el cual ayudará a mejorar la calidad educativa desde un cambio de enfoque pedagógico centrado en la enseñanza, hacia otro enfoque que asuma el aprendizaje colaborativo, reflexivo y autónomo basado en las tecnologías de la información y comunicación como estrategia fundamental del proceso educativo.

La investigación realizada se inscribe en un marco interdisciplinario: educación-gestión del conocimiento-tic´s. Podemos señalar los siguientes puntos para explicar y fundamentar el problema de investigación que se pretende abordar, así:

1. Realizar un diagnóstico de la educación peruana. Por ejemplo, hablar de estadísticas, evaluaciones censales, PISA y otros, del ranking de universidades peruanas.
2. Documentar sobre las tendencias de la enseñanza de las matemáticas en el Perú.
3. Importancia de la problemática de introducir blended-learning, por ejemplo, que los profesores no están preparados, o que sin un sistema de gestión integrado no tiene resultados idóneos.
4. Trascendencia sobre las bondades de la plataforma Blackboard.

El problema a investigar responde a la pregunta: ¿En qué medida los ambientes blended-learning se relacionan con el aprendizaje de las matemáticas en los primeros ciclos de estudiantes adultos de la universidad particular en estudio?

Marco referencial

Como antecedente, se resalta el estudio de los modelos tecnológicos para la enseñanza, sostiene (Gamis, 2009). Tesis: "Entornos Virtuales para la formación Práctica de Estudiantes de Educación: Implementación de la plataforma Aula Web". España: Universidad de Granada, tesis doctoral. Se resalta el estudio de los modelos tecnológicos para la enseñanza, sostiene: Inmersos en la Sociedad del Conocimiento, la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC´s) en los procesos de enseñanza y aprendizaje suponen un gran reto para las instituciones educativas, con un profesorado, aún, insuficientemente formado y, posiblemente, sin la consciencia debida para afrontar los cambios metodológicos a los que se debe enfrentar.

Blended learning se puede traducir como aprendizaje mezclado, esto es, como una combinación de enseñanza presencial y enseñanza a distancia (Garrido, 2009). El presente trabajo se enmarca en el ámbito del apoyo tecnológico a la educación, más específicamente en el b-learning, y su objetivo principal es generar una estrategia que permita implementar clases a distancia en este contexto. En la Universidad Nacional de la Plata, se tuvo como objetivo general realizar una investigación acerca de la importancia de utilizar diferentes recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en función de las nuevas tendencias hacia modalidades mixtas de aprendizaje que sugieren poner a disposición de los alumnos los medios adecuados.
(Pompeya, 2010)**.**

El presente proyecto de investigación surge de la necesidad de contextualizar la andragogía al caso peruano y así replantear los aspectos didácticos y metodológicos del e-learning en educación superior de adultos del Perú (Sandoval, 2017).

En ese contexto, la oferta educativa, prácticamente en todas las universidades privadas ha aumentado de modo indiscriminado, permitiendo en un primer momento disminuir los problemas de masificación, para posteriormente, a mediano y largo plazo viabilizar su incorporación dentro de los estándares internacionales, elevando los niveles de competitividad de la educación privada nacional frente a ofertas de formación de otros países.

(Sandoval, 2017). Dentro del cambio de paradigma en el siglo XXI, desde la educación a distancia a la educación en línea, sería complejo categorizar las diferentes configuraciones en las que estarían enmarcadas la educación soportada en TIC´s. Sin embargo, podemos considerar tres tipos de procesos de enseñanza-aprendizaje soportados en las tecnologías de la información y comunicación: e-learning, b-learning o m-learning. Por otra parte, es necesario realizar algunas problematizaciones teóricas y metodológicas que diversos autores se encuentran desarrollando sobre dichas modalidades. (Verdún, 2016).

Siendo el blended learning una forma de aprendizaje que integra la enseñanza presencial con la virtual, presenta características de la enseñanza presencial y de la educación a distancia:

- Blended Learning permite diversificar las metodologías que se usan en la enseñanza presencial con las del e-learning, dando como resultado una multiplicidad de técnicas que enriquecen y facilitan el aprendizaje.
- El intercambio de ideas de forma inmediata es lo que caracteriza a la enseñanza presencial, en un curso híbrido esta comunicación se fortalece con las nuevas tecnologías de comunicación, que permiten abrir espacios virtuales de socialización, lo que posibilita la integración de grupos de personas para la construcción de nuevos conocimientos.
- Cuando el alumno de un curso blended learning se encuentra en la fase de "a distancia", en muchas ocasiones va a encontrar un problema, La interacción con otros estudiantes en la solución de un problema que le permitirá desarrollar un pensamiento crítico, ya que tendrá que exponer sus ideas, conceptos, estrategias y criticar las de los otros compañeros.

- El estudiante gana mayor libertad en cuanto a la hora y la forma de estudio, por lo tanto, un curso se hace más flexible y el control externo disminuye, dando al estudiante un control que depende más de él que del instructor. Esto permite al estudiante adaptarse a su propio estilo de aprendizaje.

La investigación pretende aportar algunos datos relacionados con aquellos factores que configuran el sistema blended-learning y que permiten discriminar el aprendizaje logrado en el curso de matemáticas de los estudiantes de los primeros ciclos de la Universidad particular en estudio. Esta propuesta pretende establecer, mediante el análisis multivariado y diferencias de medias, cómo, las dimensiones que configuran el sistema blended-learning permiten discriminar el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes del estudio. Tras revisar teóricamente todo lo relacionado con el rendimiento académico, como indicador del aprendizaje, y por motivos de complejidad y carácter multidimensional y medios, únicamente se tendrán en cuenta algunos de ellos, lo que supone asumir las limitaciones propias de esta selección previa.

Tabla 1. *Variable independiente y sus sub dimensiones*

Variable independiente	Dimensiones	Indicadores
Blended Learning	Material didáctico	Contextos de aprendizaje Retroalimentación
	Estrategia didáctica	Aprendizaje lúdico Aprendizaje activo
	Plataforma virtual	Simplicidad Estética
	Tutoría virtual	Orientación seguimiento Autonomía
	Trabajo colaborativo	Habilidad social Autonomía sinergia
	Comunicación virtual	Comunicación sincrónica Comunicación asincrónica

Tomado de: "Retos y desafíos en un ambiente blended para el aprendizaje de las matemáticas". Sandoval, J. 2017, p.142.

Metodología

El objetivo general de la presente investigación parte del interés de identificar las dimensiones que caracterizan el sistema de enseñanza-aprendizaje blended-learning en la universidad en estudio lo que permitirá comprender en su verdadera dimensión la problemática del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de los primeros ciclos de la universidad, identificando sus limitantes e implicaciones, extrayendo así conclusiones basada en una teoría fundamentada en los datos contextuales de la universidad para proponer recomendaciones en el contexto aprendizaje de las matemáticas por competencias y enmarcados dentro del social-constructivismo. Para el cumplimiento del objetivo anterior, se contextualiza en las líneas de investigación de la educación en el ámbito de la formación universitaria de los futuros profesionales de dicha universidad.

Basados en los objetivos en cuanto a los propósitos que persigue esta investigación, se puede clasificar como una investigación aplicada, en tanto que pretende identificar las correlaciones multivariadas entre el aprendizaje de las matemáticas y la utilización de un sistema blended-learning, acorde con los estándares internacionales de la World Wide Web Consortium (W3C). En cuanto al diseño de investigación se utiliza una metodología mixta (Hernández et al 2014), pues la práctica educativa asociada a procesos de aprendizaje de la matemática es un fenómeno social y describimos dichas prácticas apoyadas en el enfoque b-learning, los cuales son contrastados por las evidencias del análisis multivariado (De la Garza et al, 2013) y de Pearson.

Análisis de resultados

La variable independiente es la metodología del Blended-Learning, una variable que describe y caracteriza las dimensiones del aprendizaje semipresencial, que en la investigación permite explicar y discriminar el rendimiento académico así como a identificar algunas de las asociaciones entre la variable dependiente y sus dimensiones y/o controlar, gestionar y efectuar procesos de retroalimentación mediante el análisis estadístico de la usabilidad de la plataforma en relación a algunas fuentes de variación de la variable sensible rendimiento académico. La plataforma utilizada para dar soporte al sistema Blended-learning es la plataforma Blackboard que nos permite efectuar una gestión amplia y universal de cualquier proceso que se ve dentro y en el trascurso del desarrollo de las actividades blended-learning.

En relación con la variable independiente, la información será recogida a través del instrumento blended-learning, la cual está formada por 6 dimensiones descritas en la tabla siguiente:

Tabla 2. Dimensiones del instrumento Blended-Learning

Dimensiones	Conceptualización
Material didáctico	Es cualquier material diseñado y elaborado con la intención de facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Según, (Coila & Fajardo, 2014), la función principal de los materiales didácticos es facilitar la comunicación entre el docente y el participante, principalmente generando interés en el discente y facilitando la compresión de las informaciones. Para ello, en términos generales, debe adecuarse a las características físicas y psíquicas del discente, así como a los contenidos y a la metodología.
Estrategia didáctica	El concepto de estrategias didácticas se involucra con la selección de actividades y prácticas pedagógicas en diferentes momentos formativos, métodos y recursos en los procesos de Enseñanza _ Aprendizaje
Plataforma virtual	Formación que utiliza la red como tecnología de distribución y gestión de la información, sea esta red abierta (Internet) o cerrada (intranet). Los cursos de formación en red son definidos para nuestro propósito como cursos donde la mayoría, si no toda, de la instrucción y de las pruebas se logran vía recursos accesibles en la Web, independiente de las limitaciones espacio temporales
Tutoría virtual	Competencias y habilidades soportados en la red esenciales para promover y generar un diálogo efectivo con los participantes y entre los participantes, de modo que se favorezca el aprendizaje activo y la construcción del conocimiento cooperativo y colaborativo, por lo que se requiere monitorización y moderación de los grupos de trabajo en diferentes tiempos y espacios.
Trabajo colaborativo	Estrategia didáctica que pone como eje central del aprendizaje la interacción y la construcción colectiva de conocimientos, que sin duda se optimizan cuando se combinan con el trabajo en red. La colaboración en el contexto del aula invita a docentes y estudiantes a caminar juntos, sumando esfuerzos, talentos y competencias. Incentiva el aprender haciendo, interactuando y compartiendo.
Comunicación virtual	Conjunto de posibilidades mediadas por la red y que son usadas en los procesos de comunicación para componer, almacenar, transmitir y procesar la comunicación. Los medios de comunicación interpersonal a través de Internet adoptan dos formas: sincrónica, en la que los usuarios a través de una red telemática coinciden en el tiempo y se comunican entre sí mediante texto, audio y/o vídeo; y asincrónica donde los participantes utilizan el sistema de comunicación en tiempos diferentes

Adaptado de "Actitudes, satisfacción, rendimiento académico y comunicación on line en procesos de formación universitaria en Blended-Learning". Cavero et al (2009)

La variable dependiente es el aprendizaje de las matemáticas que hace referencia a la medida del aprendizaje de las matemáticas a través del rendimiento académico de los alumnos a lo largo del curso de matemática. En este estudio se explora como modelo de medida del rendimiento académico, el promedio ponderado de las calificaciones de los alumnos en el curso; que es un promedio integral que considera ponderaciones para las evaluaciones presenciales (65 %), para los trabajos colaborativos (20 %) y la usabilidad de sistema virtual de aprendizaje en relación a la retroalimentación del aprendizaje a través de las autoevaluaciones, los objetos de aprendizaje de la matemática y/o autoevaluaciones virtuales (15 %).

La población objetivo son 450 estudiantes ingresantes al programa de profesionalización de adultos. La Universidad particular, consciente de la importancia de adquirir una sólida formación profesional en gente que trabaja, ha diseñado esta innovadora propuesta de Carreras Universitarias para Personas adultas.

Los análisis estadísticos muestran que el 13,5 % de los estudiantes presentaron rendimiento no aprobatorio en el curso; en tanto que, el 87,7 % de los estudiantes presentaron rendimientos aprobatorios del curso. Entre los estudiantes que no presentaron aprendizaje logrado (rendimiento desaprobatorio) nos revela que los estudiantes proporcionan mayor ponderación a los exámenes presenciales. Es decir, de estos resultados se puede inferir que los estudiantes todavía tienen una formación tradicional en relación a la forma de abordar su proceso de formación. En relación a los estudiantes con aprendizajes logrados en la valoración suficiente, también se puede observar que proporcionan mayor ponderación a las clases presenciales. En cambio, en relación a los estudiantes con aprendizajes entre distinguidos y sobresalientes, muestran que los estudiantes proporcionan mayor ponderación a los trabajos colaborativos y a los aprendizajes mediante los objetos de aprendizaje virtuales. En consecuencia, se puede deducir de estos resultados, que los estudiantes con aprendizaje no logrados (desaprobados) tiene deficientes rendimientos no solo en los exámenes presenciales, sino también en los procesos de aprendizaje autónomos. Con estos resultados se confirma el hecho de que el proceso de aprendizaje de las matemáticas es complejo y multidimensional, lejos de la idea cartesiana de que manipulando solo algunas variables se pueda pretender aprendizajes logrados y exitosos en los estudiantes.

■ Conclusiones

Se pretende que la presente propuesta contribuya de manera significativa a nuevas investigaciones que tengan un enfoque de análisis y reflexión desde la complejidad, considerando el multidimensional de la variable aprendizaje y así tomar como referentes las recomendaciones que emanan de este tipo de investigaciones, de carácter mixto pues el aprendizaje requiere tomar en cuenta la interacción social estudiante-docente-plataforma descrita mediante análisis cualitativos, en beneficio de la calidad educativa que tanta falta le hace a la educación peruana.

El análisis de los datos arroja resultados que permiten establecer una mejora del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de dicha universidad debido a la implementación de estrategias didácticas soportadas en la plataforma virtual Blackboard centradas en el aprendizaje colaborativo y con objetos de aprendizaje soportados en la red. Los resultados obtenidos mediante instrumentos de auto-aplicación fueron sometidos a pruebas de hipótesis por análisis correlacional de Pearson y análisis multivariado, llegándose a las siguientes conclusiones:

1. Los componentes: materiales didácticos, estrategias didácticas, plataforma virtual, tutoría virtual, trabajo colaborativo y la comunicación virtual permiten discriminar correctamente el aprendizaje de la matemática de los estudiantes adultos.
2. Los resultados confirman que la variable blended-learning presenta correlación positiva considerable con el aprendizaje logrado de los estudiantes.
3. Existen diferencias significativas en las medias de valoración de las dimensiones de la variable blended-learning entre los estudiantes con aprendizaje logrado y no logrado.

4. Las dimensiones: material didáctico, plataforma virtual y estrategias didácticas tienen mayor ponderación en la acción discriminante; en tanto que, la dimensión comunicación virtual es la dimensión de menor poder discriminante, lo cual implica que hay un mejor aprendizaje.

Recomendaciones finales

1. Dado que el promedio del aprendizaje logrado en la formación no presencial, referido al trabajo colaborativo y soportado en la red tiene un efecto mayor en el rendimiento académico que los resultados del aprendizaje presencial, parece razonable recomendar que se desarrollen investigaciones sobre la articulación de ambos sistemas de formación.
2. Fruto del proceso de desarrollo de esta investigación emergen nuevos problemas e interrogantes los cuales serán materia para otras propuestas de investigación en el campo de las tecnologías de la Información y Comunicación, las cuales se han universalizado y tienen un desarrollo aun turbulento e incierto en relación a las nuevas propuestas tales como los cursos con formato Massive Online Opening Courses (MOOC) y el móbile-learning. Por ello, se propone llevar a cabo investigaciones en el contexto peruano de propuesta blended-learnig, usando ambientes de m-Learning, integrados al Blended Learning, así transfronterizar las propuestas de los cursos MOOC, aun incipientes en el Perú.

1. Establecer líneas de investigación multidisciplinares e interuniversitarios, para tender a la validación de modelos jerárquicos, desde el principio de causalidad y anidamientos que se dan en una realidad educativa compleja, difusa y de mucha incertidumbre. Sólo en estas condiciones, se pueden obtener conclusiones de mayor grado en diferentes contextos.
2. Dado el resultado del modelo causal entre la efectividad de los sistemas virtuales de aprendizaje y la capacitación permanente de los miembros de la comunidad universitaria, se recomienda establecer un sistema de formación continua de todos los involucrados y bajo un sistema integrado de calidad educativa se pueda sostener estándares de calidad de nivel internacional.
3. Considerando que en el contexto peruano la educación virtual aun es incipiente, se propone desarrollar investigaciones en estudios comparativos interuniversitarios de sus modelos de semipresencialidad.
4. Asimismo se propone investigaciones en relación a la contrastación de los resultados del aprendizaje logrado de las matemáticas entre modelos presenciales, semipresencial y totalmente virtual.

Referencias bibliográficas

Cavero, J. & Llorente, M. (2009). Actitudes, satisfacción, rendimiento académico y comunicación on line en procesos de formación universitaria en Blended-Learning. *En Teoría de la educación. Educación y cultura en la sociedad de la información.* 10 (1), 172-189.

De la Garza, J. Morales, B. & Gonzales, B. (2013). *Análisis estadístico multivariante: un enfoque teórico y práctico.* México McGraw Hill.

Gamis, V. (2009*). Entornos virtuales para la formación práctica de estudiantes de Educación: Implementación de la plataforma Aula web*. Tesis para obtener el grado académico de doctor en Educación en la universidad Granada. España.Recuperado el 19 de marzo de 2015, de http://digibug.ugr.es/handle/10481/2727#.WTCHT2iGMdU

Garrido, R. (2009). *B-Learning como solución al problema de recursos Académicos escasos en educación superior.* Tesis para obtener el grado académico de Magister en Tecnologías de la información en la Chile: Universidad de Chile. Santiago, Chile. Recuperado el 22 de marzo de 2015, de http://www.repositorio.uchile.cl/handle/2250/10224

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México McGraw Hill.

Pompeya, E. (2010). *Blended Learning. La importancia de la utilización de diferentes medios en el proceso educativo*. Tesis para obtener el grado académico de magister en Tecnología Informática aplicada en educación en la Universidad Nacional de la Plata. Recuperada el 12 de mayo de 2015 de http://postgrado.info.unlp.edu.ar/carreras/magisters/Tecnología_Informatica_Aplicada-en_Educación/tesis/Eliana_Lopez.pdf

Sandoval, J. (2017). *Retos y desafíos en un ambiente blended para el aprendizaje de las matemáticas de los primeros ciclos de estudiantes adultos*. Tesis para para obtener el grado académico de doctor en Educación en la Universidad Federico Villarreal. Perú.

Torres, L. (2016). *Que enseñar en la sociedad del conocimiento*. Congreso mundial por el pensamiento complejo. 2006, 1-10.

Verdún, N. (2016). *Recursos y medios digitales para la educación* (primera edición).Córdoba: Brujas.

EXPERIENCIA DOCENTE: ACTIVIDADES DE LABORATORIO PARA IMPARTIR UN CURSO DE MATEMÁTICA DISCRETA A TRAVÉS DEL USO DEL PAQUETE *VILCRETAS*

TEACHING EXPERIENCE: LABORATORY ACTIVITIES TO IMPART A DISCRETE MATHEMATICAL COURSE THROUGH THE USE OF THE *VILCRETAS* PACKAGE

Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica).
enrique.vilchez.quesada@una.cr

Resumen

Durante el I semestre 2017 se realizó una experiencia de implementación de una metodología apoyada con software, a través de la participación de cincuenta alumnos de un curso de matemática discreta en la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). El proceso de adopción de software se fundamentó en el uso de un paquete programado por el autor, denominado: *VilCretas*. La herramienta corre utilizando como plataforma el software comercial *Wolfram Mathematica*, proveyendo comandos de uso fácil que integran mecanismos de exploración dinámica y la posibilidad de analizar problemas con un enfoque asistido por computadora. Desde un punto de vista educativo, la transición hacia un ambiente de aprendizaje no tradicional se plasmó en un planeamiento didáctico permeado por una serie de actividades tipo laboratorio. Dichas actividades fueron evaluadas de manera cualitativa mediante una observación participante. El presente trabajo reporta los laboratorios distribuidos en ocho áreas de contenido y los resultados de su valoración didáctica.

Palabras clave: laboratorio, matemática discreta, enseñanza, aprendizaje, descubrimiento

Abstract

During the first semester of 2017 an experience of implementation of a methodology supported by software was realized, through the participation of fifty students of a course of discrete mathematics at the National University of Costa Rica (UNA). The software adoption process was based on the use of a package programmed by the author, named: *VilCretas*. The tool runs using commercial *Wolfram Mathematica* software, providing easy-to-use commands that integrate dynamic scanning mechanisms and the ability to analyze problems with a computer-assisted approach. From an educational point of view, the transition to a non-traditional learning environment was reflected in a didactic planning permeated by a series of laboratory-type activities. These activities were assessed qualitatively through participant observation. The present paper reports the laboratories distributed in eight content areas and the results of their didactic assessment.

Keywords: laboratory, discrete mathematics, teaching, learning, discovery

Introducción

En el año 2016 dio inicio un proyecto de investigación en docencia adscrito a la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, titulado: "*VilCretas* un recurso didáctico a través del uso del software *Mathematica* para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*". El objetivo principal de este proyecto se circunscribió en el diseño y desarrollo de un paquete de software con fines educativos para impartir la materia *EIF-203*. El curso anteriormente citado, comprende un conjunto de ejes temáticos de matemática discreta, a saber: recursividad, relaciones de recurrencia, análisis de algoritmos, relaciones binarias, grafos, árboles, máquinas y autómatas y, lenguajes y gramáticas.

El paquete *VilCretas* se finalizó, al término del año 2016, con miras a ser empleado durante el I semestre 2017, mediante la participación de dos grupos piloto. Cada grupo estuvo constituido por veinticinco estudiantes, los cuáles recibieron el curso *EIF-203* con una metodología mixta: tradicional y con el apoyo del software *Wolfram Mathematica*. El docente de ambos cursos lo constituyó el autor de esta propuesta, introduciendo a los alumnos en las dos sesiones de trabajo semanales, hacia el uso procedimental y de investigación del paquete *VilCretas*. Las clases fueron impartidas en su totalidad en un laboratorio de informática, y una de las lecciones correspondientes a cada uno de los ocho grandes temas de interés, se caracterizó por utilizar una guía de laboratorio prediseñada. Los laboratorios tuvieron primordialmente dos intencionalidades: crear espacios de aprendizaje mediante un razonamiento exploratorio o por descubrimiento y dotar a la población estudiantil de un ambiente adecuado para alcanzar un mayor nivel de profundización.

La experiencia docente fue evaluada a través una metodología de naturaleza cualitativa, con el propósito de determinar el nivel de aprendizaje logrado en los estudiantes a través de las actividades tipo laboratorio y simultáneamente, encontrar fortalezas y debilidades del paquete *VilCretas* como una herramienta de software para la enseñanza de la matemática discreta. Se presentan aquí los principales resultados obtenidos de una observación participante.

Marco teórico

Enseñanza y aprendizaje de la matemática

La matemática desde hace muchas décadas parece no poder superar los estigmas que la colocan como una disciplina inalcanzable o especialmente afín a individuos con una capacidad sobre natural. Quien es muy bueno en matemática con frecuencia es catalogado socialmente como alguien inteligente y diferenciado. La enseñanza de esta disciplina tiene una gran responsabilidad a este respecto. Los profesores de matemática en ocasiones, actuamos otorgando la recompensa del reconocimiento académico, a los alumnos que ofrecen una mejor respuesta ante la escolaridad (Meyer, 2010). Sin embargo, tal pretensión didácticamente implícita, asume un sacrificio ocultista, de una gran mayoría de estudiantes, quienes por distintas razones no se consumen con ahínco y automotivación en el estudio de la matemática. Son los denominados por Allen (2000) "anuméricos", personas que muestran un gran desinterés por los fundamentos y aplicaciones de los números y la probabilidad en la vida cotidiana.

Es contradictorio observar cómo el mundo contemporáneo depende constantemente de los saberes matemáticos. En su ausencia, sería imposible el manejo de las economías, la globalización de las comunicaciones, el tratamiento de los fenómenos atmosféricos, la optimización de los recursos y en general en muchos contextos, la toma de decisiones sistematizadas. Pese a ello, en los sistemas educativos impera una matemática de naturaleza algorítmica, dejando de lado la tendencia hacia la curiosidad y el descubrimiento, propiedades intrínsecas de la creatividad humana (Robinson, 2012). Alzate, Montes y Escobar (2013) denominan a este tipo de capacidades "*heurísticas*", la heurística: "*es un rasgo característico de los humanos, donde el punto de vista puede describirse como el arte y* *la ciencia del descubrimiento y de la invención o de resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente*" (p. 2).

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática no debería, por consiguiente, apartarse de la fantástica idea de procurar la búsqueda exploratoria, la clasificación, la toma de mediciones, la comparación de resultados y el análisis de errores por mencionar algunos factores, como puntos de desequilibrio cognitivo que registren una mayor comprensión y utilidad de los conceptos matemáticos. No obstante, ¿cómo lograrlo? La computación y el uso de software tienen mucho que aportar, en este sentido. Wolfram (2010) señala el problema de la educación matemática al contemplar los ordenadores como mecanismos que degradan su quehacer, ¿se reduce conceptualmente?, o ¿tenemos en las instituciones de enseñanza problemas reducidos? Poveda y Murillo (2003) reafirman la importancia del uso de las tecnologías, refiriéndose al entorno costarricense:

> Nuestro sistema educativo no puede ser el mismo. Nuestros jóvenes necesitan herramientas diferentes para desenvolverse de la mejor manera en un medio globalizado. Todos los sectores del medio educativo (estudiantes, padres de familia, profesores, instituciones y el Ministerio de Educación Pública) deben de tomar conciencia del cambio (p. 132).

El autor de este trabajo parte de una consigna inclusiva, donde el despido académico (Pascua-Cantarero, 2016) provocado muchas veces por un excesivo rigor que conduce a la incapacidad, sea sustituido a través de una reinterpretación sobre la noción de ciencia: ya no es necesario resolver todo a mano, ya no es tan importante demostrar el conocimiento de manera memorística, o tener notables habilidades de cálculo mental, la clave reside en crear ciudadanos en una era informatizada, que sepan aprovechar los recursos computacionales para su propio beneficio y el de la sociedad. Por ello, la visión de una enseñanza y un aprendizaje de la matemática asistida por computadora es consistente con la idea de poder atraer mayor cantidad de alumnos a sentir, aplicar y valorar el conocimiento matemático como un motor que oriente hacia mejores condiciones intelectuales y sociales.

Lecciones tipo laboratorio

Las lecciones tipo laboratorio conforman una metodología para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, con la intención didáctica de proveer un ambiente donde: "*el estudiante anticipe, intuya, verifique y compruebe hipótesis*" (Ramírez, 2013, p. 364). Un laboratorio se entiende como un espacio físico donde el alumno tiene a su alcance recursos didácticos tangibles y virtuales. En el contexto del presente trabajo, se interpreta como un espacio constituido por computadoras y software, aunque no necesariamente la metodología implique su uso exclusivo.

Las lecciones tipo laboratorio plasman en su quehacer educativo la necesidad de trasladar al estudiante a un ámbito de aplicación del conocimiento teórico recibido, o bien, a su análisis de manera constructiva. Desde este punto de vista, la experimentación cobra un plano medular, como requisito de un aprendizaje por descubrimiento (Gil y Guzmán, 1993). En la actualidad existe un vasto consenso en la comunidad de educadores matemáticos, sobre la importancia de sobreponer la comprensión de conceptos y propiedades a la ejecución de rutinas o algoritmos. Se hace cada vez más evidente una transformación inevitable que se amplíe hacia aprendizajes más activos. Godino, Batanero y Font (2003) así lo exponen:

> Es importante proponerles (a los alumnos) situaciones en las que tengan un papel activo, es decir, plantearles algo que tengan que hacer, …, que tengan una implicación personal en la propuesta, ya sea porque corresponda a alguna situación de la vida diaria o a algunas de sus aficiones; aunque esto último no siempre resulta fácil, cuando se consigue, el interés y la significatividad de la propuesta aumentan notablemente y se obtienen mejores resultados (p. 125).

La metodología de laboratorio puede contribuir a este respecto, con el abordaje de problemas vinculados a situaciones cotidianas, o intereses cognitivos de los estudiantes, dotándoles de herramientas tecnológicas como elementos generadores de actividad mental cuyo objetivo reside en la construcción y sistematización del pensamiento matemático (Arce, s.a.). Esta premisa dio cabida al diseño de un planeamiento didáctico con actividades de mediación tipo laboratorio para el curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, aplicadas durante el I ciclo lectivo 2017. Las secciones que prosiguen se abocan a explicar los antecedentes y resultados obtenidos.

Metodología

Antecedentes de esta experiencia docente

En el año 2016 se programó por parte del autor de esta propuesta un paquete de software denominado *VilCretas*. *VilCretas* da respuesta a una serie de necesidades didácticas sentidas por algunos de los profesores de la cátedra del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, con la intención de estructurar una metodología asistida por computadora basada en el uso del software comercial *Mathematica*. La materia *EIF-203* forma parte del plan de estudios de la carrera *Ingeniería en Sistemas de Información* de la Universidad Nacional de Costa Rica. El paquete permite desarrollar desde un punto de vista educativo, temas vinculados con matemática discreta, integrando doscientas treinta funciones relacionadas con las áreas de: recursividad, relaciones de recurrencia, análisis de algoritmos, relaciones binarias, teoría de grafos, teoría de árboles, máquinas y autómatas de estado finito y, gramáticas y lenguajes. Desde un punto de vista didáctico, *VilCretas* puede ser empleado como una herramienta de verificación de resultados, o bien, como un medio para profundizar el ambiente de programación del software *Mathematica* (Vílchez, 2016).

Durante el I ciclo lectivo del año 2017, se elaboró un planeamiento didáctico con el principal objetivo de utilizar el paquete *VilCretas* como un recurso de apoyo para impartir la materia *EIF-203* con una metodología mixta (tradicional y asistida por computadora) en dos grupos piloto, constituidos cada uno por veinticinco estudiantes. El resultado de este diseño, se caracterizó por la inclusión de ocho actividades tipo laboratorio con la ambiciosa idea de proponer un ambiente de aprendizaje innovador a los alumnos participantes, en dos sentidos: formular situaciones problemáticas por descubrimiento a través de consignas de trabajo de naturaleza exploratoria y por otro lado, facilitar experiencias de resolución que se sumaran a una mejor comprensión de los temas tratados, permitiendo repasar algunos de los contenidos y sobre todo, reformular los esquemas de pensamiento empleados por la población estudiantil.

Los materiales didácticos de estas actividades se basaron en el uso del paquete *VilCretas* y del aula virtual institucional, para registrar las respuestas e interpretaciones de forma individual de cada uno de los alumnos. La evaluación fue formativa con un enfoque cuantitativo, cada laboratorio tuvo un valor de un 1% sobre la nota final del curso, y los criterios empleados en sus valoraciones se fundamentaron en: cumplimiento completo (1%), cumplimiento parcial (0.5%) y sin cumplimiento (0%). Finalmente, con el propósito de garantizar un compromiso serio en el desarrollo de los laboratorios, se incluyó con previo aviso a los participantes de esta experiencia didáctica, una pregunta vinculante en los tres exámenes parciales aplicados durante el I semestre 2017.

Actividades tipo laboratorio propuestas

Se comparte en esta sección a manera de ejemplo, dos de las ocho actividades tipo laboratorio creadas dentro del marco de acción del planeamiento didáctico ideado sobre los principales ejes de contenido del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*.

Laboratorio: relaciones binarias

Objetivo: aplicar el concepto de relación binaria para encontrar los elementos que la constituyen y sus tipos de representación.

Estrategia de enseñanza y aprendizaje: resolución de problemas.

Actividades de mediación:

1. Encuentre los elementos de la relación binaria *R*: *aRb* sí y solo sí *a* y *b* son números palíndromos, con *a*, *b* que pertenecen al conjunto *A={11, 13, 17, 19, 21, 22, 23, 29, 32, 51, 72, 83, 89, 97, 113, 121, 127, 222, 312, 723}*. Recurra al uso de las instrucciones “PalindromeQ” y “RelBin”.
2. Represente la relación anterior mediante una matriz y un grafo a través del software *Mathematica*. Los puntos aislados en el grafo: ¿qué característica poseen?
3. ¿Cuál operación de relaciones derivaría como resultado, otra que no contenga ninguno de los pares de R?, encuéntrela.
4. Considere la relación *R*: *aRb* sí y solo sí el mínimo común múltiplo entre *a* y *b* es igual a 300, sobre *A={1,3,5,…,99}* y *B={2,4,6,…,100}*. Halle explícitamente sus pares ordenados. Conjeture con el empleo de software: ¿cuál es el valor máximo del mínimo común múltiplo para que la relación *R* sea distinta de vacío?, explique.

Adjunte el archivo *.nb* de *Mathematica* necesario para el desarrollo de sus respuestas.

Anotaciones: el docente propondrá al estudiante las actividades sin ningún tipo de introducción, procurando atender de manera guiada las consultas.

Laboratorio: teoría de grafos

Objetivo: emplear conceptos, propiedades y algoritmos de grafos para obtener información real de un país, tal como: la distancia más larga entre dos provincias o el menor costo de viaje para un agente.
Estrategia de enseñanza y aprendizaje: resolución de problemas.
Actividades de mediación:

1. Considerando el país “Colombia”, construya un grafo con cada una de sus principales ciudades. Se sugiere recurrir al comando “GrafoCountryRegions” (si tarda mucho en ejecutar, abrir el archivo: “Actividad de grafos.nb”).
2. ¿Qué tipo de grafo es el anterior?, ¿posee circuitos de *Euler*?, ¿posee circuitos de *Hamilton*?, justifique.
3. Resuelva mediante el software *Mathematica* el problema del “agente viajero”. Muestre una ruta.
4. Aplique el algoritmo de *Dijkstra* sobre el grafo de regiones de “Colombia”, para encontrar la longitud del camino más largo de “Antioquia” a “Narino”.
5. Genere una animación con una ruta más larga. Use para ello la instrucción “AnimarGrafo”.

Adjunte el archivo *.nb* de *Mathematica* necesario para el desarrollo de sus respuestas.
Anotaciones: el profesor servirá de guía en la resolución de cada una de las situaciones de aprendizaje planteadas al estudiante.

Estas actividades se caracterizaron por poseer un enfoque didáctico muy novedoso y todas ellas, pueden ser consultadas en detalle en la dirección URL: http://www.escinf.una.ac.cr/discretas/index.php/archivos/category/7-packages.

Resultados

Análisis de las actividades: enfoque cualitativo

Las ocho actividades tipo laboratorio diseñadas, se valoraron desde un punto de vista didáctico a través de una observación participante utilizando una bitácora de campo. Además de ello, se realizó en el aula virtual institucional un sondeo general de opinión por laboratorio, con la siguiente consigna: "Describa algunas fortalezas y/o debilidades en términos de su experiencia como estudiante, en la actividad del tema ¿Contribuyó con su aprendizaje: mejoró la comprensión de la materia, logró profundizar, se ajustó a sus propias necesidades, el tiempo le pareció suficiente, le agradó en general el laboratorio su metodología y contenido, le agradó el uso del software *Mathematica*?, explique ¿Cómo se mejoraría la actividad para una futura versión del curso? Cualquier otro aspecto que considere relevante puede mencionarlo en este espacio".

Lo observado en cada una de las sesiones y las opiniones suministradas por los estudiantes, se clasificaron en categorías, destacando aspectos positivos y posibilidades de mejora. Se consideró válida una categoría bajo el criterio de obtener una respuesta común en al menos treinta y cinco (70%) de los cincuenta alumnos participantes. La tabla 1 resume los principales resultados.

Tabla 1
Ventajas y desventajas de las actividades tipo laboratorio

Aspectos positivos	Posibilidades de mejora
▪ La dinámica de trabajo fue agradable al permitir usar software y producir soluciones de manera colaborativa. ▪ El uso de software resultó de mucha utilidad en la resolución de los problemas de manera directa e indirecta. ▪ Las actividades contribuyeron en la profundización de los temas (destrezas, conceptos, análisis de propiedades) y en su repaso para efectos de las evaluaciones escritas. ▪ Algunas actividades mejoraron la identificación de errores de procedimiento o conceptuales. ▪ Es una forma de aprendizaje que mejora la motivación hacia la materia. Las actividades en general resultaron divertidas y creativas. ▪ Los laboratorios ayudaron a repasar desde un punto de vista tecnológico, el uso de comandos y su aplicación en la resolución de problemas utilizando el software *Mathematica*. ▪ Los laboratorios obligaron al estudiante a mantener la materia al día y ser más exigentes en su desempeño académico.	▪ Algunas de las actividades propuestas resultaron muy ambiciosas en sus consignas, por lo que el tiempo resultó insuficiente en clase. ▪ Podría contribuir con la comprensión de las actividades, proponer al estudiante ejemplos similares. ▪ Se requiere solicitar a los alumnos un repaso previo para mejorar el desempeño en la resolución de los laboratorios. ▪ En ciertas actividades se incluyeron preguntas que dependen de otras, lo cual resultó perjudicial. ▪ Resulta esencial que el profesor aclare dudas durante la realización de los laboratorios.

Nota. Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

Las actividades tipo laboratorio implementadas durante el I ciclo 2017 a dos grupos piloto del curso *EIF-203 Estructuras Discretas para Informática*, fueron valoradas de una manera muy positiva, destacándose los siguientes aspectos:

- Facilitaron un ambiente de aprendizaje distinto que fomentó el trabajo colaborativo.
- Proveyeron el abordaje de problemas más interesantes apoyados en el uso de software.
- Dieron cabida a una mayor motivación hacia este tipo de contenidos, muchas veces catalogados como abstractos.
- Fortalecieron una actitud adecuada respecto a los hábitos de estudio y la resolución de ejercicios más demandantes, contribuyendo con ello a la profundización y un repaso constante de la materia.

También es importante señalar, las dos objeciones más notables, identificadas en las actividades propuestas, las cuales se circunscriben en función del tiempo de clase disponible y la resistencia que ocasionalmente los alumnos manifiestan, al enfrentarse a situaciones problemáticas donde se les exige más allá de una aplicación memorística de rutinas o algoritmos. Pese a ello, las ventajas anteriormente apuntadas, reflejan el valor que provee el atrevimiento del cambio, cuando existe un auténtico interés por mejorar la práctica docente.

Referencias bibliográficas

Allen, J. (2000). *El hombre anumérico*. España: Tusquets.

Alzate, E., Montes, J. y Escobar, R. (2013). Diseño de actividades mediante la metodología ABP para la Enseñanza de la Matemática. *Scientia Et Technica*, *18*(3), 542-547.

Arce, J. (s.a.). Laboratorio de matemáticas. Colombia: Universidad del Valle. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113522_archivo.pdf

Gil, D. y Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Tendencias e Innovaciones*. Organización de Estados Iberoamericanos. Recuperado de: www.oei.es/historico/oeivirt/ciencias.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. España: Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros

Meyer, D. [TED] (2010, mayo 13). Math class needs a makeover [Video file]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=60OVlfAUPJg

Pascua-Cantarero, P. M. (enero-abril, 2016). Factores relacionados con la deserción en el primer y segundo año de estudio en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. *Revista Electrónica Educare*, *20*(1), 1-23. doi: http://dx.doi.org/10.15359/ree.20-1.5

Poveda, R. y Murillo, M. (2003). Las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Revista Uniciencia*, *20*(1), 125-133.

Ramírez, M. (2013). El laboratorio de matemáticas y la Metodología Estudio de Clase MEC. *Revista ALETHEIA*, *5*(2), 362-369.

Robinson, K. (2012). *Busca tu elemento*. USA: Empresa Activa.

Vílchez, E. (2016). *VilCretas* package: educational resource through the use of *Mathematica* software in the field of discrete mathematics. En *Wolfram Technology Conference 2016*. USA: Champaign, Illinois.

Wolfram, C. [TED] (2010, noviembre 15). Teaching kid's real math with computers [Video file]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=60OVlfAUPJg

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/

es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.

- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma “ciega” por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (http://clame.org.mx/actas/) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
    1. Análisis del discurso matemático escolar
    2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
    3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
    4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
    5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido expuesto durante RELME 32. Es por ello que se solicita **enviar el certificado de la ponencia escaneado**, junto con el escrito.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.

4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.

5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).

6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.

7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.

8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.

9. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.

10. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: “por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes” (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba “...”. Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

    Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

    García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

    Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

    Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

    Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

- ✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).
- ✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa