Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 33 » NÚMERO 1 » AÑO 2020 » ISSN 2448-6469

ALME 33

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 33, Número 1, febrero 2020, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidente: Olga Lidia Pérez (Cuba); Secretario: Hugo Parra Sandoval (Venezuela); Tesorera: Daniela Reyes Gasperini (Argentina); Vocal Norteamérica: Rebeca Flores García (México); Vocal Caribe: Juan Manzueta Concepción (República Dominicana); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Marcela Parraguez González (Chile).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Ana Rosa Corica Caponio
Cecilia Ester Elguero Dotta
Cecilia Rita Crespo Crespo
Christiane Cynthia Ponteville Coulombié
Elisa Silvia Oliva Díaz
Laura Sonia Oliva
Lidia Beatriz Esper Lara
Liliana Mabel Tauber
Marcela Evangelina Götte Salin
María Angélica Pérez Monges
Maria Elina Vergara Viano
María Julia Améndola
Mónica Inés García Zatti
Silvia Vrancken
Susana Beatriz Ruiz Hagman

BRASIL

Ana Karine Dias Caires Brandão
Ângela Maria Dos Santos
Juliana Silva De Andrade
Maria Ivete Basniak

CHILE

Leonora Díaz Moreno
Nicolás Sánchez Acevedo
Daniela Alejandra Soto-Henríquez
Patricia Vásquez Saldías

COLOMBIA

Olga Emilia Botero Hernández
Paula Andrea Rendón-Mesa
William Andrey Suárez Moya

COSTA RICA

Enrique Rodolfo Vilchez Quesada
Fabián Wilfrido Romero Fonseca

CUBA

Olga Lidia Pérez González
Teresa de Jesús Carrasco Jiménez

ESPAÑA

Carmen López Esteban
María Belén Giacomone

GUATEMALA

Claudia María Lara Galo

HONDURAS

Gerardo Josue Cruz Marquez
Melvin Cruz Amaya

MÉXICO

Alfonso Escorza Morales
Amaranta Viridiana Jiménez Villalpando
Angélica Dueñas Cruz
Carlos Daniel Prado Pérez
Claudia Margarita Acuña Soto
Edgar Ponciano Bustos
Eduardo Carlos Briceño Solis
Enrique Javier Gómez Otero
Evelia Reséndiz Balderas
Jesús Enrique Pinto Sosa
Jesús Francisco Rodríguez Higuera
Jesús Salinas Herrera
José David Zaldivar Rojas
José Isaac Sánchez Guerra
José Luis Soto Munguía
José Marcos López Mojica
José Rafael Couoh Noh
José Trinidad Ulloa Ibarra
Julio Moisés Sánchez Barrera
Karla Liliana Puga Nathal
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Lorena Jiménez Sandoval
Lorena Trejo Guerrero
Lorenzo Contreras Garduño
Luis Manuel Aguayo Rendón
María de la Luz Huerta Ramírez
María del Carmen Fajardo Araujo
María del Carmen Olvera Martínez
María Guadalupe Amado Moreno
María Guadalupe Lomelí Plascencia
María Isabel Segura Gortáres
María Teresa Martinez Acosta

MÉXICO

Maribel Vicario-Mejía
Mayra Báez Melendres
Miriam Estela Lemus
Miriam Martínez Vázquez
Nehemías Moreno
Norma Gutiérrez Rodríguez
Oscar Enrique Callejas Melgoza
Plácido Hernández Sánchez
Rafael Pantoja Rangel
Ramiro Avila Godoy
Reyna Arcelia Brito Páez
Rita Guadalupe Angulo Villanueva
Rosa Isela Vázquez Camacho
Rosa María Farfán Márquez
Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Víctor Hugo Luna Acevedo
Víctor Larios Osorio

PERÚ

Daysi Julissa García Cuéllar
Flor Isabel Carrillo Lara
Isela Patricia Borja Rueda

PORTUGAL

Ana Elisa Esteves Santiago

URUGUAY

Mario Dalcín

VENEZUELA

Ivonne Coromoto Sanchez Sanchez
Walter Beyer
Luis Andres Castillo Bracho
Stephanie Diaz-Urdaneta
Yolanda Serres Voisin

PRESENTACIÓN

Lograr la pertinencia social de ALME en un escenario internacional donde impera la preocupación por mejorar la calidad de la educación, utilizando como hoja de ruta a los objetivos del desarrollo sostenible de la Agenda 2030, en particular el objetivo de garantizar una educación de calidad, inclusiva y equitativa, y el de promover las oportunidades de aprendizaje permanente para todos[1], es una de las aspiraciones del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-CLAME.

Es así que, con la propuesta de la primera parte del volumen 33, la revista contribuye a este importante proceso de mejoramiento de la calidad de la educación latinoamericana desde la perspectiva del análisis del discurso matemático escolar, de las propuestas para la enseñanza de la Matemática, de los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, del pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y del uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

En 5 secciones y con la participación de una pluralidad de autores, caracterizados por su diversidad cultural y por ser portadores de múltiples posturas teóricas, la revista pone a disposición de la Comunidad Latinoamericana de Matemática Educativa 69 artículos, que pueden ser contextualizados y utilizados como alternativas de mejora de la calidad de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para el logro de resultados de aprendizajes pertinentes y efectivos.

Reconocimiento especial a los editores y árbitros por la excelencia del trabajo realizado, y a los autores por permitirnos difundir sus experiencias y/o investigaciones en una comunidad que se profesionaliza con una visión transformadora orientada hacia su sostenibilidad.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2020)

[1] Ojeda, R. y Agüero, F. (2019). Globalización, Agenda 2030 e imperativo de la educación superior: reflexiones. *Conrado*, *15*(67), 125-134.

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SECCIÓN 4:

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

TABLA DE CONTENIDOS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 5:

USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ELEMENTOS E INDICADORES DE CONOCIMIENTO Y DE RAZONAMIENTO IMPLICADOS EN UNA TAREA DE INFERENCIA ESTADÍSTICA INFORMAL

ELEMENTS AND INDICATORS OF KNOWLEDGE AND REASONING INVOLVED IN AN INFORMAL STATISTICAL INFERENCE TASK

Silvana María Santellán, Liliana Mabel Tauber
Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral. (Argentina)
santellansilvana@gmail.com, estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Resumen
En este trabajo se presenta una tarea sobre Inferencia Estadística Informal dirigida a estudiantes de Psicología y el análisis de contenido previo. El marco teórico considerado describe diversas relaciones entre elementos de conocimiento de la Alfabetización Estadística y elementos asociados al Razonamiento Inferencial Informal. Por lo tanto, en dicho análisis se han identificado los elementos cognitivos de la Alfabetización Estadística y los elementos de razonamientos de la Inferencia Estadística Informal implicados en la resolución de la tarea planteada en base a la comparación de muestras de datos cuantitativos, y se han explicitado las relaciones que se presentan entre estos elementos. Se muestra la compleja red de elementos cognitivos de la alfabetización estadística y de razonamientos que se relacionan cuando se pretende conectar el análisis exploratorio con la inferencia estadística.

Palabras clave: conocimiento estadístico, alfabetización estadística, razonamiento inferencial informal

Abstract
This paper presents a task on Informal Statistical Inference aimed at students of Psychology and the previous content analysis. The theoretical framework describes various relationships between knowledge elements of Statistical Literacy and elements associated with Informal Inferential Reasoning. Therefore, in this analysis the cognitive elements of Statistical Literacy and the elements of reasoning of the Informal Statistical Inference involved in the solution of the proposed task have been identified, based on the comparison of samples of quantitative data; and the relationships that arise between these elements have been explained. It shows the complex network of cognitive elements of statistical literacy and reasoning that are related when intending to connect the exploratory analysis with the statistical inference.

Key words: statistical knowledge, statistical literacy, informal inferential reasoning

Introducción

Ante la situación cotidiana de que muchos estudiantes universitarios ingresan a su primer curso de estadística con una vaga experiencia en el área o sin formación previa, nos enfrentamos al desafío de diseñar propuestas de enseñanza orientadas al desarrollo del pensamiento estadístico. Pero, para poder llevar adelante estas propuestas se hace necesario reflexionar sobre el significado de las distintas componentes del conocimiento estadístico y los modos de razonamiento que tienen las personas cuando se enfrentan a tareas que propician el paso del análisis exploratorio de datos a la inferencia estadística (Burril y Biehler, 2011). De manera más particular, nos interesa analizar de qué manera se ponen en relación dichas componentes y razonamientos en tareas contextualizadas en situaciones de la Psicología. El interés por estos contextos viene dado por nuestra propia experiencia en el trabajo con estudiantes de Psicología, en donde hemos vivenciado las problemáticas de la enseñanza y del aprendizaje de la Estadística para estos alumnos. Por un lado, la Estadística es una herramienta metodológica que deberán utilizar en su futura profesión, pero, por otro lado, implica que pongan en juego diversas relaciones entre ideas estocásticas sobre las que suelen presentar preconcepciones que inhiben el compromiso con su propio aprendizaje. Es por ello que nos interesa conocer de qué manera razonan estos estudiantes cuando analizan datos y necesitan realizar inferencias basadas en ellos. Con este fin, elaboramos un instrumento que busca indagar sobre las relaciones que pueden establecerse entre elementos cognitivos y de razonamiento estadístico. El presente trabajo describe el análisis de contenido realizado sobre una de las tareas del instrumento, buscando mostrar la trama compleja de relaciones que pueden establecerse a través de actividades que promueven razonamientos inferenciales partiendo del análisis exploratorio de datos.

Antecedentes

Para comenzar, es necesario aclarar que cuando hablamos del conocimiento estadístico, consideramos que el mismo está compuesto por tres componentes totalmente relacionadas: la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadísticos, tal como las delimitan Ben-Zvi y Garfield (2004). Más particularmente, cuando nos referimos a la Alfabetización Estadística (AE), seguimos a Gal (2004), quien indica que la misma pone en juego dos componentes:

> *a) la habilidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, argumentar sobre un conjunto de datos o sobre fenómenos estocásticos que se pueden encontrar en diversos contextos y, b) la habilidad para discutir o comunicar sus reacciones sobre la información estadística, comprender el significado de la información, opinar sobre las implicaciones de la misma y analizar la validez de las conclusiones dadas* (Traducción propia de Gal, 2004, p.48).

En consecuencia, consideramos que alfabetizar estadísticamente implica educar en la comprensión de la información estadística y en la responsabilidad de analizarla críticamente. Además, cuando alfabetizamos estadísticamente a futuros profesionales, debemos ser conscientes de que es necesario formarlos para que logren desarrollar las habilidades científicas necesarias para su futura profesión. Es en este sentido que no alcanza sólo con alfabetizar, sino que además se debe brindar una formación más avanzada en la que juega un rol fundamental la inferencia estadística (que denotaremos con IE), asociada a los distintos modos de razonamiento que propician el pensamiento estadístico.

De esta manera, centramos nuestro trabajo en la delimitación de constructos que nos permitan identificar los elementos del conocimiento y del razonamiento que se ponen en relación en tareas que sirven de base para introducir la IE y sus conceptos asociados.

Una educación basada en la AE nos exige priorizar el desarrollo de ideas estocásticas fundamentales interconectadas en el proceso de comprensión de la información estadística y que forma parte de la inferencia estadística informal (Tauber, 2018). De esta manera se sientan las bases para que los estudiantes establezcan relaciones que permiten comprender y explicar procesos y resultados estadísticos. Así, se inicia el proceso del Razonamiento Estadístico (RE), que es crucial para la génesis del Pensamiento Estadístico (PE) y para desarrollar la capacidad para comprender los procesos de las investigaciones estadísticas (Zapata-Cardona, 2016) y de las ideas fundamentales que conforman la base de la metodología estadística (Meyer, 2006; Tauber, Bertorello y Albrecht, 2012). Muchos investigadores (Zieffler, Garfield, delMas y Reading, 2008; Gil y Ben-Zvi, 2014; Garfield, delMas y Chance, 2007, entre otros), acuerdan que el desarrollo del PE orientado en propiciar la AE (Gal, 2004) puede promoverse progresivamente proponiendo una enseñanza orientada a explotar los conocimientos y razonamientos informales que los estudiantes tienen y que pueden ayudar a derribar los obstáculos propios de la comprensión de la IE.

Partiendo de las recomendaciones de Zieffler et al. (2008), sostenemos que es relevante la consideración de los conocimientos informales (CI) con que los estudiantes vienen cuando ingresan a la clase de Estadística. En este sentido, entendemos por CI a aquel conocimiento que los estudiantes han alcanzado con base en sus experiencias personales y a las etapas previas de escolarización. Así, reconocemos que, en todo proceso de enseñanza y aprendizaje, el análisis de estos CI, nos permitirá conocer las bases cognitivas sobre las cuales se puedan diseñar nuevas propuestas de enseñanza. Por ejemplo, Tauber, Batanero y Sánchez (2004) presentan actividades que plantearon a estudiantes universitarios y analizaron cómo usaron el CI para construir informalmente el concepto de distribución normal. Las actividades permitieron que los estudiantes justificaran sus conjeturas y llegaran a acuerdos con los que validaban sus respuestas, acercándose así a nuevos conocimientos basados en sus ideas informales. Este tipo de propuestas propician la puesta en acción del Razonamiento Informal (RI) que, según Zieffler et al. (2008), es aquel que se produce en la toma de decisiones cotidianas, que está presente cuando se dan respuestas a una situación donde se utiliza la modelización de una manera informal. Por lo tanto, el RI está relacionado con los procesos argumentativos que se utilizan en determinadas situaciones. Debido al papel que juegan las pruebas y los argumentos cuando se quieren realizar inferencias estadísticas y tomar decisiones con base en ellas, consideramos que el RI es un elemento a tener en cuenta al generar las ideas intuitivas que ayudarían a comprender el razonamiento formal de la Inferencia Estadística (Ben-Zvi y Garfield, 2004).

Con base en estos y otros antecedentes, indicamos que nuestra investigación se centra en la indagación sobre elementos de AE y de RI aociados a la IE informal, en tareas cuyos contextos provienen de la Psicología. Siendo que son escasas las investigaciones que analizan y evalúan estos elementos, consideramos que es posible aportar elementos relevantes al estudio de los mismos y en consecuencia, promover el diseño de propuestas didácticas a futuro que tengan en cuenta los resultados encontrados.

A continuación, describiremos brevemente el marco teórico que tomamos de referencia en el diseño del instrumento sobre el cual realizamos un análisis de contenido.

Marco teórico

Considerando que pretendíamos diseñar tareas que pudieran mostrarnos razonamientos informales asociados a la AE y también a los conceptos que conforman el fundamento de la IE, elaboramos un marco teórico que nos permitiera poner en relación estas dos dimensiones del conocimiento estadístico. Es así que, tomamos los aportes de Gal (2004), respecto a los elementos de conocimiento y disposicionales de la AE y los de Pfannkuch (2007), sobre los indicadores del Razonamiento Inferencial Informal (RII). Es así, que en la Tabla 1, describimos los elementos que Gal (2004) asocia a distintas actividades cognitivas necesarias para lograr la conexión entre las ideas estocásticas fundamentales que permitirán la comprensión y explicación de la información estadística.

En la Tabla 2, describimos los indicadores del RII que Pfannkuch (2007) considera que deberían evidenciarse en todo proceso de razonamiento estocástico.

Por último, en la Figura 1, presentamos las relaciones entre elementos de conocimiento y de razonamiento que consideramos que deberían ponerse en acción cuando se resuelven tareas en las que el análisis exploratorio de datos sirve como evidencia para establecer conjeturas basadas en el RII. Así, todo proceso de análisis exploratorio de dos o más distribuciones, puesto en acción por sujetos alfabetizados estadísticamente, debería involucrar elementos inherentes a la AE y a la IE, tal como mostramos en las relaciones expresadas en la Figura 1. La descripción de cada uno de estos elementos nos sirve de referencia teórica para el análisis de contenido previo que realizamos sobre el instrumento diseñado. Para ampliar sobre el marco teórico se sugiere consultar Tauber y Santellán, (2019).

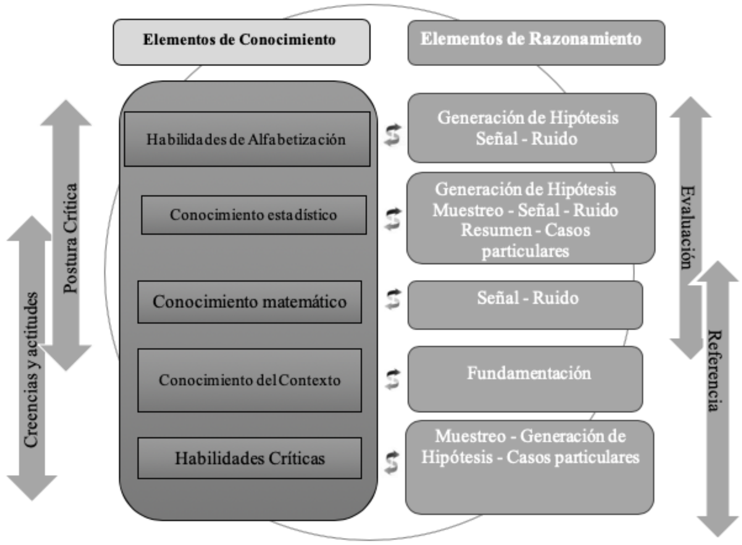
Tabla 1. Elementos de alfabetización estadística (adaptado de Gal, 2004)

Elementos de Conocimiento	***Descripción***
Habilidades de alfabetización (C1)	Actividades cognitivas necesarias para localizar información en distintos documentos y los tipos de lecturas que se requieren para responder una pregunta orientada a interpretar la información estadística. Las actividades cognitivas implican: capacidad de regresar a distintas partes del texto, integrar información de diversas fuentes, capacidad de generar información que no se explicita en el texto o representación, realizar inferencia y/o algún tipo de cálculo a partir de los datos que se presenten.
Conocimiento estadístico (C2)	Reconocer la necesidad de los datos y las maneras en que son producidos, identificar términos e ideas relacionadas con la estadística descriptiva y con las tablas y gráficos, comprender nociones básicas de probabilidad. Entender cómo se obtienen conclusiones o se realizan inferencias estadísticas.
Conocimiento matemático (C3)	Habilidades numéricas que permitan realizar interpretaciones correctas de los números usados en los informes estadísticos.
Conocimiento del contexto (C4)	Visualizar los datos como números en su contexto. Considerar el diseño empleado en un estudio para no distorsionar las conclusiones. Habilidad primordial para realizar reflexiones críticas y análisis sobre las implicancias de los resultados.
Habilidades Críticas (C5)	Cuestionar y examinar la validez y credibilidad de los mensajes estadísticos. Analizar la evidencia implícita en las conclusiones que se publican.
Elementos Disposicionales	*Descripción*
Postura Crítica (D1)	Actitud de cuestionamiento hacia la información estadística centrada en la interpretación de datos y en los resultados de investigaciones estadísticas.
Creencias y actitudes (D2)	Las actitudes representan sentimientos hacia acciones, objetos o temas, como por ejemplo: no me gusta la estadística porque nunca me gustó matemática. Las creencias no contienen argumento sentimental sino que se desarrollan luego de un proceso cognitivo, razón por la cual son más estables y menos permeables a los cambios.

Tabla 2. Elementos de razonamiento y elementos moderadores del razonamiento estadístico (adaptado de Pfannkuch, 2007)

Elementos de Razonamiento	*Indicadores*
Generación de hipótesis (R1)	Comparar y razonar sobre las tendencias de las distribuciones disponibles.
Resumen (R2)	Realizar comparaciones de los resúmenes estadísticos. Por ejemplo, comparar los 5 valores correlativos en dos resúmenes de los cinco números o comparar mediana de un resumen con mínimo de otro.
Señal (R3)	Hace referencia a los invariantes de una distribución. Por ejemplo, cuando se comparan dos distribuciones y se analiza la superposición o solapamiento del 50% central de los datos
Ruido (R4)	Comparación de la variabilidad local y global entre dos o más distribuciones.
Muestreo (R5)	Surge cuando se considera el tamaño de la muestra o la comparación si se tomó otra muestra y la población sobre la que se hace la inferencia.
Fundamentación (R6)	Se observa cuando se tiene en cuenta el contexto de donde provienen los datos, se analiza si los resultados tienen sentido en ese contexto y también se consideran explicaciones alternativas para estos resultados.
Casos particulares (R7)	Emerge al considerarse en el análisis la posibilidad de valores atípicos y se analizan sus características.
Moderadores del Razonamiento	*Indicadores*
Evaluación (M1)	Este elemento aparece cuando al realizar una comparación de distribuciones se hace referencia al peso de la evidencia que se describió.
Referencia (M2)	Cuando se reconoce: las etiquetas de la información implícita en los resúmenes, las medidas estadísticas, las características de la distribución y se relaciona todo esto con el contexto.

Figura 1. Relaciones entre elementos de Conocimiento asociados a la Alfabetización Estadística y elementos del RII (Reproducida de Santellán, en prensa)



Metodología

El instrumento que utilizamos ha sido diseñado específicamente para la investigación y consta de dos tareas, una de ellas centrada en la comparación de distribuciones de variables cuantitativas representadas a través de diagramas de caja, que toma de referencia la propuesta por Pfannkuch (2007) pero contextualizada en Psicología. La segunda tarea, se basa en comparación de distribuciones de variables cualitativas, está inspirada en Rossman (2007) y su análisis fue presentado en Tauber y Santellán (2019).

Ambas tareas tienen el carácter de muestras de trabajo (Fox, 1981), debido a que para resolverlas se requiere de una combinación de habilidades y conceptos que se necesitan para actuar en una situación determinada. La tarea es un prototipo de una situación real, una situación de análisis de datos a la que estudiantes de Psicología pueden enfrentarse en su futura vida profesional. Las partes de cada tarea se organizaron de manera tal que alguna brinde la oportunidad de repensar las respuestas dadas y de revisar los argumentos. Es así que, promueven la necesidad de reflexionar sobre la interpretación crítica y generar opinión sobre la información analizada (Gal, 2019). En el presente trabajo sólo describimos el análisis de contenido que realizamos previo a la aplicación del instrumento, dejando el análisis de las respuestas para trabajos posteriores.

Para identificar los elementos de conocimiento y/o razonamiento que surgen cuando se resuelve cada tarea, utilizamos como técnica metodológica el análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990), al cual consideramos como el estudio de las comunicaciones humanas materializadas en las resoluciones de las tareas a través de las producciones escritas. Dado que el análisis de contenido no es una teoría, sino un conjunto de técnicas, es imprescindible que la técnica concreta utilice una teoría que dé sentido al modo de análisis y a los resultados. En consecuencia, la identificación de unidades de análisis se realiza en función de los elementos de la AE y de los indicadores de RII enunciados en las Tablas 1 y 2 y en la Figura 1. Así, para el análisis de contenido nos propusimos los siguientes objetivos:

- Enunciar para cada tarea, una resolución que consideramos "óptima", en el sentido que pusiera en relación todos los elementos que pudieran aparecer.
- Identificar, en la resolución "óptima", los elementos de AE y de RII que se pueden poner en relación en cada parte de la tarea.

- Establecer posibles relaciones entre los elementos de AE y RII identificados.

El logro de estos objetivos nos sirve de referencia para el posterior análisis de las respuestas brindadas por los sujetos de estudio. Asimismo, nos permite evaluar la validez de contenido del instrumento, ya que podemos indicar qué elementos definidos en el marco teórico, se cubren con cada parte de la tarea.

La investigación se realizó en un curso de Licenciatura en Psicología, con estudiantes que iniciaron el cursado de la asignatura Métodos Cuanti-Cualitativos para la investigación. El instrumento diseñado fue aplicado a 18 estudiantes al inicio del cursado, previo a que reciban formación en Inferencia Estadística Formal.

Análisis de contenido de una tarea de inferencia estadística informal

Para la elaboración de esta tarea consideramos un contexto cercano a los sujetos que formaron parte del estudio, por lo que utilizamos datos reales publicados en Triola (2013). En la Figura 2 se reproduce la tarea que analizamos a continuación.

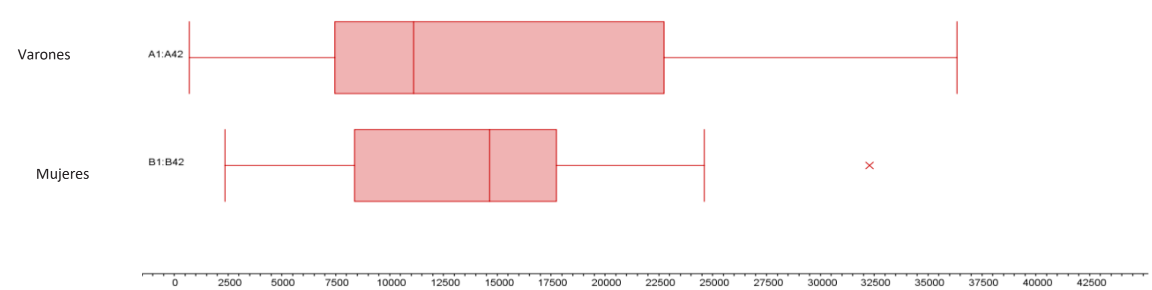
Figura 2. Tarea 1 del instrumento de investigación elaborado (Santellán, en prensa)

¿Quién no ha escuchado decir que las mujeres hablan más que los hombres?

Para esclarecer este interrogante un grupo de docentes de distintos departamentos de Psicología (correspondientes a las Universidades de Arizona; de Washington y de Texas) llevó a cabo un estudio donde decidieron investigar si realmente las mujeres hablan más que los hombres.

Para realizar este estudio tomaron distintas muestras de jóvenes. Cada individuo llevaba "*el sistema oído*", un sistema que consistía en una grabadora de voz, un micrófono y una grabadora micro-cassette, todo esto disimulado entre sombreros, cuellos de camisa y bolsillos de campera. Este sistema permitió desgrabar y contabilizar las palabras dichas por varones y mujeres.

PARTE I. A partir de la información recolectada en la investigación citada, los investigadores analizaron la cantidad de palabras pronunciadas por varones y mujeres. A continuación, se presentan los diagramas de caja correspondientes a dicha información:



a) Si formaras parte del equipo de investigación y tuvieras que ayudar a elaborar una conclusión, ¿qué podrías indicar respecto a la cantidad de palabras que pronuncian las mujeres comparándola con la cantidad de palabras que dicen los hombres?

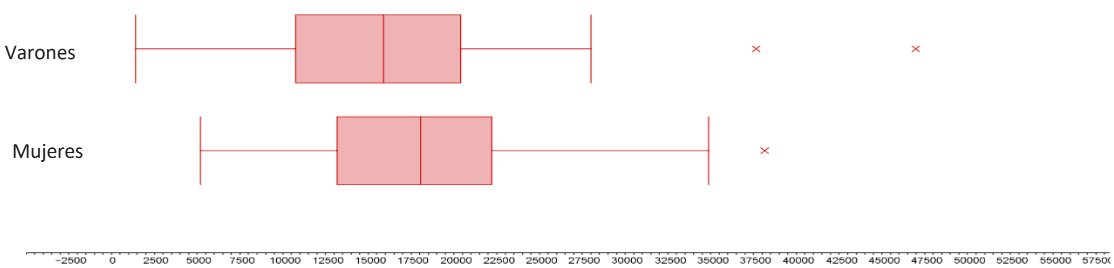
b) Si quieres elaborar un informe donde se comparen las cantidades de palabras dichas por género, ¿qué medida de tendencia central crees que resumiría mejor esta información? ¿Por qué?

c) ¿Consideras que la afirmación de que las mujeres hablan más que los hombres es sustentable? ¿Por qué?

a) *PARTE II*. Este equipo de investigación también estudió la cantidad de palabras en parejas de hombres y mujeres, los cuales llevaban un mínimo de 6 meses de relación. Para este caso, obtuvo estos datos:¿Qué informarías al grupo de investigación si estuvieras encargado de comunicar los resultados de la cantidad de palabras contabilizadas en parejas de varones y mujeres?

b) En base a la información que proporcionan estos gráficos, ¿qué conjeturas o hipótesis podrías enunciar respecto de la cantidad de palabras emitidas por estas parejas? Enuncia claramente tu conjetura.

c) Si debieras emitir un comunicado resaltando información y para esto te piden que lo hagas a partir de una medida de tendencia central, ¿cuál elegirías? ¿Cuál es el fundamento de tu elección? (Por favor, explicita claramente este fundamento)



PARTE III.

a) Si compraras ambos grupos de diagrama de caja (los aportados en las PARTES I y II), ¿podrías agregar alguna conjetura o hipótesis que te sugieran los datos? Si es así, enúnciala.

b) Si el grupo de investigación reunió a estos varones y mujeres por medio de panfletos y avisos por internet, comunicando un pago de una suma en dólares para los colaboradores, ¿es posible que este dato pueda influir de alguna manera en las conclusiones que obtuviste en el inciso c de la primera parte y en el b de la parte II?

c) De acuerdo a la respuesta que diste en el ítem anterior, indica por qué te parece que podría o no haber influencia en las conclusiones. Explicita lo más claramente posible tu razonamiento.

La tarea inicia presentando el contexto a partir de los datos representados en los diagramas de caja. El primer interrogante promueve el inicio de las reflexiones que podrían conducir a la elaboración de una conjetura inicial, la cual en términos del ciclo PPDAC (Pfannkuch y Wild, 2004), requeriría la captación o comprensión del problema y la generación de una hipótesis informal. Así, es necesario leer la información textual y gráfica, para reconocer las variables analizadas, las medidas estadísticas que se comparan, así como su significado asociado al contexto y a la pregunta inicial. En este sentido, esperamos que una respuesta prototípica integre los conceptos e ideas que presentamos en el Cuadro 1. Asimismo, en el Cuadro 2, presentamos los conceptos que se podrían integrar en la pregunta 1.b.

Cuadro 1. Conceptos e ideas que aparecen en una respuesta "óptima" esperada en la resolución de la parte I.a

- Lectura e interpretación de etiquetas presentes en el resumen
- Identificación de las variables analizadas
- Reconocimiento y comunicación de valores mínimos y máximos para cada distribución
- Identificación y reconocimiento de valores alejados en el contexto
- Reconocimiento de la mediana como medida de tendencia central más representativa y comunicación de este valor, considerando el contexto

- Comparación de distribuciones en torno a su variabilidad en el RIC, interpretando el resultado en el contexto dado
- Identificación y comunicación del cuartil 3 en contexto
- Identificación e interpretación de la simetría de cada distribución en contexto
- Elaboración de una conjetura sobre qué grupo pronuncia más palabras, considerando los datos analizados

Cuadro 2. Conceptos e ideas involucrados en la respuesta "óptima" esperada en la resolución de la parte I.b

- Análisis de la forma de cada distribución e interpretación de la asimetría observada en contexto
- Identificación e interpretación de la presencia de valores atípicos en una distribución
- Reconocimiento de la mediana como la medida de tendencia central más representativa de cada distribución, interpretación de esta en el contexto.

La pregunta I.c tiene como primer objetivo reforzar la argumentación presentada en I.a, lo cual nos permitirá conocer si se considera la conjetura planteada inicialmente, si hay argumentos estadísticos sólidos para sustentar esa postura o si una pregunta que intenta ser recurrente genera otro tipos de razonamientos que no se asocian con el expresado en el primer ítem. De esta manera prevemos que ocurra alguna de las situaciones siguientes:

Aparece un elemento descriptivo/comparativo diferente al utilizado en el inciso a. Por ejemplo: para la conclusión del ítem I.a, una respuesta podría basarse en la comparación de los cuartiles 3 y, en el ítem c, se podrían comparar las medianas. En este caso, se considerará que los elementos de razonamiento utilizados podrían ser contradictorios.

Aparece un elemento descriptivo/comparativo distinto al utilizado al de la respuesta I.a pero, se retoman las respuestas dadas a los ítems a y b y se analizan los desajustes o desfases entre ambas distribuciones. En este caso, sería una evidencia de que se ponen en relación otros elementos de razonamiento adecuados.

Cuadro 3. Conceptos e ideas involucradas en la respuesta "óptima" esperada en la resolución de la parte II.a

- Lectura e interpretación de etiquetas presentes en el resumen
- Identificación de las variables analizadas
- Reconocimiento y comunicación de valores mínimos y máximos para cada distribución
- Identificación y reconocimiento de valores alejados en el contexto
- Identificación y comunicación del cuartil 3 o cuartil 1 en contexto
- Comparación de distribuciones en torno a su variabilidad en el RIC, interpretando el resultado en el contexto dado
- Reconocimiento de la mediana como medida de tendencia central más representativa y comunicación de este valor, considerando el contexto
- Identificación e interpretación de la simetría de cada distribución en contexto
- Elaboración de una conjetura sobre qué grupo pronuncia más palabras, considerando los datos analizados
- Lectura e interpretación de etiquetas presentes en el resumen
- Identificación de las variables analizadas
- Reconocimiento y comunicación de valores mínimos y máximos para cada distribución
- Identificación y reconocimiento de valores alejados en el contexto
- Identificación y comunicación del cuartil 3 o cuartil 1 en contexto

- Comparación de distribuciones en torno a su variabilidad en el RIC, interpretando el resultado en el contexto dado
- Reconocimiento de la mediana como medida de tendencia central más representativa y comunicación de este valor, considerando el contexto
- Identificación e interpretación de la simetría de cada distribución en contexto
- Elaboración de una conjetura sobre qué grupo pronuncia más palabras, considerando los datos analizados

El objetivo del ítem II.b es repreguntar sobre la conjetura que se expresó en el ítem II.a. Así, se pretende corroborar si la hipótesis que se elaboró previamente se mantiene o si se revierte y se buscan argumentos estadísticos más formales, para elaborar una nueva hipótesis. De esta manera esperamos encontrar alguna de las cuestiones que mencionamos más arriba para las respuestas al ítem I.c.

En la pregunta II.c, se espera que se analice la simetría/asimetría de las distribuciones y la variabilidad en cada muestra, relacionando esas características al significado que tienen en el contexto analizado. Según el análisis que se presente podremos valorar si se utiliza la misma información de los ítems anteriores o si se amplía a partir de la lectura e interpretación de la información presentada en los gráficos de caja. La respuesta que consideramos óptima para esta pregunta debe estar elaborada considerando los conceptos estocásticos que se presentan en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Conceptos estocásticos que se esperan en la respuesta "óptima" de la resolución de la parte II.c

- Análisis de la forma de cada distribución e interpretación de la asimetría observada en contexto
- Identificación e interpretación de la presencia de valores atípicos en una distribución
- Reconocimiento de la mediana como la medida de tendencia central más representativa de cada distribución, interpretación de esta en el contexto.

En las preguntas III.b y c, se hace necesario retomar partes de los ítems previos y reconocer el tipo de muestreo sobre el que se agrega información. Esto permitirá analizar la incidencia del tipo de muestreo en las conjeturas ya elaboradas y el alcance de las mismas. En este sentido, pueden aparecer dos tipos de respuestas, una en la que se hable sólo de diferencias a nivel muestral (comparación) y otra, en la que haya algún tipo de generalización. En este caso, podría revisarse si es posible pensar en una generalización confiable, dando evidencias de un pensamiento crítico o, podría no surgir este cuestionamiento y reafirmar la generalización previa, con lo cual brindaría evidencia de elementos que se presentan de forma inadecuada. A modo de resumen, en la Tabla 3, indicamos los elementos de conocimiento y de razonamiento que consideramos deberían estar presentes en respuestas que estén bien fundamentadas. Si en una respuesta intervienen todos los elementos detallados, evidenciaría el nivel de argumentación más profundo que se podría aportar.

Tabla 3. Elementos de Conocimiento de AE y de RII en una tarea de inferencia estadística informal

Parte de la Tarea 1	Actividades cognitivas que propicia cada parte de la tarea	Elementos de conocimiento de AE	Elementos de razonamiento y moderadores
Parte I. Enunciado inicial.	Reconocimiento de la o las variables estudiadas.	C1. Habilidades de alfabetización	R5. Muestreo

	Identificación del tipo de muestreo empleado	C2. Conocimiento estadístico C4. Conocimiento base del Mundo o Contexto	
Parte I. Representación gráfica	Lectura y reconocimiento de la información presentada en el gráfico. Identificación de las medidas estadísticas descriptivas	C2. Conocimiento estadístico C4. Conocimiento base del Mundo o Contexto	R2. Resumen R5. Muestreo M2. Referencias
Parte I. a)	Elaboración de conjeturas	C1. Habilidades de alfabetización C3. Conocimiento Estadístico C5. Habilidades Críticas D1. Postura crítica. D2. Creencias y Actitudes	R1. Generación de Hipótesis R2. Resumen R3. Señal R4. Ruido R5. Muestreo R6. Fundamentación M1. Evaluación M2. Referencias
Parte I.b)	Elección de la medida de tendencia central más apropiada Fundamentación de la medida elegida	C1. Habilidades de alfabetización C2. Conocimiento estadístico	R2. Resumen R3. Señal R4. Ruido R6. Fundamentación M1. Evaluación M2. Referencias
Parte I. c)	Desarrollo de una postura crítica	C5. Habilidades críticas D1. Postura crítica D2. Creencia y Actitudes	R1. Generación de Hipótesis R6. Fundamentación M1. Evaluación M2. Referencia
Parte II. Enunciado inicial	Reconocimiento de la o las variables estudiadas Identificación del tipo de muestreo empleado	C1. Alfabetización estadística C2. Conocimiento estadístico C4. Conocimiento base del Mundo o Contexto	R5. Muestreo
Parte II. Representación gráfica	Lectura y reconocimiento de la información presentada en el gráfico Identificación de las medidas estadísticas descriptivas	C2. Conocimiento estadístico C4. Conocimiento base del Mundo o Contexto	R2. Resumen R5. Muestreo M2. Referencias
Parte II. a)	Elaboración de conjetura	C1. Habilidades de alfabetización C2. Conocimiento estadístico C5. Habilidades Críticas	R1. Generación de Hipótesis R2. Resumen R3. Ruido R4. Señal R5. Muestreo

		D1. Postura crítica D2. Creencias y Actitudes	R6. Fundamentación M1. Evaluación M2. Referencias
Parte II. b)	Postura crítica en torno a la determinación de una conjetura en función de una variable determinada	C1. Habilidades de alfabetización C2. Conocimiento estadístico C4. Conocimiento base del mundo o Contexto C5. Habilidades Críticas	R1.Generación de Hipótesis R2. Resumen R3. Ruido R4. Señal R5. Muestreo R6. Fundamentación M1. Evaluación M2. Referencias
Parte II. c)	Elección de la medida de tendencia central más apropiada. Fundamentación de la elección	C1. Habilidades de alfabetización C2. Conocimiento estadístico D1. Postura crítica	R2. Resumen R3. Señal. R4. Ruido. R6. Fundamentación M1. Evaluación M2. Referencias
Parte III. a)	Elaboración de hipótesis fundada en el análisis de dos grupos de comparación de distribuciones	C1. Habilidades de alfabetización C2. Conocimiento estadístico C4. Conocimiento base del mundo o contexto C5. Habilidades críticas D1. Postura Crítica D2. Creencias y Actitudes	R1. Generación de Hipótesis R2. Resumen R5. Muestreo R6. Fundamentación M1. Evaluación
Parte III. b) y c)	Reconocimiento del tipo de muestreo y su incidencia en las hipótesis ya fundadas	C1. Habilidades de Alfabetización C2. Conocimiento Estadístico C4. Conocimiento del Mundo o Contexto D1. Postura Crítica D2. Creencias y Actitudes	R1. Generación de Hipótesis R5. Muestreo R6. Fundamentación R7. Casos particulares M1. Evaluación

Reflexiones finales

La tarea presentada en este trabajo involucra ideas de distribución, gráficos, inferencia estadística y muestreo, incluyendo preguntas organizadas de manera tal que una de ellas permita integrar los cuestionamientos realizados previamente y así, el estudiante tenga la oportunidad de repensar las respuestas dadas y ampliar sus argumentos o, quizás presentar una respuesta que ponga en vilo sus respuestas anteriores autocuestionándolas. Estas tareas favorecen la utilización de diversos elementos de conocimiento de la alfabetización estadística y de razonamiento de la Inferencia Estadísica Informal, y a la interrelación de estos. El análisis realizado aporta fundamentos que deberían tenerse en cuenta en la elaboración de tareas y de propuestas de enseñanza que fomenten el RII como una vía intermedia para favorecer la posterior formalización de la inferencia.

Somos conscientes que el estudio de los elementos de conocimiento y de razonamiento no se agota con este trabajo, pero el análisis presentado aquí, sumado al de Tauber y Santellán (2019), aporta información relevante y un instrumento con una adecuada validez de contenido, que permite evidenciar las relaciones que podrían establecer los estudiantes universitarios y así, poder aportar interpretaciones sobre sus razonamientos inferenciales. En un futuro trabajo pretendemos avanzar sobre el análisis de las respuestas de los estudiantes, identificando las relaciones entre elementos de conocimiento de AE y de razonamiento de IE que estos ponen en relación al resolver estas tareas.

Referencias bibliográficas

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Springer.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid: La Muralla.

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación.* Pamplona: Eunsa.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47-78). Dordrecht: Springer.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Garfield, J. B., delMas, R., y Chance, B. (2007). Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. In M. C. Lovett, & P. Shah (Eds.), *Thinking about Data* (pp. 117-148). New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Gil, E. y Ben-Zvi, D. (2014). Long-term impact on students' informal inferential reasoning. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.). *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Meyer, R. (2006). *Funcionamiento didáctico del saber. EL razonamiento inferencial estadístico como metodología y la formación de formadores en Educación*. Tesis Doctoral. Universidad Católica de Santa Fe.

Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: a case study about the interpretation of box plots. *Mathematics Education,* 2(3), pp. 149 -167.

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. In: D. Ben-Zvi y J. Garfield (eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking,* pp. 17 – 45.

Rossman, A. (2007). A statistician's view on the concept of inferential reasoning. *Fifth International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking and Literacy (SRTL-5*), University of Warwick, UK.

Tauber, L. (2018). Formación virtual en enseñanza de la estadística y la probabilidad para profesores de matemática en ejercicio de Argentina. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(1), 698-705.*

Tauber, L., Batanero, C. y Sánchez, V. (2004) Diseño, implementación y análisis de una secuencia de enseñanza de la Distribución Normal en un curso universitario. *Revista EMA, 9*(2), 82-105.

Tauber, L. M., Bertorello, N. y Albrecht, G. (2012). Análisis previo de dos ítems de un cuestionario que pretende detectar actitudes hacia la estadística. En: *Creatividad, descubrimiento y futuro: I Congreso Nacional de Investigación en Grado (INVESGRADO 2012*, 11 de mayo de 2012), pp. 1543-1556. Universidad de Castilla-La Mancha.

Tauber, L. y Santellán, S. (2019). Relaciones entre elementos de conocimiento y de razonamiento inferencial en tareas de inferencia informal. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística.*

Triola, M. (2013). *Estadística.* México, Pearson.

Zapata-Cardona, L. (2016). Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. *Yupana, 10*, 30-41.

Zieffler, A., Garfield, J., delMas, R., Reading, C. (2008) A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal, 7*(2), 40-58.

SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO MANIFESTADOS POR ALUMNOS UNIVERSITARIOS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA

MEANINGS OF THE CONCEPT OF THE LIMIT OF A FUNCTION AT A POINT EXPRESSED BY STUDENTS OF THE NATIONAL UNIVERSITY OF COSTA RICA

Yosenith González Flores, José Antonio Fernández Plaza, Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Universidad Nacional (Costa Rica). Universidad de Granada (España). Universidad de Granada (España)
yflowers3@gmail.com, joseanfplaza@ugr.es, jfruiz@ugr.es

Resumen
Esta investigación en proceso espera analizar el significado del concepto de límite de una función en un punto expresado por estudiantes universitarios de la Universidad Nacional de Costa Rica. El marco teórico está formado por el pensamiento matemático avanzado, así como la noción de significado de los conceptos matemáticos escolares. Se utiliza una metodología cualitativa y descriptiva para analizar los datos recopilados. Algunas de las conclusiones preliminares indican que los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial expresan una comprensión dual concepto-proceso para el límite, usan principalmente la representación gráfica y proponen aplicaciones vagas. Esperamos analizar el resto de la información proporcionada por los estudiantes universitarios de diferentes grados para determinar si los significados expresados son similares a los ya obtenidos.

Palabras clave: límite, pensamiento matemático avanzado.

Abstract
This ongoing research aims to analyze the meaning of the concept of limit of a function at a point expressed by undergraduate students of the National University of Costa Rica. The theoretical framework is made up of the Advanced Mathematical Thinking as well as the notion of meaning of school mathematical concepts. A qualitative and descriptive methodology is used to analyze the data collected. Some of the preliminary conclusions indicate that Biology and Industrial Chemistry Engineering students express a dual understanding concept-process for the limit. They use mostly the graphic representation and propose vague applications. We expect to analyze the rest of the information provided by the undergraduates of different grades to determine if the expressed meanings are similar to the ones already obtained.

Key words: limit, advanced mathematical thinking.

Introducción

El cálculo diferencial e integral fue desarrollado por Newton y Leibniz durante los siglos XVII y XVIII, inicialmente de forma poco rigurosa hasta que varios siglos después se dio un tratamiento más formal. Un caso particular es el concepto de límite de una función. Fue hasta el siglo XIX, en donde frases con carácter ambiguo del tipo "*tan pequeño como se quiera"* obtuvieron mayor rigor y formalismo en los trabajos de Weierstrass y otros matemáticos (Ruiz, 2003).

La epistemología histórica muestra un camino lleno de imprecisiones y problemas en la formalización del límite en las matemáticas. Este concepto es básico en el cálculo diferencial e integral para el desarrollo de otros conceptos como continuidad, derivabilidad, integración, convergencia, entre otros (Kidron, 2014).

Según Kidron (2014), el concepto de límite es una noción compleja del pensamiento matemático avanzado. Por tal razón, en las matemáticas escolares su enseñanza debería abordarse mediante un análisis profundo que implique, entre otros elementos, a la epistemología del concepto, en cuanto a su desarrollo histórico, a las creencias del profesor y a la evolución de las concepciones de sus alumnos (Contreras y García, 2015). No obstante, se reincide en conflictos cognitivos o dificultades en su aprendizaje (Blázquez y Ortega, 2002; Tall, 1980; Tall y Katz, 2014) lo que ha favorecido la investigación sobre diferentes aspectos de su comprensión (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, y Castro, 2013; Kidron y Tall, 2014; Swinyard, 2011; Tall y Katz, 2014).

En Costa Rica se desconocen estudios en esta línea. Por lo tanto, hemos formulado esta investigación para darle continuidad a un estudio en el que se abordaron algunos aspectos del significado de límite finito de una función en un punto, con 38 estudiantes universitarios de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica. Concretamente, el propósito de nuestra investigación es profundizar y analizar sobre los significados atribuidos al concepto de límite, durante y posterior a su enseñanza, por los estudiantes universitarios mencionados y algunos de otras carreras de dicha universidad que se incorporarán al estudio.

Marco teórico

Los fundamentos teóricos de esta investigación están organizados en dos apartados. El primero presenta los antecedentes, que corresponden a la literatura relacionada con el límite. El segundo resalta el posicionamiento conceptual, destacando las bases teóricas que orientan el estudio, especialmente la noción de significado desde una perspectiva semántica.

Antecedentes

La compresión del concepto de límite supone para los estudiantes dificultades. Esto ha generado que esta noción haya sido abordada en diferentes estudios y desde diversas perspectivas. Las investigaciones pueden organizar en tres grupos: (1) sobre concepciones intuitivas y el lenguaje del cálculo, (2) sobre conflictos cognitivos y (3) sobre la introducción en el aula de definiciones alternativas a la formal y el estudio de fenómenos asociados. A continuación, se presentan algunos estudios.

Investigaciones sobre concepciones intuitivas y el lenguaje del cálculo

Diversos estudios sobre las concepciones del límite muestran que un gran número de estudiantes de secundaria y de universidad tienen una noción intuitiva del límite y lo asocian con aspectos inalcanzables.

En este sentido, Williams (1991) estudió las concepciones del límite que tenían estudiantes universitarios. Para ello, les brindó seis afirmaciones sobre los límites y les solicitó que determinaran su veracidad o falsedad y que indicaran cuáles describían mejor el límite. De esas seis afirmaciones, tres fueron escogidas por la mayoría de los estudiantes como verdaderas. Las tres afirmaciones atienden aspectos del límite como noción intuitiva, el límite como noción inalcanzable y el límite relacionado con la definición formal. Dichas afirmaciones también las seleccionaron con mayor frecuencia como la mejor descripción de un límite.

Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2013) describieron e interpretaron las definiciones que brindaron un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, agrupados y sintetizados de investigaciones previas. Estos aspectos corresponden a la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, los algoritmos y las destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de ellos, analizaron las definiciones recogidas. Como parte de los resultados destacaron la riqueza de significado de estas definiciones debido al carácter no alcanzable y no rebasable atribuido al límite y por su consideración dual como objeto o proceso.

Swinyard (2011) realizó un experimento de enseñanza de diez semanas con dos estudiantes que no conocían previamente la definición de límite convencional $\varepsilon - \delta$. Dicho experimento consistió en la reinvención de una definición formal de límite que capturara el significado deseado de la definición convencional a través de tareas diseñadas con esa intención. En el estudio se muestra la evolución de la definición y los razonamientos empleados.

Investigaciones sobre conflictos cognitivos referentes al concepto de límite

La transición de la definición informal a la formal del límite puede generar muchos conflictos en los estudiantes. Tall (1980) describió que cuando a los escolares se les brinda una definición informal de límite, y posteriormente la definición formal, se construye una imagen conceptual antes de la definición formal del concepto, lo que ocasiona que ciertas propiedades implícitas que no son parte de la definición se vuelven parte de la imagen conceptual.

Blázquez y Ortega (1998) realizaron un estudio sobre comprensión del concepto de límite funcional por alumnos de segundo curso de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, a través de actividades en registros de representación gráfica, tabular numérico y simbólico. Determinaron que los escolares se resisten a aceptar la no existencia del límite y, en consecuencia, su búsqueda lleva a una situación en la que surgen "obstáculos como la identificación del límite con el valor de la función en el punto (que es muy fuerte porque les sirve para justificar propiedades como la unicidad) o la confusión entre el valor al que tiende x y el límite" (p. 131).

Cornu (2002) indica que una de las mayores dificultades en la enseñanza y aprendizaje del límite radica en su riqueza, complejidad y en que los aspectos cognitivos no pueden generarse únicamente a partir de la definición. En la enseñanza de las matemáticas, comúnmente se da mayor énfasis a ciertos aspectos del concepto de límite, por lo que los estudiantes podrían adquirir creencias implícitas sobre la forma en la que deben operar. Las diferentes investigaciones que se han llevado a cabo muestran que la mayoría de los estudiantes no dominan la idea de límite, incluso en una etapa más avanzada de sus estudios.

Tall y Katz (2014) utilizaron los marcos teóricos de la educación matemática y la psicología cognitiva para analizar las ideas de Cauchy sobre función, continuidad, límite e infinitesimal. Específicamente, sobre la convergencia de sucesiones muestran que algunos estudiantes tienen *(1) una vista asintótica en la que la sucesión se acerca, pero no alcanza el límite, (2) una sucesión que se puede agrupar en torno a uno o más puntos y (3) el concepto de límite moderno con un límite único.* Estos investigadores argumentaron que las primeras dos concepciones se pueden encontrar en entendimientos históricos y que están en concordancia con las ideas de Newton y Cauchy, respectivamente. Esto evidencia que lo que a menudo se considera en la literatura de investigación como conceptos erróneos de los estudiantes, se describe más adecuadamente como preconceptos que ocurren en etapas tempranas de su aprendizaje, que pueden aparecer en conceptos formales más ampliamente aceptados.

Investigaciones centradas en la introducción de definiciones de límite alternativas a la formal en el aula y el estudio de fenómenos asociados

Algunas definiciones del concepto de límite en el ámbito escolar pueden ser informales y, por tanto, presentar indicios de imprecisión y subjetividad, en otros casos, pueden ser formales y rigurosas, con un nivel mayor de abstracción, pero no tan apropiadas para los estudiantes de secundaria y de los primeros cursos universitarios (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009; Blázquez, Ortega, Gatica, S y Benegas, 2006).

Existen propuestas alternativas a las definiciones informales y formales tradicionales del concepto de límite, que superan los vicios de imprecisión y subjetividad en el caso de las informales, y los excesos de rigor en las formales. En este sentido, Blázquez y Ortega (2002) presentaron una definición rigurosa, con menos formalismo y más dinámica para los estudiantes: *el límite de una función f en $x = a$ es L, si para cualquier aproximación K de L $(K \neq L)$, existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos, están más próximas a L que K*.

Kidron (2011) estudió las concepciones de una estudiante sobre la definición de asíntota horizontal, para esto le hizo reflexionar sobre la imagen conceptual de dicho concepto, a través de algunas tareas con una situación de conflicto. Esta situación la ayudó a reconstruir su conocimiento de la definición de asíntota horizontal como un límite.

Kidron y Tall (2014) abogaron por una mayor consideración, en la enseñanza del cálculo, de la distinción entre el infinito potencial y el infinito real del proceso límite. Para los estudiantes, el límite se ve a menudo en términos del infinito potencial del proceso en curso en lugar del límite fijo que se puede calcular con la precisión deseada. Entre sus conclusiones indican que la introducción del límite de una sucesión de funciones puede ser cognitivamente más fácil de comprender que los límites de una sucesión de números. En este estudio, además de mostrar la relación entre el infinito potencial del proceso y el infinito real del límite, se evidencia la transición de los polinomios de Taylor como aproximaciones a una precisión deseada hacia la definición formal de límite.

Con base en algunas investigaciones, como las mencionadas, puede notarse que la comprensión de dicho concepto es compleja y en consecuencia la enseñanza de este tema puede resultar complicada para los profesores de matemáticas. En este sentido, las investigaciones para determinar los significados que atribuyen los estudiantes al concepto de límite, permitirán una mejor comprensión del problema y brindar aportes a la enseñanza de este tema.

Posicionamiento conceptual

Este apartado se organizó en dos subapartados. El primero corresponde a algunos elementos del pensamiento matemático avanzado y el segundo presenta algunas ideas sobre los significados de los contenidos matemáticos escolares.

Pensamiento Matemático Avanzado

Esta investigación se inserta en la Didáctica del Análisis Matemático, específicamente en el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) que surge en 1985 en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), con el objetivo de profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de nociones relacionadas con el cálculo infinitesimal. En el PMA destacan procesos cognitivos abstractos como definir, demostrar y formalizar, que, aunque no son procesos exclusivos de las matemáticas superiores, toman mayor relevancia en estos cursos. En las matemáticas básicas las descripciones se realizan con base en la experiencia, mientras que, en niveles más altos de las matemáticas, las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones (Azcárate y Camacho, 2003).

En el 13 International Congress on Mathematical Education (ICME 13-2016) se hizo un análisis sobre el desarrollo de la investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, con un foco particular en los temas de investigación asociados al límite, derivada e integral, con una visión general sobre marcos teóricos utilizados, y evoluciones puntuales abordadas a través de las principales tendencias en el campo. También se brindó una descripción del estado de la enseñanza del cálculo tanto desde el punto de vista europeo como americano, y se incluyó una bibliografía ampliada con algunas de las referencias más importantes sobre este tema (Azcárate, Camacho-Machín, González, y Moreno, 2015; Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces, y Torner, 2016).

Significado de los conceptos matemáticos escolares

Para efectos de esta investigación, se asume el significado de un concepto introducido por Frege a finales del siglo XIX, que fue posteriormente adaptado y desarrollado al significado de un concepto matemático escolar considerando para su análisis tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso (Rico, 2012; Rico, 2013; Rico, 2016a, Rico, 2016b). Dentro de este marco, comprender el significado de un concepto matemático supone conocer su definición, sus tipos de representaciones, sus operaciones, relaciones, procedimientos y propiedades, así como su interpretación y aplicación en la resolución de tareas matemáticas. Esta perspectiva permitirá analizar cómo entienden y utilizan los estudiantes el concepto de límite. A continuación, se detallan las tres componentes del significado de un contenido matemático escolar.

Estructura conceptual

Se compone de los conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones, vinculados con un contenido matemático, junto con la estructura formal que proporciona referencia a los contenidos utilizados (Rico, 2012; Rico 2013). La estructura conceptual se caracteriza por tres componentes: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal. Sin embargo, para efectos de este estudio sólo se consideran las dos primeras, y se detallan con base en lo expuesto por Rico (1997) y en Fernández-Plaza (2016).

El *campo conceptual* es el conjunto de conceptos y relaciones que refieren a un contenido matemático. Se distinguen tres niveles de conocimientos: *(a) los hechos* que se componen de términos, notaciones, convenios y resultados; *(b) los conceptos* que describen una regularidad de un conjunto de hechos y *(c) las estructuras conceptuales* que corresponde a un conjunto de conceptos y transformaciones relacionados entre sí.

El *campo procedimental* que refiere a las reglas, pautas, algoritmos o procedimientos utilizados para resolver una tarea matemática. Comprende tres niveles según la complejidad del contenido: *(a) las destrezas* que son el procesamiento ordenado de contenidos básicos, *(b) los razonamientos* que son el procesamiento de relaciones e inferencias entre conceptos y *(c) las estrategias* que implican el procesamiento de conceptos, relaciones y la conexión de razonamientos que operan dentro de una o varias estructuras conceptuales.

Sistemas de representación

Las representaciones aluden a los signos, notaciones simbólicas o gráficas para cada noción matemática que expresan los conceptos y procedimientos, así como sus relaciones, características y propiedades. Se pueden considerar dos grupos de sistemas de representación: las *simbólicas* que incluyen símbolos alfanuméricos, y las *gráficas* que aluden a figuras (Castro y Castro, 1997; Kaput, 1987; Lupiáñez, 2016).

Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso de los conceptos matemáticos hacen referencia a las diversas situaciones a las que responde, a los problemas que resuelve y a los fenómenos que organiza, lo que permite complementar sus significados (Ruiz-Hidalgo, 2016). En esta investigación se consideran relevantes tres elementos: *(a) los términos y modos de uso* que son palabras que sintetizan la definición de un concepto matemático para brindarle sentido, corresponden a distintas interpretaciones del mismo; *(b) los contextos matemáticos* que están relacionados con las funciones y las cuestiones a las que responden los conceptos matemáticos y *(c) las situaciones* que corresponden a las circunstancias o condiciones en las que se aplica y trabaja el concepto matemático. Se consideran cuatro situaciones: las personales, las laborales (y educativas), las sociales y las científicas (OCDE, 2012).

Metodología

La investigación es cualitativa de carácter exploratorio y descriptivo. Es exploratoria debido a que no se conocen antecedentes de estudios similares en Costa Rica y descriptiva ya que se pretende determinar los significados que le atribuyen al concepto de límite de una función en un punto los sujetos de investigación, así como su relación con los conceptos de continuidad y derivabilidad, sin emitir juicios de valor.

Instrumentos para la recolección de la información

En esta investigación la información se recolectó mediante cuatro cuestionarios. El cuestionario 1 es de tipo semántico y consta de cinco tareas; se administró a los estudiantes durante la enseñanza de límites con el propósito de determinar la forma en que entendían esta noción, sus representaciones y sus aplicaciones. El cuestionario 2 se aplicó a sus profesores y constaba de las mismas tareas del cuestionario 1, salvo en sus indicaciones. El cuestionario 3 se aplicó a los estudiantes y tiene dos partes: la primera parte, que consta de las mismas tareas del cuestionario 1, para identificar si los sujetos muestran evolución o cambios en las concepciones del concepto de límite de una función y una segunda parte, que consta de tres tareas nuevas de desempeño, para determinar los razonamientos empleados y el vínculo del concepto de límite con los conceptos de continuidad y derivación. El cuestionario 4 se aplicó a los profesores y es una adaptación del cuestionario 3 en donde se incluyen únicamente las tres tareas de desempeño. El propósito de los cuestionarios 2 y 4 administrados a los docentes de los grupos, es identificar las similitudes y diferencias que podrían existir entre el significado que expresan los estudiantes para el concepto de límite con el que les brindaba su profesor.

Descripción de las tareas del cuestionario 1 y expectativas de respuesta de los estudiantes para cada una de ellas

En la *tarea 1* denominada *definición del límite* se solicitó a los estudiantes que escribieran la definición que les había dado su profesor, se les sugirió que la transcribieran de su cuaderno para que fuera lo más fiel posible. Dado que no se utiliza un libro de texto oficial, esperábamos diferentes propuestas de definición. En la *tarea 2* llamada *interpretación de la definición* se solicitó a los estudiantes una explicación con sus propias palabras del significado de la definición de límite considerada en la tarea 1; con esto se pretendía conocer, en términos generales, como entendían dicho concepto y los aspectos o características que resaltaban. En la *tarea 3* denominada *representaciones* se les solicitó que realizaran dibujos, esquemas, figuras o lo que consideraran pertinente para representar la definición de límite de la tarea 1 para determinar qué elementos resaltaban. En la *tarea 4* llamada *aplicaciones* se les pidió que mencionaran algunas aplicaciones que podrían tener los límites; la pregunta era abierta y por lo tanto se esperaba que los estudiantes indicaran aplicaciones en diferentes áreas o contextos no necesariamente matemáticos. Finalmente, en la *tarea 5* llamada *significado de la palabra límite fuera de la matemática* se les indicó que escribieran otros significados, fuera del matemático, de la palabra límite, para esto podían usar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que consideraran necesario; con esta tarea se pretendía conocer cuáles eran los significados que le atribuían los estudiantes a la palabra límite fuera del contexto matemático.

Recolección de la información
La información se ha recolectado en dos fases con estudiantes del curso MAT 002 Cálculo I durante el primer

semestre del 2018 en 15 grupos de 35 estudiantes en promedio, de la Universidad Nacional de Costa Rica y sus respectivos profesores. Se aplicaron en total cuatro cuestionarios de respuesta abierta; en la *fase 1 (durante la enseñanza del límite)*, dos de ellos, el primero a los 421 estudiantes que asistieron a clases y el segundo a los 12 docentes de los respectivos grupos, tres de ellos tenían dos grupos a cargo; en la *fase 2 (posterior a la enseñanza del límite)*, los restantes dos cuestionarios, el tercero a los 256 estudiantes que asistieron a clases y el cuarto a los 12 docentes de cada uno de los grupos.

Sujetos de investigación

Los sujetos de esta investigación son los 421 estudiantes de la fase 1 y los 256 estudiantes de la fase 2. Estaban matriculados en las carreras de Biología, Cartografía Digital, Enseñanza de las Ciencias, Economía, Administración, Enseñanza de la Matemática, Comercio y Negocio Internacionales, Ingeniería en Química Industrial, Ingeniería en Gestión Ambiental, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería en Ciencias Forestales, Ingeniería en Topografía Catastro y Geodesia, Ingeniería en Bioprocesos Industriales. Además, no tenían ninguna formación previa en el tema de límites, debido a que este tema no se estudia en la educación secundaria de Costa Rica ni en el curso MAT 001 Matemática General (curso previo a cálculo I para algunas carreras) que aborda los contenidos de álgebra básica, ecuaciones e inecuaciones lineales, elementos básicos de geometría analítica, funciones reales de variable real y trigonometría básica.

Método para el análisis de la información

La información de los cuestionarios se analizará con base en el análisis de contenido, que posibilita la codificación, la categorización, la comparación y la conclusión en instrumentos de respuesta abierta (Cohen, Manion, y Morrison, 2007). Se usaron las categorías de manera inductiva y deductiva, para cada una de las tareas relacionadas con la concepción del límite, en el caso de las deductivas se utilizaron las planteadas por Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro (2013). Asimismo, para el análisis de las tareas de desempeño que involucran al límite, la continuidad y la derivabilidad, se propondrán categorías a priori con base en la revisión de literatura y se determinarán si existen categorías emergentes. De ser necesario, se hará uso de alguna técnica estadística de comparación que permita determinar semejanzas y diferencias entre características de grupos.

Resultados

Al ser una investigación en curso, se presenta una síntesis de los resultados preliminares de la muestra de 38 estudiantes de las carreras de Biología e Ingeniería en Química Industrial; sobre el significado que le atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto. Los resultados fueron obtenidos de la aplicación del cuestionario 1 y están organizados por las 5 tareas matemáticas que lo componen.

La tarea 1 tuvo un rol importante para la consecución de las tareas 2, 3 4 y 5 del cuestionario 1. Concretamente, se tuvo que, de los 38 sujetos de investigación, 22 (el 58%) escribieron una definición completa e informal dada por el profesor, un estudiante la escribió incompleta e informal, 15 estudiantes (el 39%) no anotaron ninguna definición y ningún estudiante transcribió una definición formal. A modo de ejemplo, se presenta la definición escrita por el sujeto de investigación EBM0125:

> Sean f una función de variable real, $a, L \epsilon \mathbb{R}$. Se dice que el límite de f en , a es L sí y solo sí cada vez que las preimágenes de f son cercanas a a, entonces las correspondientes imágenes son cercanas a L. Simbólicamente se escribe
> $\lim_{x \to a} f(x) = L.$

Nótese que el sujeto EBM0125 escribió la definición de límite de una función en un punto que les dio su profesor, de forma completa e informal (en nuestro estudio la entendemos como informal, porque no usa la definición convencional $\varepsilon - \delta$).

En la tarea 2 se tiene que para la definición del límite finito de una función en un punto, de los 38 estudiantes: 28 (el 74%) señalaron el límite como un *objeto*; 29 (el 76%) distinguieron el límite como un *proceso*; 10 (el 26%) refirieron en su definición a las *variables x e y*; 6 (el 16%) resaltaron *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función;* 12 (el 32%) resaltaron *coordinación entre ambas variables*; 13 (el 34%) evidenciaron *símbolos matemáticos y notaciones;* 6 (el 16%), refirieron a un *sistema de representación distinto al numérico o simbólico;* 7 (el 18%), mostraron la *vinculación del límite con la imagen*; 13 (el 34%) evidenciaron la categoría *términos;* 12 (el 32%) expresaron *condiciones de lateralidad y doble convergencia*, 3 (el 8%), destacaron *propiedades matemáticas*, y 8 (el 21%) mostraron *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*. A modo de ejemplo, se presenta la definición escrita por el sujeto de investigación EBH0309:

> Para una función real de variable real, cuando se vayan acercando los números a una preimagen, se van acercando a una imagen, esta imagen es el límite si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen.

Este sujeto evidencia la presencia de la categoría "referencia a las variables" pues aludió a la variable independiente como *preimagen* y a la variable dependiente como *imagen*, también muestra la categoría "coordinación entre las variables *x* e *y*" pues se evidencia convergencia de la variable dependiente en relación con la convergencia de la variable independiente, evidencia la categoría "límite como proceso" debido a que alude a nociones dinámicas como *cuando se vayan acercando los números*, muestra la categoría "límite como objeto" cuando alude al límite como algo fijo y estático (imagen), muestra la categoría "vinculación entre el límite y la imagen" debido a que relaciona el límite con la imagen y finalmente, muestra la categoría "condiciones de lateralidad y doble convergencia" pues indica que *si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen.*

En la tarea 3 para la representación del límite finito de una función en un punto, de los 38 sujetos: 5 (el 13%) señalaron el límite como un *objeto*; 16 (el 42%) distinguieron el límite como un *proceso*; 6 (el 16 %) mostraron *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función;* 15 (el 39%) resaltaron *coordinación entre ambas variables*; 29 (el 76%) evidenciaron *símbolos matemáticos y notaciones;* 11 (el 29%) mostraron la *vinculación del límite con la imagen*; 11 (el 29%) mostraron *condiciones de lateralidad y doble convergencia*, 15 (el 39%) evidenciaron *propiedades matemáticas*, 5 (el 13%) hicieron una *tabla de valores*, y 3 (el 8%) evidenciaron en la representación, *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*. A modo de ejemplo, se presenta la representación realizada por el sujeto de investigación EBM1313.

x	f(x)
2	-6
1.5	-3.75
1.1	-2.31
1.01	-2.0301

$\downarrow$ -2

x	f(x)
0	0
0.5	-0.75
0.9	-1.71
0.99	-1.97

$\downarrow$ -2

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{1 - x} = -2$$

Figura 1. Representación de EBM1313.

Nótese que el sujeto EBM1313 muestra la categoría "tabla de valores" debido a como organiza los números, evidencia la categoría "límite como objeto" pues indica que el valor es *-2*, exhibe la categoría "límite como proceso" ya que refiere al límite de manera procesual a modo de aproximaciones tanto para la variable independiente como para la dependiente, presenta la categoría "coordinación entre ambas variables" debido a que se evidencia convergencia de $f(x)$ en relación con la convergencia de x, expone la categoría "símbolos matemáticos y notaciones" porque usa números y letras para representar las nociones y finalmente, muestra la categoría "condiciones de lateralidad y doble convergencia" pues evidencia que tanto por izquierda como por derecha de *1* el límite debe ser *-2.*

En la tarea 4 sobre las aplicaciones del límite, de los 38 estudiantes: solo 13 sujetos (el 34%) indicaron aplicaciones. Específicamente, 4 indicaron como aplicaciones *gráficas matemáticas,* 3 *estadísticas* y 2 *economía*. Las aplicaciones denominadas *astronomía, ingeniería, física, arquitectura, convergencia de una función, concepto de derivada, industria y medicina* fueron mencionadas una vez por un sujeto, no necesariamente el mismo. A modo de ejemplo, se presenta la respuesta brindada por el sujeto de investigación EBM0927:

Para estadísticas o gráficas matemáticas.

Se puede observar en el ejemplo anterior la generalidad de las aplicaciones mencionadas.
En la tarea 5 para los significados de la palabra límite fuera de la matemática de los 38 sujetos: 37 (el 97%) brindaron otro significado del límite fuera de la matemática. Puntualmente, 16 (el 42%) aludieron al límite como *barrera*, 11 (el 29%), refirieron al límite como *valor extremo*, 9 (el 24%) mencionaron el límite como *frontera*, 5 (el 13%) citaron el límite como una noción *no alcanzable o no rebasable*, 4 (el 11%) como un *impedimento*, 3 (el 8%) hicieron referencia al límite como la noción de *fin*, y 1 (el 3%) aludió al límite como una noción *alcanzable*, al igual que 1 (el 3%) lo indicó como la noción de *hueco.*
A modo de ejemplo, se presenta la respuesta brindada por el sujeto de investigación EQH0228:

Un tope. Algo que no nos permite seguir. Algo que demarca una división.

Se percibe como este sujeto alude al límite como barrera y como frontera.
Los resultados preliminares de nuestro estudio están estrechamente vinculados con el marco teórico, debido a que en la tarea 2 los sujetos debían explicar con sus propias palabras la definición de límite, poniendo de manifiesto concepciones, propiedades y conceptos dando lugar a la *estructura conceptual*, en la tarea 3 los sujetos debían representar el concepto de límite, para lo que usaron signos, símbolos, notaciones y gráficas, de esta manera se evidencian *los sistemas de representación* y finalmente, en las tareas 4 y 5 debían indicar que aplicaciones tenían los límites y el significado de la palabra límite fuera de la matemática, donde resaltan *los sentidos y modos de uso*. Estos tres aspectos nos informan del significado que tienen los sujetos de investigación sobre el concepto de límite.

Conclusiones

Esta primera aproximación al tema ha permitido detectar aspectos sobre los significados atribuidos por una parte de los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial sobre el concepto de límite de una función en un punto durante su enseñanza. Entre las principales conclusiones de este trabajo se resaltan la concepción dual objeto/proceso, la coordinación entre las variables independiente y dependiente, las condiciones de lateralidad y doble convergencia que atribuyeron los estudiantes al límite. La representación gráfica fue la más utilizada, y los sentidos que atribuían al límite fuera de la matemática eran en su mayoría *valor extremo*, *barrera*, *noción no alcanzable o no rebasable*, *frontera*, y en menor medida, *fin*, *alcanzable, impedimento* y *hueco*.

Consideramos que este trabajo constituye un aporte a la investigación en la Didáctica del Análisis Matemático, específicamente al Pensamiento Matemático Avanzado, en la construcción de instrumentos y categorías de análisis para el estudio de los significados del concepto de límite que le atribuyen estudiantes universitarios en cursos de cálculo diferencial. Asimismo, los instrumentos, las categorías de análisis y la metodología empleada en esta investigación podrían servir de insumo para realizar investigaciones sobre el estudio de los significados de otros conceptos del Análisis Matemático.

Por otra parte, también hace una contribución a la enseñanza del concepto de límite mediante la reflexión sobre los significados que tienen los estudiantes universitarios de dicho concepto, lo que puede orientar en el planteamiento de estrategias metodológicas de enseñanza que consideren estos significados y de este modo se favorezca su aprendizaje en los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X* (2), 135- 149.

Azcárate C., Camacho-Machín, M., González M. T. y Moreno, M. (Coords.) (2015). *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, España: Universidad de la Laguna.

Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10*, 119-135.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67-82.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145- 168.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(2), 189-209.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Torner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus.* Springer.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico,L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (sixth edition). London: Routledge.

Contreras, A. y García, M. (2015). Investigaciones sobre límites. En M. Camacho-Machín, M. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, España: Universidad de La Laguna, servicio de publicaciones.

Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking,* (pp. 153–166). doi:10.1007/0-306-47203-1_10

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-130.

Fernández-Plaza, J. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103–118). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Kaput, J. (1987). Representations Systems and Mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kidron, I. (2011). Constructing knwledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(6), 1261-1279.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. *Encyclopedia of mathematics education*. (pp. 69-75). Dordrecht: Springer. Doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Kidron, I., & Tall, D. (2014). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics, 88,* 183–199.

Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119–137). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

OCDE (2012). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias.* Madrid: Santillana.

Rico, L. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.) *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria.* (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (1), 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (33), 11–27.

Rico, L. (2016a). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85–100). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L. (2016b). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153–174). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas.* San José, Costa Rica: EUNED.

Ruiz-Hidalgo, J. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–151). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike, *The Journal of Mathematical Behavior, 7*(4), 765-790.

Tall D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.

Tall, D., & Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit, and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 97–124.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN E INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE NIVEL SUPERIOR

DIFFICULTIES IN THE CONSTRUCTION AND INTERPRETATION OF GRAPHS OF FUNCTIONS IN HIGHER EDUCATION STUDENTS

Itzel González Rodríguez, José David Zaldívar Rojas, Silvia Carmen Morelos Escobar
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila (México)
igrod1995@gmail.com, david.zaldivar@uadec.edu.mx, silvia.morelos@gmail.com

Resumen

En este artículo se presenta una investigación de nivel licenciatura sobre la importancia de las gráficas de funciones dentro del currículo escolar y para la explicación dentro del concepto de función, así como el desempeño de estudiantes de nivel superior en dos de nueve tareas de construcción e interpretación de gráficas de funciones de nivel secundaria, y modificadas por nosotros. Se evidencia las dificultades presentes en los estudiantes al momento de pasar de una representación verbal a una gráfica: la confusión de la trayectoria de una situación descrita gráficamente como la imagen de la situación; la discretización de variables continuas y, preferencia por la linealidad al momento de construir una gráfica que requiere de intervalos cóncavos. Consideramos que se requiere centrar la atención en dichos resultados ya que estudiantes de nivel superior obtuvieron resultados similares a estudiantes de nivel secundaria, lo cual puede decirnos que hay un estancamiento en el aprendizaje de las matemáticas, especialmente con el concepto de función.

Palabras clave: construcción, interpretación, gráficas, dificultades, representación

Abstract

This paper presents a research, at first-degree level, into the importance of graphs of functions in the school curriculum and for the explanation within the concept of function, as well as higher education students' performance in two of nine tasks of construction and interpretation of function graphs of the secondary level, which were modified by us. Students' difficulties when moving from a verbal representation to a graph are evident: the misinterpretation of the trajectory of a situation graphically described as the image of the situation; the discretization of continuous variables; and preference for linearity at the moment of constructing a graph that requires concave intervals. We believe that there is a need to focus attention on these outcomes, as higher education students achieved results similar to those of high school students, what shows that there is an impasse in mathematics learning, especially with the concept of function.

Key words: construction, interpretation, graphs, difficulties, representation

Introducción

Las matemáticas pueden ser accesibles para cualquier persona, sin embargo, su comprensión puede llegar a ser compleja a comparación de otras ciencias, ya que se utilizan representaciones, que uno no puede tocar, oler o probar. De la misma manera, hay que ser conscientes que los números tienen diversas representaciones, por ejemplo, un número decimal también se puede representar como una fracción; un número se puede representar como un límite de una sucesión o un símbolo sobre un papel; una ecuación lineal puede verse como una recta (Acuña, 2001).

Ahora bien, la noción de función es una pieza fundamental para compartir y expresar una gran cantidad de información de manera concreta. Deulofeu (1991), menciona en su trabajo que, en el lenguaje, la falta de significación puede ser un problema para el desarrollo o entendimiento de un concepto. Este mismo problema se presenta en el lenguaje matemático, porque a un concepto se le pueden asociar más de una idea o representación, tal como ocurre con el concepto de función, que tiene más de una representación: tabular, algebraica, lenguaje verbal, gráfica y de manera simbólica. Sin embargo, la noción cambia dependiendo del contexto en el que se aplica. Una definición que da Sierpinska (1992) del concepto de función es que existe una terna (X, Y, f), donde "X" y "Y" son conjuntos y f es el subconjunto "$X \times Y$" tal que si (x, y) pertenece a f ,y (x, y') pertenece a f ,entonces $y = y'$. El problema es entender esta definición, especialmente, para estudiantes que no han desarrollado un pensamiento matemático abstracto.

Tradicionalmente, las gráficas cartesianas son pieza clave dentro del currículum para el entendimiento del concepto de función, además de que permiten trabajar con una gran cantidad de variables y visualizar patrones. Sin embargo, la centración unidireccional en la estrategia ecuación-tabla-gráfica, y el excesivo tratamiento algebraico provoca en los estudiantes importantes dificultades en la lectura, interpretación y construcción de gráficas, aun cuando en otras disciplinas las gráficas son pieza clave para interpretar resultados (Zaldívar, 2016). En esta forma para encontrar gráficas de ecuaciones, se le presentan al estudiante muy pocas oportunidades donde tenga que interpretar información gráfica o trabajar con información gráfica para resolver problemas. No se le permite anticipar el tipo de variación que se espera; ya que carece de escalas, datos, determinación de los nombres de los ejes (García y Perales, 2007). Y lo más importante: el estudiante no identifica que la expresión algebraica (ecuación) y la gráfica son representaciones de la misma situación funcional (Bell y Janvier, 1981; Deulofeo, 1991; Acuña, 2001).

Planteamiento del problema

El trabajo de Leinhardt, et al (1990), fue esencial en nuestra revisión, no sólo porque gran parte de nuestras referencias lo citan, también por su estructuración y organización que realizaron sobre las dificultades reportadas con respecto a las gráficas de funciones en la literatura, y se complementa con trabajos de Bell y Janvier (1981), Sierpinska (1991), Bowen y Roth (1998), Dolores, (2004), García y Perales (2007), Zaldívar (2016; 2017). Entre las dificultades que reporta Leinhardt con respecto a la interpretación y construcción de gráficas son: interpretación icónica, cuando el estudiante toma la gráfica de una situación como una imagen; la confusión de la pendiente con la altura, discretización de variables continuas, donde se colocan puntos dentro del plano cartesiano o de los ejes, cuando no es necesario; preferencia por la linealidad, que ocurre porque para el estudiante es más fácil recurrir a intervalos rectos que a intervalos cóncavos, y como la dificultad de identificar las variables, quién es la variable independiente y dependiente, entre otros, lo cual nos da indicios de que hay conceptos matemáticos que todavía no son claros para los estudiantes.

De acuerdo con nuestra revisión bibliográfica sobre la importancia de las representaciones gráficas de una función es que se propone la siguiente pregunta de investigación:
¿Qué dificultades presentan los estudiantes de nuevo ingreso de una carrera en Ingeniería relativas a tareas de construcción e interpretación de gráficas cartesianas?

El objetivo general de esta investigación es evidenciar la necesidad de contar con cursos donde se reflexione y se centre la atención sobre las gráficas de funciones, para así optimizar el avance en el aprendizaje. Para ello, se propone una investigación cuyo objetivo específico es analizar qué dificultades presentan estudiantes de nuevo ingreso que aún no inician con Calculo 1 en la universidad, con respecto a tareas de interpretación y construcción de gráficas cartesianas con la intención de contar con un sustento adecuado para reflexionar y poner en discusión aspectos de las asignaturas que actualmente se imparten en dicha facultad en los primeros semestres de las carreras presentes en la facultad (como la muestra fue tomada de esta institución), se toma en consideración de que una adecuada ubicación de cursos iniciales que pudieran redituar en la comprensión del tema de las funciones y sus gráficas permitiría un desarrollo conceptual progresivo en los estudiantes de manera que posiblemente se impactaría en los índices de deserción y reprobación escolar, en este caso, dentro de la Facultad de Ciencias Físico Matemática de la Universidad Autónoma de Coahuila.

Marco conceptual

Las tareas de funciones, gráficas de funciones y graficación se divide en dos categorías principales: *interpretación* y *construcción* (Leinhardt et al., 1990). La Interpretación se refiere obtener el sentido de una gráfica o situación, el encontrar relación entre dos variables, y su patrón de variación conjunta. Es el darle sentido a la gráfica, ya sea de una ecuación o de una situación. Su enfoque puede ser desde atender punto a punto, intervalos de puntos, hasta la lectura de toda la gráfica. La interpretación, en su forma global, es el distinguir las características importantes, es decir, los intervalos de aumento o disminución, puntos máximos y mínimos. Aquí es donde entra la interpretación cualitativa, que es el entender la relación funcional de las variables de la gráfica de la función. Como nos dicen Leinhardt, et al. (1990) se relacionan frecuentemente con las características globales. El saber interpretar una gráfica es una herramienta importante para desarrollar en los estudiantes, ya que los aspectos visuales son importantes para el entendimiento del concepto de función (Yavuz, 2010).

Por otro lado, de acuerdo con el trabajo de Leinhardt, et al. (1990), la Construcción se refiere a generar algo nuevo a partir de datos. Está relacionada a predecir o detectar patrones, un ejemplo de ello sería el comportamiento de un fenómeno. Implica poner nombre a los ejes de la gráfica, títulos y etiquetas, valores numéricos, así como una gráfica a partir de puntos, construir puntos dados ciertos datos y también el escribir la ecuación de acuerdo con la gráfica plasmada. Esta última acción es muy poco frecuente en el aula de clases, ya que no sólo requiere de la construcción, sino también de la interpretación.

Roth y Bowen (1998) confirman que uno de los puntos críticos dentro de las dificultades en el área de ciencias es en la de interpretación y construcción de gráficas de funciones en todos los niveles educativos y es impresionante que aún se encuentren en estudiantes o profesionistas de grados superiores. Muchos alumnos conocen los gráficos, las expresiones algebraicas; incluso pueden manipularlas, pero siguen siendo incapaces de interpretar las características globales de la información contenida en ellas (Swan, 1985; Bell y Janvier, 1981). Por lo tanto, no logran la conversión de gráfica a ecuación y viceversa.

Aspectos metodológicos

Con la intención de responder la pregunta de investigación anteriormente planteada, se consideró una investigación de corte cualitativo de las respuestas de estudiantes de un grupo de 41 alumnos de primer semestre, que aún no cursaban el tema de funciones en la materia Cálculo 1, de la Carrera de Ingeniería Física, de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Coahuila. Para la toma de datos sobre las dificultades que presentaban los estudiantes del grupo anteriormente descrito, se diseñó una prueba experimental que involucraba 9 tareas, de las cuales sólo se mencionarán 2 en el presente manuscrito: la Tarea 2.1: “El auto de carreras”, donde se involucra la interpretación y construcción de un gráfico; y la Tarea 2.4: “Llenado de recipientes II”, que involucra una construcción. Cabe mencionar que para el diseño de estas tareas se tomaron en consideración algunas de los ejercicios propuestos en Swan (1985) y Leinhardt, et al (1990). Las tareas no fueron tomadas de manera literal, sino que se realizaron algunas adecuaciones de contexto o del tipo de fenómeno que atendían, las cuales se presentan de la siguiente forma:

Tarea 2.1: El auto de carreras

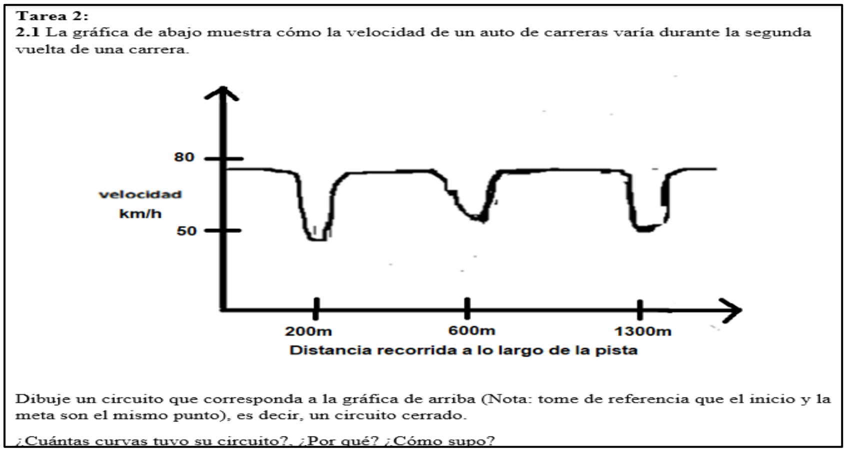


Figura 1. *Tarea 2.1: El auto de carreras.*

La tarea 2.1 es de interpretación, porque requiere reconocer las características que presenta la gráfica del recorrido de un auto de carrera (una gráfica de situación), y con ello, dibujar el circuito que corresponde.

Tarea 2.4: Llenado de recipientes II

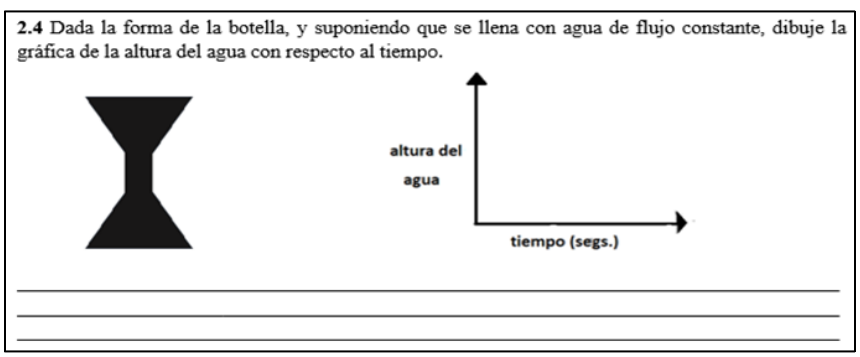


Figura 2. *Tarea 2.4: Llenado de recipientes II.*

La tarea es de construcción, hay que bosquejar la gráfica que corresponde a la situación, en este caso es una botella que tiene forma de vasos en los extremos y en la parte central, un cilindro.

Discusión de resultados

En el trabajo de Leinhardt et al. (1990) se organizan las dificultades en tareas de interpretación y de construcción de gráficas cartesianas rescatadas de otros trabajos (Bell y Janvier,1981; Sierpinska, 1991; Deulofeo, 1991; Bowen y Roth, 1998; Acuña, 2001; Dolores, 2004; García y Perales, 2007; Yavuz, 2010; Zaldívar, 2016, 2017) de la siguiente manera:

Dificultades en la tarea de Construcción: escalas de los ejes, discretización de variables continuas, identificación de variables, nombre de los ejes.

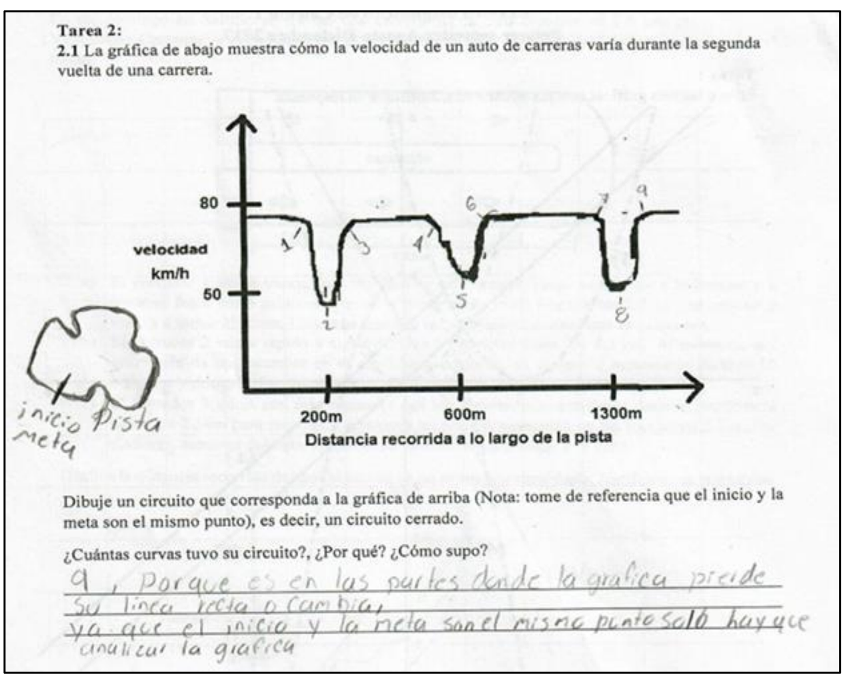
Dificultades en la tarea de Interpretación: interpretación icónica, confusión pendiente/altura, confusión intervalo/punto.

En base a las dificultades que se encuentran en la literatura, se dio la tarea de analizar cuáles están presentes en los estudiantes de nivel superior en cada tarea, por lo que a continuación se expondrá en cada tarea del instrumento aplicado, el análisis que se llevó a cabo y por ende, la dificultad que le corresponde.

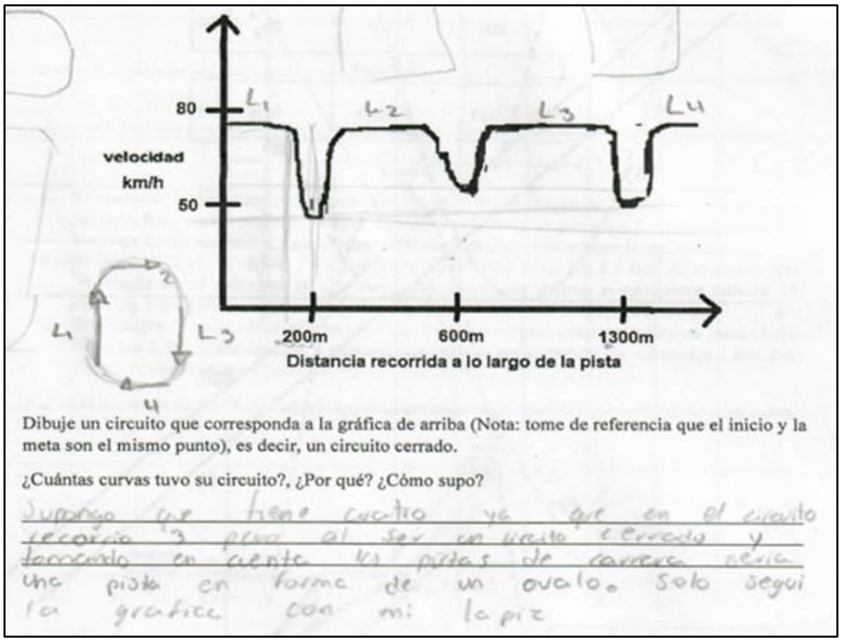
Sobre la Tarea 2.1: El auto de carreras

El objetivo era reconocer e interpretar las variaciones que presenta la gráfica de distancia vs tiempo del recorrido de un auto en una carrera y construir el posible circuito recorrido. (Describir la relación funcional utilizando palabras e imágenes).
Se tomaron tres aspectos a evaluar: el dibujo del circuito, cuántas curvas se identifican y la justificación del circuito propuesto. Cabe mencionar que esta fue la tarea donde los estudiantes presentaron mayor porcentaje de dificultades, creemos que la razón principal de ello es porque esta tarea involucra una gráfica de una situación y se requiere de su interpretación para el poder dibujar su circuito correspondiente.

A continuación, se muestran las respuestas de un par de estudiantes que al respecto de la lectura de la gráfica, presentan una *Interpretación icónica* (ver figura 3).



(a)



(b)

Figura 3. Respuestas de dos estudiantes en la tarea 2.1: Interpretación icónica.

Un alumno (Figura 3a) interpretó la imagen de la gráfica tal cuál fue la trayectoria recorrida. Tomó las curvas de la gráfica como las curvas del circuito recorrido. Escribió que las curvas son los momentos donde el trayecto deja de ser recto, por lo que identificó 9 "curvas", por lo tanto, su circuito lo dibujó como si tomara el inicio del recorrido en la gráfica y lo uniera con el final del recorrido en la gráfica. Otro alumno (figura 3b) leyó los tramos de velocidad constante en la gráfica como los lados del circuito. Son tres tramos de velocidad constante tomando en cuenta que el inicio y el fin del circuito es el mismo punto, pero él hizo caso omiso, por lo que contó 4 tramos, por lo tanto, dibujó cuatro lados constantes n el circuito, dicho de otra manera, el circuito tiene 4 curvas, por lo que el dibujo tiene una forma de rectángulo. Sin embargo, el estudiante reconoce que hay 3, pero no toma en consideración que era la segunda vuelta.

Sobre la Tarea 2.4: Llenado de recipientes II

El objetivo de esta tarea era bosquejar la gráfica que corresponda al llenado de agua del recipiente dado tomando en cuenta los factores de la forma del recipiente que se presentan. En este caso, se puede observar que algunas dificultades están relacionadas a la *preferencia por la linealidad debido al uso de la discretización de la situación.*

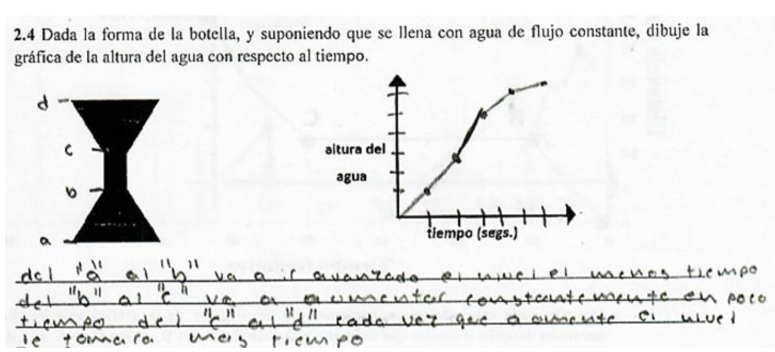


Figura 4. Respuesta de un estudiante en la tarea 2.4: Tendencia por la linealidad.

El estudiante de la figura 4, dividió al recipiente en cuatro partes para graficar por intervalos. Una manera en la que se apoyó para bosquejar el llenado de agua del recipiente fue el agregar escalas a los ejes. Marcó puntos dentro de la gráfica, esto quiere decir, que marcaron que en un segundo hay cierta cantidad entera de altura de agua, cuando nuestro problema es de datos continuos.

En esta tarea, nuevamente se presenta la *Interpretación icónica* (ver figura 5).

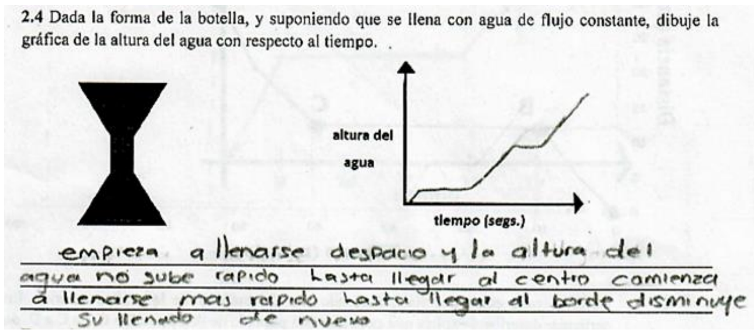


Figura 5. Respuesta de un estudiante en la tarea 2.4: Interpretación icónica.

Este estudiante dibujo la gráfica del llenado del recipiente con agua constante de la siguiente manera: identifica que el recipiente inicia llenándose de manera lenta, sin embargo, no visualiza que la altura del agua dentro del recipiente aumenta, ya que confunde el crecimiento de la altura del agua con la dimensión de la base inferior del recipiente, por lo que dibuja en la gráfica un intervalo horizontal, después observa que en la zona media del recipiente es donde avanza más rápido, dibuja un intervalo de crecimiento constante, cuando en ese intervalo, la pendiente de la gráfica debe ser mayor. Para el bosquejo de la base superior del recipiente, ocurrió la misma situación que con la base inferior. Este estudiante, dibujó en la gráfica como un pequeño tramo recto, la parte donde cambian las dimensiones radicalmente de la base superior (del tramo vertical del recipiente con la parte superior del mismo, si se observa, tiene una forma de trapecio invertido), y al final bosqueja que la altura del agua aumenta constantemente, cuando la pendiente en ese intervalo debe ser menor. Sin embargo, de manera escrita es capaz de explicar correctamente la variación entre las variables, no obstante, a que su gráfica es incorrecta.

En otras ocasiones, se presentó que una de las dificultades de los estudiantes radicaba en considerar la *gráfica como forma del recipiente.*

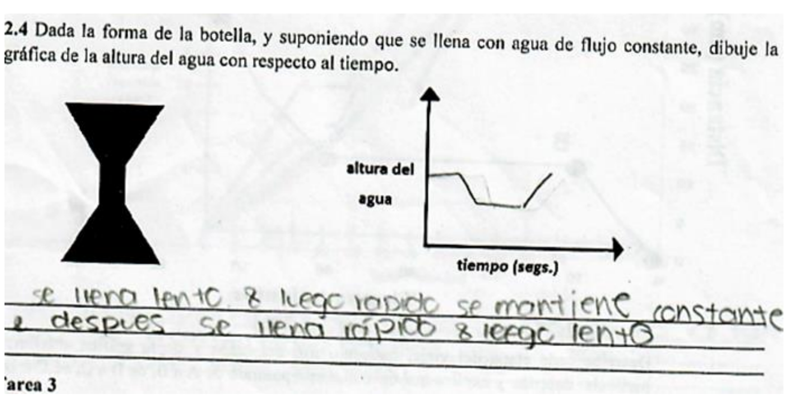


Figura 6. Respuesta de un estudiante en la tarea 2.4: La altura como forma del recipiente.

Aquí lo único que se puede visualizar es similar al caso anterior que los tramos donde la altura de agua avanza lento, que se marcan como tramos rectos horizontales, sin embargo, el estudiante marca que, en el tramo más delgado del recipiente, pierde altura el agua, no sé si deba a que leyó como que tiene poca capacidad de agua, por lo que altura baja. Sin embargo, su explicación verbal si es correcta, pero su gráfica se parece a la forma del recipiente en forma horizontal.

Comentarios finales

Como se ha comprobado la existencia de las dificultades en la construcción e interpretación de gráficas de funciones, se menciona lo siguiente:
El 91% de los estudiantes que respondieron la tarea 2.1 reflejaron el mismo error: el dibujo del circuito del auto de carreras como la gráfica que describe el recorrido del auto de carreras, esto quiere decir que presentaron interpretación icónica. Gran parte no tuvo problema en responder que el circuito consta de tres curvas, pero al momento de pasar la información gráfica a un dibujo, tuvieron complicaciones para ello. Confundieron la trayectoria como la propia situación. Esto se puede explicar debido a que muchos libros enfocan su atención a gráficas y funciones abstractas más que a las gráficas de situaciones.

Continuando con los resultados de la tarea 2.4, el estudiante presentó una interpretación icónica, esto quiere decir que confunde la forma del recipiente como la gráfica del llenado de dicho recipiente. Otro concepto matemático que probablemente causa dificultades en este caso de análisis tiene que ver con la variación no lineal. Lo anterior provoca una preferencia por la linealidad, donde el estudiante debe de dibujar la gráfica del llenado del recipiente con intervalos cóncavos, al inicio de la gráfica y al final, que son los intervalos que corresponden a la base inferior y la base superior del recipiente. Como consecuencia, discretizan las variables cuando el problema que se presenta es continuo, y al momento de construir la gráfica correspondiente a la situación, dibuja puntos, para luego unirlos, lo que nos lleva a decir que algunos estudiantes tienen la idea de que una gráfica de función se construye a partir de algunos puntos unidos por segmentos de recta, cuando en realidad hay infinitos puntos en la gráfica de la función.

Hay que mencionar que se encontró un error que no se menciona en la literatura, pero podría verse como interpretación icónica, que ocurre cuando el estudiante confunde la pendiente de la gráfica del llenado del recipiente como la forma del propio recipiente. Lo interesante, es que el estudiante logra describir bien cómo varía la altura del agua dentro del recipiente, pero al momento de plasmarlo gráficamente, tiene complicaciones, podría decirse que hay dificultad para la visualización de la gráfica correspondiente, o más bien, dificultad para la identificación de las variables presentes, o incluso, el darles nombre a los ejes.

Estos resultados, consideramos que nos están mandando señales de que razonemos sobre qué es lo que esta pasando en el progreso de la enseñanza matemática entre el nivel secundaria y bachillerato, ya que los ejercicios que tomamos como referencias y modificamos para nuestro instrumento, los obtuvimos de libros y artículos que donde se aplicaron tareas de construcción e interpretación de gráficas a estudiantes de nivel secundaria, con resultados similares a los que obtuvimos. Dada las similitudes de nuestros resultados con los que encontraron los autores en sus trabajos, consideramos que se necesita potencializar las gráficas como herramientas, especialmente lo que nos puede otorgar el leer e interpretar gráficas, como apoyo cuando la abstracción no se ha desarrollada o está en desarrollo, especialmente con el concepto de función. Además, sería importante que se implementen actividades con un enfoque donde el estudiante identifique y describa el tipo de variación en cualquier contexto y lograr relacionarlo con una gráfica, con la finalidad de que se trabaje con la noción de variación y lograr pasar de una representación a otra (Bell y Janvier, 1981), para poner en práctica más el análisis de problemas y no la memorización.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. (2001). Conversión entre gráficas y ecuaciones a través de la descripción de semiplanos. *Educación Matemática, 13(3),* pp 75-92.

Alsina, C. Burgués, C., Fortuny J., Giménez, J. y Torra, M., (2013). Capítulo: Enseñar matemáticas. En el libro: Enseñar matemáticas. GRAÓ, Barcelona, pp 9-37.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa (RELIME), 19(1),* pp 15-40.

Backhoff, E., Vázquez, R., Baroja, J., Guevara, G. y Morán, Y. (2017). México en el proyecto TALIS-PISA: Un estudio exploratorio Importancia de las escuelas, directores, docentes y estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Bell, A. y Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics (FLM), 2(1),* pp 34-41.

Bowen, G. y Roth, W. (1998). Lecturing Graphing: What features of lectures contribute to student difficulties in learning to interpret graphs, *Research in Science Education,* 28*(1),* pp 77-90.

Deulofeu, J. (1991). El lenguaje de las gráficas cartesianas y su interpretación en la representación de situaciones discretas. *Comunicación, Lenguaje y Educación (CL&E),* pp 11-12, 77-86.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 7(3)*, pp 195-218.

García, J. y Perales, F. (2007) ¿Comprenden los estudiantes las gráficas cartesianas usadas en los textos de ciencias?*, Enseñanza de las ciencias, 25(1)*, pp 107–132.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function, *Journal of Mathematical Behavior (JMB), 17(1),* pp 123-134.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stain, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching*, Review of Educational Research, 60(1)*, pp 1-64.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy. Harel & Dubisnky,* pp 25-58.

Swan, M. (1985). *The language of functions and graphs. An examination module for secondary schools.* Join Matriculation Board, pp 6-240.

Yavuz, Í. (2010). What does a graphical representation mean for students at the beginning of function teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(4)*, pp 467-48.

Zaldívar, J. (2016). Usos de las gráficas, tecnología y visualización en el desarrollo del pensamiento matemático, *Boletín C+1, 1*(3*),* pp 3-6.

Zaldívar, J. (2017). Reflexiones en torno al uso de las gráficas en la enseñanza de las ciencias, *Tlahuizcalli, 3(9),* pp 13-24.

DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES PARA LA ARTICULACIÓN DE LOS DISTINTOS SIGNIFICADOS DE VARIABLE EN UN CURSO BÁSICO DE ESTADÍSTICA UNIVERSITARIA

STUDENTS' DIFFICULTIES FOR CONNECTING THE DIFFERENT MEANINGS OF VARIABLE IN A BASIC COURSE OF UNIVERSITY STATISTICS

Alvaro Cortínez, Armando Albert, Blanca Ruiz
Universidad de Tarapacá (Chile). Tecnológico de Monterrey (México)
acortinez@academicos.uta.cl, albert@tec.mx, bruiz@tec.mx

Resumen
La Estadística ocupa un lugar cada vez más importante en una sociedad que aumenta continuamente su producción de información cuantitativa. Sin embargo, su enseñanza presenta dificultades para alcanzar sus objetivos. Una de esas dificultades tiene que ver con un concepto clave para el planteamiento de modelos de solución a problemas: la variable. Los estudiantes se encuentran desde los primeros niveles de enseñanza hasta el universitario con el concepto de variable. Al llegar a un curso de Estadítica, la idea de variable toma nuevos significados vinculados a los datos y en probabilidad a una función. Este trabajo muestra un estudio exploratorio en estudiantes de ingeniería y medicina realizado a lo largo de su primer curso de estadística sobre sus distintas interpretaciones que le dan a la varible. Finalmente, se muestra que un concepto como el de variable, casi obvio en el discurso escolar, presenta, en realidad, una gran complejidad epistémica, didáctica y cognitiva que demanda ser atendida.

Palabras clave: enseñanza de la probabilidad y estadística, variable

Abstract
Statistics occupies a more and more relevant place in a society that continuously increases its production of quantitative information. However, its teaching presents difficulties to achieve its objectives. One of those difficulties has to do with a key concept for the approach of problem-solving models: the variable. The students meet the concept of variable from the first levels of education up to the university. When facing a Statistics course, the idea of variable takes new meanings linked to the data, and in probability, to a function. This paper shows an exploratory study on the different interpretations engineering and medical students give to the variable during their first statistics course. Finally, it is shown that a concept like that of variable, almost obvious in school discourse, actually presents, a great epistemic, didactic, and cognitive complexity that demands special attention.

Key words: probability and statistics teaching, variable

Introducción

Desde los primeros años de la enseñanza básica hasta el universitario, los estudiantes se encuentran con el concepto de *variable*, pero sus significados cambian según la disciplina abordada tal como el álgebra, el cálculo, la probabilidad o la estadística. Sin embargo, deben saber articular y diferenciar los distintos significados en el proceso de plantear un modelo de solución al problema por resolver. Por ejemplo, la *variable* en álgebra es un elemento que no tiene un valor fijo y que se vincula con otros elementos a través de relaciones de equivalencia. En cambio, en cálculo la *variable* está sujeta a relaciones de dependencia-independencia, así como a procesos de convergencia. En estadística se habla de variable estadística -vinculada a los datos- con su clasificación (cualitativa-cuantitativa, y sus escalas) y en probabilidad de variable aleatoria, muy distante de la variable algebraica o de cálculo, pues en realidad se trata de una función que asocia elementos del espacio muestral con números reales. Existen algunos estudios que abordan el problema didáctico de la variable tal como el de Ursini, Trigueros y Lozano (2000) donde, desde la perspectiva del álgebra, la variable ya presenta complejidad por sus distintos significados tales como ser una incógnita, un número general y ocupar un papel central en la relación funcional de dependencia – independencia. Sin embargo, según estos autores, los estudiantes de enseñanza media, entre 12 y 19 años, no adquieren la capacidad de interpretar, simbolizar y manipularla adecuadamente. Estudios más recientes como el de Herrera, Cuesta y Escalante (2016) obtienen resultados similares, añadiendo la dificultad de los estudiantes de no lograr asociar o aplicar el conocimiento que se tiene a las tareas propuestas debido al escaso nivel de razonamiento que no le permite procesar las relaciones entre conceptos. Por otra parte, Ruiz y Albert (2013) muestran una desvinculación en el discurso del aula y los libros de texto entre la variable estadística y la variable aleatoria, pero su tratamiento didáctico podría ayudar a los estudiantes universitarios a superar algunas dificultades de modelación estocástica a problemas vinculados con la realidad. Toda esta complejidad se ve reflejada en los cursos introductorios de Estadística del nivel universitario y, por esta razón se hace necesarios estudios que la aborden para esclarecerla. En este sentido, esta investigación busca aportar elementos descriptivos que profundicen el conocimiento del problema desde la perspectiva del estudiante con relación a su concepción de variable a lo largo de un curso introductorio de Estadística universitaria.

Marco teórico

El estudio se realiza desde la perspectiva del *pensamiento estadístico* iniciado por Mallows (1998) que vincula el pensamiento estadístico con la relación entre los datos y un problema de contexto real. Wild y Pfannkuch (1999) ubican el pensamiento estadístico en todo el proceso investigación desde la planeación para la toma de datos, pasando por un modelo estadístico o probabilístico, hasta la interpretación, de forma semejante a cómo lo haría un profesional de la estadística. Desde entonces esta perspectiva ha sido retomada por diferentes autores tales como Behar (2018) quien resalta la importancia del contexto para un pensamiento estadístico crítico. Por otra parte, el objeto didáctico de estudio es analizado desde una perspectiva multidimensional: *epistemológica*, de *enseñanza* y *cognitiva*.

Dimensión epistemológica

La variable aleatoria como tal, se comenzó a usar informalmente en el siglo XVII, en trabajos de Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre y Pierre Laplace. Fue Poisson, en 1937, en su trabajo *Recherches sur la Probabilitè des Jugements en Matiere Criminell et en Matiere Civile*, quien usó por primera vez la expresión variable aleatoria como una función. Posteriormente, Chebyshev (1846 y 1887) utilizó de manera más explícita las ideas de variable aleatoria y de función de densidad, nombrando a las variables aleatorias como cantidades y magnitudes. Liapunov (1900 y 1901) identificó las variables aleatorias y las enunció, trabajando con la función de probabilidad prácticamente como se hace hoy en día.

Formalmente, la variable aleatoria se puede definir de la siguiente forma (Cuadras 1999, citado por Ruiz y Albert, 2013):

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y R el cuerpo (o campo) de los números reales. Se dice que la aplicación:

$$\begin{aligned} \xi: \Omega &\rightarrow R \\ \omega &\rightarrow \xi(\omega) \in R \end{aligned}$$

que a cada suceso elemental hace corresponder un número real, es una variable aleatoria si para todo número real x, se verifica la relación:

$$A = \{\omega | \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

es decir, se verifica que A es un suceso.

Durante mucho tiempo la variable aleatoria fue vista como el resultado numérico de un experimento aleatorio (ξ(ω) = ω) y llamada simplemente variable y no vista como lo que es actualmente, una función. Esta es una dificultad epistemológica que también se presenta en los estudiantes (Ruiz, 2013).

Dimensión de enseñanza

El concepto de variable es abordado desde los inicios del sistema educativo y no siempre con el mismo éxito. Existen diversos estudios acerca de la variable y su comprensión, especialmente en las áreas de álgebra. La mayoría de ellos se basan en el Modelo 3uv (Ursini y Trigueros, 2006). Estas autoras consideran que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de tres usos de la variable: la incógnita específica, número general y relación funcional. Escalante y Cuesta (2012) realizan una experiencia con estudiantes universitarios, centrados en la comprensión de conceptos algebraicos y de variable en particular, llegando a la conclusión que la incomprensión del concepto, se mantiene igual desde la secundaria hasta la universidad; "los estudiantes continúan evitando cualquier acercamiento algebraico y retornan a procedimientos de carácter aritmético, en especial cuando el problema implica cierto nivel de razonamiento de las situaciones y los diferentes contextos en que se presenta la tarea" (p. 128). Por otra parte, cuando los estudiantes llegan a su primer curso de estadística universitaria se enfrentan no sólo con una variedad de significados no siempre triviales como variable de interés, variable de observación, variable discreta, variable continua, variable según la escala nominal, ordinal, de intervalo o de razón, sino con la complejidad de la variable estadística, variable aleatoria y el estadístico como una variable aleatoria muestral. Incluso, la definición de variable aleatoria es enseñada de diferentes formas: "Una variable aleatoria es una variable que toma valores numéricos determinados por el resultado de un experimento aleatorio" (Newbold, Carlson y Thorne, 2008, p. 146). "Cuando los valores obtenidos surgen como un resultado de factores aleatorios, de modo que no pueden ser predichos exactamente por adelantado, la variable se llama variable aleatoria" (Daniel y Cross, 2018, p.4). De lo anterior puede verse la necesidad de que la variable sea estudiada formalmente por la didáctica para construir propuestas más acordes con su complejidad. En muchos lugares de Latinoamérica, a la variable vinculada con el recuento de los datos, se le nombra "variable" sin el calificativo de "estadística". Esto ocasiona que en la enseñanza no se haga explícita la diferencia entre la variable aleatoria y estadística y por lo tanto, se confundan (Ruiz, 2013).

Dimensión cognitiva

Diversos estudios se han hecho sobre las dificultades que tienen los estudiantes sobre el concepto de variable en general. Tal es el caso de Escalante y Cuesta (2012). Su estudio muestra que, efectivamente, existen dificultades para realizar una lectura analítica de los enunciados verbales y serios obstáculos en el proceso de traducción de los lenguajes natural, aritmético y geométrico al lenguaje algebraico. Por su parte, también hay algunos reportes sobre las dificultades alrededor de la variable aleatoria como el problema de la transferencia de la propiedad de aleatoriedad a la variable dependiente a partir de variables independientes aleatorias (Ruiz, Albert y Batanero, 2006) y el tránsito entre la variable estadística que describe una distribución de los datos y la variable aleatoria como modelo de distribución de probabilidad (Ruiz y Albert, 2013).

Metodología

Con el propósito de ahondar en la dimensión cognitiva, este estudio busca explorar las nociones de variable en estudiantes de los primeros semestres de su carrera universitaria que están en su primer curso de Estadística. Esto se hará en dos grupos de estudiantes de diferente perfil: del área administrativa y de ciencias de la salud.

El contexto del estudio

El estudio se aplicó a dos grupos de estudiantes: Ingeniería Comercial y Medicina en una universidad del norte de Chile. Ambos grupos de estudiantes están cursando el segundo año de la carrera y tienen la asignatura de Estadística (Probabilidad y Estadística los primeros y Bioestadística los segundos). En el curso de Probabilidad y Estadística hay este año 45 estudiantes y en el de Bioestadística, 32 estudiantes. De ellos, 42 y 24 estudiantes, respectivamente, respondieron el cuestionario.

El instrumento

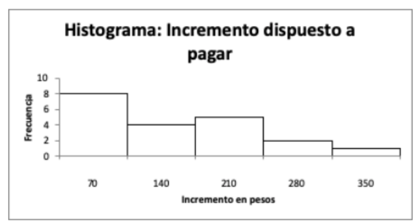
Se implementó un cuestionario (Figura 1) diseñado en dos partes: la primera, referida a sus nociones de variable desde una distribución de probabilidad familiar para ellos; la segunda, que a su vez consta de dos partes: indaga las nociones desde una perspectiva contextual y gráfica. Todos los estudiantes contaron con media hora para resolverlo de manera individual. El cuestionario se aplicó al final del semestre académico en donde se trataron los temas de variable estadística y aleatoria.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES

1. ¿Cuándo recuerda usted haber visto por primera vez el concepto de variable?
2. Dada la siguiente función de probabilidad, indique cuál es la variable y cuál es el parámetro:
$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$
3. "Es un valor fijo y desconocido que caracteriza al modelo de probabilidad". Esta es una versión de la definición de:
4. Dar un ejemplo de una variable cuantitativa discreta infinita.
5. Dar un ejemplo de una variable cuantitativa continua.
6. ¿Es lo mismo una variable matemática (por ejemplo en la ecuación de la recta) y una variable estadística (por ejemplo en la función de densidad)? Explique.

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

1. La Cámara de Comercio de la Región de Arica y Parinacota, por estudios hechos anteriormente, sabe que las mujeres adultas poseen en promedio 18 pares de zapatos. Una zapatería, Los tres García, duda de este resultado pues cree que en la actualidad el promedio es menor a 18 y se da a la tarea de verificarlo. Para eso hace un muestreo aleatorio con 50 mujeres adultas y se les pregunta cuántos pares de zapatos tienen. De la muestra resultó el promedio de 15 pares de zapatos con una desviación estándar de 5 pares.
¿Cuál es la variable de observación? Señale con una X la respuesta correcta en el paréntesis de la izquierda:
( ) Diseñar una estrategia exitosa.
( ) El excesivo número de zapatos que las mujeres adultas de Tarapacá tienen.
( ) Saber si el promedio actual de pares de zapatos por mujer adulta de Tarapacá es menor que en el pasado.
( ) El número de pares de zapatos por mujer adulta de Arica y Parinacota
( ) Otra: ____________________
2. Se estudia si se amplía un puente de la Ruta 5 Norte pero el Seremi de Obras públicas sostiene que no es necesario porque en promedio el flujo vehicular ha sido siempre de 30 autos por minuto en hora punta, lo que está dentro de la capacidad del puente. Un ingeniero está en desacuerdo con esta información y piensa que en realidad actualmente es mayor. Para verificarlo, él decide hacer un estudio de flujo vehicular y encuentra que en 30 mediciones resultó un promedio de 40 autos por minuto en hora punta. Hallar:
a) ¿Cuál es la variable de interés? ____________________
b) ¿Cuál sería la población relativa a de esta variable? ____________________
c) Indique el nombre del parámetro de interés en este caso________ y su valor _____
d) Indique el nombre del estadístico de interés en este caso____________ y su valor ____________
3. Un fabricante de pasta dental quiere saber cuánto están dispuestos a pagar adicionalmente sus clientes por su nuevo dentífrico. Su anterior pasta dental tenía un costo promedio de 2050 pesos. Para eso hace una encuesta con 20 personas elegidas al azar de entre sus clientes en varios supermercados del entorno y encuentra los siguientes resultados:
+180, +280, +70, +210, +280, +70, +35, +180, +35, +180,
+105, +350, +35, +105, +140, +180, +70, +70, +105, +35.
a) ¿Cuál es el problema en este caso?
b) ¿Cuál es la población?
c) ¿Cuál es la variable de observación?
d) Identifique un dato de la variable de observación
e) ¿Qué tipo de variable es? (cualitativa/cuantitativa discreta cuantitativa continua)
f) ¿A qué escala pertenecen los datos y por qué? (Nominal/Ordinal /Intervalo/Razón)
g) ¿Cuál información dada en el problema corresponde a un parámetro? Indique su nombre y su valor.
4. El histograma de los datos del problema anterior es el siguiente:



a) ¿Cuál es la variable de observación según el histograma?
b) Si se sabe que la frecuencia es de 4, a qué valor del incremento en pesos corresponde?
c) ¿Cuántas variables estadísticas están representadas en el gráfico?
5. Si la curva suave representa ahora a una función aproximada a la distribución de los datos, cuya área total bajo ella es 1, en este caso, ¿habría alguna diferencia entre la variable horizontal del histograma y la variable horizontal de la función? Explique.

Figura 1. Cuestionario implementado a estudiantes de Ingeniería comercial y Medicina.

Resultados

Primera Parte: Nociones generales

La *pregunta 1* fue *¿Cuándo recuerda usted haber visto por primera vez el concepto de variable?* Los resultados se muestran en la *Tabla 1* siguiente:

Tabla1. *Sobre cuándo recuerdan los estudiantes haber visto el concepto de variable*

Nivel	Ingeniería Comercial	Medicina
Enseñanza Básica	2 (4.8%)	3 (12.5%)
Enseñanza Media	25 (59.5%)	17 (70.8%)
Preparación Prueba de Selección Universitaria	2 (4.8%)	2 (8.3%)
Primer año Universidad	2 (4.8%)	0
Segundo año Universidad	11 (26.2%)	2 (8.3%)
Total	42	24

El concepto de *variable* está presente desde que los estudiantes se encuentran con álgebra en sus asignaturas de matemática de Enseñanza Básica. Sin embargo, en el cuestionario, los estudiantes la asocian más frecuentemente a Enseñanza Media (bachillerato). Y, más aún, algunos tienen la percepción de encontrarse por primera vez con este concepto en Segundo Año de la Universidad, especialmente los estudiantes de Ingeniería Comercial. Cabe señalar que ellos ya tuvieron 2 asignaturas de matemática en el nivel universitario, donde han conocido los elementos de álgebra y, en particular, de función.

Respecto a la *pregunta 2: Dada la siguiente función de probabilidad, indique cuál es la variable y cuál es el parámetro:*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Los resultados se muestran en la *Tabla 2* siguiente:

Tabla 2. *Sobre identificar de una función de probabilidad la variable y los parámetros*

Resultado	Ingeniería Comercial	Medicina
Respuesta Incorrecta	11 (26.2%)	2 (8.3%)
Acierta un elemento	5 (11.9%)	5 (20.8%)
Acierta dos elementos	11 (26.2%)	16 (66.7%)
Acierta todos los elementos	12 (28.6%)	0
No responde	3 (7.1%)	1 (4.2%)
Total	42	24

Como puede observarse, ningún estudiante de Medicina acertó a los tres elementos. Por su parte, hay un 26.2% de estudiantes de Ingeniería Comercial que respondieron de forma incorrecta. Entre las respuestas, muchos consideraron a $\boldsymbol{f(x) = P(X = x)}$ como la variable y a la función misma como el parámetro. En ambos grupos hubo personas que tienen una clara confusión acerca del papel que juega *n*, el tamaño de la muestra, considerándolo en algunos casos como una variable y en otros no identificándolo. En Figueroa y Aznar (2017) se propone situar a los estudiantes en problemas con contexto a fin de mejorar su apreciación sobre la variable, idea que se retoma en preguntas posteriores de este análisis.

Pregunta 3: Es un valor fijo y desconocido que caracteriza al modelo de probabilidad. Los resultados se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. *Sobre qué es un valor fijo y desconocido que caracteriza al modelo de probabilidad*

Resultado	Ingeniería Comercial	Medicina
Respuesta Incorrecta	25 (59.5%)	17 (70.8%)
Respuesta Correcta	2 (4.8%)	7 (29.2%)
No responde	15 (35.7%)	0
Total	42	24

El concepto de *parámetro* presenta aún más problemas que el de variable, esto concuerda con los resultados de Cortinez, Alamilla, Albert y Ríos (2015). En Ingeniería Comercial, sólo dos estudiantes identifican la definición clásica de parámetro, mientras que, en Medicina, son siete los que conocen esta definición. Entre las respuestas, se encuentran "variable aleatoria", "variable", "Poisson", "variable independiente", "función de densidad".

De las *preguntas 4 y 5* sobre *dar un ejemplo de una variable cuantitativa discreta infinita* y *dar un ejemplo de una variable cuantitativa continua*, los resultados se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. *Sobre dar ejemplos de variable cuantitativa discreta infinita y continua*

	Variable Cuantitativa discreta infinita		Variable cuantitativa continua	
Resultado	Ingeniería Comercial	Medicina	Ingeniería Comercial	Medicina
Incorrecto	12 (28.6%)	5 (20.8%)	9 (21.4%)	3 (12.5%)
Está la idea	5 (11.9%)	0	6 (14.3%)	6 (25.0%)
Es correcto	19 (45.2%)	19 (79.2%)	23 (54.8%)	15 (62.5%)
No responde	6 (14.3%)	0	4 (9.5%)	0
Total	42	24	42	42

Estudios previos muestran la complejidad conceptual y cognitiva de la variable como el caso del trabajo de Ruiz (2013) y, en este caso, aunque los estudiantes de Medicina presentan menos problemas a la hora de ejemplificar tipos de variables, se presentaron errores comunes en ambos grupos, no reportados antes, tales como el de dar como ejemplo de variable daban valores. Por ejemplo: "En el curso hay 50 alumnos; 30 son mujeres y 20 son hombres". Esto muestra, en efecto, la complejidad de la variable en su proceso de aprendizaje.

De la *pregunta 6*, *¿Es lo mismo una variable matemática (por ejemplo, en la ecuación de la recta) y una variable estadística (por ejemplo, en la función de densidad)? Explique,* se obtuvieron los siguientes resultados expresados en la Tabla 5.

Tabla 5. *Sobre si es lo mismo una variable matemática que una estadística*

Resultado	Ingeniería Comercial	Medicina
No	20 (47.6%)	22 (91.7%)
Sí	6 (14.3%)	1 (4.2%)
No responde	16 (38.1%)	1 (4.2%)
Total	42	24

Resultan muy interesantes las diversas respuestas que entregan los estudiantes. En general, tienden a considerar la variable matemática como fija, en sus palabras: "un valor exacto", mientras que la estadística la clasifican como "aleatoria o inexacta".

Segunda parte: Adentrándose en el contexto

En la tabla 6 se muestran los resultados obtenidos en el *problema 1*. Se hace un muestreo aleatorio con 50 mujeres adultas y se les pregunta cuántos pares de zapatos tienen. ¿Cuál es la variable de observación?

Tabla 6. *La variable de observación en el contexto de un problema*

Resultado	Ingeniería Comercial	Medicina
Diseñar una estrategia exitosa.	0	0
El excesivo número de zapatos que las mujeres adultas de Tarapacá tienen.	1 (2.4%)	0
Saber si el promedio actual de pares de zapatos por mujer adulta de Tarapacá es menor que en el pasado.	5 (11.9%)	5 (20.8%)
El número de pares de zapatos por mujer adulta de Arica y Parinacota	26 (61.9%)	18 (75.0%)
Otra	8 (19.0%)	1 (4.2%)
No responde	2 (4.8%)	0
Total	42	24

Algunas de las respuestas que los estudiantes dieron como "Otra", coinciden con las alternativas dadas. Se puede observar en la Tabla 6 que la mayoría de los estudiantes aciertan, esto es que reconocen como la variable de observación al número de pares de zapatos por mujer adulta de Arica y Parinacota. Se pueden observar mejores resultados para identificar la variable en este problema de contexto que en la pregunta 2 de la primera parte, sin contexto, tal como lo reportan Figueroa y Aznar (2017).

Sobre el *problema 2* de la *segunda parte* del cuestionario, relativa a la ampliación de puente en Ruta 5 Norte los resultados fueron los siguientes:

En la identificación de la *variable de interés*, el resultado fue que todos los estudiantes de Medicina, y todos menos uno de Ingeniería Comercial, muestran que entendieron el problema e identificaron la variable de interés, con expresiones como "flujo vehicular", "número de vehículos", "número medio de vehículos". Sin embargo, al identificar cuál era la *población*, tuvieron serias dificultades para identificarla. En Ingeniería Comercial, menos de 10 alumnos dieron una respuesta más o menos adecuada. El resto se limitó a dar un número, o volver a mencionar la variable. Casi la mitad de los estudiantes de Medicina entregó una respuesta aceptable, los demás cayeron en los mismos errores que el otro grupo.

Sobre identificar el nombre y valor del parámetro y el estadístico, los resultados se muestran en la siguiente Tabla 7.

Tabla 7. *Sobre la identificación del nombre y valor del parámetro y el estadístico*

	Nombre y valor del parámetro		Nombre y valor del estadístico	
Resultados	Ingeniería Comercial	Medicina	Ingeniería Comercial	Medicina
Incorrecto	12 (28.6%)	2 (8.3%)	0	0
Acierta sólo el concepto	0	0	0	0
Acierta sólo el valor	14 (33.3%)	8 (33.3%)	5 (14.3%)	4 (16.7%)
Acierta ambos: concepto y valor	0	14 (58.3%)	4 (9.5%)	20 (83.3%)
No responde	16 (38.1%)	0	32 (76.2%)	0
Total	42	24	42	42

En Albert y Ruiz (2014) se muestra que los estudiantes tienen dificultades para distinguir al estadístico como variable aleatoria. Una de esas dificultades, como lo muestra este apartado, consiste en confundir el parámetro con la variable aleatoria, aunque los estudiantes de medicina, que ya habían visto inferencia estadística antes de responder a este cuestionario, obtuvieron mejores resultados. La mayoría de los estudiantes de Ingeniería Comercial contestaron de forma incorrecta o simplemente no contestaron.

Con relación al *problema 3* de la *segunda parte*, los resultados se muestran en la Tabla 8.

Tabla 8. *Sobre un contexto confirmatorio acerca de los conceptos básicos*

Resultados correctos sobre:	Ingeniería Comercial	Medicina
El Problema	17 (40.5%)	21 (87.5%)
Población	15 (35.7%)	20 (83.3%)
Variable de observación	25 (59.5%)	15 (62.5%)
Identificar un dato	7 (16.7%)	11 (45.8%)
Tipo de variable	34 (81.0%)	22 (91.7%)
Escala	2 (4.8%)	13 (54.2%)
Identificación del parámetro	17 (40.5%)	18 (75%)
Total	42	24

De manera similar a los resultados anteriores, se pudo confirmar que los estudiantes de Medicina tienen una mejor percepción de lo que son los conceptos básicos, presentando ambos grupos mayores dificultades con la especificación de la Escala. Aún así, con respecto a la identificación de la variable, sigue habiendo un porcentaje importante de errores de alrededor del 40% en cada grupo.

Los estudiantes de Ingeniería tienden a confundir el concepto con su valor. Por ejemplo, no pocos dieron un tamaño poblacional (generalmente 20, erróneamente) cuando se les pidió identificar a la Población. También tuvieron problemas con la identificación de un dato.

Interpretación en contexto gráfico

Respecto al *problema 4 de la segunda parte*, dado un histograma, se muestran los resultados en la Tabla 9.

Tabla 9. *Sobre la interpretación de un histograma*

Resultados correctos sobre:	Ingeniería Comercial	Medicina
Variable de observación	33 (78.6%)	22 (91.7%)
El valor del incremento	39 (92.9%)	23 (95.8%)
Variables estadísticas	20 (47.6%)	16 (66.7%)
Total	42	24

En general los estudiantes supieron identificar correctamente la variable de observación, así como el valor de incremento para la frecuencia 4. Esto indica que la identificación del histograma ha sido adecuada. Se presenta, sin embargo, un problema en la enumeración de las variables. Alrededor de la mitad de los estudiantes declararon que había 2 variables estadísticas, considerando la frecuencia como una de ellas. Es posible que sea por la influencia de su matemática previa, sin embargo, en el caso de estadística, se trata una sola variable estadística y la frecuencia es sólo una variable auxiliar de agrupación. Pero también, hubo varios estudiantes, especialmente de Ingeniería Comercial, que confundieron el número de variables con el número de intervalos del histograma.

Y, finalmente, del *problema 5* de la *segunda parte*, donde se le pide al estudiante identifique la diferencia entre la variable horizontal del histograma y una función de densidad empírica, se observó que la gran mayoría de los estudiantes de Ingeniería Comercial no contestó (71.4%), mientras que un 21.4% afirmó que no son iguales las dos curvas. Respecto a los estudiantes de Medicina, un 50% consideró que ambas curvas presentan diferencias. Sin embargo, el problema, en ambos casos surgió a la hora de justificar, pues en ambos grupos la mayoría de los estudiantes dio argumentos que no confirmaban la afirmación dada. Esta es un área de oportunidad para la didáctica sobre cómo hacer transitar a los estudiantes de la variable estadística a la variable aleatoria. Ruiz, Batanero y Arteaga (2011) muestran que son pocos los estudiantes que son capaces de generalizar los resultados obtenidos con la variable estadística para realizar una inferencia informal sobre la variable aleatoria.

Discusión

Desde la perspectiva actual, la enseñanza de la Probabilidad y Estadística recomienda desarrollar el pensamiento y razonamiento estadístico (Mallows, 1998; Wild y Pfannkuch, 1999) para formar un estudiante crítico (Behar, 2018) y capaz de resolver problemas de modelación de la realidad y en la toma de decisiones (Ruiz y Albert, 2013). En este proceso, la variable toma un papel fundamental.

Desde la dimensión epistemológica la variable tiene gran complejidad no sólo porque en Probabilidad y Estadística toma diversos significados en el proceso de modelación (variable de interés, variable de observación) y por su naturaleza empírica, la variable estadística, y teórica, la variable aleatoria, sino también porque arrastra consigo, la complejidad venida del álgebra y el cálculo (Ursini y Trigueros, 2006).

Desde la dimensión didáctica, a pesar de que desde su formación temprana escolar, los estudiantes tratan con el concepto de variable, en rara ocasión reciben una instrucción formal acerca de sus diversos significados y diferencias. De esta forma, la variable pasa prácticamente inadvertida desde el Álgebra, luego por ecuaciones y funciones, al Análisis, donde incluso derivan e integran funciones. Al llegar a los cursos de Estadística y Probabilidad, los estudiantes se enfrentan a significados adicionales como lo son la variable estadística y la variable aleatoria que, además, es una función (Ruiz, Albert y Batanero, 2006). Los modelos de probabilidad están definidos sobre ciertos conceptos de variables muy específicos, vinculados al azar y aleatoriedad, que no los hacen coincidentes entre el tipo de variable matemática y en probabilidad y estadística.

Desde la dimensión cognitiva, diversos autores reportan dificultades específicas sobre la variable en su contexto algebraico (Escalante y Cuesta, 2012, entre otros). Este trabajo muestra que su complejidad también ha de ser vista de forma integral, desde los distintos papeles y significados que toma en el proceso de razonamiento y pensamiento estadístico, así como los contextos educativos específicos. En ese estudio se muestra una clara diferencia en las respuestas que son capaces de dar los estudiantes de Medicina y de Ingeniería Comercial. Los estudiantes de ambos grupos pueden entender un histograma puesto que en general, las respuestas asociadas a él son correctas. Sin embargo, no se reconoce la relación que puede haber con la curva (suave) que se asocia al histograma. Las comparaciones entre ellas que hacen los estudiantes son diversas e, incluso, dan a entender que no entienden qué es y qué representa cada gráfico. Llama la atención la diferencia de interpretación de ciertas preguntas por parte de ambos grupos de estudiantes, considerando que ambos han tenido acceso a la misma información e incluso con el mismo profesor. Varios estudiantes de Ingeniería Comercial responden a preguntas que son objetivas, con comentarios de percepción. Por ejemplo, "Razón ya que los datos dependen de la percepción de cada persona" es una respuesta no poco común cuando se pregunta por Escala de Medición. O bien: "Solo centrarse en pagar adicional y no tener la posibilidad de disminuir el precio anterior"; "que los datos tienen un signo (+)"; "el problema es que el fabricante no sabe cuánto puede modificar el precio de su producto" son algunas de las respuestas cuando se pide identificar el problema en el caso del fabricante de Dentífrico, del problema 3 de la segunda parte. Esto no se observa en los estudiantes de Medicina. Cabe señalar que la carrera de Ingeniería Comercial tiene un perfil más bien humanístico, aunque contiene una fuerte componente cuantitativa, mientras que medicina es considerada una carrera científica.

No se descarta que dichas diferencias entre ambos grupos estén relacionadas con las puntuaciones que se solicitan en la Prueba de Selección Universitaria para ingresar a ambas carreras En el sistema de Educación Superior chileno, los estudiantes deben rendir una Prueba de Selección Universitaria, que es una prueba estandarizada, en la cual pueden obtener como máximo 850 puntos. Esta prueba estandarizada es la misma para todos los candidatos a ingresar a las universidades de ese país. El puntaje de admisión en las diferentes carreras lo define cada universidad, en base a estándares fijados por el Ministerio de Educación y la demanda local. Para el nuevo ingreso Ingeniería Comercial se requiere un puntaje mínimo de 475 puntos, y en la carrera de medicina, 600. De esta forma, se espera que los estudiantes de Medicina lleguen a la Universidad con una mejor preparación y se espere de ellos un mejor desempeño que los estudiantes de Ingeniería Comercial. Sin embargo, la discusión sobre las diferencias de las perspectivas de ambos grupos sigue siendo válida, puesto que la diferencia entre las respuestas de ambos grupos es muy patente.

Conclusiones

El concepto de variable tiene diversos significados por los que un estudiante ha de transitar a lo largo de su paso por el sistema escolar, desde el álgebra, el cálculo, hasta probabilidad y estadística y otras disciplinas científicas como física o química. Además, la variable forma parte del proceso del planteamiento del problema hasta su solución e interpretación, por lo que su complejidad no sólo es científica sino metodológica.

Este trabajo alerta a la comunidad de investigación educativa sobre lo que en un principio pareciera algo casi obvio, como lo es el concepto de variable y que, sin embargo, resulta de una gran complejidad epistémica, didáctica y cognitiva, más cuando es visto desde perspectivas tan diferentes como la algebraica y la estadística. La variable juega un papel decisivo en el proceso de modelación matemática y estocástica para resolver problemas del entorno y profesionales, así como desde una perspectiva integral ya que interviene desde el proceso de identificación del problema hasta el de modelación e interpretación de resultados. Es por ello que es importante hacer estudios que hagan visible este problema.

Referencias bibliográficas

Albert, J. A. y Ruiz, B. (2014). Dificultades en estudiantes universitarios del estadístico como variable aleatoria en la distribución del muestreo de medias. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 995-1003.

Behar, R. (2018). Importancia del contexto en la formación del pensamiento y la cultura estadística. Bogotá, Colombia: *Tercer encuentro colombiano de educación estocástica,* 88-110.

Cortinez, A., Alamilla, N., Albert, J. A. y Ríos, J. (2015). Razonamiento acerca del significado de los parámetros en los modelos de probabilidad en estudiantes universitarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 283-290.

Daniel, W. y Cross, C. (2018). *Biostatistics: a foundation for analysis in the health sciences*. New York: John Wiley & Sons.

Escalante, J. y Cuesta, A. (2012). Dificultades para comprender el concepto de variable: un estudio con estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, 24 (1): 107-132.

Figueroa, S. y Aznar, M. (2017). Significados personales sobre la vinculación entre una variable estadística y su variable binomial asociada en el contexto de un problema. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Herrera, H., Cuesta, A. y Escalante, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educación matemática*, *28*(3), 217-240.

Newbold, P., Carlson y W. Thorne, B.. (2008). *Estadística para administración y economía* (6ª ed.). Madrid: Pearson Educación.

Mallows, C. (1998). The Zeroth Problem. *American Statistician*, 52, 1-9.

Ruiz, B., Albert J. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics.* Salvador (Bahía): International Association for Statistical Education.

Ruiz, B., Batanero, C. y Arteaga, P. (2011). Vinculación de la Variable Aleatoria y Estadística en la Realización de Inferencias Informales por parte de Futuros Profesores. *Bolema*, 24, 431-449.

Ruiz, B. (2013). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetivos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Ruiz, B. y Albert, J. A. (2013). La relación entre la variable aleatoria y la variable estadística: un análisis epistemológico disciplinar. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 383-390). Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2013.

Ursini, S., Trigueros, M. y Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*, *12*(02), 27-48.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18, Nº 3, 5-38.

Wild, C. J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review*, *67*(3), 223-248.

LA AUTENTICIDAD DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO EN EL CONTEXTO DE TEMPERATURA Y LAS PROPUESTAS DE SOLUCIÓN DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

AUTHENTICITY OF A MATHEMATICS PROBLEM IN THE CONTEXT OF TEMPERATURE AND PROPOSALS OF UNIVERSITY STUDENTS TO ITS SOLUTION

Wendy Loraine De León Zamora, Honorina Ruiz Estrada, Josip Slisko
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
wendy.1505@hotmail.es, hruizestrada@gmail.com, josipslisko47@gmail.com

Resumen
Reportamos los resultados de una investigación en curso, de corte cualitativo, basada en un problema matemático producto de un análisis documental realizado en los libros de texto de primero de secundaria proporcionados por la Secretaría de Educación Pública de México. Es un ejemplo que describe el comportamiento de tres materiales sometidos a un proceso de calentamiento. Se analiza la presencia de la autenticidad del contexto, considerando su naturaleza intrínseca y la interpretación que hacen siete estudiantes de licenciatura que están iniciando la carrera de física. Los datos fueron tomados a través de una encuesta y un test de reflexión cognitiva. Encontramos que ellos resolvieron el problema ignorando el contexto y que los pensadores lentos propusieron las mejores soluciones. Se propone una manera de complementar el estudio de la autenticidad de los problemas matemáticos del nivel secundario.

Palabras clave: autenticidad, temperatura, libros de textos de matemáticas

Abstract
We report the results of an ongoing qualitative investigation based on a mathematics problem resulting from a documentary analysis carried out in the high-school first-year textbooks provided by the Ministry of Public Education of Mexico. It is an example that describes the behavior of three materials subjected to a heating process. The context authenticity is analyzed, considering its intrinsic nature and the interpretation made by seven undergraduate students who are starting a degree in physics. The data were collected through a survey and a cognitive reflection test. We found that they solved the problem by ignoring the context and that slow thinkers proposed the best solutions. We proposed a way of complementing the authenticity study of high-school mathematics problems.

Key words: authenticity, temperature, mathematics textbooks

Introducción

El análisis de los libros de texto de matemática se ha perfilado últimamente como una línea de investigación emergente en la educación (Fan, 2013). Este autor ha sugerido dar especial atención al uso de los libros de texto y a sus efectos en el aprendizaje de los alumnos. En este contexto, el libro de texto es una variable independiente que incide en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes o una variable dependiente que se ve afectada por otros factores como el mercado, las políticas educativas nacionales o la preparación profesional de los autores. Fan (2013) propone llevar el análisis de libros de texto más allá de la identificación de sus características o cómo desarrollan un tema específico de la matemática escolar.

Actualmente, hay iniciativas para vincular más estrechamente la matemática escolar con el mundo real fuera de la escuela. Tales iniciativas no son nuevas, pero han llevado a recientes reformas curriculares y de evaluación en varios países (Palm, 2005). Un ejemplo de ello es el currículo mexicano, que en su enfoque pedagógico del programa de estudios de matemáticas de la Nueva Reforma Educativa (NRE) planteada por la Secretaria de Educación Pública, SEP (2017), establece que:

> La autenticidad de los contextos es crucial para que la resolución de problemas se convierta en una práctica más allá de la clase de matemáticas. Los fenómenos de las ciencias naturales o sociales, algunas cuestiones de la vida cotidiana y de las matemáticas mismas, así como determinadas situaciones lúdicas pueden ser contextos auténticos, pues con base en ellos es posible formular problemas significativos para los estudiantes. Una de las condiciones para que un problema resulte significativo es que represente un reto que el estudiante pueda hacer suyo, lo cual está relacionado con su edad y nivel escolar (p. 301).

En la NRE, el significado de la autenticidad de los contextos se aclara desde el enfoque pedagógico del programa de estudios de la Lengua Extranjera. Según las orientaciones didácticas de esta asignatura, la autenticidad hace referencia al aprendizaje del idioma inglés por medio de situaciones comunicativas reales o próximas a la realidad y significativas, donde los estudiantes son usuarios de esta lengua y puedan interactuar con sus pares a través de ella. Por su parte, Palm (2009) propone que los problemas verbales auténticos propician el aprendizaje de la matemática escolar. En este caso, la autenticidad se refiere a la simulación de una situación real que sirve como marco al problema matemático formulado.

En este orden de ideas, centramos la atención en la autenticidad de un problema matemático de un libro de primero de secundaria publicado por la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG). Se considera el contexto de la temperatura y sus cambios porque están muy presente en nuestra vida cotidiana, lo que concuerda con la idea de autenticidad previamente discutida. También nos ocupamos de la posible incidencia de la autenticidad y la reflexión cognitiva en las soluciones estudiantiles elaboradas por un grupo de estudiantes de nivel universitario. La reflexión cognitiva se considera como el perfil del grupo de estudiantes encuestados.

Marco teórico

Relacionado con el término “autenticidad de los contextos”, resalta el trabajo de Palm (2009). Para este autor, un problema verbal auténtico es aquel que simula alguna situación que ocurre o puede llegar a ocurrir en la realidad. Él propone un procedimiento sistemático que permite construir tareas matemáticas auténticas a través del cumplimiento de ocho aspectos. En un trabajo posterior, Palm y *Nyström* (2009) propusieron identificar la autenticidad a través tres aspectos principales y dos secundarios. Los primeros tratan del Evento, la Pregunta e Información y Datos. El Evento se refiere a la situación que ocurre en la realidad o tiene una alta probabilidad de suceder y es justamente esta circunstancia la que se simula en la tarea matemática auténtica. Por ejemplo, que los estudiantes organicen una excursión escolar es una circunstancia que los estudiantes ya enfrentaron o les es familiar en su ambiente escolar. No se puede decir lo mismo de problemas matemáticos que involucren el sacar fichas de una bolsa opaca y preguntarse por la probabilidad de extraer una ficha de determinado color.

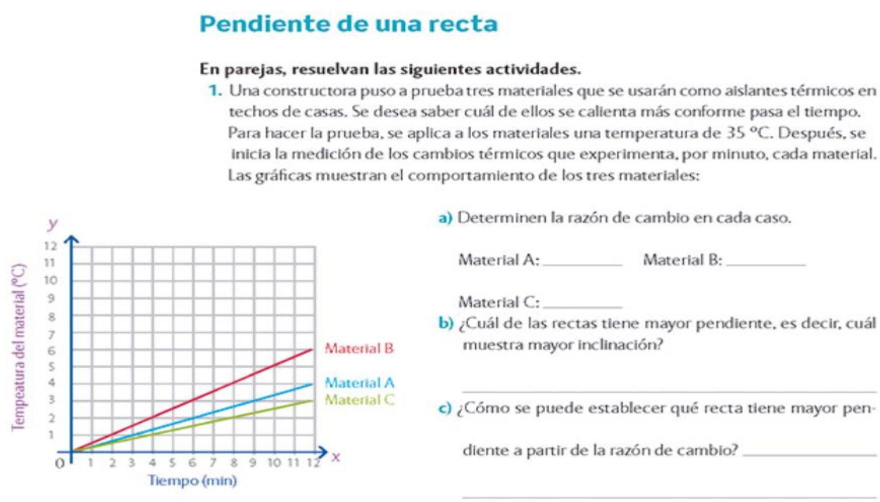
Como consecuencia, la Pregunta y la Información y Datos involucrados, deben corresponderse con aquellos de la realidad que se usa como contexto. Los aspectos secundarios considerados por estos dos autores son: Especificidad de los datos (que se refiere a si los detalles de la situación descrita pueden modificar las estrategias de resolución de los alumnos) y el Propósito en el contexto figurativo (que se ocupa de la coincidencia o no del propósito de la resolución de la tarea en el contexto escolar y en la vida real, teniendo en cuenta que ese propósito sea tan claro en la escuela como lo es fuera de ella).

Del enfoque pedagógico del programa de estudios de matemáticas de la NRE y del trabajo de Palm se desprende que ninguno de ellos menciona el papel que juega la naturaleza intrínseca del fenómeno usado en la formulación de un problema matemático auténtico. En esta dirección, Korsunsky (2002) ha sugerido que si no se considera este aspecto, los problemas matemáticos contextualizados pueden llegar a influir negativamente en el aprendizaje de los estudiantes; contradecir ya sea, el conocimiento intuitivo del alumno, su conocimiento actual o los conocimientos que llegue a tener en el futuro. Además, Korsunsky (2002) propone que los problemas deben ser auto-consistentes, sin que por ello, se requiera que el maestro de matemáticas sea un experto en física o que el estudiante conozca temas de física que desbordan su nivel escolar. Y en consonancia con Fan, hacemos una crítica significativa, de la autenticidad de los contextos y algunas actividades de aprendizaje que han sido propuestas por la SEP a través de la CONALITEG en el catálogo digital de libros de texto de matemáticas de primer grado de secundaria. Con este fin, ampliamos la concepción de autenticidad de los contextos de Palm y *Nyström* (2009), agregando la naturaleza intrínseca de los contextos de física, Korsunsky (2002).

Asimismo, en la presente investigación se usa El Cognitive Reflection Test elaborado por Frederick (2005), en su adaptación al castellano realizada por López (2012) conocida como Test de Reflexión Cognitiva (TRC). El TRC mide la reflexión cognitiva, entendida como la capacidad o disposición para resistirse a dar la respuesta que primero viene a la mente, y consiste en una prueba de papel y lápiz que contiene seis acertijos matemáticos, los cuales pueden responderse de manera intuitiva o correcta. Los estudiantes que respondan correctamente 1 acertijo serán considerados “pensadores rápidos”; los que respondan correctamente de 2 a 4 acertijos serán considerados como “pensadores en transición” y los que respondan correctamente de 5 a 6 serán considerados “pensadores lentos”.

El problema y el instrumento de investigación

Se seleccionó un problema de un libro de primero de secundaria de la CONALITEG que plantea el aprendizaje de la razón de cambio de dos magnitudes y de la pendiente de una línea recta, usando el fenómeno de calentamiento. El problema (vea la Figura 1) se plantea poner a prueba tres materiales que se usarán como aislantes térmicos en los techos de las casas y se desea saber cuál de ellos se calienta más con el transcurso del tiempo. El enunciado del problema consta de la situación problemática y tres cuestionamientos que se deben resolver en parejas de alumnos. Éste se acompaña de una figura que muestra las gráficas de tres líneas rectas que representan la forma en que responden los tres materiales.



Pendiente de una recta

En parejas, resuelvan las siguientes actividades.

1. Una constructora puso a prueba tres materiales que se usarán como aislantes térmicos en techos de casas. Se desea saber cuál de ellos se calienta más conforme pasa el tiempo. Para hacer la prueba, se aplica a los materiales una temperatura de 35 °C. Después, se inicia la medición de los cambios térmicos que experimenta, por minuto, cada material. Las gráficas muestran el comportamiento de los tres materiales:

a) Determinen la razón de cambio en cada caso.

Material A: ________ Material B: ________

Material C: ________

b) ¿Cuál de las rectas tiene mayor pendiente, es decir, cuál muestra mayor inclinación?

____

c) ¿Cómo se puede establecer qué recta tiene mayor pendiente a partir de la razón de cambio? ________________

____

Figura 1. Problema seleccionado para la investigación
Tomado del libro de texto de primero de secundaria, publicado en el 2018.

El problema matemático más la instrucción "*Lee cuidadosamente el siguiente problema y contesta los incisos. Muestra en la hoja anexa todos los cálculos que utilizaste para resolverlos y en el enunciado del problema anota únicamente los resultados obtenidos*", le dan forma al instrumento que se formula para indagar acerca de las interpretaciones y las soluciones que elaboraron estudiantes de nivel universitario que cursan una materia remedial de matemáticas que tiene como finalidad uniformizar los conocimientos matemáticos del nivel preparatoriano, requeridos como punto de partida en la Licenciatura de Física. Cabe aclarar que el problema fue resuelto de forma individual y se omitió la parte que menciona ser resuelto en parejas.

La solución experta

En relación al inciso *a*, la razón de cambio de la temperatura de cualquiera de los tres materiales es:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$$

donde T_2 es la temperatura del material al tiempo t_2 y similarmente para T_1.

De la Figura 1, se observa que es conveniente usar, para todos los materiales, la lectura inicial de la temperatura y tiempo: $t_1 = 0\ min$ y $T_1 = 0$°C. El segundo par de datos que se puede leer con facilidad de esta figura se dan en la Tabla 1.

Material	$t_2(min)$	T_2(°C)	$\Delta T/\Delta t$ (°C$/min$)
A	9	3	$3/9 = 1/3$
B	10	5	$5/10 = 1/2$
C	8	2	$2/8 = 1/4$

Tabla 1. Razón de cambio de la temperatura de cada material con el tiempo de calentamiento.
Elaboración propia.

Para dar respuesta al inciso *b* se requiere calcular la pendiente de las tres rectas que aparecen en la Figura 1. Observe que, las tres líneas rectas comparten el punto de coordenadas ($t_1 = 0\ min, T_1 = 0$°C) y que el segundo punto de cada una de estas tres rectas está dado en la Tabla 1. Por lo tanto, la línea recta que modela el comportamiento del Material A tiene una pendiente igual a $\lambda_A = (1/3)$ (°C$/min$), y de manera similar, la que representa la forma en que se calienta el Material B tiene una pendiente de valor $\lambda_B = (1/2)\ (°C/min)$ y la pendiente correspondiente al Material C es $\lambda_C = (1/4)\ (°C/min)$. Así que la recta que tiene mayor pendiente es la correspondiente al Material B.

Y para dar solución al inciso **c**, se debe tener claridad de que la pendiente de la recta que pasa por los puntos (t_1, T_1) y (t_2, T_2) es:

$\lambda = \frac{T_2 - T_1}{t_2 - t_1}$,
la cual se puede rescribir en términos de la variación de la temperatura T y el tiempo t,

$$\lambda = \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

que es justamente la razón de cambio de la temperatura del material porque T cambia con t de manera proporcional. Lo que significa que la razón de cambio de la temperatura con el tiempo coincide en el presente problema con la pendiente de la línea recta, porque es justamente la recta la que modela el fenómeno de calentamiento de los materiales aislantes evocados en el problema matemático seleccionado.

Los estudiantes involucrados

El instrumento fue aplicado a un grupo de 7 estudiantes, 5 hombres y 2 mujeres, que cursan la asignatura remedial Matemáticas en un programa de licenciatura en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla- México. En este curso se trabajan los temas siguientes:

1. Conceptos de cálculo diferencial e integral y aplicaciones.
2. Algebra vectorial y
3. Geometría analítica con enfoque vectorial.

Cabe destacar, que antes de aplicar el instrumento de investigación, los estudiantes habían finalizado el tema 1, lo que significa que no eran ajenos a los conceptos de Razón de cambio ni Pendiente.

El análisis del problema

En términos de la taxonomía de Palm, el problema describe un *Evento* que puede ocurrir en la realidad porque en la construcción de una vivienda sería de interés preguntarse por un material para el techo que sirva de aislante térmico y así protegerse de altas o bajas temperaturas, según sea el requerimiento. La temática acerca de la temperatura de materiales está presente en áreas específicas relacionadas a la construcción.

En lo que se refiere a *Información y Datos*, el problema proporciona tres tipos de materiales y no se especifica la forma en que se les aplica una temperatura de 35°C, a lo que nos cuestionamos ¿qué significa que se aplique una temperatura de 35°C? ¿cómo se puede aplicar una temperatura de 35°? El problema no dice la forma en que se les cede calor. Se entiende entonces, que los materiales se calientan de la misma manera, es decir, que se le aplica la misma cantidad de calor por unidad de tiempo. Ellos se van calentando progresivamente, y se empiezan a medir los cambios que experimentan por minuto, pero la forma en la que está redactado el problema hace pensar que se elevó la temperatura de los tres materiales a 35°C y luego se registró la medición. Lo anterior contradice la gráfica presentada porque se observa un aumento de la temperatura de los materiales.

Ahora, si la máxima temperatura que alcanzan los materiales es de 6°C, para qué se muestra en la gráfica el intervalo de 6°C a 12 °C si no sucede absolutamente nada a esas temperaturas. Era preferible omitir ese espacio para que los estudiantes apreciaran más lo sucedido entre 0°C y 6°C. Sin embargo, el problema no menciona por qué la temperatura inicial de los materiales es 0°C. Por tanto, se observa que la *Especificidad de los Datos* proporcionados en este problema, desorienta al resolvente y limita la lectura de datos requeridos para responder las preguntas formuladas. En cuanto al *Propósito en el contexto figurativo*, éste no se cumple porque la intención es que los alumnos aprendan la razón de cambio y la pendiente, pero no hay correspondencia con una situación fuera de la escuela.

Y con respecto a las *Preguntas*, éstas no se conectan con el contexto. Saber la razón de cambio y la pendiente de los tres materiales no son interrogantes de interés en la industria de la construcción. Incluso no invita al estudiante a tener en cuenta el contexto para su solución, sólo los colocan a operar con los números. Por ejemplo, tomar una decisión sobre cuál sería el material más recomendado con base en la razón de cambio de cada uno de ellos (pedida en la primera pregunta) ni de la pendiente, pedidas en la segunda y tercera. En síntesis, los incisos no consideran ninguna toma de decisión relacionada con la finalidad de la constructora, el contexto se desecha y se resuelven las preguntas sin que los aspectos contextuales jueguen un rol en el argumento.

El experimento de calentamiento involucrado en este problema no se describe apropiadamente. El texto que da cuenta del procedimiento experimental se contradice con los datos experimentales dados en la gráfica. De hecho, la eliminación de este párrafo no incide en la correcta resolución de las tres preguntas formuladas. Además, siguiendo a Korsunsky (2002), la aplicación de los 35°C a los materiales está en contradicción con el concepto de la temperatura. A un material se le puede aplicar calor pero no temperatura. Es evidente que la autenticidad en los problemas matemáticos de nivel secundario requiere de la incorporación de la naturaleza intrínseca del contexto usado en su formulación.

Método

Esta investigación hace uso de una metodología cualitativa. Se revisaron todos los libros de primer grado de secundaria disponibles en el catálogo digital de libros de textos gratuitos proporcionados por la CONALITEG para los estudiantes de educación básica inscritos en el sistema educativo mexicano. Fue un total de 17 libros de textos de 13 editoriales. Sin embargo, encontramos que únicamente 10 libros contenían problemas en contextos de temperatura. En estos libros hallamos un total de 16 problemas de matemáticas relacionados con el contexto antes mencionado y se seleccionó uno de estos problemas para la investigación. El problema se encuentra en un libro que está dividido en 3 bloques que corresponden a los tres trimestres escolares avalados por la NRE; cada bloque consta de 6 u 8 lecciones y cada lección presenta los aprendizajes esperados, que se pretenden lograr con el desarrollo progresivo de las siguientes tres etapas: Reflexiona y discute, Aprende y aplica y Crea y evalúate. Son un total de 22 lecciones. El problema corresponde al período 3 en su lección 17 correspondiente al contenido “Razón de cambio y pendiente de la recta”. Los datos fueron tomados a través de una encuesta, la cual fue resuelta individualmente en un tiempo promedio de 40 minutos. Con anterioridad, los estudiantes ya habían contestado el TRC.

Resultados

En términos generales, los problemas matemáticos identificados pretenden desarrollar los conceptos matemáticos de variación lineal, variación cuadrática, números enteros y conceptos básicos de estadística, en medio de un contexto de temperatura, que a su vez se divide en fenómenos de calentamiento y/o enfriamiento y cambios de la fase sólido-líquido-gas. No obstante, encontramos que es utilizado artificialmente, dado que se presentan contradicciones, omisiones de la situación y datos erróneos. Y en términos de la autenticidad, estos problemas satisfacen el Evento, pues describen situaciones de la vida cotidiana con datos experimentales, pero en relación a los otros aspectos, no los satisface en algunas ocasiones, porque están muy desconectadas del contexto.

En este trabajo se presentan las soluciones presentados por los 7 estudiantes universitarios encuestados. El grupo tiene una calificación promedio de 4 en el TRC; lo que significa que, en promedio, ellos son “pensadores en transición", son personas con un poco de control sobre su reflexión cognitiva. No responden intuitivamente, sino que se detienen a pensar en la solución, es decir, estudiantes que van camino a convertirse en "pensadores lentos".

La Tabla 2 muestra los resultados de cada uno de los estudiantes en el TRC:

Estudiante Universitario	*Puntaje TRC*	*Nivel Clasificatorio*
E1	5/6	Pensador lento
E2	5/6	Pensador lento
E3	5/6	Pensador lento
E4	2/6	Pensador en transición
E5	4/6	Pensador en transición
E6	4/6	Pensador en transición
E7	3/6	Pensador en transición

Tabla 2. Resultados del TRC.
Elaboración propia

Las 7 soluciones proporcionadas por los estudiantes se agruparon en categorías de acuerdo a si tenían completa claridad de los conceptos matemáticos: "Razón de cambio" y "Pendiente" y su relación, dado que así los estudiantes pueden resolver correctamente el problema. A continuación, se describen cuatro categorías.

Categoría C1

No usa la definición formal de Razón de Cambio ni de Pendiente y no establece correctamente la relación entre ambos conceptos matemáticos.

Categoría C2

No usa la definición formal de Razón de Cambio, pero la calcula. Usa adecuadamente la definición formal de Pendiente y no establece correctamente la relación entre ambos conceptos matemáticos.

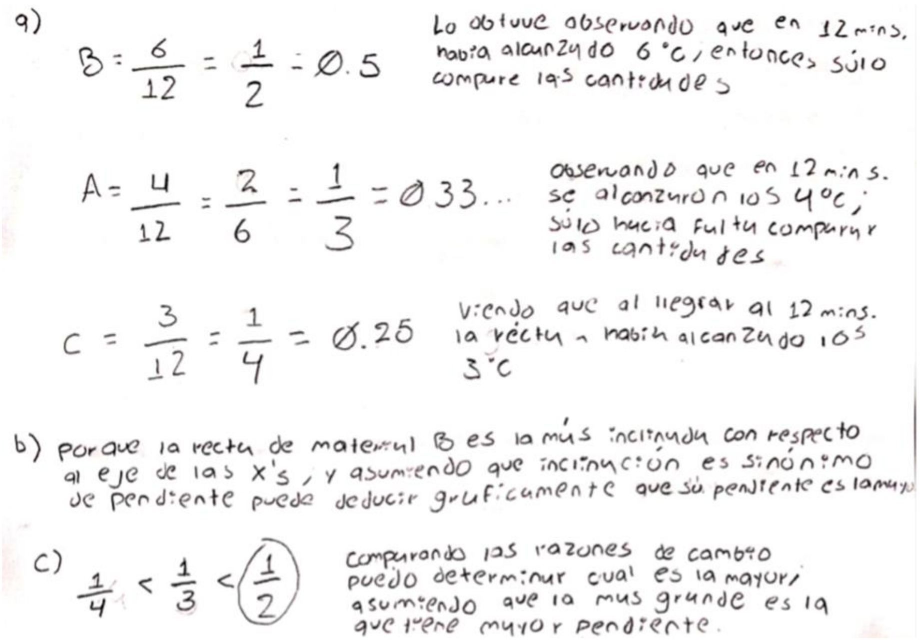
Categoría C3

Usa adecuadamente la definición formal de Razón de Cambio, pero la iguala con la definición de Pendiente sin comprobar previamente su relación.

Categoría C4

No usa la definición formal de Razón de Cambio, pero la calcula. Usa adecuadamente la definición formal de Pendiente y establece correctamente la relación entre ambos conceptos matemáticos.

Es necesario mencionar que no hubo ningún estudiante que usara adecuadamente la definición de Razón de Cambio y Pendiente, y al tiempo estableciera una correcta relación entre ambos conceptos matemáticos. A continuación, se presentan una solución de estudiantes que pertenecen a la categoría C1 y C4:


a)

$B = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \emptyset.5$

Lo obtuve observando que en 12 mins. había alcanzado 6 °C, entonces sólo compare las cantidades

$A = \frac{4}{12} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \emptyset 33...$

observando que en 12 mins. se alcanzaron los 4°C; sólo hacía falta comparar las cantidades

$C = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \emptyset.25$

Viendo que al llegar al 12 mins. la recta había alcanzado los 3°C

b) porque la recta de material B es la más inclinada con respecto al eje de las X's, y asumiendo que inclinación es sinónimo de pendiente puede deducir gráficamente que su pendiente es la mayor

c) $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Comparando las razones de cambio puedo determinar cual es la mayor, asumiendo que la mas grande es la que tiene mayor pendiente.

Figura 2. Solución presentada por E7, perteneciente a categoría C1 y $TRC = 3/6$ (pensador en transición).

En la Figura 2 se presenta una solución que pertenece a la categoría C1, la categoría más baja. Se puede observar que no se usa la definición formal de Razón de Cambio ni la de Pendiente y no se establece correctamente la relación entre ambos conceptos matemáticos. Para hacer el cálculo de la Razón de cambio sólo se utiliza un punto sobre el plano cartesiano que se convierte en fracción y luego se simplifica. Además, no se especifican las unidades en sus respuestas. Con respecto a la Pendiente, no es definida ni de forma verbal escrita ni algorítmica, tampoco se hallan las pendientes de las rectas, sólo se asocia el término a la mayor inclinación y se fundamentan en la gráfica para deducir o comprobar la respuesta. Y se concluye que, a mayor razón de cambio, mayor pendiente; lo que significa que el estudiante ve los conceptos matemáticos de forma particular y luego intenta encontrar la relación entre ellos.

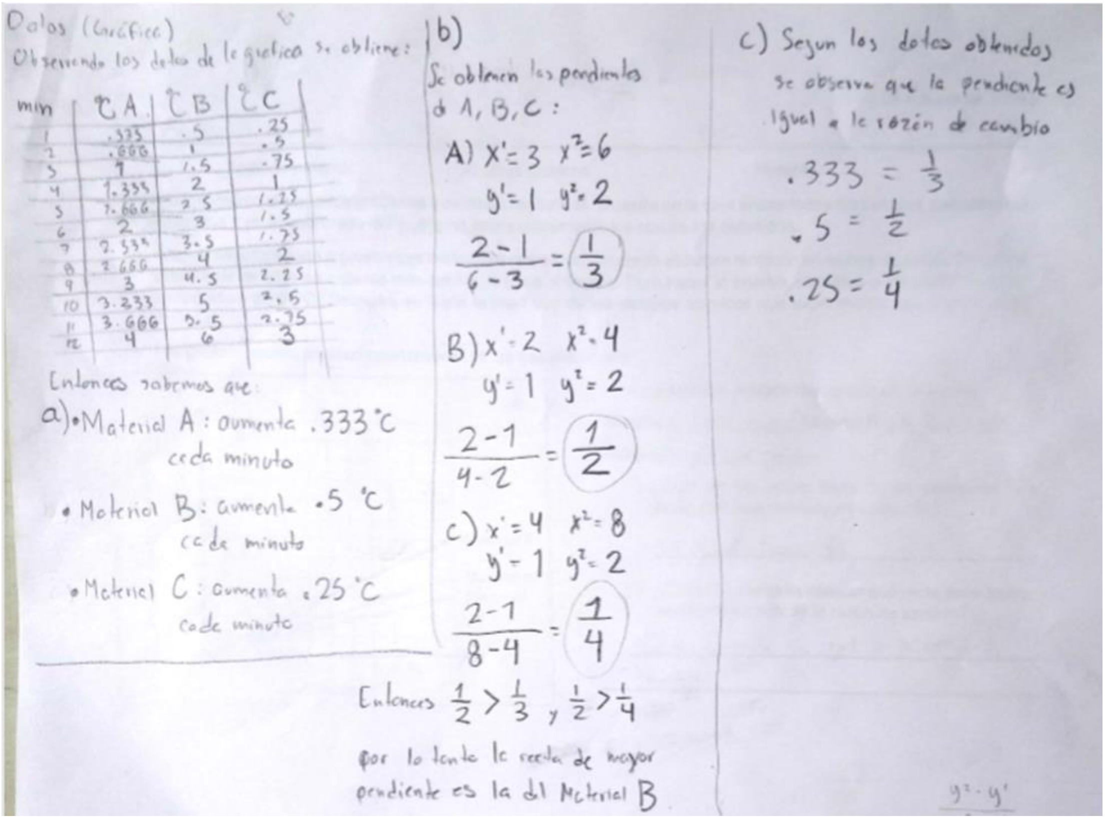


Figura 3. Solución presentada por E1, perteneciente a categoría C4 y $TRC = 5/6$ (pensador lento).

En la Figura 3 se presenta una solución que pertenece a la categoría C4, la categoría más alta. Se puede observar que no se menciona de forma verbal escrita ni algorítmica el concepto de Razón de cambio, sino que se calcula con alguna estrategia diferente anotando correctamente las unidades. Con respecto a la Pendiente, no se menciona su algoritmo, sino que sólo se hace la operación y luego establece una comparación para decidir cuál es la mayor; y finalmente, se concluye de forma acertada que la Pendiente es igual a la Razón de cambio. De acuerdo a la anterior clasificación, los estudiantes se encuentran ubicados, así como muestra la Tabla 3.

Estudiante Universitario	*Tipo de pensador*	*Categoría*
E1	Pensador lento	C4
E2	Pensador lento	C2
E3	Pensador lento	C3
E4	Pensador en transición	C2
E5	Pensador en transición	C1
E6	Pensador en transición	C3
E7	Pensador en transición	C1

Tabla 3. Tipo de pensador y categorías de las soluciones del problema. Elaboración propia.

En la Categoría C1 hay 2 estudiantes, ambos ubicados como "pensadores en transición". E5, aunque menciona que la Razón de cambio es una variación con respecto a un eje, la resuelve como se menciona en la Figura 2. E7 por su lado, hace el mismo procedimiento, pero sin hacer mención al concepto matemático. La pendiente no es definida ni calculada y no establecen correctamente la relación entre ambos conceptos matemáticos.

En la Categoría C2 hay 2 estudiantes, E2 ubicado como un "pensador lento" y E4 ubicado como un "pensador en transición". E2 menciona que la razón de cambio es el aumento de temperatura en un intervalo de tiempo, lo que evidencia falta de claridad dado que sólo considera el aumento y no el cambio o la variación de la temperatura ya sea un incremento o disminución. No utiliza el algoritmo correcto de la Razón de cambio, no tiene en cuenta la variación de la temperatura con respecto al tiempo, sino que sólo la representa como un punto en el plano, que convierte en fracción y luego simplifica, ignorando las unidades. E4 por su parte, anota que la Razón de cambio es cuanto aumenta la temperatura por segundo al igual que E2, pero con la diferencia de que E4 calcula la ecuación de la recta para las tres rectas, luego le asigna valores a x y observa qué ocurre con y al ir creciendo x, como observa que la variación es la misma entre cada resultado de cada recta, deduce que ese resultado es la Razón de cambio de cada recta. No usa la definición formal de Razón de cambio, pero se percibe una comprensión de su significado, con base al procedimiento empleado, y el estudiante, tampoco anota las unidades respectivas. Con respecto a la Pendiente, ambos estudiantes las calculan, con la diferencia de que E2 específica el algoritmo y luego opera y E4 sólo opera. Lo anterior se puede explicar porque E2 reflexiona más cuando resuelve un problema y E4 apenas está camino a convertirse en una persona reflexiva. Y ambos concluyen que, a mayor razón de cambio, mayor pendiente; lo que significa que ven los conceptos matemáticos aislados.

En la Categoría C3 hay 2 estudiantes considerados, uno como "pensador en transición" y otro como "pensador lento". E6 menciona de forma verbal escrita y algorítmica la Razón de cambio, pero sin las respectivas unidades; mientras E3, hace lo mismo, pero anotando correctamente las unidades. Sin embargo, cuando hacen el cálculo, sustituye de forma indiscriminada la Razón de cambio por la Pendiente. Este último concepto, no lo definen de ninguna forma. Y finaliza, afirmando que la Razón de cambio es igual a la Pendiente. Y nos cuestionamos acerca de por qué los estudiantes igualan de forma arbitraria ambos conceptos, al inicio de la solución sin aún comprobarlos.

En la Categoría C4 hay 1 estudiante considerado como "pensador lento". E1 no menciona de forma verbal escrita ni algorítmica la Razón de cambio, sino que transforma la información de la gráfica en una tabla para observar cómo aumenta la temperatura cada minuto, y así establecer los resultados. Es un estudiante reflexivo que, aunque no recuerda el algoritmo de la Razón de cambio, comprende su significado. Tiene claridad del concepto de Pendiente, aunque no anote su definición formal, la calcula, y acierta en la relación existente entre ambos conceptos matemáticos.

Conclusiones

Observando la autenticidad de los contextos de la SEP desde el enfoque de Palm y Nyström (2009), encontramos que coinciden. Aunque en la NRE se hace énfasis en la autenticidad de los contextos, ella no se usa en la redacción del problema seleccionado, porque cumple únicamente con el Evento.

Las soluciones presentadas por todos los estudiantes listados, no consideran el párrafo que describe la situación experimental involucrada en el problema. Estos alumnos no están acostumbrados a trabajar en contexto; ellos eliminaron la información que consideraron ajena a las preguntas que debían contestar y operaron con los datos de la gráfica. Ningún estudiante usó el dato de 35°C en su solución, tampoco se cuestionaron acerca de su significado físico, sólo lo omitieron. Cabe resaltar que la sugerencia de Korsunsky (2002), en este caso, no afectó a la correcta solución del problema. Posiblemente, por el reto conceptual para diferenciar entre la temperatura y calor. Se esperaría que estudiantes de física que están concluyendo la carrera, si detecten esta inconsistencia y la comenten. Este hecho es relevante para garantizar la autenticidad de un problema matemático. Como discutimos previamente, la naturaleza intrínseca del contexto que enmarca a un problema matemático es necesaria para simularlo apropiadamente. En consecuencia, el aporte de este trabajo es complementar la taxonomía que Palm (2009) propuso para identificar a los problemas verbales auténticos.

También podemos reportar, que los pensadores lentos se ubicaron en las categorías más altas y los pensadores en transición en las categorías más bajas. Al menos para los estudiantes cuestionados en este trabajo, la correcta solución del problema está relacionado con un puntaje alto en el test de reflexión cognitiva. Observamos que hay carencias matemáticas en los estudiantes, dado que al no saber qué es una razón de cambio acuden a diversas estrategias erróneas para calcularla. Sin embargo, conocen el algoritmo para obtener la pendiente de una recta, pero no logran percibir la conexión que hay entre ambas en este caso particular.

Referencias bibliográficas

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education,* 45(5), 765-777.

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making, *The Journal of Economic Perspectives,* 19, 25-42.

Korsunsky, B. (2002). Improper Use of Physics-Related Context in High School Mathematics Problems: Implications for Learning and Teaching. *School Science and Mathematics,* 102, 107-113.

López, J. (2012). Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad. *Revista Divulgación Matemática,* 5, 17-18.

Palm, T. (2009). Theory of authentic task situations. En B. Greer, L. Verschaffel, W. Van Dooren, y S. Mukhopadhyay (Eds.), *Word and worlds: Modelling verbal descriptions of situations* (pp. 3-19). Rotterdam: Sense Publishers.

Palm, T. y Nyström, P. (2009). Gender aspects of sense making in word problem solving. *Journal of Mathematical Modelling and Applications,* 1(1), 59-76

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes claves para la educación integral, plan y programas para la educación básica*. Ciudad de México, México: Autor.

ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD Y LA RELACIÓN DE LOS TEMAS DE LINEALIDAD, RAZONES Y PROPORCIONALIDAD: ENFOQUE GEOMÉTRICO DESDE EL PROGRAMA DE ERLANGEN

ANALYSIS OF COMPLEXITY AND THE RELATIONSHIP BETWEEN THE TOPICS OF LINEARITY, RATIO AND PROPORTIONALITY: GEOMETRIC APPRAOCH FROM ERLANGEN PROGRAMM

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Margarito Ramírez Auces
Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. Colegio de Bachilleres del estado San Luis Potosí (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, margarito.ramirez@cbslp.edu.mx

Resumen
Se describe una secuencia de tareas en las que se realizan prácticas matemáticas relacionadas con la complejidad del concepto de proporcionalidad. Se empleó una metodología cualitativa etnográfica para dar cuenta de los significados emergentes a partir de la interacción entre cuatro profesores, dos estudiantes y el profesor-investigador, en el contexto de un curso experimental universitario de Geometría con números complejos. Nuestro análisis se apoya en la teoría de Enfoque Ontosemiótico que proporciona herramientas que permiten describir la complejidad de los objetos matemáticos y de las prácticas de las que emergen. Los resultados muestran que la complejidad de la proporcionalidad está relacionada con sus distintas formas de representación. Mediante este estudio se pretende ayudar a los profesores a entender las dificultades que enfrentan los alumnos en el estudio de los temas de geometría analítica y álgebra lineal.

Palabras clave: proporcionalidad, complejidad, Enfoque Ontosemiótico, representación

Abstract
A sequence of tasks which involve mathematical practices related to the complexity of proportionality concept is described. A qualitative ethnographic methodology was used to account for emerging meanings from the interaction between four professors, two students and the professor-researcher, in the context of an experimental university course in Geometry with complex numbers. Our analysis is based on the theory of Onto-semiotic Approach that provides tools which allow describing the complexity of mathematical objects and the practices from which they emerge. The results show that the complexity of proportionality is related to its different forms of representation. This study aims to help teachers understand the difficulties students face in the study of the topics of analytical geometry and linear algebra.

Key words: proportionality, complexity, Onto-semiotic approach, representation

Introducción

Motivaciones: proporcionalidad en contextos algebraicos y sus representaciones semióticas

En el estudio de las ecuaciones del segundo grado respecto a la variable compleja, cuyas imágenes geométricas son circunferencias o rectas en el plano cartesiano, surgió la cuestión relacionada con la proporcionalidad de las ecuaciones, expresada por la proporcionalidad de las matrices asociadas a tales ecuaciones (Schwerdtfeger, 1979).

Para el estudio de familias (haces) de las circunferencias (rectas) se emplea la combinación lineal de las matrices asociadas, formadas por los cuatro coeficientes de las ecuaciones, dando un lenguaje unificado a los problemas geométricos tales como la intersección, ortogonalidad, etc., de ambos tipos de las configuraciones geométricas. Cabe enfatizar que las combinaciones lineales en lenguaje algebraico matricial no causan dificultades a los estudiantes, sin embargo, la interpretación geométrica asociada y expresada mediante combinaciones lineales de circunferencias (haz de circunferencias) parece ser asombrosa. De modo análogo, las combinaciones lineales de ecuaciones lineales son aceptados, pues en el proceso de simplificaciones de sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss) con variables reales también se realizan las operaciones de multiplicación de una ecuación por un escalar no nulo para obtener la ecuación proporcional a la inicial: prácticamente se realizan combinaciones lineales entre las ecuaciones. Sin embargo, su interpretación geométrica como haz de rectas causó dificultades para su aceptación, a pesar de que en la práctica de enseñanza de la variedad de las formas de ecuaciones de líneas rectas fácilmente se pasan de unas formas de las ecuaciones a otras que representan la misma recta. Cabe destacar que se trata de representaciones semióticas distintas dentro del mismo registro cartesiano. Respecto a este fenómeno: la facilidad de manipulaciones con expresiones algebraicas, y las relaciones con las interpretaciones geométricas correspondientes, M. Chasles llega a las conclusiones:

> ...reflexionando sobre los procedimientos del álgebra y buscando las causas de las enormes ventajas que aporta a la geometría, ¿no se percibe que debe una parte de sus ventajas a la facilidad de las transformaciones que se aplican a las expresiones que se introdujeron al comienzo? (Piaget y García, 2016, p. 92).

Para dar una idea podemos elucidar ¿Cómo se puede dar una interpretación geométrica de la combinación lineal de las ecuaciones? Hay una forma de ecuación llamada haz de rectas
$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = Ax + By + C,$
que representa la familia de todas las rectas que pasan por el punto de intersección de las dos rectas involucradas.

En el libro de texto de Lehmann (Lehmann, 1994) se considera esta forma como haz de rectas en la sección Art. 36, donde también podemos encontrar las observaciones que explican este fenómeno y que el autor le confiere gran importancia

> …a medida que avancemos en el estudio de la Geometría analítica veremos que, una vez que se haya establecido la ecuación general de un tipo particular de curva, las propiedades características distintivas de esa curva pueden determinarse por una investigación de los coeficientes de su ecuación (Lehmann, 1994, p. 66).

Enfatizamos que esta forma de ecuación representa un caso particular de haz de circunferencias, en el registro semiótico de coordenadas cartesianas, lo que está explicado en el Art. 42 en el libro de Lehmann (Lehmann, 1994).

Cabe destacar que las consecuencias geométricas de posiciones mutuas particulares se interpretan gráficamente en el libro de Desarrollo conceptual de geometría en las páginas 141 y 144 (Arcos y Sepúlveda, 2011).

Sin embargo, el cambio de registro a la variable compleja permite obtener las representaciones semióticas de proporcionalidad de ecuaciones en forma matricial e ilustrar todas las geometrías no-euclidianas por medio de representaciones geométricas como en las páginas 64 y 67 del libro Geometry of comlex numbers (Schwerdtfeger, 1979), lo cual nos indica el desarrollo de la geometría más allá de la geometría euclidiana. Este aspecto se expresa en palabras de J. Poncelet, quien estableció fundamentos teóricos para la geometría proyectiva: "Es también inspirándose en los métodos algebraicos que van a dar un sentido 'puramente geométrico' a los elementos 'imaginarios'" (Piaget y Garcia, 2016, p. 92). Y buscando las interrelaciones más profundas se plantea la pregunta "¿No es natural que se busque introducir en forma similar en la geometría pura transformaciones análogas realizadas directamente sobre las figuras propuestas y sobre sus propiedades?" (Piaget y Garcia, 2016, p. 93). Así, naturalmente F. Klein llegó a sistemas de transformaciones geométricas y sus invariantes como el método fundamental de la geometría que ha sido realizado en el Programa de Erlangen propuesto en 1872.

Proporcionalidad en el contexto algebraico y aritmético: representaciones de rectas paralelas en el plano

En las prácticas matemáticas se cuestiona ¿Cuándo dos ecuaciones lineales del primer grado (1) $Ax + By + C = 0$ y (1') $A'x + B'y + C' = 0$ definen la misma recta? Se establece que dos rectas d y d' son paralelas si y solo sí tienen la misma dirección, expresada por sus vectores directores $\vec{u} = \{-B, A\}$ y $\overrightarrow{u'} = \{-B', A'\}$ que deben ser colineales, es decir, $\vec{u} = \gamma\overrightarrow{u'}$, lo que significa la proporcionalidad de dos vectores.

Sean dos vectores directores colineales: la colinealidad de dos vectores se verifica a través de la proporcionalidad de sus componentes correspondientes, $-B = \gamma(-B')$ y $A = \gamma\, A'$, lo que se expresa empleando las proporciones de los coeficientes en la forma siguiente $(-B) \div A = (-B') \div A'$, o de otro modo, cuando se expresa como la proporción $A' \div B' = A \div B$.
Observaciones: Aquí nos enfrentamos con el problema de definiciones de proporciones que emplean las razones. Es preciso destacar que, en los manuales, se simplifica la situación: la definición que se emplea expresa el significado de proporción aritmética.

Por la definición en los libros de texto, dos parejas de números reales no nulos α, β y α', β' forman una proporción $\alpha \div \beta = \alpha' \div \beta'$, si existe tal número $k \neq 0$ que se cumple $\alpha' = k\alpha,\ \beta' = k\beta.$ El número k se llama el coeficiente de proporcionalidad.

Nota: En el contexto de ecuaciones anterior, empleamos proporcionalidad en esta última interpretación, casí nunca se usa representación con las razones.

En nuestro problema de relacionar dos rectas paralelas, cuando la proporción $A' \div B' = A \div B$ puede ser extendida hasta la proporción de los tres pares de los coeficientes $A' \div B' \div C' = A \div B \div C$, entonces las rectas coinciden. Efectivamente, en este caso todos los coeficientes de una ecuación entre (1) y (1') se obtienen de los coeficientes de la otra por medio de multiplicación por un número μ (no cero), es decir: $A' = \mu A$, $B' = \mu B$, $C' = \mu C$, lo que expresa el significado de la igualdad de tres proporciones aritméticas.

Pero esta proporcionalidad implica que las ecuaciones (1) y (1') son equivalentes, en el sentido que representan la misma recta: efectivamente cualquier punto $M(x, y)$ que satisface a una ecuación también satisface a la otra.

Al revés, si dos rectas d y d' coinciden (es la misma) entonces se verifica la proporción entre tres pares de los coeficientes, lo que se escribe tradicionalmente en la forma de proporciones que expresan la igualdad de las razones $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$.

Cabe destacar que se evita igualar estas razones a su razón común, que está representado por el valor numérico μ: el problema se radica en las consideraciones histórico-filosóficas relacionadas con la inconmensurabilidad de los segmentos, cuya magnitud se expresa por números irracionales, pero estos no fueron permitidos para fungir como razones.

Es importante mencionar que en el caso de ecuaciones de segundo grado también se puede afirmar que si dos ecuaciones representan el mismo objeto geométrico (una cuádrica) entonces son proporcionales y viceversa. Esto se usa libremente en varios contextos sin explicación o justificación alguna.

Con base en los resultados de reflexiones expuestos arriba los participantes llevaron a cabo un análisis de la situación en las prácticas matemáticas respecto a una variedad de las ecuaciones que representan la misma recta en el plano cartesiano. Nuestro análisis permitió aclarar, que los cinco tipos de ecuaciones no son diferentes registros en el sentido de la teoría de R. Duval, sino que son diferentes representaciones semióticas dentro del mismo registro de coordenadas cartesianas. Así la ecuación $y = mx + b$, se obtiene de la ecuación general (1) por la multiplicación por $\frac{1}{(-B)}$, si $B \neq 0$, y puede ser transformada en la forma $(y - y_0) = m(x - x_0)$, que debe verificarse para todas parejas de (x, y). Esta proporcionalidad expresa la condición de que todos los puntos pertenecen a la misma recta. Las demás expresiones para ecuaciones de las rectas en el plano son simplemente expresiones algebraicas proporcionales a la ecuación lineal general.

Se puede ver la situación considerada como una metáfora: que articula (demuestra conexión entre) la proporcionalidad de dos ecuaciones lineales y de sus coeficientes: es el otro modo de decir que las rectas son paralelas o coinciden (Rondero y Font, 2015).

Linealidad y proporcionalidad en el contexto de transformaciones geométricas

La linealidad es el concepto crucial en la definición de las transformaciones lineales en geometría desde el enfoque de F. Klein: se conservan líneas rectas por la definición, que requiere que los puntos alineados se transformen a los puntos alineados.

En las prácticas computacionales de los cursos de la geometría analítica se emplea la unicidad de la recta que pasa por dos puntos dados (según el axioma 1 de Euclides) en la forma de proporciones $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (que expresan razones de catetos en los triángulos semejantes) que deben cumplirse si y solo si el punto arbitrario (x, y) pertenece a la recta, es decir, cualquier punto debe ser colineal con los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), lo que se verifica con la proporcionalidad de los segmentos sobre ejes coordenados $y - y_1 = m(x - x_1)$, $\quad y - y_2 = m(x - x_2)$ (que demuestra coincidencia de las inclinaciones).

Sin embargo, estas proporciones no expresan el concepto de linealidad donde se requiere proporcionalidad $y = mx$, es decir la dependencia funcional directamente proporcional.
Entonces la linealidad se visualiza geométricamente solamente por las rectas que pasen por el origen (la linealidad de una aplicación lineal en álgebra lineal significa que para la aplicación $x \to y(x)$, se debe cumplir $(x_1 + x_2) \to y(x_1) + y(x_2)$, sin embrago, para la ley $y(x) = kx + b$, $y(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) + 2b$).)

La consideración de las razones de segmentos es crucial en la geometría afín debido a que se conservan bajo transformaciones del grupo afín $y\,(x) = Ax + b$ (producto algebraico del grupo lineal con la matriz A y grupo de traslaciones): así, por ejemplo, el centro de gravedad se conserva, el punto medio se transforma en el punto medio de la imagen.

En el caso de las matrices que representan las transformaciones proyectivas, aparece la proporcionalidad entre dos matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u & v \\ w & t \end{pmatrix}$ (proporcionalidad que tampoco se expresa en la forma de razones) y toda clase de matrices proporcionales representa la misma transformación proyectiva.
Cabe destacar que los invariantes del grupo de transformaciones proyectivas en el plano se representan por medio de la razón doble (razón de dos razones) $\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = k$ (o razón cruzada) de los segmentos dirigidos en una recta. Es preciso enfatizar que aunque la colinealidad de los puntos y la colinealidad de sus imágenes se conserva, pero no se preserva el orden entre tres puntos como es el caso en las transformaciones afines.

Situaciones-Problemas donde intervienen proporciones
Proporcionalidad en el contexto geométrico: relación entre razones de dos segmentos

En los cursos de la geometría analítica y del álgebra lineal se tiene un planteamiento de un problema: Encontrar las coordenadas del punto que divide un segmento dado en una razón dada, si los puntos de extremos se determinan por sus coordenadas en el plano cartesiano (así como en el espacio).

En la geometría elemental se define la razón en la que un punto dado R divide un segmento dado con los puntos de extremos A, B, en la forma $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \lambda$. La resolución de este problema en el escenario del plano cartesiano requiere conocimientos de la geometría euclidiana respecto a las propiedades de proyecciones ortogonales o bien las técnicas de operaciones con el aparato del álgebra vectorial.

Hemos notado que este problema planteado dentro de la lista de problemas de los exámenes (formulado de diferentes maneras) nunca había sido elegido por los alumnos para ser resuelto. Sin embargo, este problema puede ser considerada de gran importancia desde el enfoque del programa de Erlangen: pues las proporciones se conservan bajo transformaciones afines.

Nuestras reflexiones respecto a este fenómeno nos llevaron a la necesidad de comparar los niveles de dificultad de tal planteamiento con los demás problemas-tipo que se evalúan en dichos cursos (las demás preguntas son de tipo operacional, requieren solamente aplicaciones de métodos algorítmicos y permiten visualización gráfica inmediata). Además, estos problemas-tipo se tratan de modo igual en todos los textos recomendados. Sin embargo, no es el caso del problema de nuestro interés.

Observamos desde inicio, que, si cada estudiante dibuja su propio segmento, diferente de los demás y del cual se derivan procedimientos en los manuales, es natural hacer pregunta: porque el resultado es válido en general. En este momento es necesario involucrar las transformaciones lineales que ponen en correspondencia todos segmentos posibles con los extremos dados.

Antecedentes

En la búsqueda de explicaciones de razones de dificultades, que experimentan los alumnos con este planteamiento, llegamos a unas suposiciones posibles de las causas, algunas, son de una naturaleza muy profunda.

Primeramente, es preciso aclarar el concepto de una razón: Razones y proporcionalidad en la Escuela Pitagórica permitieron desarrollar la teoría de semejanza de triángulos. Pero la suposición era que los miembros que forman razones, son números naturales, así que las razones permitidas representaban solamente números racionales. Para evitar las expresiones con valores irracionales, como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (además es imposible construir el punto), más aun para no revelar el problema relacionado con la inconmensurabilidad de los segmentos expresada por un valor irracional: (como la razón entre la diagonal y el lado de un cuadrado, así como lo más importante para su Escuela, la razón entre la diagonal y el lado de un pentágono), se los presentaban como igualdad de las razones de magnitudes geométricas homogéneas.

Por eso, para las razones $AB \div$ AC $=AC \div BC$ (que expresaban media geométrica) se empleaban expresiones: el segmento AB dividido en media y extrema razón.

Es importante resaltar que la definición de proporcionalidad que se emplea expresa el significado de la definición de proporción de Eudoxo (que se presenta en el libro V de Euclides). De esta manera Eudoxo logró eliminar la dificultad que enfrentaron los Pitagóricas, no definiendo la razón misma, sino la igualdad de razones de segmentos geométricos.

En los libros de texto tradicionalmente se define la razón de dos segmentos rectilíneos $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, que es representado por un número $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{EF}}$ (racional o ¡irracional!), el cual demuestra cuantas veces el segmento $\overline{EF}$ cabe en el segmento $\overline{AB}$. El número λ se llama la razón del segmento $\overline{AB}$ al segmento $\overline{EF}$, y se escribe $\overline{AB} = \lambda\,\overline{EF}$.

Si el valor de esta razón λ es igual a1, es decir $\overline{AB} = \overline{EF}$, se dice que los segmentos son iguales entre sí o congruentes, es decir, se conservan bajo transformaciones euclidianas. Este concepto nos lleva a la definición de la longitud del segmento AB como una magnitud respecto a la unidad de medida EF . Sin embargo, el problema con el valor irracional no ha sido resuelto hasta 1988, cuando R. Dedikind publicó los resultados de sus investigaciones sobre los fundamentos de la teoría de números (Dedekind, 2014).

Por otro lado, el problema se radica en los tratamientos en los libros de texto y los fundamentos teóricos subyacentes.

En algunos manuales se aborda este problema primeramente en la dimensión uno: el segmento se encuentra en la recta numérica involucrando el concepto de distancia para asignar las coordenadas a los puntos de la recta (Véase Ejemplo 1).

En la dimensión dos las presentaciones de las demostraciones se varían: la mayoría de textos aplica las propiedades de proporciones basadas en geometría elemental (Lehmann, 1994) (que actualmente no se enseña en nivel escolar), además es más complicado, dado que para relacionar las líneas paralelas y los segmentos comprendidos formados por las transversales requiere el razonamiento sobre relaciones de relaciones. El uso de álgebra vectorial presenta otras dificultades relacionadas con los axiomas del espacio vectorial, entre los cuales la existencia un marco de referencia se postula (Florey, 1993).

Marco teórico

El trabajo consideró algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2007), EOS, y una mirada desde la psicogénesis de las ciencias (Piaget y García, 2016). Del EOS se adoptó la noción de *objetos matemáticos primarios* (lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), los cuales intervienen en las prácticas que lleva a cabo un sujeto, experto o novato, cuando resuelve una tarea o problema matemático. También se consideró el constructo de *complejidad de un objeto matemático* (Rondero y Font, 2015), el cual no es entendido en un sentido coloquial y que se podría referir a la dificultad que aparece cuando tratamos de comprender el objeto, más bien se refiere a los múltiples significados que el objeto puede tener al encontrarse en distintos contextos. Contraria a la idea de entender que el significado de un objeto se reduce a una única definición, en el EOS se considera que el significado de un objeto es un sistema complejo formado por partes o componentes, donde cada parte es un sentido o significado parcial que adquiere el objeto en determino contexto o situación.

En este trabajo proponemos que la complejidad de un objeto matemático no solo aparece de manera transversal en el currículum escolar en un momento o periodo dado, sino que también aparece a lo largo del desarrollo temporal del concepto, donde quizá algunos de los significados parciales del objeto se van "olvidando" en el transcurso de las etapas, años o siglos. Desde la psicogénesis de las ciencias se considera que "el paso de una etapa otra es por una reinterpretación total de los fundamentos conceptuales (no se logra por el incremento de conocimientos con respecto a la etapa precedente…)" (Piaget y García, 2016, p. 106). Por ejemplo, en una primera etapa, en la geometría las propiedades de las figuras y de los cuerpos se estudiaban como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o cuerpos, posteriormente, ocurrió una segunda etapa caracterizada por una puesta en relación de las figuras entre sí. En esta segunda etapa se puede involucrar el punto del origen de un sistema de referencia para trazar el vector-posición del punto situado dentro del segmento y así relacionarlos por métodos de álgebra vectorial (que es tradicional en las exposiciones contemporáneas); en una tercera etapa, relacionada con el programa de Erlangen, se definieron nuevas geometrías.

Metodología y desarrollo de algunos ejemplos

Se consideró una metodología cualitativa con un enfoque etnográfico (Martínez, 1998), donde se tiene como sujeto de estudio a los participantes de un taller experimental, cuatro profesores y dos estudiantes, y al profesor-investigador que impartió el taller "Geometría con números complejos" en la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP), en el estado de San Luis Potosí, México. Se consideró como objeto de estudio a los significados emergentes a partir de la interacción entre los sujetos en las distintas tareas planteadas, buscando descubrir las estructuras significativas que dan razón de las acciones de los sujetos de estudio. La información referente a los distintitos significados parciales relacionados con la proporcionalidad fue recogida en la forma más completa posible a través del análisis de libros de texto, de la experiencia de los docentes comentada verbalmente en clase, a partir de la producción de los docentes en la resolución de problemas en clase y de tarea, mediante la discusión entre pares y entre los participantes del curso con el docente-investigador sobre el material expuesto en clase.

Planteamiento de problemas-situaciones que involucran a la proporcionalidad

En nuestra práctica docente, el problema de "Encontrar las fórmulas para las coordenadas del punto que divide un segmento dado en una razón dada" se manifiesta como un problema muy difícil. Para introducir un puente entre dos escenarios detectados (con la dimensión uno y dos) con base en la revisión de varios libros de texto, proponemos un acercamiento paulatino a este problema por medio de las figuras donde estos elementos (el punto de división y el origen del marco de referencia) emergen de manera natural dentro de cada contexto.

Razones y proporciones: problemas en contextos geométricos en la dimensión uno

En las actividades propuestas resaltamos dos tipos de razones que permiten la construcción geométrica (localización del punto con regla y compás): una razón está dada por el número racional mientras la otra, por un valor irracional, representado por un ejemplo bien conocido de la razón áurea.

Para el primer caso escogemos una razón peculiar que se deriva de un ejemplo comunicado por uno de los autores (con referencia a un problema planteado por el Dr. R. Cantoral).

Ejemplo 1: Se conoce la razón $\frac{|AK|}{|KB|}=\frac{d}{b}$ en que un punto K divide el segmento AB y se pide detectar la ubicación del punto K, si los extremos del segmento A, B se representan por sus coordenadas $x_A=\frac{a}{b}$, $x_B=\frac{c}{d}$. La respuesta es que el punto K esta expresado por su coordenada $x_K=\frac{a+c}{b+d}$ en la recta numérica que contiene el segmento. La construcción del punto solo requiere el método de Tales.

Ejemplo 2. Para el caso cuando la razón no es representada por un número racional, proponemos la construcción de la llamada sección áurea, que aparece en la Proposición 30-VI de los Elementos de Euclides: Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte menor, es decir, $AB \div AR = AR \div RB$. La idea de la construcción geométrica está sugerida por la expresión analítica de la solución de la ecuación cuadrática que resulta de la definición de la razón áurea representada en la forma de proporciones $\frac{|AB|}{|AR|} = \frac{|AR|}{|RB|}$, que permite tratar coincidencia de dos razones irracionales en términos geométricos.

Destacamos que ambas construcciones en los Ejercicios 1 y 2 están relacionadas con una figura uni-dimensional que es un segmento.

Problema de establecer las fórmulas para las coordenadas en el caso uni-dimensional no presenta dificultades una vez escogido un punto de referencia en la recta, lo que permite asignar las coordenadas a los puntos-extremos del segmento en términos de distancias del origen $\vec{r}_K = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1+\lambda}, (\lambda \neq -1)$.

Comentario 1: en algunos libros de texto se emplea el contexto de la ley de palanca: que permite aclarar la interpretación de la fórmula (Bracho, 2009). El caso de ubicación del punto de equilibrio en un sistema con dos masas diferentes, representa un contexto tangible para el cálculo de coordenadas del punto de división del segmento dado en la razón dada. Consideramos que este contexto estático ayuda entender la estructura de fórmulas para coordenadas del punto de división como punto de posición de un soporte, si se sitúan las masas $m_1 \div m_2 = p \div q$ en los extremos A, B de un soporte. La fórmula deducida para el caso $\lambda = \frac{p}{q}$ obtiene la forma $\vec{r}_K = \frac{q\,\vec{r}_A + p\,\vec{r}_B}{p+q}$. En este caso, se dice que el punto K divide el segmento AB (realiza partición del segmento AB) en la proporción $p \div q$. Si $AK = p\,AB$, y $KB = q\,AB$, entonces, la razón en que K divide el segmento AB es, por la definición, $\lambda = \frac{AK}{KB} = \frac{p}{q}$. Los valores p, q son las coordenadas del punto K y se llaman coordenadas baricéntricas cuando $p + q = 1$ (Bracho, 2009). (Además se puede interpretar como una metáfora entre contextos extramatemático e intramatemático).

Sin embargo, para los casos de cuerpos de tres masas diferentes situadas en el espacio necesitamos otros contextos que requieren las consideraciones de figuras planas para generalización (contexto bi-dimensional).

Razones y proporciones: problemas en contextos geométricos en la dimensión dos

Partimos de los conocimientos previos de los estudiantes. Un problema directo, en un contexto bi-dimensional, está relacionado con la búsqueda del punto de intersección de una recta que pasa por el vértice de un triángulo y divide al lado opuesto en la razón dada $1 \div 1$ (se espera que estudiantes reconozcan que esta recta pasa por el punto medio del lado opuesto, y se llama mediana).

Para un problema inverso, se pide encontrar (recordar) la razón en la que la bisectriz de un ángulo en un vértice de un triángulo divide el lado opuesto (aquí pueden surgir varios métodos de demostración, sin embargo, es preciso solo usar paralelismo). En el nivel escolar solamente se considera el punto que se encuentra dentro del segmento que representa el lado del triángulo.

La importancia de que esta razón, establecida en el teorema de la bisectriz, es igual a la razón entre las longitudes de los lados que forman el vértice del cual se traza la bisectriz, consiste en que la proporción resultante involucra los segmentos no colineales en contraste con el problema de división uni-dimensional.

Además, se manifiesta un fenómeno de importancia crucial: existe otro punto más con la misma propiedad, y que se encuentra fuera del segmento que representa el lado (está en la prolongación del mismo lado). Este punto pertenece a la bisectriz del ángulo externo al ángulo de triángulo con el vértice del cual se traza la bisectriz.

Es preciso que los estudiantes realicen las construcciones de ambas bisectrices (que son perpendiculares entre sí) y los dos puntos notables: así la evidencia de la existencia del otro punto es lograda en las construcciones experimentales.

Estos conocimiento previos son indispensables para enfrentar la Situación-Problema (integradora): "Encontrar el conjunto de todos los puntos P en el plano tales que la razón de los segmentos que unen cualquier punto P con los dos puntos dados A y B sea el mismo".

Con estos requerimientos se debe formar una proporción $\frac{PA}{PB} = \frac{P'A}{P'B} = r$, $(r \neq 1)$ para cualquier punto $P' \neq P$ (se puede observar que el planteamiento tradicional para elipse e hipérbola relaciona las sumas y restas de distancias de dos puntos fijos, mientras aquí se considera el cociente). De los conocimientos previos mencionados, podemos constatar que sobre la recta AB se encuentran dos puntos con la propiedad expresada, a saber, el punto C, dentro del segmento AB, y el otro punto, sea el punto D, que esta fuera del segmento AB, y es el pie de la bisectriz del ángulo externo opuesto al lado AB.

Cuando P es cualquier otro punto (fuera de la recta AB) que cumple la propiedad del que buscamos, el conjunto es la Circunferencia de Apolonio. Este problema es muy antiguo que ha sido planteado y estudiado por Apolonio de Perga 265—170 a. C. de la Escuela de Alexandría, junto con otras cónicas, y nos provee de un paso hacía figuras planas (dos-dimensional) que requiere las consideraciones de puntos fuera de la recta (Arcos y Sepúlveda, 2011).

Observación 1: Los cuatro puntos sobre la recta CD que se relacionan con la proporción $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ forman el llamado cuaternio armónico, y la relación entre los segmentos en esta recta se llama la razón doble (o razón cruzada).

Observación 2: En el caso de un triángulo isósceles la razón $\frac{AC}{CB} = r = \frac{PA}{PB}$ es igual a uno, y punto C es el punto medio del segmento AB. ¿Qué podemos decidir sobre el punto D, que es su armónico conjugado? (Arcos y Sepúlveda, 2011).

Aquí, este planteamiento sencillo nos obliga considerar el caso límite para posiciones de los puntos D correspondientes a las posiciones del pie de la bisectriz, e introducir un punto absoluto, ideal, en infinito (o punto impropio de la recta AB).

Podemos resumir: Puntos de división emergen en la recta tanto dentro del segmento como afuera, dando una extensión de los casos tradicionales de la geometría elemental especialmente con la introducción de los puntos impropios (Arcos y Sepúlveda, 2011).
Sin embrago queda el problema de establecer las fórmulas para las coordenadas de estos puntos en el caso bi-dimensional.

Deducción de las fórmulas para las coordenadas del centro de gravedad (baricentro, centro de masas o centróide cuando las masas son iguales) respecto a un sistema de referencia relacionado con el triángulo

Posición del centro de gravedad según Arquímedes

El problema respecto a la ubicación del centro de gravedad de un triángulo es semejante al anterior en el sentido que el segmento se incluye como parte de nueva figura bidimensional, triángulo. En este contexto también es necesario abandonar (salir de) un segmento (una mediana) para buscar su punto común (de intersección) con el otro segmento (otra mediana), de este modo se extiende la percepción desde el espacio uni-dimensional del segmento a otros elementos del triángulo (otro objeto, del cual el objeto inicial forma una parte). O, se puede considerar como una metáfora (Rondero y Font, 2015) el problema del centro de masas de un sistema de cuerpos en contexto de física (sistemas en equilibrio). En este planteamiento el problema de ubicación del centróide ha sido resuelto por Arquímedes (287-212 a.C.). Su razonamiento ha sido de siguiente manera: se colocan las masas iguales en los vértices de un triángulo ABC, y sea O representa el centro de gravedad de esas masas, (a saber, si se apoye el triángulo en este punto, entonces se encontrará en el equilibrio). Ahora se trasladan dos de esas masas en el centro de equilibrio del lado correspondiente BC, es decir en el punto medio que es el centro de gravedad de estas dos masas. La posición del centro de gravedad de las tres masas no se cambia, pero está claro que el punto O debe situarse sobre la mediana AM del lado BC y debe dividirla en la razón $2 \div 1$ (contando del vértice A). El mismo razonamiento se aplica a cualquier otra mediana, lo que implica que todas tres medianas pasan por el punto O. Así Arquímedes demostró que en cualquier triángulo las medianas se intersecan en un punto (centróide del triángulo) y este punto divide la mediana en la razón $2 \div 1$ (según la ley de palanca de Arquímedes). Análogamente al problema anterior tenemos como la primera posibilidad ubicar el origen en uno de los vértices del triángulo y luego escoger el marco de referencia que no está relacionado con la figura, pasando de este modo al nivel bi-dimensional.

Un paso natural a los métodos vectoriales: Contexto geométrico con el centro de gravedad G de un triángulo

En el contexto geométrico la solución con los vectores solo involucra la posición del punto G, centro de gravedad, que es desconocida a priori, solo se requiere que el triángulo con vértices A, B, C debe estar en equilibrio, si toda la figura se apoye sobre un soporte situado en este punto G. Este significa que se anula la suma de los vectores $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$, que representan las fuerzas, es decir, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. ¿Cómo se localiza este punto? Se puede expresar $\overrightarrow{GC} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$. Analizamos la suma de dos vectores del lado derecho entre paréntesis: Es la diagonal del paralelogramo con los lados representados por cada vector de la suma. En este paralelogramo la otra diagonal es el lado AB, y como las diagonales del paralelogramo se cortan en los puntos medios, la mitad de la suma es el vector $\overrightarrow{GM}$, M es el punto medio del lado AB. Como resultado obtenemos $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$, o $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GM}$. Lo que se puede interpretar de la manera que el punto G divide el segmento CM en la razón 2:1 contando del vértice.

Fórmulas para las coordenadas del centro de gravedad respecto a un sistema de referencia no relacionado con el triángulo

La deducción de las fórmulas es estándar, con base en la relación entre los vectores de posición de los extremos y el punto de división, permite fácilmente establecer la relación $\vec{r}_K = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1+\lambda}$ $(\lambda \neq -1)$. Esta fórmula sirve también para el caso cuando los vértices se representan cuerpos con masas diferentes.

Resultados

En el transcurso de indagaciones realizadas por los participantes y con base de sus propias experiencias docentes, empleando los métodos socráticos en sus discusiones y las reflexiones de carácter histórico y filosófico se pueden identificar los siguientes logros.

Se aclararon las relaciones entre las ecuaciones que representan el mismo objeto geométrico, curvas de segundo grado o rectas. Los profesores de geometría analítica se dieron cuenta de que si una recta se expresa en forma de las ecuaciones algebraicas diferentes dentro del mismo registro semiótico entonces estas ecuaciones son proporcionales a la ecuación lineal general de esta recta.

Respecto a las razones: la importancia de distinguir entre valores racionales e irracionales se radica en el desarrollo histórico del concepto.

La proporcionalidad se debe considerar en varios aspectos: en aritmética contemporánea, entre magnitudes (de acuerdo con la teoría de proporciones de Eudoxo), entre segmentos geométricos (no necesariamente alineados) y segmentos dirigidos. Por ejemplo: El problema integrador nos obliga considerar dos posibilidades para localización de los puntos tanto dentro como fuera de la recta que contiene el segmento, e introducir los segmentos dirigidos.
Tenemos que resaltar, que el concepto de la proporcionalidad de los segmentos involucra dos razones que coinciden, lo cual es suficiente para determinar una línea recta que pasa por dos puntos dados, sin embargo, no expresa el concepto de linealidad. En el caso de semejanza de triángulos se requiere más de dos razones. También se construye las proporciones infinitas relacionadas con los números irracionales (la sección aurea) ARCOS.

Linealidad es la generalización de la proporcionalidad que se proviene de la igualdad de dos o más razones de los segmentos en geometría, expresada en términos numéricos de magnitudes (medidas) como proporcionalidad en aritmética.

El análisis de los textos reveló que en algunos libros de texto se emplea el contexto de corredor: debemos enfatizamos que no es adecuado relacionar el punto de división del segmento en una razón dada con un objeto físico en movimiento debido a varios argumentos (analíticos, mecánicos, etc.) o bien tan solo porque este punto no puede ocupar el lugar del otro extremo.

Entonces, surge la pregunta natural: Si se cambia la posición del punto, y no es movimiento debería ser considerada como una transformación geométrica, ¿de qué tipo?

El problema-integrador con el círculo de Apolonio nos permite aclarar: es una transformación proyectiva con el centro de proyección sobre la circunferencia, su invariante es la razón doble producido por los cuatro puntos alineados (pies de las bisectrices) C y D, que son conjugados armónicas de los extremos A y B del segmento AB (en este caso son dos puntos fijos de esta transformación proyectiva).

Algunos autores acompañan el problema de división del segmento mencionando una de las paradojas de Zenón. Pero estas paradojas han sido inventadas precisamente contra la idea de movimiento, considerándolo como ilusión.

Conclusiones

A través en nuestro análisis se ha revelado que cuando se hace una presencia de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas, se usan diferentes representaciones, se hacen énfasis sobre características pertinentes al contexto de problemas e indican las propiedades correspondientes. Así se evidencia que, como afirma EOS, uno de los componentes de la complejidad se relaciona con las representaciones semióticas.

Para el objeto matemático proporcionalidad hemos seleccionado diferentes contextos intramatemáticos y extra-matemáticos, a cada uno de los cuales se les asocia un conjunto de prácticas matemáticas donde se interviene el objeto matemático de nuestro interés.

Entre los problemas que surgieron en el transcurso del desarrollo histórico de la geometría
son de gran importancia las construcciones de configuraciones correspondientes a los casos relacionados con razones de segmentos geométricos en el sentido Pitagórico (VI siglo a.C) (racionales) e Inconmensurables (proporcionalidad en el sentido de Eudoxo (IV siglo a.C)

Problemas de los cursos universitarios respecto a cálculos de las coordenadas de centro de gravedad: de equilibrio de sistema de masas (conexto extramatemático) se conecta con el problema geométrico de centróide (conexto intramatemático).

Se pone énfasis en la proporcionalidad en los contextos algebraicas (entre pares de ecuaciones y vectores) y en el contexto aritmético (proporcionalidad de los coeficientes de las ecuaciones y componentes de vectores).

La asociación ecuaciones – configuraciones geométricas correspondientes confirma la afirmación en EOS "que se considere que el objeto se puede definir de diferentes maneras equivalentes, que se puede representar por distintas representaciones, etcétera" (Rondero y Font, 2015).

La secuencia de tareas para la enseñanza de la proporcionalidad demuestra representación de su complejidad y a la vez refleja el desarrollo del proceso de la formación del concepto contemporáneo de la linealidad y de geometría a lo largo de proceso histórico.
Se pretende realizar una configuración epistémica que es una herramienta poderosa del EOS que permite realizar un análisis a profundidad.

Referencias

Arcos, I. y Sepúlveda, A. (2011). *Desarrollo conceptual de la geometría*. Toluca: Devi Kali.
Bracho, J. (2009). *Introducción analítica a las geometrías*. México: Fondo de Cultura Económica.
Dedekind, R. (2014). ¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática. Madrid: Alianza Editorial.
Florey, F., G. (1993). *Fundamentos de Álgebra Lineal y Aplicaciones.* México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
Godino, D. J., Batanero, C. y Font, M. V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1
Lehmann, Ch. (1994). *Geometría analítica.* México: Limusa.
Martínez, M. M. (1998). La investigación cualitativa etnográfica en educación: manual teórico-práctico. México: Trillas.
Piaget, J. y Garcia, R. (2016). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI editores.
Rondero, C. y Font, V. (2015) Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias, 33.2,* 29-49. Barcelona: Unversitat Autònoma de Barcelona .
Schwerdtfeger, H. (1979). Geometry of Complex Numbers, Circle Geometry, Moebius Transformation, Non-Euclidean Geometry. New York: Dover Publications Inc.

ROMPIENDO LAS REGLAS DE LA SUMA DE FRACCIONES

BREAKING THE RULES OF ADDING FRACTIONS

Larissa Sbitneva, Nehemías Moreno Martínez, Margarito Ramírez Auces
Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Colegio de Bachilleres del estado San Luis Potosí (México)
larissa@uaem.mx, nehemias_moreno@live.com, margarito.ramirez@cbslp.edu.mx

Resumen
Se presenta una reflexión sobre las implicaciones matemáticas generadas a partir del conocimiento erróneo que tienen algunos estudiantes de bachillerato sobre la suma de fracciones mediante la operación $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Se propone una historieta, que tiene la finalidad despertar el interés de los estudiantes por las matemáticas, que se apoya en algunos elementos teóricos de la Educación Matemática Realista. Se describe una situación cuando dos personajes, Nacho y Mónica, al salir de un examen de matemáticas discuten sobre el problema de sumar fracciones. Nacho sorprende a Mónica con interesantes aportaciones que surgen a partir de reinvención de una estructura algebraica e incluye la interpretación geométrica que permite construcciones de cuaternas armónicas. Los descubrimientos de los estudiantes van más allá de lo que pedía el examen, pero no son conocidos por su profesor de matemáticas, el cual asigna una calificación basada en lo que evidencia el examen que demuestra mayores habilidades matemáticas en Mónica, quien sigue las reglas a pie de la letra.

Palabras clave: fracciones, matemática realista, cuaternas armónicas

Abstract
This paper presents a reflection on mathematical implications caused from the mistaken knowledge that some senior-high school students have about the addition of fractions through the operation $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. A story aimed at awakening students' mathematical interest is proposed. It is based on some theoretical elements of Realistic Mathematics Education. The story describes a situation in which two characters, Nacho and Monica, after finishing a mathematics test, argue about the problem of adding fractions. Monica was surprised at Nacho's interesting contributions which emerged from a re-invention of an algebraic structure and includes the geometric interpretation that allows constructing harmonic quaternaries. The students' findings go beyond what the examination asked for, but they are unknown by their math teacher, who assigned a mark based on what is evidenced in the test that shows greater mathematical skills by Monica, who literally follows the rules

Key words: fractions, realistic mathematics, harmonic quaternaries

Introducción

En este trabajo se describe una historieta, que tiene la finalidad despertar el interés de los estudiantes por las matemáticas, que se apoya en algunos elementos teóricos de la Educación Matemática Realista (EMR) (Alsina, 2009; Alsina, Novo y Moreno, 2016; Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2016). La historieta considera dos personajes, Nacho y Mónica, que son compañeros de grupo y cada cual tiene una concepción muy definida de las matemáticas. El personaje de Mónica se presenta como una alumna puntual, responsable, ordenada, pulcra en sus trabajos y en su presentación personal, sus padres están orgullosos de ella, pues en más de una ocasión por sus calificaciones ha estado en el cuadro de honor. Y el personaje de Nacho se muestra como un joven extrovertido de notas no tan brillantes, pero muy crítico y con gusto por los deportes, sin embrago, debido a sus calificaciones representa una preocupación para sus padres. En una ocasión al salir de un examen de matemáticas los personajes discuten sobre un problema de suma de fracciones y Nacho comenta a Mónica la solución (errónea) que obtuvo al resolver el problema, de donde posteriormente surgen interesantes descubrimientos a partir de la discusión establecida entre los personajes. Los descubrimientos de los estudiantes que van más allá de lo que pedía en el examen no son conocidos por el profesor de matemáticas de ambos personajes, el cual asigna una calificación basada en lo que evidencia el examen, el cual muestra errores algorítmicos. No es el caso de Mónica que obtiene una calificación satisfactoria al poseer mayores habilidades matemáticas y al seguir las reglas y los procedimientos al pie de la letra. Por su parte, Nacho plantea una forma de sumar fracciones, aunque incorrecta, cumple como operación con propiedades conmutativa y asociativa, más no lo hace con la propiedad de la existencia del elemento neutro e incluso presenta incongruencias respecto a la propiedad de orden.

Figura 1. Nacho explica a Mónica su método se sumar fracciones

En la figura 1 podemos observar que algorítmicamente la forma de sumar fracciones que expone Nacho es muy común entre nuestros estudiantes, sin embargo, en este caso Nacho guía a Mónica hacia una reinvención de una estructura algebraica e involucra la interpretación geométrica del resultado de sumar así en forma de coordenadas del punto que divide al segmento definido por los sumandos en una razón dada y además propone algunos problemas donde estas construcciones pueden ser empleadas. Las generalizaciones a los puntos de división externos al segmento sugieren enriquecer las exploraciones con construcciones de conjugados armónicos.

La historieta pretende mostrar algunas de las aportaciones que pueden surgir de un error en la forma de sumar fracciones y se ubica en un momento clave de aprendizaje no valorado en el contexto escolar. Y es exactamente la discusión que al término de un examen sostienen algunos alumnos, quienes en la defensa de sus respuestas contrastan y exponen sus conocimientos e ideas, reconocen sus errores y reafirman algunos conocimientos y procedimientos, actividad que promueve el aprendizaje matemático, pero no es reconocido por situarse en un contexto no controlado por el docente.

Cabe mencionar que, de acuerdo con los datos expuestos en las plataformas de calificaciones del Colegio de Bachilleres del estado de San Luis Potosí, México, lugar donde se llevó a cabo este trabajo, los resultados de las alumnas son superiores al de los alumnos, e incluso los alumnos reprobados en su mayoría son de sexo masculino, lo cual contrasta con las evaluaciones externas tales como PLANEA o las olimpiadas en las cuales en lo general los hombres obtienen mejores resultados.

El propósito de este trabajo es provocar reflexiones respecto de las formas de evaluar el trabajo y el aprendizaje de los alumnos y reconocer que hay temas cuyo contenido matemático requiere de mayor atención, tal como las operaciones con fracciones, los cuales han sido expuestos en diversos trabajos, por la dificultad que presenta su comprensión. Por ejemplo, se han advertido errores inducidos desde la forma de enseñar fracciones en todas sus interpretaciones (como partición, como cociente, como razón, como operador) que lleva a los estudiantes a construir solo agujeros conceptuales (de Di Pego, 2012). Otros han señalado que algunos estudiantes aparentan comprender las fracciones porque utilizan terminología de fracciones y dominan ciertos procedimientos, sin embargo, no reconocen los problemas donde estas pueden ser aplicadas (Parra y Flores, 2008).

Otros investigadores proponen enseñar la suma de fracciones a través del juego con regletas para motivar la participación y el entusiasmo (Meza y Barrios, 2010). En esta misma dirección, en este trabajo se presenta un análisis y algunas reflexiones lógicas sobre las implicaciones matemáticas generadas a partir de la tendencia que tienen algunos estudiantes (representados por un alumno que llamaremos Nacho) de sumar fracciones bajo el siguiente algoritmo: $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, el cual es erróneo de acuerdo al algoritmo que regularmente se enseña en la escuela. Cabe mencionar, que en el contexto de plano cartesiano (caso bi-dimensional) se propone una interpretación trigonométrica con las razones reducidas (una de las coordenadas es la unidad).

Marco referencial

La construcción de la historieta se apoyó en los principios de la EMR: (i) *principio de actividad*, que permite llevar al estudiante a pensar en la matemática como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder “haciéndola”. (ii) *principio de realidad*, que sugiere que las matemáticas se aprenden en situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos (iii) *principio de niveles*, donde los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión donde van de lo situacional a lo abstracto; (iv) *principio de reinvención guiada*, donde el aprendizaje se logra a través de la supervisión de una persona experta que lleva al alumno de un conocimiento matemático intuitivo a un conocimiento formal. A través de la lectura y comprensión de la historieta por parte de los estudiantes, se pretende conducirlos a través de los cuatros niveles de la EMR.

En la educación secundaria, uno de los algoritmos más utilizados para enseñar la suma de fracciones se basa en la fórmula dada por la expresión algebraica $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, lo cual centra la atención de los estudiantes en aprenderse a través la misma, esto es, se parte de enseñar el resultado de una actividad (la fórmula) más que de enseñar la actividad misma. Sin embargo, en el presente trabajo se adopta la postura de que la educación matemática debe dar a los alumnos la oportunidad, guiada por el maestro, de reinventar la matemática (no crean ni descubren las matemáticas). En este sentido, hacer matemáticas (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado (Alsina, Novo y Moreno, 2016). En otras palabras, el énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de construir una algoritmización.

El planteamiento matemático que está de fondo en la historieta ha sido el resultado de otorgar al estudiante, en la clase de matemáticas, la libertad para explorar sus creencias o tendencia “natural”, que se establece en el aula como incorrecta, acerca de la suma de las fracciones mediante la operación $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Se cuestionó entonces ¿qué implicaciones matemáticas surgen al escuchar a los estudiantes acerca de llevar a cabo la suma de fracciones mediante esta forma?, y también, ¿cómo guiar a los estudiantes en la búsqueda de dichas implicaciones matemáticas de una manera divertida?

Con lo anterior, se consideró el conjunto de las fracciones (representadas por una razón de dos números naturales) y $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ como una operación binaria y se exploró si satisfacía las propiedades de asociatividad, conmutatividad, elemento neutro y propiedad de orden.

Una vez realizada la exploración se seleccionó a la historieta, como medio de expresión artístico, para presentar de manera secuencial la verificación de las propiedades construyendo al mismo tiempo un relato entre dos personajes.

La historieta, de tipo humorístico, considera viñetas (recuadros donde tienen lugar los diálogos entre los personajes), ilustraciones (dibujos que transmiten al lector lo que ocurre), globos de texto (diálogos de los personajes) e iconos y signos (para representar emociones).

Desarrollo de algunos ejemplos

A continuación, se describe el contenido matemático.
Considerando el conjunto de las fracciones y la operación $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, se observa que dicha operación cumple la propiedad conmutativa, ya que no cambia el resultado al permutar los sumandos. También se puede observar que cumple la propiedad asociativa.

Sin embargo, no se cumple con la existencia de elemento neutro, ya que al considerar $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b}$, implica que $x = 0$ e $y = 0$, de manera que la fracción "neutra" debería de tener la forma $\frac{0}{0}$, lo que implica que no existe una fracción que representa un elementos neutro. Sin embargo, se sabe que hay conjuntos de números con operaciones que carecen el neutro, por ejemplo, en el conjunto de los números naturales el subconjunto de números pares, con la operación de multiplicación usual, no tiene neutro porque el neutro multiplicativo es uno y no pertenece al subconjunto de los números pares. Por otro lado, tampoco se verifica la propiedad de orden de los números reales ya que se debería tener que la suma de dos números positivos sea mayor que cada uno de ellos.

Lo más interesante es la siguiente consideración: $\frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{a+a}{b+b} = \frac{a}{b}$. En álgebra moderna un elemento con esta propiedad tiene nombre idempotente. Hay un ejemplo sencillo: si se define una operación de construir un punto simétrico respecto a un punto dado, entonces este centro de simetría es el elemento idempotente.

Desarrollo de actividades discursivas

Mónica: Hola, Nacho, ¿cómo te fue en el examen?, ¿pudiste resolver el problema de la suma de fracciones?

Nacho: Ohhh, por supuesto sumar fracciones es la cosa más fácil para mí.

Mónica: Ahh, yo pensé que las matemáticas eran difíciles para ti.

Nacho: sumar fracciones es fácil, la fórmula es muy simple, mira si tenemos dos números en la forma de fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ la suma es $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Mónica: ¡Nacho! ¡Eso es incorrecto! Tendrás mal el resultado ¡Esa operación no es válida! ¡Hay Nacho seguro la tienes mal!

Nacho: ¡Eso no puede ser! Mira Mónica, analiza bien mi método de sumar. Es una operación válida, incluso cumple la propiedad conmutativa, si cambiamos el orden de los sumandos el resultado es el mismo.

Por si fuera poco, también cumple la propiedad asociativa pues el resultado de sumar pares de las tres fracciones no depende si primero sumamos las dos fracciones primeras y luego el resultado obtenido sumamos con la tercera fracción, o bien de otro modo: formamos la suma de la primera fracción con el resultado de sumar la segunda con la tercera. Solo gracias a esta propiedad se puede hablar de la suma de tres o más fracciones.

Mónica: Mmmm pues me empieza a parecer interesante tu forma de sumar…. Pero y ¿el elemento neutro? Tu sabes que el elemento neutro de la operación suma de los números reales es el cero y en este caso sería una fracción $\frac{x}{y}$ tal que: $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Si calculamos según esta regla $\frac{a}{b} \oplus \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b}$, esto solo se cumpliría si $x = 0$ e $y = 0$. Lo cual implicaría que el elemento "neutro" sea $\frac{0}{0}$ y tú sabes que no está permitido dividir entre cero por tanto no hay neutro en tu forma de sumar.

Nacho: Mmm bueno, esto no es del todo importante, pues sabemos que hay conjuntos de números con operaciones buenas que carecen de elemento neutro.

Por ejemplo, en el conjunto de números naturales el subconjunto de números pares, con la multiplicación usual, no tiene neutro, porque el neutro multiplicativo es uno y no está entre los números pares.

Mónica: Ok, ok, sin embargo, no has verificado las propiedades de orden que se cumplen para los números reales. La suma de los dos números positivos debe ser mayor que cada uno de los sumandos y tu forma de "sumar" no cumple con esto: observa que el resultado de la "suma" de dos fracciones no es mayor que cada uno de los sumandos, sino que está entre los sumandos, esto es $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Y esto te lo puedo probar de forma general, observa: comencemos por definir que $a,\ b, c, d$ son números naturales, por tanto si una fracción es menor la otra, digamos, si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, se cumple $ad < cb$ o bien $cb - ad > 0$ ¿de acuerdo?

Demostremos pues que la "suma" es menor que el sumando $\frac{c}{d}$:
$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d)-d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{cb+cd-da-dc}{d(b+d)} = \frac{cb-da}{d(b+d)}$, lo cual obviamente es mayor que cero pues de acuerdo a lo establecido $cb - da > 0$.

Y seguramente de la misma forma podemos demostrar que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$.

Figura 2. Nacho verifica que con su método de sumar fracciones el resultado es menor que uno de los sumandos

Podemos observar que la discusión continua en la figura 2 donde Nacho aborda un ejercicio en particular.

Nacho: Pensemos en dos fracciones $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}\ y\ \frac{c}{d}=\frac{9}{2}$ y marcamos los puntos con las coordenadas correspondientes sobre un eje horizontal.

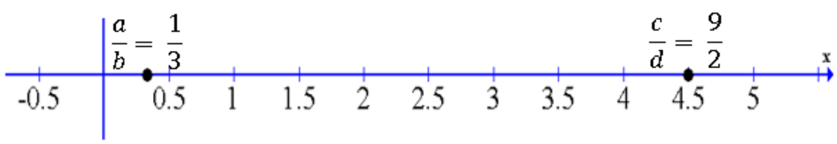


Figura 3. Ejemplo con las fracciones en el eje numérico

En la figura 3 exponemos el caso particular que Nacho elige para continuar su explicación acerca de su forma de "sumar".
Nacho: Observa que si usamos mi manera de "sumar" obtenemos

$\frac{a}{b}\ \oplus\ \frac{c}{d}=\frac{a+c}{c+d}=\frac{1}{3}\ \oplus\ \frac{9}{2}=\frac{1+9}{1+3}=\frac{10}{5}=2$. Llamemos a este valor x_C=2, es decir, la coordenada del punto C, como en la figura 4.

Ahora observa algo interesante: el punto C divide al segmento llamémoslo AB en la razón 2:3 si asignamos las coordenadas $x_A=\frac{1}{3}$, y $x_B=\frac{9}{2}$.

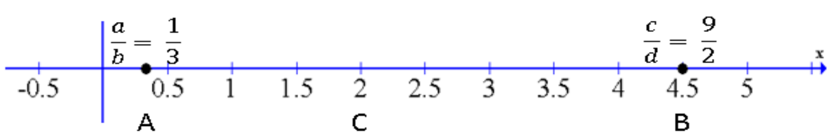


Figura 4. Ejemplo con los puntos determinados por sus coordenadas

¡Compruébalo tú misma!
Mónica: $\frac{AC}{CB}=\frac{\frac{2}{1}-\frac{1}{3}}{\frac{9}{2}-\frac{2}{1}}=\frac{\frac{6-1}{3}}{\frac{9-4}{2}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{3}$, es correcto e incluso se puede probar de forma algebraica y el resultado siempre será $\frac{d}{b}$.

Nacho: Y viene lo mejor… Observa esta interpretación geométrica:
Construyamos sobre el segmento AB un triángulo AKB cuyos lados sean $AK = l = 2$ y $BK = m = 3$, tendremos entonces un triángulo como en la figura 5:

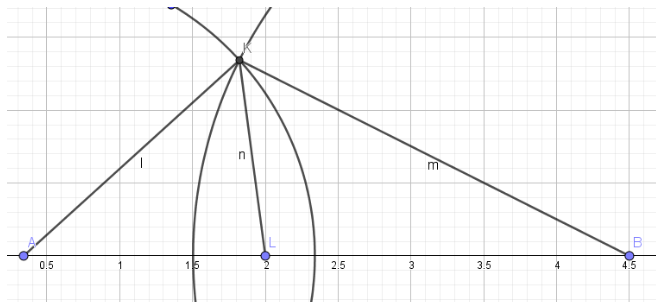


Figura 5. Construcción del punto de división del segmento AB

Observa que con $AK = 2$ y KB=3, la bisectriz del ángulo AKB corta AB exactamente en el punto L, con su coordenada x_L =2 ¡no te parece sorprendente!

Mónica: Pues de hecho eso es el teorema inverso del teorema de la bisectriz que según mis apuntes dice:
Teorema: La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos cuya razón es igual a la razón de los lados que forman el ángulo, es decir en el triángulo BAC, ver Fig.6, si AD biseca al ángulo A entonces $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

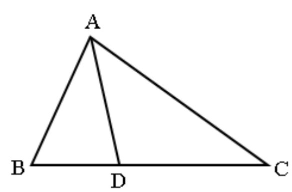


Figura 6. Teorema de bisectriz de un ángulo de un triángulo

Entonces, en la figura 5 el segmento KL es la bisectriz del ángulo AKB en el triángulo AKB porque divide al lado opuesto en la razón que es igual a la razón que forman las longitudes de sus lados $\frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$ y $\frac{AL}{BL} = \frac{AK}{BK} = \frac{2}{3}$ (por nuestra construcción de los lados).

Nacho: ¡Pero además existe algo con la bisectriz del ángulo exterior, sorpréndete! Mira donde corta al eje Ox.

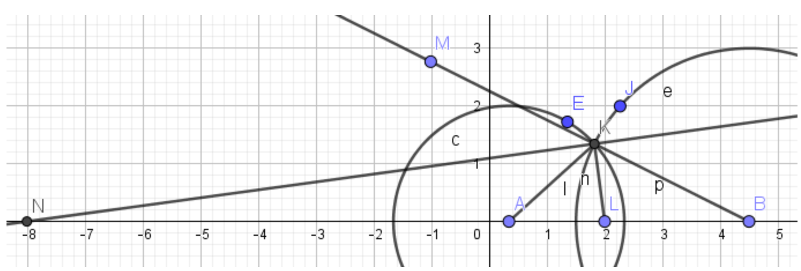


Figura 7. Bisectriz del ángulo externo

Observa en la figura 7, que su pie está en el punto N cuya coordenada es $x_N = -8$. Como todos los puntos A, B, L, N se encuentran sobre el mismo eje horizontal podemos considerar los segmentos dirigidos y entonces ocurren valores negativos en las razones ya que el segmento AN se dirige a la izquierda, en el sentido negativo del eje, y NB, a la derecha, en el sentido positivo del eje Ox. Si $\frac{AL}{LB} = \frac{2}{3}$, entonces $\frac{AN}{NB} = -\frac{2}{3}$. Comprobemos lo que te digo.

Tenemos para la magnitud del segmento (su longitud con el signo) $AN = \frac{-25}{3}$, mientras que la longitud del segmento $NB = \frac{25}{2}$. Entonces, la razón $\frac{AN}{NB} = \frac{\frac{-25}{3}}{\frac{25}{2}} = -\frac{2}{3}$ (ver Fig. 8).

Mónica: Es sorprendente como se relaciona tu forma de sumar con otros temas de la matemática, te felicito, eso no es lo que pedía el examen, pero es muy interesante.

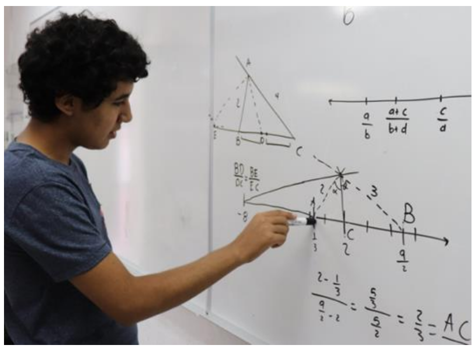


Figura 8. Construcción de segmentos dirigidos sobre el eje numérico

Interpretación geométrica de la "suma" como coordenada del punto de división

Continuemos ahora trabajando sobre el tema que Nacho y Mónica iniciaron con su conversación y vamos a buscar la expresión para la coordenada del punto de división de un segmento determinado por dos fracciones en el caso general. Empleando la figura 5 y considerando punto L como el que divide el segmento A, tenemos las expresiones para las longitudes de los segmentos en términos de las coordenadas de sus extremos: $AL = x_L - x_A$, $LB = x_B - x_L$. De acuerdo con la definición de una razón $r = \frac{AL}{LB} = \frac{x_L - x_A}{x_B - x_L}$.

De esta ecuación podemos obtener $x_L - x_A = r(x_B - x_L)$ y simplificando tenemos $x_L(1 + r) = (rx_B + x_A)$, de donde deducimos la fórmula general, solo cuando $(1 + r)$ no es cero, $x_L = \frac{x_A + rx_B}{(1+r)}$, $(1 + r \neq 0)$.

Es preciso resaltar que en la geometría euclidiana solo consideran las razones positivos, sin embargo, veamos un problema sencillo: en la prolongación del segmento AB encontrar el punto P tal que su distancia del punto A sea el doble de la distancia del punto B (Vyugodski, 1963). Sean, por ejemplo, los puntos A, B dados por sus coordenadas $x_A = 1$ y $x_B = 3$. El punto P que buscamos divide al segmento AB en la razón $r = \frac{AP}{PB} = -(2 \div 1)$ (el signo menos indica que el punto está fuera del segmento). Expresamos las razones $(x_P - x_A) \div (x_P - x_B) = -2 \div 1$, de donde, $x_P = x_A - 2(x_P - x_B)$, entonces,

$2x_P - x_P = x_A + 2x_B$, y $x_P = -1 + 2 \cdot 3 = 5$. O, de otro modo, aplicando la fórmula general, encontramos directamente $x_P = \frac{x_A + rx_B}{(1+r)} = \frac{1+(-2)3}{(1+(-2))} = 5$.

Interpretación geométrica con los Conjugados Armónicos (cuaternas armónicas)

Existe una construcción geométrica muy antigua que ilustra las situaciones con las parejas de los cuatro puntos colineales C,D y A, B tales que se verifica $\frac{AC}{CB} \div \frac{AD}{DB} = -1$ que son conocidos desde los tiempos de Pitágoras como Conjugados Armónicos (cuaternas armónicas) (Sbitneva, Moreno Martínez, Serna Herrera, 2017). En la figura 7 se ven los puntos de conjugados armónicos, pues la razón doble $\frac{AL}{LB} \div \frac{AN}{NB} = -1$ es la razón armónica.

Si continuara la discusión entre Nacho y Mónica seguramente a él le surgirían ideas como las siguientes: por cierto, ¿por qué son armónicos?

Uno sabe que los tres valores $u, v\, w$ que representan las longitudes de los segmentos digamos $AB, BC\ AC$ forman una terna armónica si la semisuma de sus recíprocos es igual al recíproco del tercero $\frac{1}{2}(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}) = \frac{1}{w}$.

Ante esto Mónica relacionaría esta información con la obtención de la media aritmética:

-"Yo ya conocía de cómo construir media aritmética que es $\frac{1}{2}$(u+v) y también la media geométrica que es $(u \times v)^{\frac{1}{2}}$ (pues, el último se representa como la altura del ángulo recto del triángulo inscrito dentro de un circulo con la hipotenusa como diámetro, lo que ilustra la relación notable entre estas dos magnitudes). Ahora conozco el método de construcción del medio armónico".

A lo cual Nacho diría:

En mi ejemplo, si w representa la longitud del segmento AN de la figura 7, y $AL = u$ y $LB = v$, se cumple. También hay un método elemental de construirlo: En un trapecio el segmento paralelo a las bases si pasa por el punto de intersección de las diagonales representa media armónica entre las longitudes de las bases.

Interpretación vectorial de la "suma" $\frac{a}{l} \oplus \frac{b}{m} = \frac{a+b}{l+m}$ en un plano cartesiano

Se puede representar cualquier fracción $\frac{a}{l}$ como la pareja de números (a, l), es decir, como un punto A de un plano cartesiano con las coordenadas (a, l), y también como el vector $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ con las coordenadas (a, l) en este plano cartesiano con el origen O. Del mismo modo podemos ver la otra fracción $\frac{b}{m}$ que es el otro par de valores (b, m), que pueden ser interpretados como coordenadas del otro punto B, o como el vector $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Con esta óptica nuestra "suma" $\frac{a}{l} \oplus \frac{b}{m} = \frac{a+b}{l+m}$ representa el vector con las coordenadas $(a+b, l+m) = \vec{w}$ y, por la ley de paralelogramo de la suma de dos vectores geométricos expresada por medio de sus coordenadas, obtenemos $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

También podemos ver la relación con las funciones trigonométricas,

Reducimos el vector (a, l) a la forma $\left(\frac{a}{l}, 1\right)$, que representa las coordenadas un vector $\vec{p} = \left(\frac{a}{l}, 1\right) = \frac{1}{l}(a, l)$, $\vec{p} = \frac{1}{l}\vec{u}$, colineal al vector $\vec{u}$, y observamos que $\vec{p} = \frac{1}{l}\vec{u}$ caracteriza la misma recta por el origen con la pendiente $k = tg\ \theta = \frac{l}{a}$, siendo su vector director.

De modo análogo formamos el vector reducido $\vec{q} = \frac{1}{m}(b, m) = \left(\frac{b}{m}, 1\right)$, $\vec{q} = \frac{1}{m}\vec{v}$.

Luego, si $k = tg\,\theta = \frac{l}{a}$ para la recta con vector director $\vec{u}$, entonces $\frac{a}{l}$ representa $\cot\theta$.
Del mismo modo $k_1 = tg\,\varphi = \frac{m}{b}$, para la recta con vector director $\vec{v}$, entonces $\frac{b}{m}$ representa $\cot\varphi$. Nuestra "suma" $\frac{a}{l} \oplus \frac{b}{m} = \frac{a+b}{l+m}$ representa el vector con las coordenadas $(a+b, l+m) = \vec{w}$, su forma reducida será $\left(\frac{a+b}{l+m}, 1\right)$.
De este modo se puede ver los puntos $\left(\frac{a}{l}, 1\right)$ y $\left(\frac{b}{m}, 1\right)$ como puntos de intersección de las rectas OA y OB (con las pendientes correspondientes) con el eje de cotangentes. Por eso el punto

$$\left(\frac{a+b}{l+m}, 1\right)$$

sería la representación del punto de intersección con el eje de cotangentes de una recta intermedia entre nuestros dos rectas iniciales.

¡Sin embargo, no representaría ninguna relación entre los ángulos!

Aplicación en un contexto de la vida cotidiana: relación de concentraciones

La interpretación de las fracciones que expresan las concentraciones de las soluciones proviene de la Conferencia Magistral en RELME 31 comunicado por el DR. R. Cantoral. la pareja de coordenadas reducida nos expresa la cantidad de una sustancia para una unidad de líquido (por ejemplo). Así las fracciones simplemente indican que $a \div l = \frac{a}{l} \div 1$,
de acuerdo con las definiciones de las proporciones.

Se puede extender el discurso sobre proporciones geométricas debido a Eudoxo y su relación con inconmensuralidad e irracionalidad (lo que significaba sin razón).

Implicaciones

El propósito de presentar este trabajo es provocar la reflexión en los docentes de matemáticas en torno a la forma de evaluar a esos alumnos cuando en ocasiones sus ideas o sus formas de trabajo no se ajustan al procedimiento visto en clase, sabemos que es complicado encontrar algunos Nachos en nuestro grupo, sin embargo, recordemos que muchos de los matemáticos que nos presenta la historia en su momento fueron catalogados como alumnos no muy brillantes.

Por otro lado, pretendemos que en cada aula provoquemos este tipo de discusiones post examen ya sea a través de pequeños grupos o parejas y aunque esto no cambie la calificación sin duda provocará aprendizaje, el cual permitirá una mayor comprensión de nuestra asignatura y nos ahorrará algunos dolores de cabeza.

Algunos resultados que podemos compartir:
Materiales didácticos para proponer los problemas que fomenten el pensamiento lógico deductivo basado en resultados de búsqueda de las cuestiones coherentes.

En las fuentes bibliográficas encontramos material que nos ha proporcionado las respuestas a las preguntas planteadas en el texto, así como aclarar la relevancia del tema, y todo esto es el resultado de indagación de artículos de investigación. La forma de sumar fracciones que propone Nacho es un re-invento de la idea del mediante, que fue producido a mediados del siglo XIV, sin embargo fue publicado solo en 1801 por Ch. Haros, quien lo aplicaba a las necesidades de convertir cada fracción a su representación decimal equivalente. Ahora es conocida como sumas de Farey debido a O. Cauchy (1816), quien la estudió y demostró sus propiedades: cada nuevo término de la sucesión de Farey es el mediante de sus vecinos, de aquí es el término. Cabe destacar que nuestro enfoque es geométrico: con las interpretaciones geométricas y trigonométricas demostramos que su valor se encuentra estrictamente entre dos valores de las fracciones sumandos. También el mediante tiene el mismo valor que el promedio de coordenadas de dos vectores: dado que la razón $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ y $\left(\frac{l+m}{2}\right)$ da el mismo valor que $\left(\frac{a+b}{l+m}\right)$ que es el mediante.

Por otro lado, si consideramos la operación de Nacho como operador, que transforma segundo miembro por medio del primer, obtenemos una transformación proyectiva (con su invariante, razón doble, o cuaterna armónica como en nuestro ejemplo numérico).

Algebraicamente, si consideramos la fracción como el cociente, entonces es un número racional, que representa toda clase de equivalencia, y se pierda la propiedad de asociatividad. Por eso es importante distinguir entre los conceptos de fracción como razón de dos números naturales y el cociente que es un número real.

En publicaciones hay más aplicaciones en álgebra abstracta, geometría diferencial de espacios proyectivos y sistemas dinámicos. Por ejemplo, en el álgebra moderna esta operación se relaciona con un álgebra dos dimensional representada por las matrices 2x2, y que representa los números dobles, o números de Cayley. En esta forma se descubren las relaciones profundas con la geometría diferencial de espacios proyectivos en la dimensión cinco.

Conclusiones

Mediante la historieta se pretende que los estudiantes logren un acercamiento a algunos conceptos matemáticos de gran importancia como los de operación binaria, axiomas de grupo, propiedades de orden. A través del discurso de los personajes de la historieta se busca que el estudiante adquiera la libertad de cuestionar las reglas que les presentan en el salón de clases, las cuales aparecen frecuentemente como objetos acabados prescindiendo de cualquier explicación del por qué dichas reglas se plantean de esa manera.

La interpretación geométrica permite desarrollar la intuición y creatividad.

La interpretación trigonométrica permite relacionar aspectos algebraicos y geométricos para interpretar las relaciones entre las magnitudes que surgen en las consideraciones.

Las generalizaciones a los puntos de división externos al segmento sugieren enriquecer las exploraciones con construcciones de conjugados armónicos. Lo que permite entrar de una manera natural a la geometría moderna.

Con esto, se pretende que los alumnos desarrollen un pensamiento crítico, la creatividad, rigor y razonamiento lógico, en concordancia con lo declarado por Hipatia de Alejandría:
defender el derecho a pensar, incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar.

Deseamos expresar nuestros agradecimientos al Lic. Dagoberto Gerardo Pérez Moreno, director del plantel 28 del colegio de bachilleres del estado de San Luis Potosí, por las facilidades para realizar las fotos en el plantel, a Eduardo Jaziel Juárez Martínez por representar el papel de Nacho en la historieta y a Citlalli Guadalupe Ramírez Santana por representar el papel de Mónica.

Referencias

Alsina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 119127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á., Novo, M. M. L. y Moreno, R. A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *5(1)*, 1-20.

Berciano, A. A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, S. M. (2016). Tratamiento de la orientación espacial en el aula de Educación Infantil desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. *NÚMEROS, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 93, 31-44.

De Di Pego, V. P. (2012). Las fracciones: ¿problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. *Revista Pilquen, Sección Psicopedagogía*, *8*, 1-12.

Meza, S. A. y Barrios, G. A. (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones. *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Trabajo presentado en Bogotá, Colombia.* Recuperado el 26 del junio de 2019 de http://tiny.cc/iv564y

Parra, A. M. y Flores, R del C. (2008). Aprendizaje cooperativo en la solución de problemas con fracciones. *Educación matemática, 20(1)*, 31-52.

Sbitneva, L., Moreno Martínez, N. y Serna Herrera, L. (2017). Experiencias en el desarrollo de la visualización de invariantes geométricos en el contexto de la visión 3d por computadora con el apoyo de Geogebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1543-1552.

Vyugodskiy, M.Y. (1963). *Geometría Analítica.* Moscú: Literatura Físico-Matemática.

RAZÓN DE CAMBIO BASADA EN EL USO DE DISPOSITIVOS MÓVILES

RATIO OF CHANGE BASED ON THE USE OF MOBILE DEVICES

Nidia Dolores Uribe Olivares, José Trinidad Ulloa Ibarra, Juan Felipe Flores Robles
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 100, Universidad Autónoma de Nayarit, Universidad UNIVER (México)
nidy98@hotmail.com, jtulloa@uan.edu.mx, juan.f10res@hotmail.com

Resumen
Este documento presenta los avances sobre el diseño, experimentación y análisis de una situación didáctica cuyo objetivo fue favorecer el aprendizaje de la razón de cambio con actividades mediadas con el uso de la tecnología Arduino, se fundamentó en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, que es un enfoque cognitivo desarrollado por Raymond Duval. El objetivo es que los estudiantes de nivel medio superior logren transitar entre los diferentes registros. Contiene la propuesta del tema, los objetivos, la revisión literaria, el marco teórico que sustenta nuestro trabajo, la metodología y el estado en que se encuentra actualmente nuestra investigación.

Palabras clave: razón de cambio, arduino, dispositivos

Abstract

This paper presents the advances on the design, experiment and analysis of a didactic situation aimed at favoring the learning of the ratio of change with Arduino technology mediated activities. It was based on the Theory of Registers Semiotic Representation, which is a cognitive approach developed by Raymond Duval. Its objective is that upper-middle school students can move among the different registers. It includes topic, objectives, and bibliography review, as well as, the theoretical framework that supports our work; the methodology and the present state of our research.

Key words: ratio of change, arduino, devices

Introducción

La relación entre las matemáticas y el hombre ha sido latente y progresiva surgiendo como una necesidad en la resolución de situaciones, en la actualidad ha llegado a ocupar un lugar importante en la sociedad con los avances científicos y tecnológicos. Bell (2016) indica que la historia de las matemáticas comienza en el Oriente hace 2000 AC. aproximadamente, donde los babilonios poseían una gran cantidad de material que puede ser clasificado el día de hoy como perteneciente al álgebra elemental. Más tarde aparece en Grecia donde son sometidas a discusiones filosóficas, tomando así el sentido moderno de ciencia.

A pesar que, desde hace más de dos milenios de vínculo como parte central de formación del hombre, se encuentra en peligro puesto que la educación referente a estas ha ocupado una forma tradicionalista existiendo un vacío y mecanización en simple resolución de "problemas", donde no se conduce realmente al desarrollo de una habilidad formal, ni a una comprensión efectiva de las mismas.

A lo largo del tiempo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas han surgido diversas teorías. Las cuales han sido implementadas según las necesidades y exigencias del contexto. Debido a que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso cognitivo, donde se requiere el utilizar diferentes sistemas de representación. Estas resultan importantes no sólo para comunicar el pensamiento matemático, sino para realizar actividad matemática. De igual forma resulta importante destacar que, la coordinación entre los diferentes sistemas de representación aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y que la movilidad entre ellos podría determinar que el individuo ha desarrollado una aprehensión conceptual del objeto matemático estudiado.

El presente trabajo expone una relación teórica de Representaciones Semióticas de Raymond Duval y en la Génesis Instrumental de Luc Trouche, esto con el fin de tener un referente teórico respecto a la construcción del conocimiento de la muestra aquí utilizada.

Planteamiento del problema

La educación en México dentro de los planes y programas de estudio pertenecientes a educación media superior es posible identificar la falta de unidades temáticas que faciliten la comprensión de las matemáticas. Tanto para la enseñanza por parte del docente como para facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Duval (2012) expresa la problemática que enfrenta la didáctica de las matemáticas. En donde se ven como algo ajeno o paralelo a la persona y al mundo que le rodea. Comienza así a cuestionarse constantemente "¿y eso para qué me va a servir?" dejando a un lado el sentido de las mismas. Por lo anterior, es posible expresar que la relación entre el sujeto y las matemáticas no tienen un sentido real por las implicaciones didácticas que han suscitado.

La presente investigación se realiza en el Centro de Bachillero Tecnológico Industrial y de Servicios No. 100 (CBTis No.100) ubicado en la localidad de Francisco I. Madero, Nayarit donde la matrícula escolar es de 841 estudiantes regulares. En la formación de estos se encuentra la materia cálculo diferencial, cursada en quinto semestre y tiene una matrícula aproximada de 315 estudiantes activos. Dentro de estos, el índice de reprobación es del 90% de los estudiantes que la cursó, es decir, de 315 estudiantes que cursaron cálculo diferencial en el año 2018 tuvo una reprobación de 285.

En el tiempo durante el cual se ha formado parte de la plantilla docente del plantel y aunado a la perspectiva de Gaspar de Alba (2011) es posible inferir que la asignatura de cálculo diferencial se aborda desde una perspectiva algebraica y de una manera enteramente dirigida, culminando en la resolución de problemas donde en muchas de las ocasiones no existe una aprehensión conceptual verdadera. Esto contribuye a que el estudiante presente dificultades para lograr una conexión más profunda entre lo que se observa en el salón de clases y las aplicaciones que el tema pueda tener en la vida real.

En este sentido surge la pregunta de investigación respecto al aprendizaje los estudiantes la cual es ¿Cómo relacionar la razón de cambio en situaciones cotidianas? He aquí donde se presenta el reto al docente de ampliar el panorama de los estudiantes, causar un impacto en la perspectiva de los alumnos y propiciar realmente la abstracción y construcción de conocimientos significativos.

Por lo que se propone el proyecto "Razón de cambio basada en el uso de dispositivos móviles" donde se plantea como objetivo hacer un análisis de la razón de cambio por medio de uso de la tecnología, particularmente los dispositivos móviles. Siendo una fuente de aprendizaje motivador y estímulo en el que los estudiantes interactúan y colaboran entre sí, mientras que el docente adapta las actividades según las necesidades colectivas e individuales de los mismos. Se basa en la necesidad de cambiar el paradigma del proceso de aprendizaje que se desarrolla sin saber por qué y para qué o su necesidad en la vida a un aprendizaje con sentido.

Aunado el hecho de que dicho proyecto está centrado en los intereses de los estudiantes provoca un mayor impacto en estos y así coloca al alumno en el centro de su proceso de aprendizaje.

Se retoma la idea de Dewey (citado por Arceo, 2006) el cual menciona que es indispensable que la enseñanza se funda en intereses reales, donde el maestro debe explotar éstos, así como las tendencias del estudiante para lograr el aprendizaje, es decir, el docente debe de reincorporar a los temas de estudio en la experiencia. Además de diseñar actividades que partieran de los intereses de los alumnos para así proporcionar experiencias significativas en los mismos. Los intereses podían cambiar, desarrollarse, conectarse y asociarse a otros intereses con la ayuda del docente.

El proyecto aquí presentado facilita el uso de programas interactivos y dispositivos móviles que en el área de matemáticas ha permitido a los alumnos conceptualizar algunos conceptos matemáticos que anteriormente los estudiantes solamente memorizaban, pero no había una verdadera comprensión ni aprehensión por lo que no le quedaba claro a qué se referían. Algunos estudios han reportado que el uso de software en actividades de aprendizaje ayuda a explorar elementos importantes del pensamiento matemático, como a la fecha se han desarrollado una gran cantidad de softwares específicos para matemáticas como Derive, Logo, GeoGebra, Mathematica, Cabri Geometre y Tracker entre otros, consultando algunos estudios de cómo el empleo de alguno de estos micro mundos ayudaría a los alumnos a construir su conocimiento.

Marco teórico

A lo largo del tiempo en el aprendizaje-enseñanza de las matemáticas han surgido diversas teorías las cuales han sido implementadas según las necesidades y exigencias del contexto. Por lo que, para lograr el objetivo, se fundamenta esta investigación en la teoría de Representaciones Semióticas de Raymond Duval y en la Génesis Instrumental de Luc Trouche.

Oviedo, Kanashiro, Bnzaquen, & Gorrochategui (2012) citando a Duval (2004) mencionan que "el aprendizaje de la matemática es un campo de estudio propicio para el análisis de actividades cognitivas importantes como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas y la comprensión de textos" (p.30).

Debido a que el aprendizaje de las matemáticas es un proceso cognitivo, se requiere el utilizar diferentes sistemas de representación. Estas representaciones resultan importantes no sólo para comunicar el pensamiento matemático, sino para realizar actividad matemática. Resulta importante también destacar que, la coordinación entre los diferentes sistemas de representación aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y que la movilidad entre ellos podría determinar que el individuo ha desarrollado una aprehensión conceptual del objeto matemático estudiado. Donde al ser objetos no reales los conceptos matemáticos, es necesario recurrir a diversas representaciones, siendo por ello, la semiótica una parte fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, no obstante esta no es una tarea natural para los alumnos, presentando una gran dificultad para los mismos, puesto que estos perciben un "distanciamiento entre las formas del pensamiento matemático y las formas de pensar fuera de las matemáticas, aunque el conocimiento matemático se pueda usar en la vida real" (Duval, 2006, p.144).

La interpretación y análisis de los objetos y el aprendizaje de las matemáticas está íntimamente ligado, D'Amore & Godino (2006) indican que

> Los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto de su mera definición matemático. (p. 180)

Las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o del mundo interior. Logrando representar en la mente aquello que se percibe o imagina. Dichos conjuntos de símbolos o signos que representan algo pueden ser externos o internos. Por ejemplo: un mapa, diagrama, símbolos en empleados en física, química y matemáticas. Estas representaciones externas son conocidas como representaciones semióticas.

En el aprendizaje de las matemáticas es imprescindible que los alumnos empleen representaciones semióticas, presentándose el reto de lograr que los mismos comprendan y realicen dichas representaciones. Duval (2006) menciona que

> La actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados; sin esta coordinación dos representaciones diferentes significaran dos objetos diferentes, sin ninguna relación entre ambos, incluso si son dos "contextos de representación" diferentes del mismo objeto. (p.145)

Donde los estudiantes sean capaces de transferir aquello que se ha aprendido a nuevos contextos realizando una conversión de las representaciones, implicando un análisis y comprensión, puesto que involucra una relación entre los diversos contenidos de representación de los conceptos, esto es, que les sea posible el relacionar muchas maneras de representar los contenidos matemáticos. Tamayo (2006) sustenta que

> En el conocimiento de los procesos de construcción y transformación de representaciones intervienen diferentes tipos de actividades, dentro de las que se destacan las de formación, como aquellas representaciones de algo a partir de un conjunto de caracteres de intencionalidades; las de tratamiento, cuando una transformación produce otra representación en un registro distinto al de la representación inicial, por ejemplo, la transformación analógica a la digital. (p. 41)

Existe un vínculo entre forma y contenido del concepto, donde es importante recalcar la transposición didáctica y el proceso de enseñanza del concepto, de tal forma que debe existir un paso de una representación semiótica a otra que no implique una distorsión del concepto. Para impulsar a los alumnos en la conversión de representación el uso de situaciones de la vida cotidiana es importante, ya que demanda emplear sus propias experiencias y representaciones mentales, aunando la posibilidad de dar sentido a las representaciones semióticas y con ello la comprensión de los conceptos matemáticos, dando un panorama más accesible para los estudiantes, puesto que puede ayudar a entender la forma de traducir la información.

Asimismo, el ubicar el aprendizaje en el análisis de situaciones reales relacionadas directamente con el entorno promueve que los estudiantes piensen y actúen con base al diseño de una situación, elaborando un plan con estrategias definidas, para dar una solución a una interrogante y no tan solo cumplir objetivos curriculares. Esto provoca un mayor impacto en estos y así coloca al alumno en el centro de su proceso de aprendizaje, siendo agentes plenamente activos. Arcavi (2012) menciona que

> Si adoptamos el principio de que toda educación matemática debe aspirar a desarrollar las competencias necesarias para el desempeño ciudadano en el siglo XXI, es claro que deberíamos incluir en el currículo situaciones del mundo real como punto de partida y como destino de la matematización (p.17)

Siendo labor del docente el propiciar el panorama matemático donde se sensibilice a los estudiantes hacia la observación de su entorno para el análisis de diversas situaciones, permitiendo que ellos sean desarrollen un potencial matemático en todo lo que les rodea, desentrañando así las matemáticas a su alrededor (Arcavi, 2012). Haciendo énfasis en la comprensión de los símbolos como objetos que permiten relacionar las matemáticas con el entorno creando conciencia que es posible diseñar estas relaciones simbólicas que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada, así como cumplir distintos roles en diversos contextos; generando así un problema y su significado, para luego verificar y comparar los significados con el de los resultados obtenidos (Arcavi, 2006).

Retomando el principio de que toda educación matemática es aspirar a desarrollar las competencias para actualidad, para esto, es necesario implementar la tecnología, puesto que se vive en la era de la comunicación, estando en pleno siglo XXI el uso de la tecnología ha impactado en el desarrollo e interacción de las relaciones sociales. La tecnología y las telecomunicaciones en todas sus formas han cambiado la forma de vivir, comunicarnos y relacionarnos.

Por lo anterior es necesario el uso de la tecnología en el aula ya que es un apoyo para crear un entorno diferente y dinámico; el utilizar todos aquellos recursos, herramientas y programas que son facilitadores para procesar, transmitir y compartir el conocimiento y generar así un aprendizaje significativo en los estudiantes. Se deben plantear situaciones-problema complejas vinculadas a situaciones reales donde a los estudiantes se les permita realizar proyectos y actividades constructivas de forma individual y social, crear situaciones con medios innovadores que permiten al estudiante lograr cambios de conducta y el desarrollo de habilidades. Santacruz (2009) citando a Trouche (2002)

> Resalta que la aparición de artefactos computacionales en la clase de matemáticas, supone un problema de carácter didáctico acerca de transformar los artefactos en verdaderos instrumentos de actividad matemática y no como "recursos que resuelven y solucionan" problemas en el aprendizaje (p. 1).

El aprendizaje se encuentra mediado por instrumentos, los cuales influyen en el saber matemático, donde debe existir una mediación entre las acciones docentes, cómo el alumno construye sus conocimientos y la instrumentalización. El empleo de dichos instrumentos impacta de manera directa, ya que propicia la movilización colectiva e individual del estudiantado en sistemas de instrumentos previos, así como generar nuevas estrategias, con la finalidad de que los mismos construyan sus propios conocimientos mediante la mediación del instrumento.

Santacruz (2009) menciona que en el diseño de secuencias didácticas para promover el proceso de aprendizaje de las matemáticas es necesario considerar cuatro elementos: el conjunto de individuos (docente y estudiantes), un conjunto de objetivos (relacionados con la intención de desarrollar las tareas bajo ciertas condiciones), una configuración didáctica (estructura general del dispositivo, es flexible de acuerdo al diseño de las secuencias didácticas que se pretenden movilizar) y un conjunto de modos de explotación de dicha configuración (coordinación entre el hardware, el software didáctico y un sistema de explotación didáctico). Posibilitando la enseñanza y el aprendizaje entre pares de distintos esquemas sociales de uso.

Por lo que la génesis instrumental aporta a esta investigación la posibilidad de promover el proceso de aprendizaje de las matemáticas a través de instrumentos, el uso de dispositivos móviles particularmente Arduino. Donde Arduino es una compañía de hardware y código abierto que manufactura y diseña placas para construir dispositivos digitales y dispositivos interactivos que puedan detectar y controlar objetos del mundo real.

Metodología

La metodología en la que se basa la investigación es en la ingeniería didáctica de Artigue recordemos que esta surgió como una metodología para los hallazgos de la teoría de las Situaciones didácticas y de la Transposición Didáctica. Calderón & León (2012) mencionan que la ingeniería didáctica es una metodología de investigación a través de cuatro pasos. La ingeniería didáctica es una herramienta para la elaboración de situaciones didácticas, además es una metodología de investigación para producir conocimiento a través de la formulación, aplicación y evaluación del efecto de estas realizaciones didácticas donde se debe realizar un análisis a priori y a posteriori.

A continuación, se describen los pasos seguidos en la fase de elaboración y realización:

- Se revisaron artículos de investigación, tesis, textos y revistas científicas relacionados con la enseñanza de la Matemática.

- Se seleccionaron a 40 estudiantes que cursaban cuarto semestre de preparatoria, se pidió autorización a los padres de familia de los participantes para mostrar los avances y resultados de las actividades, asimismo se valoró su nivel de conocimiento previo en los temas sobre gráficas. Se elaboraron cuatro secuencias de aprendizaje sobre: funciones, límites, derivadas y sus aplicaciones, basado en el uso de Arduino.

Dando una breve descripción de cada una de ellas:

- Análisis de tablas. Para el desarrollo de la práctica sin intervención previa del docente se le proporciona al estudiante unas hojas de trabajo donde se presentan diversas tablas las cuales debe analizar e interpretar, con ello proponer situaciones de la vida cotidiana que se adapten a las mismas.
- Graficando mi realidad (Tablas, gráficas y funciones). Identificar las funciones y su comportamiento según la variación de los parámetros preponiendo situaciones de su contexto.
- Límites. El propósito de esta actividad es que el estudiante complete la información de diversas tablas con base en los datos obtenidos determinen la temperatura del agua expuesta diferentes condiciones mediante el uso del sensor de temperatura LM35 (con una precisión calibrada de 1 °C. Su rango de medición abarca desde -55 °C hasta 150 °C), al cual hicieron un revestimiento de la tecnología Arduino, logre así obtener la representación algebraica y sea capaz de comprender el comportamiento de la situación.
- Razón de cambio de una función. En esta actividad el alumno mide la distancia mediante el sensor ultrasónico HC-SR04 Arduino con el objetivo de encontrar la razón de cambio respecto al recorrido realizado y el comportamiento del movimiento.
- Razón de cambio de una función cuadrática: el propósito de esta actividad es que los estudiantes determinen la razón de cambio de tiros parabólicos mediante el uso del software Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education.

Se elaboraron y aplicaron también dos evaluaciones. La primera al finalizar actividades 1 y 2, con el propósito de valorar la habilidad de los estudiantes de identificar tablas y funciones. Otra al finalizar la actividad del uso del sensor de temperatura LM35 para evaluar la habilidad de los alumnos de transitar entre las diferentes representaciones semióticas.

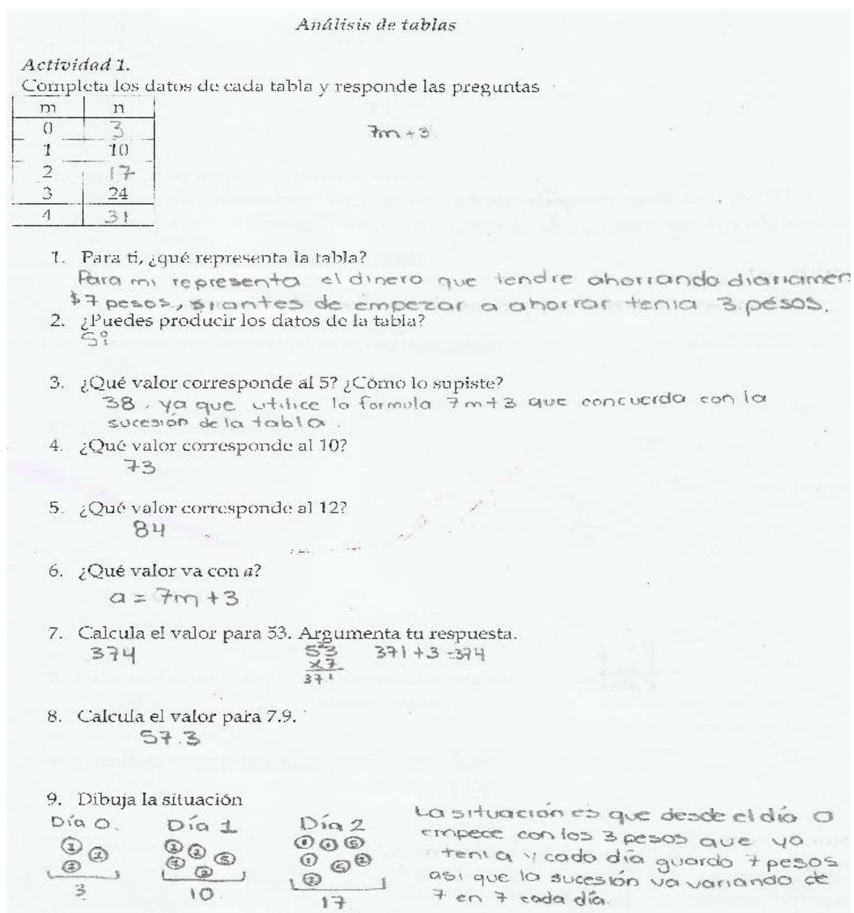
Avances de la investigación

En este apartado se presentan a grosso modo una descripción de los instrumentos de recolección de datos, así como un análisis comparativo de las respuestas de los 40 estudiantes que participaron en la aplicación de las cuatro secuencias didácticas, hojas de trabajo y hojas de evaluación. Donde a partir de estos instrumentos de medición sea posible el explorar el proceso que los alumnos utilizan para lograr reconocer la razón de cambio en diversas situaciones, así como realizar la transición entre las diferentes representaciones semióticas de la Teoría de Duval (2004, 2006) se menciona anteriormente en las fundamentaciones teóricas de la investigación.

Actividad 1. Análisis de tablas. Durante la implementación de esta investigación fue posible percatar que los estudiantes contaban con los conocimientos previos sobre la tabulación y graficación de funciones de una manera mecánica y sin una verdadera comprensión, puesto que no comprendían el comportamiento de las mismas con base en la variación de los parámetros, asimismo les resultó posible proponer una representación algebraica a diversas situaciones cotidianas no obstante al presentarse el caso inverso es decir, a partir de una función plantear una escenario que se adapte a la misma no les fue viable.

Actividad 2. Graficando mi realidad (Tablas, gráficas y funciones). Identificar las funciones y su comportamiento según la variación de los parámetros preponiendo situaciones de su contexto. En este punto es estudiante empieza a relacionar el cómo afectan los diversos parámetros el comportamiento de las funciones como se presenta en la Ilustración 1, además de presentar menor complicaciones para poder plantear hechos de la vida cotidiana a partir de una función

Actividad 3. Límites. Con base en la Génesis Instrumental de Trouche (2002) mediante el uso de dispositivos móviles de sensores en circunstancias de su contexto como es el variar la temperatura del agua como se muestra en la Ilustración 2.


Análisis de tablas

Actividad 1.
Completa los datos de cada tabla y responde las preguntas

m	n
0	3
1	10
2	17
3	24
4	31

7m + 3

1. Para ti, ¿qué representa la tabla?
Para mi representa el dinero que tendre ahorrando diariamen $7 pesos, antes de empezar a ahorrar tenia 3 pésos.
2. ¿Puedes producir los datos de la tabla?
Si
3. ¿Qué valor corresponde al 5? ¿Cómo lo supiste?
38, ya que utilice la formula 7m+3 que concuerda con la sucesión de la tabla.
4. ¿Qué valor corresponde al 10?
73
5. ¿Qué valor corresponde al 12?
84
6. ¿Qué valor va con *a*?
a = 7m + 3
7. Calcula el valor para 53. Argumenta tu respuesta.
374 53 × 7 = 371 371 + 3 = 374
8. Calcula el valor para 7.9.
57.3
9. Dibuja la situación
Día 0 3 Día 1 10 Día 2 17
La situación es que desde el día 0 empece con los 3 pesos que yo tenia y cada día guardo 7 pesos así que la sucesión va variando de 7 en 7 cada día.

Ilustración 1. Graficando mi realidad. Producto de estudiante. Fuente propia.

Los estudiantes fueron capaces de entender el comportamiento de la situación puesto que inicialmente consideraban una función lineal, no obstante, al profundizar el análisis lograron entender la situación relacionando una función entre la temperatura y el tiempo, además de expresar la existencia de límites según variase la temperatura del agua.

Ilustración 2. Sensor LM35. Fuente propia.

Actividad 4. Razón de cambio de una función. Posteriormente al emplear el sensor HC-SR04 los alumnos determinaron la distancia y comportamiendo del movimiento de sus compañeros en un rango de 2 a 450cm, al poder relacionarse directamente con el sensor y ellos representar de manera física una función, lograron determinar cuál es el comportamiento de una función constante, lineal y cuadrática tomando en cuanta la distancia y el tiempo. Al ser agentes activos les fue posible relacionar en estos casos las mediciones realizadas con elementos matemáticos como son el límite y la razón de cambio, dándole un sentido al cálculo diferencial y sus potenciales aplicaciones además de lograr la transición entre las diferentes representaciones semióticas logrando cumplir los principios teóricos propuestos por Duval (2004,2006) y Trouche (2002) como se muestra en la Ilustración 3.

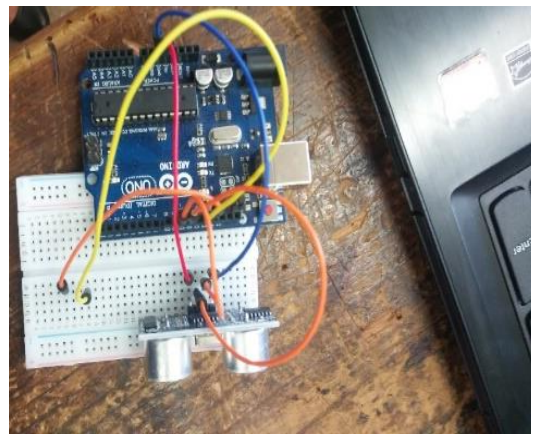


Ilustración 3. Sensor HC-SR04. Fuente propia.

Actividad 5. Razón de cambio de una función cuadrática. Finalmente, los estudiantes determinan la razón de cambio de tiros parabólicos mediante el uso del software Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education el cual permite el análisis de video y construcción de modelos como se muestra en la Ilustración 4. En este punto los estudiantes ya eran conscientes de las posibles aplicaciones de las matemáticas en su vida cotidiana, además de haber comprendido qué representa una razón de cambio en diversas situaciones, así como lograr transferir aquello que se han aprendido a nuevos contextos realizando una conversión de las representaciones.

Ilustración 4. Tracker Video Analysis and Modeling Tool for Physics Education. Fuente propia.

Reflexiones o conclusiones

Del análisis de resultados planteados se puede concluir que se consiguió identificar las dificultades que presentan los estudiantes para poder realizar una transformación (sea tratamiento o conversión) entre las representaciones y razón de cambio, cuando algunos de los estudiantes lograron identificar algunas de las conversiones y tratamientos que surgieron entre representaciones. Es posible percatarse que los estudiantes presentaron dificultades cuando se enfrentaron al tránsito de las representaciones sin intervención del profesor o sin dirección específica en las instrucciones de los reactivos.

Con base en los resultados obtenidos es posible hacer un análisis donde el diseño de estrategias de enseñanza-aprendizaje relacionadas con el contexto promueve la transformación de las representaciones semióticas para el aprendizaje significativo de las matemáticas utilizando conocimientos previos del estudiante, aplicándolos a situaciones reales mediante el uso de tecnologías del aprendizaje y el conocimiento, es posible inferir que la misma es verificable. Puesto que, al aplicar tanto la tecnología en este caso dispositivos móviles como diversos instrumentos fue posible promover la generación de un aprendizaje significativo, facilitando la relación de los nuevos aprendizajes con conocimientos previos y experiencias de los estudiantes.

Cuando se observaron estos resultados, hace que se cuestione ¿Cuáles son las dificultades que presentan los estudiantes al transitar entre las diferentes representaciones de las? Se identifica que surgieron sucesos de un amplio rango. Se advierte que estas dificultades no solo surgen de las deficiencias algebraicas, aritméticas y de conocimientos previos, sino que estas van más allá. Surgieron problemas notables con la habilidad lectora de los estudiantes, ya que, al presentar deficiencias en este sentido, les resultó difícil comprender y seguir las instrucciones planteadas en las hojas de trabajo.

Fue posible reparar también en el hecho de que algunos de los estudiantes no tienen suficientes habilidades para argumentar los procedimientos que utilizaron y mostraron vacilación al expresarse de manera escrita. Siéndoles más sencillo o accesible la comunicación verbal.

De igual forma la implementación y diseño de las estrategias de enseñanza y aprendizaje planteadas da una posible solución a la problemática localizada donde no se reconoce una relación real entre lo aprendido en el aula con su vida cotidiana, es decir los estudiantes ven a las matemáticas como algo ajeno a ellos. Por lo previamente presentado fue posible cambiar esa perspectiva de los alumnos a las mismas logrando así poder entender su entorno e incluso modelar su contexto.

Aunado a lo anterior, se potencializó el complimiento de uno de los retos de la educación situándonos en nivel medio superior, que es el enseñar al estudiante a pensar, por lo tanto es necesario el uso de estrategias de enseñanza-aprendizaje con el fin de favorecer competencias que puedan ser útiles en su contexto, las matemáticas requiere el realizar procesos específicos como conceptualizaciones, análisis y reflexiones, en este sentido cuando se trabaja con imágenes mentales representadas por medio de símbolos y signos con fin de comunicas información se tiene una representación semiótica.

Es importante destacar que el tipo de actividades diseñadas resultaron novedosas para el grupo de estudiantes. Algunos de ellos realizaron comentarios que hacían notar su preferencia hacia este tipo de manipulaciones tanto físicas como tecnológicas a las que no se habían enfrentado anteriormente. Manifestaron también su gusto por trabajar en equipos, ya que al hacerlo tenían no sólo un apoyo, sino que desarrollaban de manera más amplia la habilidad de defender su posición frente a ideas discordantes. Debido a esto es fue posible observar en ellos un cambio actitudinal, mayor destreza en la manipulación de los materiales, mejora en su habilidad para expresarse, sintetizar y redactar.

Se considera que el estudio y exploración de las actividades diseñadas con base en la tecnología Arduino lleva a los estudiantes a la comprensión de la variación en las diferentes situaciones, tal como se ha visto en el avance que se lleva de la experiencia. El uso de los dispositivos móviles como medio de colección y manipulación de los datos ha generado una gran motivación en los estudiantes.

Cabe mencionar que los estudiantes que participan en el proyecto fortalecen competencias tanto disciplinares como genéricas entre las que se puede resaltar:

- Aprende de forma autónoma
- Trabajar en forma colaborativa

- Participa con responsabilidad en la sociedad
- Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente las magnitudes del espacio y las propiedades físicas de los objetos que lo rodean.
- Establece la interrelación ente la ciencia, la tecnología, la sociedad y el ambiente en contextos históricos y sociales específicos.
- Hace explícitas las nociones científicas que sustentan los procesos para la solución de problemas cotidianos.
- Explica el funcionamiento de máquinas de uso común a partir de nociones científicas.
- Diseña modelos o prototipos para resolver, satisfacer necesidades o demostrar principios científicos.

Con este proyecto se concluye que la implementación de actividades en Arduino apoya en forma significativa la construcción de ambientes de aprendizaje altamente estimulantes de creatividad y motivación personal en ambientes no escolarizados, además coadyuva en la enseñanza de las matemáticas y facilita la labor del docente, así como la participación del estudiante en estos procesos.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores*, 29-48.

Arcavi, A. (2016). Miradas Matemáticas y Pensamiento Numérico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (9).

Arceo, D. (2006). *Enseñanza situada*. México: Mc Graw Hill.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *1*(1), 40-55.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación matemática*, *16*(3).

Bell, E. T. (2016). *Historia de las matemáticas.* Fondo de cultura económica.

Calderón, D. I., & León, C.O. L. (2012). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. *Lenguaje y Educación: Perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio*, 71-104.

Castellón A. 2009. Astronomía y Matemáticas," Unión, Revista Latinoamericana de Educación Matemática, no. 20, pp. 113–116, 2009.

Costa, P. 2014. Superficies cónicas: Aplicación a la arquitectura y el diseño. [Online]. Disponible en: http://hdl.handle.net/2183/12666.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *1*, 9-38.

Duval R. (1998). *Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Duval, R. (1993). *Registres dereprésentation sémiotique et functionnement cognitive de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5: 37-65 (IREM de Strasbourg).

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics. 61* (1): 103-131.

Gaspar de Alba, A.; Flores, S. y Mederos, O. (2011). El aprendizaje de las Cónicas A Travésdel Uso de la Tecnología. Estados Unidos: Editorial Académica Española.

Hitt, F. (1996) En Santos M. 1997 Principios y métodos en la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Lupiañez, J. (2000). *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92*. Universidad De Granada, España. Disponible en: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/LupiannezJ00-2705.PDF.

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemática. *Aula Universitaria*, *1*(13), 29-36.

Ramírez, P. 2011. Elementos de cartografía matemática y su aplicación en la elaboración de las cartas geográficas, Revista Geográfica de América Central, vol. 46, no. 1, pp. 15–36, 2011. [Online]. Disponible en: http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/geografica/article/view/3290.

Rojas, P. J. (2009). Relación entre objeto matemático y sentidos en situaciones de transformación entre representaciones semióticas. *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativ*a. Pasto, Colombia.

Santos, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y perspectiva* Vol. *20*, 247-258.

Schoendfeld, A. (1988). Mathematics, technology, and higher order thinking. In R.S. Nikerson & Sodhiates Eds Technology in education.

Steen, L. (1990). One the shoulder of giants. New approaches to numeracy. Washington, D.C.: National Research Council of teachers of mathematics.

Tamayo, Ó. E. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista educación y pedagogía*, *18*, 37-49.

Trouche (2002) Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En: Guin, D. & Trouche, D. (Ed) Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail informatique: un problème didactique. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

UTILIZACIÓN Y PRODUCCIÓN DE VIDEOS TUTORIALES EN MATEMÁTICA

USING AND PRODUCING TUTORIAL VIDEOS IN MATHEMATICS

Niurys Lázaro Alvarez
Universidad de las Ciencias Informáticas (Cuba)
nlazaro@uci.cu

Resumen
El proceso de enseñanza aprendizaje de las asignaturas de Matemática en el primer año de carreras de Ingeniería requiere de estrategias que motiven el aprendizaje de los estudiantes. El presente trabajo describe una estrategia de enseñanza aprendizaje mediante la utilización y producción de videos tutoriales para motivar el aprendizaje de la Matemática. Se incluyen ejemplos de actividades realizadas y los resultados de la aplicación de esta estrategia, mediante el método experimental, en una muestra de estudiantes de primer año *N=48,* en la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas de la Universidad de las Ciencias Informáticas en La Habana. Se utilizaron tecnologías que la Universidad pone a disposición de estudiantes y profesores, así como dispositivos móviles de los propios estudiantes. Estos desarrollaron los contenidos en archivos de texto, imagen y video utilizando asistentes matemáticos. Se logró la motivación de los estudiantes por el estudio y se elevaron los resultados de promoción en cantidad y calidad.

Palabras clave: estrategia de enseñanza aprendizaje, matemática, videos tutoriales

Abstract
The teaching-learning process of mathematics subjects in the first year of engineering degree courses requires strategies that motivate students' learning. This work describes a teaching-learning strategy through the use and production of tutorial videos to motivate mathematics learning. It includes examples of activities carried out and the outcomes of this strategy implementation, through the experimental method, in a sample of first-year students (N=48) in the Computer Science Engineering degree, at the University of Computer Science, in Havana. Technologies, that the university provides students and teachers with, as well as students' own mobiles were used. The students develop the contents in text, image, and video records, by using mathematical helpers. It made possible to achieve students' learning motivation and to raise the quality and quantity of their academic performance.

Key words: teaching-learning strategy, mathematics, tutorial videos

Introducción

En la actualidad las actitudes, estrategias, métodos, cualidades y actividades creativas e innovadoras de los profesores, mediadas por las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) constituyen un reto en cada uno de los entornos ya que incentivan la disposición, motivación y la construcción de conocimientos durante el proceso docente, por lo que debe innovar e investigar más en cómo potenciarlas con vistas a alcanzar mayores niveles de aprendizaje y motivación en sus estudiantes.

Por otra parte, el aprendizaje de la Matemática en cualquier carrera se enfrenta con frecuencia a rechazos, predisposición, bajos resultados en las evaluaciones de los estudiantes y por ende fracaso y deserción escolar (Mendes y González, 2017) por lo que la Matemática Educativa también se preocupa por proponer nuevas metodologías de enseñanza (Esper y Juárez, 2017).
Teniendo en cuenta que el presente trabajo se enfoca en la enseñanza de asignaturas de Matemática en el primer año de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas (ICI) en la Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) de La Habana, Cuba, donde los estudiantes se motivan por la utilización de las tecnologías, se presenta una estrategia de enseñanza aprendizaje mediante la utilización (por parte del profesor) y producción (por parte de los estudiantes) de videos tutoriales para las asignaturas de Álgebra Lineal (AL) y Matemática I (MI).

Se asiste en el siglo XXI a un paradigma educativo en el que las actitudes, estrategias, métodos, cualidades y actividades creativas e innovadoras de los profesores mediadas por las TIC, constituyen un reto en cada uno de los entornos ya que incentivan la disposición, motivación y la construcción de conocimientos, durante el proceso docente, por lo que debe innovar e investigar más en cómo potenciarlas con vistas a alcanzar mayores niveles de aprendizaje y motivación en sus estudiantes.

Por otra parte, el aprendizaje de la Matemática en cualquier carrera se enfrenta con frecuencia a rechazos, predisposición y por ende bajos resultados en las evaluaciones de los estudiantes. Teniendo en cuenta que el presente trabajo se enfoca en la enseñanza de asignaturas de Matemática en el primer año de la carrera ICI, donde los estudiantes se motivan por la utilización de las tecnologías, en particular, la utilización y producción de videos tutoriales.
La institución pone a disposición de estudiantes y profesores las computadoras y un sistema de redes informáticas y plataformas para el trabajo docente educativo con su respectiva conectividad a internet e intranet. Este trabajo también muestra, mediante la estrategia, cómo se puede transitar por las TIC y las Tecnologías para el Aprendizaje de Contenidos (TAC) utilizando los recursos que se tiene a disposición en la Universidad para motivar el aprendizaje.

Indagación bibliográfica

En el siglo XX la Pedagogía se enriqueció a la par del desarrollo científico y técnico de la sociedad, es en este periodo donde se introducen las nuevas tecnologías en el ámbito educativo: las multimedia, la televisión por cable y satélite, los discos compactos y los hipertextos donde su materia prima es la información (Cabero, 1996).

Es el siglo XXI donde el profesor cuenta con tantas tecnologías para su actividad profesional, se habla, por ejemplo: de la realidad aumentada, analíticas de aprendizaje, web semántica, gamificación, entre otras (Johnson, Adams, Cummins, Estrada, Freeman, y Hall, 2016). También la tecnología móvil actualmente forma parte del vivir cotidiano de muchas personas y es muy provechoso introducir su utilización en el proceso de enseñanza aprendizaje. Las tecnologías para el aprendizaje se desarrollan a un ritmo cada vez más creciente por lo que los docentes necesitan estar actualizados en este desarrollo.

En los sistemas educativos, las computadoras desempeñan principalmente tres funciones: la función tradicional de instrumento para que los alumnos adquieran un nivel mínimo de conocimientos informáticos; la de apoyar y complementar contenidos curriculares; y, la de medio de interacción entre profesores y estudiantes, entre los mismos estudiantes y entre los propios profesores. A estas funciones se agregan: como herramienta de aprendizaje, de construcción social del conocimiento, para aprender más y mejor, para integrar, retener y socializar la información. (Espuny, Gisbert, González, y Coiduras, 2010).

No basta con utilizar las tecnologías como medio de apoyo al docente, para ahorrar el tiempo en su clase, para mostrar imágenes, sonidos o textos; se debe pasar a modelos centrados en el aprendiz, en su uso para la construcción del conocimiento. Al respecto, (Cabero, 2015) plantea que la incorporación de las TIC en el sistema educativo no puede ser por el hecho de hacer mejor las cosas, sino fundamentalmente para hacerlas diferentes.

En tal sentido, se introduce una nueva forma de visualizar las TIC y hace pensar en las direcciones futuras de aplicaciones de estos recursos en el proceso de enseñanza aprendizaje, al decir de Cabero (2015). Las TAC alcanzan relevancias en la labor docente, al ofrecerles nuevas metas creativas en su nuevo rol de mediador durante el proceso de enseñanza aprendizaje: la construcción de conocimientos y el desarrollo de habilidades en los estudiantes, una posibilidad eficiente para facilitarles su aprendizaje.

Las tecnologías para el aprendizaje se desarrollan a un ritmo cada vez más creciente, por lo que los docentes de carreras de Informática necesitan estar actualizados en este desarrollo para poder introducirlas en el proceso de enseñanza-aprendizaje (RedUNCI, 2017).

Por otra parte, la tutoría es uno de los recursos educativos que se utilizan en la Universidad; son varias las formas y funciones que esta cumple (Montánchez y Martínez, 2017). En este trabajo se utilizan los videos tutoriales.

Teniendo en cuenta estos aspectos, se diseñaron actividades de aprendizaje que contribuyen a utilizar los recursos educativos que se dispone en la UCI considerando las anteriores visiones de la utilización de las tecnologías en la práctica educativa. Se incluyen en la sección siguiente ejemplos de ellas, utilizadas en dos grupos. Esto llevó a la autora de este escrito a proponer una estrategia de enseñanza-aprendizaje mediante la utilización y producción de los videos para motivar el aprendizaje de Matemática.

Autores como Emmanuele, Rodil y Vernazza (2018) perciben riesgo de transculturación con el uso de videos de Youtube para la enseñanza. En la estrategia que aquí se presenta, se seleccionan bajo una revisión del contenido matemático y otros aspectos didácticos que se tienen en cuenta.

En las TIC, los recursos en el contexto educativo son utilizados para transmitir y facilitar información y contenidos para el aprendizaje de los estudiantes, adaptables a sus necesidades y características. En las TAC, los recursos se utilizan como facilitadores del aprendizaje y la difusión del conocimiento. Desde esta visión, el docente no debe usar dichos recursos para hacer lo mismo que hace sin ellos, o sea, reproducir modelos tradicionales, sino para innovar, para introducir nuevas metodologías y estrategias didácticas, nuevos usos educativos, como herramienta para la realización de actividades de aprendizaje y el análisis de la realidad circundante por parte del estudiante.

Por otra parte, el concepto de brecha digital ha pasado varias etapas de interpretación; primero, era la posibilidad de tener o no acceso a las TIC; después, estuvo relacionada con el hecho de tener la tecnología y hacer uso o no de ella; ahora, la brecha se entiende por el tipo de uso que se hace a las TIC, teniendo en cuenta el tiempo dedicado, las posibilidades, calidad y diferenciación de su uso.

Sobre los avances en el uso de la web para la educación Zapata-Ros plantea:

> La web social confiere a los sistemas de gestión del aprendizaje de una potencia anteriormente desconocida. Ya se está implementando casi de forma generalizada el uso de la web social de propósito general (Facebook, Google+, Twitter, con herramientas de gestión documental y académica como Drive+Google Scholar, videogrupos tipo Hangouts, o con recursos de producción y edición de video, como Youtube), se hace de forma espontánea como complemento vinculado a la instrucción o simplemente de forma complementaria a la enseñanza formal tradicional. (Zapata-Ros, 2013, p. 134)

En tal sentido la tutoría es uno de los recursos educativos que se utilizan en la actualidad, son varias las formas y funciones que esta cumple (Abedini, Mortazavi, Javadinia, y Moonaghi, 2013; Conde, Hinojo, y Fuentes, 2017; Gomariz y Cascales, 2017; Montánchez y Martínez, 2017). En la estrategia que se describe a continuación se utilizan los videos tutoriales.

La utilización de videos de forma didáctica requiere definir el concepto de video didáctico. Se asume el planteado por Cebrián "por su principal característica y crucial circunstancia: que esté diseñado, producido, experimentado y evaluado para ser insertado en un proceso concreto de enseñanza aprendizaje de forma creativa y dinámica." (Cebrián, s.f., p. 3).

Teniendo en cuenta las anteriores visiones de la utilización de las tecnologías en la práctica educativa y la conceptualización del video didáctico y tutorial, la autora propone una estrategia de enseñanza aprendizaje mediante la utilización y producción de videos tutoriales para motivar el aprendizaje de Matemática.

La UCI pone a disposición de estudiantes y profesores para la docencia, la investigación e innovación los siguientes recursos: laboratorios equipados con computadoras con buenas prestaciones que tienen instalados asistentes matemáticos, procesadores de texto, imagen y sonido; plataforma para transmitir y producir recursos educativos de apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje; también conectividad a internet e intranet. La estrategia se aplicó de forma experimental por dos cursos consecutivos en dos grupos de primer año de la carrera ICI en la UCI.

A continuación, se relacionan de forma resumida, por cuestiones de espacio, cómo se concibe la estrategia de enseñanza aprendizaje y ejemplos de utilización de los videos mediante la descripción de los diferentes componentes del proceso de enseñanza aprendizaje para cada actividad. Considerando dentro de los componentes no personales del proceso: objetivo, contenido, método, medio, evaluación y formas organizativas.

Estrategia de enseñanza mediante la utilización de videos para motivar el aprendizaje

Para la autora el concepto apropiado a la estrategia de enseñanza aprendizaje propuesto por Fátima Addine es: "…secuencias integradas, más o menos extensas y complejas, de acciones y procedimientos seleccionados y organizados, que, atendiendo a todos los componentes del proceso, persiguen alcanzar los fines educativos propuestos." (Addine, 1998, p. 8).

En tal sentido, la *Estrategia de enseñanza aprendizaje mediante la utilización y producción de videos tutoriales para motivar el aprendizaje de la Matemática* se define como un sistema de acciones organizadas atendiendo a los componentes del proceso, dirigidas a motivar y elevar el aprendizaje de las asignaturas AL y MI en la UCI mediante la utilización y producción de videos tutoriales. La esencia de dicha estrategia está en la determinación del siguiente algoritmo de trabajo metodológico por parte del profesor que puede perfeccionarse con la práctica y la experiencia personal. Dicha estrategia concibe acciones para el diseño de la actividad, para la orientación y seguimiento, y para el control y evaluación.

Acciones para el diseño

1. Identificar los contenidos, objetivos, métodos, formas organizativas, evaluaciones y medios del proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la asignatura, tema o actividad formativa que dirigirá.
2. Obtener a través de la web, internet, intranet o producción personal un grupo videos tutoriales que respondan a los contenidos y objetivos propuestos.
3. Revisión, depuración y selección de los videos.
4. Diseñar la actividad planteando el contenido de los componentes del PEA para el que se ha diseñado la actividad (Ver ejemplos en la sección de resultados).
5. Diagnosticar las habilidades que poseen los estudiantes en cuanto a objetivos a vencer y utilización de tecnologías.

Acciones para la orientación y seguimiento

1. Orientar la actividad formativa teniendo en cuenta todos los componentes del PEA, desde el objetivo que se persigue hasta la forma y fecha en que será evaluada. Se tendrá en cuenta el plazo necesario teniendo en cuenta las características de los estudiantes y el alcance de la tarea. Se recomienda el trabajo en equipo.
2. Compartir con los estudiantes los videos y cuantos recursos (herramientas de edición de videos, asistentes matemáticos, videos tutoriales sobre la producción de videos, entre otros) sean necesarios para la realización de la actividad.
3. Orientar sobre la utilización de diversas herramientas.
4. Mantener comunicación durante el plazo de realización de la actividad, se informará las vías y facilitará a los estudiantes, la comunicación tanto presencial como virtual para aclarar las dudas respecto a la misma.

Acciones para el control y evaluación

1. Realizar un control colectivo y una evaluación individual de la realización de la actividad.
2. Evaluar el cumplimiento colectivo de los objetivos educativos previstos para la actividad a través de la presentación ante el colectivo del video producido acerca de contenidos y objetivos específicos de la asignatura.
3. Evaluar el nivel de conocimiento individual sobre los objetivos instructivos previstos.
4. Informar las herramientas utilizadas para la realización de la actividad.
5. Valorar las herramientas más eficientes utilizadas.
6. Reconocer la realización de los mejores trabajos y proponerlos como resultados a presentar en Jornadas Científicas Estudiantiles.
7. Estimular el perfeccionamiento de otras informando las vías para hacerlo.

Se pueden incluir otras acciones a partir de la experiencia del profesor y el objetivo de su actividad.

La estrategia de enseñanza aprendizaje se aplicó de forma experimental con una muestra total de $N=48$ estudiantes durante los cursos 2016-2017 y 2017-2018. La práctica en la aplicación de la estrategia identificó tres fases por las que transita:

- Una primera fase donde el profesor se identifica con los videos, los analiza y es capaz de discernir los que más se ajustan a sus objetivos y llega a editar y producir sus propios videos.
- Una segunda etapa donde los estudiantes se familiarizan con los videos tutoriales, aprenden a visualizar videos siguiendo una guía de observación, a conocer las herramientas que permiten editarlos, en esta etapa se le aportan videos tutoriales sobre el diseño de guiones para la producción de videos.
- Por último, en la tercera etapa, los estudiantes desarrollan la habilidad de producción de videos y son capaces de hacerlo, incluso sin la orientación del profesor.

De toda la estrategia lo más importante para la experiencia de la autora es lograr unidad en el equipo de trabajo donde cada uno aportó sus mejores habilidades, así como se logra el aprendizaje individual a través de una construcción colectiva del conocimiento.

Resultados y discusión

Los resultados más importantes de la experimentación de la estrategia son las actividades diseñadas para utilizar en las asignaturas de AL y MI, los resultados obtenidos en el aprendizaje de los estudiantes del grupo experimental y sus opiniones sobre la estrategia utilizada en clases. A continuación, se muestran ejemplos del diseño de actividades realizadas en MI.

Actividad 1

En esta actividad que se orientó de trabajo independiente, se pidió a los estudiantes visualizar un video publicado en el Entorno Virtual de Aprendizaje (EVA) con una guía de observación y posteriormente realizar un grupo de ejercicios del libro de texto.

Guía de observación:
Visualizar el vídeo y mientras tanto toma nota de:

1. Tipo de función que se trabaja
2. ¿Qué aporta la primera derivada a la gráfica de dicha función?
3. ¿Qué aporta la segunda derivada a la gráfica de dicha función?
4. Cuáles son los ceros de la función
5. Algoritmo general para analizar y representar la curva de dicha función

Objetivo: Graficar funciones utilizando los lineamientos del trazado de curvas, la primera y segunda derivadas de la función.

Objetivo educativo: Desarrollar una cultura que potencie el trabajo entre todos, de consulta colectiva, el dialogo y debate para la identificación de los problemas y la unidad de acción en la selección de posibles alternativas de solución, utilizando las tecnologías, en particular videos tutoriales y herramientas para su edición.

Contenido: Análisis de curvas.
Medios: Computadora con conectividad, bibliografía básica y complementaria tanto en formato duro, como digital, tanto en la red local como en internet. Así como el video sobre la representación gráfica de funciones utilizando el análisis de curva, compartido en la nube con los estudiantes. Video (Julioprofe.net, s.f.) compartido con los estudiantes en el EVA. También la pizarra, el plumón y otra que los estudiantes creen.
Forma organizativa: clase práctica.
Evaluación: Se evalúa el resultado de los estudiantes de la observación del video a través de las respuestas a la guía y la realización de los ejercicios propuestos.

Actividad 2

Objetivo: Aplicar el cálculo de la integral definida a resolución de problemas de la vida real relacionados con el cálculo de áreas de superficies, creados y modelados por los estudiantes.
Objetivo educativo: Desarrollar una cultura que potencie el trabajo entre todos, de consulta colectiva, el dialogo y debate para la identificación de los problemas y la unidad de acción en la selección de posibles alternativas de solución, utilizando las tecnologías, en particular videos tutoriales y herramientas para su edición.

Orientación: A partir de visualizar un video sobre la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas bajo una curva con su correspondiente guía de observación, los estudiantes tenían que seleccionar una superficie en a que pudieran identificar una función elemental como curva que la determina y plantearse un problema a resolver donde se utilice y calcule la integral definida. Se debe utilizar editores de texto y de ecuaciones, asistentes matemáticos y presentar a sus compañeros en el aula mediante una presentación de Power Point o video.
Contenido: Aplicaciones de la integral definida al cálculo de área de superficies.

Medios: Computadora con conectividad, celular y/o cámara digital y bibliografía básica y complementaria tanto en formato duro, como digital, tanto en la red local como en internet. Así como un video de Aguirre (2012) sobre aplicación de la integral definida al cálculo de área de superficie, compartido con los estudiantes.

Forma organizativa: clase práctica.
Evaluación: Se evalúa la exposición de los problemas identificados, su modelación matemática y su resolución. El trabajo se realiza en equipo pero la evaluación es individual a partir de preguntas orales y dirigidas que se realizan por la profesora al culminar la exposición. Deben utilizar asistentes matemáticos, editores de ecuaciones, imágenes o videos. Se orienta dos semanas antes de la clase y se le da seguimiento, dando la posibilidad de consultar con la profesora los avances del trabajo antes de la presentación definitiva ante sus compañeros.

Los estudiantes seleccionaron las superficies a las que le querían determinar el área en su entorno social, limitados por funciones conocidas. Lo más importante en todos los casos, es que la función seleccionada se correspondiera con la curva que limita la superficie a la que le quieren calcular su área y además, que se planteara correctamente el problema a resolver y la integral definida.

Actividad 3

En esta actividad se orientó como variante evaluativa de la segunda prueba parcial de la asignatura Matemática I la producción y presentación de un video tutorial que responda a los objetivos de la prueba. La realización del video podía ser en parejas pero la presentación y evaluación es individual. Se muestran la imagen de una captura de pantalla de uno de los videos trabajos en la *Figura 1.*

Objetivos de la prueba parcial

1. Aplicar los métodos del Cálculo Diferencial para el análisis del comportamiento de funciones reales de una variable.
2. Interpretar los conceptos de integral definida e indefinida de una función.
3. Calcular integrales definidas e indefinidas utilizando diferentes tecnicismos según corresponda en cada caso (teoremas fundamentales del Cálculo Integral, métodos de integración y tabla de integrales inmediatas)
4. Modelar problemas sencillos geométricos, físicos y vinculados a la especialidad, donde sea posible aplicar el Cálculo Integral utilizando los conceptos, teoremas y propiedades (Cálculo de áreas).

Objetivo educativo: Desarrollar una cultura que potencie el trabajo entre todos, de consulta colectiva, el dialogo y debate para la identificación de los problemas y la unidad de acción en la selección de posibles alternativas de solución, utilizando las tecnologías, en particular videos tutoriales y herramientas para su edición.
Contenido:

- Análisis de curvas.
- Cálculo de integrales definidas e indefinidas.
- Modelar y resolver problemas de cálculo de áreas de superficies utilizando el cálculo integral.

Medios: Computadora con conectividad, bibliografía básica y complementaria tanto en formato duro, como digital, tanto en la red local como en internet. Así como videos sobre las diferentes temáticas compartidos en la nube con los estudiantes. También la pizarra, el plumón y otra que los estudiantes creen.

Evaluación: Se evalúa el resultado de los estudiantes de la producción del video a través de la exposición y el dominio del contenido matemático que responde a los objetivos de la prueba parcial.

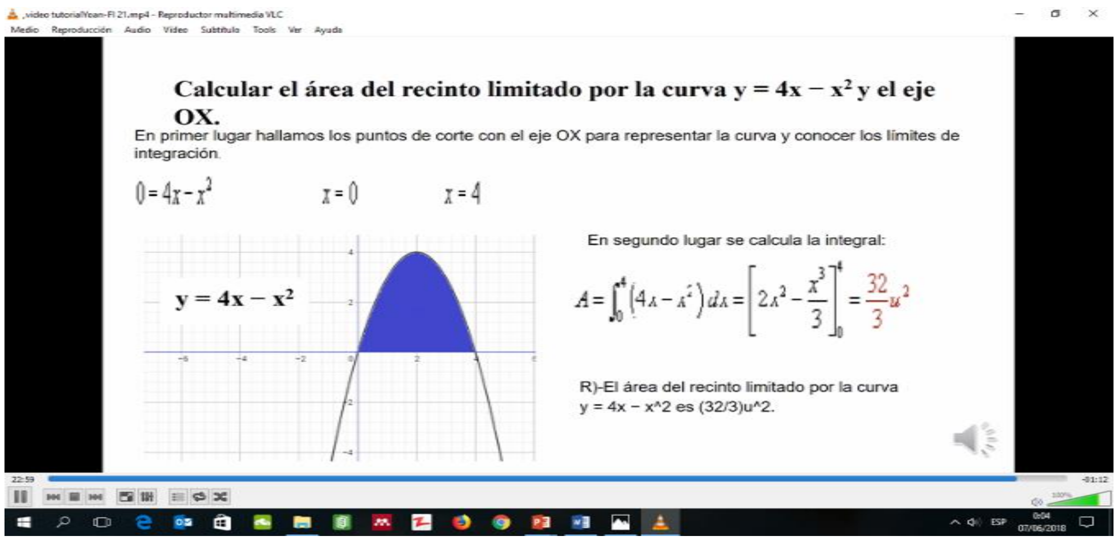


Figura 1. Captura de pantalla de uno de los videos producido por los estudiantes del grupo FI21

La estrategia se utilizó durante los cursos 2016-2017 con 27 estudiantes y 2017-2018 con 21 estudiantes que suman una muestra total $N_T=48$, se ven a continuación en la *Figura 2*, los resultados obtenidos en las pruebas parciales de la asignatura MI en el grupo muestral del curso 2017-2018 $N_I=21$ que revelan los avances de los estudiantes donde se aplicó la estrategia.

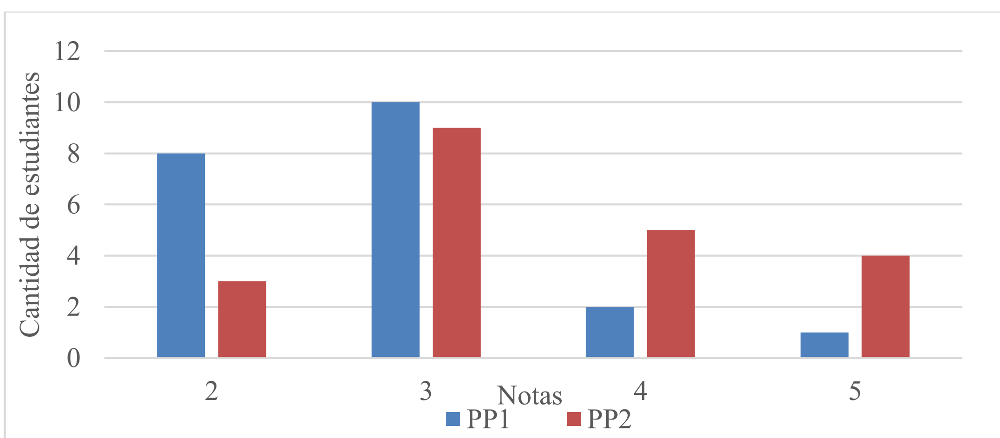


Figura 2. Resultados de las pruebas parciales 1 y 2 (PP1 y PP2) de Matemática I en el grupo FI21

En los resultados se aprecia el incremento en cantidad de aprobados y calidad de las notas. Donde la nota de 2 es suspenso y las demás aprobados; la calidad se calcula con el porcentaje de aprobados con notas de 4 y 5. En este grupo muestral, la porciento de aprobados se incrementó de 61.9% a 85.7% y la calidad de 14.3% a 42.9%.

Además de analizar los resultados de los estudiantes en las evaluaciones, se solicitó la opinión de los estudiantes sobre las actividades realizadas al concluir la clase práctica integradora sobre aplicaciones de la integral definida, última del segundo semestre. Se le aplicó la técnica Positivo, Negativo e Interesante (PNI) donde los estudiantes escribieron lo positivo, negativo e interesante que les resultó la participación en actividades de aprendizaje derivadas de la estrategia. Participaron 20 estudiantes de 21, todas las opiniones fueron positivas e interesantes y solo una negativa, se declaran a continuación las ideas que más se repitieron y la opinión "negativa" de un estudiante.

- Positivo: "puedo aprender de mis compañeros" "pude aplicar el cálculo integral a la vida" "utilicé mi celular para hacer un trabajo de Matemática"
- Interesante: "tuve la posibilidad de consultar con usted el trabajo antes de evaluarme" "la utilización del Derive para graficar mi función" "pude realizar un video"
- Negativo: "Que existan pruebas escritas".

Estas opiniones corroboran que vale la pena trabajar metodológicamente para diseñar actividades de aprendizaje que motiven el estudio de la Matemática en los estudiantes.

Conclusiones

El estudio de las visiones del uso de las TIC y las TAC hace pensar y crear nuevas formas de planificar el proceso de enseñanza aprendizaje para motivar el aprendizaje de la Matemática en estudiantes de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas.

El desarrollo de una estrategia de enseñanza aprendizaje mediante la utilización de videos tutoriales permitió el diseño didáctico de actividades de aprendizaje donde los profesores y estudiantes utilicen las tecnologías para transmitir y facilitar información, para investigar, crear y difundir su conocimiento, para interactuar y colaborar con los demás. Esta contribuyó a la motivación y satisfacción de los estudiantes durante el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de las asignaturas AL y MI, asimismo contribuyó a elevar la promoción en un 23.8% y la calidad de la promoción en un 28.6%.

Referencias bibliográficas

Abedini, M., Mortazavi, F., Javadinia, S. A., & Moonaghi, H. K. (2013). A New Teaching Approach in Basic Sciences: Peer Assisted Learning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 83*, 39–43. doi: 10.1016/j.sbspro.2013.06.008.

Addine, F. (1998). Estrategias y alternativas para la estructura óptima del proceso de enseñanza aprendizaje. *Folleto de Didáctica de la Maestría en Educación*. Potosí, Bolivia, p. 8.

Aguirre, A.C. (Productor). (2012). Aplicación de la integral. Área bajo la curva. Instituto Tecnológico de Chihuahua. [youtube]. De https://www.youtube.com/watch?v=Z2AXKX-MJ6U.

Cabero, J. (1996) Nuevas tecnologías, comunicación y educación. *Revista electrónica de tecnología educativa, No. 1* (Febrero). p.10. Palma de Mallorca, España.

Cabero, J. (2015). Reflexiones educativas sobre las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Recuperado de: www.tecnología-ciencia-educacion.com.

Cebrián, M. (sin fecha). Los videos didácticos: claves para su producción y evaluación. Universidad de Málaga. Recuperado de https://recyt.fecyt.es/index.php/pixel/article/viewFile/61053/37067.

Conde, A., Hinojo, M. A., & Fuentes, A. (2017). Acción tutorial y TIC en la práctica de profesores noveles universitarios. *Innovación docente y uso de las TIC en Educación.* Málaga: UMA Editorial, 1–7.

Emmanuele, D.; Rodil, F.; Vernazza, C. (2018). Concepciones ontoepistemológicas y proceso de deconstrucción del saber matemático en la formación de profesores de Matemática. En Flores, R.; Serna, L.A. y Páges, D. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31(2), 1077-1084. México, CLAME.

Esper, L.B.; Juares, M.G. (2017). Innovación metodológica en la educación superior para favorecer la comprensión. En Serna, L.A. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30, 355-363. México, CLAME.

Espuny, C., Gisbert, M., González, J. y Coiduras, J. (2010). Los seminarios TAC. Un reto de formación para asegurar la dinamización de las TAC en las escuelas. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa. No. 34*, Diciembre.

Gomariz, M. Á., y Cascales, A. (2017). Plan de acción tutorial: diseño, desarrollo y evaluación.

Johnson, L., Adams, S., Cummins, M., Estrada, V., Freeman, A., y Hall, C. (2016). *NMC Informe Horizon 2016*. Edición Superior de Educación. Austin, Texas: The New Media Consortium.

Julioprofe.net. (Productor). (sin fecha). Graficación de funciones. [EVA]. De http://zera.media.uci.cu/uploads/resources/5af0917b1cbf7_Graficaci%C3%B3n%20de%20una%20funci%C3%B3n%20polin%C3%B3mica.mp4.

Mendes, G., y González, F.E. (2017). Cálculo diferencial e integral y su relación con el aprendizaje fuera del aula en Educación Superior. En Serna, L.A. (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30, 412-419. México, CLAME.

Montánchez, M. L., y Martínez, P. C. (2017). Plan de Acción Tutorial como actividad pedagógico formativa en la Universidad Regional Amazónica, IKIAM. CienciAmérica, 6(2), 76–81.

RedUNCI, (Ed.). (2017). Innovación en educación en informática. En WICC 2017 XIX Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación (pp. 667–752). Instituto Tecnológico de Buenos Aires.

Zapata-Ros, M. (2013). Analítica de aprendizaje y personalización. *Campus virtuales, 2*(2), 88-118. http://www.uajournals.com/campusvirtuales/journal/3/7.pdf

SECCIÓN 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

LAS MATES CON HUMOR ENTRAN. LAS CARICATURAS Y LOS MEMES COMO HERRAMIENTA DE DIVULGACIÓN MATEMÁTICA

MATHS WITH HUMOR FAVORS LEARNING; CARTOONS AND MEMES AS MATHEMATICS DISSEMINATION TOOLS

Paola Alejandra Balda Álvarez
Institución Educativa General Santander (Colombia)
pbalda20@hotmail.com

Resumen
Se presentan los resultados parciales de una experiencia de divulgación de las matemáticas a través de los recursos comunicativos: memes y caricaturas. Los resultados son producto de una experiencia que se viene desarrollando durante dos años escolares con 187 estudiantes de grados décimo y once de una institución pública en Colombia, estos resultados revelan cómo el empleo de este tipo de recursos en los cuales la matemática es el contexto de desarrollo generan un escenario dinámico, creativo, interdisciplinar en donde las matemáticas se desarrollan de manera seria, pero no tiene que ser aburrida y que además permite que lo aprendido trascienda del aula.

Palabras clave: memes, caricatura, divulgación, matemática educativa

Abstract
This paper reports on the partial results of an experience of mathematics dissemination through communicative resources: memes and cartoons. These are the results of an experience that has been developed during two school years with 187 students in tenth and eleventh grades of a public school in Colombia. These results reveal how the use of this type of resources, in which mathematics is the context of development, generate a dynamic, creative, interdisciplinary environment where mathematics develops in a serious way, but it does not have to be boring and it also allows what is learned to transcend the classroom.

Key words: memes, cartoons, dissemination, mathematics education

Introducción

El manifiesto emitido por la red de divulgación de las matemáticas (DiMa) afirma entre otras cosas que “La divulgación de las matemáticas es una necesidad y una demanda social que debe ser fomentada y reconocida (…) por las instituciones públicas, los medios de comunicación y la sociedad en general” (2018). Esta postura junto con la necesidad actual de incorporar medios de comunicación y recursos tecnológicos al aula, ha generado nuevas maneras de concebir y dirigir los procesos de aprendizaje y enseñanza en donde se propongan alternativas de trabajo que permitan a los docentes formular estrategias didácticas que aporten al impulso de la creatividad, desarrollen habilidades de comunicación y síntesis, hagan uso de tecnologías y permitan que lo que se aprende en la escuela trascienda.

La propuesta que se presenta se encuentra en desarrollo y busca a través de los retos planteados, la incorporación de uso de herramientas comunicativas en el aula de matemáticas, las cuales permitan el ejercicio del tránsito continuo y reflexivo del saber a través de recursos gráficos y tecnológicos. Se parte de reconocer la importancia de la divulgación matemática y el estatus que dentro de la experiencia adquieren los memes y caricaturas como herramienta de divulgación bajo la premisa de considerar que estas herramientas hacen parte de sus racionalidades contextuales actuales de los estudiantes.

La estrategia busca que los estudiantes construyan caricaturas y memes cuyo eje central sean los significados atribuidos al saber y los divulguen en escenarios tanto escolares como extraescolares. La experiencia tiene dos años de implementación y se ha llevado a cabo con cerca de 187 estudiantes de grado noveno y décimo en clase de matemáticas.

Aspectos teóricos

¿Qué es la divulgación matemática?

La divulgación consiste en un conjunto de acciones que hacen asequible el conocimiento científico a un público no necesariamente experto, a personas interesadas o no en informarse sobre un tipo particular de conocimiento. La divulgación centra su interés en descubrimientos científicos, teorías o campos del saber. En la actualidad la divulgación científica ha adquirido una gran importancia, toda vez que se constituye en una forma de democratizar un conocimiento haciendo uso de diversas estructuras.

En el caso particular de las matemáticas, la divulgación busca ser complemento del trabajo científico, el cual tiene como finalidad que el lector conozca los resultados de un proceso investigativo simplemente tenga acceso de un modo más amigable a aquellos conocimientos específicos del área que no han podido ser comprendidos o significados a través de los procesos académicos, generando así nuevas formas de comprender y resignificar el conocimiento.

Es así, como el ejercicio de divulgación se constituye en un camino que más allá de la familiarización con las matemáticas permite que la sociedad reconozca que estas forman parte de nuestras vidas y se constituyen en pilares básicos y fundamentales de la cultura humana (García, 2016). Al respecto, Miguel de Guzmán, afirma: “sería muy deseable que todos los miembros de la comunidad matemática y científica nos esforzáramos muy intensamente por hacer patente ante la sociedad la presencia influyente de la matemática y de la ciencia en la cultura” (de Guzmán, 2007), de ahí que la divulgación más que una actividad aislada se constituya en una tarea fundamental de quienes conocemos y trabajamos en torno a este saber. Esta afirmación es refirmada por la red de divulgación de las matemáticas (DiMa) la cual afirma que “La divulgación de las matemáticas es una necesidad y una demanda social que debe ser fomentada y reconocida, no solo por el conjunto de las personas de nuestro país interesadas en el tema, sino además por las instituciones públicas, los medios de comunicación y la sociedad en general” (DiMa, 2018).

Por lo anterior, se reconoce y deduce que la divulgación matemática tiene como propósitos:

- Eliminar los prejuicios posibles de la sociedad respecto de las matemáticas.
- Mejorar los conocimientos culturales de las personas.
- Desarrollar el gusto por las matemáticas.
- Otorgar a la matemática un estatus de herramienta de transformación de nuestra calidad de vida.
- Reconocer la importancia de las matemáticas en diversos contextos.
- Hacer asequible el conocimiento matemático a un público no necesariamente experto.

Los medios de comunicación como herramientas de divulgación matemática

Como se mencionó los medios de comunicación son usualmente empleados para la realización de actividades de divulgación y se han constituido en herramientas fundamentales para que el conocimiento especializado llegue a toda la población. Las revistas de divulgación científica, los artículos en periódicos, los programas de televisión especializados y web son algunos de los medios reconocidos para el desarrollo de esta actividad, los cuales garantizan una eficiente y certera canalización de la información.

Es así como las interacciones generadas en un escenario lejos del aula, carentes de un profesor y que permiten generar un gusto adicional por las matemáticas requieren de recursos llamativos de instrumentos que sean capaces de recrear de forma llamativa una realidad científica que establezca un puente entre lo incomprensible y lo comprensible. Es precisamente en este momento donde aparecen recursos como las caricaturas y los memes considerados como instrumentos ilustrativos capaces de recrear y transmitir una idea o un saber.

La caricatura y los memes

La caricatura es una representación animada de un acontecimiento, el cual de forma exagerada encierra un mensaje que busca ser comunicado. Por tanto, la caricatura más allá de abordar un personaje retrata una realidad, un contexto, un hecho, una institución y tiene propósito producir un efecto cómico y una reflexión al lector a través de frases, símiles, hipérboles y metáforas. “La caricatura reúne varios atributos: es una representación artística, un recurso periodístico y también vehículo de humor. Lo fascinante del asunto está en que a menudo reúne dos de ellas o todas estas condiciones en conjunto” Borregales (2017, p.113).

La caricatura como medio de divulgación: “Ha sido utilizada en los periódicos desde finales del siglo XVII, cuando comenzaron a surgir los periódicos ilustrados, en los que pronto aventajó al dibujo serio” Martínez (1992, p. 74) y poco a poco dentro del rango humorístico ha alcanzado altos niveles de aceptación y reconocimiento en la sociedad toda vez que se constituye en un fiel representante de tipo gráfico, una burla, sátira y exageración graciosa de rasgos y conductas que, por su simpleza y creatividad, induce sonrisas en su observador (Torres,1982). Es precisamente el conjunto de estas características la que dota a la caricatura del estatus de recurso didáctico adecuado a todas las edades, el cual según investigadores como Flores (2003, p.7) “sobrepasa la intención puramente lúdica, pues las propuestas que sugieren emplear el humor con alguna intención barren desde la función curativa fisiológica a la curativa psicológica, pasando a la creación de puentes de comunicación y confort”.
Autores como Abreu (2001), Flores (2003) y Pérez (1979) coinciden en afirmar que un elemento importante a destacar es la presencia de caricaturas escritas en diferentes medios de comunicación, caricaturas que logran acercarse a los usuarios con el fin de entretener de forma creativa y llamativa proporcionando una información particular y de interés del autor dotada de trazos, palabras, ingenio, humor y capacidad de síntesis, tal y como se observa en la Figura 1.

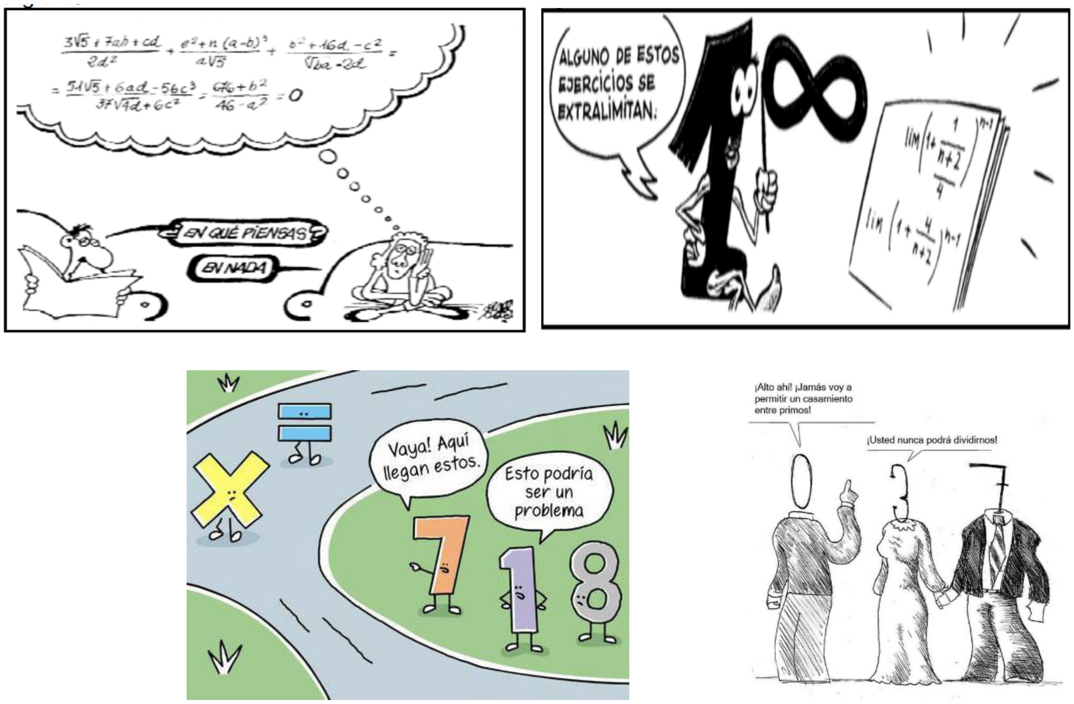


Figura 1. Caricatura educativa
Fuente: Flores (2003)

Respecto a los memes, estos son considerados como una unidad de información digital que se difunde a través de medios virtuales. El término meme, representa una forma masiva de propagación cultural. Debido a su comportamiento viral se constituye en un recurso importante de divulgación el cual se caracteriza por ser reconocible después de múltiples procesos de transmisión, por su capacidad expresiva para ser transmitido, y por su perdurabilidad en el tiempo (Dawkins, 1979).

Los memes en el campo educativo han sido empleados como herramientas de expresión y de crítica social, grupal o personal que desarrollan nuevas formas de leer y escribir la realidad (Arango, 2014). Su creación adicional a la creatividad del autor implica el reconocimiento y empleo de diversos recursos electrónicos, pues tal y como lo afirma Beltrán (2016) no en vano, los memes son un producto de la generalización de las nuevas tecnologías (ver Figura 2). Así su creación demanda puntualmente de:

1. Tener una idea de lo que se quiere transmitir.
2. Elegir una imagen acorde con esa idea.
3. Escribir el texto. Cuanto más corto y directo, mejor.
4. Integrar texto e imagen, cosa que hacen automáticamente los memes y caricaturas.
5. Publicar o enviar dicha imagen Beltrán (2016, p.130)

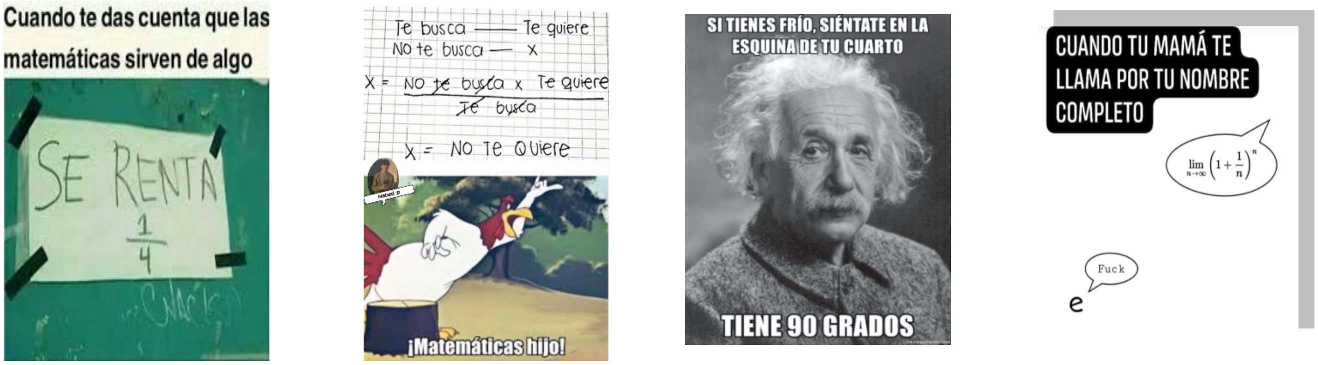


Figura 2. Memes matemáticos
Fuente: Memedroid

Es así como la implementación de las caricaturas y los memes en el aula de clase, en particular en el aula de matemáticas dar un paso importante al abandono del paradigma educativo en el cual enseñar se centra única y exclusivamente en transmitir, contrario a ellos busca establecer un diálogo continuo entre el docente, el estudiante, el saber, en relación un contexto en el cual el saber vive a través de sus usos. Además, este tipo de recursos son una herramienta de gran y rápida difusión que aporta a la memorización, la creatividad, el uso de síntesis, la comprensión de un tema, la inventiva para construir y transmitir conocimiento.

Algunas experiencias del uso de memes o caricaturas en educación.

Dada la facilidad de transmisión de estos recursos, los memes y las caricaturas han ingresado a las aulas de clase convirtiéndose en estrategias pedagógicas que favorecen el aprendizaje. Al respecto, universidades como la Universidad Pedagógica Nacional de México, a través de la Subdirección de Comunicación Audiovisual, han optado por el uso de memes como un material de refuerzo de sus contenidos educativos como un apoyo a los conceptos vistos en el aula de las licenciaturas constituyéndose en una forma de autoestudio.
Beltran (2016), propone la utilización didáctica de los memes, como elemento motivador, para introducir o reforzar conceptos matemáticos o como instrumento de evaluación informal en clase proporcionando rúbricas de evaluación de los memes empleados por los estudiantes (ver Figura 3)

RÚBRICA	4 - Excelente	3 - Bien	2 - Regular	1 - Mal
Coherencia del meme	La elección de la imagen está en consonancia con el texto.	La imagen y el texto están relacionados, pero se podría escribir mejor.	La imagen tiene algo que ver con el texto, pero sería necesario escribirlo de otra manera completamente diferente.	La imagen no tiene nada que ver con el texto escrito.
Ortografía y gramática	El texto no tiene faltas de ortografía y la gramática es correcta.	El texto tiene una falta de ortografía.	El texto tiene dos faltas de ortografía o alguna falta gramatical (tiempos verbales, por ejemplo).	El texto tiene más de dos faltas de ortografía y/o de gramática.
Adecuación a los contenidos solicitados	El meme se adecua a la consigna de la actividad.	El meme no se relaciona con lo solicitado en la actividad, pero tiene que ver con contenidos propios del tema de estudio.	El meme no tiene que ver con lo solicitado ni con los contenidos del tema, pero está relacionado con las matemáticas.	El meme no tiene nada que ver con las matemáticas.

Figura 3. Sugerencia de rúbrica para la evaluación de memes realizados por los alumnos
Fuente: Beltran (2016)

Por su parte, Flores (2003) en su propuesta en torno a el humor gráfico como recurso didáctico en el aula de matemáticas y luego de un largo trabajo en el cual recolecta y organiza diversas herramientas de humor gráfico matemático, afirma que cada vez más se insiste en la importancia de introducir la historia de las matemáticas en el aula. Según el investigador el humor gráfico suministra situaciones sobre matemáticos y sobre problemas, que facilitan esta introducción, dando lugar a que se humanice la enseñanza de las matemáticas. Así los recursos visuales humorísticos al ser un medio jocoso de información son un recurso que permite extender la educación a escenarios más allá del aula, toda vez que su legado llega a un gran número de personas, haciendo comprensible aquello que en muchas ocasiones fue incomprendido en la escuela o incluso olvidado.

Socioepistemología como marco teórico

La socioepistemología, como marco teórico que enmarca la propuesta, sostiene que el saber matemático no se limita a una serie de definiciones o fórmulas a ser aplicadas, contrario a esto centra su interés en el hacer, en lo humano del saber. La Teoría Socioepistemológica se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional (Cantoral, 2013). Este interés teórico permite conocer y construir significados y estructurar sus sistemas conceptuales. Desde esta postura se reconoce que el saber emerge de prácticas sociales que no se centran en caracterizar lo realizado por lo que el humano hace, sino aquello que los hace hacer lo que hacen (Covian, 2005) así se concibe al saber cómo un conocimiento en uso al considerar el saber popular, culto y técnico como componentes de la sabiduría humana. Las prácticas sociales se caracterizan por ser normativas, determinan el hacer; pragmáticas, orientan las acciones en la actividad humana; identitaria, dotan de identidad a aquel que usa el conocimiento; y la discursiva, práctica más recurrente e influyente en los actos de entendimiento y consenso, constituyendo un discurso reflexivo (Cantoral, 2013). Así es el hombre cultural, histórico y socialmente situado quien construye explicaciones sobre la realidad que emerge de su cotidianidad, de la historicidad, del contexto, de ese entrelace de convivir, propiciando el desarrollo de complejos procesos de construcción de significados compartidos Ferrari (2010).

Desde esta postura se reconoce que "dado que este conocimiento se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y profesores" (Cantoral, 2013, p.62).Así las caricaturas y los memes, al igual que otros recursos comunicativos hacen parte de los temas trabajados en el aula, y poco a poco con la aparición de construcciones informativas de textos con elementos gráficos que describen ideas, conceptos, situaciones, o pensamiento, alcanzan una amplia y veloz difusión. Estos recursos hacen parte de sus racionalidades contextuales diversas, toda vez que reconocen privilegian y potencias las diversas formas de pensamiento relativas a la realidad de los individuos en el momento y lugar donde se significa el saber (aula extendida).

Así el uso de este tipo de recursos informativos convoca la participación en la construcción explícita y crítica de saberes, poniendo el acento en el desarrollo de la creatividad, el humor y comunicación gráfica, para aportar en la alfabetización científica, dotando a los niños de diversos tipos de lenguaje que les permita insertarse en un mundo de las matemáticas para comunicarlas al mundo.

Aspectos metodológicos

Esta es una experiencia que se viene desarrollando con 187 estudiantes de la Institución Educativa General Santander del municipio de Soacha en Colombia, desde el segundo semestre del año 2018, fecha en la cual inició el proceso de construcción de caricaturas y que se continúa llevando a cabo en la actualidad. Los estudiantes se encuentran en grado noveno y décimo de educación básica y media. La experiencia se viene desarrollando a través de cinco momentos a saber:

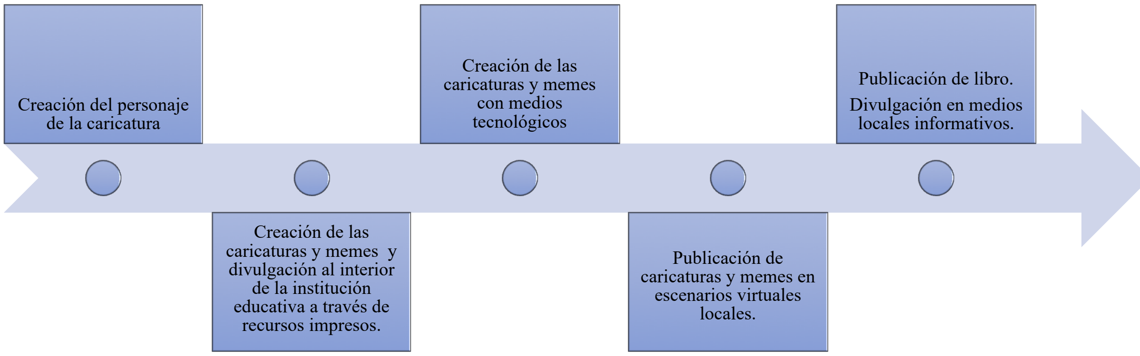


Figura 5. Momentos de la experiencia

- Momento 1. Creación del personaje de la caricatura. Para la creación del personaje se ha acudido a las profesoras de Artes de la institución educativa, quienes desde sus clases han orientado la construcción de un personaje auténtico de cada estudiante.
- Momento 2. Primera etapa de divulgación al interior de la Institución Educativa. En esta etapa en las clases de Álgebra y Trigonometría los estudiantes han dado vida a su caricatura y a los memes otorgando a estos un estatus de medio informativo de los aprendizajes de la asignatura. Los estudiantes con el apoyo de su profesor de lenguaje crean y han creado las viñetas de la caricatura y han pulido la presentación gráfica.
- Momento 3. Una vez consolidado el proyecto, se amplió la versión gráfica incorporando recursos virtuales para dar vida a las caricaturas y difusión de memes en medios virtuales. En esta etapa se incorporó el apoyo de la profesora de tecnología para el correcto uso de herramientas encontradas en la web.
- Momento 4. La selección de las mejores caricaturas da paso al primer momento de publicación en carteleras institucionales y en medios de comunicación local, de la alcaldía de Municipio de Soacha.
- Momento 5. En este momento se gestionará la publicación de los resultados en escenarios de comunicación locales.

En la actualidad la experiencia se encuentra en el momento 3, se están creando memes y caricaturas de los temas construidos en clase de matemáticas, se han incorporado poco a poco el uso de recursos tecnológicos y se han afinado las acciones comunicativas y artísticas de sus propuestas iniciales.

Resultados parciales

El trabajo llevado a cabo con relación a los memes y las caricaturas tuvo por objeto más allá de presentar a los estudiantes estos recursos, motivarlos para su construcción fusionando aprendizajes de otras áreas del conocimiento y poniendo a prueba todas las habilidades que su creación demanda. Los puntos en común que emergen de ambos recursos permiten reconocer que el trabajo que se está llevando a cabo la construcción de memes y caricaturas va más allá del aula de clase, pues ambos se constituyen en medios divulgadores de lo aprendido y son los estudiantes los encargados de su creación y difusión. Atendiendo a los planteamientos anteriores, se presentan los avances y hallazgos de cada uno de los momentos llevados a cabo hasta el momento.

Momento 1. Creación del personaje de la caricatura

En una primera fase se propuso el diseño de caricaturas como acercamiento a la construcción gráfica. Las orientaciones iniciales estuvieron centradas en crear un personaje, darle vida y forma. Este personaje se buscaba fuera representativo de cada uno de los estudiantes. Se mostraron ejemplos de caricaturas en otros escenarios académicos como el caso de @DonPardino (ver Figura 6), dando a conocer cómo este recurso puede ser empleado en escenarios extraescolares.

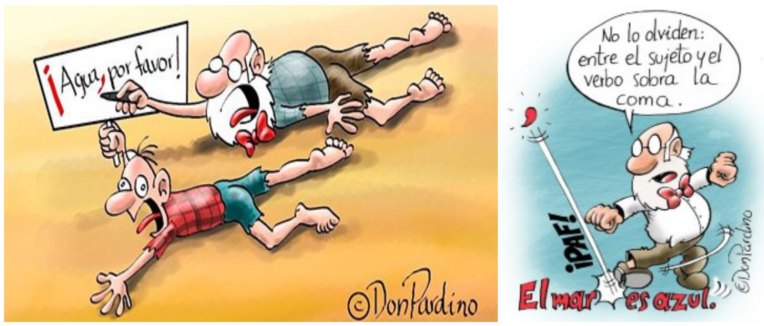


Figura 6. @DonPardino
Fuente: https://twitter.com/profedonpardino?lang=es

Así como este personaje ficticio que se dedica a enseñar ortografía a través de viñetas cómicas se propuso crear su personaje para enseñar matemáticas a la comunidad. Aquellas matemáticas que ellos saben y significan en el aula.

La parte creativa contó con el apoyo de las profesoras de artes de la institución, quienes en sus clases y en escenarios externos aportaron a la creación del personaje a través de técnicas gráficas de diseño (ver Figura 7).

Figura 7. Niños en el proceso creativo del meme

Momento 2. Primera etapa de divulgación al interior de la Institución Educativa

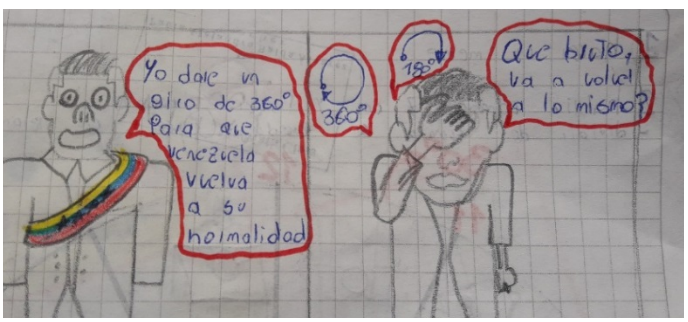
Luego del diseño del personaje, se presentó el reto de construir las primeras caricaturas y con ello la necesidad de tener claridad en el uso de viñetas y signos ortográficos, para ello se pidió la asesoría de los docentes del área de lenguaje quienes orientaron a los estudiantes sobre el correcto uso de expresiones, signos de aclamación e interrogación e incluso la redacción correcta de las frases.

Una vez los estudiantes crearon sus personajes, se dieron a la tarea de pensar cuál de los temas trabajados en el aula (ángulos, triángulos, teorema de Tales, teorema de Pitágoras, razones trigonométricas, rectas, entre otros). Una vez reconocidos, un reto de reflexión fue sintetizar lo significado, reconociendo la responsabilidad de comunicación que tenían. Crearon diferentes tipos de ideas, unas muy directas de comunicación de conocimientos y otras que a través del humor llevaban al lector a inferir lo planteado.

Cuando los estudiantes ya tuvieron clara la idea de la caricatura se amplió la posibilidad creativa al uso de memes. Lo primero que se hizo fue explicar qué era un meme y cuál era su objetivo. Dado que todos los niños habían visto y compartido memes alguna vez en su vida por medio de las diferentes redes sociales en las cuales estaban inmersos, la clase donde estos se explicaron fue muy dinámica y participativa. Se pidió que contarán sobre los últimos memes recibidos, los más graciosos, y los de mayor recordación, de hecho, en los cursos donde se contó con recursos audiovisuales se buscaron memes en web para discutir sobre ellos. Un segundo momento de la clase consistió en identificar las partes de los memes, qué debe tener un recurso para ser un meme, los niños dieron respuestas como:

"debe tener una imagen"
"debe ser chistoso"
"se debe compartir con muchas personas"

La tarea para la siguiente sesión fue buscar un meme que tuviera alguna relación con las matemáticas y llevarlo impreso. Ya en la clase, varios niños llevaron memes y los explicaron. Teniendo en cuenta la reflexión, surgió la idea que como no todas las personas iban a reconocer el mensaje de un meme creado en la clase de matemáticas era necesario en la parte inferior del mismo hacer la explicación del tema, lo cual fue aceptado por la docente. Este ejercicio se asumió además para las caricaturas llegando a creaciones como las presentadas en la Figura 8.



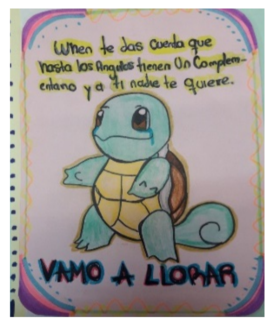


Figura 8. Memes creados por los niños de grado décimo 2019

Una vez creados al menos cinco diseños por estudiante se realizó la primera exposición en la institución. Esta se llevó a cabo con la presencia de estudiantes, docentes y padres de familia. Una vez finalizada la presentación, en clase se reflexionó sobre el impacto de esta, sobre las apreciaciones de los padres al ejercicio llevado a cabo.

Momentos 3. Creación de caricaturas y memes con recursos tecnológicos

Durante la discusión del impacto de la exposición uno de los niños manifestó que los memes podrían crearse con recursos tecnológicos sin necesidad de dibujar imágenes. Así surgió la necesidad de incorporar a la clase el uso de generadores de memes que se encuentran en la web como:

- http://www.memegenerator.es/crear
- http://www.taringa.net/post/info/12100359/La-mejor-Pagina-para-crearMemes.html
- http://www.xtremeaddictions.com.ar/foro/showthread.php?77352-P%E1gina-para-crear-quot-memes-quot

Ya en clase de tecnología y en sus hogares, se ha propuesto a los niños hacer uso de estos recursos para la creación de sus memes ver Figura 9.

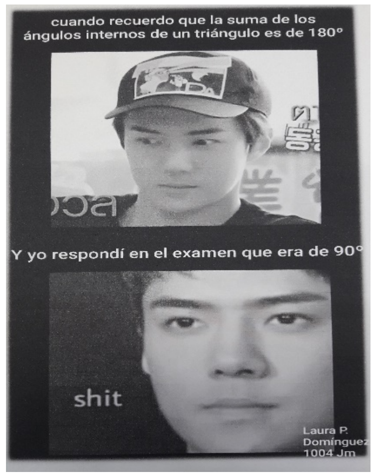


Figura 9. Meme creado por una estudiante de grado décimo con el programa megenerator

Conclusiones

Los resultados aquí registrados muestran el impacto del trabajo en el aula que incorpora el uso y en particular la construcción de caricaturas y memes a la clase de matemáticas como herramienta de divulgación. La experiencia ha permitido que los estudiantes realicen diferentes tipos de razonamiento en torno a las matemáticas, pues ya no se trata solo de entender para ellos sino de entender para resignificar y comunicar; es decir llevar lo aprendido a escenarios extracurriculares.
Lo expuesto pone en evidencia la factibilidad de estos recursos visuales para desarrollar habilidades comunicativas, humor, capacidad de síntesis y reflexión en torno a los significados atribuidos a un saber matemático. A través de la experiencia se ha logrado además vincular otros actores de la comunidad educativa tanto dentro como fuera del aula. Así mismo la experiencia ha permitido resignificar el uso de recursos tecnológicos al darle un uso pedagógico a medios comunicativos que en muchas ocasiones se desconocen como herramientas didácticas potentes.

Referencias bibliográficas

Abreu, C. (2001a). La imagen periodística no fotográfica (Periodismo iconográfico) (III) El dibujo periodístico: una aproximación conceptual. *Revista Latina de Comunicación Social* [en línea], 3. Recuperado el 11 de Febrero de 2019, de: http://www.revistalatinacs. org/aa2000qjn/ 90abreu3.htm

Arango, P. (2014). Experiencias en el uso de los memes como estrategia didáctica en el aula. *Memorias del Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación,* 1-22. Argentina.

Beltrán (2016). Utilizando memes con tus alumnos. *Números* [en línea], 91. Recuperado el 11 de febrero de 2019, de http://www.sinewton.org/números/

Borregales, Y (2017). *Importancia de la caricatura como fuente de conocimiento histórico. Tiempo y espacio* [en línea], 68. Recuperado el 11 de febrero de 2019, de: file:///C:/Users/pbald/Downloads/Dialnet-ImportanciaDeLaCaricaturaComoFuenteDeConocimientoH-6174892%20(2).pdf

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa editorial

Covian, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya.* Tesis de Maestría. Cinvestav – IPN, México, DF, México.

Dawkins, R. (1979*). El gen egoísta.* Barcelona: Labor.

DiMa. (2018). *Manifiesto de la red DiMa por el reconocimiento de la divulgación de las matemáticas.* Recuperado el 11 de Febrero de 2019, de: https://www.icmat.es/outreach/dima

Ferrari, M. (2010). Lo titiritesco en matemáticas: ¿dos esencias en la misma práctica? *En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 23,849-858. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa: México.

Flores, P. (2003). Humor gráfico en el aula de Matemáticas. Granada: Arial.

García, D. (2016). Divulgación matemática: Su uso en Educación Primaria. *Tesis para optar el grado de maestro en educación primaria*. Universidad de Cantabria. Santander, España.

Guzmán de, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, pp. 19-58.

Martínez J. (1992). *Diccionario* de información, comunicación y periodismo. 2da ed. España: Paraninfo.

Torres, I. (1982). *El humorismo gráfico en Venezuela.* Caracas*:* Ediciones MARAVEN.

Pérez, M. (1979). *La caricatura política en el siglo XIX.* Caracas: Cuadernos Lagoven.

MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN SEXUAL: MODELACIÓN DE ECUACIÓN DE LA RECTA

MATHEMATICS AND SEXUAL EDUCATION: LINEAR EQUATIONS MODELING

Cristian Muñoz Jeldres
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
cmmunoz@uc.cl

Resumen
El progreso de la educación sexual en Chile no ha sido suficiente en la prevención de ITS (infección de transmisión sexual), aspecto reflejado en el alza de personas diagnosticadas durante la última década. Esta experiencia de aula pretende mostrar la aplicación de una propuesta didáctica innovadora, que busca la modelación de una recta, utilizando los datos del 2012 al 2015, para estimar cifras para 2016 y 2017, las cuales son previstas a ser menores a las reales en al menos 5 de las 6 ITS incluidas en este estudio. Todo esto con la intención de generar conciencia respecto al alza de casos nacionales de ITS. La propuesta se fundamentó desde la perspectiva sociocrítica de la matemática, la cual es una práctica pedagógica que utiliza la modelación matemática como estrategia didáctica que busca generar aprendizaje tanto en matemáticas como para vivir en sociedad (Barbosa 2003, 2018; Barbosa & Santos, 2018; Gomes & Barbosa, 2014). Fue aplicada en un curso de secundaria (tercer año medio en Chile) mixto con 38 personas divididas en seis grupos.

Palabras clave: educación sexual, rectas, modelación

Abstract
The progress in Chilean sexual education has not been sufficient in the prevention of sexually transmitted diseases (STD), what is reflected in the increasing number of diagnosed people during last decade. This classroom experience aims to show the implementation of an innovative didactical proposal, which seeks the modeling of a straight line using the data from 2012 to 2015 to estimate figures for 2016 and 2017, expected to be lower than the actual figures in at least five of the six STDs included in the study. All this is intended to create awareness of the national increasing number of STD cases. The proposal was founded on mathematics socio-critical perspective, which is a pedagogical practice that uses mathematical modeling as a didactic strategy to generate learning in both, the mathematical field and the social life (Barbosa 2003, 2018; Barbosa & Santos, 2018; Gomes & Barbosa, 2014). This proposal was applied to a junior high school class in Chile, a mixed group of 38 students, divided into 6 working teams.

Key words: sexual education, straight lines, modelling

Introducción

El año 2008 varios países latinoamericanos, incluyendo Chile, se comprometieron a implementar la declaración ministerial "Prevenir con educación", que dentro de sus compromisos incluye:

> "Implementar y/o fortalecer estrategias intersectoriales de educación integral en sexualidad y promoción de la salud sexual, que incluyan la prevención del VIH e ITS y en las que se complementen los esfuerzos que en el ámbito de sus respectivas responsabilidades y atribuciones se lleven a cabo." (Hunt, Monterrosas & Mimbela, 2015, p.14)

No obstante, el año 2015 se evaluó el cumplimiento de dicha declaración en cada país y Chile avanzó solo un 39% en su implementación, el país con menor avance de Latinoamérica (Hunt, Monterrosas y Mimbela, 2015). Además, el año 2010 se promulgó la ley 20.418 que establece como obligación que se imparta educación sexual en los colegios del país, pero no ha existido una preocupación de la superintendencia de educación por hacer un seguimiento en que se cumpla (Arenas, 2016). Sumado a lo anterior, durante la última década se ha presentado una notoria alza en la cantidad de personas diagnosticadas con diversas ITS a nivel nacional (Casinelli y Fernández, 2018).

Debido a esto se presenta la siguiente propuesta didáctica donde se les pide a los estudiantes modelar una recta que represente de mejor manera el comportamiento de diagnosticados con seis ITS en el país entre los años 2012 y 2015 para luego estimar las cifras correspondientes para 2016 y 2017, las cuales idealmente serán inferiores a las cifras reales para dichos años y así permitir observar la situación nacional de alza ya descrita. La experiencia de aula fue aplicada a un curso de 38 estudiantes de educación secundaria (tercero medio en el sistema educativo chileno) pertenecientes a un colegio mixto del sector sur de Santiago de Chile. Determinar la ecuación de una recta mediante la modelación matemática no se observa explícitamente en el currículum nacional al observar la actualización curricular 2009 (MINEDUC, 2009) y el texto del estudiante para tercero medio (Saiz & Blumenthal, 2014), curso de la secundaria donde se aborda dicho objeto matemático.

Los objetivos generales de la investigación son tres: concientizar la importancia del autocuidado respecto a ITS mediante el análisis de la situación nacional; discutir una situación de la vida real con ayuda de la modelación matemática de rectas en el plano; y modelar una recta por medio de la estimación de sus parámetros. Para cumplir con estos objetivos, la propuesta intentará responder las siguientes preguntas de investigación: ¿cómo los estudiantes podrían realizar la modelación de una ecuación de la recta?, ¿los estudiantes pueden comunicar correctamente sus modelamientos matemáticos?, ¿es posible cambiar la percepción de los estudiantes respecto a una situación de su contexto social mediante el estudio de las matemáticas? La propuesta se fundamentó desde la perspectiva sociocrítica de la matemática, la cual es una práctica pedagógica que utiliza la modelación matemática como estrategia didáctica para generar aprendizaje tanto en matemáticas como para vivir en sociedad (Barbosa 2003, 2018; Barbosa y Santos, 2018; Gomes y Barbosa, 2014).

Marco teórico

El término "perspectiva sociocrítica" fue sugerido por Barbosa (2003) para referirse a las prácticas pedagógicas que no excluyen el desenvolvimiento de la teoría matemática en el modelamiento matemático sino que va más allá de la teoría; como práctica pedagógica presenta a las y los estudiantes una oportunidad de discutir la naturaleza o papel de los modelos matemáticos en la sociedad (Barbosa y Santos, 2007). Una perspectiva sociocrítica de problemas de modelación matemática permite que la o el estudiante adquiera los conocimientos matemáticos además de aprender también a reflexionar, comprender y participar de la sociedad en que vive a la luz de dichos conocimientos.

Gomes y Barbosa (2014) concluyen tres premisas respecto a la diferencia implícita entre la matemática y la realidad, desde la modelación matemática: la primera es que los problemas abordados en modelación no son matemática, la segunda es que la matemática tiene la potencialidad de resolver dichos problemas y, por último, que una modelación tendría la función de realizar una unión entre la realidad y la matemática. También es necesario comprender que una matematización de los problemas en la modelación no representa fielmente los hechos, porque la matemática no es una descripción de la realidad sino que es usada para su comprensión.

Respecto a la modelación matemática, en el segundo Congreso Universitario de Educación Matemática Técnica y Profesional 2018, Barbosa realizó una charla magistral cuyo título fue "Modelación Matemática". Al estudiar las matemáticas en sus distintas disciplinas se enseñan de la misma forma, como objeto de estudio y no como instrumento para cada una de ellas por lo que los profesores deben saber resolver problemas complejos en cada área y, por ende, tener conocimientos en dichos tópicos; un estudio en Brasil mostró que hay una gran brecha entre la matemática en cada área del desarrollo humano versus lo que se enseña en la universidad, instituto profesional, colegios, centros de formación técnica, entre otros tipos de establecimiento educacional ya que se presentan distintos sistemas de pensamiento y no se establecen puentes para disminuir dichas brechas o gap (Barbosa, 2018).

Una clase por lo general se divide en tres segmentos: una exposición de los contenidos, una serie de ejemplos de aplicación y luego ejercicios o la resolución de más ejemplos; esto es distinto a una clase donde se desarrollen problemas ya que se vuelve necesario tender puentes que le permitan a las y los estudiantes disminuir este aislamiento entre las matemáticas de los trabajos o las disciplinas y las matemáticas educativas por medio del "saber hacer" (Barbosa, 2018).

Para lograr construir estos puentes se proponen problemas donde existe un objeto de frontera, concepto que Barbosa define como objeto del mundo real no necesariamente concreto que actúa de frontera entre las matemáticas del área a aplicar y las matemáticas escolares, el cual se lleva a una clase por medio de un intermediador que correspondería usualmente a la o el docente (Barbosa, 2018). Se requieren intermediarios que lleven objetos de frontera a la clase de matemática para disminuir el aislamiento entre las matemáticas del trabajo o las disciplinas y las de la escuela, lo que puede realizarse mediante tres acciones: rutina, mostrando problemas que se relacionen con el contexto de las y los estudiantes; problemas, que no sean ejercicios mecanizados los que sean el foco de la clase sino verdaderos problemas que desafíen al curso; y matemáticas como instrumento, donde sean utilizadas como medio para generar puentes sólidos entre la teoría y la práctica del objeto matemático en estudio.

Por todo lo anterior, la modelación matemática no es solo una "matemática aplicada" sino una estrategia didáctica desde la perspectiva sociocrítica de la matemática. La importancia de las situaciones propuestas es que existen en el mundo, hacen referencia a la realidad y no son ejercicios sino que problemas con alto potencial de innovación; es muy poco probable que en una sala de clases la exposición de una situación matemática desde el inicio de la clase sea un problema, ya que este debe ser el punto inicial para el desarrollo de parte importante de la clase.

Metodología

Para esta propuesta se adaptaron los datos oficiales del Ministerio de Salud sobre diagnosticados en seis ITS: gonorrea, hepatitis A, hepatitis B, hepatitis C, sífilis y VIH (Cassinelli & Fernández, 2018). Las cifras oficiales se muestran en la Tabla 1 mientras que las cifras adaptadas en la Tabla 2, donde la adaptación corresponde a expresar las cifras en unidades de mil utilizando aproximación por redondeo.

Tabla 1. Cifras de diagnosticados durante el período 2012-2017 (Cassinelli & Fernández, 2018).

Año	Gonorrea	Sífilis	Hepatitis A	Hepatitis B	Hepatitis C	VIH
2012	1552	4526	563	1055	454	3395
2013	1533	4353	378	1438	553	4014
2014	1456	4350	1198	1192	440	4080
2015	1797	4158	2119	1030	424	4307
2016	2039	4147	1126	1115		4927
2017	2768	5691	3175	1103		5816

Tabla 2. Cifras adaptadas para la realización de la propuesta didáctica.

Año	Gonorrea	Sífilis	Hepatitis A	Hepatitis B	Hepatitis C	VIH
2012	1,6	4,5	0,6	1,1	0,5	3,4
2013	1,5	4,4	0,4	1,4	0,6	4
2014	1,5	4,4	1,2	1,2	0,4	4,1
2015	1,8	4,2	2,1	1	0,4	4,3
2016	2	4,2	1,1	1,1		4,9
2017	2,8	5,7	3,2	1,1		5,8

Fuente: Elaboración propia.

La experiencia de aula ocurrió en un curso de secundaria (tercero medio en el sistema educativo chileno) conformado por 38 alumnas y alumnos, colegio ubicado en la zona sur de Santiago y al cual el autor les ha hecho clase durante dos años. La Tabla 3 muestra la planificación de la clase:

Tabla 3. Problemas entregados a cada grupo

SEGMENTO DE CLASE	FUNCIÓN DEL SEGMENTO DE CLASE
Inicio	Se ordena al curso en seis grupos, cada cual con una ITS a modelar.
Introducción a la situación	Se describen las seis ITS: gonorrea, hepatitis (A, B y C), sífilis y VIH. Se describe la problemática.
Modelación de la recta	Cada grupo modela la recta asociada con la ITS asignada.
Plenario	Un integrante por grupo explica de manera sintetizada su modelación.
Comparación con datos reales	Se dan los valores reales para 2016-2017, esperando que observar el alza.

Levantamiento de hipótesis	Se pide que piensen posibles causas del alza en diagnosticados con ITS en Chile en la actualidad y posibles medidas para revertir la situación.

Fuente: Elaboración propia.

Respecto al problema de modelación matemática, a cada grupo se les entregaron las instrucciones que muestra la Tabla 4 junto a las tablas y los diagramas de línea con la cantidad de diagnosticados en Chile durante 2012 a 2015 de cada ITS correspondiente, tal como muestra la Figura 1.

Tabla 4. Problemas entregados a cada grupo.

a) Se quiere expresar de la mejor forma posible el comportamiento de los datos en la tabla a una ecuación de la recta $y = m \cdot x + n$ donde m es la pendiente y n el coeficiente de posición o intercepto, determinen dicha recta justificando su desarrollo de manera clara. Puede utilizar calculadora o celular para la operatoria.   b) Dada su ecuación de la recta del punto anterior, estimen cuántas personas diagnosticadas habría los años 2016 y 2017.

Fuente: Elaboración propia

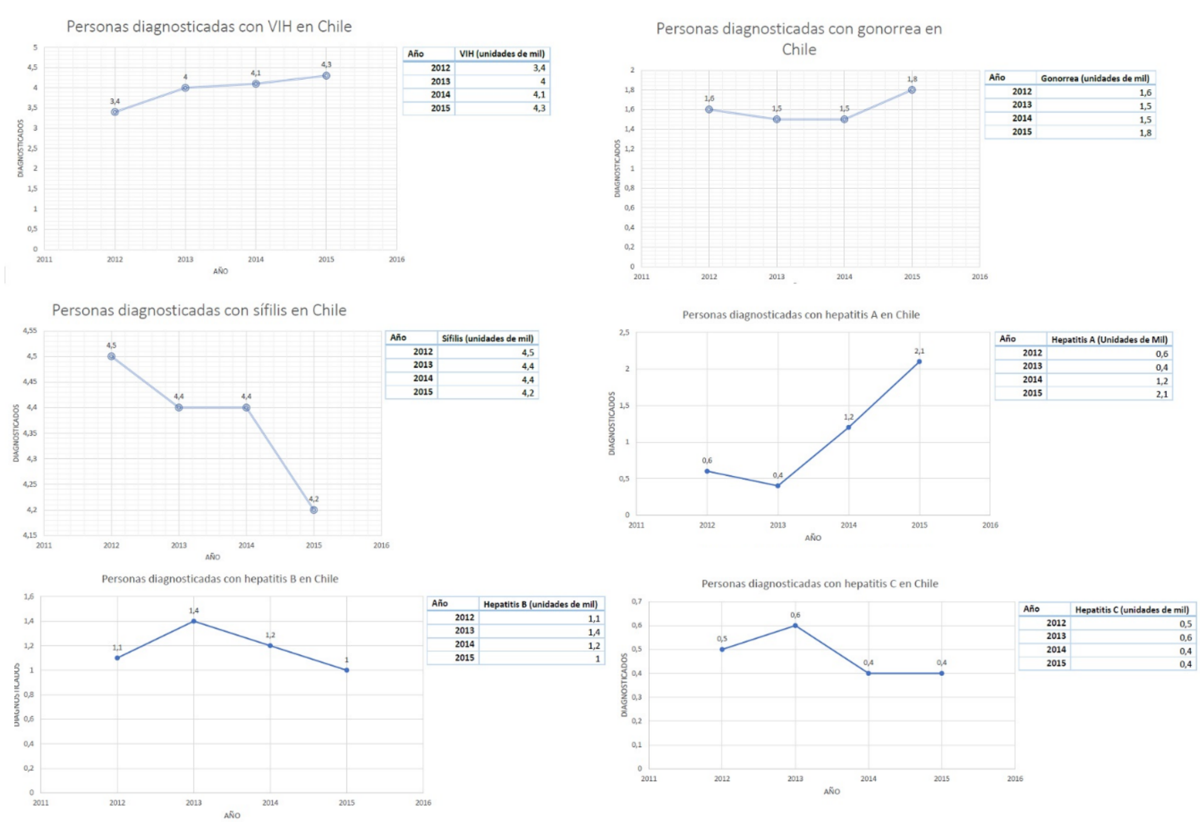


Figura 1. Tabla y diagrama de línea de las seis ITS a modelar (Fuente: Elaboración propia)

No existe una única respuesta posible, aun así, se tiene una respuesta esperada que se determinó de manera análoga a la correspondiente a un problema similar de Del Valle (2015). Para no extendernos en cómo es la respuesta esperada de manera detallada, se describe a continuación de manera resumida.

Para determinar la pendiente se pueden promediar las tres pendientes de los segmentos de línea que muestra el gráfico; luego se procede a promediar las respectivas coordenadas de los cuatro pares ordenados que se observan en los datos entregados para obtener un posible coeficiente de posición mediante la ecuación punto-pendiente de la recta u otro método.

Finalmente se utiliza la ecuación de la recta $y = m \cdot x + n$ modelada para estimar las cifras de diagnosticados con la ITS respectiva al grupo para 2016 y 2017, donde m es la pendiente y n el coeficiente de posición de cada grupo. La Tabla 5 muestra los modelos de ecuación de recta esperados según el procedimiento descrito, junto a las cifras estimadas para 2016 y 2017.

Tabla 5. Respuestas esperadas para cada ITS.

ITS	Ecuación de la recta	Cifra 2016	Cifra 2017
VIH	$y = 0{,}3 \cdot x - 600{,}1$	4,7	5
Gonorrea	$y = 0{,}07 \cdot x - 139{,}35$	1,77	1,84
Sífilis	$y = -0{,}1x + 205{,}73$	4,13	4,03
Hepatitis A	$y = 0{,}5 \cdot x - 1005{,}67$	2,33	2,83
Hepatitis B	$y = -0{,}03 \cdot x + 61{,}59$	1,11	1,08
Hepatitis C	$y = -0{,}03 \cdot x - 59{,}93$	0,41	0,38

Fuente: Elaboración propia.

Cuando los grupos hayan realizado los modelos matemáticos se realiza un breve plenario donde cada grupo comunica las decisiones y procedimientos que justifican las rectas y cifras obtenidas; luego se entregan las cifras reales según el Ministerio de Salud para 2016 y 2017 para que se observe un alza de los diagnosticados en la mayoría de las ITS, tal como muestra la Tabla 6. Cabe decir que las cifras de la hepatitis C no se encontraban públicas al momento de aplicar la propuesta didáctica.

Tabla 6. Cifras estimadas y reales de diagnosticados para los años 2016 y 2017

ITS	Cifra 2016 estimada	Cifra 2016 real	Cifra 2017 estimada	Cifra 2017 real
VIH	4,7	4,9	5	5,8
Gonorrea	1,77	2	1,84	2,8
Sífilis	4,13	4,2	4,03	5,7
Hepatitis A	2,33	1,1	2,83	3,2
Hepatitis B	1,11	1,1	1,08	1,1
Hepatitis C	0,41	-	0,38	-

Fuente: Elaboración propia.

Esta diferencia entre las cifras reales y estimadas permite respaldar crear un ambiente de diálogo con los estudiantes sobre el autocuidado y la prevención de ITS, por lo mismo se le pide a cada grupo que piense posibles causas para la situación nacional de alza y también medidas que podrían revertir la situación en el futuro.

Análisis de resultados

Gonorrea

La pendiente asociada se determinó con el procedimiento esperado, pero con el valor erróneo 0,67 en vez de 0,07 debido a un mal uso de la calculadora; esto permitió observar un crecimiento en las cifras de diagnosticados, pero mucho mayor al esperado. Para el cálculo del coeficiente de posición se reemplazó en el modelo con el promedio entre los cuatro pares ordenados asociados al registro tabular, es decir el punto (2013,5, 1,6), con lo cual dio como resultado 1347,5. Por ende el modelo matemático para el comportamiento de diagnosticados de gonorrea en Chile entre 2012-2015 es:

$$y = 0{,}67 \cdot x - 1347{,}57$$

Usando este modelo se estimaron las cifras de diagnosticados con gonorrea en 2016 y 2017, debido al error en el cálculo de la pendiente y su consecuencia de arrastre en la determinación del coeficiente de posición, las estimaciones son 3,28 y 3,95, respectivamente, cifras significativamente mayores a las que muestra la Tabla 5.

Al momento del plenario una estudiante dice “las fórmulas” para referirse al modelo de ecuación de la recta dejando abierto un diálogo respecto a si corresponde llamar fórmulas a estos modelos. Las cifras estimadas muestran una situación de alza en diagnosticados, pero, debido al error de cálculo, las cifras reales son inferiores por lo que el modelo determinado podría presentar confusiones para concientizar.

Hepatitis A

Se calculó la pendiente usando los pares ordenados correspondientes a los dos últimos años de la tabla ya que se consideraron los más representativos, para el grupo, al ser los más actuales; el valor obtenido fue 0,9. Para encontrar un posible coeficiente de posición se utilizó la pendiente 0,9 y el par ordenado correspondiente a 2015 por ser él dato más actual dado; el valor obtenido fue -1811,4. Con esto, el modelo obtenido es:

$$y = 0{,}9 \cdot x - 1811{,}4$$

Usando la misma estrategia de la respuesta esperada las cifras estimadas fueron 3 y 3.9 para los diagnosticados con hepatitis A para los años 2016 y 2017, respectivamente.

Este modelo no cumple con las instrucciones dadas pues invisibilizó el comportamiento de los años 2012 y 2013, lo que podría afectar el comportamiento del modelo.

Al momento del plenario un estudiante dice que habría 3 y 3,9 casos en los años 2016 y 2017, respectivamente, en vez de 3000 y 3900 aproximadamente; es decir, que hubo un error de interpretación de las cifras estimadas en función de la unidad de medida en que fueron entregados los datos.

Pese a que según la respuesta esperada la cifra real debiese haber resultado mayor a la estimada solo para 2017, en el modelo del grupo las cifras estimadas son mayores a las reales para ambos años pedidos; esto puede deberse a que solo se modeló usando el período 2014-2015 para los cálculos.

Hepatitis B

Hubo un error en la interpretación de la Tabla 7 ya que usaron las cifras 1,1 y 1,0 de los años 2012 y 2015 respectivamente como si fuesen los puntos (1,1) y (1,0); por ende, la pendiente dio $\frac{1}{0}$ como resultado, lo que malinterpretaron como 0. Al instarlos a que calculen la pendiente de otra forma se observa otro cálculo erróneo ya que toman los datos 2012 y 1,1 de la primera fila de datos en la Tabla 7 y los interpretan como los puntos (2012,0) y (1,1) donde el primer punto proviene de que 2012 es equivalente a 2012,0; acá la pendiente obtenida es 0,00004, lo cual redondearon a 0.

Tabla 7. Cifras de diagnosticados con hepatitis B durante el período 2012-2015

Año	Hepatitis B (unidades de mil)
2012	1,1
2013	1,4
2014	1,2
2015	1

Fuente: Elaboración propia.

Ya que la pendiente es cero, su modelo de ecuación de la recta es $y = n$, donde n es el coeficiente de posición. Por lo anterior la cantidad de diagnosticados con hepatitis B se mantiene constante a 1000 ya que 2015 fue la cifra entregada más actual entregada.

Al momento del plenario el grupo comunica que su modelo resultó ser una recta horizontal ya que la pendiente calculada es tan cercana a cero que era prácticamente nula y, por lo tanto, los diagnosticados en 2016 y 2017 serían alrededor de 1000 ya que el último año del que se les entregó registro hubo dicha cifra. Aunque se observa que las cifras estimadas son menores a las reales, el modelo matemático no es consistente con sus argumentos matemáticas debido a la mala interpretación de la tabla y la falta de comprensión de la división por cero.

Hepatitis C

Se calculó la pendiente entre los puntos correspondientes a los años 2012 y 2015 obteniendo $-\frac{1}{30}$; para el coeficiente de posición se utilizó la pendiente y el punto asociado a 2015 dando como resultado $\frac{2027}{30}$. Luego, el modelo para este caso corresponde a:

$$y = -\frac{1}{30}x + \frac{2027}{30}$$

Interesante notar que expresaron los parámetros como fracción en vez de decimales siendo que tenían la libertad de ocupar calculadora o celular para los cálculos. Las respuestas se obtuvieron de la manera esperada: 0,36 y 0,3 personas diagnosticadas en 2016 y 2017, respectivamente; en realidad para 2016 se tuvo como resultado 0,3666… pero no encontraron que la expresión periódica tuviese sentido en el contexto del problema.

Lamentablemente para este caso no se encontraban públicas las cifras oficiales del Ministerio de Salud para los años 2016 en adelante al momento de la aplicación, por ello el grupo no pudo realizar esta parte de la clase; aun así se consideró interesante de incluir en la experiencia de aula.

Sífilis

Acá la pendiente se calculó de manera análoga a la respuesta esperada teniendo como resultado $-0{,}1$. Para el coeficiente de posición se realizaron tres cálculos distintos: el primero reemplazando el punto (2012;4,5) asociado a 2012 en una recta con la pendiente correspondiente al período 2012-2013, el segundo reemplazando el punto (2013;4,4) asociado a 2013 en una recta con la pendiente correspondiente al período 2013-2014 y el tercero reemplazando el punto (2014;4,4) asociado a 2014 en una recta con la pendiente correspondiente al período 2014-2015; el coeficiente 205,7 se obtuvo promediando las tres cifras anteriores. Dado todo el modelamiento anterior se llegó al modelo:

$$y = -0{,}1 \cdot x + 205{,}7$$

De manera análoga a la respuesta esperada se calcularon en 4.1 y 4 los diagnosticados en 2016 y 2017, respectivamente.

Al momento del plenario comunican la pendiente como una razón de cambio ya que una estudiante comunica que "(los diagnosticados) fueron disminuyendo como 100 personas cada año", donde también es posible deducir que la expresión "como 100" reflejara que se está trabajando con cifras aproximadas. Según el modelo de este grupo las cifras reales son visiblemente mayores a las estimadas, incluso la cifra para 2017 provocó una reacción de sorpresa en el grupo debido a ser notoriamente mayor.

VIH

La pendiente se obtuvo como se describió en la respuesta esperada y para el coeficiente de posición se utilizó la pendiente modelada y el punto (2015, 4,3), ya que consideraron que el último dato oficial entregado expresaría de mejor manera el comportamiento de los años inmediatamente siguientes, obteniendo -600,2; por lo tanto, el modelo elaborado para este caso fue:

$$y = 0{,}3 \cdot x - 600{,}2$$

De manera análoga a como se mostró en la respuesta esperada, se calculó en 4,6 y 4,9 las cifras de diagnosticados con VIH para los años 2016 y 2017, respectivamente. Al realizar un procedimiento muy similar a la respuesta esperada, fue visible para el grupo la diferencia entre las cifras reales versus las estimadas, con un comportamiento de alza visible en ambas.

Hipótesis de posibles causas y medidas reparatorias para la situación de alza

Ya realizados tanto la modelación matemática, como el plenario para comunicar sus procesos de modelamiento y también la comparación entre cifras estimadas versus reales, se toman dichos insumos para crear un ambiente de discusión y/o diálogo para discutir sobre la importancia del autocuidado y de la situación de alza en personas diagnosticadas con ciertas ITS durante el último tiempo en Chile. En esta instancia se le pidió a cada grupo que encuentre posibles causas de esta situación y también posibles medidas para revertirla (ver Tabla 8).

Tabla 8. Hipótesis de posibles causas y medidas determinadas por los distintos grupos.

ITS	*CAUSAS*	*MEDIDAS*
Gonorrea	- Poco interés. - No usar condón.	- Empezar a ocupar los preservativos.

	- Falta de educación sexual.	- Que se hable más sobre la educación sexual.
Hepatitis A	- El consumo de drogas. - La poca eficiencia en la salud en este ámbito. - La cultura de rechazo contra las ITS.	- Campañas de prevención del gobierno. - Educación sexual eficiente. - Que las ITS no sean un tema tabú.
Hepatitis B	- No usar preservativos. - Fetiches exóticos. - No mantener buena higiene.	- Conocer el uso de preservativos. - Tener consecuencias de los posibles actos que se hacen. - Buena higiene personal.
Hepatitis C	- No usar preservativos. - Falta de educación sexual. - No se habla abiertamente del tema (tabú).	- Educación sexual de calidad y pública. - Hablar de estos temas con los padres. - Informarse sobre el acceso a preservativos.
Sífilis	- No usar preservativos. - Poco interés en el tratamiento médico. - La poca comunicación entre las parejas sexuales.	- Aumentar el uso de los preservativos (de barrera). - Mejorar la comunicación e información. - Chequeos médicos regulares.
VIH	- No usar preservativo. - Aguja infectada (poca higiene). - Contacto con sangre en heridas cortopunzantes.	- Menor precio, mayor calidad, en métodos anticonceptivos. - Realizarse exámenes. - Autocuidado.

Fuente: Elaboración propia.

Se recalcó que todas las hipótesis elaboradas son posibilidades para abrir un diálogo abierto sobre una educación sexual que abarque la prevención en ITS y que las medidas podrían ser tanto realizables como poco viable en el corto, mediano o largo plazo.

Conclusiones

El lento avance en Chile para cumplir compromisos internacionales de educación sexual integral, sumado a la falta de fiscalización en el cumplimiento de la ley 20.418 que obliga a los establecimientos a entregar esta educación, ha generado un clima de desinformación con consecuencias observables como la situación de alza en diagnosticados con ciertas ITS durante la última década. Usando esto se crea esta propuesta didáctica de modelación de la recta que permite concientizar al curso sobre la situación de alza descrita al estudiar el comportamiento de cada ITS creando modelos de rectas que representen de mejor manera los datos del período 2012-2015 para estimar cifras para 2016 y 2017, las cuales luego se comparan con las cifras reales para ambos años.

Respecto a los objetivos “concientizar la importancia del autocuidado respecto a ITS mediante el análisis de la situación nacional” y “discutir una situación de la vida real con ayuda de la modelación matemática de rectas en el plano”, se observa que los comportamientos de crecimiento y los casos en que efectivamente las cifras reales resultaron ser mayores a las estimadas permitieron abrir un ambiente de diálogo con respaldos y fundamentos que eran observables en ciertos modelos creados; esta concientización sobre el autocuidado y la importancia de aprender sobre sexualidad se refleja en las hipótesis de posibles causas y medidas para revertir la situación de alza.

Sobre el objetivo “modelar una recta por medio de la estimación de sus parámetros” se observó que los grupos fueron capaces de elaborar sus propios modelos matemáticos de manera autónoma y justificada, lo que permitió detectar errores en la elaboración de sus ecuaciones de la recta ya sea por mal uso de los instrumentos a disposición o bien por falta de comprensión de conceptos matemáticos asociados a los parámetros de pendiente y coeficiente de posición. Al momento del plenario se evidenció cierta dificultad en la comunicación de sus procesos de modelamiento, quizás debido a que no están habituados a expresar en voz alta procedimientos relacionados a las matemáticas con el lenguaje correspondiente, además de que la resolución de problemas matemáticos no es algo a lo que están habituados.

En conclusión, es una propuesta innovadora con alto potencial de impacto en la comunidad educativa nacional pues marca un precedente al pretender ser aporte para la educación sexual chilena mediante el estudio de una realidad que nos compromete a todos los ciudadanos; llevándose a cabo desde la asignatura de matemática con una situación que los acerque a generar tanto una reflexión como un compromiso social mediante el uso de la modelación matemática.

Referencias bibliográficas

Arenas, L. (2016). Aportes para uma história de la educación sexual en Chile (1990 – 2016). Santiago: Editorial La Porfiada.

Barbosa, J. C. (2003). Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-Crítica. *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 2(1), 1-13.

Barbosa, J. C. y Santos, M. (2007). Modelagem Matemática, Perspectivas e Discussões. *Encontro Nacional de Educação Matemática*, 9(1), 1-12.

Barbosa J.C. (2018). *Modelación matemática.* Conferência presentada en el Segundo Congreso Universitario de Educación Matemática Técnica y Profesional, Santiago, Chile.

Cassinelli, F. y Fernandez, P. (12 de abril de 2018) Gonorrea, Hepatitis, Sífilis y VIH: el Elevado Aumento de las Enfermedades de Transmisión Sexual desde 2010. 24 horas de TVN. Recuperado de: https://www.24horas.cl/data/sifilis-gonorrea-y-hepatitis-el-elevado-aumento-de-las-otras-enfermedades-de-transmision-sexual-desde-2010-2686343

Del Valle, T. (2015). *Los usos de la optimización: un marco de referencia y la teoría socioepistemológica* (Tesis doctoral). Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Santiago-Chile.

Gomes, E. y Barbosa, J. C. (2014) Contribuições Teóricas sobre a Aprendizagem Matemática na Modelagem Matemática. *Zetetiké*, 22(41), 31-58.

Hunt, F., Monterrosas, E. y Mimbela, R. (2015). *Evaluación de la implementación de la declaración ministerial “Prevenir con educación”. Su cumplimiento en América Latina 2008-2015*. México D.F: Ediciones Plan B.

MINEDUC (2009) *Matemática. Programa de estudio tercer año medio. Actualización Curricular 2009.* Recuperado de: http://www.curriculumnacional.cl/614/articles-34361_programa.pdf

Saiz, O y Blumenthal, V. (2014) *Texto del Estudiante Matemática 3° Medio*. Santiago: Editorial Santillana.

DEL AULA DE NOVENO GRADO PARA LA OLIMPIADA DE MATEMÁTICA

FROM NINTH-GRADE CLASS TO THE MATHEMATICS OLYMPIAD

Nelson Tomás Hernández Reyes, Carlos Jiménez Tejeda, Dennys Toro Leyva
Universidad Tecnológica de La Habana "José Antonio Echeverría", Escuela Militar "Camilo Cienfuegos" (Cuba)
nelsonh@cemat.cujae.edu.cu, prof.cjimenezt.2013@gmail.com, dennys.toro@nauta.cu

Resumen
Las competencias de matemática son espacios que permiten a los estudiantes desarrollar habilidades tales como la constancia, el pensamiento lógico y la resolución de problemas. Sin embargo, la posibilidad de no conseguir resolver los problemas que son presentados, provoca que los estudiantes no se sientan motivados a participar en este tipo de competencias. Es necesario trabajar en función de desarrollar la motivación de los estudiantes a participar en la preparación y ejecución exitosa de estos concursos. Este trabajo tiene como objetivo determinar los niveles de preparación que deben alcanzar los estudiantes para enfrentarse a eventos nacionales e internacionales de Matemática. Se propone una categorización de ejercicios de acuerdo con sus niveles de dificultad; se establece un programa y una metodología para el entrenamiento de estudiantes de noveno grado. Además, se presenta un ejemplo de un entrenamiento en Geometría.

Palabras clave: geometría, entrenamiento, problema

Abstract
Mathematics competitions allow students to develop skills such as perseverance, logical thinking and problem solving. However, the possibilities of not being able to solve the problems that are presented in this kind of competitions make students feel unmotivated to participate on them. It is necessary to work in order to develop students' motivation to participate in the successful training and fulfillment of these competitions. This work is aimed at determining the levels of training that students must achieve to face national and international Mathematical Olympiads. The classification of the exercises according to the levels of difficulty is proposed; a program and a methodology for the training of ninth-grade students are established. Besides, an example of training in Geometry is presented.

Key words: geometry, training, problem

Introducción

La matemática es una ciencia que prepara al hombre para enfrentar y solucionar los diversos problemas que se presentan en la cotidianidad, oficio y profesión. Esto se ha manifestado en el transcurso del desarrollo de la humanidad. Incursionar desde edades tempranas en el mundo de las matemáticas, contribuye al desarrollo de la personalidad del individuo, ya que disciplina al estudiante hacia el logro de su constancia, desvelo, paciencia, pensamiento lógico y encanto por encontrar las soluciones a los problemas.

Los concursos de matemática en los diferentes niveles de enseñanza, conocidos en el mundo como Olimpiadas, constituyen espacios donde se pueden desarrollar todas estas cualidades. En el mundo se celebran diversas Olimpiadas de matemática en diferentes niveles de enseñanza. Cuba participa, conjuntamente con las que se organizan nacionalmente, de forma regular en las Olimpiadas de Mayo, Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, Olimpiada Iberoamericana de Matemática, Olimpiada internacional de Matemática y en la Olimpiada Iraní de Geometría.

Sin embargo, la imposibilidad de los estudiantes para resolver los problemas que se plantean en estas olimpiadas de matemática, constituye un fracaso para ellos que atenta en la participación en estos concursos. En Cuba, esta situación se manifiesta en estudiantes que en su tránsito por la escuela han obtenido altos resultados en esta disciplina.

Los autores de la presente investigación se proponen, partiendo de las fortalezas, debilidades y oportunidades existentes en nuestro sistema educacional, el análisis de las problemáticas siguientes: ¿qué nivel de preparación debe alcanzar un estudiante de noveno grado para lograr la motivación hacia la participación en las olimpiadas nacionales e internacionales de matemática? ¿Cuáles son las fortalezas y debilidades del programa de estudio de la asignatura de Matemática de noveno grado para lograr el tránsito de los estudiantes de los niveles escolares hacia los niveles requeridos para su desempeño en estos concursos? ¿Qué otros temas y sistemas de ejercicios se pueden proponer para lograr el tránsito de los estudiantes de los niveles escolares hacia los niveles requeridos para su desempeño en estos concursos?

En el presente trabajo se hará referencia a la Olimpiada de Mayo, a la Olimpiada Iraní, Olimpiadas internacionales donde se participa de manera masiva, así como a la Olimpiada Centroamericana y del Caribe por ser la primera donde Cuba ha participado de manera presencial. En esta última no se ha convocado la participación de estudiantes de secundaria básica, a pesar de que el reglamento los incluye.

Para todo lo explicado anteriormente se proponen los siguientes objetivos:

1. Determinar los niveles de preparación que deben alcanzar los estudiantes para enfrentarse a los concursos y olimpiadas nacionales e internaciones de Matemática.
2. Proponer, a partir del estudio del Programa y libro de texto de noveno grado, otras temáticas y sistemas de ejercicios que contribuyan a alcanzar el tránsito de los niveles escolares a los niveles requeridos para el desempeño de los estudiantes en las Olimpiadas de matemática.

Desarrollo

Las tres Olimpiadas de matemática a las que hacen referencia los autores de esta investigación, se organizan de la siguiente forma:

Olimpiada de Mayo: Tiene dos niveles de participación

Primer Nivel: Estudiantes que no han cumplido 14 años en el año que se efectúa la competencia. En Cuba estudiantes de séptimo grado.
Segundo Nivel: Estudiantes que no han cumplido 16 años en el año que se efectúa la competencia. En Cuba estudiantes de octavo y noveno grado.

Olimpiada Iraní: Tiene cuatro niveles de participación.
Leve: Estudiantes de séptimo y octavo grado
Intermedio: Estudiantes de noveno y décimo grado
Avanzado: Estudiantes de duodécimo grado
Libre: Toda aquella persona que esté interesado (estudiantes, profesores u otros).

Olimpiada Centroamericana y del Caribe: Estudiantes menores de 15 años.
Aunque en estos concursos se presentan problemas de diversas áreas de la matemática, los autores de este trabajo hacen referencia solamente a los problemas de geometría. Estos problemas pueden clasificarse en tres grupos: Problemas de cálculo, Problemas de demostración y Problemas de construcción.

Para el trabajo con los estudiantes, es importante tener en cuenta que los problemas de geometría que aparecen en las olimpiadas de matemática no pueden ser algoritmizados y requieren un proceso de reflexión y exploración que recurre a varios esquemas adquiridos.
Las habilidades que un estudiante debe desarrollar para resolver con éxito un problema olímpico son varias e involucran procesos de reflexión, de ensayo y error, de conjeturas, de búsquedas de patrones, de razonamiento inducción y de deducción.
Indagar y discernir los niveles de dificultad entre los ejercicios y problemas que están en los libros de texto, los que se utilizan para el entrenamiento y los que se presentan en los concursos, es uno de los objetivos de los autores del presente trabajo. Para lograrlo, se utiliza la clasificación realizada por los propios autores en el trabajo presentado en el presentada RELME 33, expuesta a continuación:

Nivel 0: Conocimientos usuales. Ejercicios con soluciones algorítmicas básicas.
En estos se puede implementar de manera inmediata una solución. Solo demandan de una o dos operaciones básicas o del análisis de una sola relación o concepto. Nivel de exigencia mínimo del programa del grado.

Nivel 1: Procedimientos rutinarios. Ejercicios que además del uso de una relación o concepto demandan de la aplicación de un algoritmo. En estos se puede implementar de manera Inmediata una solución.

Las fórmulas, ecuaciones o esquemas necesarios para la solución se obtienen inmediatamente o a partir de una determinada sucesión de pasos simples.
En estos dos primeros niveles, los conceptos, los ejercicios y las relaciones involucradas en la solución se dan de manera explícita. Con ello se puede determinar inmediatamente los recursos matemáticos a utilizar.

Nivel 2: Uso de Procedimientos Complejos. Ejercicios o problemas en los que no se puede aplicar algún procedimiento inmediatamente. En la descripción del problema hay relaciones que no aparecen de manera explícita, ya que requieren cálculos intermedios. Se necesita de una reflexión, de búsquedas para establecer uno o dos procedimientos que conduzcan a la solución. Los procedimientos a implementar pueden requerir de habilidades no usuales como construcciones auxiliares, tecnicismo algebraico, el uso de relaciones y/o propiedades de temas no escolares, entre otras.

Nivel 3: Problemas Complejos. La mayoría de las relaciones involucradas en la situación del problema están implícitas. Problemas en los que no se pueden aplicar algún procedimiento inmediatamente. Se necesitan de varias búsquedas parciales que lo dividan en problemáticas parciales. Los temas y recursos involucrados pueden haber sido tratados recientemente, pero son variados.

Nivel 4: Problemas con alternativas inusuales. Demandan de una creatividad y en ellos se exploran alternativas inusuales.

Teniendo en consideración estos niveles, los autores realizaron la revisión del libro de texto de Noveno grado en el tema de Geometría. (Acosta, S. Quintana, A. Gort, M. Báez, L. Canto, J. Domínguez, O. (2015). Matemática 9^0. grado. La Habana: Pueblo y Educación).

De esta, se concluye que la mayoría de los problemas se encuentra en los niveles 0 y el 1; y solo 5 problemas corresponden al nivel 2 y no existen problemas en los niveles 3 o 4.

En un artículo publicado por Davidson (1989) se plantea que es preciso:

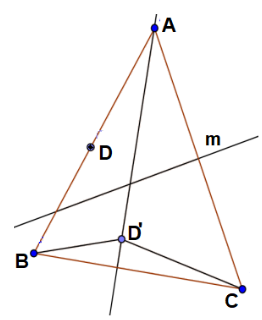
1. Crear en cada escuela, tanto de secundaria como de pre universitario, círculos de interés donde profesores y estudiantes se sientan estimulados por los entrenamientos sistemáticos; es importante que estos entrenamientos comiencen como mínimo, en séptimo grado.
2. Impartir periódicamente cursos y seminarios para aquellos profesores que se dedican en cada escuela, al entrenamiento de los alumnos en la solución de problemas.
3. Elaborar una base material más amplia relativa a este aspecto.
4. Crear centros de entrenamientos municipales o provinciales donde se refuerce la preparación de los alumnos (p.7).

Solo en estos espacios señalados por este autor, se puede garantizar trabajar en función de lograr que los alumnos puedan enfrentar con éxito problemas olímpicos.

Por ejemplo, veamos el siguiente problema del Banco de la X Olimpiada de Matemática Centroamericana y del Caribe

Problema G-1 del Banco X OMCC

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y $\angle BAC = 20^0$. Sea D un punto en el lado AB tal que $AD = BC$. Halle la amplitud del $\angle DCA$.



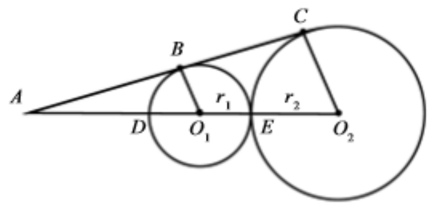
Solución.
Sea m la mediatriz del segmento AC y sea D' el simétrico de D respecto a m. Entonces el $\angle D_1CA = \angle DAC = 20^0$, por lo tanto $\angle D_1CB = \angle ACB - \angle D_1CA = 80^0 - 20^0 = 60^0$. Como los segmentos $D'C = DA = BC$, el triángulo $D'BC$ es equilátero, por lo que D' equidista de B y C al igual que A. Esto significa que la recta AD' es la mediatriz del segmento BC, que es también bisectriz del $\angle BAC$ por ser ABC isósceles, luego $\angle DCA = D'AC = 10^0$

Este problema corresponde al nivel 4: no hay un procedimiento inmediato, necesita de una construcción auxiliar (creatividad) y las conexiones para llegar a la solución son puramente conceptuales.

A continuación, presentamos un ejemplo tomado del libro de texto de noveno grado:

En la figura, $\overline{AC}$ es tangente en B y en C a $C_1(O_1; r_1)$ y $C_2(O_2; r_2)$ respectivamente. Además, se cumple que: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$ los puntos A, O_1, E y O_2 están alineados. $E = C_1 \cap C_2$

a) Demuestre que O_1 es el punto medio de $\overline{AO_2}$
b) Demuestra que $\overline{AO_2} = 6r_1$



Comentario de la solución:

a) Como AC es tangente a las circunferencias entonces $BO_1 \perp AC$, $AC \perp CO_2$ luego los radios son paralelos

$\triangle ABO_1 \sim \triangle ACO_2$ Teorema fudamental de la semejanza

Luego $\frac{AC}{AB} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{BO_1}{CO_2} = 2$

Por tanto, O_1 es punto medio de AO_2

b) Como $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$ y por inciso a $AO_2 = 2AO_1$ entonces $AO_2 = 6r_1$

Se considera que el problema antes analizado se encuentra en el segundo nivel y no en el nivel 3 por las cuestiones siguientes:

- Brinda una figura (la mayoría, o totalidad, de los problemas de geometría que se proponen tanto en entrenamientos como en concursos no cuentan con figura, por lo que el resolutor debe realizarla).
- No es necesario realizar construcciones auxiliares ni aplicar ningún tecnicismo de resolución de problemas geométricos como pudieran ser reducción al absurdo, camino hacia atrás, transformar el problema en otro ya conocido, entre otros.

La gran diferencia entre los problemas de nivel 2 y los de niveles 3 y 4, reflejada en estos dos problemas, muestra que es ineludible realizar acciones que les permitan a los estudiantes tener las competencias necesarias para poder enfrentar problemas de los niveles 3 y 4. Para ello decidimos ajustar el programa de concursos de secundaria básica de la manera siguiente:

Propuesta de las temáticas para los entrenamientos de alumnos de 9no

Algebra

Tema 1.- Razones y proporciones. Problemas
Tema 2.-Trabajo con variables. Tecnicismo algebraico Avanzado.
Tema 3.-Polinomios. Problemas
Tema 4.-Ecuaciones y sistemas de ecuaciones. Problemas
Tema 5.-Inecuaciones y desigualdades. Problemas
Tema 6.-Funciones. Ecuaciones Funcionales sencillas.

Teoría de números

Tema 6.-Ecuaciones en enteros. Resolución de ecuaciones lineales con dos variables cuyas soluciones sean números enteros. Solución general para este tipo de ecuaciones-Solución de ecuaciones no lineales con dos variables cuyas soluciones sean números enteros. Solución general para este tipo de ecuaciones.

Tema 7.-Congruencia Aritmética. Concepto. Propiedades-Problemas

Geometría

Tema 1.-Elementos básicos de la geometría plana.
Tema 2.-Triángulos. Concurrencia-Colinealidad. Problemas

Conjuntos, combinatoria, tableros, juegos, y coloración de planos.

Tema 2.-Combinatoria. Problemas de Conteo-Problemas de Combinatoria
Tema 3.-Cuadrados mágicos. Métodos para llenar cuadrados mágicos de orden impar-Cuadrados mágicos. Análisis de los cuadrados mágicos de orden par.
Temas Especiales
Tema 4.-Coloración de planos. Principios básicos de coloración de planos-Problemas elementales de coloración de planos.
Tema 5.-Juegos. Teoría de Juegos. Principios básicos-Estrategias a utilizar en algunos juegos.

Los Entrenamientos

Los entrenamientos se estructuraron tomando en consideración los trabajos, breve acercamiento a una metodología para abordar problemas geométricos de tipo olímpico [García, E. 2015] y la Tesis Doctoral Estrategia didáctica para la preparación de concursantes en matemática de la educación preuniversitaria sobre la base de la gestión de conocimiento [Pérez, E. 2014]. Asimismo, se tuvo en cuenta la experiencia en el entrenamiento a los estudiantes de Secundaria Básica de la capital en el curso 2017-2018.

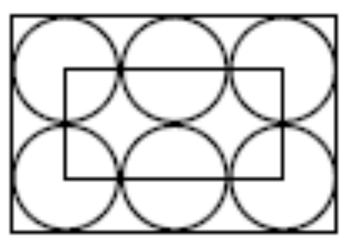
Se estructuraron de la siguiente manera: Ejercicios iniciales (E. Inc); Sistemas de ejercicios (SE); Ejercicios individuales (E. Ind); Tarea

A continuación, ilustraremos una sección de entrenamiento en el tema de geometría.

Circunferencia

Ejercicios Iniciales: Son problemas que se encuentran por lo general en los en los niveles 1y 2

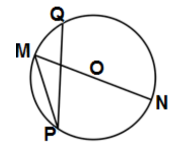
1. (E.Inc)En la figura se muestran 6 círculos idénticos. Sabiendo que el rectángulo pequeño pasa sobre los centros de todos los círculos y que su perímetro es 60 cm, ¿Cuál es el perímetro del rectángulo grande?



Comentario sobre la solución:

Para dar solución a este ejercicio se debe tener en cuenta que: la línea del rectángulo pequeño cubre 12 radios.$P_{rp} = 12r, entonces\ r = 5cm$. Mientras que el rectángulo grande cubre 20 radios: $P_{rg} = 20r = 100cm$

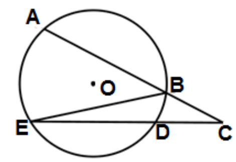
2. (E.Ind)Si O es el centro de la circunferencia, $\overline{MN}$ diámetro y $\angle MPQ = 20^0$. Determine la amplitud del $\angle QON$



Comentario sobre la solución:

Se trabaja con la relación entre la amplitud del ángulo central e inscrito sobre un mismo arco. $\angle QON = 140^0$

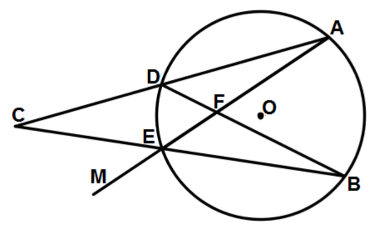
3. (E.Inc)Si $\angle ABE = 40^0, \widehat{BD} = 20^0$. Determina la amplitud $\angle ACE = 40^0$



Comentario sobre la solución:

Se trabaja con la relación entre la amplitud del ángulo inscrito y su arco correspondiente. Luego $\angle ABE = \angle BEC + \angle ACE, entonces\ \angle ACE = 35^0$ por ser ABE un ángulo exterior del triángulo BEC. Por otro lado, teniendo en cuenta que el ángulo ACE es un ángulo exterior de la circunferencia: $\angle ACE = \frac{\widehat{AE} - \widehat{BD}}{2} = \angle ABE - \frac{\widehat{BD}}{2} = 35^0$

4. (E.In) En la figura se tiene que $r_{AC}, r_{BC}\ y\ r_{AE}$ son secantes a la circunferencia, $\widehat{AB} = 150^0, \widehat{DE} = 90^0$. Determine las amplitudes de: $\angle DAE, \angle EFB, \angle ACB, \angle BEM\ y\ \angle AOB$



Comentario sobre la solución:
Se trabaja con los aspectos teóricos abordados en los incisos anteriores:

$$\angle DAE = \frac{\widehat{DE}}{2} = 45^0, \angle ACB = \frac{\widehat{AB} - \widehat{DE}}{2} = 30^0, \angle AOB = 150^0$$
$$, \angle EFB = \angle DAF = 60^0, \angle BEM = \angle EFB + \angle DBE = 105^0$$

5. (E.Inc) Considere el triángulo ABC donde AB es el diámetro del circuncírculo y CD es la altura del triángulo desde el vértice **C**. Si el segmento $AD = 25cm$ y el segmento $BD = 16cm$. Determina:

a) El área ΔABC b) Longitud de la mediana sobre el lado AB

Comentario sobre la solución:

Teniendo en cuenta que AB es el diámetro del circuncírculo, se concluye que el triángulo es rectángulo en C. La altura CD se puede hallar aplicando el teorema de la altura:

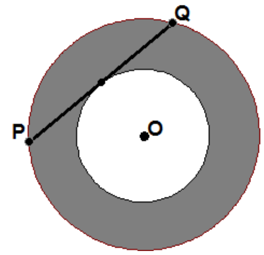
$CD^2 = AD \cdot DB \rightarrow CD = \sqrt{AD \cdot DB} = 20cm$

a) $(ABC) = \frac{AB \cdot CD}{2} = 410cm^2$

b) $lm = \frac{AB}{2} = 20{,}5cm$

Sistema de Ejercicios:

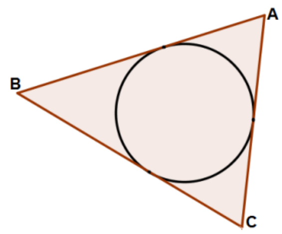
1. (SE) Si el área de una corona circular (región sombreada) es $\frac{25\pi}{2}\mathbf{cm^2}$ ¿Cuál es la longitud de la cuerda PQ de la circunferencia mayor tangente a la menor?

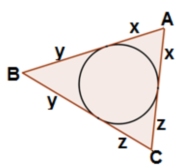


Comentario sobre la solución:

Teniendo en cuenta que la cuerda PQ es tangente a la circunferencia pequeña, llamemos R al punto de tangencia, este será el punto medio de dicha cuerda. Aplicando el teorema de Pitágoras: (1) $PQ = 2\sqrt{OQ^2 - OR^2}$. Sucede que OQ y OR son los radios de las circunferencias. $A_{somb} = \pi(OQ^2 - OR^2) \to \frac{A_{somb}}{\pi} = OQ^2 - OR^2$. Sustituyendo este resultado en (1) obtenemos que:$PQ = 2\sqrt{\frac{25\pi}{2\pi}} = 5\sqrt{2}cm$

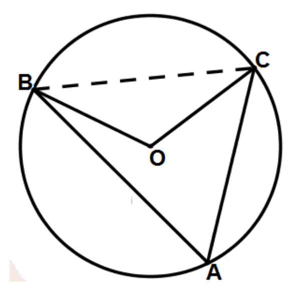
2. (SE) Sea ABC un triángulo cuyo perímetro es de 18 cm. Si el lado a tiene una longitud de 7 cm, determine la distancia desde el vértice A a uno de los puntos de tangencia del incírculo con uno de los lados adyacentes a dicho vértice





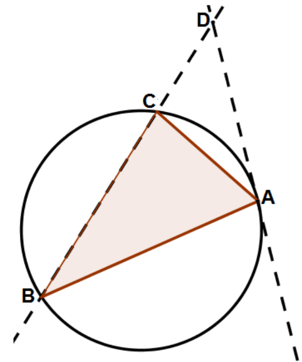
Comentario sobre la solución:
Teniendo en cuenta la figura, $a = y + z, P = 2x + 2y + 2z \to x + y + z = \frac{P}{2} = p \to x = 9 - 7 = 2cm$ La relación $x = p - a$ es muy útil para el trabajo con circunferencias inscritas en triángulos rectángulos.

3. (SE) Dado un ángulo inscrito BAC y su ángulo central BOC, tal que: $\angle BAC + \angle BOC = 180^0$. Calcular la amplitud del ángulo OBC.
Comentario sobre la solución:
Una estrategia útil puede ser introducir un parámetro auxiliar: hagamos $\angle BAC = x \to \angle BOC = 2x \to 3x = 180^0 \to x = 60^0$ Por otro lado el triángulo BOC es isósceles de vértice principal O, luego: $\angle OBC = 30^0$



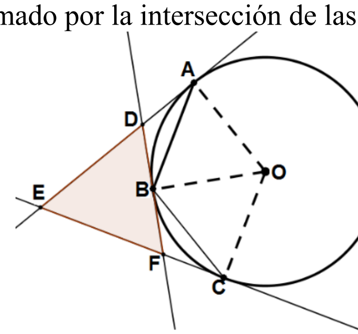
4. (SE) En un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia, se tiene que $\angle BAC = 10^0 + 3x$, $\angle ABC = 5x - 10^0$ y $\angle BCA = 76^0$ La prolongación del lado BC corta a la recta tangente r_{AD} en un punto O. Halle las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABD.

Comentario sobre la solución:



Teniendo en cuenta los ángulos interiores del triángulo ABC, $\angle BAC + \angle ABC + BCA = 180^0 \rightarrow x = 13^0 \rightarrow \angle ABC = 55^0$ por ser ángulos inscrito y seminscrito sobre el arco AC, $\angle ABC = \angle CAD = 55^0$. Teniendo en cuenta que el ángulo ACB es un ángulo exterior del triángulo CAD, $\angle D = 21^0$. Finalmente, $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 8x = 104^0$

5. (SE)En una circunferencia se dan dos cuerdas que tienen un extremo común y cuyas longitudes son iguales al radio de la circunferencia dada. Construya las tangentes en los tres puntos que tienen en común la circunferencia y las dos cuerdas. Clasifique el triángulo formado por la intersección de las tres tangentes.
   Comentario sobre la solución:

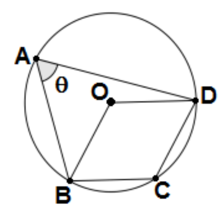


   Como las dos cuerdas $AB\ y\ BC$ son iguales a los radios de la circunferencia, los triángulos $ABO\ y\ BCO$ son equiláteros por lo que $\angle AOB = 60^0 = \angle COB$. Teniendo en cuenta que:

$$AO \perp AE, DB \perp OB \rightarrow \angle AOB = \angle EDF = 60^0$$
$$OC \perp EC, DB \perp OB \rightarrow \angle COB = \angle EFD = 60^0$$

   , entonces, ΔEFD es equilátero

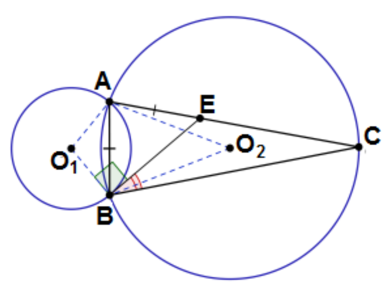
6. (SE) En la figura $BCDO$ es un rombo. Determine el valor del ángulo θ y la medida de las diagonales del rombo si el radio de la circunferencia mide 6 u.



Comentario sobre la solución:

$\angle BOD = 2\angle BAD = 2\theta$. Teniendo en cuenta las propiedades de las diagonales del rombo,$\angle BOC = \theta = \angle BAD$. Como el triángulo BOC es equilátero,$\angle BOC = 60^0 = \theta$
La diagonal OC tiene la misma longitud del radio de la circunferencia, 6 u. Para hallar la longitud de la diagonal BD podemos tener en cuenta que es el doble de la altura del triángulo equilátero BOC, es decir: $BD = 2h_{oc} = 2\frac{OB}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$u.
Interesante también se pudo haber hecho uso de la relación que se cumple para los paralelogramos:$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ donde a y b son las longitudes de los lados consecutivos del paralelogramo y d_1 y d_2 sus diagonales.
$BD^2 + OC^2 = 4OB^2 \rightarrow DB = \sqrt{3OB^2} = 6\sqrt{3}u$

7. (SE)En la figura, se sabe que $\angle AO_1B - \angle AO_2B = 70^0$y además la tangente EB forma el triángulo isósceles ABE, con $AB = AE$. Determine la amplitud del $\angle EBC$.

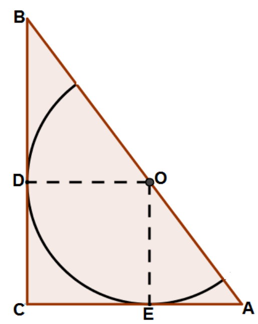


Comentario sobre la solución:

Una estrategia útil puede ser introducir un parámetro auxiliar: hagamos$\angle AO_2B = 2\theta$, entonces $\angle ACB = \theta$ y por hipótesis $\angle AO_1B = 2\theta + 70^0$. Por ángulo seminscrito, $\angle ABE = \theta + 35^0$, y como el triángulo ABE es isósceles, $\angle AEB = \theta + 35^0$. Finalmente, por la fórmula del ángulo exterior aplicada al triángulo BCE, $\angle EBC = \angle AEB - \angle ECB = 35^0$

8. (SE)Sea ABC un triángulo rectángulo en C, cuyos catetos miden $9cm\ y\ 12cm$ respectivamente, y r el radio de la semicircunferencia que es tangente a los catetos y que tiene su centro sobre la hipotenusa.
   a) Determine la longitud de r.
   b) Determine el área y el perímetro del semicírculo.
   Comentario sobre la solución:
   a) Demostremos primeramente que $r = \frac{ab}{a+b}$ donde $a\ y\ b$ son los catetos. Para esto es útil emplear el método de las áreas.

$$(BCA) = (BOC) + (OCA) \rightarrow \frac{ab}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} \rightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$



Luego $r = \frac{36}{7}cm$

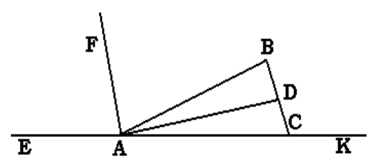
b) $A_{semic} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{648}{49}\pi cm^2$

$P_{semic} = \frac{L_{circ}}{2} + diám = \pi r + 2r = (\pi + 2)rcm$

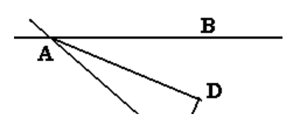
Tarea:

Ejercicios PROPUESTOS

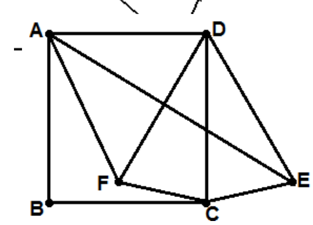
1. En la figura: $AD\ y\ FA$ bisectrices de los $\angle BAC\ y\ \angle EAB$ respectivamente; los puntos $A\ y\ K$ pertenecen a r_{EC}. Conocido que $\angle B = 80^0\ y\ \angle BCK = 110^0$.
   Calcule la amplitud del $\angle FAD$



2. En la figura: $r_{AB} \parallel r_{EC}$; $\overline{AD}\ y\ \overline{CD}$ bisectrices de los $\angle BAC\ y\ \angle ACE$ respectivamente.
   Calcule la amplitud del $\angle$**ADC**

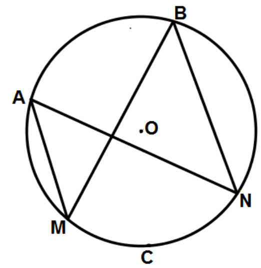


3. En la figura, $ABCD$ cuadrado; $\angle BCE = 160^0$; ΔDCE Isósceles y acutángulo y $CEDF$ cuadrilátero simétrico respecto a $\overline{CD}$.
   Calcule la amplitud del$\angle EAF$

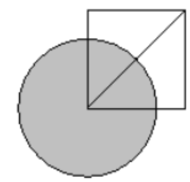


4. Pruebe que el ángulo entre las bisectrices de:

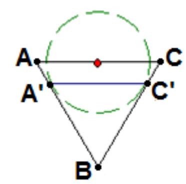
   a) dos ángulos adyacentes es recto
   b) dos ángulos conjugados entre paralelas es recto
5. Teniendo en cuenta la figura:
   a) si$\angle MCN = 125^0$, hallar las mediciones de $\angle MON, \angle MAN\ y\ \angle MBN$
   b) Si $\angle MBN$ fuera un ángulo recto, ¿qué clase de ángulo sería $\angle MON$ y cómo debería dibujarse la figura para que así sucediera?
   c) ¿Qué puntos deben unirse para obtener un ángulo que sea el doble del $\angle AMB$?



6. Los lados de un triángulo inscrito en un círculo interceptan tres arcos que están en la relación de 3:7:8. Hallar la amplitud de los ángulos interiores del triángulo.
7. En la figura, el lado del cuadrado mide 8cm. La circunferencia pasa por el punto medio de la diagonal del cuadrado. ¿Cuál es el área de la región no sombreada?



8. Dadas dos circunferencias concéntricas de centro $D. AB$ es una cuerda de la circunferencia de mayor radio y que es a su vez tangente a la circunferencia más pequeña. Si AB $= 20$ cm, calcule el área del anillo circular que se forma entre las dos circunferencias.
9. Consideremos la figura adjunta. El triángulo ABC es equilátero, el círculo que tiene su centro sobre el segmento determinado por los puntos $A\ y\ C$, es tangente a las rectas determinadas por los puntos $A\ y\ B;\ B\ y\ C$ y tiene radio 2. El triángulo $A'BC'$ tiene igual área que el círculo y AC es paralela a $A´C´$. Encuentra la altura del triángulo $A'BC'$.



10. Las bisectrices $BP\ y\ CQ$ del triángulo ABC se cortan en I. Demuestre que si$\angle BAC = 60^0$, entonces el triángulo PQI es isósceles.
11. Un cuadrado de área 4 cm^2 gira 360º alrededor de su centro. Hallar el área de la región que recorren sus lados.

A continuación, presentamos un resumen de los niveles donde se encuentran los ejercicios presentados

	NIVEL 0	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3	NIVEL 4
INICIALES		1	3		
SISTEMA			1-2-3-4-5-7	8	
INDIVIDUALES			1		
TAREA			1-2-3-4-5-6-7-8	9-10-11	

El entrenamiento mostrado en este trabajo es el tercer adiestramiento realizado en el cual se trabaja en función de preparar a los estudiantes para resolver problemas de los niveles 3 y 4, por esta razón prevalecen los problemas del nivel 2.

Conclusiones

En la revisión realizada por los autores al Libro de texto y Programa de la asignatura de Noveno grado, existen temáticas y sistemas de ejercicios necesarios para la preparación y éxito competitivo de los concursantes que no se encuentran en estos.

La propuesta de los autores de estas temáticas y sistemas de ejercicios puede contribuir, conjuntamente con las existentes en el Programa y Libro de texto, a alcanzar la preparación de los estudiantes y posibilitar el tránsito de los niveles escolares a los niveles requeridos, para lograr el desempeño de estos en las Olimpiadas de matemática.

Referencias bibliográficas

Acosta, S. Quintana, A. Gort, M. Báez, L. Canto, J. Domínguez, O. (2015). *Matemática 9^0. grado*. La Habana: Pueblo y Educación.

Davidson., Jimenez, M., Ordaz, R. y Miranda, J. (1989). Olimpiadas Internacionales de Matemática: Incidencia en el desarrollo ulterior de los concursantes cubanos. *Boletín de la Sociedad Cubana de Matemática y Computación 11*, 7-9

García, E. (2015). Breve acercamiento a una metodología para abordar problemas geométricos de tipo olímpico, *IX Taller científico Metodológico de la Cátedra "Dulce María Escalona".* La Habana, Cuba.

Jiménez, C. (2017). Geometría Plana. *XI Encuentro Taller Científico Metodológico de la Cátedra "Dulce María Escalona".* La Habana, Cuba.

Pérez, E. (2014). *Estrategia didáctica para la preparación de concursantes en matemática de la educación preuniversitaria sobre la base de la gestión de conocimientos*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Ciencias Pedagógicas "Blas Roca Calderío". Bayamo, Cuba.

CONSTRUCCIÓN DE FUNCIÓN COMO CURVA EN EL PLANO: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE ENSEÑAZA DESDE APOE

CONSTRUCTION OF FUNCTION AS A CURVE ON THE PLANE: DESIGN AND IMPLEMENTATION OF TEACHING FROM APOS

Román Gpe Esquer Armenta, César Fabián Romero Félix
Universidad de Sonora (México)
ing.romanrgea@hotmail.com, cesar.romero@unison.mx

Resumen
Se presenta el diseño y evaluación de una propuesta de enseñanza del concepto de función como curva en el plano, de manera acorde con la definición formal de curva y retomando algunos elementos del análisis del *significado holístico* del concepto (Parra, 2015). La metodología está basada en el ciclo de investigación de APOE, incorporando el uso de medios tecnológicos como facilitadores para el desarrollo de estructuras mentales. Como resultados de la implementación con estudiantes de ingeniería, identificamos algunas dificultades para el desarrollo del significado planteado y elementos del diseño que permitieron superarlas.

Palabras clave: cálculo, función, APOE, diseño de enseñanza

Abstract
This paper presents the design and evaluation of a teaching sequence for the concept of function as a curve in a plane, in accordance with the formal definition of curve and some elements of the *holistic meaning* of the concept (Parra, 2015). The methodology used in the study is based on the APOS research cycle, including the use of technological tools as facilitators for the development of mental structures. As a result of the implementation with engineering students, we identified some difficulties for the development of the proposed meaning and elements of the design that allowed overcoming such difficulties.

Keyword: calculus, function, APOS, teaching design

Introducción

El presente reporte muestra los resultados de un proyecto de intervención didáctica sobre el concepto de función, dirigido a estudiantes de cursos de Cálculo Diferencial a nivel superior, particularmente en el área de Ingeniería, por lo que se centra en funciones reales de una variable. Aunque existe abundante literatura sobre investigaciones e intervenciones didácticas de alrededor de medio siglo, los problemas de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo se mantienen presentes en las aulas, por lo que necesitan seguir siendo atendidos. Investigaciones recientes continúan mostrando la presencia de bajo desempeño académico en esta rama de las matemáticas, así como dificultades en su aprendizaje, algunas de estas atribuibles a un pobre entendimiento del concepto de función.

Uno de los elementos asociados a las dificultades de aprendizaje del tema es la complejidad del concepto en términos de la diversidad de concepciones y representaciones con las que se enfrentan los estudiantes de ingeniería. Para aclarar esta complejidad, en este trabajo se partió del análisis de significados parciales del concepto de función desarrollado por Parra (2015), quién identificó cinco significados distintos en su análisis de tipo histórico-epistemológico: la función como correspondencia, *el proceso de asignar* elementos de un conjunto a elementos de otro conjunto; como relación entre magnitudes variables, *relación de covariación entre magnitudes de fenómenos físicos*; como curva en el espacio; como expresión analítica; como correspondencia arbitraria, una *relación abstracta* entre dos conjuntos, sin conocer la forma en la que se realiza la asignación entre sus elementos; y finalmente, como parte de la Teoría de Conjuntos, un subconjunto del producto cruz de dos conjuntos dados.

A partir de estas observaciones, se planteó la necesidad de diseñar actividades de enseñanza que favorezcan la construcción de los significados parciales (en términos de Parra, 2015), con énfasis en su posterior *coordinación* como *procesos,* en términos de APOE (Arnon et al., 2014), a partir del establecimiento de relaciones entre los diferentes significados que permitan construir a la función como un objeto mental que incluya a los distintos significados parciales. De tal manera que, para construir el significado de función como curva, se propone una interpretación más allá de las reglas de formación y manipulación de las representaciones gráficas, centrándose en las relaciones entre los objetos que las gráficas representan. En este sentido la función como curva es vista como un objeto en el plano cartesiano, un conjunto de puntos (x, y) dentro de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que manifiesta un tipo de relación entre dos variables, representadas por los *ejes* X y Y, tales que para cada $x \in X$ hay exactamente un $y \in Y$ con (x, y) en la curva. Se enfatiza aquí que, dadas las relaciones de equivalencia entre los distintos significados parciales de función (Parra, 2015), el lector podría inferir las características del significado *conjuntista* o de *correspondencia* al leer la descripción de arriba, pero se refiere específicamente a este objeto con respecto a las características plasmadas de forma gráfica, a la relación dinámica entre determinados valores sobre los ejes que se puede deducir al analizar, crear o manipular una curva en el plano.

Antecedentes

Se encontraron diversas publicaciones relacionadas con la dificultad que se presenta en estudiantes de nivel superior aprender conceptos ligados al cálculo, y en particular sobre la comprensión del concepto función, como se menciona a continuación:

> La noción de función es actualmente uno de los objetos matemáticos más importantes debido a su naturaleza unificante y modelizadora, no obstante, es un concepto complejo debido a la multiplicidad de significados y de registros representativos que generan distintos niveles de abstracción (Ramos 2005, citado por Parra, 2015, p.24).

Otras investigaciones, como la de Zandieh, Ellis y Rasmussen (2017), muestran que el concepto función es de gran importancia para las matemáticas y continúa siendo problemático para los estudiantes de educación superior. En su análisis identificaron que los estudiantes que no contaban con una *construcción robusta* del concepto función no podían identificarlo, ni aplicar sus propiedades en otros contextos; a partir de una caracterización de los distintos significados de función como: ecuación, relación de asignación, gráfica y tipos de variación. A su vez, Maharaj (2010) identificó que los alumnos que solo contaban con una comprensión de función y derivada hasta un nivel algebraico operacional difícilmente podían resolver problemas relacionados con estos conceptos; mientras que alumnos con un significado más completo podían efectuar las distintas transformaciones de las funciones y sus derivadas, necesarias para la solución de problemas relacionados con derivadas.

Los trabajos citados muestran que, como es predecible, las dificultades relacionadas con la multiplicidad de significados parciales limitan el aprendizaje de temas posteriores. De tal manera, en diversas investigaciones se sugiere la creación de actividades orientadas a favorecer la comprensión del concepto de función en distintos sentidos, sustentados por medios tecnológicos (por ejemplo, Maharaj, 2010; Goldenberg, Lewis y O'Keefe 1992).

Marco teórico

En palabras de los autores principales de la teoría APOE (acrónimo de: Acción, Proceso, Objeto y Esquema), este marco:

> Se centra en modelos de lo que podría estar pasando en la mente de un individuo cuando él o ella está tratando de aprender un concepto matemático y utiliza estos modelos para diseñar materiales de instrucción y /o para evaluar los logros de los estudiantes y fallas en el manejo de situaciones de problemas matemáticos (Arnon et al., 2014, p.1).

En APOE se analizan las relaciones entre los *mecanismos* de abstracción reflexiva (en particular *interiorización, coordinación, encapsulación y reversión*) y los diferentes tipos de *construcciones* mentales (*acciones, procesos objetos* y *esquemas*) asociadas al conocimiento matemático,
Figura *1*. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a guías o estímulos externos que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción, cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones (Arnon et al., 2014, p.19).

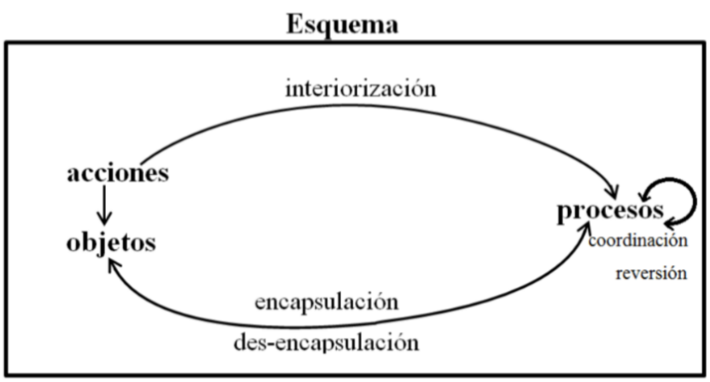


Figura 1 Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático
(Arnon et al., 2014, p. 18)

Cuando un individuo repite y reflexiona sobre las características generales e invariantes de una acción, ésta puede ser interiorizada en un proceso. La interiorización de una acción consiste en construir una estructura mental que, inicialmente, hace el mismo trabajo que el de la acción; se dice que el individuo posee una concepción proceso del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él (Arnon et al., 2014,

p. 20). Cuando un individuo piensa en el proceso como un todo, y puede aplicar transformaciones sobre esta totalidad, se dice que posee una concepción objeto al aplicar el mecanismo de encapsulación (p. 21).

El análisis de las relaciones entre mecanismos y construcciones permite proponer *Descomposiciones Genéticas* (DG); modelos hipotéticos que describen las estructuras mentales y los mecanismos que un estudiante podría construir para aprender un concepto matemático específico. Por lo general, una DG comienza como una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores en el aprendizaje y la enseñanza del concepto, su conocimiento de la teoría APOE, su conocimiento matemático, investigaciones previamente publicadas sobre el concepto y el desarrollo histórico del concepto (Arnon et al., 2014, p.27).

Sobre la problemática de establecer relaciones entre distintas representaciones, desde este marco se recomienda centrarse en el desarrollo de conocimiento de los conceptos representados, para permitir que haya una concepción disponible en cada representación que se pretenda relacionar. Particularmente se propone que, para coordinar significados sobre el concepto de función en distintas representaciones, sería necesario desarrollar concepciones proceso asociadas al concepto en cada representación para poder coordinarlas (Arnon et al., 2014, pp. 180-181). De tal manera, se plantea que las dificultades para relacionar los diferentes significados parciales se pueden atribuir a la ausencia de los procesos específicos y/o al no promover activamente la coordinación entre los diferentes procesos.

Metodología

El estudio se organiza con base en el ciclo de investigación de APOE, el cual consta de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014, p.94). La implementación de este ciclo comienza generalmente con un análisis teórico de la cognición del concepto matemático, esto da lugar a una DG *preliminar* del concepto (DGp). La DGp permitirá describir las construcciones y los mecanismos mentales que habría que favorecer en una propuesta de enseñanza para que un individuo logre la comprensión de un concepto matemático, la cual deberá ser implementada y evaluada en términos del desempeño matemático de los estudiantes. Si las soluciones y argumentos de los estudiantes muestran un buen desempeño matemático, así como el uso de las concepciones mentales esperadas, se considera como válida a la DG, de lo contrario, se plantean modificaciones a la secuencia de enseñanza y/o a la DGp, repitiendo el ciclo metodológico.

De tal manera, los tres componentes del ciclo se influencian mutuamente al aportar información que permite su reformulación y reimplementación. Los resultados del análisis teórico impulsan el diseño y la implementación de la instrucción a través de actividades destinadas a fomentar las construcciones mentales declaradas en la DGp. Las actividades y ejercicios planteados en la propuesta de enseñanza están diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizarlos en procesos, encapsular procesos en objetos y coordinar dos o más procesos para construir procesos nuevos, y a su vez, la implementación de la instrucción proporciona una oportunidad para la recopilación y el análisis de datos.

Análisis teórico: planteamiento de la descomposición genética preliminar

El desarrollo de esta etapa del ciclo de investigación consistió en una revisión documental de literatura en la que se aborda el concepto de función, investigación sobre las problemáticas relacionadas con este concepto, reconstrucciones históricas del concepto e intervenciones didácticas con o sin el uso de medios tecnológicos que promovían la compresión de este objeto matemático (resumido en la sección de antecedentes). A partir del análisis teórico realizado en la primera etapa del proyecto, se plantean las características del significado parcial que será atendido en términos de los elementos que componen las concepciones acción y proceso correspondientes.

Acción: A_1) Definidas las cantidades variables (números reales) que forman dos conjuntos, el individuo las ubica en rectas numéricas reales y asocia en pares, un elemento de cada conjunto, un par a la vez. A_2) Identifica el producto cruz de los conjuntos definidos y representa los pares ordenados como elementos de éste, puntos. A_3) Construye la curva uniendo los puntos.

Proceso: P_1) El individuo puede identificar, de manera general, los elementos que conforman el dominio y rango de la curva. P_2) Puede percibir de manera global propiedades de la curva como relaciones entre el dominio y rango. P_3) Visualiza de manera dinámica el comportamiento de la curva entre puntos dados (interpolación). P_4) Visualiza de manera dinámica el comportamiento hacia los extremos de la curva (extrapolación).

Destacamos que, de acuerdo con la teoría APOE, individuos que sólo cuenten con la concepción acción estarían limitados a la aplicación ordenada de cada *paso* de la acción, sin poder modificar, ignorar, o suponer el cumplimiento de alguno, al intentar resolver problemas sobre curvas. Mientras que, teniendo una concepción proceso, los estudiantes serían capaces de concentrarse en alguno de los elementos, e incluso estarían en condiciones de modificarlos. Finalmente, el proceso de curva permitiría a los estudiantes *visualizar las curvas en su totalidad*, tanto de forma local como global en todo el plano.

Si bien los principios de APOE indican que el alumno podría desarrollar la estructura objeto de la función como curva, éste y los demás posibles *objetos parciales* no son pretendidos dentro de la propuesta de enseñanza, sino que de la coordinación de los procesos posteriormente se encapsule el objeto de función con las cualidades y propiedades de los distintos significados parciales.

Diseño e implementación de la enseñanza

El diseño de la secuencia de enseñanza sigue la metodología ACE propuesta desde APOE, siglas en inglés de: Actividades, discusión en Clase y Ejercicios extra-clase. Las actividades facilitan el desarrollo de las estructuras previstas en el análisis teórico (*acción* y *proceso)*, mediante los mecanismos propuestos en el análisis teórico para cada uno de los significados de función; la discusión permite a los estudiantes reflexionar sobre su trabajo y al instructor le permite observar el progreso del grupo y ofrecer explicaciones y definiciones formales de los conceptos desarrollados; finalmente, la etapa de ejercicios está pensada como un apoyo para continuar el desarrollo de las construcciones mentales y para guiar a los estudiantes en la aplicación de lo aprendido y su relación con otras ideas matemáticas (Arnon et al., 2014, p. 58).

Las actividades en esta secuencia consistieron en la resolución de problemas sobre relaciones entre valores en ejes numéricos y las posibles curvas que se podrían graficar a partir de su observación y manipulación. De esta manera se promueve la concepción acción, requiriendo la formación de las curvas asociadas a diferentes relaciones, funcionales y no funcionales, para después promover la interiorización en la discusión en clase, al cuestionar sobre las diferencias entre los distintos tipos de curvas obtenidas y cuáles podrían ser consideradas como funciones. En la etapa de ejercicios, se plantearon problemas similares y algunos más complejos para que los alumnos continúen la interiorización de la acción y se finalice la construcción del proceso.

Uno de los problemas que se plantearon fue que los alumnos identifiquen el comportamiento de la relación entre valores en rectas numéricas con ayuda de un applet de GeoGebra, (disponible en bit.ly/appletcurva1), dónde podía observar la relación numérica dinámica entre dos cantidades, el comportamientos de los incrementos de la relación; y comparar sus hipótesis sobre la forma de la curva en un segundo applet con la representación gráfica que éste genera (disponible en bit.ly/appletcurva2):

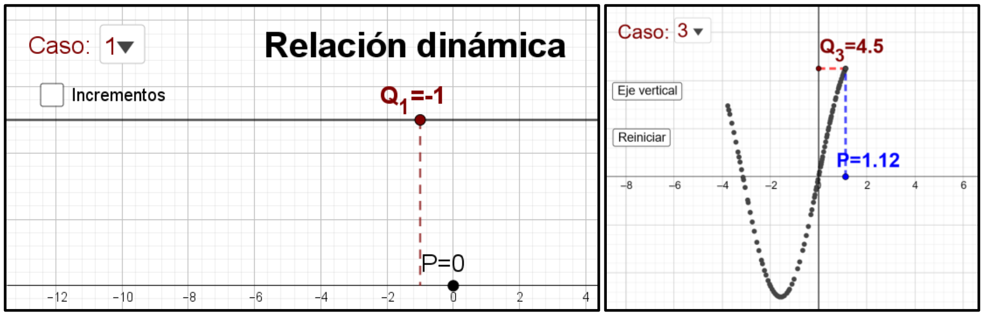


Figura 2. Applets de relación numérica dinámica

Con dichos medios tecnológicos los alumnos tienen que dar respuesta a reactivos tipo acción, obteniendo y manipulando información de casos particulares de curvas, como los que se muestran en la Figura ***3***.

a. A medida que trasladas el punto P, ¿Cómo es el cambio (crece o decrece) del punto Q_1?

b. Construye pares ordenados con las cantidades variables del punto P y el punto Q_1.

Valor P	Valor Q_1

Valor P	Valor Q_1

Figura 3. Reactivo nivel acción para el significado de función como curva

Por otro lado, dentro de esta misma etapa los alumnos serán enfrentados a realizar un primer acercamiento a la concepción proceso, dando respuesta al reactivo que se muestran en la Figura ***4***, los cuales solicitan ciertas generalidades de las propiedades de la curva.

4. Marca la casilla correspondiente, completa la siguiente tabla.

Propiedad/caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
¿Es función?					
Es creciente en los valores de P:					
Es decreciente en los valores de P:					
Dominio:					
Rango:					

Figura 4. Reactivo nivel proceso para el significado de función como curva.

Después de haber realizado las actividades antes mencionadas, se accede a la discusión en clase, la cual consiste en la revisión de las respuestas dadas anteriormente, para valor el grado de construcción de la acción y el inicio del proceso que están desarrollando los estudiantes, como se muestra en la Figura ***5***, además se les proporcionó casos nuevos para brindar la oportunidad de desarrollar las estructuras y promover la abstracción reflexiva.

1. Valor independiente y dependiente.
2. Es la relación entre los puntos del Caso 1 y Caso 2, una relación funcional. ¿De dónde salen las pendientes de las rectas?
3. Qué tipo de comportamiento se observa entre los puntos del Caso 1 y 2

a) Definir creciente y decreciente

b) Definir si ΔP es positivo o negativo

4. Tipos de (co)variación

a) (Co)variación proporcional, (Q es proporcional a P): pasa por el origen y con ΔP constante

b) Como distinguir proporcional de lineal (se ve parecido a la curva de engranes, pero no son múltiplos)

c) Si ΔQ varia, puede ser: (de)crece de forma constante o no constante

d) Periódica y no periódica

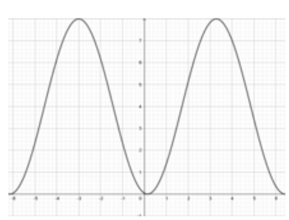
e) Recta, parábola,

5. ¿Como se moverá Q si a veces es creciente y a veces decreciente, y como seria la curva?

Figura 5. Guion de discusión en clase para significado de función como curva

En la última etapa del ciclo ACE, los ejercicios tienen la finalidad de promover las concepciones acción para los alumnos que no han terminado el desarrollo de esta concepción y desarrollar o finalizar la construcción del proceso, como se presenta en la Figura *6*.

3. Con base en las gráficas trazadas, responda lo que se solicita en cada una de ella.



Determina
Dominio:
Rango:

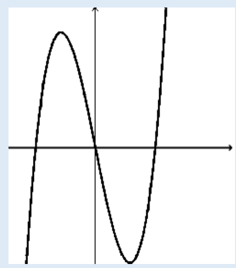
Indica en la gráfica las secciones donde esta es creciente(**C**) o decreciente(**D**).

Defina la dirección de los incrementos en casa sección y su relación con la grafica

Figura 6 Reactivos tipo acción y proceso en la sección de ejercicios.

Análisis y recolección de datos

El análisis de la secuencia se realizó mediante la identificación de las características de las estructuras mentales en el trabajo de los estudiantes, parte de la caracterización se muestra en la siguiente tabla.

<table>
<tr><th>Estructuras mentales</th><th>Características</th><th>Tipos de cuestiones planteadas</th><th colspan="2">Respuesta esperada</th></tr>
<tr><td>Acción</td><td>A_2</td><td>Construye pares ordenados con las cantidades variables del punto P y el punto Q1.</td><td colspan="2"><table><tr><th>Valor P</th><th>Valor Q_1</th></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>8</td></tr><tr><td>4</td><td>11</td></tr><tr><td>5</td><td>14</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Proceso</td><td>P_2</td><td>Determina el domino y el rango de la siguiente curva.</td><td></td><td>Dom:
$(-\infty, \infty)$ o R

Rango:
$(-\infty, \infty)$ o R</td></tr>
</table>

Tabla 1. Instrumento de evaluación

Resultado de la implementación

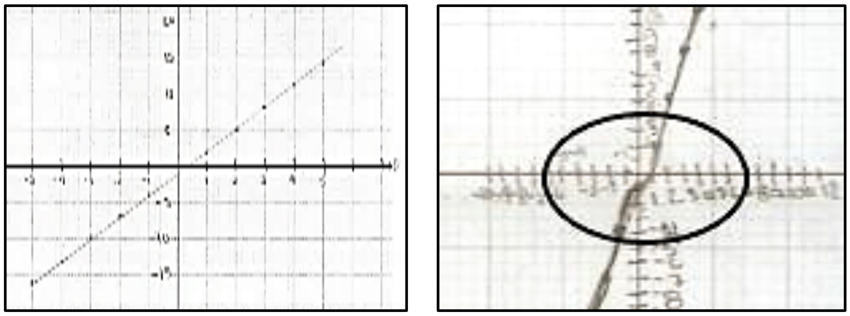
De los 27 alumnos del grupo participante, solo 20 permanecieron de manera constante en la secuencia. Para la etapa de actividad, los alumnos identificaron el comportamiento de la relación entre números en rectas con ayuda del applet denominada curva de relación numérica. El trabajo en el medio tecnológico mostró evidencia de haber promovido la concepción acción, hasta el grado de establecer y definir las cantidades variables. En la Figura *7* se muestra la respuesta proporcionada por un alumno al utilizar el applet para generar pares ordenados.

Valor P	Valor Q_1
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14

Valor P	Valor Q_1
-1	-4
-2	-7
-3	-10
-4	-13
-5	-16

Figura 7. Conjunto de pares ordenados generados por los alumnos mediante la manipulación del applet

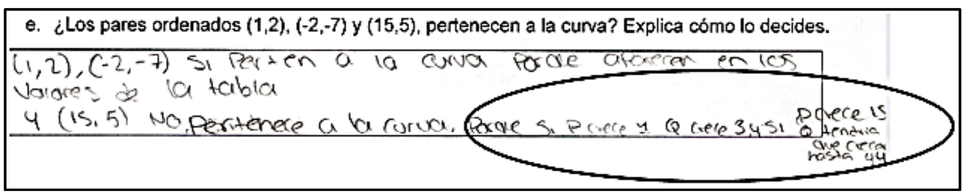
Dado el alto número de estudiantes que lograron construir la gráfica de dispersión con los pares ordenados que lograron definir, no se identifican serias dificultades para el desarrollo de la concepción acción. Sin embargo, en el paso de construir la curva uniendo los puntos de la gráfica de dispersión hubo un caso aislado en el que no se realizó el trazado de la curva como era esperado, ya que no se conectaron los puntos de forma consistente con el comportamiento de los pares ordenados. Se identificó que este alumno contaba sólo con la concepción acción, ya que el trazo *correcto* de la curva solicita un grado mayor de abstracción de la relación: identificar el crecimiento proporcional entre las variables. Los trazos de curvas se muestran en la Figura 8, en el caso a) se realizó correctamente el trazo de la curva como una recta, mientras que en el caso b), aunque los puntos están correctamente ubicados, el estudiante decidió unir los puntos con una curva con cambio de concavidad cerca del origen.



a) b)

Figura 8. Ejemplos de trazado de curvas a nivel acción.

Continuando en la misma concepción, los alumnos lograron definir si un grupo de pares ordenados pertenecen a la curva trazada, pudieron argumentar que dos de los tres pares proporcionados en el reactivo sí pertenecen a la gráfica de la relación, y el par ordenado que no corresponde a la curva era porque el valor de la ordenada no presentaba el mismo comportamiento de las demás ordenadas, aquí los alumnos continúan con una manipulación de la relación a nivel acción, debido a que utilizan la información generada anteriormente en tabla, la cual está compuesta de pares ordenados y es utilizada para tomar la decisión si los pares pertenecen o no a la relación representada en la curva, Figura *9*.

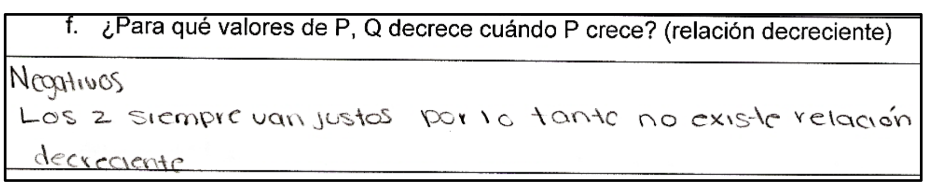


e. ¿Los pares ordenados (1,2), (-2,-7) y (15,5), pertenecen a la curva? Explica cómo lo decides.

(1,2), (-2,-7) si Pertenen a la curva porque aparecen en los valores de la tabla
y (15,5) No pertenece a la curva. Porque si P crece y Q crece 3 y si P crece 15 Q tendría que crecer hasta 44

Figura 9. Identificación de pares que pertenecen a la curva relación.

En la misma etapa de secuencia que se desarrolló dentro del aula, los alumnos comenzaron a trabajar con los incrementos, logrando visualizar su comportamiento con el uso de applet, lograron identificar la relación que guardan los incrementos de las variables, la dirección de estos y el vínculo que guarda con la curva. Existió una minoría, dos de los 27 participantes, que a pesar de la ayuda visual que proporciona el applet, no pudo dar respuesta a los reactivos antes mencionados, muestra de lo anterior, en la Figura *10*, los alumnos identifican la relación entre los incrementos y la curva de la relación, lo anterior muestra que los alumnos están iniciando la concepción proceso, debido a que empiezan a proporcionar generalidades de la curva.



f. ¿Para qué valores de P, Q decrece cuándo P crece? (relación decreciente)

Negativos
Los 2 siempre van justos por lo tanto no existe relación decreciente

Figura 10 Reactivo relacionado con la curva y los incrementos.

En la última sección de la secuencia se plantean reactivos que exigen generalizar las propiedades de las curvas, llevando al nivel proceso, como determinar si la curva es una función, el comportamiento de los incrementos en la representación gráfica, el dominio y el rango. Se presentaron dificultades muy notorias para dar respuesta a estos reactivos (Figura 11), ya que los alumnos no pudieron llenar la tabla con la información solicitada, esto debido a que no pudieron definir por completo el conjunto de pares ordenados de la relación numérica, ni lograr visualizar la curva por completo.

4. Marca la casilla correspondiente, completa la siguiente tabla.

Propiedad/caso	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5
¿Es función?	si	si	si	si	no
Es creciente en los valores de P:	si	si	si	si	si
Es decreciente en los valores de P:	si	si	si	si	si
Dominio:	ℝ	ℝ		ℝ−[1]	ℝ
Rango:	ℝ	[1,∞)		(−∞,0)∪(0,∞)	

Figura 11. Reactivos a nivel a inicio de proceso.

Tras el trabajo descrito arriba, se inició la etapa de discusión en clase. En esta etapa se logró promover significativamente la abstracción reflexiva, mediante la discusión grupal de las respuestas a los problemas planteados, organizando a los estudiantes en equipos, enfocados particularmente en la interiorización de la acción, así como valorar el grado de construcción de las concepciones de los estudiantes, dicha discusión mostro evidencia de que la mayoría de los alumnos contaba con la estructura de acción y empezaban a mostrar la construcción del proceso.

En la sección de ejercicios, compuesta de problemas sin el uso de medios tecnológicos, los alumnos presentaron un alto desempeño al trabajar con casos particulares, esto mostró que los alumnos lograban contestar los reactivos a nivel acción sin dificultad, indicando que la estructura acción se ha construido correctamente. Por otro lado, en el nivel proceso se siguieron mostrando dificultades, particularmente en la búsqueda de propiedades globales de las curvas, como se observa en la Figura *12*.

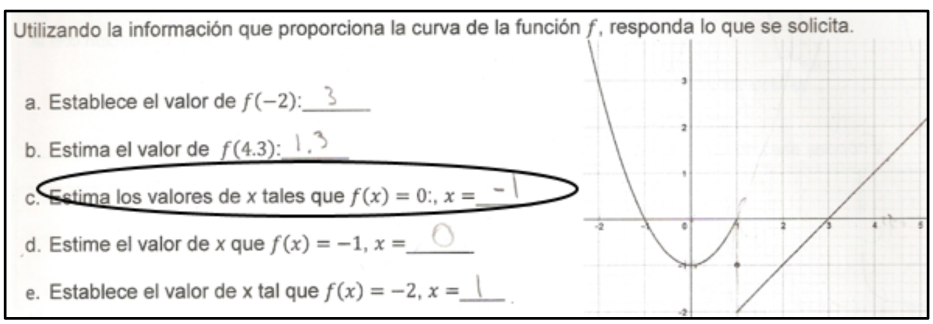


Figura 12. Reactivos a nivel acción y proceso en los ejercicios.

A su vez, a medida que los reactivos solicitan características más generales de la curva, se fueron presentando más dificultades. Evidencia de lo anterior, se muestra en la Figura *13*, en la que se visualiza el paso de acción a proceso, ya que en el reactivo se solicitan distintas características del comportamiento de la curva y después el comportamiento a los extremos de esta.

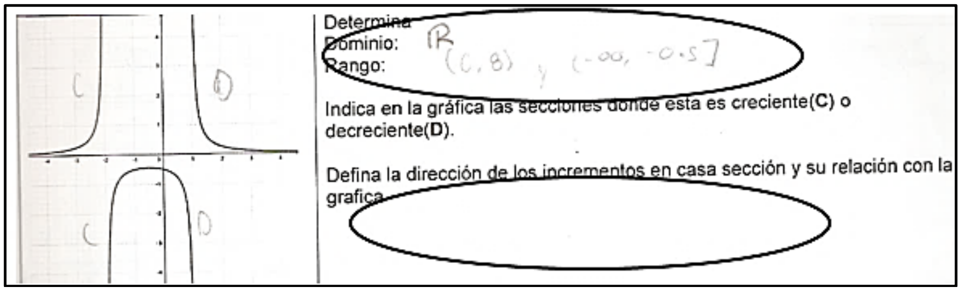


Figura 13. Reactivo de nivel proceso en los ejercicios.

Durante el desarrollo de esta secuencia el alumno tuvo la oportunidad de continuar con la interiorización, mediante el análisis del domino y el rango de la curva, al indicar en la gráfica las secciones donde esta es creciente o decreciente y definir la dirección de los incrementos en cada sección y su relación con la gráfica. Se esperaba que la identificación del comportamiento de curva de manera local y luego en sus extremos permitiera determinar todos los posibles valores que pueden tomar las cantidades variables relacionadas.

Conclusiones

A manera de un concentrado de todo lo declarado anteriormente se muestra la tabla *2*, la evaluación del grado de avance de las construcciones mentales mostradas por los estudiantes, en términos de los criterios de cada estructura para este significado parcial; siendo las características A_i y P_i las definidas en la DGp.

Estructuras	*Características*	*Casos de éxito*	*Porcentaje de aciertos en Actividad*	*Porcentaje de aciertos en Ejercicios*	*Promedio*
Acción	A1	27	100%	95.7%	97.85%
	A2	27	100%	96.7%	98.35%
	A3	27	100%	95.2%	97.6%
97.75%					
Proceso	P1	20	70.03%	74.4%	72.21%
	P2	18	64.1%	72%	68.05%
	P3	18	65%	72%	68.5%
	P4	18	66%	71.7%	68.85
69.40%					

Tabla 2. Resultados de implementación.

Con lo referente a la construcción de la acción, se observa que los alumnos tuvieron un buen desempeño al realizar la actividad en clase, en contraste con la misma concepción en los ejercicios, en la cual se mostró un leve descenso en su desempeño, la causa de esta situación es atribuida a que los reactivos en la actividad en clase eran de baja dificultad, comparados con los del ejercicio, lo anterior en el sentido de que las relaciones que se exploraron fueron básica comparadas con el conocimiento previo con el que contaban los estudiantes. A pesar de lo anterior la secuencia si da evidencia de promover las estructuras deseadas, quizás con una homogenización del nivel de complejidad de los reactivos en la actividad y ejercicios (incluir relaciones más complejas en la actividad) se podrían tener un mejor rendimiento por parte de los estudiantes.

Por otro lado, la construcción del proceso fue más compleja de desarrollar, tanto en la parte en la que se inicia el proceso en la actividad en clase, como en los ejercicios, especialmente con algunos de los criterios que conforman la estructura proceso: definir el conjunto de pares ordenados y generalizar los elementos que conforman los conjuntos dominio y rango; percibir que los puntos de la curva comparten alguna propiedad. Se considera que esta situación es propiciada por la falta de reflexión sobre algunos componentes de la estructura acción, en particular, se podría discutir maneras válidas de unir puntos para trazar las curvas, ya que el desarrollo de estos elementos con mayor énfasis favorecería la generalización de las propiedades y características de la curva. De tal manera, se asocian estas dificultades a la etapa de discusión en clase, al tratarse del mecanismo de interiorización. Se considera que, si en esta etapa se propiciara una discusión más profunda sobre los elementos de la concepción acción esto llevaría a construir de manera más sólida los elementos de la concepción proceso como de la curva *completa*.

Por otra parte, la implementación de las herramientas tecnológicas parece apoyar en el desarrollo de los mecanismos mentales, ya que al construir la representación gráfica de la curva se favoreció en alguna medida la creación de un objeto dinámico. Se coincide con Goldenberg, Lewis y O'Keefe (2010), al afirmar que el extraer información dinámica de un objeto dinámico es más accesible para los estudiantes que extraer información dinámica de un objeto estático. Se piensa que este tipo de manipulación es apropiada para los retos a los que se enfrenta un estudiante en un primer curso de Cálculo, tomando en cuenta que los alumnos seguirán siendo enfrentados a gráficos tradicionales, se cree que ellos se han beneficiado al desarrollar una forma de visualizar el dinamismo en estos.

Por último, esta propuesta de enseñanza plantea una descripción detallada y parcial sobre la forma de construir una parte del significado de función (DGp), el cual es resultado del análisis teórico el cual forma parte del marco referencial, dicho análisis permitió definir la ruta para construir el significado de función como curva en el plano, el cual fue definido por las estructuras y mecanismos. El camino planteado moviliza y se sustenta en objetos previamente construidos como el de número, recta, plano, producto cruz, entre otros. Con los resultados obtenidos en la recolección y análisis de datos, se puede confirmar que la descomposición genética preliminar es válida para la construcción de este significado parcial, además permite la evolución y reformulación de la secuencia implementada para favorecer de manera más eficiente el desarrollo de las construcciones mentales buscadas.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York: Springer.

Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. End G. Harel & E. Dubinsky (Eds), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington: Mathematical Association of America.

Maharaj, A. (2010). An APOS Analysis of students' understanding of the concept of a limit of a function. *Pythagoras, 71*, 41-52.

Parra Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de los Lagos, Santiago de Chile.

Zandieh M, Ellis J. & Rasmussen C. (2017) Characterization of a unified notion of mathematical function: the case of high school function and linear transformation. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 21–38.

EVIDENCIA Y CIUDADANÍA: CONCEPTOS CLAVES PARA LA EVALUACIÓN EN CIENCIAS SOCIALES

EVIDENCE AND CITIZENSHIP: KEY CONCEPTS FOR EVALUATION IN SOCIAL SCIENCES

Mariela Beatriz Cravero, Liliana Tauber, Silvana Santellán
Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral (Argentina)
marielacravero@hotmail.com, estadisticamatematicafhuc@gmail.com, santellansilvana@gmail.com

Resumen
En el presente trabajo describimos los aportes basados en los conceptos de evidencia y construcción de ciudadanía que sostiene una propuesta de evaluación continua de Estadística aplicada a las Ciencias Sociales. La misma constituye una tarea que estamos desarrollando en los últimos años con alumnos de carreras de Licenciatura en Ciencia Política, en Sociología, Geografía e Historia de la Universidad Nacional del Litoral. Presentamos la fundamentación de la propuesta de evaluación, los propósitos perseguidos, las características principales que permiten configurarla y el análisis de contenido referido a la misma. El análisis de contenido está basado en las dimensiones y facetas de la *Estadística Cívica* (Engel, 2019) y nos permite detectar las dimensiones que brindan mayor o menor riqueza conceptual, brindando así información sobre los puntos que deben mejorarse o modificarse.

Palabras clave: estadística, nivel superior, evaluación continua, ciudadanía

Abstract
In this paper we describe the contributions based on the concepts of evidence and citizenship that sustains a proposal of continuous assessment of Statistics applied to Social Sciences. It constitutes a task that we have been developing in recent years with students of Bachelor's degrees in Political Science, Sociology, Geography and History of the Littoral National University. We present the evaluation proposal foundation, its aims, its main characteristics and the analysis of the content related to it. The content analysis is based on the dimensions and facets of Civic Statistics (Engel, 2019) and it allows us to detect the dimensions that provide greater or lesser conceptual richness, thus providing information on the points that should be improved or modified.

Key words: statistics, university level, continuous assessment, citizenship

Introducción

El espacio curricular de Métodos Estadísticos para las Ciencias Sociales, reúne alumnos de cuatro carreras diferentes como son las Licenciaturas en Sociología, en Ciencia Política, Geografía e Historia. El curso se desarrolla durante un semestre a lo largo de cuatro horas semanales, a través de las cuales se trabajan contenidos específicos de la estadística descriptiva y exploratoria, univariada y bivariada. Todos los contenidos se abordan de manera contextualizada en torno a la temática de indicadores socio-económicos, desarrollando de este modo, una propuesta de enseñanza totalmente coordinada con la propuesta de evaluación continua –que analizaremos luego– la cual intenta monitorear la integración de ideas estadísticas fundamentales (Burril y Biehler, 2011) y el desarrollo del *Sentido Estadístico*, entendido éste como la interrelación de dichas ideas (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013).

Desde ese lugar entendemos que, el proceso de evaluación implica una tensión que se produce entre las metas de dominio de contenidos disciplinares que las docentes proponemos y el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Anijovich y Cappelletti, 2017). En este sentido, nos proponemos atender al hecho de que los estudiantes no tienen un punto de partida común y que, por lo tanto, el proceso de aprendizaje es personal, por lo cual es utópico pensar en lograr una homogeneidad de conocimientos en todos los alumnos. Todo ello nos motiva a reflexionar sobre los modos de evaluar y los aportes que la evaluación puede realizar para mejorar los aprendizajes. En concordancia con esta postura, hemos elaborado una propuesta de enseñanza y de evaluación que contempla la resolución de tareas que involucran el desarrollo del *Sentido Estadístico* y que pretende aportar elementos para un aprendizaje a largo plazo (Behar y Grima, 2004; 2014), centrada en la toma de decisiones basada en la evidencia y en la construcción de ciudadanía.

Antecedentes

La enseñanza de la Estadística en carreras no matemáticas genera grandes desafíos a la hora de tomar decisiones respecto de la propuesta de enseñanza que se les ofrecen a los estudiantes, así como también de la manera de evaluar, por ello es que seguimos algunas ideas descritas por autores como Behar y Grima (2014) o Herrera y Konic (2017). De esta manera, buscamos introducir contenidos de Estadística que sean significativos para los alumnos de las carreras con las que trabajamos, contextualizados específicamente en el área de las Ciencias Sociales. Además, se realiza una evaluación continua que gira en torno a las problemáticas que se van desarrollando a lo largo del semestre. Esta evaluación continua ha implicado diversos ajustes y re-diseños con el objetivo de que se adecue a la propuesta de enseñanza, a la carga horaria del espacio curricular, a los conocimientos previos de los alumnos y a las herramientas didácticas disponibles.

En este trabajo, realizamos un análisis de contenido de dicha propuesta de evaluación, el cual nos permitió detectar las dimensiones que brindan mayor o menor riqueza conceptual, para que de esta manera, nos proporcione información sobre los puntos que debemos mejorar o modificar. Así, en Tauber, Cravero y Santellán (2019) describimos las etapas en las que organizamos la propuesta de enseñanza y en Tauber, Santellán y Cravero (2017), caracterizamos las fases evaluativas que realizamos de manera integrada a la propuesta de enseñanza. En el presente trabajo, mostraremos el análisis de contenido, basado en las dimensiones y facetas de la *Estadística Cívica* (Engel, 2019), realizado sobre las etapas evaluativas antes mencionadas.

Marco teórico

Consideramos que toda instancia de evaluación tiene que ser pensada como un proceso, y, en consecuencia, es necesario pensar la evaluación como parte integrada en el aprendizaje de los alumnos, comprometiéndolos en su propia formación y generando acciones que propicien la valoración y retroalimentación de sus propios saberes.

Dado que nos centramos en la enseñanza de la Estadística aplicada a las Ciencias Sociales, tomamos en cuenta los aportes de diversos autores que sostienen la necesidad de trabajar con datos reales y situaciones contextualizadas (Behar y Grima, 2004, 2014; Gal, 2019). Así, adherimos a lo que proponen Gal (2019) y Engel (2019), en el sentido que la democracia prospera con argumentos basados en la evidencia, donde la desinformación y la ignorancia son amenazas a nuestra forma de vida. Asimismo, Batanero y Díaz (2011) sostienen que la Estadística, entendida como cultura, ayuda al desarrollo personal fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva. En este sentido, el diseño de nuestras actividades de evaluación intenta dar un lugar de investigación y de producción de conocimiento que favorezca el desarrollo de las competencias de cada futuro profesional, en la singularidad de su carrera de pertenencia, pero también sin descuidar la concepción de ciudadano crítico perteneciente a una sociedad cada vez más compleja y dinámica. Esto permite sostener que la participación de los ciudadanos es un recurso que se vincula directamente con la toma de decisiones, en la gestión pública y en los diferentes ámbitos locales, nacionales e internacionales.

Desde el enfoque que propone Engel (2019), la *Estadística Cívica* aborda el tratamiento de los problemas de las sociedades modernas para comprender los procesos sociales, el bienestar social y económico y el cumplimiento de los derechos civiles de la sociedad. Asimismo, entendemos que el abordaje de este tipo de situaciones favorece no sólo el conocimiento en términos de relaciones sociales, sino que también marcan el camino de participación ciudadana. Parados desde este lugar de construcción del conocimiento, la enseñanza de la Estadística, aporta elementos que propenden a la construcción de ciudadanía en el estudiantado y que, a su vez, funciona en términos de retroalimentación del propio conocimiento aportado, como promoción del proceso democrático que permite a los ciudadanos acceder a los datos para generar debates de opinión pública. Así, el campo de tratamiento para la *Estadística Cívica* deviene de la intersección de tres planos de trabajo que son: los conocimientos de Estadística, los conocimientos de las Ciencias Sociales y los que provienen del marco de la Educación; donde el foco está puesto en el abordaje de problemas netamente de carácter social; pudiéndose tratar fenómenos multivariados, datos agregados, datos dinámicos, textos ricos y visualizaciones innovadoras.

El abordaje de la *Estadística Cívica* tiene, además, como punto neural, el significado de la política social y supone la voluntad de interactuar con datos y los procesos que habilitan la capacidad de razonar y comunicarse con evidencia numérica, porque así se propicia la evaluación crítica y la reflexión de temas de importancia social.

Como complemento de este enfoque, consideramos también en nuestro marco teórico, los elementos de conocimiento y disposicionales necesarios, según Gal (2004), para favorecer la cultura estadística de los ciudadanos. Estos elementos nos sirven de constructos fundamentales que deberán integrarse en nuestras propuestas de enseñanza y de evaluación, con el fin de propiciar el sentido estadístico y el pensamiento crítico en los estudiantes. (Para un detalle pormenorizado de los elementos de conocimiento y disposicionales se puede consultar Gal, (2004; 2019). La delimitación de los elementos descritos por Gal (2004), formarán parte del entramado de facetas que consideramos en el estudio de la *Estadística Cívica*. En consecuencia, todas las dimensiones del conocimiento estadístico aportan a la misma y pueden tener una relevancia asociada a la problemática bajo estudio. Así, al diseñar nuestra evaluación, se tuvo en cuenta que muchos de los elementos asociados a este enfoque estuvieran presentes y para ello, consideramos las facetas que componen a la *Estadística Cívica*, las cuales se resumen en la Tabla 1.

Facetas (F)	Descripción
F1: preparación para el compromiso social	Esta faceta es el corazón de la *Estadística Cívica*. Sólo un ciudadano estadísticamente culto puede tomar decisiones basadas en la evidencia, pudiendo relacionar las ideas de riesgo, valor esperado, representatividad, entre otras, y para que ello ocurra es necesario brindar formación que promueva el compromiso y el conocimiento de la sociedad a través de evidencia confiable.

F2: Evaluación crítica y reflexión	Aun cuando se utilicen datos de fuentes responsables, es necesario realizar una evaluación y una reflexión críticas. La evaluación y la reflexión críticas se deberían dar de manera inconsciente, es decir, debería ser un proceso que se da de modo natural.
F3: Disposiciones	Las actitudes reflejan una compleja red de valores, motivaciones, creencias y actitudes. Tienen una dimensión social y ética, con algunas componentes que influyen en el compromiso personal, ya sea de manera positiva como negativa. Ignorar la evidencia basada en creencias, la aceptación acrítica de nueva información o la creencia de que sólo los expertos pueden entender los fenómenos sociales, son síntomas de actitudes que pueden provocar problemas en el aprendizaje. Así, la enseñanza debería considerarlas.
F4. Estadística y Riesgo	Esta faceta contiene mucho de lo que comúnmente se enseña en los cursos introductorios de estadística: muestreo, población y representatividad, variabilidad, descripción y comparación de distribuciones, asociación y correlación, regresión, no linealidad, señal y ruido, entre otras. La *Estadística Cívica* implica la comprensión de estas ideas y de aquellas basadas en el *big data*, la familiaridad con una variedad de fuentes de datos y las técnicas de análisis asociadas, especialmente las utilizadas para detectar patrones.
F5. Modelos y representaciones	Al modelar fenómenos sociales complejos, a menudo se pueden usar modelos matemáticos cualitativamente diferentes para modelar el mismo fenómeno. Por ejemplo, un médico de la ONU y un psicólogo que trabaja en una empresa de marketing, pueden usar métodos muy diferentes para estudiar la "felicidad" y tienen teorías muy diferentes para definirla y estudiarla. Por lo tanto, es necesario formar la capacidad de identificar y comprender modelos, así como las suposiciones básicas que subyacen a un modelo. Por ejemplo: la construcción del índice de pobreza unidimensional o multidimensional. Todo ello está en estrecha relación con la familiaridad con representaciones y visualizaciones sofisticadas, incluidas aquellas que son dinámicas e interactivas (Por ejemplo: Gapminder) y la capacidad de comprender y evaluar críticamente las representaciones innovadoras. Todo ello ayudará a comprender los fenómenos sociales.
F6. Metodología y proceso de investigación	Es fundamental la comprensión de las fortalezas y debilidades de los diferentes métodos de investigación y procedimientos. Los métodos cuantitativos incluyen: investigación de encuestas (tipos de encuestas, métodos de muestreo), estudios observacionales, cuasi experimentos. Los temas incluyen: sesgo, variabilidad, aleatorización. La comprensión de las cuestiones éticas relacionadas con la producción de datos y el uso de diferentes métodos de investigación es una parte integral de esta faceta, así como la necesidad de conocer las cuestiones de confidencialidad y la protección de identidad de los ciudadanos.
F7. Extensiones en el área de estadísticas oficiales	Las estadísticas oficiales (INDEC, IPEC, EuroStat, Naciones Unidas, etc.) son fuentes de datos sobre temas de relevancia social. Muchas de las ideas clave que utilizan, reciben poca atención en los cursos tradicionales de estadística, tales como: diseño de encuestas (falta de respuesta o el sesgo de respuesta); problemas de medición (confiabilidad y validez, definiciones de metadatos); operacionalización de variables, así como definición y significado de índices.
F8. Conocimiento social contextual	La estadística se basa en la modelización; pero para modelar, se debe tener una comprensión básica de los fenómenos que se modelan. El conocimiento de la sociedad contextual incluye, por ejemplo: búsqueda de conocimiento general como tamaño de la población, tamaño del producto nacional bruto, deuda nacional y recursos; demografía; derechos humanos y vulnerabilidad de las minorías, historia y geografía; regional y geopolítica. Una

	ventaja del conocimiento social contextual es que se pueden buscar explicaciones y análisis alternativos basados en el conocimiento de covariables plausibles.
F9. Tecnologías de la información y comunicación e investigación de la información	Muchos proveedores de estadísticas oficiales hacen que los datos estén disponibles al público y, a menudo, requieren una gran cantidad de conocimientos especializados y habilidades de uso de las tecnologías digitales. Es posible que los datos deban limpiarse, ordenarse, transformarse, agregarse o desagregarse. Todo ello implica distintos tipos de aprendizajes que deberían fomentarse a través de las propuestas de enseñanza.
F10.Núcleo cuantitativo	Las habilidades cuantitativas son la base de todos los aspectos de la cultura estadística. Estas habilidades incluyen un entendimiento de números, razones, porcentajes, tasas y fracciones.
F11. Comprensión de textos y comunicación	En muchos casos, la información se presenta como un texto, diagrama o imagen. Generalmente, para que el texto no resulte denso, se acompaña de representaciones. En consecuencia, una habilidad para comprender el texto está asociada a la comprensión de las representaciones. Esto está íntimamente relacionado con la habilidad para comunicar las conclusiones de un análisis de manera comprensible y transparente.

Tabla 1. Facetas de la *Estadística Cívica* (adaptado de Engel, 2019).

Metodología

A partir del enfoque teórico referenciado anteriormente, reconocemos a la evaluación como un proceso multifacético que:

- produce información,
- reconoce al alumno como sujeto de conocimiento y no sólo sujeto de aprendizaje,
- debe formar parte de la planificación de manera conjunta con las actividades de enseñanza o de gestión pedagógica,
- implica un esfuerzo sistemático e intencionado de aproximación al objeto a evaluar.

Desde el diseño de las actividades de evaluación, nos propusimos:

- Promover el aprendizaje activo y colaborativo de los alumnos a través de grupos de discusión, que permita pensar y pensar-se con otros y no de manera individual.
- Trabajar con datos y situaciones reales que permitan recolectar evidencia cierta, derivados de investigaciones en el campo de las Ciencias Sociales.
- Reconocer los temas de relevancia para afianzar el comportamiento cívico de nuestros alumnos en las sociedades modernas de referencia.
- Fomentar la participación ciudadana y crítica de nuestros alumnos en la sociedad.

Como técnica metodológica utilizamos el análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990), al cual consideramos como el estudio de las comunicaciones humanas materializadas en resoluciones de las tareas a través de producciones escritas. Dado que el análisis de contenido no es una teoría, sino un conjunto de técnicas, es imprescindible que la técnica concreta utilice una teoría que dé sentido al modo de análisis y a los resultados. En consecuencia, la identificación de unidades de análisis se realiza en función de los elementos de conocimiento y disposicionales enunciados por Gal (2004) y de las facetas de la *Estadística Cívica* (Engel, 2019). Este análisis de contenido previo nos sirve de referencia para realizar un estudio posterior sobre las resoluciones de los alumnos, el cual pretendemos compartir en futuros trabajos.

Características generales de la propuesta de evaluación

El principal objetivo de la evaluación se centra en propiciar el desarrollo del razonamiento estadístico de los estudiantes, adhiriendo a lo que Gal (2004) considera como: "*la forma de dar sentido a la información estadística*"; buscando integrar con distintos niveles de profundidad, las once facetas de la *Estadística Cívica* resumidas en la Tabla 1. De esta manera, se diseñó una evaluación continua que se implementa en tres etapas:

- La *Etapa 1,* se busca poner en discusión las formas de medir en Ciencias Sociales, cuáles son los problemas que surgen cuando se deben medir características sociales tales como la pobreza o la felicidad y, pone en debate el problema de la confiabilidad de las mediciones asociada a los tipos de muestreo.
- La *Etapa 2*, se centra en el problema de la pobreza y su medición; en este sentido se busca poner en relación el problema de la medición con una problemática social específica, por ejemplo: la pobreza y de esta manera, analizar las diversas formas de medición, discutir sobre la completitud y confiabilidad de cada una y analizar los pro y contras de la medición que utiliza el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC). Todo ello permite trabajar conceptos estadísticos específicos como: los datos, las variables y su clasificación, la construcción de indicadores y las distintas maneras de resumirlos y de representarlos.
- En la *Etapa 3,* se busca poner en relación las ideas y conceptos desarrollados y evaluados previamente, a partir de un estudio de caso, el cual se centra en el análisis de algunas de las variables asociadas a la construcción del índice de pobreza adoptado por INDEC. Particularmente, analizamos los datos provenientes de la Encuesta Permanente de Hogares (EPH) para el Gran Santa Fe, dado que es información contextualizada en la realidad de nuestros alumnos y que, además, al ser datos abiertos permiten que los estudiantes puedan manipular la información para resumirla según sus propósitos y elaborar informes y conclusiones en base a ellos.

Las tres etapas evaluatorias permiten poner en relación información que los estudiantes obtienen de diversas fuentes tales como: vídeos (Escudero, 2018; Rosling, 2007, 2010; Donjuan, 2018); textos que refieren a distintas problemáticas sociales, económicas y/o políticas (Escudero, 2014; Mora y Araujo, 2017; Bonfiglio, 2019), así como bases de datos y gráficos dinámicos (Gapminder World; Human Development Report; EPH Gran Santa Fe). Cabe aclarar que estos recursos se alternan o modifican cada año en relación a la problemática que se aborda en paralelo a lo largo de las clases.

Así, a continuación, presentamos el análisis de la propuesta de evaluación basado en las facetas descritas en la Tabla 1.

Análisis de la propuesta de evaluación

En el Cuadro 1, compartimos las tareas y actividades que componen todo el proceso de evaluación. Estas tareas se distribuyen en las tres etapas mencionadas de la siguiente manera: las Tareas 1 y 2, se presentan en la etapa 1; las Tareas 3 y 4, en la etapa 2 y la Tarea 5, en la etapa 3. Esta distribución tiene un correlato con el desarrollo de los contenidos que se realiza en las clases y nos permite evaluar distintas competencias, habilidades y disposiciones (entendidas como lo expresan Gal, 2004 y Engel, 2019). Asimismo, esta distribución de tareas nos permite evaluar el progreso de los estudiantes y que ellos mismos puedan volver a los textos y vídeos trabajados para darles nuevos significados, agregando nueva información y conceptos, tal como lo sugiere Gal (2004).

Tarea 1. Teniendo en cuenta los documentos compartidos (Escudero, 2014, 2018; Bonfiglio, 2019; INDEC, 2009) brindar respuestas, fundamentando y argumentando cada una de ellas.

a. ¿Cuál es el trabajo de la Estadística, según el autor Walter Sosa Escudero?

b. Indicar cuáles son los aspectos o las dimensiones que, metodológicamente, se consideran más importantes para medir la pobreza. Explicar diferentes enfoques de medición.

c. Teniendo en cuenta lo mencionado por Escudero, tanto en su libro como en el vídeo, y por el estudio presentado por Bonfiglio (2019) del Observatorio de la Deuda Social Argentina (ODSA), ¿cuál o cuáles son las diferencias principales desde el punto de vista metodológico de la medición de la pobreza? Ejemplifica o fundamenta la respuesta teniendo en cuenta los documentos mencionados.

d. Elabora una definición propia de al menos tres variables que sean centrales para estudiar la medición de la pobreza o dimensiones asociadas a ellas. Clasificar dichas variables y asignarles una escala de medición. Fundamentar la definición.

e. Considerar el Gráfico V.1. Matriz de pobreza multidimensional del documento del ODSA (página 15) y definir la o las variables que se analizan, clasificarlas y asignar la escala de medición de esta o estas variables.

f. Del documento de ODSA, tomar como referencia la Tabla II. Esquema de variables e indicadores de dimensiones de derechos sociales y económicos (pág. 2). A partir de esto, seleccionar uno de los indicadores descritos junto a su definición metodológica. Para el indicador seleccionado, establecer el proceso que se debería realizar para el cálculo del mismo si se consideran los datos presentados en la EPH del 3er trimestre 2018 del Gran Santa Fe.

Tarea 2.

a. ¿Por qué Escudero, en un tramo del vídeo indica: *"Lo poco confiable es inútil"*? ¿Qué relación establece entre confiabilidad / utilidad / tamaño de la muestra? ¿Forma parte esto de un problema de la Estadística? Argumenta y ejemplifica con claridad.

b. ¿Por qué pueden fallar los pronósticos económicos, políticos o de otro orden? Ejemplifica.

c. Consulta la ficha técnica del documento del ODSA y responde:

- **i.** ¿Qué tipo de población/universo se define? Relacionar estas definiciones con las de poblaciones que consideramos en la bibliografía de referencia de la asignatura y que se trabajaron en clase.
- **ii.** ¿En qué aglomerado urbano estarán representados los hogares de Santa Fe? Argumenta la respuesta.
- **iii.** La muestra considerada por el ODSA, ¿permite que los investigadores realicen inferencias? Argumenta la respuesta.
- **iv.** Menciona el tipo de muestreo que se aplica, desarrollando y explicitando todos los procedimientos realizados hasta conformar la muestra final.

Tarea 3. Con base en los vídeos de Rosling (2007, 2010) y las lecturas realizadas en la Tarea 1, les proponemos que resuelvan las siguientes actividades:

a. En la Tarea 1 vimos cómo Escudero nos muestra la problemática de la construcción de un índice de pobreza y las distintas variantes metodológicas. En esta oportunidad, Rosling también nos habla de la pobreza en el mundo. ¿Por qué consideras que estos estadísticos analizan a la pobreza como un indicador importante? ¿Para qué sirve medir la pobreza?

b. En Rosling (2010) se presenta el análisis de diversas variables. Te pedimos que selecciones una de esas variables, y en base a ella, clasifiques su tipo y escala de medición. Si tuvieras que recolectar datos que provengan de la variable elegida y quisieras resumir esos datos, ¿qué gráfico utilizarías? ¿Por qué? ¿Qué información pondrías en el gráfico realizado?

Tarea 4. Para resolver esta tarea deben tomar en cuenta los archivos: INDEC (2009) y la base de datos de la EPH para el aglomerado Gran Santa Fe.

a. En Rosling (2007), se plantea cómo se modifican las condiciones habitacionales a medida que aumenta el ingreso. Por ello te pedimos que, elijas del archivo metodológico de INDEC, una variable cualitativa que permita observar algunas de las condiciones habitacionales de las personas. Expresa claramente cuál es la variable elegida, su código, cómo se define en el manual de metodología y la escala o nivel de medición en la que consideras que se mide. Describe cuáles son las diferentes categorías que presenta.

b. Para la variable elegida, elabora una tabla de distribución de frecuencias absolutas y relativas porcentuales en la que incluyas toda la información pertinente para que el resumen pueda leerse claramente.

c. Realiza un gráfico adecuado para representar la distribución de frecuencias relativas porcentuales de la variable seleccionada y justifica la elección de dicho gráfico.

Tarea 5. Dos personas intercambian opiniones respecto de sus impresiones sobre quiénes son los que compran más productos en cuotas o con tarjeta. A continuación reproducimos parte de su diálogo:

Persona A: A vos quién te parece que consume más con tarjetas de crédito o en cuotas, ¿los que perciben un ingreso más alto o los que tienen poco ingreso?

Persona B: Yo pienso que los que tienen ingresos más altos compran más con tarjeta de crédito, primero porque si no tenés ingresos o los mismos son muy bajos no te dan tarjeta y además porque con un ingreso alto, sacás crédito y mientras tanto hacés trabajar el dinero en otra cosa.

Persona A: ¿Te parece? Yo pienso que es al revés, que los que tienen ingresos bajos, como no les alcanza para todo, van "tarjeteando" y así pueden ir comprando cosas. Pero es algo que yo pienso, la verdad que no tengo información.

¿Cómo podrías ayudar a estas personas a sacar una conclusión mejor fundamentada?

a. Te proponemos que a partir de la EPH para el Gran Santa Fe del tercer trimestre de 2016, selecciones la variable Ingreso Total Familiar (ITF), separando los datos según la variable V16: compra o no en cuotas o con tarjeta. A partir del cruce de esas variables, elabora un análisis exploratorio de datos presentando los gráficos que consideres adecuados para ayudar a dar respuesta a la pregunta inicial.

b. Con base en estos resúmenes, elabora un informe en el que realices una comparación entre los dos grupos y por último, indica a cuál de las dos personas del diálogo apoyarías. Considera que tu decisión debe estar fundamentada en las conclusiones que has obtenido de tu informe.

c. Calcula el percentil 21 para cada grupo. ¿Qué significado puedes darle a esas medidas en función de la variable que se está analizando? ¿Qué relación encuentras entre estas medidas y lo que expresa Escudero en el texto que presentamos en la Tarea 1?

(Elaboración Propia)

Cuadro 1. Tareas que componen las tres etapas de la propuesta de evaluación.

Más adelante, en la Tabla 2, se presenta un resumen del análisis de contenido que hemos realizado con base en las tareas propuestas y las facetas delimitadas por Engel (2019). A partir de este resumen es posible detectar la riqueza y complejidad de la propuesta general de evaluación y de cada tarea, de manera particular.

Cabe aclarar que el proceso del análisis de contenido se ha realizado en diversas etapas, en las que primero delimitamos los elementos de conocimiento y disposicionales (Gal, 2004) que consideramos que se pueden poner en relación al resolver las distintas actividades planteadas. Esta delimitación nos permitió identificar unidades de análisis y detectar en qué actividad y tarea se daba con mayor nivel cada una de las facetas, llegando de esa manera, a la elaboración de la Tabla 2. En este documento abordamos solamente la reflexión sobre las facetas de la *Estadística Cívica,* porque consideramos que las mismas representan de manera breve toda la descripción que podríamos realizar de los elementos mencionados.

	Actividad de la Tarea en la que surge Fi				
Facetas (Fi)	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5
F1. preparación para el compromiso social	a–b-c	a-b- c.iii-iv	a		a-b-c
F2. Evaluación crítica y reflexión	c	a-b- c.iii-iv	a-b	a-b-c	a-b-c
F3. Disposiciones	b-c	a-b-c.i-iii-iv	a-b	a-b-c	a-b-c
F4. Estadística y Riesgo	c-d	b-c.i-ii-iii-iv	b	a-b-c	a-b-c
F5. Modelos y representaciones	f		b	a-b-c	a-b-c

F6. Metodología y proceso de investigación	c-f	a-b-c.iii	a-b	a-b-c	a-b-c
F7. Extensiones en el área de estadísticas oficiales	c-d-e-f	a-b-c.ii-iii-iv			
F8. Conocimiento social contextual	c	c.ii	a-b		a-b-c
F9. Tecnologías de la información y comunicación e investigación de la información	f		b	a-b-c	a-b-c
F10. Núcleo cuantitativo	f		b	a-b-c	a-b-c
F11. Comprensión de textos y comunicación	a-b-c-e-f	a-b-c.i-iii-iv	a-b	a-b-c	a-b-c
Etapa de evaluación	Etapa 1		Etapa 2		Etapa 3

Tabla 2. Facetas de la Estadística Cívica que se evidencian en las tareas de evaluación
Fuente: Elaboración propia

Así, en primera instancia, podemos indicar que la propuesta de evaluación cubre todas las facetas que conforman la *Estadística Cívica*, aunque las mismas se abordan con diversos grados de profundidad según la actividad. Otra característica observable a partir de la Tabla 2 es que, todas las actividades que conforman a cada tarea pueden enmarcarse en alguna de las facetas descritas. Asimismo, cada etapa de evaluación relaciona diversas facetas a través de distintas ideas fundamentales y de distintos conceptos estadísticos y sociales. Esta característica nos brinda cierta flexibilidad para modificar, en cada semestre, las actividades y los recursos sin que se dejen de lado alguna de las facetas. Por ejemplo, en el Cuadro 1, se presentó un modelo de evaluación, pero al haber temas dinámicos, que se modifican año a año, en otras ocasiones hemos integrado otros recursos tales como Donjuan (2018) o Mora y Araujo (2017), los cuales nos permiten trabajar con indicadores sociales distintos al de pobreza como puede ser el índice de participación política y electoral (Haime, 2017).

Por último, se realiza una valoración, en términos de puntuaciones, sobre el nivel con el que cada faceta interviene en la propuesta general de evaluación (considerando todas las tareas y las etapas en conjunto). Con dicho objetivo, se asigna una gradación de medida correspondiente al nivel de intervención de cada faceta en la evaluación general. Así, seguimos las puntuaciones indicadas por Engel (2019), teniendo en cuenta que: 0 indica que la faceta no aparece en la evaluación general y 8, es el nivel máximo de intervención en la evaluación. En el Gráfico 1, se muestra un resumen en el que se integran las facetas descritas previamente (F1 a F11) y la gradación (de 0 a 8) que indica el nivel de intervención de cada faceta en la propuesta general de evaluación (con las tres etapas integradas).

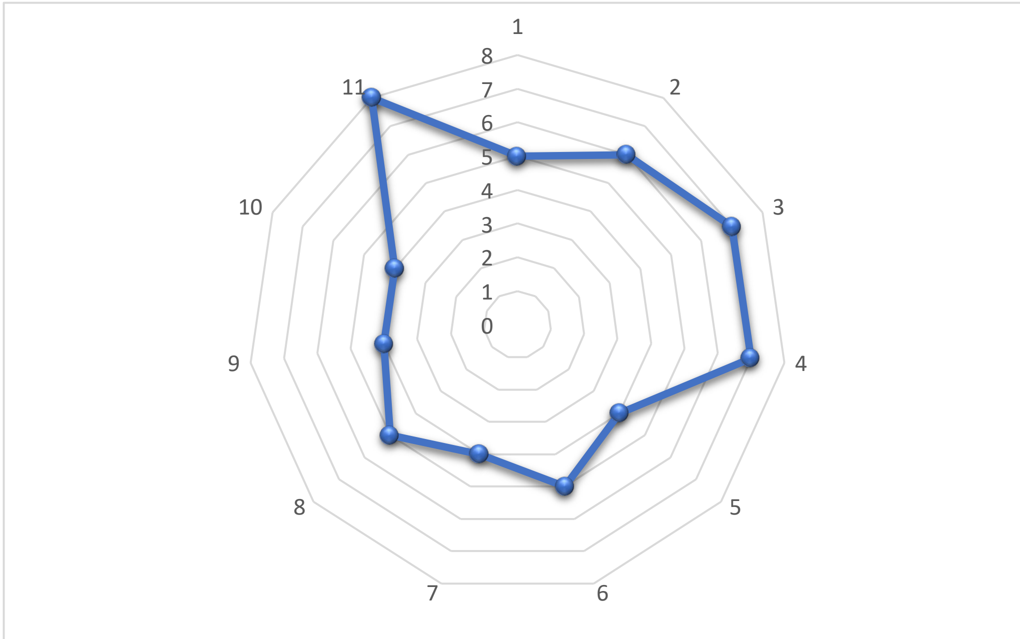


Gráfico 1. Perfil de puntuaciones para las facetas de *Estadística Cívica* consideradas en la evaluación

Fuente**:** Elaboración propia basada en el análisis de contenido y en la Tabla 2 (Los valores 1 a 11 ubicados en los vértices del Gráfico 1 representan las Facetas –F1 a F11- descritas en la Tabla 1 y los valores 0 a 8, representan el nivel de intervención de cada faceta en la propuesta evaluativa)

Del resumen presentado en la Tabla 2 y en el Gráfico 1, se desprende que esta propuesta exige un cierto nivel de compromiso con las temáticas implicadas -F1 a nivel 5-; a su vez exige y permite conocer el contexto socioeconómico del Gran Santa Fe (región en la que viven nuestros estudiantes)-F8 a nivel 5-; permite crear diferentes resúmenes y análisis estadísticos asociados al conocimiento contextual y a la comprensión de textos, los cuales requieren ciertas habilidades en el uso de software (en particular, se utiliza Excel y GeoGebra)-F5 y F9 a nivel 4, F8 a nivel 5, F10 a nivel 4-; también permite modelar y reflejar críticamente diferentes variables e indicadores asociadas al constructo de *pobreza*, discutir sobre los alcances y las limitaciones de los índices e indicadores; evaluar creencias de uso cotidiano y fundamentar decisiones en base a la evidencia –F2 a nivel 6, F3 y F4 a nivel 7, F5 a nivel 5-. Todo lo anterior está asociado con el estudio de distintas metodologías para la construcción de indicadores sociales –F6 a nivel 6 y F7 a nivel 4-. Por sobretodo, la evaluación exige constantemente la interpretación y comprensión de textos y la comunicación de resultados de manera fundamentada y basada en la evidencia que aportan los datos (F11 a nivel 8).

Reflexiones finales

Cuando nos proponemos contribuir al desarrollo de ciudadanos estadísticamente cultos, se torna impostergable direccionar la enseñanza de la Estadística a la toma de decisiones fundamentada y basada en la evidencia, asociada a los diferentes ámbitos de desarrollo de las personas. Para ayudar a los estudiantes a participar de manera competente e informada en debates públicos, sobre temas de la sociedad e involucrarlos en la resolución de problemas candentes, consideramos que es necesario seguir modificando y monitoreando nuestras propias prácticas docentes de tal manera de poder detectar posibles desajustes y recomponerlos a tiempo. Particularmente en el presente trabajo hemos podido mostrar la potencialidad de una propuesta evaluativa que permite conectar distintos elementos del conocimiento estadístico asociados a un conocimiento más abarcativo, en el que los conceptos estadísticos estén relacionados a las problemáticas sociales que son de interés para nuestros estudiantes.

El análisis de contenido que hemos presentado nos permite indicar que es posible implementar una enseñanza y evaluación de la Estadística que no se limite a las técnicas y términos formales con poca relevancia para el contenido, sino que esté integrada al contexto asociado a la futura profesión de los estudiantes.

Por último, la evaluación no debe pensarse escindida de la enseñanza, tiene que interactuar con ella, produciendo información que permita a los docentes timonear la dirección de esa enseñanza. Y en ese sentido, los aportes de la producción del aprendizaje en las instancias de evaluación tienen que servir de retroalimentación al propio aprendizaje individual y colectivo de nuestros alumnos. Es hora de apostar a la producción colectiva del conocimiento en la configuración de las sociedades modernas y, por lo tanto, es nuestra obligación como formadores, seguir investigando para profundizar en los alcances y limitaciones de este tipo de experiencias.

Agradecimiento: Proyecto CAI+D: *Aportes para el desarrollo de la Cultura Estadística a partir de la introducción del RII en la Educación Estadística*. 50120150100032LI.

Referencias bibliográficas

Anijovich, R. y Cappelletti, G. (2017). La evaluación en el escenario educativo. En R. Anijovich y G. Cappelletti, (Eds.), *La evaluación como oportunidad* (pp. 13-38). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números, 83, 7-18.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística basada en proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

Behar, R. y Grima, P. (2004). La estadística en la educación superior ¿Formamos pensamiento estadístico? *Ingeniería y Creatividad, 5*(2), pp. 84-90.

Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: Aprendizaje a largo plazo. Factores que inciden y estrategias plausibles. En. G. Sanabria Brenes y F. Núñez Vanegas (Eds.), *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos* Costa Rica.

Bonfiglio, J. (2019). *Pobreza multidimensional fundada en derechos económicos y sociales. Argentina Urbana: 2010-2018*. Recuperado de: http://uca.edu.ar/es/noticias/informe-pobreza-multidimensional-fundada-en-derechos-economicos-y-sociales.

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education - A joint ICMI/IASE study* (pp. 57- 69). Dordrecht: Springer.

Donjuan, E. (2018, enero 5). *La Estadística, ¿la prostituta de la Matemática? [Video]*. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=0K7a3EiGH98&t=2s

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. ¿Qué es la Estadística cívica?. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.*

Escudero, W. (2014). *Qué es (y qué no es) la Estadística. Usos y abusos de una disciplina clave en la vida de los países y las personas*. Buenos Aires, Argentina: Siglo Veintiuno.

Escudero, W. (2018, febrero 20). Los datos [estadísticos] no dicen nada, son interpretaciones. [*Video*] Recuperado de: https://www.lanacion.com.ar/sociedad/walter-sosa-escudero-los-datos-estadisticos-no-dicen-nada-son-interpretaciones-nid2107355.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47-78). Dordrecht: Springer.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*.

Haime, A. (2017). ¿Qué explica la participación electoral en América Latina? Un estudio sobre el efecto de la actitud de los ciudadanos hacia el proceso electoral. *Ciencia Política, 37*(1), pp. 69-93.

Herrera, M. y Konic, P. (2017). Conocimiento del profesor sobre la importancia del muestreo aleatorio simple para la estimación de parámetros. En: J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Instituto Nacional de Estadística y Censos (2009). *Diseño de Registro y Estructura para las bases de microdatos. Encuesta Permanente de Hogares*. Recuperado de: https://www.indec.gob.ar/ftp/cuadros/menusuperior/eph/EPH_disenoreg_09.pdf

Mora y Araujo, M. (2017). Conocer, influir, pronosticar. Los propósitos de las encuestas. *Ciencia Hoy, 26*(153), 21-26.

Rosling, H. (2007, marzo 6). *Hans Rosling revela nuevas ideas sobre la pobreza*. [*Video*] Recuperado de: https://www.ted.com/talks/hans_rosling_reveals_new_insights_on_poverty?language=es#t-51199

Rosling, H. (2010, noviembre 14). *200 años, 200 países, 4 minutos*. [*Video*] Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=6TxP2QRAFMA.

Tauber, L., Cravero, M. y Santellán, S. (2019). La construcción del sentido estadístico a partir de indicadores sociales. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.*

Tauber, L., Santellán, S. y Cravero, M. (2017). Una propuesta de evaluación de conceptos estadísticos en carreras de ciencias sociales. En: R. Abrate (Ed.), *Memorias de VI Jornadas de Educación Matemática y III Jornadas de Investigación en Educación Matemática*. Santa Fe: Universidad Nacional del Litoral.

PLANTEO ANALÓGICO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS. DESCUBRIENDO RELACIONES ENTRE EL TEOREMA DE WALTER Y EL DE MORLEY

ANALOGICAL POSING OF MATHEMATICAL PROBLEMS; DISCOVERING THE RELATIONSHIP BETWEEN WALTER'S AND MORLEY'S THEOREMS

Miguel Cruz Ramírez
Universidad de Holguín (Cuba)
cruzramirezmiguel@gmail.com

Resumen
En el presente trabajo se establece una conexión entre el planteo de problemas matemáticos y la teoría de Gentner sobre el razonamiento analógico. Se parte de una estrategia metacognitiva compuesta por etapas orientadas hacia el planteo creativo de problemas, luego se fundamenta el razonamiento analógico por medio del mapeo de predicados, y finalmente se ejemplifican las conexiones entre ambos procesos a partir de un problema de geometría elemental. El problema analizado revela ciertas conexiones entre el teorema de Walter y el de Morley, las cuales reflejan las potencialidades de la estrategia para imaginar nuevos problemas por un camino analógico.

Palabras clave: planteo de problemas, razonamiento analógico, teorema de Walter, teorema de Morley

Abstract
This work shows a connection between mathematical problem posing and Gentner's theory on analogical reasoning. It starts from a metacognitive strategy composed of stages focused on the creative problem posing; then, analogical reasoning is based on predicate mapping, and finally, the connections between both processes are exemplified from a problem of elementary geometry. The analyzed problem reveals certain connections between Walter's theorem and Morley's theorem, which reflect the potential of the strategy to imagine new problems along an analogical path.

Key words: problem posing, analogical reasoning, Walter's theorem, Morley's theorem

Introducción

El planteo de nuevos problemas constituye una actividad eminentemente creativa, la cual requiere de mayor atención en el campo de la matemática educativa (Abdulla y Cramond, 2018; Kilpatrick, 1987; Mallart-Solaz, 2018; Van Harpen y Sriraman, 2012). Bajo una mirada epistémica, resulta consustancial el vínculo entre planteo y resolución de problemas para el desarrollo del conocimiento matemático (Ernest, 1991); bajo un enfoque curricular, numerosos textos y programas de estudio promulgan la importancia de la enseñanza y el aprendizaje del planteo y la resolución de problemas, como parte de la formación integral de las nuevas generaciones (Cai, Jiang, Hwang, Nie, y Hu, 2016; NCTM, 2000); y bajo una perspectiva didáctica, esta relación expresa una oportunidad no siempre aprovechada para el desarrollo del pensamiento matemático (Bonotto y Santo, 2015; English, Fox, y Watters, 2005).

Dentro del ámbito escolar, plantear nuevos problemas implica varias problemáticas relativas a su desarrollo conceptual y metodológico, por ejemplo: ¿qué es realmente plantear un problema? ¿Se trata de una habilidad matemática o constituye una competencia? ¿Cuáles son las etapas por las cuales transcurre el proceso cognitivo subyacente? ¿Cómo evaluar su aprendizaje? ¿Qué dispositivos didácticos permiten efectuar dicha evaluación? Incluso, el propio término "plantear" es susceptible de cuestionamiento. En la literatura esta pluralidad ha conllevado al empleo de otros términos tales como "inventar" (Espinoza, Segovia, y Lupiáñez, 2018) y "construir" (Bernardo, 2001). El primero ha sido utilizado con la intención de significar el proceso creativo en su totalidad y no enfocado solamente hacia el planteo como acción final, mientras que el segundo ha sido empleado como sinónimo de "diseñar", en el sentido de elaborar problemas principalmente con fines docentes. Como puede apreciarse, el primer camino es coherente con el planteo como una habilidad que puede ser adquirida por el alumno, mientras que el segundo enfatiza el planteo como una competencia profesional propia del docente. Además, epistémicamente el primero de ellos enfatiza su valor gnoseológico, mientras que el segundo vindica su carácter ontológico.

El presente trabajo parte de un modelo cognitivo descrito en trabajos previos (Cruz, García, Rojas, y Sigarreta, 2016; Cruz, 2019), donde se describe un conjunto de acciones que conforman un proceso cognitivo orientado hacia el planteo de nuevos problemas. La dinámica de estas acciones refleja numerosas estrategias de razonamiento, pero no han sido suficientemente fundamentadas las bases teóricas que conectan el establecimiento de analogías y el planteamiento creativo de problemas. Estudios cuantitativos y cualitativos han mostrado la presencia de procesos analógicos en ciertos subprocesos cognitivos (Bernardo, 2001; Cruz et al., 2016), de modo que constituye un problema teórico la búsqueda de un fundamento científico que explique las relaciones del razonamiento analógico con el planteo de problemas matemáticos. Una solución viable consiste en sustentar el planteo analógico de problemas bajo la concepción del mapeo estructural de Gentner (1983). Las conexiones de este modelo con los procesos cognitivos asociados al planteo constituyen el aporte fundamental de la presente investigación, lo cual se ejemplifica por medio de dos interesantes teoremas de la geometría elemental.

Marco teórico

Tanto el planteo de problemas como el uso de analogías son dos procesos de elevado nivel de complejidad (Bernardo, 2001; Cruz et al., 2016). El primero de ellos ha sido tratado en la literatura en estrecha relación con la resolución de problemas, mientras que el segundo ha seguido un derrotero enfocado hacia los tipos de razonamiento. A continuación, se presentan aspectos relevantes que pueden esclarecer en primera instancia la relación entre ambos procesos, desde un punto de vista predominantemente cognitivo.

Como proceso cognitivo, el planteo de problemas implica la ejecución de estrategias complejas, el despliegue de habilidades y destrezas matemáticas, la activación de recursos metacognitivos, y también la influencia de creencias y concepciones subyacentes (Silver, 1994). El acto de plantear nuevos problemas imbrica procesos específicos que han sido descritos por varios autores. Un ejemplo de ello reside en la relación dialéctica entre aceptar un hecho u objetar ¿qué-si-no? (Brown y Walter, 1983). Esta dualidad despliega amplias posibilidades para establecer los puntos de partida, como en el caso de problemas ya resueltos, teoremas ya demostrados, y conceptos ya establecidos. El pensamiento prosigue por un camino inquisitivo y creador, donde se modifican elementos y se indaga acerca de qué pasaría bajo condiciones diferentes.

En un estudio relacionado con el uso de analogías durante el planteo de problemas, Cruz et al. (2016) describen una estrategia metacognitiva para generar problemas a partir de un objeto matemático, la cual tiene en cuenta ciertas regresiones cíclicas y las etapas sugeridas por Brown y Walter (1983). Esta estrategia consta de seis etapas: selección de un objeto, identificación de componentes, asociación de propiedades, búsqueda de relaciones, verbalización rigurosa de la interrogante, y la transformación posible durante todo el proceso. La secuencia de las primeras cinco expresan el camino más unidireccional, pero al incorporar la transformación se establece un proceso más complejo y dinámico. En lo adelante, a esta estrategia se le denominará SCABV+T para abreviar.

La Figura 1 representa de forma compactada la estrategia SCABV+T. La ubicación central de la etapa de transformación refleja su conexión directa con las etapas restantes. Este aspecto expresa la posibilidad de realizar ciertos cambios o variaciones, no solo en el objeto sino también en los elementos identificados, las propiedades seleccionadas, e incluso en los tipos de relaciones analizadas y en las preguntas verbalizadas. La transformación proporciona un elevado grado de flexibilidad, lo cual es esencial en todo acto creativo.

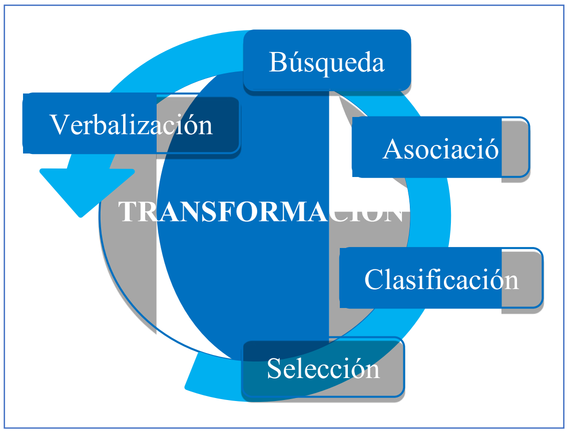


Figura 1. Una estrategia metacognitiva para el planteo de problemas matemáticos

Por otra parte, el avance paulatino hacia el planteo no significa que dejen de existir regresiones e interacciones dinámicas entre diferentes etapas. Los procesos iterativos pueden adoptar dos formas fundamentales: los unidireccionales (de tipo I), relacionados con ciclos entre etapas no necesariamente subsiguientes del camino selección-clasificación-selección-búsqueda-verbalización, y los multidireccionales (de tipo II), que implican el paso por la transformación. Esta concepción permite diferenciar los ciclos de Brown y Walter (1983) básicamente en dos grupos, lo cual es favorable desde el punto de vista didáctico, pues ello permite reconocer y evaluar diferentes niveles de desarrollo en el proceso cognitivo.

La parte final de la saeta en la Figura 1 no significa un vacío ni un estadio conclusivo en el proceso de razonamiento. Es este, precisamente, el momento en que el pensamiento matemático avanza hacia el proceso de resolución de problemas. Por tanto, la estrategia metacognitiva descrita tiene lugar bajo estrecha unidad dialéctica con las estrategias de solución de problemas. Este hecho marca una diferencia esencial entre la estrategia SCABV+T y la descrita por Brown y Walter (1983), ya que esta última culmina con el análisis del problema, lo cual puede implicar acciones de resolución. El nuevo problema que se expresa por medio de la verbalización requiere de revisión por varios motivos. Por ejemplo, es posible que los datos sean inconsistentes o contradictorios, lo dado podría ser insuficiente para arribar a lo buscado, las herramientas mínimas de solución podrían rebasar los objetivos curriculares, la formulación podría no ser suficientemente clara o motivadora, entre otros aspectos. Ciertamente, el proceso de resolución de problemas puede coadyuvar a disminuir estas dificultades, pero en la estrategia SCABV+T se concibe fuera del proceso de planteo. Aunque pueden verse en unidad dialéctica, el planteo, la solución y el perfeccionamiento o adecuación del problema son subprocesos complejos, cuyo estudio específico ya resulta suficientemente complejo.

Metodología

Para la búsqueda de fuentes teóricas argumentativas que sustenten el planteo analógico de problemas, un análisis cualitativo puede servir de puente entre elementos descritos en ambos campos del saber científico: elementos psicológicos y didácticos como la estrategia metacognitiva SCABV+T antes descrita, y elementos lógicos relacionados con el establecimiento de analogías. En este último caso, en la literatura existen dos enfoques fundamentales: el axiomático y el mapeo estructural (Schlimm, 2008). El camino analítico adoptado no persigue desechar uno de ellos o compararlos, sino revelar los elementos positivos que tiene el segundo para fundamentar la naturaleza del razonamiento analógico durante el planteo de problemas. Esta argumentación se complementa con una ejemplificación, donde se ha tomado el resultado empírico de aplicar la estrategia SCABV+T durante un curso de geometría.

Resultados

El planteo analógico de problemas con base en el mapeo estructural de Gentner

Para explicar de forma coherente los mecanismos empleados durante el razonamiento analógico, es factible adoptar la teoría de Gentner (1983) sobre el papeo de estructuras. Esta teoría se apoya en varios conceptos tales como los “dominios” y las “situaciones”, consistentes en sistemas que pueden ser de objetos, de atributos de objetos, así como de relaciones entre objetos. Al trasladar esta idea al marco conceptual del planteo de problemas, el sistema de objetos queda definido durante la etapa de selección. Seguidamente, durante la interacción clasificación-identificación emerge paulatinamente un conjunto de propiedades conocidas previamente. La amplitud del conocimiento constituye un elemento favorable, pues provee al sujeto de un inventario superior de elementos y hechos relacionados con el objeto. Sin embargo, esto es insuficiente cuando se carece de aspectos reguladores tales como la motivación, la atención, la fluidez, la flexibilidad, entre otros. Por ejemplo, la fluidez constituye un elemento catalizador para identificar nuevos elementos, no necesariamente reflejados de manera explícita en el objeto matemático, mientras que la flexibilidad permite cambiar de rumbo ante obstáculos insoslayables.

En la mencionada teoría, el conocimiento se configura como un conjunto de redes proposicionales de nodos y predicados. Aquí los nodos representan los conceptos tratados como totalidades, mientras que los predicados aplicados a los nodos expresan proposiciones sobre tales conceptos. Los predicados constituyen funciones cuyas variables son los nodos, y pueden expresar atributos propios como *amplitud*($\angle ABC$), o relacionales como *con cíclicos* (A, B, C, D). También los predicados pueden subdividirse siguiendo otra clasificación, conforme a su tipo de argumento: los de primer orden donde los argumentos son objetos, como ocurre con los dos ejemplos anteriores, y los de orden superior donde los argumentos están constituidos por proposiciones, como *causa* [*paralelismo* (r, s), *perpendicularidad* (s, t)]. Por su forma de realización, las analogías basadas en predicados simples constituyen niveles primarios de complejidad, mientras que aquellas relacionadas con predicados de orden superior expresan niveles de complejidad más avanzados.

La organización del conocimiento en forma de redes proposicionales de nodos y predicados, incluyendo la estructura de estos últimos, refleja la forma en que las personas construyen una situación. Gentner (1983) señala que la flexibilidad de estas representaciones va más allá de lo que pudiera parecer lógicamente posible. Con ello, la teoría de mapeo de estructuras se distingue por definir las analogías dependiendo solo de las propiedades sintácticas en que se representa el conocimiento, y no del contenido específico de su dominio. Una analogía se diferencia de una abstracción, de una similitud literal y de otras clases de comparaciones, en que mapea pocos o ningún atributo de la fuente hacia el objetivo. No se trasladan rasgos particulares sino propiedades esenciales. El proceso consiste en 'extraer' información relevante de la fuente y darle significado en el dominio del objetivo (Villafiorita, 1996).

Bajo cierto grado de formalización, según Gentner (1983), todo mapeo puede representarse como una función M que aplica de la fuente F en el objetivo O, o sea $M\colon F \rightarrow O$, donde a un conjunto de nodos f_i de la fuente le corresponde un conjunto de nodos o_j en el objetivo ($f_i \rightarrow o_j$). Dicha función determina otra correspondencia de orden superior, la cual transporta atributos A y relaciones R, en forma de predicados de mayor complejidad. Estudios pioneros, principalmente relacionados con inteligencia artificial, han utilizado esta formalización para modelar el proceso de razonamiento analógico en el campo de la resolución de problemas (Melis, 1993; Villafiorita, 1996). Para conseguir mayor rigor, por ejemplo, el modelo de Villafiorita (1996) separa el mapeo de la fuente y del objetivo, y lo define exactamente entre abstracciones de estos.

En un sentido heurístico, Gentner (1983) refiere tres principios básicos que sirven para potenciar el razonamiento analógico. Primero, tratar de descartar los atributos de objetos; segundo, intentar preservar las relaciones entre objetos; y tercero, elegir sistemas de relaciones. A esta última idea este autor la denomina "principio de sistematicidad" y sugiere que, al decidir qué relaciones se conservan, es necesario elegir un sistema de relaciones en lugar de predicados aislados. Transferir sistemas de relaciones es más efectivo que trasladar relaciones aisladas. Seguidamente, se ejemplifica el planteo analógico de un problema geométrico, tomando como sustento argumentativo el mapeo estructural de Gentner (1983) y la estrategia metacognitiva SCABV+T. Este ejemplo ha sido tomado de una discusión realizada durante un curso de geometría en la carrera de Licenciatura en Educación, especialidad Matemática, en la Universidad de Holguín.

Un ejemplo de razonamiento analógico durante el planteo de un problema geométrico

En el siguiente ejemplo se parte de un teorema de geometría afín, el cual sirve de base para imaginar nuevos problemas por un camino analógico. Se trata del teorema de la matemática germano-norteamericana Marion I. Walter (n. 1928), precisamente la coautora junto a Stephen I. Brown del influyente libro anteriormente referido (Brown y Walter, 1983). No se sabe a ciencia cierta quién formuló este teorema por primera vez, pero se debe a Walter el mérito de popularizarlo. El teorema plantea el siguiente hallazgo (ver Figura 2):

> *Teorema 1 (de Walter).* Dado un triángulo cualquiera, al trazar las cevianas que trisecan cada lado en tres segmentos iguales y seleccionar convenientemente sus puntos de intersección, queda definida una región hexagonal central cuya área constituye la décima parte del área del triángulo original.

El camino de la estrategia SCABV+T favorece el planteo de numerosos problemas. En efecto, la selección corresponde al propio teorema consistente de un objeto matemático y una propiedad que le es inherente. La clasificación implica desmembrar el objeto en partes, lo cual es similar a la implementación de la estrategia heurística descomponer/recomponer, descrita por Pólya (1957) en el proceso de resolución de problemas. Como componentes relevantes del triángulo respecto a la propiedad, figuran las seis cevianas y los puntos de intersección seleccionados convenientemente para la conformación del hexágono $PR'QP'RQ'$. Ahora, existen otros elementos visibles claramente, como los restantes puntos de intersección y los propios pies de las cevianas. En cambio, la geometría del triángulo es inagotable y es posible identificar otros elementos no considerados en el teorema, los cuales podrían favorecer el hallazgo de nuevos problemas. Por ejemplo, considerar las medianas y el baricentro, las mediatrices y el circuncentro, las alturas y el ortocentro, las bisectrices y el incentro, puntos especiales como el de

Gergonne, el de Brocard, y el de Miquel, la circunferencia de Euler y la de Lemoine, la recta de Gauss y la de Simson, etcétera.

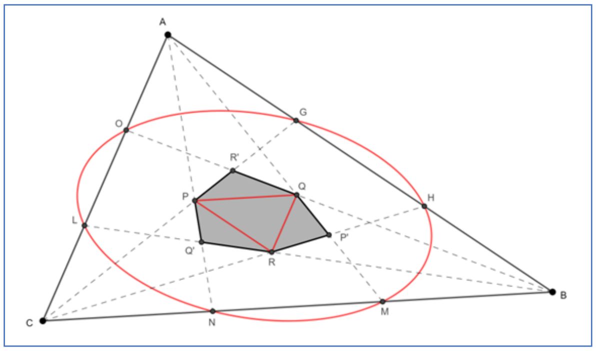


Figura 2. *Formulación de problemas bajo las premisas del teorema de Walter*

Seguidamente, a los elementos identificados se les asocia propiedades que resulten afines. Por ejemplo, a los puntos se les puede hacer corresponder la pertenencia o no a cierto lugar geométrico, la colinealidad, la posición relativa respecto a una figura, entre otras. De igual modo, a un segmento se le pueden hacer corresponder los conceptos de longitud, paralelismo, equidistancia, etcétera. Con los objetos y sus propiedades sobreviene la etapa de búsqueda de relaciones. Este momento es el más complejo pues implica la certeza de que resulten consistentes dichas relaciones. Procesos mentales como la intuición favorecen una mejor orientación hacia el planteo de problemas interesantes, proveídos de sentido lógico-matemático. Por ejemplo, si se consideran todos los puntos de intercepción de las cevianas, podría identificarse un objeto nuevo por medio de la unión de dichos puntos. Surge así una especie de polígono estrellado, al cual podría asociarse el concepto de área y explorar relaciones similares al teorema original. Similarmente, la consideración del triángulo ΔPQR (Figura 2) conlleva a numerosas ideas relacionadas con su área y posición, donde puede demostrarse que este triángulo es semejante con el triángulo ΔABC.

El uso de un software de geometría dinámica ayuda a identificar posibles propiedades como estas con economía de tiempo, y también a descartar tempranamente las falsas hipótesis. Queda así por delante la verbalización como expresión rigurosa del problema que da paso al proceso de resolución. Muchas veces este proceso de resolución se antepone a la propia verbalización, pues la búsqueda de un problema se solapa con la exploración matemática del objeto. Por tanto, una verbalización temprana podría ser: “Hallar los ángulos del triángulo ΔPQR”, mientras que otra más avanzada podría ser: “Probar que los triángulos ΔABC y ΔPQR son semejantes, con razón 5:1”. La Figura 2 ilustra una propiedad más, relacionada con la posición de los pies de las cevianas en el teorema de Walter. En efecto, puede demostrarse que la elipse que pasa por cinco de ellos pasa también por el sexto.

Por otra parte, la transformación constituye una oportunidad para imaginar problemas con mayor despliegue en el pensamiento. Los ciclos no lineales (de tipo II) favorecen reconsiderar elementos seleccionados previamente, la búsqueda de nuevas relaciones, e incluso la variación de condiciones en el objeto. Un camino efectivo lo constituye la implementación de la estrategia ¿qué-si-no? desarrollada por Brown y Walter (1983). Por ejemplo, qué pasaría si, en lugar de trisecar cada lado, las cevianas trisecan cada ángulo del triángulo ΔABC. En este caso, es oportuno mostrar cómo el razonamiento analógico puede trasladar ideas similares de una figura a otra, de modo que la búsqueda de relaciones implique la identificación de problemas similares. En primera instancia, un nuevo problema surge inmediatamente al considerar el cociente entre las áreas de los triángulos ΔPQR y ΔABC en la Figura 3. ¿Será este cociente, en principio, una constante?

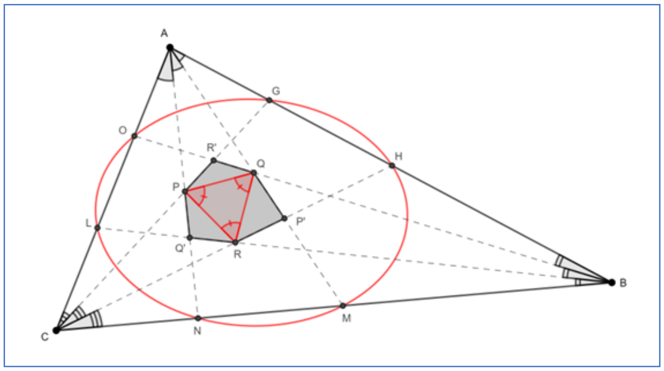


Figura 3. *Problemas análogos bajo las premisas del teorema de Morley*

Con la ayuda de un paquete de geometría dinámica es fácil convencerse de que dicho cociente no es constante. Ahora, al mover los vértices y considerar una amplia variedad de triángulos, llama la atención el hecho de que los cocientes resultantes siempre sobrepasan el valor de una décima. Precisamente, el razonamiento analógico lleva a tomar este hecho como relevante, ya que la razón 1/10 es el valor expresado en el teorema de Walter. Una primera conjetura sugiere la posibilidad de que esta fracción constituya una cota inferior. Tal conjetura es cierta; en efecto, puede demostrarse que se cumple el siguiente teorema análogo (ver Figura 3):

> *Teorema 2.* Dado un triángulo cualquiera, al trazar las trisectrices de cada ángulo, y seleccionar convenientemente sus puntos de intersección, queda definida una región hexagonal central cuya área siempre supera la décima parte del área del triángulo original.

Ciertamente, también pueden trasladarse a estas nuevas condiciones otros problemas analizados con anterioridad. Por ejemplo, puede demostrarse que los seis pies de las trisectrices también son puntos de una elipse. Asimismo, la consideración de los ángulos interiores en el triángulo ΔPQR favorece el redescubrimiento del teorema del matemático anglo-norteamericano Frank Morley (1860-1937), el cual afirma que este triángulo es siempre equilátero. Así, surge una interesante conexión entre el teorema de Walter y el teorema de Morley.

Como ha sugerido Gentner (1983), el camino del razonamiento analógico ha partido de un dominio de situaciones. Esencialmente, el sistema original de objetos consta del triángulo, las cevianas cuyos pies trisecan cada lado, así como del hexágono interior definido. El sistema de atributos y relaciones incluye la arbitrariedad del triángulo, el área de este y del hexágono, el cociente entre ambas áreas, entre otros aspectos. Después de transformar el objeto y considerar las trisectrices de los ángulos, ocurre un mapeo de predicados. Por ejemplo, en forma muy primitiva transcurre la transferencia de predicados de primer orden, como M_1: $\{área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)\} \rightarrow \{área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)\}$, lo cual lleva a transferir la idea de calcular las áreas correspondientes desde el problema original, sin considerar relaciones entre estas. Sin embargo, la transferencia de predicados de orden superior favorece la búsqueda de analogías más profundas. Por ejemplo, el mapeo M_2: $\{cociente(área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)) = 1/10\} \rightarrow \{cociente(área(\Delta ABC), área(\Delta PQR)) > 1/10\}$ sugiere una fuerte analogía entre los dos teoremas antes enunciados.
En este proceso de planteo analógico, cabe destacar la importancia que reviste el principio de sistematicidad de Gentner (1983). En efecto, la aprehensión de un sistema de relaciones provee al sujeto de mecanismos más sofisticados para identificar y transferir estructuras y relaciones desde un sistema conocido (fuente) hacia uno menos conocido (objetivo). Una comprensión más profunda de las relaciones que tipifican el problema original contribuye a una transferencia efectiva de predicados de orden superior. Por otra parte, la analogía requiere mantenimiento, manipulación, activación e inhibición selectiva de representaciones mentales, dirigidas a establecer correspondencias e inferencias acerca de relaciones de similitud más complejas. El razonamiento analógico se configura gracias a varias operaciones mentales que son especialmente importantes en un sentido amplio de la

cognición humana, tales como la comparación, el análisis, la síntesis, la generalización, la clasificación, y la identificación de relaciones causa-efecto. La riqueza de esta actividad cognitiva encuentra en el principio de sistematicidad un efecto catalizador.

El problema de demostrar el Teorema 2, invita a reflexionar analógicamente acerca de dos cuestiones fundamentales. Por un lado, el razonamiento analógico ha favorecido el hallazgo de dos teoremas similares por los objetos a los cuales se refieren, y también por las propiedades que en ellos tienen lugar. Por otra parte, cabe preguntarse si también existen analogías entre las demostraciones de ambos teoremas. En la literatura pueden encontrarse numerosas formas de demostrar el Teorema 1, pero esencialmente están alejadas por su naturaleza y menor complejidad del aserto del Teorema 2. De forma general, aunque puede resultar una afirmación apresurada, no son visibles elementos de similitud entre ambos caminos de razonamiento.

El segundo aspecto está condicionado por el cálculo intermedio del área del triángulo de Morley, resultado elemental con cierto grado de complejidad. El lado de este triángulo equilátero tiene una expresión naturalmente simétrica para su longitud: $L = 8R\sin(\frac{\alpha}{3})\sin(\frac{\beta}{3})\sin(\frac{\gamma}{3})$, donde R es el circunradio del triángulo ΔABC y α, β, γ son las amplitudes de los ángulos $\angle A$, $\angle B$, y $\angle C$, respectivamente (ver Conde, 2004). El hexágono $PR'QP'RQ'$ está compuesto por el triángulo ΔPQR (primer triángulo de Morley) y por tres triángulos $\Delta PQR'$, $\Delta QRP'$, y $\Delta RPQ'$, los cuales puede verificarse que son isósceles con sus bases ubicadas respectivamente sobre los lados PQ, QR, y RP, todas de longitud L. El área del hexágono puede calcularse por medio de la suma de las áreas de estos cuatro triángulos que lo componen. La expresión resultante es la siguiente:

$$A_{PR'QP'RQ'} = 16R^2\sin^2(\tfrac{\alpha}{3})\sin^2(\tfrac{\beta}{3})\sin^2(\tfrac{\gamma}{3})\left[\sqrt{3}+\tan(\tfrac{\pi-\alpha}{3})+\tan(\tfrac{\pi-\beta}{3})+\tan(\tfrac{\pi-\gamma}{3})\right].$$

Después de sustituir $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ se obtiene la siguiente función dependiente de la longitud a del lado BC, y de los ángulos β y γ:

$$f_{(a,\beta,\gamma)} = A_{PR'QP'RQ'} = \frac{4a^2\sin^2(\frac{\pi-\beta-\gamma}{3})\sin^2(\frac{\beta}{3})\sin^2(\frac{\gamma}{3})\left[\sqrt{3}+\tan(\frac{\beta+\gamma}{3})+\tan(\frac{\pi-\beta}{3})+\tan(\frac{\pi-\gamma}{3})\right]}{\sin^2(\beta+\gamma)}.$$

Con iguales argumentos, es posible expresar el área del triángulo original como una función $A_{\Delta ABC} = g_{(a,\beta,\gamma)}$, donde $g_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{a^2}{2(\cot\beta+\cot\gamma)}$. Así, demostrar el Teorema 2 equivale a demostrar que la siguiente función $h_{(a,\beta,\gamma)} = \frac{1}{10}g_{(a,\beta,\gamma)} - f_{(a,\beta,\gamma)}$ es estrictamente positiva para todos los valores posibles del argumento, donde a, β, γ son reales positivos y $\beta + \gamma < \pi$. Realmente, es posible prescindir del factor a^2, prefijando $a = 1$ sin pérdida de generalidad salvo semejanza. Para amplitudes de los ángulos $\angle A$ y $\angle B$ cercanas a cero, la función h produce valores cada vez más pequeños. Por ejemplo, $h_{(1,\,0.01,\,0.01)} = 0.000245\ldots$ La Figura 4 ilustra el comportamiento de $h_{(1,\beta,\gamma)} = h_{(\beta,\gamma)}$ sobre la región triangular abierta $\Psi = \{0 < \beta, 0 < \gamma, \beta + \gamma < \pi\}$. La cercanía de la función al plano $h = 0$ sugiere que el Teorema 2 es una especie de caso límite del Teorema 1, considerando variaciones continuas en los pies de las cevianas.
Concluido este análisis, puede repetirse de forma dinámica el ciclo expresado en la Figura 1. Al finalizar dicho ciclo es posible imaginar nuevos problemas pues, como señala Silver (1994), el planteo de problemas ocurre siguiendo dos variantes fundamentales: formulando un nuevo problema o reformulando un problema dado. La descripción anterior ha enfatizado la primera variante por el camino del razonamiento analógico, pero la segunda también permite el desarrollo de ideas interesantes y creativas. Al tener dos problemas análogos, el pensamiento matemático podría sugerir la reformulación de ambos, también por caminos análogos.

Demostrar la propiedad ilustrada en la Figura 4 constituye una reformulación analítica del nuevo problema. Luego de mapear esta idea “hacia atrás”, podría imaginarse un problema similar en el objeto original, donde la función que sirve de modelo es necesariamente constante. Determinar cuán interesante y complejo es el nuevo problema, constituye un aspecto relativo y singular. Lo más trascendente en el orden epistémico reside en las posibilidades amplias de exploración y búsqueda de nuevos problemas. Al respecto, en su *How to Solve It*, Pólya señaló que:

[…] Encontrar un nuevo problema que sea interesante y accesible, no es fácil; necesitamos experiencia, buen gusto y suerte. Sin embargo, no debemos dejar de buscar otros problemas nuevos cada vez que hayamos logrado resolver uno. Los buenos problemas y ciertas clases de setas tienen algo en común, crecen en racimos. Habiendo encontrado uno, deberías mirar alrededor; hay una buena posibilidad de que haya algunos bastante cerca (Pólya, 1957, p. 65).

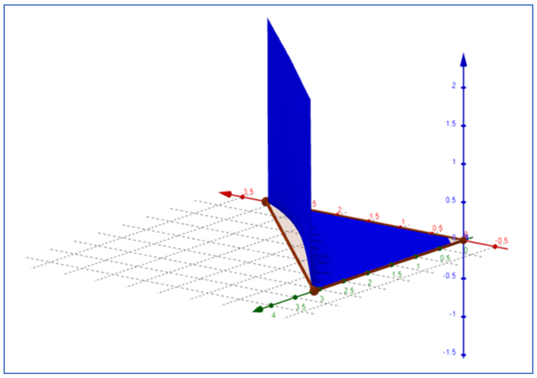


Figura 4. *Una visualización del resultado expresado en el Teorema*

Conclusiones

El planteo analógico de problemas expresa un vínculo entre dos aspectos relevantes de la actividad matemática: por una parte, el hallazgo de nuevos problemas y por otro el establecimiento de analogías. Ambos procesos son importantes en la formación matemática de los estudiantes, pero no han sido suficientemente desarrollados. El presente trabajo ha tomado como centro el primero de ambos aspectos, mostrando la utilidad de la estrategia metacognitiva SCABV+T, donde los procesos analógicos pueden ser explicados con la ayuda del mapeo estructural de Gentner (1983). Este enfoque ha mostrado una notable coherencia entre ambos rasgos del pensamiento matemático, donde las conexiones más fuertes se observan por intermedio de la etapa de transformación. No puede afirmarse que esta relación es única, pues se dejaría fuera la búsqueda de analogías entre objetos matemáticos seleccionados sin conexión previa, o sea, sin que uno de ellos se imagine a partir de otro. Sin embargo, el razonamiento analógico entre objetos desligados a priori también puede ser descrito dentro de la estrategia SCABV+T, donde la etapa inicial de selección involucra un objeto nuevo e independiente. Con el despliegue del subproceso clasificación-asociación-búsqueda comienza una actividad cognitiva que puede conllevar al hallazgo de analogías, en el sentido de mapear propiedades y relaciones por intermedio de predicados. Si este subproceso no tiene lugar, entonces es difícil transferir problemas análogos de un objeto a otro. Además, los niveles de complejidad de las analogías se corresponden directamente con los niveles de complejidad de los ciclos y también de los predicados mapeados.

Para investigaciones posteriores es interesante profundizar en otros aspectos del planteo analógico de problemas. Por ejemplo, el tipo de analogía conforme a alguna clasificación, como podría ser la diferenciación entre analogías entre propiedades y entre relaciones, lo cual se conecta con dos formas lógicas del pensamiento: los juicios y los razonamientos. Otro elemento por considerar consiste en la relación creatividad/planteo, donde la flexibilidad se relaciona directamente con la capacidad para efectuar transformaciones, mientras que la fluencia está ligada estrechamente a las etapas de clasificación y asociación de propiedades. En este último caso, la fluencia se conecta de forma directa con otra forma lógica del pensamiento: los conceptos. Un conocimiento profundo del objeto analizado favorece la fluidez en la identificación de componentes y propiedades, pero no necesariamente la determina. Finalmente, otro elemento notable consiste en la elaboración de instrumentos válidos y fiables que faciliten la evaluación de la estrategia SCABV+T, a fin de identificar dónde y cómo ocurren los razonamientos analógicos.

Referencias bibliográficas

Abdulla, A. M., & Cramond, B. (2018). The creative problem finding hierarchy: a suggested model for understanding problem finding. *Creativity*, 5(2), 197-229. doi: 10.1515/ctra-2018-0019

Bernardo, A. B. I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150. doi: 10.1080/01443410020043841

Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice* (pp. 103-123). New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4614-6258-3

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1983). *The Art of Problem Posing*. New Jersey: Erlbaum.

Cai, J., Jiang, C., Hwang, S., Nie, B., & Hu, D. (2016). How do textbooks incorporate mathematical problem posing? An international comparative study. In P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives* (pp. 3-22). Switzerland: Springer. doi: 10.1007/978-3-319-28023-3

Conde, J. M. (2004). Teorema de Morley. *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, 14. https://www.oei.es/historico/oim/revistaoim/numero14.htm

Cruz, M., García, M. M., Rojas, O. J., & Sigarreta, J. M. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education*, 17(2), 84-90.

Cruz, M. (2019). Aprendiendo a plantear nuevos problemas. Una Experiencia con GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 468-477.

English, L. D., Fox, J. L., & Watters, J. J. (2005). Problem posing and solving with mathematical modeling. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 156-163. https://eprints.qut.edu.au/3475/

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. Routledge: Taylor & Francis.

Espinoza, J., Segovia, I., & Lupiáñez, J. L. (2018). Variables de estudio para caracterizar las producciones de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1132-1138. https://clame.org.mx/uploads/actas/alme31_2.pdf

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: a theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7(2), 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Mallart-Solaz, A. (2018). Interés de los futuros maestros en saber crear problemas de matemáticas para enseñar a resolverlos. *Psicología Educativa*, 25(1), 31-41. doi: 10.5093/psed2018a17

Melis, E. (1993). *Change of Representation in Theorem Proving*. SEKI-Report SR-93-07. Universität der Saarlandes, Saarbrücken. doi: 10.1.1.53.6811

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics] (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1957). *How to Solve It: A new Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Schlimm, D. (2008). Two ways of analogy: Extending the study of analogies to mathematical domains. *Philosophy of Science*, 75(2), 178-200. doi: 10.1086/590198

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28. http://www.jstor.org/stable/40248099

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2012). Creativity and mathematical problem posing: an analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201-221. doi: 10.1007/s10649-012-9419-5

Villafiorita, A. (1996). *Reasoning by Analogy via Abstraction*. Technical Report MRG/DIST # 96-0030. University of Ancona.

ENFOQUE INTEGRAL PARA MODELAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

INTEGRAL APPROACH TO MODEL AND SOLVE OPTIMIZATION PROBLEMS

Rogelio Paulino Acosta González, Osvaldo Almeida Conde, José Acosta Velázquez
Universidad de Las Tunas (Cuba)
racosta@ult.edu.cu, osvaldoac@ult.edu.cu, joseav@ult.edu.cu

Resumen
Se presenta una colección de diez problemas de optimización, que se pueden modelar utilizando funciones reales de una variable real. Cada uno se resuelve de tres formas, complementarias entre sí: formalmente, asumiendo una metodología tomada de un texto; dinámicamente, mediante una actividad con GeoGebra, que proporciona una solución numérico-geométrica, y de forma interactiva, para lo que se aprovechan las posibilidades de animación de Power Point, en la que el problema se resuelve paso a paso, con un sistema de ayudas. El objetivo de este enfoque integral es contribuir al desarrollo en los estudiantes de las capacidades para resolverlos.

Palabras clave: problemas de optimización, solución, enfoque integral

Abstract
This paper presents a collection of ten optimization problems which can be modeled by using real functions of a real variable. Each one is solved in three ways, complementary to each other: formally, assuming a methodology taken from a text; dynamically, through an activity with GeoGebra, which provides a numerical-geometric solution; and interactively, taking advantage of the Power Point animation possibilities, in which the problem is solved step by step, with a system of aids. The objective of this integral approach is to contribute to the development of the students' abilities to solve optimization problems.

Keywords: Problems of optimization, solution, integral approach.

Introducción

A Newton (1642 – 1727) y a Leibniz (1646 – 1716) se les considera los fundadores del Cálculo Infinitesimal, lo que los sitúa entre los más brillantes matemáticos de la Historia (Ribnikov, 1987). En lo que no parece haber acuerdo es en una cuestión más bien filosófica, relativa a si ellos lo *crearon* o *inventaron* o si, simplemente, lo *descubrieron* (Matijasevic, 2010).

Al margen de cuál de esas dos posiciones se asuma, lo que también se acepta por todos es que ambos, y sus continuadores, proporcionaron a la Ciencia herramientas de análisis, interpretación y cálculo muy eficientes que, aplicadas en las más diversas áreas del conocimiento y de actividad, han permitido avances espectaculares y desvelar muchos secretos que sin ellas habría sido muy difícil conseguir. Siglos de utilización intensa y sistemática no las han agotado y es presumible que no las agotarán en el futuro.

Una de las herramientas más poderosas de ese Cálculo es la *derivada*, instrumento por excelencia para el estudio del cambio y del movimiento. Entre las áreas en las que este concepto se aplica con particular éxito está la resolución de los llamados *problemas de optimización*. No es casual entonces que el título de uno de los trabajos esenciales de Leibniz (1684) sea: *A new method for finding maxima and minima, and likewise for tangents, and with a single kind of calculation for these, which is hindered neither by fractions nor irrational quantities*, con lo que hace una mención explícita a la utilización de su *nuevo método* para la determinación de máximos y mínimos, que es lo que en definitiva se procura en esos problemas.

Hace veinte años Raúl Delgado (1999) fundamentó que en los cursos de Cálculo Diferencial en una variable —componente clave de las disciplinas de Matemática Superior que forman parte de los currículos de muchas carreras universitarias— todos los problemas que se consideran se clasifican en cuatro categorías básicas: *aproximar*, *optimizar*, *graficar* y *comparar* (1999). Se puede estar de acuerdo o puede discreparse, pero lo cierto es que forman un cuarteto muy importante. Entre ellos, a *optimizar* siempre se le ha dedicado mucha atención; en particular, es responsable de que en los currículos aparezcan adicionalmente otros contenidos relacionados, que es imprescindible desarrollar con antelación y que luego se tienen que recuperar para utilizarlos en la resolución de esos problemas, como son los que se modelan con funciones reales de una variable real, lo que les confiere mayor relevancia por requerir e integrar muchos conceptos y procedimientos. De hecho, casi la totalidad de los contenidos que se desarrollan en un curso de Cálculo Diferencial intervienen o pueden intervenir para modelarlos y resolverlos.

Eso explica, por ejemplo, que en el Plan de Estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial se incluya de forma explícita, entre los conocimientos esenciales a adquirir y entre las habilidades principales a dominar, la aplicación de la derivada a la resolución de problemas de optimización, aunque también se plantea la necesidad de incorporar asistentes matemáticos como herramientas para los cálculos, representaciones y análisis de problemas matemáticos, así como para interpretar conceptos, obtener y comparar resultados, sacar conclusiones y resolver problemas. De igual forma, se contempla la aplicación de métodos numéricos de resolución (Cuba. Ministerio de Educación Superior, 2018).

Los documentos rectores de otras muchas carreras de Ciencias Técnicas pudieran citarse para mostrar que el tratamiento que se da a todos estos contenidos es similar, en cuanto a la relevancia que se concede a esos problemas, a su resolución analítica "exacta", utilizando las herramientas del Cálculo Diferencial, o "aproximada" con métodos numéricos, y al papel que en ese proceso deben desempeñar los asistentes matemáticos. Los entrecomillados tratan de ilustrar el carácter relativo de esas palabras; por ejemplo, un problema hipotético que tuviera su solución *exacta* cuando un parámetro o variable tome el valor $\sqrt{3}$, es *aproximado* si se atiende a que luego se deberá utilizar alguna aproximación de este número irracional, a los efectos de darle aplicación o significado práctico.

En el trabajo que se presenta se toma en cuenta la importancia intrínseca de los problemas de optimización que se modelan con funciones reales de una variable real, tanto por la significación que tienen al interior de la Matemática como en sus múltiples aplicaciones fuera de ella. También se atiende al papel "movilizador e integrador" de contenidos y de recursos que se revela a la hora de resolver uno de tales problemas, entre los que se incluyen las aplicaciones informáticas que intervienen o pueden intervenir en ese proceso.

El objetivo que se plantea es mostrar que es posible y conveniente conseguir una mirada múltiple para la resolución de uno de estos problemas, en el sentido de abordarlos con distintos enfoques, complementarios entre sí, con la clara intención de proporcionar un tratamiento integral que pueda hacer una contribución al desarrollo, en cada estudiante, de la capacidad para resolverlos, para favorecer así su aprendizaje.

En el trabajo se obtiene la solución de un problema de optimización siguiendo un *enfoque formalizado*, tradicional, como el que es posible encontrar en la bibliografía disponible sobre esta temática. Llevarlo a cabo presupone asumir una metodología adecuada de resolución, como la que aparece en el libro *Cálculo con Trascendentes Tempranas* (Stewart, 2009), el texto básico para las carreras de Ciencias Técnicas en Cuba, que fue por la que se optó para aplicarla en los diez problemas seleccionados.

Una *limitante* a señalar es que la solución del problema aparece entonces de una vez, como algo acabado, lo que pudiera crear la dificultad de que no siempre se consiga involucrar al estudiante en el proceso, por percibir que todo está hecho, que a él solamente le corresponde leer y observar lo que otro hizo y tratar de aprender por imitación o analogía. A *favor* un argumento esencial: si se procede como en los libros, pueden esperarse resultados positivos, puesto que siempre se han utilizado con éxito, con mucho éxito, para estudiar y aprender.

Adicionalmente, un problema del que se dispone o puede disponerse de su solución, que se obtuvo o puede obtenerse siguiendo el enfoque formal ya expuesto, se considera en un *ambiente interactivo*, como el que debería caracterizar a un aula o a un equipo de estudio, en el que la persona que conduce la actividad usualmente fomenta la participación de los demás mediante preguntas y otros requerimientos, previos a la formalización de cada resultado, de manera que la solución se consiga paso a paso, para que se vaya construyendo en un ejercicio en el que todo tiene que hacerse desde el principio.

La cuestión entonces es la siguiente: ¿Qué posibilidades debe poseer un medio didáctico para permitir esas interacciones, no ya entre varios individuos (que es lo deseable ya que no se descarta la cooperación), sino básicamente entre la persona que tiene que aprender y el contenido objeto de aprendizaje?

Afortunadamente, muchos medios didácticos con tecnología informática pueden hacerlo posible. De hecho, aunque los profesores se quejan a diario de que sus alumnos no estudian lo que debieran, la realidad es que son muchos los aprendizajes que ellos llevan a cabo de forma autónoma o con poca ayuda, sobre contenidos que pudieran considerarse poco académicos, pero que les son importantes, les resultan atractivos y por eso motivantes. El asunto deriva entonces en hacer igual de motivante lo que se quiere que aprendan. Precisamente, aquí se propone un medio en el que utilizando las múltiples opciones de animación de Power Point, se consigue un grado de interactividad que pudiera ser suficientemente atractivo a los estudiantes, para de esa forma favorecer que aprendan a resolver problemas de optimización. No simplifica esa tarea, tampoco la hace menos compleja, pero tiene muchas prestaciones, en un ambiente de trabajo que se considera cómodo y agradable, y quizá por todo ello los estudiantes se animen a usarlo.

Finalmente, se logra un *enfoque dinámico* mediante una actividad elaborada con el software GeoGebra, en la que se resuelve de forma geométrica - numérica un problema (preferiblemente el mismo problema) aprovechando sus posibilidades de representación gráfica y de movimiento, que se expresan en cambios que pueden conseguirse y visualizarse en la posición, la forma, la cantidad y el color, todo lo cual permite focalizar la atención sobre aspectos esenciales. De esta manera, este enfoque es complementario, porque incorpora esas opciones dinámicas que, en general, no son posibles en los otros.

En resumen, se llevan a cabo tres abordajes para resolver un problema de optimización: *formal*, como el que se sigue usualmente en un libro de texto; *interactivo*, utilizando un archivo con prestaciones para ello, en formato pps; y *dinámico*, mediante la ejecución de una actividad con GeoGebra. Se insiste en que este enfoque integral pudiera contribuir al desarrollo de las habilidades que permitan a los estudiantes trabajar con éxito en la resolución de estos problemas.

Desarrollo

Estructura del trabajo y criterios para la selección de los problemas

La primera tarea desarrollada fue seleccionar los problemas que luego serían resueltos de las tres formas descritas. Varios fueron los criterios empleados; aunque son tres los principales. La primera característica fue que fueran *geométricamente representables*, lo que debe entenderse en el sentido de que fuera posible construir una gráfica o diagrama como figura de análisis, y que pudiera transformarse, modificando alguno de sus elementos, lo que a su vez debería tener una expresión en los cambios numéricos que se produjeran en las cantidades involucradas; en particular, en aquella cuyo óptimo se está buscando.

Otro criterio utilizado fue atender a la *relevancia práctica*. Cada problema (o su solución) debería poderse relacionar con un contexto práctico posible, ya sea por su propia naturaleza o por alguna interpretación razonablemente creíble, legítima, que de él se pudiera hacer, de manera que se renunció a aplicaciones que resultaran demasiado forzadas. En calidad de ejemplo puede servir uno de los problemas elegidos, que se formula así:

> *Problema 4*
> Un triángulo tiene vértices en $A\ (0,8)$ y $B\ (9,4)$. Elegir el vértice C en el eje x de manera que sea mínima la longitud de la poligonal ACB.

Es claro que el problema, formulado de esa forma, no parece tener un valor que sobrepase su utilidad como un ejemplo más, que puede ser resuelto *formalmente*, de forma *interactiva* o bien ejecutando una actividad *dinámica* elaborada para ese propósito con GeoGebra. Incluso, las coordenadas de los puntos A y B se escogieron con la intención de que sea entera (igual a seis) la abscisa del vértice C, donde se alcanza el mínimo, de forma que no hubiera demasiadas complicaciones de cálculo. No obstante, su solución permite interpretarlo en términos de un fenómeno tan común e importante como es el de la reflexión de la luz, que cuando se produce en el mismo medio óptico lo hace siguiendo una trayectoria de longitud mínima, lo que determina la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión y recíprocamente. A todos estos hechos se apela una vez resuelto y es lo que le confiere una significación práctica genuina.

Los problemas *no podían ser paramétricos*, dado que en GeoGebra cualquier representación gráfica que se muestre en la vista gráfica, así como las cantidades que caracterizan a los objetos geométricos que en ella aparecen siempre son específicas, concretas, nunca pueden ser generales, así que ello obliga a que las formulaciones también sean específicas. Por eso es que en el problema anteriormente expuesto se tuvieron que dar las coordenadas numéricas de los vértices A y B, porque en otro caso no habría posibilidad alguna de darle una solución numérica en una actividad elaborada con este software.

Esa fue la situación que se enfrentó al considerar un problema general, que aparece con bastante frecuencia en la bibliografía, que es el de *inscribir el rectángulo de área máxima en una elipse cualquiera*, determinada por las longitudes de sus semiejes mayor a y menor b, sin precisarlos, es decir, como parámetros. Se tuvo que formular para una elipse con los semiejes $a = 5$ y $b = 3$ para poder incluirlo en la propuesta.

Lo que puede resultar paradójico, y que podrá observarse más adelante (en las figuras 4 y 5), es que la actividad con GeoGebra que se elaboró, para darle solución numérica - geométrica al problema particular que corresponde a esos semiejes, tiene la opción para decidir introducir libremente las longitudes de los semiejes, dentro de cierto rango que se estableció dados los objetivos didácticos planteados. Así se tiene la posibilidad de resolver muchos problemas, lo que brinda información concluyente sobre la solución en el caso general, paramétrico, que se está obviando.

Esa actividad está publicada en el sitio www.geogebra.org bajo un nombre relativamente largo: *rectángulo de área máxima inscrito en elipse.ggb*, y es el que se utiliza para ilustrar el enfoque *dinámico*. Se elaboró una actividad similar para cada uno de los restantes problemas.

Resolución formalizada de un problema de optimización

Como se planteó, se asume la metodología que aparece en el libro *Cálculo con Trascendentes Tempranas*, que se transcribe a continuación.

Pasos para la solución de problemas de optimización

1. Comprenda el problema El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?
2. Dibuje un diagrama En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
3. Introduzca notación Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamémosla Q por ahora). Asimismo, seleccione símbolos (a, b, c, …, x, y) para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos. Puede ayudar el uso de iniciales como símbolos sugerentes; por ejemplo, A para el área, t para el tiempo.
4. Exprese Q en términos de algunos de los otros símbolos del paso 3.
5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar relaciones (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. Enseguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta suerte, Q se expresará como función de una variable x, digamos, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.
6. Aplique los métodos de las secciones 4.1 y 4.3 para hallar el valor máximo o mínimo *absoluto* de f. En particular, si el dominio de f es un intervalo cerrado, entonces se puede utilizar el método del intervalo cerrado de la sección 4.1. (Stewart, 2009, p. 329-330)

La propuesta se describirá a partir de un caso particular del problema general de determinar el rectángulo de área máxima inscrito en una elipse, que se formuló en los siguientes términos:

> *Problema 5*
> Inscribir el rectángulo con la mayor área posible en una elipse cuyos semiejes a y b tienen longitudes $a = 5u$ y $b = 3u$.

Resolución

Una lectura cuidadosa permite concluir que es un problema de *máximo* (lo que se infiere de la frase *mayor área posible*), siendo el *área* de un rectángulo la cantidad a maximizar (paso 1).

El rectángulo en cuestión está inscrito en una elipse cuyos semiejes tienen longitudes $a = 5u$ y $b = 3u$, así que lo mejor es hacer un dibujo que ilustre estos hechos, como es el que aparece a la derecha, en la figura 1 (paso 2).
La introducción de un sistema de coordenadas con el origen situado en el centro de la elipse, cuyos ejes contienen a los ejes mayor y menor de esta curva, toma en cuenta los pasos 3, 4 y 5, lo que entonces permite hacer corresponder cada uno de los vértices del rectángulo con sus coordenadas.

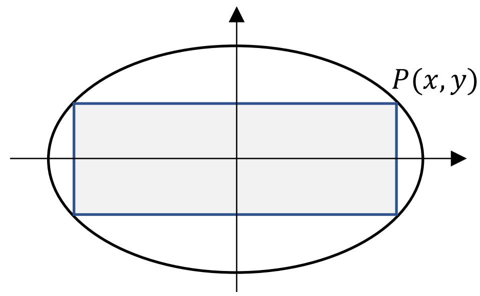


Figura 1. Rectángulo inscrito en elipse

Ya definida la abscisa y la ordenada de uno de los vértices con relación a ese sistema de referencia, se determinan de forma automática, por simetría axial o central, las coordenadas de los tres restantes. Por eso es que solo se colocaron las coordenadas del situado en el primer cuadrante: $P(x, y)$, donde $y > 0$ y $x > 0$. Con estas consideraciones se cumplimenta el paso 3.

A partir de las coordenadas de P, se obtiene con facilidad una expresión para el área del rectángulo inscrito en función de ellas: $A(x, y) = 4xy$ (paso 4), atendiendo a que las longitudes de la base y de la altura son $2x$ y $2y$, respectivamente. Quizá el mejor argumento, para confirmar que esa fórmula es correcta, sea observar que los ejes descomponen el rectángulo inscrito en otros cuatro de igual área; y la del situado en el primer cuadrante está dada por el producto xy.

Una razón adicional para la introducción de ese sistema de coordenadas cartesianas es que permite tener para la elipse una ecuación muy simple: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, en la que se puede despejar con facilidad una de las variables. Notar en la figura 1 que se optó por colocar el eje mayor sobre el eje de las x. La otra posibilidad para obtener una ecuación igual de sencilla, hubiera sido situar el eje mayor contenido en el eje de las ordenadas.

Al despejar la variable y en la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, se obtiene que $y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$, donde se toma la raíz positiva atendiendo a que el vértice P está sobre la parte de la elipse situada en el semiplano $y > 0$. Tomando en cuenta estas consideraciones, se determina finalmente para el área del rectángulo inscrito la expresión $A(x) = \frac{12}{5}x\sqrt{25 - x^2}$, lo que la define como función de la abscisa x en el intervalo abierto $(0, 5)$. Todo lo anterior da cumplimiento al paso 5.

Ya como parte de la aplicación de los métodos analíticos para la determinación del máximo de $A(x)$ (paso 6), se observa que $A(0) = A(5) = 0$, una doble igualdad numérica que resulta de la sustitución formal de esos argumentos en la expresión del área en función de la abscisa x, pero a la que es posible dar una interpretación trivial en términos geométricos; en efecto, tanto en el caso en que $x = 0$ como para $x = 5$, no hay rectángulo inscrito, dado que él degenera en un segmento contenido en el eje de las y o bien contenido en el eje de las x, respectivamente; el área de cualquiera de ellos (la de todo segmento) es igual a cero.

Las observaciones realizadas permiten considerar la situación más simple de obtener el máximo de $A(x)$ en $[0, 5]$ (simple se debe entender en el sentido de que así se garantiza la existencia de sus extremos). Luego, puede aplicarse el método del intervalo cerrado, mencionado en el paso 6.

Como $A(0) = A(5) = 0$ y $A(x)$ es continua en $[0, 5]$ y positiva en su interior $(0, 5)$, se puede concluir que alcanza el máximo en algún número de este intervalo abierto (se enfatiza que no puede tomar el máximo en los extremos por anularse en ellos). Adicionalmente, como es derivable en este intervalo, en virtud del teorema de Rolle, se concluye que ese número en el que es máximo el valor de $A(x)$ es un cero de su derivada $A'(x)$.

Atendiendo a los conclusiones anteriores y a que $A'(x) = \frac{12}{5}\left[\sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right]$ se anula en $(0,5)$ solo en $x = \frac{5}{\sqrt{2}}$, se concluye que este es el número donde $A(x)$ alcanza el máximo. Con este valor, que es la abscisa del vértice P en el rectángulo inscrito de área máxima, se precisa su ordenada: $P\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, así como el valor máximo del área, igual a $30u^2$. Notar que esta cantidad es la mitad del área del rectángulo en el que se inscribe la elipse, de base la longitud $10u$ de su eje mayor y altura la de su eje menor $6u$.

Resolución interactiva de un problema de optimización: archivo optimiza.pps

En la figura 2 se incluyen partes seleccionadas de cuatro imágenes de una de las diapositivas de la presentación optimiza.pps, que es el archivo en el que se resuelven de forma interactiva los diez problemas incluidos en la propuesta; ellas corresponden al proceso de resolución paso a paso del problema que se está considerando. Deben verse en sentido descendente; sirven para ilustrar cómo funciona ese medio y algunas de las prestaciones que posee.

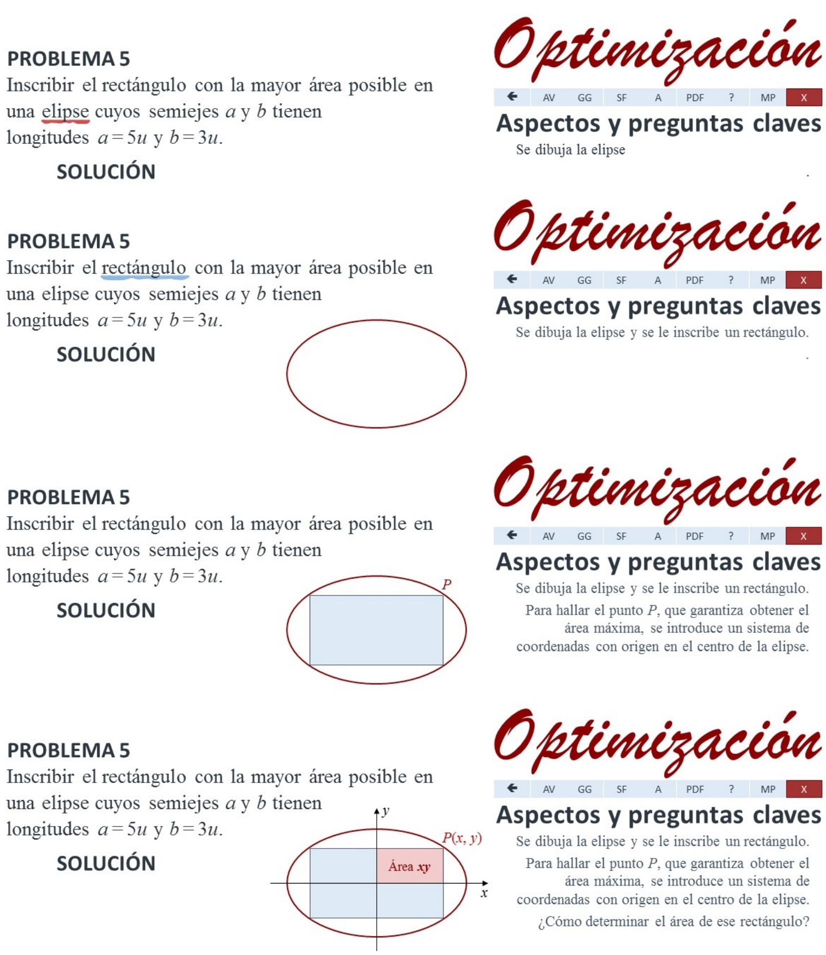


Figura 2. Composición con partes de algunas imágenes de una diapositiva de optimiza.pps

Si en la imagen situada arriba, en la figura 2, se ignoran el subrayado a la palabra elipse y el texto *Se dibuja la elipse*, se estaría frente a la diapositiva donde se formula el problema, como aparece al acceder a ella. Luego de un clic se visualiza esa imagen (hacer clic para iniciar el proceso de resolución lo indica la ayuda, para la que hay un botón disponible). Ese texto y distinguir a la elipse en el enunciado del problema constituyen impulsos o ayudas, porque se está focalizando la atención sobre esta curva, que es clave para la comprensión del problema, y se está señalando que debería dibujarse. Eso es precisamente lo que se pretende: que el ejecutor, antes de hacer alguna otra cosa, tome un lápiz y un papel y dibuje una elipse.

Además de la elipse, en esa imagen situada inmediatamente debajo, se observan nuevas ayudas. El clic mencionado condicionó el subrayado a la palabra rectángulo y la aparición del texto *y se le inscribe un rectángulo*. Se está entonces frente a la misma situación ya explicada, de manera que las pretensiones son las mismas: que se acuda de nuevo a la formulación del problema para comprenderlo y que se inscriba el rectángulo, para ir completando el diagrama o figura de análisis.

De nuevo, un clic permitirá mostrar un rectángulo inscrito en la elipse. Es lo que se observa en la tercera imagen, contada desde arriba. Notar que los colores se corresponden con los utilizados en los subrayados. También se ha señalado uno de los vértices del rectángulo con la letra P y está visible un nuevo impulso, dado mediante el texto *Para hallar el punto P, que garantiza obtener el área máxima, se introduce un sistema de coordenadas con origen en el centro de la elipse*. Aquí lo que se pretende es que se trace ese sistema antes de hacer alguna otra cosa.

Finalmente, en la última imagen en la figura 2, ya aparecen el sistema y las coordenadas de P, se ha señalado un rectángulo auxiliar en el primer cuadrante y, dentro de él, se ha expresado su área en función de la abscisa x (la base) y de la ordenada y (la altura). Ello tiene la intención de facilitar entender que el área del rectángulo inscrito estará dada por la expresión $A(x,y) = 4xy$, pero ya esa es una cuestión que no se aprecia completamente en la figura 2, aunque sí aparece un impulso relacionado con este asunto, mediante la pregunta: *¿Cómo determinar el área de ese rectángulo*?

El proceso de resolución se lleva a cabo de esa forma para cada problema, hasta que se haya determinado el óptimo; para el problema que se está considerando, concluye como se muestra en la figura 3.

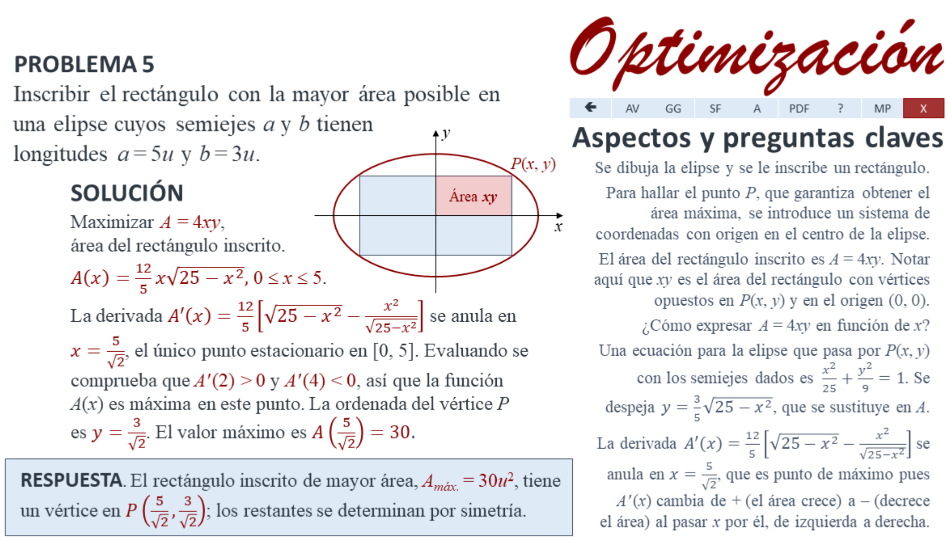


Figura 3. Imagen de la diapositiva de optimiza.pps con la conclusión del proceso de resolución.

Resta señalar que desde la presentación optimiza.pps se puede acceder a varias opciones. Destacar entre ellas: a la solución formalizada (con clic en el botón que contiene la sigla SF), a algunos datos de los autores (A), a una versión de las soluciones que en ella se dan (como la que aparece en la figura 3), en formato pdf (PDF), a valoraciones y análisis del problema y de la solución dada, que permite comentar posibles aplicaciones prácticas, presentar o mencionar otra vía de solución o alguna otra cuestión que se considere (AV) y a la actividad con GeoGebra (GG).

Resolución dinámica del problema: actividad con GeoGebra

En la figura 4 aparecen dos imágenes de vistas gráficas posibles durante la ejecución de la actividad *rectángulo de área máxima inscrito en elipse.ggb*, elaborada con el software GeoGebra. Arriba la imagen de la vista gráfica cuando se abre (si es que se guardó así, que es lo que se recomienda). Debajo la imagen que resulta luego de seleccionar tres de las casillas de control. Observar que si bien se tiene la opción de introducir libremente los valores de los semiejes, los que aparecen son los que se utilizaron al resolver el problema con los enfoques *formalizado* e *interactivo*.
En correspondencia con las casillas seleccionadas, también aparecen la elipse en un sistema de coordenadas en el que se incluye una malla o cuadrícula con escala unitaria, un rectángulo inscrito, su área y las coordenadas del vértice P, estos valores redondeados hasta dos cifras decimales. Aparece sin activar la casilla de control que precede al texto *Maximiza* A_R.

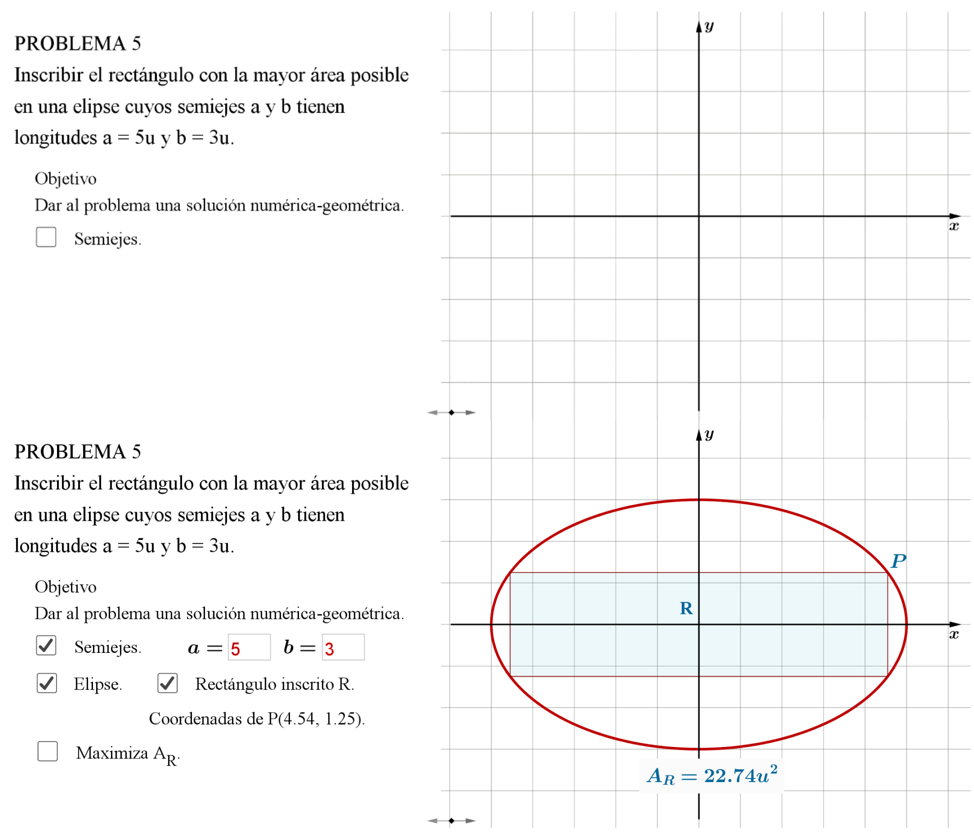


Figura 4. Imágenes de vistas gráficas parciales de la actividad *rectángulo … elipse*.ggb.

Falta activar la última casilla de control, que es la que permitirá maximizar el área, de acuerdo con el texto a su derecha. Al hacerlo, se tienen dos nuevas imágenes de la vista gráfica (figura 5).

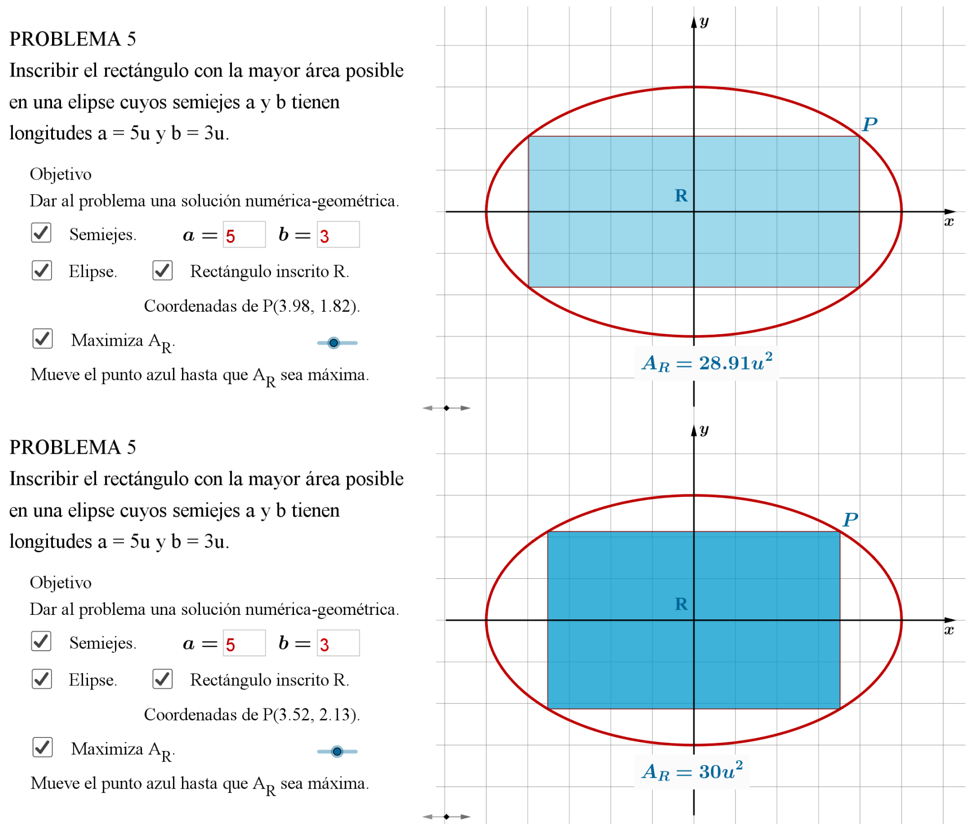


Figura 5. Imágenes de vistas gráficas para determinar el máximo usando *rectángulo … elipse*.ggb.

En la imagen de una vista gráfica intermedia, situada arriba en la figura 5, se observa que ya está seleccionada la última casilla de control, que hizo visible el *deslizador* con el punto azul y el texto *Mueve el punto azul hasta que* A_R *sea máxima*. Aparece un rectángulo, ya modificado luego de haber movido ese punto, lo que lógicamente también produjo cambios en el valor de su área y en las coordenadas del vértice P. La única forma de conocer que se alcanzó el máximo la da la observación cuidadosa de los valores que va tomando el área al mover ese punto. Adicionalmente, para la opacidad del rectángulo (la opacidad es la transparencia de su color de relleno) se utilizó la propiedad de colores dinámicos, así que mientras más próximo se esté de alcanzar el óptimo, menos transparente será (lo mismo: el azul utilizado estará más intenso), así que es información que da el color para complementar la numérica. La opacidad está en función del parámetro t, que es la variable definida por el *deslizador*, que es un intervalo contenido en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En realidad, toda la construcción depende de t; en particular, lo hacen las coordenadas de P: $P(5\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$.

Finalmente, abajo en la Figura 5, aparece la imagen de la vista gráfica que corresponde al rectángulo de área máxima (ya se conoce que su área es de 30 unidades cuadradas). En todas las actividades elaboradas se utiliza el mismo criterio con el color dinámico, de manera que un aumento en la intensidad de ese color azul (una disminución de la transparencia) es una señal de acercamiento al óptimo, lo que así complementa la información que se obtiene comparando los valores que se van observando de la cantidad variable que se esté optimizando. Así concluye la descripción de la resolución de un problema de optimización utilizando una actividad con GeoGebra, que es lo que se concibe o considera como abordaje o enfoque *dinámico* en la propuesta que se hace.

Conclusiones

Se han considerado tres enfoques complementarios para aplicar a la resolución de problemas de optimización que se modelan con funciones reales de una variable real, y se han elaborado medios didácticos que demuestran que esos abordajes son posibles. Fue necesaria una selección cuidadosa de los diez problemas utilizados, atendiendo a que los mismos tenían que satisfacer tres criterios: que admitieran una representación geométrica, que fueran relevantes desde el punto de vista práctico y que no dependieran de parámetro alguno.

Los materiales didácticos, que permiten la puesta en práctica de la propuesta, también pueden utilizarse como medios independientes. El uso de ellos en contextos adecuados de aprendizaje y para variados propósitos, podría contribuir al desarrollo de las habilidades que permitan conseguir que se aprenda a resolver estos importantes problemas. Será la práctica la que permitirá decidir finalmente si es válida o no la opción de abordar la solución de un problema en las formas descritas, así como qué utilización dar a los medios didácticos que forman parte del trabajo. Se tiene la esperanza de que sean de utilidad a profesores y estudiantes. No obstante, la propuesta que se hace debe verse como lo que es: unos enfoques y unos medios que podrían constituirse en un recurso más para enfrentar la complejidad inherente al aprendizaje matemático, en particular, la que está presente al tratar de resolver problemas de optimización como los que se consideraron.

Referencias bibliográficas

Cuba. Ministerio de Educación Superior. (2018). Plan de estudio E de la carrera de Ingeniería Industrial. La Habana.

Leibniz, G. W. (1684). A new method for finding maxima and minima, and likewise for tangents, and with a single kind of calculation for these, which is hindered neither by fractions nor irrational quantities. Actis Erud. Lips. Oct. p. 467-473. (Transl. Ian Bruce, 2014). Recuperado de: www.http://17centurymaths.com/contents/Leibniz/ nova1.pdf.

Matijasevic, E. (2010). Leibniz y Newton: la inercia de la soberbia. Acta Médica Colombiana, 35 (4), 157-165. Recuperado de: https:// www.academia.edu.

Ríbnikov, K. (1987). Historia de las Matemáticas. Moscú: Mir.

Stewart, J. (2009). Cálculo con trascendentes tempranas. La Habana: Félix Varela.

TÉCNICAS PARA RESOLVER TAREAS QUE IMPLICAN DEMOSTRACIÓN

TECHNIQUES FOR SOLVING TASKS THAT INVOLVE DEMONSTRATION

Maritza Luna Valenzuela[1], Saddo Ag Almouloud[2], Francisco Ugarte Guerra[2]
Pontificia Universidad Católica del Perú[1] (Perú), Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo[2] (Brasil)
luna.m@pucp.edu.pe, saddoag@gmail.com, fugarte@pucp.edu.pe

Resumen
En este artículo estudiamos los procesos (o técnicas) relacionados con la resolución de una determinada tarea en geometría que involucra pruebas y demostraciones para introducir a un nuevo tema. El objetivo es analizar la pertinencia de la tarea para lo cual se debe identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas (tecnología) que se utilizan para dar solución a dicha tarea. Para el análisis utilizamos la noción de praxeología de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y los conceptos de pruebas y demostraciones según Balacheff. Como resultado se detecta las técnicas y tecnologías utilizadas para resolver la tarea, se muestra las articulaciones de las tecnologías y además se identifica la dimensión ecológica peruana.

Palabras clave: vector, baricentro, teoría antropológica de lo didáctico

Abstract
In this article, we study the processes (or techniques) related to a specific geometry task that involves proofs and demonstrations to introduce a new topic. It is aimed at analyzing the relevance of the task; so, the types of processes and the mathematics (technological) tools used to give solution to such task should be identified. For the analysis, we used the notion of Praxeology of the Didactic Anthropologic Theory and the concepts of proofs and demonstrations according to Balacheff. Among the results, it was possible to find the techniques and technologies used to solve the task; to show the connections of the technologies; and to identify the Peruvian ecologic dimension, as well.

Key words: vector, barycenter, didactic anthropologic theory

Introducción

Dado un problema, durante el desarrollo de un contenido, se espera que el alumno lo resuelva utilizando los conceptos y propiedades presentados en esa sesión de clase, pero en matemáticas es posible que se presenten diversas soluciones, en algunos casos, siendo algunas de ellas no reconocidas o tomadas en cuenta, ya que no forman parte del contrato didáctico, dejando al alumno con interrogantes de como enlazar lo aprendido con lo que necesita aprender.

En este trabajo, se presenta, a modo de ejemplo, una tarea para alumnos del primer ciclo de una universidad particular peruana del área de ciencias e ingeniería que implica demostraciones. En dicha tarea se espera que el alumno deba resolver la tarea utilizando los vectores y sus propiedades, pero en este caso particular podemos ver que se puede resolver por otras técnicas, utilizando los conocimientos previos de ciertas herramientas matemáticas que traen de la formación media regular o nivel secundario.

La didáctica de las matemáticas advierte de la importancia de la buena elección de los problemas (situaciones, tareas) para un aprendizaje duradero (significativo), pero a veces esta elección se reduce a utilizar la técnica que el programa de estudio establece para dicha sesión, sin considerar otras alternativas, ¿qué hacer para evitar este fenómeno?

Para dar respuesta a esta interrogante debemos analizar las diversas soluciones presentadas que permitirán identificar y mostrar a la luz de la TAD algunas técnicas utilizadas y la tecnología empleada. Luego de dicha identificación se logra relacionar los contenidos utilizados de modo que se permitirá reconstruir una organización matemática, reconocer su tipo y analizarla con miras a plantear, más adelante, un modelo de referencia y una organización didáctica para la enseñanza de los vectores en las demostraciones.

Almouloud, Regnier y Silva (2009) indican que, en la última década, la importancia atribuida a pruebas y demostraciones en Matemática lleva a una enorme variedad de investigaciones en esa área. Consideran, usualmente, la demostración como un procedimiento de validación que caracteriza a la Matemática; y la distingue de las ciencias experimentales. La comprensión de la información dada en el enunciado de una proposición matemática es el reconocimiento de elementos cruciales conocidos como hipótesis y tesis, ambos son fundamentales para el proceso de construcción de una demostración.

Según Arenzana (1997) la geometría actual está expresada, en buena medida, en términos vectoriales. El autor indica que las nociones como las de producto escalar, vectorial, etc. son básicas para expresar teoremas geométricos y resultados científicos. Además, indica que las transformaciones y movimientos geométricos no solamente tienen su ecuación, sino que una operación con vectores puede representar un movimiento en el plano o en el espacio.

El objetivo que se aborda en este trabajo es identificar los tipos de procesos y las herramientas matemáticas que se utilizan para dar solución a una determinada tarea, así mismo, la relación entre las diversas maneras (técnicas) y herramientas (tecnologías) empleadas. Al mismo tiempo mostrar el alcance de la técnica (la economía) de utilizar vectores en la solución de la tarea frente a las diversas técnicas presentadas enmarcadas en la geometría.

Marco teórico

Para nuestro análisis, utilizaremos la TAD que según Chevallard: “se admite en efecto que toda actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo único, que se resume aquí con la palabra de *praxeología*” (1999, p. 2). Es decir, el nivel praxis o “saber-hacer" engloba un tipo de tareas y preguntas estudiadas, así como las técnicas empleadas para llevarlas a cabo. El nivel logos o “saber”, en el que los discursos describen, explican y justifican las tareas y técnicas, es llamado tecnología de la técnica. Toda tecnología necesita también de una justificación y se denomina teoría de la técnica (Bosch & Chevallard, 1999). Podemos ver en la figura 1 más detalles.

PRAXEOLOGÍA

PRAXIS + LOGOS

Saber hacer
PRÁCTICA

Saber
RAZÓN

Figura 1. Esquema estructura de una praxeología.

Chevallard (1998) define tipos de *Tareas* (T) como un conjunto de tareas (t), donde una tarea ($t \in T$) es una acción en un objeto específico que es ejecutado por alguien, definido por un verbo, llamado género de tarea. Además, el género de tarea es la acción que agrupa los tipos de tareas. *Técnica* (τ). Una técnica es la manera de resolver una tarea específica. *Tecnología* (θ). La tecnología es un discurso racional, cuya primera función es justificar la técnica τ, para ejecutar un tipo de tarea. Una segunda función de la tecnología es explicar la técnica para que ella sea inteligible. La última función de la tecnología es la producción de nuevas técnicas más eficientes y adaptadas para la resolución de una tarea específica. *Teoría* (Θ)**.** Es el discurso racional sobre la tecnología, esto es, aquella que justifica y explica las afirmaciones de la tecnología.

Es necesario tener presente que, alrededor de una tarea (T), se encuentra una técnica (τ) sustentada por una tecnología (θ), que a su vez es explicada por una teoría (Θ). Finalmente [$T/\tau/\theta/\Theta$] constituye que una praxeología puntual, relativa a un único tipo de tarea. Es decir, una praxeología está pues constituida por un bloque *práctico-técnico*, [T/τ], y por un bloque *tecnológico-teórico*, [θ/Θ].

Las praxeologías integradas a un saber matemático son la organización matemática (OM) y la organización didáctica (OD). La OM estudia la situación identificada en las tareas, técnicas, tecnología y teoría. La OD observa la manera como estas situaciones fueron constituidas, por intermedio de momentos de estudio. La noción de "momento" fue concebida por Chevallard (1999) para delinear una OD y está estructurada en seis etapas.

De acuerdo con Gascón (2011), la dimensión ecológica de cualquier problema didáctico incluye, de cierto modo, las dimensiones epistemológicas y económico-institucional. Se puede afirmar, desde el punto de vista de la TAD, que todo problema didáctico es, hasta cierto punto, un problema de ecología praxeológica o, y precisamente, que la didáctica se preocupa con el estudio de la ecología institucional de las praxeologías matemáticas y didácticas. Por ello, es necesario considerar las restricciones y condiciones impuestas por las praxeologías en todos los niveles de co-determinación. Identificamos que estos componentes se adecuan a los niveles de la disciplina (dominio, sector, tema e asunto).

Según Balacheff (1987), prueba es una explicación planteada por una comunidad. Demostración es una prueba realizada por matemáticos respetando ciertos criterios rigurosos de reglas o axiomas.

Metodología

Esta indagación sigue los procesos de los aportes de la TAD, que proponen determinar y analizar qué técnicas, tecnologías y teorías se aplican para realizar una determinada tarea, en el contexto de la geometría. Las soluciones se presentan considerando el desarrollo de la enseñanza del objeto matemático en contexto peruano Ello nos permitirá reconstruir una organización matemática, reconocer su tipo y analizarla con miras a plantear, más adelante, un modelo de referencia y una organización didáctica para la enseñanza de las demostraciones.

Procesos

Se presenta un ejemplo (tarea) y se muestran cuatro formas de realizar demostraciones sobre la intersección de medianas de un triángulo. Asimismo, en el análisis se explicará cada una de las formas, las propiedades y contenidos matemáticos utilizados. Se finalizará con la esquematización de las comparaciones y articulaciones de las técnicas, tecnologías y teoría encontradas en las demostraciones.

Análisis de los resultados

Para la tarea:

Demostrar que el centro de gravedad o baricentro de un triángulo cualquiera es igual al punto de concurrencia de las medianas.

Para cumplir esta tarea, presentamos una primera forma de demostración haciendo uso de la geometría sintética, es decir, la geometría euclidiana que se ocupa del estudio de figuras planas (líneas rectas, círculos, triángulos, etc.).

Técnica (τ_1)	**Tecnología** (θ_1)
Consideramos dos pasos para demostrar de que el baricentro de un triángulo *ABC* (denotado en adelante por ΔABC) concurre en un punto G: Primero, se demuestra que el punto *G* divide a las medianas en una razón de 2 a 1. Para ello, en el ΔABC trazamos la mediana desde el vértice A al punto medio N del lado *BC*, es decir, la mediana *AN* y del vértice *C* al punto medio *M* del lado *AB*, la mediana *CM*. Como estas dos medianas son dos segmentos no paralelos, se intersecan en un punto, denotemos por *G*. En efecto, si *M* es un punto medio de *AB*, entonces *AM* y *MB* tiene la misma medida, *m*. Si *N* es el punto medio del lado *BC*, implica que *BN* y *NC* tienen igual medida, *n*. Al trazar el segmento *MN,* obtenemos un triángulo ΔMBN. Considerando los triángulos ΔABC y ΔMBN, observamos que comparten el mismo ángulo $\measuredangle(ABC)$=$\measuredangle(MBN)$, también la razón $\frac{AB}{MB}=\frac{2m}{m}=2$ y $\frac{BC}{BN}=\frac{2n}{n}=2$. Por lo cual, el segmento *MN* es la mitad del lado *AC*, es decir, $AC=2MN$. Como satisface las condiciones del criterio de semejanza lado, ángulo, lado (LAL), entonces el triángulo ΔABC es semejante al triángulo ΔMBN. Además, la medida del $\measuredangle(CAB)=\measuredangle(NMB)$ y $\measuredangle(ACB)=\measuredangle(MNB)$, tenemos que $MN \parallel AC$ y el segmento MC corta a ambos segmentos, entonces por ángulos alternos internos $\measuredangle(CMN)=\measuredangle(MCA)=\varphi$ y $\measuredangle(MNA)=\measuredangle(CAN)=\delta$ y por opuestos por el vértice $\measuredangle(MGN)=\measuredangle(CGA)=\alpha$, lo que implica que $\Delta AGC\approx\Delta NGM$. La figura 2 muestra detalles. Es de notar que la	Concepto de punto medio Semejanza de triángulos. Teorema de Thales

razón $\frac{MG}{GC}=\frac{GN}{AG}=\frac{MN}{CA}$, y como $AC=2MN$, tenemos $\frac{MG}{GC}=\frac{GN}{AG}=\frac{MN}{2MN}$ ó $\frac{MG}{GC}=\frac{GN}{AG}=\frac{1}{2}$. Así, el punto *G* divide a cada mediana en una razón de 2 a 1.
Seguidamente, consideramos el teorema de Thales, para lo cual trazamos una línea que pasa por *B* y es paralela al lado *AC* y extendemos el segmento que pasa por *MN*. Como *AM* y *MB* guardan una razón de 1, al igual que *CN* y *NB*, por ser *M* y *N* puntos medios. Si la línea que pasa por el vértice *B*, la línea que pasa por *MN* y la línea que pasa por *AC* son paralelas, entonces la línea que pasa por *B* y *G* corta a la línea que pasa por *MN* en *H*, en una razón de 1; es decir, *BH* tiene la misma medida que *HP* (la figura 3). Dicho de otro modo, *H* es punto medio de *BP*.

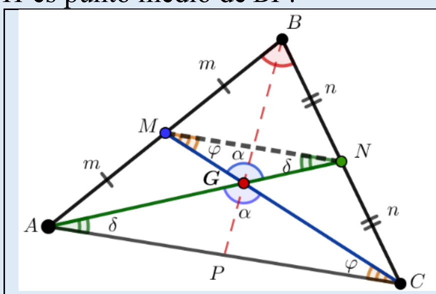


Figura 2. Semejanza de $\Delta AGC \approx \Delta NGM$.

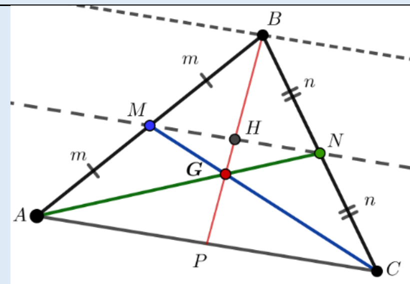


Figura 3. El punto *H* es un punto medio de *BP*.

Semejanza de triángulos

Trazando una línea que pasa por *G* y que sea paralela al lado *AC*. Como demostramos, *G* divide en razón de 2 a 1 al segmento *AN*, también a *CM* y, por tanto, también divide a *PH* en la misma razón. Es decir, *G* divide a *PB* en razón $\frac{4k}{2k}=\frac{2}{1}$ (ver figura 4).
Seguidamente, se demuestra G es el punto de concurrencia de las tres medianas, es decir, demostramos que *P* es un punto medio de *AC*. Para ello, trazamos el segmento que pasa por los puntos *N* y *P*. Como la medida del $\measuredangle(BGA)=\measuredangle(PGN)=\lambda$, por opuestos por el vértice. Además, los lados correspondientes están en razón de 2 a 1. Por el criterio de semejanza lado ángulo lado (LAL), tenemos que $\Delta AGB \approx \Delta NGP$. Así, *NP* es paralelo a *AB,* como se puede apreciar en al figura 5.
Por el punto *C,* trazamos una línea paralela al lado *AB*. Luego, trazamos la línea que pasa por el segmento *NP* y también la que pasa por *AB* y así podemos tener tres líneas paralelas a *AB* (figura 5).

Teorema de Thales

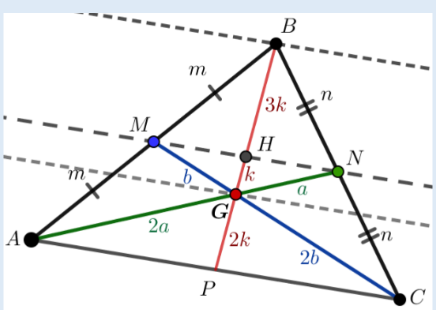
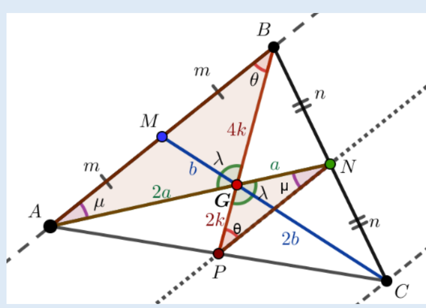


Figura 4. El punto *G* divide al segmento *PB* en razón 2 a 1.



<table>
<tr><td>Figura 5. Semejanza de triángulos ΔAGB y ΔNGP y líneas paralelas a AB.
Por el teorema de Thales planteamos que si BN y NC están a razón de 1, entonces AP y PC también mantienen esa misma razón. Por consiguiente, P es un punto medio de AC, lo que concluye la demostración de que G es el punto donde las tres medianas se intersecan.</td><td></td></tr>
</table>

A continuación, la demostración será realizada por la geometría analítica. Nos estamos refiriendo a la geometría plana, en donde se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas. En otras palabras, la Geometría de Euclides unida con el Álgebra y las figuras y cuerpos toman la forma de ecuaciones. Así, el baricentro deberá ser reescrito en términos de sus coordenadas cartesianas. Esto es:
Para todo triángulo, el baricentro (punto de intersección de las medianas) tiene como coordenadas: $G = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

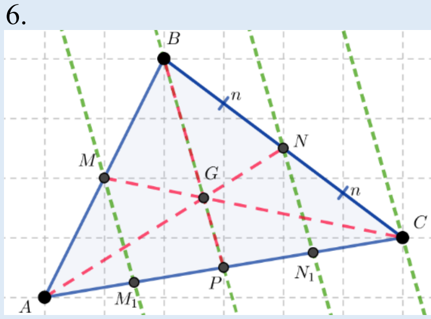
<table>
<tr><th>Técnica (τ_2)</th><th>Tecnología (θ_1)</th></tr>
<tr><td>Sea ΔABC un triángulo donde $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$, hallamos el punto medio de cada uno de los lados AC, AB y CB. Usando la fórmula del punto medio, tenemos $P = \left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$, $M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ y $N = \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ respectivamente.
En el plano cartesiano trazamos el triángulo ΔABC, sus tres medianas y líneas paralelas a una de las medianas; en este caso, consideramos las paralelas a la mediana BP. Una línea que pasa por el punto N, otra por C y una línea que contiene a la mediana BP. Por el teorema de Thales se cumple que la razón $\frac{BN}{NC} = \frac{PN_1}{N_1C}$, pero $BN = NC = n$, entonces $1 = \frac{PN_1}{N_1C}$, lo que implica que $PN_1 = N_1C$. Es decir, N_1 es punto medio de PC. De modo similar, se demuestra que al intersecar la línea que pasa por M y es paralela a BP, es el punto M_1. Los detalles se muestran en la figura 6.


Figura 6. El punto N_1 es un punto medio de PC.

Por el teorema de Thales tenemos que $\frac{MG}{GC} = \frac{M_1P}{PC}$, pero como $PN_1 = N_1C = M_1P = d$, entonces $\frac{MG}{GC} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$. Así, GC y MG están a razón de 2 a 1 o que G divide al segmento MC en razón 2 a 1. De modo análogo, se demuestra para las medianas AN y CM.</td><td>Punto medio

Teorema de Thales

División de un segmento por una rzón dada</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

A continuación, encontraremos las coordenadas del punto G. Consideramos la fórmula para hallar un punto de acuerdo a una razón r dada. Así, tenemos

$$x_G = \left(\frac{x_A + r x_N}{1+r}\right); \qquad y_G = \left(\frac{y_A + r y_N}{1+r}\right),$$

y como $r = \frac{AG}{GN} = 2$, reemplazando obtenemos

$$x_G = \left(\frac{x_A+2\left(\frac{x_B+x_C}{2}\right)}{1+2}\right) = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\right), \quad y_G = \left(\frac{y_A+2\left(\frac{y_B+y_C}{2}\right)}{1+2}\right) = \left(\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right).$$

</td>
<td></td>
</tr>
</table>

La siguiente demostración será realizada en la geometría vectorial, es decir, en la geometría que se ocupa del estudio de vectores (definido por una dirección, sentido y una longitud). La introducción de esta herramienta matemática hace posible, en particular, controlar la alineación de los puntos, el paralelismo o la perpendicularidad de las líneas, determinar las coordenadas de puntos particulares, de la distancia entre dos puntos, calcular ángulos, realizar operaciones algebraicas.

<table>
<tr>
<th>Técnica (τ_3)</th>
<th>Tecnología (θ_2)</th>
</tr>
<tr>
<td>

Demostraremos que el punto G, punto de intersección de las medianas, está a $\frac{2}{3}$ de cada vértice.

Dado un triángulo ΔABC donde podemos representar los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Sea G el punto de concurrencia de las medianas del triángulo ΔABC. El vetor $\overrightarrow{CM}$ representa la mediana que corresponde al lado AB y el vector $\overrightarrow{BP}$ corresponde a la mediana del lado AC. Entonces, tenemos $\overrightarrow{CG} = t\overrightarrow{CM}$, con $t \in \mathbb{R}$ y $t < 1$. El vector $\overrightarrow{GP} = s\overrightarrow{BP}$, con $s \in \mathbb{R}$. Los detalles podemos ver en la figura 7.

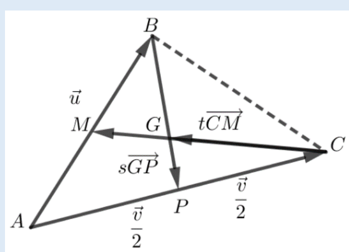


Figura 7. Vectores en el ΔPCG.

Si $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$ y $\overrightarrow{CG} = t\overrightarrow{CM} = t\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$, entonces los vectores en el ΔPCG, por la relación de Chasles podemos escribir como $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$

$t\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) + s\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$,

$t\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) + s\left(\frac{1}{2}\vec{v} - \vec{u}\right) = -\frac{1}{2}\vec{v}$,

$\left(\frac{1}{2}t - s\right)\vec{u} + \left(\frac{1}{2}s - t\right)\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

Lo que implica que $\frac{1}{2}t - s = 0$ y $\frac{1}{2}s - t = -\frac{1}{2}$ de donde: $t = \frac{2}{3}$ y $s = \frac{1}{3}$. De la misma manera, se procede para la otra mediana, demostrando que las medianas concurren a $\frac{2}{3}$ del vértice de donde inicia.

</td>
<td>

Punto medio

Propiedades de vectores

</td>
</tr>
</table>

La siguiente demostración será realizada en la geometría vectorial con coordenadas, la cual es una geometría analítica que utiliza como lenguaje matemático de expresión los vectores, un campo de direcciones que satisfacen un algebra definida. Estudia las propiedades de los objetos en el plano y en el espacio.

<table>
<tr><th>Técnica (τ_4)</th><th>Tecnología (θ_2)</th></tr>
<tr><td>

Se demostrará que el baricentro del triángulo es igual al punto de concurrencia de las medianas y esto corresponde a un vector, de referencia externa *O*, que es igual al promedio de los tres vectores de los vértices del triángulo. Considerando la figura 8, podemos visualizar la tarea a resolver.

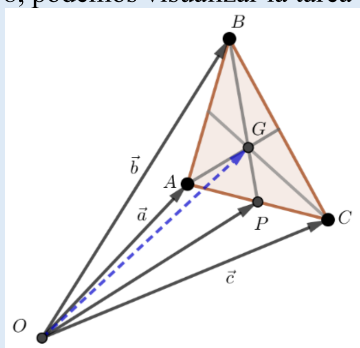


Figura 8. Vector baricentro de un triángulo.

Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$, y $\vec{c}$ ubican a los vértices del triángulo, *P* es el punto medio de *AC*, el punto *G* es el baricentro del triángulo. Por la demostración (forma 3), tenemos que el segmento *BG* esta a $\frac{2}{3}$ de la mediana *BP*. Por otro lado, el segmento *GP* es $\frac{1}{3}$ de la misma mediana. Entonces, presenta las siguientes ecuaciones $\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.

Y para determinar el vector que ubica el punto *G* consideramos lo siguiente: la notación de *punto ponderado* como la dupla (vector, razones de proporción respecto al baricentro) y para el baricentro entre dos puntos la propiedad : Si $\overrightarrow{OP} = (x_P, y_P)$, $\vec{b} = (x_{\overrightarrow{OB}}, y_{\overrightarrow{OB}})$ y *G* es el baricentro de los puntos ponderados $(\overrightarrow{OP}, r_1)$ y $(\vec{b}, r_2)$ entonces: $\overrightarrow{OG} = \frac{r_1\overrightarrow{OP}+r_2\vec{b}}{r_1+r_2}$, donde $r_2 = \frac{2}{3}$ y $r_2 = \frac{1}{3}$ son las razones con respecto al baricentro (Touré, Akele, Baye, Bendiman, Conde, Djiguiba, Don, Neulat, Traoré, 1997). Por lo tanto, tenemos:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\vec{b}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{b} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

</td><td>

Punto medio

División de un segmento por una razón dada

Propiedades de vectores

</td></tr>
</table>

Desde la perspectiva de la TAD, podemos identificar las cuatro técnicas usadas. Inicialmente, cada técnica parte de conceptos de punto medio de la geometría. Para demostrar que el punto G divide al segmento en una razón de 1 a 2, se aplica semejanza de tríangulos y luego teorema de Thales, en la Geometría Sintética. Después, se demuestra que el punto G es donde coincide la intersección de las medianas. Luego, para la Geometría Analítica, se determina cada coordenada del baricentro, usando la división de un segmento por una razón dada. Mientras que para abordar desde Geometría con vectores, se utiliza propiedades de las operaciones con vectores y finalmente, para considerar las coordenadas hay que hacer uso de la referencia del un punto, en este caso del origen O. Así, se logra determinar las coordenadas de baricentro.

Analizando los procesos (técnicas) seguidos para demostrar, podemos resaltar los teoremas y propiedades utilizadas en el esquema mostrado en la figura 9.

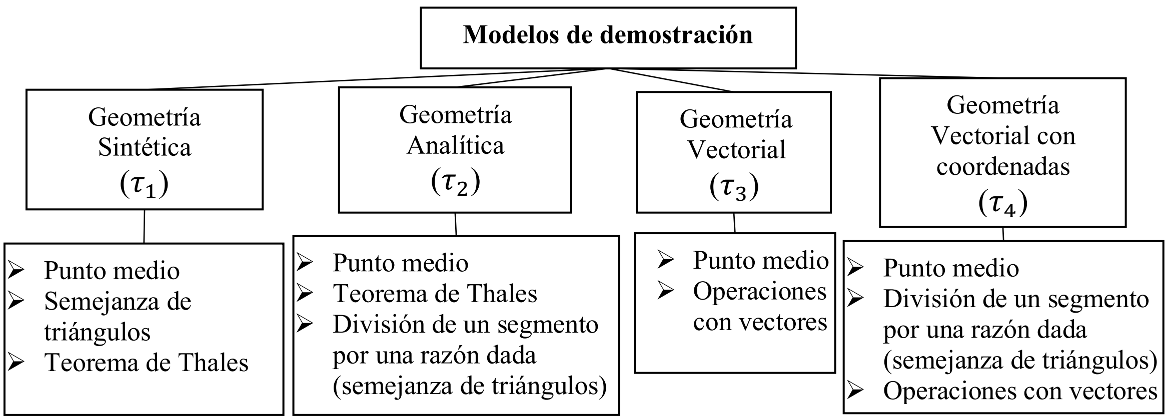


Figura 9. Técnicas para dar solución a la tarea.

Por lo tanto, podemos identificar dos tecnologías para la demostración y son trabajar sin vectores o con vectores, como se muestra en la figura 10.

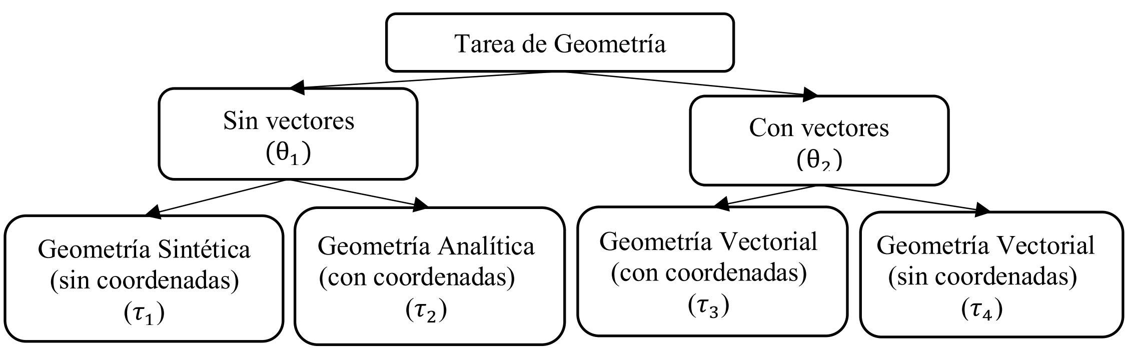


Figura 10. Tecnologías que justifican las técnicas para la resolución de la tarea.

Conclusiones

En la tarea presentada podemos ver que la solución esperada es la realizada mediante el uso de propiedades de vectores, pero podemos encontrar otras soluciones para el objeto matemático estudiado, baricentro. Entonces la tarea es demostrada a través de cuatro técnicas. Es decir, las demostraciones que fueron realizadas sin vectores (en geometría sintética y vectorial) y con vectores (en geometría analítica y vectorial) y sus respectivas propiedades (tecnologías).

De las soluciones realizadas, podemos inferir que fue posible articular las geometrías, debido a que presentan propiedades en común como el punto medio, teorema de Thales, semejanza de triángulos y división de un segmanto por una razón dada, donde al llegar a demostrar con vectores cuenta con una tecnología que reúne propiedades tanto geométricas como algebraicas que facilitaron las demostraciones.

La dimensión ecológica se manifiesta en las relaciones de personas (profesores /estudiantes) con el objeto matemático baricentro, que es enseñado tanto en la Educación Primaria y Secundaria peruana (Programa curricular de Educación Primaria y Secundaria, 2018) así como en el nivel universitario (Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica, 2018). Luego de un análisis de dichos programas y sumilla se muestra en el siguiente esquema, que podemos apreciar en la figura 11, que el objeto matemático está presente y es estudiado por los alumnos.

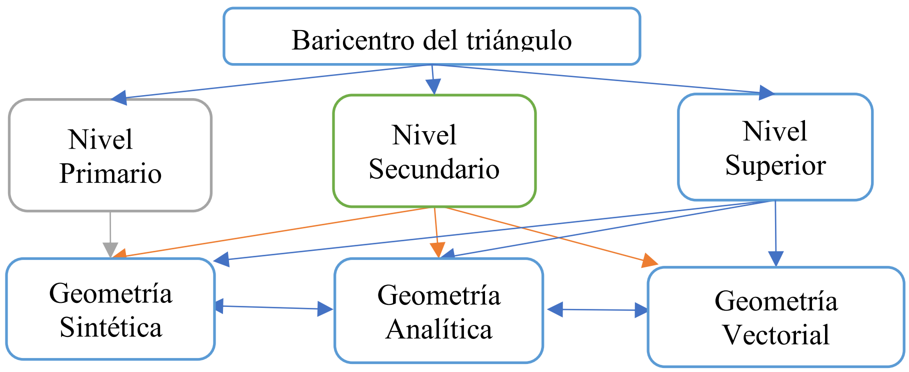


Figura 11. Esquema del objeto matemático baricentro del triángulo

En el nivel primario, se estudia el baricentro con propiedades de la geometría sintética sin demostración. En los últimos años del nivel secundario, se estudia la geometría sintética con algunas demostraciones, pero rara vez del baricentro. Si bien se estudia propiedades como el baricentro en geometría analítica, esto se hace sin demostración. En el nivel superior, es más frecuente realizar las demostraciones del baricentro en los cursos de geometría analítica y vectorial, lo que representa serias dificultades para los estudiantes.

A partir del análisis de las soluciones de la tarea se observa que se resuelve de varias maneras con técnicas ya conocidas por los alumnos. Además, que no hay la necesidad de ampliar las técnicas conocidas ni implementar nuevas teorías y tecnologías para este problema en particular, ya que no es pertinente.

El análisis praxeológico permite ver la no pertinencia de la tarea para este tema en particular, pero, al ver las diversas técnicas, se observa que es mucho más eficiente la solución desde el punto de vista vectorial que la del punto de vista de la geometría sintética y la del punto de vista de la geometría analítica. Por lo tanto, este problema no es pertinente en la introducción o como una motivación en la enseñanza de vectores, pero si va a ser pertinente para mostrar la eficiencia del uso de los vectores en la solución de tareas.

Referencias bibliográficas

Almouloud, S., Regnier, J. y Silva, C. (2009). Resolver problemas envolvendo Prova e demonstração: Uma dificuldade para professores de ensino básico. *Proceedings of the* 1^{rst} *International Congress of Mathematics, Engineering and Society* - ICMES 2009 Curitiba, Brazil.

Arenzana, V. (1997). El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann. *Revista Suma 25*, 61-70.

Balacheff, N. (1987). Processus de prevuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 147-176.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique, en Actes de l'U. E. de la Rochelle: Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, pp. 91-119.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 203-231.

Ministerio de Educación. Programa curricular de Educación Primaria, (2018). Recuperado de: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-primaria.pdf

Ministerio de Educación. Programa curricular de Educación Secundaria. (2018). Recuperado: http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-curricular-educacion-secundaria.pdf

Sumilla de Algebra Matricial y Geometría Analítica (2018). Recuperado el 30 de marzo de 2019 de http://facultad.pucp.edu.pe/generales-ciencias/informacion-para-el-estudiante/sumillas/

Touré, S., Akele, C., Baye, B., Bendiman, K., Conde, K., Djiguiba, O., Don, A., Neulat, J., Traoré, T. (1997). *Collectión Inter Africaine de Mathematique*. 1erSM_Mathematiques. Paris, Francia. EDICEF.

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

DISEÑO DE UN TALLER PARA REFLEXIONAR SOBRE LA PRÁCTICA de ENSEÑAR ESTADÍSTICA EN AULAS DE INCLUSIÓN CON ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD VISUAL

DESIGNING A WORKSHOP TO REFLECT ON STATISTICS TEACHING PRACTICE IN INCLUSIVE CLASSROOMS WITH VISUALLY IMPAIRED STUDENTS

Jaime Fonseca González
Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Colombia)
jaimejaimef@gmail.com

Resumen
El diseño, aplicación y evaluación de una propuesta de enseñanza de la estadística en un ambiente de resolución de problema para un aula inclusiva con estudiantes con discapacidad visual, llevó a diseñar un taller para la RELME 33, con el objetivo de que los asistentes reflexionen sobre la enseñanza de la estadística. Se asumió el modelo de practicante reflexivo de Perrenoud como marco de referencia para la formación de profesor y el método de análisis colectivo de la práctica como método de formación. Como resultado del diseño de este taller se encuentra que el análisis colectivo de la práctica puede tomar elementos de una práctica de profesores, en al menos cuatro componentes: el marco de referencia, tareas para la enseñanza, producciones de los estudiantes y la evaluación, para constituir recursos que posibiliten la reflexión del profesor, con actividades basadas en la realización de tareas propias del profesor como lo son el diseño, gestión y evaluación de procesos de enseñanza, así como el análisis del aprendizaje.

Palabras clave: enseñanza de la estadística, discapacidad visual, gestión y evaluación

Abstract
The design, implementation, and evaluation of a statistics teaching practice involving problem solving to an inclusive classroom with visually impaired students, led to the design of a workshop for 33th RELME. It was aimed at making the participants reflect on statistics teaching. Perrenoud's reflective practitioner model was taken on as the reference framework for teacher training, and the collective method of practice was used as the training method. The results of this workshop show that the collective analysis of practice can take elements of a teachers' practice, in at least, four components: the reference framework, teaching tasks, students' productions, and evaluation to make up resources that enable the teacher to reflect, with activities based on the performance of the teacher own tasks such as the design, management and evaluation of the teaching processes, as well as the analysis of learning.

Key words: statistics teaching, visual impairment, management and evaluation

Introducción

Actualmente, los estudios estadísticos han proliferado como forma de comprender fenómenos económicos, sociales, culturales, publicitarios, entre otros; sus resultados, con frecuencia expresados en gráficos y tablas, circulan en medios de comunicación y redes sociales en forma de noticias, demostración de la efectividad de productos comerciales, o justificaciones de decisiones de empresas o el gobierno, lo que ha provocado su masificación en la sociedad y la necesidad de formación estadística de las personas en general. La escuela ha asumido esta formación, y entre otras el desarrollo de las habilidades de interpretar, analizar y utilizar los resultados de estudios estadísticos que se publican en periódicos o revistas. Adicionalmente, las aulas regulares han estado desarrollando procesos de educación inclusiva con estudiantes sensorialmente diversos. En este contexto, se diseñó, implementó y evaluó una propuesta de enseñanza de la estadística en un aula inclusiva en el que se encuentra un estudiante de 14 años con ceguera total de nacimiento y se tomó como modelo de enseñanza a la resolución de problemas. El anterior trabajo llevó a los autores a pensar en la formación de profesores para comprender el diseño de problemas, su gestión y la organización de la enseñanza, así como para identificar componentes del desarrollo de la habilidad de interpretación de tablas y gráficos estadísticos de estudiantes visualmente diversos en un aula inclusiva.

El objetivo principal del taller es acercar a los profesores participantes a la enseñanza y aprendizaje de la estadística en un ambiente de resolución de problemas para aulas inclusivas con estudiantes con ceguera total en el grado séptimo de educación básica. Este acercamiento incluye: el reconocimiento de elementos teóricos sobre la resolución de problemas en matemáticas desde los planteamientos de Polya (2002) y su extrapolación a la estadística; el desarrollo de habilidades de diseño de problemas para la enseñanza y su adaptación para la accesibilidad a los estudiantes con ceguera total; documentación sobre un modelo de análisis de la habilidad de interpretación de tablas y gráficas estadísticas. Así, el taller tiene especial trascendencia para comprender el acceso a la información contenida en tablas y gráficos de estudiantes con discapacidad visual y la construcción colectiva desde su particular forma de comprensión del mundo, que es diferente a la del estudiante vidente. Dado que el desarrollo de esta habilidad de interpretación de tablas y gráficos estadísticos son un objetivo del currículo en la educación básica y media, el taller se dirige a profesores de matemáticas de estudiantes en este nivel de escolaridad y su nivel de estudios puede ir desde estudiantes para profesor hasta profesores en ejercicio con formación de maestría.

Marco referencial

La resolución de problemas tiene diversidad de concepciones y tendencias, aunque para este trabajo se parte de los planteamientos de Polya (2002). Este investigador expresa que resolver un problema es “encontrar un camino allí en donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de la dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado” (Polya, 1981, citado en García, 2002, p.20). Esta definición es aplicable a cualquier campo del conocimiento y aunque Polya la desarrolla para las matemáticas, la trasladamos al campo de la estadística. En la propuesta de Polya (2002), se diferencia entre solución y resolución, en tanto la primera refiere al dato que responde a la incógnita del problema y cumple las condiciones dadas, mientras que la segunda refiere al conjunto de acciones que realiza el resolutor y que lo pueden llevar a la solución del problema.

Para el diseño de la propuesta de enseñanza, se consideran los tres tipos de problemas propuestos por Polya (2002): problemas por resolver, lo cuales requieren encontrar la incógnita del problema; problemas por demostrar, los cuales tienen por objetivo “mostrar de modo concluyente la exactitud o falsedad de una afirmación claramente enunciada” (Polya, 2002, p.161) y; problemas de rutina, que son problemas similares a los ya solucionados, en los cuales se requiere sustituir los datos del problema dado en el problema resuelto.

Por tratarse de diseño de actividades para la enseñanza de estadística elemental se abordan problemas por resolver y de rutina, teniendo en cuenta tres fases para la enseñanza: 1) resolución colectiva del problema, en la que se soluciona un problema propuesto por profesor en pequeños grupos de trabajo; 2) construcción colectiva de conocimiento, en cual los pequeños grupos comunican a otros sus soluciones, estrategias y conocimientos adquiridos durante la resolución; y 3) resolución de problemas rutinarios, en la que se proponen a los estudiantes la solución de problemas similares a los propuestos en la primera fase, de manera tal que pongan en juego las estrategias y conocimientos adquiridos en la fase anterior.

Ahora bien, respecto de la interpretación de tablas y gráficos estadísticos, es interesante y necesario (como ya se indicó en la introducción) pensar en las maneras en que los estudiantes entienden, conceptualizan y crean formas de actuación para resolver problemas de interpretación de gráficos estadísticos. Particularmente, Friel, Curcio y Bright (citado en Arteaga, 2011) entienden la comprensión de gráficos estadísticos como las habilidades necesarias para entender su significado, a partir del reconocimiento de relaciones entre los diferentes elementos estructurales que los componen, de modo que en la resolución de problemas se involucra por la manera en que el estudiante observa y experimenta con tablas y gráficos y, describe la forma en el que se acerca a la información presentada en ellos. UN análisis de la comprensión de gráficos y tablas estadísticas lo realizaron Gerber, Boulton-Lewis y Bruce (1995), quienes identificaron siete niveles de interpretación de tablas y gráficos estadísticos con los que describen las variaciones en la capacidad de los niños para interpretar el rango de representaciones gráficas. Estos niveles son:

- Nivel 1 (Gráficos ingenuos): la información dada por el estudiante se basa en lo que cree o sabe de la situación descrita, pero no en la información presentada en las tablas o gráficos. El estudiante no identifica el propósito, estructura ni contenido de la tabla o gráfico.

- Nivel 2 (Gráficos locales): la interpretación de los datos es local, ya que, se realiza la lectura de un solo dato, sin identificar la intención del gráfico o tabla.

- Nivel 3 (Interpretación parcial de los datos): la interpretación de los datos está fragmentado, en tanto, se identifica la intención del gráfico y la tabla, pero la lectura que se realiza de los datos sigue siendo uno a uno sin ver su carácter como conjunto.

- Nivel 4 (Gráficos como patrones): el análisis de las gráficas y tablas es superficial, porque la comparación que realiza entre los datos no tiene carácter numérico especifico, sino que se realiza cualitativamente (con términos “más” o “menos”).

- Nivel 5 (Gráficos representativos en pequeña escala): el análisis de las tablas y gráficos parte de la identificación de similitudes y diferencias entre los datos, pero la lectura sigue siendo particular, en tanto no reflexiona sobre el análisis.

- Nivel 6 (Gráficos representativos): el análisis realizado con los gráficos se utiliza para argumentar, en tanto, comprende la situación e intención de cada gráfico.

- Nivel 7 (Gráficos básicos para la reflexión o predicción): los estudiantes analizan los datos presentados en la gráfico o tabla y sobre estos predicen o reconocen tendencias de comportamiento.

Estos siete niveles de comprensión serán la base para el análisis del aprendizaje de los estudiantes.

Estos referentes teóricos se han puesto en el marco de la educación inclusiva, entendida como un proceso con el cual, el sistema educativo busca responder integralmente y sin segregación alguna, a aquellos estudiantes que, por su diversidad de características y necesidades, se encuentran excluidos o en riesgo de exclusión, de modo que busca identificar y eliminar las barreras que se imponen a los estudiantes para acceder a un aprendizaje acorde a sus necesidades y para participar del proceso educativo. Este proceso es contrario al de la inclusión educativa, en el que es el estudiante quien debe adaptase al sistema.

Echeita y Ainscow (2011, citado en Secretaría de Educación del Distrito, 2018) propone cuatro elementos de la educación inclusiva:

1) La inclusión vista como un proceso, como una permanente búsqueda de maneras de acoger la diversidad de los estudiantes, para aprender a vivir con la diferencia y para estudiar las maneras de aprovecharla.
2) La inclusión busca la presencia, la participación y el éxito de todos los estudiantes, para promover la calidad de las experiencias de los estudiantes en la escuela, incorporando sus puntos de vista y una valoración de su bienestar personal y social, para garantizar el éxito en su aprendizaje en relación al currículo.
3) La inclusión precisa la identificación y la eliminación de barreras, de aquellas creencias y actitudes que, frente al proceso de la educación inclusiva, provocan exclusión, marginación o fracaso escolar; así es imprescindible identificar dichas barreras, las personas a las que se les impone, el plano de la vida escolar que afecta para generar planes de mejoramiento para la innovación de políticas y prácticas que promuevan su eliminación.
4) La inclusión pone particular énfasis en aquellos grupos de alumnos que podrían estar en riesgo de marginalización, exclusión, o fracaso escolar, de modo que se adopten medidas para asegurar su presencia, participación y éxito dentro del sistema educativo; entre los grupos en riesgo citados por la Secretaría de Educación del Distrito (2018), se encuentran las personas con discapacidad, los grupos étnicos, estudiantes con orientaciones sexuales no heteronormativas, estudiantes con capacidades y/o talentos excepcionales y estudiantes víctimas del conflicto armado interno.

Estos cuatro elementos permiten definir un proceso de la educación inclusiva que aporta a la inclusión en el aula de matemáticas; específicamente, el proceso de diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje para incluir a la población con discapacidad visual con los que se supere la barrera del acceso de esta población a la lectura e interpretación de tablas y gráficas estadísticas en el marco de la resolución de problemas y permitan superar las comunes creencias del estudiantado sobre la imposibilidad del aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes con discapacidad visual.

La realización de este proceso ofreció elementos para diseñar un taller para la formación de profesores de matemáticas en la RELME 33. Este taller se diseña y desarrolla bajo el modelo de práctica reflexiva propuesto en Perrenoud (2004). En este, la reflexión no se concibe como una simple evocación de pensamientos, el cual constituye el acto de recordar; pues, de hecho, todo ser humano piensa y evoca pensamientos sobre los actos y acontecimientos, pero no siempre piensa sobre el modo en que cada uno hace tal evocación o sobre aquello que origina tales pensamientos o actuaciones. La anterior acción es la que define la reflexión y la diferencia con el recuerdo, aun cuando ambas son procesos cognitivos. En este orden de ideas, Perrenoud (2004) afirma que "reflexionar no se limita a una evocación, sino que pasa por una crítica, un análisis, un proceso de relacionar con reglas, teorías u otras acciones, imaginadas o conducidas en una situación análoga" (p. 31). Más aún, indica que con frecuencia se carece del hábito de reflexionar sobre las acciones y pensamientos, por lo resulta razonable aprender y enseñar a reflexionar.

Si se concibe al profesor como un investigador que "se atreve a alejarse de los senderos trazados y que se perdería si no fuera porque reflexiona con intensidad sobre lo que hace y aprende rápidamente de su propia experiencia" (Perrenoud, 2004; p.13), se denomina practicante reflexivo. Bajo este planteamiento, la acción, la reflexión, el aprendizaje y los conocimientos del profesor pueden teorizarse mediante la abstracción del contenido específico de los problemas que se enfrentan.

Ahora bien, la reflexión puede realizarse sobre momentos u objetos distintos de la acción; por ejemplo, antes y después de la acción, en plena acción o sobre el sistema de acción y las estructuras de acciones, tanto individuales como colectivas. De todas ellas, se logra construir un conocimiento sobre la práctica de un profesor y de un grupo de profesores.

Método

Ahora bien, la reflexión sobre la práctica puede realizarse individuamente o en grupo. Para el diseño de este taller y por experiencias previas de formación de profesores en ejercicio, consideramos que la reflexión en grupo provoca una transformación personal y una crítica más profunda sobre sí mismo. Un método de reflexión en grupo es denominado por Perrenoud (2004) como *análisis colectivo de la práctica*. En este, un grupo de participantes se reúnen para reflexionar sobre su propia práctica o la de otros bajo la orientación de un monitor, que en este caso es el coordinador del taller y se reflexiona sobre la práctica en la propuesta de enseñanza diseñada.

Como señala Fonseca (2018),

> "la realización del análisis colectivo de la práctica favorece la capacidad para reflejarse a sí mismo, en dos momentos: a) cuando el profesor, al compartir su práctica con otros, se ve abocado a pensar sobre sus prácticas, a justificarlas y a organizar sus ideas para comunicarlas; b) cuando el profesor, al conocer las prácticas de otros, piensa en las propias, en sus similitudes y diferencias, en aquellas situaciones que han llevado a otros a cambiar las suyas e incluso durante aquellos análisis que indagan sobre la práctica de otros cuyas preguntas tienen cabida en las propias" (p.161).

Esto justifica la pertinencia de la elección del método de formación de análisis colectivo de la práctica para este taller.

Ahora bien, el diseño del taller bajo el modelo de análisis colectivo de la práctica se desarrollar en tres fases:

- Fase 1: Diseño e implementación de una práctica en aula. Un profesor o grupo de profesores planean, gestionan y analizan una práctica con estudiantes, haciendo una reflexión sobre la propia práctica para comprender su acción.
- Fase 2. Identificación de elementos para promover la reflexión. En esta fase se buscan elementos para el diseño de la formación de profesores en la práctica de aula realizada en la fase anterior, como: el marco de referencia, las tareas propuestas para la enseñanza, la gestión propuesta, las situaciones que provocaron modificaciones a la acción en el aula, las producciones de los estudiantes y, resultados de evaluación del aprendizaje.
- Fase 3. Diseño del análisis colectivo de la práctica. La acción del profesor es tomada como principal recurso para provocar la reflexión. Específicamente, se asumen las tareas de profesor en el diseño, gestión y evaluación de la enseñanza, así como el análisis del aprendizaje, pero desde los elementos identificados en la fase anterior, para poner en confrontación las propias experiencias del profesor asistente con la experiencia a analizar. Se espera que tal confrontación permita explicitar aquellos conocimiento y experiencias que respaldan la opinión o postura del profesor sobre el objeto de la práctica a analizar para originar la reflexión sobre la práctica.

Si bien el modelo anterior es general para el diseño de un análisis colectivo de la práctica, el diseño para el caso de un aula inclusiva con estudiantes con discapacidad visual, permite poner de relieve algunos elementos de interés para la educación inclusiva como las creencias y experiencias de los profesores asistentes sobre la enseñanza de la estadística en aula inclusiva; la aceptación de los referentes teóricos que orienta la experiencia de aula a la luz de las creencias y experiencias de los asistentes; la adaptación de materiales para la inclusión y de los problemas propuestos; las actuaciones de los estudiantes (videntes y con discapacidad visual) en la interpretación de tablas gráficos estadísticos.

El diseño de este este taller para la RELME 33 ha seguido el modelo anterior, y se presenta en detalle el diseño alcanzado en la última fase. Los resultados de la implementación del taller no se exponen, en tanto este reporte se presenta antes de la realización del evento académico.

Diseños didácticos

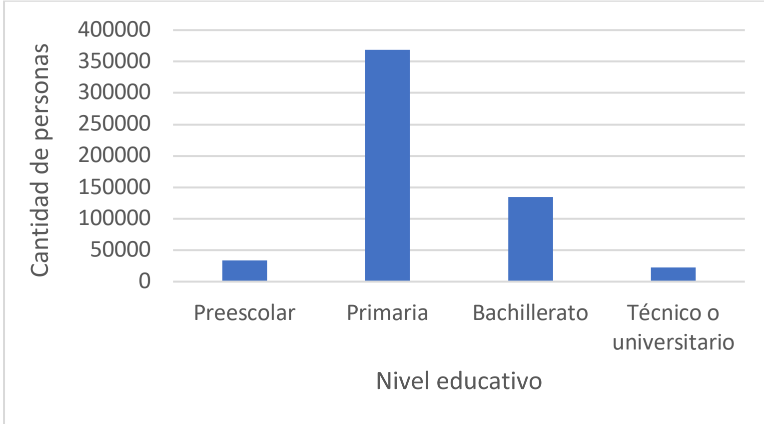
La primera sesión del taller se destina al acercamiento del profesor a la enseñanza de la estadística; primero desde un ambiente de resolución de problemas y luego en la adaptación de los problemas para la accesibilidad a los estudiantes con discapacidad visual. Así, la sesión se desarrolla en dos momentos distintos.

Simulación de un escenario de enseñanza de la estadística en un ambiente de resolución de problemas. Los asistentes asumen el rol de estudiantes que resuelven un problema diseñado en la propuesta, el cual involucra datos de estudios sociales encontrados en Internet y expuestos con diferentes gráficos y tablas estadísticas y, tiene como incógnita la interpretación de la realidad social estudiada. De este modo, los problemas superan el tradicional cálculo de frecuencia, media, moda, mediana, para concentrarse en el papel de estas medidas y de la interpretación de tablas y gráficos en la descripción de una realidad.

Específicamente, el problema propuesto es:

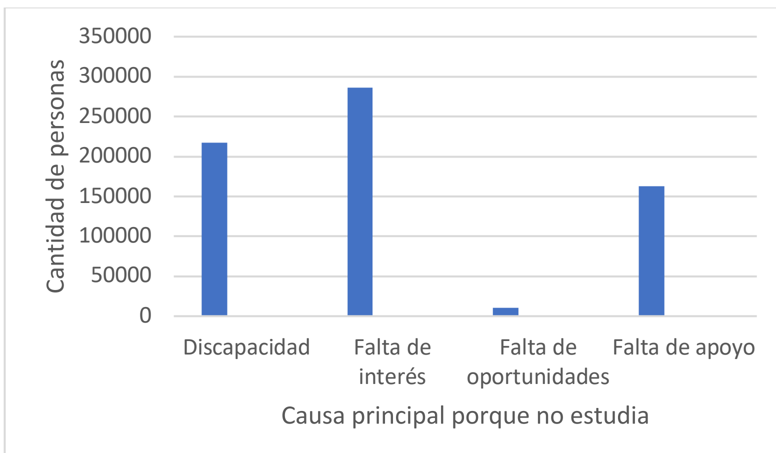
> *Las políticas educativas se proyectan con base a la información que reporta el DANE (Departamento Administrativo Nacional de Estadística, 2010, p.6-9) sobre los datos de la población colombiana en diferentes años; en esta ocasión se quiere caracterizar algunos aspectos a considerar en una política educativa para personas con discapacidad, para ello se cuenta con una tabla y dos gráficos; en la tabla se muestra la cantidad de personas con discapacidad organizadas por grupos de edades: infancia (entre 0 y 9 años), adolescencia (entre 10 y 19 años) Adultos (entre 20-59 años), Adultos mayores (mayores de 60 años). En el primer gráfico se muestra la cantidad de personas con discapacidad en relación con su nivel educativo (preescolar, primaria, secundaria, técnico o universitario), mientras que en el segundo gráfico se encuentran algunos de los factores por las cuales algunas personas con discapacidad no estudian; discapacidad (por su discapacidad), falta de interés (porque ya terminó o no le gusta), falta de oportunidades (por falta de cupos, no existe centro educativo cercano o fue expulsado), falta de apoyo (altos costos, no tiene apoyo familiar, necesita trabajar o le falta tiempo).*

Gráfico 1: Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad según nivel educativo alcanzado



Fuente: DANE (2010). Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad.

Gráfico 2: Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad según causa principal por la que no estudia



Fuente: DANE (2010). Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad.

Tabla 1: Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad según grupos de edades

Grupos edades	Cantidad de personas
Infancia	66094
Adolescencia	95511
Adultos	370493
Adulto mayor	324929

Fuente: DANE (2010). Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad.

> *A partir de la tabla y los gráficos respondan la siguiente pregunta ¿Qué características debe tener una política educativa para las personas con discapacidad?, escriban cada uno de los pasos que realizaron para responder esta pregunta.*

Para concentrar la atención de los profesores en la enseñanza de la estadística y no en la resolución del problema estadístico, la tarea propuesta es la siguiente:

> Resuelva el siguiente problema estadístico propuesto a estudiantes de grado séptimo y responda con argumentos a las siguientes preguntas:
> 1. ¿Cree que la situación sería un problema para sus estudiantes?
> 2. ¿Cree que la resolución del problema como este le permitiría aprender estadística a sus estudiantes?
> 3. ¿Cómo enseñaría la estadística con problemas como este?
> 4. Si tuviera estudiantes con discapacidad visual en su aula ¿cómo o adaptaría para que fuera accesible a ellos?

La discusión sobre estas preguntas busca identificar creencias y concepciones sobre la resolución de problemas y su implementación en el aprendizaje de la estadística, las cuales se contrastan en el siguiente momento, con concepciones asumidas por los expositores en su trabajo.

Presentación y discusión de la propuesta de enseñanza. En esta actividad, los profesores expositores presentan el marco teórico sobre resolución de problemas y enseñanza de la estadística, así como el diseño de la propuesta de enseñanza. Para provocar la reflexión sobre la enseñanza de la estadística se proponen dos preguntas ¿cómo adaptaría esta propuesta de enseñanza para la aplicación a sus estudiantes? ¿cómo adaptaría este problema para la inclusión de estudiantes con discapacidad visual? Algunas preguntas auxiliares para la discusión son ¿está de acuerdo con las concepciones de resolución de problemas asumidas por los expositores? ¿cree que estas concepciones permitirían la enseñanza de la estadística de en la institución en la que labora? ¿estaría dispuesto a asumir estas concepciones?

La segunda sesión de taller se destina al análisis del aprendizaje, específicamente en lo relacionado con el desarrollo de la habilidad de interpretación de tablas y gráficos estadísticos. En esta dirección, la sesión se desarrolla en tres momentos:

1) Presentación por parte de los expositores de categorías de análisis para el aprendizaje. Con el objetivo de que los participantes conozcan elementos teóricos fundamentales para el análisis de los niveles de interpretación de gráficos estadísticos, los expositores hacen una presentación breve de los niveles propuestos por Gerber, Boulton-Lewis & Bruce (1995). Dado que estos niveles se comprenden mejor en la realización de la tarea de analizar el aprendizaje, se propone el siguiente momento.

2) Análisis de producciones de estudiantes en la interpretación de gráficos y tablas estadísticas. Con el objetivo de poner en juego la información presentada en el momento anterior, se realiza un análisis colectivo de algunos apartados de producciones de los estudiantes videntes y con ceguera total en la resolución de los problemas de la propuesta de enseñanza. Estas han sido organizadas por sesiones de clase implementadas y se contextualiza su gestión para comprender las respuestas de los estudiantes. Se espera que esto permita conocer la evolución de la comprensión de los gráficos y tablas estadísticas con la resolución de problemas. Específicamente la tarea la proponer es:

> *Siguiendo la propuesta de Gerber, Boulton-Lewis & Bruce (1995), identifique el nivel de comprensión de tablas y gráficos estadísticos de los estudiantes desde sus producciones en la resolución de problemas.*

El análisis de la comprensión de tablas y gráficos se inicia con una contextualización y descripción de la gestión en cada sesión de clase y con la pregunta: siguiendo los niveles de comprensión asumidos ¿en qué nivel se puede ubicar la siguiente respuesta?

Sesión 1. En la primera sesión de la resolución del primer problema, los estudiantes tienen dificultades para comprender lo que deben hace, pues esperan que la respuesta sea el resultado de algún cálculo simple con algunos datos que hay en la tabla. No leen el contexto de la situación y ni tratan de interpretar las tablas, pues solo miran las cantidades en las tablas. Una de las respuestas usuales de los estudiantes es como la que sigue, la cual puede ubicarse en el nivel 1 de gráficos ingenuos, en tanto lo que describen es basado en sus creencias sobre el nacimiento y crecimiento de las personas con discapacidad.

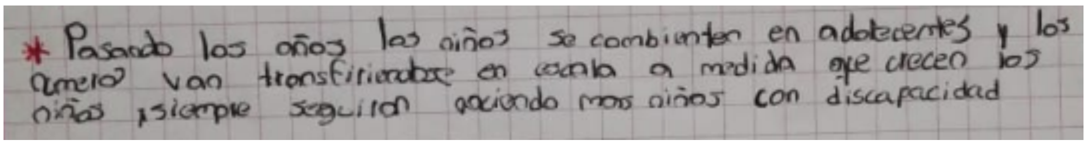


Imagen 1. Evidencia de nivel 1 de comprensión de gráficos ingenuos
Fuente: propia

Sesión 2. Ante las dificultades de los estudiantes para comprender el problema, para la segunda sesión se ajustó la propuesta para provocar que los estudiantes centraran su mirada en las tablas, sus componentes, datos y comportamiento. Para ello, se propuso la actividad de encontrar diferencias y similitudes entre las tablas presentadas. Una de las respuestas obtenidas en esta sesión y que se propone para su análisis es la siguiente:

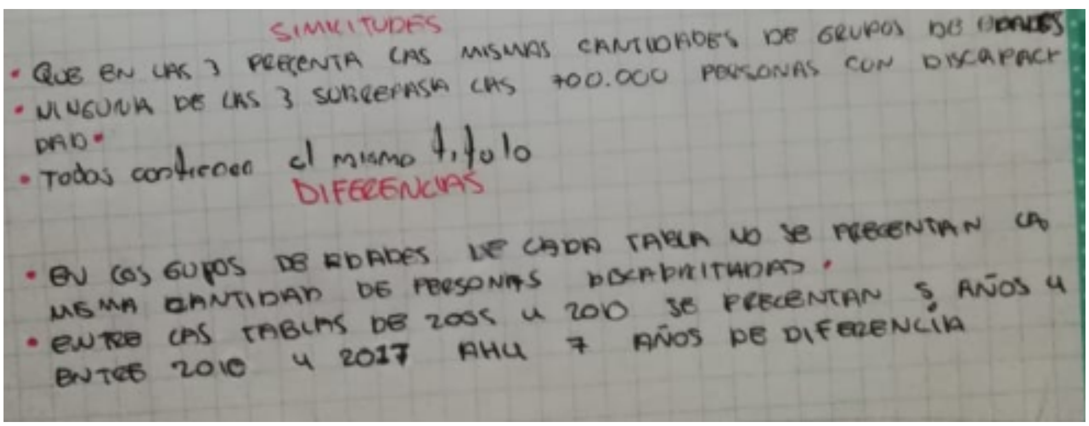


Imagen 2. Evidencia de nivel de comprensión superficial de tablas y gráficos
Fuente: propia

Esta respuesta es de particular interés, en tanto genera un nivel de comprensión adicional que se encuentra entre los dos primeros niveles, denominado nivel de comprensión superficial. En este nivel, los estudiantes empiezan su comprensión de las tablas desde sus elementos constitutivos y por ende las descripciones se caracterizan por indicar la estructura del gráfico y sus diferencias o similitudes, pero no realizan la lectura de los datos que contienen. Esta categoría aparece cuando el análisis se realiza en un contexto de enseñanza, pues el estudio de Gerber, Boulton-Lewis & Bruce (1995) fue en un estudio basado en respuestas espontáneas de estudiantes a entrevistas estructuradas con situaciones de interpretación de tablas y gráficos.

Sesión 3. Con la comprensión alcanzada por los estudiantes sobre la estructura y componentes de las tablas, se retoma el problema de su interpretación. Una de las respuestas alcanzadas por los estudiantes es como la siguiente.

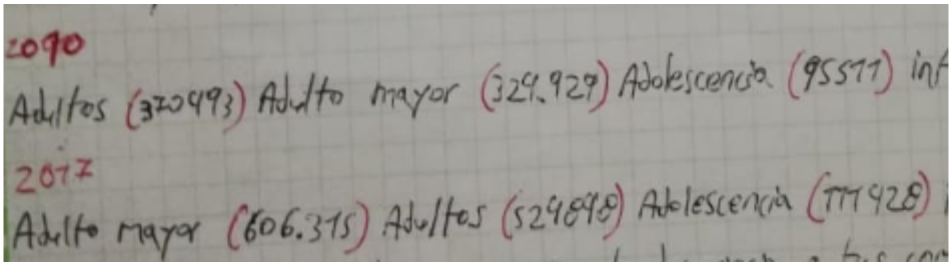


Imagen 3. Evidencia de nivel 3 de interpretación parcial de los datos
Fuente: propia

La respuesta puede ubicarse en el nivel 3 de interpretación parcial de los datos, pues la lectura se hace de algunos datos y es literal. Otro tipo de respuesta presentada es como la que se muestra.

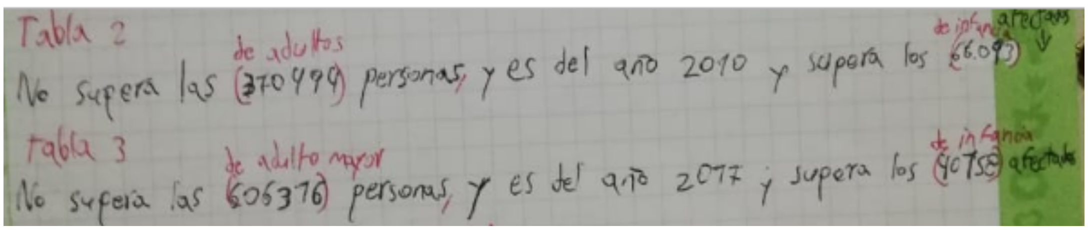


Imagen 4. Evidencia de nivel 5 de gráficos representativos en pequeña escala
Fuente: propia

Esta respuesta puede categorizarse en el nivel 5 de gráficos representativos en pequeña escala, porque la lectura es de algunos datos, pero considerando las diferencias y similitudes con otros comparables.
En esta misma sesión se presentó una respuesta muy particular de la estudiante con discapacidad visual, porque genera un nivel de comprensión nuevo, denominado de interpretación estratégica, el cual se encuentra entre los niveles 5 y 6

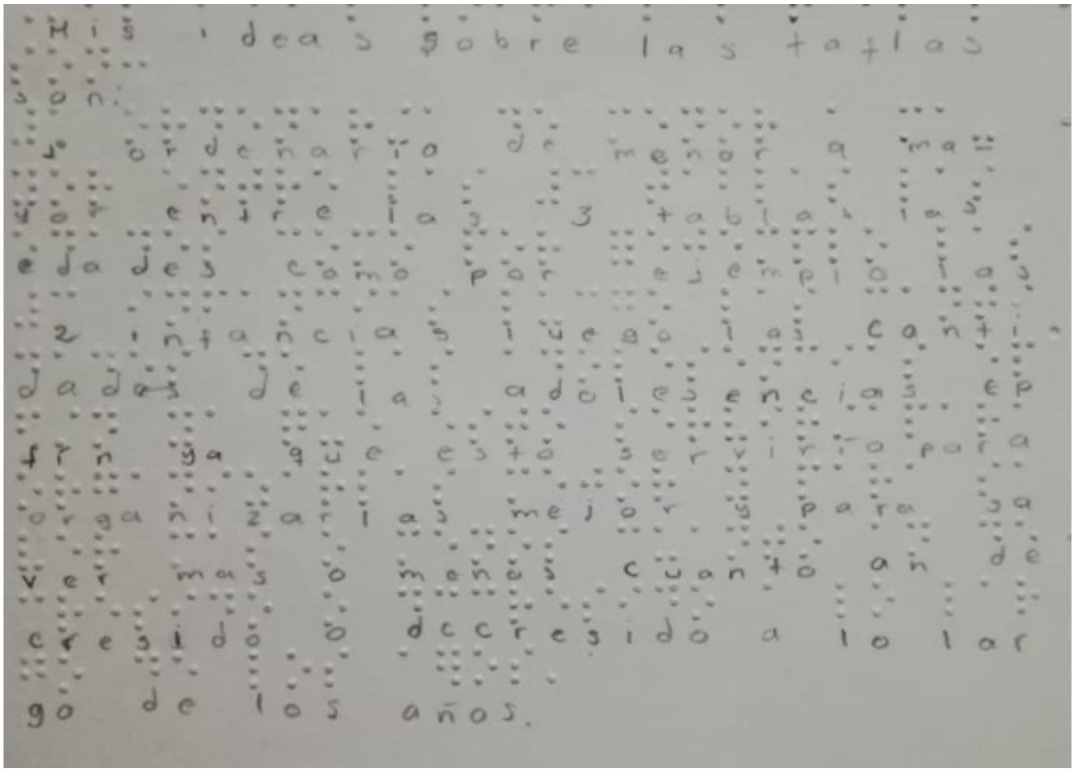


Imagen 5. Evidencia de nivel de comprensión estratégica
Fuente: propia

> *Puede apreciarse que la respuesta no refiere a una interpretación de los datos en sí mismo, sino de una estrategia para producir el análisis. Esta no es una estrategia general o ingenua, sino que está basada en una comprensión inicial de la situación y del comportamiento de los datos descritos por las tablas, lo que lleva a hacer una reflexión sobre la manera de producir una descripción más refinada que las descripciones emergentes de los primeros abordajes.*

Se presentan imágenes de otras soluciones sobre el segundo problema para apreciar que la comprensión de los gráficos de barras presenta mayores dificultades que la comprensión de las tablas estadísticas en el caso de la estudiante con discapacidad visual.

3) Presentación breve de resultados de la aplicación de la propuesta. Los expositores hacen una presentación breve de los resultados del análisis de datos en tres categorías: Evolución de la comprensión de tablas y gráficos estadísticos; interacción entre estudiantes videntes y con discapacidad visual en la resolución de problemas, aunque los asistentes ya se hayan hecho una idea de estos con la realización del momento anterior. El taller se concluye con una reflexión sobre los cambios en las concepciones de los asistentes sobre la resolución de problemas en la enseñanza de la estadística en un aula inclusiva.

Conclusiones

Si en el análisis colectivo de la práctica se asume la tarea del profesor de diseñar y gestionar la enseñanza, una actividad a proponer para los profesores asistentes es el análisis de los problemas propuestos en la experiencia de aula desarrollada en la fase de diseño e implementación de una práctica en aula. Sin embargo, la reflexión sobre la práctica se puede provocar cuando se indaga sobre la posibilidad de aplicar problemas análogos en las aulas de los profesores asistentes, la manera en que los gestionaría, las adaptaciones que haría si en su aula tuviera estudiantes con discapacidad visual. Estas preguntas buscan explicar las concepciones y prácticas del profesor sobre la enseñanza de la estadística, identificar dificultades que experimentaría un estudiante con discapacidad visual al resolver los problemas propuestos a estudiantes videntes, identificar barreras que impiden la inclusión de los estudiantes y prever formas de superarlas.

Otra actividad bajo esta la misma tarea del profesor es la discusión sobre las adaptaciones de los problemas para hacerlos accesibles a los estudiantes con discapacidad visual y de las estrategias para propiciar la interacción entre todos los estudiantes en la construcción colaborativa de un conocimiento. Particularmente, la incorporación de la percepción háptica del estudiante con discapacidad visual como forma de acceso a las tablas y gráficas estadísticas pueden constituir una de las principales barreras a superar en la inclusión de estos estudiantes en la enseñanza de la estadística. Esto sin desconocer las barreras que la discapacidad puede aportar en la interacción con todos los estudiantes.

Por su parte, la discusión con los profesores sobre los referentes que orientan la propuesta de aula, busca crear un ambiente en el que las creencias y prácticas del profesor adquieran una estructura conceptual unificadora, pero con la posibilidad de adaptarla o ajustarla para el caso de la inclusión de población con discapacidad visual.

Por su parte, cuando se asume la tarea de analizar el aprendizaje, con las producciones de los estudiantes se busca comprender los referentes conceptuales, a la vez que se conoce las comprensiones alcanzadas por los diferentes estudiantes (incluidos aquellos con discapacidad visual), comprender las posibilidades y las dificultades de cada uno, y reflexionar sobre la posibilidad de articularlas para crear una comprensión conjunta.

En últimas, un taller de análisis colectivo de la práctica como el diseñado, busca hacer emerger las concepciones y prácticas del profesor sobre la enseñanza de la estadística y confrontarlas con hechos reales ocurridos en un aula, analizados desde un marco de referencia adaptable al caso de la discapacidad, para identificar barreras que se imponen a los estudiantes con esta discapacidad y concebir formas de superarlas.

Referencias bibliográficas

Arteaga. J. (2011). Evaluación de conocimiento sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores (tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Departamento Administrativo Nacional de Estadística (2010). *Población con registro para la localización y caracterización de las personas con discapacidad*. Recuperado de: https://www.dane.gov.co/index.php/estadisticas-por-tema/demografia-y-poblacion/discapacidad.

Fonseca, J. (2018). Reflexiones, resultados y proyecciones para la formación continua de profesores en el modelo de práctica reflexiva. En J. Fonseca, D. Velásquez (Eds), *La práctica reflexiva: Estrategias didácticas para el desarrollo de competencias*, (pp. 151-181). Colombia: Universidad de LaSalle.

García, J. (2002). Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas 29*, 20 – 38.

Gerber, R., Boulton-Lewis, G y Bruce, C. (1995). Children's understanding of graphic representation of quantitative data. *Learning and Instruction 5*, 77-100.

Perrenoud, P. (2004). Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Profesionalización y razón pedagógica. Barcelona: Graó.

Polya, G. (2002). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Secretaría de Educación del Distrito (2018). *Lineamiento de política de educación inclusiva*. Recuperado de: https://www.compartirpalabramaestra.org/documentos/otras-investigaciones/sed-educacion-inclusiva.pdf

INTEGRAL Y VISUALIZACIÓN

INTEGRAL AND VISUALIZATION

Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila
Universidad de Sonora (México)
guty@gauss.mat.uson.mx, tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen
Ante el predominio del lenguaje algebraico y algorítmico en la enseñanza de la integral de una función en cursos de cálculo, se producen significaciones limitadas que generan, por una parte, dificultades para su uso adecuado en la resolución de problemas de aplicación en las áreas de interés de los estudiantes, ya sean de ingeniería, economía u otras disciplinas, y por otra, altos índices de reprobación. En este trabajo se discute el diseño de actividades didácticas mediadas con GeoGebra para fortalecer el significado de la integral con tratamientos visuales, apoyados en las herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS). Se presenta a detalle una de las actividades y se discuten sus posibles ventajas para el estudio de la integral.

Palabras clave: integral, visualización, geogebra

Abstract
Given the predominance of algebraic and algorithmic language when teaching the integral of a function in calculus courses, students develop limited meanings that generate, on the one hand, difficulties for its appropriate use in solving problems applied in the areas of students' interest, whether in engineering, economics or other disciplines; and on the other, high failure rates. In this paper, we present the design of GeoGebra-mediated teaching activities aimed to strengthen the meaning of the integral with visual treatments, supported by the theoretical tools of the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA). One of the activities is shown in detail, and its possible advantages to study the integral are discussed.

Key words: integral, visualization, geogebra

Introducción

La preponderancia del uso de las representaciones algebraicas, así como una enseñanza de las matemáticas que privilegia los procesos algorítmicos, se reportan hasta la actualidad en las revistas de docencia e investigación en matemática educativa, a pesar de que los medios digitales ofrecen posibilidades de análisis para el estudio de los objetos matemáticos que potencian el uso de diversos sistemas de representación semiótica, lo cual es particularmente válido en el cálculo diferencial e integral.

El uso casi exclusivo de las representaciones algebraicas y los procesos algorítmicos conduce a los estudiantes a desarrollar mecanismos de automatización y la búsqueda de procedimientos predeterminados que puedan aplicar para la solución de un problema o de una situación problema que se les presente. En el caso de la integral de una función, por ejemplo, como se reporta en Grijalva (2007), tenemos situaciones como las siguientes, presentadas a un grupo de estudiantes de nivel superior.

La siguiente es la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}+2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -\sqrt{1-(x-3)^2}+2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$. Calcula el valor de $\int_0^4 fx)\,dx$

.

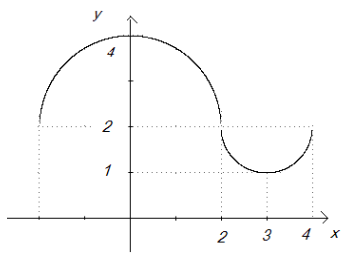


Figura 1. Gráfica de la función $f(x)$ presentada en la situación problema propuesta por Grijalva (2007)

Esta situación problema puede resolverse con facilidad determinando áreas, sin embargo, algunos alumnos trataron de resolverlo usando un procedimiento algorítmico muy extenso, obteniendo antiderivadas por medio del método de sustitución trigonométrica y evaluando en los extremos de la integral. Es importante resaltar que los estudiantes habían manifestado conocer la noción de que la integral es "el área bajo la curva", expresión que se usa para ilustrar o caracterizar a la integral como la medida del área, pero prefirieron usar un camino evidentemente más complejo.

Por otra parte, la ejemplificación de que la integral es el "área bajo la curva" se ilustra frecuentemente sólo con el caso de funciones positivas y la concepción que se forman de ello los estudiantes no necesariamente es la pretendida por los profesores. Así, en el siguiente caso se pone de manifiesto que la interpretación puede ser diferente (Figura 2).

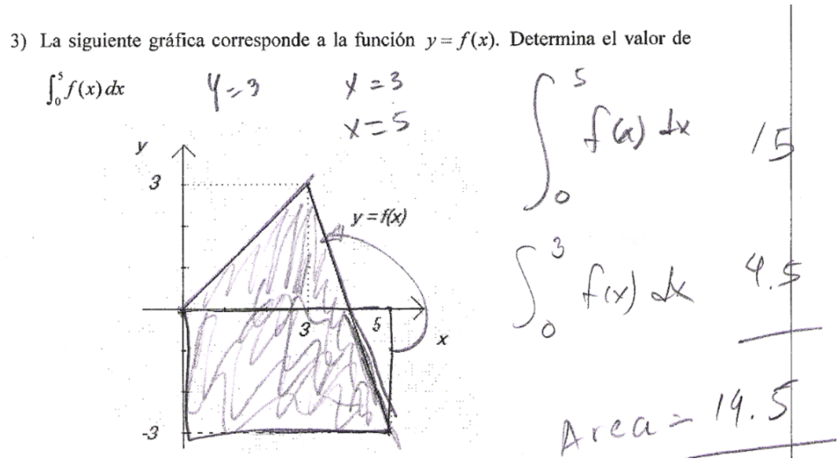


Figura 2. Interpretación de la integral como “área bajo la curva” de un estudiante (Grijalva, 2007)

Al cuestionar al estudiante sobre su respuesta, manifestó que realizó ese cálculo para obtener su valor, con la interpretación de área bajo la curva como se ilustra en la Figura 2.

Este tipo de respuestas ponen de manifiesto las interpretaciones limitadas que desarrollan los alumnos en los cursos de cálculo, y dan cuenta de diferentes tipos de dificultades en el aprendizaje, algunas de ellas, por un lado, ocasionadas por el predominio de los procesos algorítmicos. Por otro lado, se tienen las dificultades asociadas a la idea de área bajo la curva. Desde nuestro punto de vista, se da una interpretación errónea cuando se habla de la integral como área bajo la curva, ilustrando esta idea sólo con el caso de funciones positivas, sin presentar otros casos ni hacer mayores análisis de carácter conceptual.

Estas experiencias nos motivaron a diseñar y llevar a la práctica propuestas para el tratamiento del cálculo diferencial e integral con apoyo en los procesos de visualización y el uso de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2017). La propuesta se desarrolla usando el software GeoGebra, con el que se potencian las posibilidades del registro geométrico.

Estas experiencias nos motivaron a diseñar y llevar a la práctica propuestas para el tratamiento del cálculo diferencial e integral con apoyo en los procesos de visualización y el uso de diferentes registros de representación semiótica (Duval, 2017). En este escrito, específicamente, discutiremos algunas de las actividades didácticas diseñadas para el estudio de la integral de una función, las cuales tienen como objetivo fortalecer el significado de este objeto matemático, proveyendo de situaciones diversas, en las que se privilegian los aspectos visuales como complemento de los análisis conceptuales y algorítmicos de la integral. Las actividades propuestas se desarrollan con la mediación del software libre de matemáticas dinámicas GeoGebra, con el cual se potencian las posibilidades del registro geométrico.

Hemos tenido en cuenta la importancia del papel que juega la tecnología en estos tratamientos, pues como señala Goldin (1998), en el siguiente párrafo de traducción libre “La tecnología informática ha avanzado para permitir la estructuración intencional de entornos matemáticos altamente complejos (‘micromundos’), donde las configuraciones ya no son estáticas como las producciones de lápiz y papel, sino dinámicas. Esto hace que los análisis de los sistemas de representación externos sean aún más importantes. Debemos considerar no sólo la estructura de fondo, sino la estructura representativa, si queremos entender cómo cambian las cogniciones humanas al interactuar con tales entornos”.

Elementos teóricos

El diseño de las actividades se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, EOS, (Godino, Batanero y Font, 2008), en el cual se pone al centro la noción de *práctica matemática*, entendida como toda actuación o expresión que se usa para resolver problemas, validar la solución, generalizarla o comunicarla. En el EOS se asume que, más importante que las prácticas matemáticas aisladas, es necesario considerar los sistemas de prácticas que se emplean al resolver un mismo tipo de situaciones problema.

En la realización de sistemas de prácticas matemáticas emergen diferentes entes matemáticos, a los cuales identificamos como *objetos matemáticos primarios* y distinguimos seis tipos: las situaciones problema, los lenguajes, los procedimientos, las propiedades, los argumentos y los conceptos, de tal suerte que cada objeto matemático puede ser uno de éstos o una combinación de los mismos.

Por otra parte, toda vez que la única forma de acceder a las significaciones que cada sujeto asigna a los objetos matemáticos es a través de sus prácticas discursivas u operatorias (lo que cada sujeto dice o hace), asumimos que los sistemas de prácticas son el significado mismo del objeto matemático y los objetos matemáticos primarios son los constituyentes de dicho significado.

Pero, ante diferentes situaciones problema, es posible desarrollar diferentes sistemas de prácticas que producen un mismo objeto matemático, generando significaciones parciales del mismo, que en su conjunto producen el significado total o significado holístico. Por ejemplo, independientemente de si se obtuvo una respuesta correcta o no, en el caso de las situaciones ilustradas al inicio con respecto a la integral, en un ejercicio surgió el significado de la integral como el cálculo de la evaluación en los extremos de una antiderivada y, en el segundo caso, la determinación de la integral por medio del cálculo del área de una región. Ambas significaciones refieren a un mismo objeto matemático, la integral de una función, pero a partir de sistemas de prácticas diferentes.

Consecuentemente, los sistemas de prácticas se desarrollan usando diferentes procedimientos y representaciones de los objetos. Siguiendo una idea general de visualización, consistente en la formación de imágenes mentales a partir de ideas que en principio “no se ven”, es posible que, por ejemplo, ante la expresión analítica $y = x^2$, visualicemos una parábola en un sistema cartesiano, con vértice en el origen y cóncava haca arriba. Sin embargo, es posible que otro sujeto asocie la expresión $y = x^2$ con un polinomio, con una función cuadrática o simplemente la considere una expresión matemática sin un sentido particular, incluso puede no significar nada, como en el caso de un niño. Para que una expresión de esta naturaleza signifique algo, se requiere que sea un “signo”, esto es, que le representa algo. Estas consideraciones nos conducen a reforzar la idea de que la visualización requiere de la habilidad para el uso de diferentes representaciones de los objetos matemáticos y la conversión entre dichas representaciones.

Un antecedente importante lo encontramos en los trabajos de Peirce (1966) sobre el surgimiento de los signos sociales (como los visuales), y también trabajos posteriores como Peirce (1988). Asumimos que los grupos sociales estructuran los signos como códigos en torno a reglas expresadas explícitamente o aceptadas implícitamente.

Un primer punto a resaltar es la consideración de que todo signo tiene cuatro condiciones fundamentales. Por una parte, todo signo posee una condición representativa, es decir, todo signo está dirigido hacia algo, se refiere a algún objeto o lo representa. Asimismo, todo signo ostenta una condición presentativa, pues tiene una función, es decir, todo signo muestra alguna relación entre el objeto y la representación. Por otra parte, todo signo manifiesta una función interpretativa, pues sin sujeto interpretante no existe el signo. Por último, el signo presenta una condición triádica, referida al propio signo, al objeto y al sujeto interpretante. Así, tenemos que el signo es *algo* que se pone por *algo*, en *alguna relación* y para *alguien*.

Cuando se presentan estas tres condiciones o características, de que una grafía, gesto, imagen, etc. se pone por algo, en alguna relación y para alguien, podemos hablar del surgimiento del signo. Peirce (1986) habla de tres tipos de signos:

- Icono: Tienen una relación de semejanza, directa, con el objeto que representan. Por ejemplo: pinturas, retratos, mapas.
- Índice: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto). Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta).
- Símbolo: Representa al objeto designado en virtud de un hábito o regla que es independiente de cualquier cualidad física, o contigüidad contextual con el objeto. Ejemplo: palabras, logotipos, señales de tráfico.

El caso de las matemáticas es particularmente especial pues las expresiones matemáticas suelen combinar los tres tipos de signo, “en las expresiones algebraicas encontramos la imbricación de los tres tipos de signos en la escritura matemática: las letras funcionan como índices, los signos de las operaciones, igualdad, desigualdad, etc. son símbolos, mientras las expresiones como un todo funcionan como un icono” (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 47).

En el caso de la expresión x^2 de la que hablamos con anterioridad, con los mismos caracteres podemos también escribir expresiones como $2x$ o x_2 y, en cada caso, se representan diferentes objetos, pues podemos afirmar que cada expresión en su conjunto es icónica de una parábola, una recta y el término de una sucesión, respectivamente. Las posiciones relativas de 2 y x simbolizan aspectos diferentes, en este caso, un exponente, un coeficiente y el lugar de un término en una sucesión.

En lo que respecta al objeto matemático de nuestro interés en este trabajo, la integral de una función, tenemos que en la expresión $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, tomada en su totalidad, informa de las propiedades esenciales de la función integral, actuando como icono. Pero las letras x, a y t, tomadas de forma aislada indican magnitudes, esto es, actúan como índices, cada una de ellas indica una cantidad. Por su parte el signo “=” y las posiciones de a y x son símbolos en el sentido de Peirce, pues representan un acuerdo o regla que relaciona objetos entre sí.

Esta forma de concebir a los signos nos lleva a considerar que las representaciones semióticas y la visualización pueden referirse en general a las expresiones analíticas, a las representaciones numéricas, a las representaciones geométricas y otras, pero en este trabajo, interesados en los procesos de visualización, la intención al referirnos a los mismos, nos conduce a restringirnos al estudio de los “objetos visuales”, pues asumimos, como señala Arcavi (1999) citado en Oropeza y Lezama (2008) : “La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento” (p. 25).

Consecuentemente los procesos de visualización están indisolublemente unidos a los procesos de representación y, para la visualización se requiere el desarrollo de habilidades para convertir información de un sistema semiótico de representación a otro. Sin soslayar este hecho, en este trabajo pondremos énfasis en usar y analizar el papel que juegan las imágenes o, más apropiadamente “los objetos visuales” asociados a las representaciones geométricas usadas.

Sin embargo, reconociendo la importancia de planteamientos como los de Peirce respecto a los signos, es pertinente contar con herramientas de análisis, tanto para el diseño de actividades como para la interpretación de los impactos en el aprendizaje de los alumnos, que permitan comprender los procesos involucrados de forma más integral. Partimos de que, como se establece en general en el EOS y que aquí aplicamos para los objetos visuales, éstos se articulan en configuraciones de objetos y procesos. En este caso las configuraciones de interés se establecen entre las situaciones problema visuales, el uso del lenguaje visual, de los procedimientos visuales, las propiedades visuales, los argumentos visuales y los conceptos visuales involucrados en el estudio de la integral.

Dado que, para la visualización, aunque nos centremos en los objetos visuales, se requiere de la conversión entre representaciones, seguimos la idea de Godino et al. (2012, p. 113) respecto a que "Usualmente los objetos visuales participarán en las prácticas matemáticas junto con otros objetos no visuales (analíticos o de otro tipo). La visualización en matemáticas no se reduce a ver, sino que también conlleva interpretación, acción y relación".

Con base en estas consideraciones teóricas generales, nos proponemos desarrollar actividades para la enseñanza de la integral con apoyo en el software GeoGebra, potenciando el uso de objetos visuales en el estudio de la integral de una función y su interrelación con las formas analíticas que tradicionalmente se estudian en los textos y cursos de cálculo diferencial e integral.

La organización de las actividades didácticas se orienta con base en la noción de *idoneidad didáctica* del EOS (Godino, 2013), la cual se concibe como la articulación sistémica de seis idoneidades que atienden distintas dimensiones involucradas en los procesos de instrucción matemáticos:

- *Idoneidad epistémica*: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos/ implementados se encuentran dentro de la zona de desarrollo próximo de los estudiantes, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- *Idoneidad interaccional*: grado en el que las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos (discrepancia de significados entre sujetos) potenciales y la posibilidad de resolverlos durante el desarrollo de las actividades didácticas.
- *Idoneidad mediacional*: grado en el cual se adecúan los recursos existentes, tanto materiales como los de disposición de tiempo.
- *Idoneidad afectiva*: grado de interés y motivación del alumno con las situaciones problema planteadas y las tareas asignadas en el proceso de enseñanza.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se corresponde con el entorno, tanto curricular del curso específico, como del uso de los conocimientos matemáticos en otras asignaturas, sean de matemáticas o no, en situaciones extraescolares y otras.

El diseño didáctico

El diseño didáctico que elaboramos para abordar el estudio de la integral incluye, entre sus actividades, algunas enfocadas en las propiedades más elementales de la integral definida que suelen estudiarse en un curso de cálculo integral, con el propósito de enriquecer la noción misma de integral. Una de estas actividades es la que discutiremos en la siguiente sección. Este diseño abarca también la elaboración de applets de GeoGebra adaptados a los propósitos didácticos de cada actividad, considerando que la tecnología digital facilita la atención de casos y características visuales que no siempre se atienden en los cursos de cálculo: funciones negativas, funciones definidas en intervalos donde toman valores positivos y negativos, funciones crecientes y/o decrecientes, funciones continuas, funciones discontinuas, etc. La aplicación de las actividades didácticas se encuentra en fase preliminar y aún no se cuenta con resultados de investigación sobre su impacto en el aprendizaje.

Las figuras 3 y 4 corresponden a los applets diseñados para algunas de las actividades de la propuesta. Se pueden observar elementos visuales variables que permiten procesos de generalización de resultados: se puede cambiar la función, el intervalo, el orden de los límites de integración, la cantidad n de rectángulos, etc.

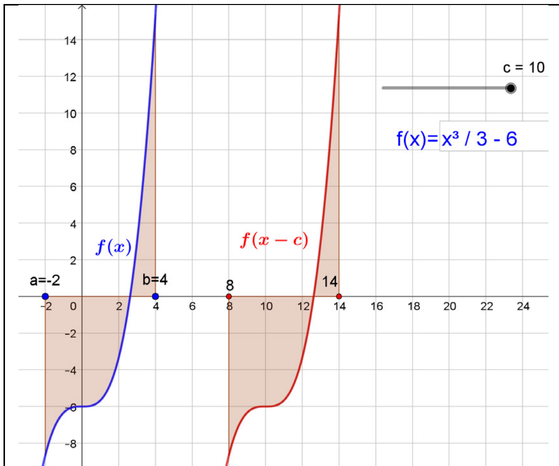


Figura 3. Applet para el estudio de la propiedad representada algebraicamente como $\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx = \int_b^a f(x-c)\,dx$

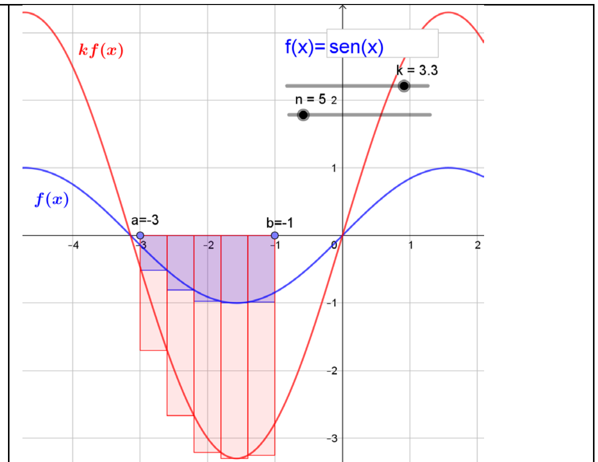


Figura 4. Applet para la propiedad representada algebraicamente como $\int_b^a kf(x)\,dx = k\int_b^a f(x)\,dx$

En la siguiente sección discutiremos la actividad correspondiente a la Figura 4, mostrando los objetos matemáticos primarios visuales que juegan un papel en la realización de las prácticas matemáticas promovidas en la actividad. Discutiremos, además, cómo la noción de idoneidad didáctica juega un papel central en el diseño de la actividad, tomando como ejemplo, por cuestiones de espacio, la idoneidad epistémica. Para ello, nos apoyaremos en una serie de descriptores de la idoneidad epistémica propuestos por el EOS (Tabla 1).

Tabla 1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (Grijalva e Ibarra, 2017)

Componente	Indicadores				
Situaciones problema	Contextualización	Ejercitación	Aplicación	Problematización	
Lenguajes	Verbal	Gráfico	Tabular	Expresión analítica	
Reglas: definiciones proposiciones procedimientos	Claros	Correctos	Adaptación al nivel educativo	Enunciados fundamentales al nivel educativo	Generar o negociar definiciones, proposiciones y procedimientos
Argumentos	Explicaciones, comprobaciones y demostraciones adecuadas al nivel educativo	Promoción de situaciones para argumentar			

Relaciones	Entre los objetos matemáticos	Identificación de significados de los objetos intervinientes	Articulación de significados de los objetos intervinien-tes		

Actividad didáctica para la propiedad $\int_b^a kf(x)\,dx = k\int_b^a f(x)\,dx$

En el libro de Leithold (1998) se presenta como teorema la siguiente propiedad de la integral definida: "Si la función f es integrable en el intervalo cerrado $[a,b]$, y si k es cualquier constante, entonces $\int_b^a kf(x)\,dx = k\int_b^a f(x)\,dx$" (p. 347). En este libro, la demostración de este teorema descansa sobre la definición analítica de integral definida como suma de Riemann y en propiedades de la suma, sin embargo, no se toma en cuenta la importancia de procesos de visualización en el desarrollo de significado para esta propiedad de la integral definida, para que no quede reducida a un simple procedimiento como "sacar la constante de la integral".

Consideramos que alrededor de esta propiedad de la integral definida se pueden promover diferentes prácticas matemáticas visuales que constituyan un significado más rico de la propiedad enunciada, así como de la integral definida. En este sentido, para la resolución de situaciones problema como estas: *¿Qué relación se puede establecer entre* $\int_b^a f(x)\,dx$ *y* $\int_b^a kf(x)\,dx$*? ¿Qué puedes afirmar en cuanto a* $\int_b^a kf(x)\,dx$ *y* $k\int_b^a f(x)\,dx$?, la actividad didáctica que proponemos promueve el desarrollo de diferentes prácticas matemáticas visuales, como las siguientes:

- Operar gráficamente con funciones, por ejemplo, multiplicar una función por una constante.
- Realizar aproximaciones sucesivas, por medio de una cantidad cada vez mayor de rectángulos, al área de una región delimitada por el eje x, la gráfica de la función $f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$.
- Elaborar conjeturas empleando una función específica, una constante específica y un intervalo específico.
- Comprobar las conjeturas variando elementos visuales de la construcción gráfica, como: el intervalo $[a,b]$, la función f, la cantidad n de rectángulos y el valor de la constante k.

Las situaciones problema planteadas, presentadas gráficamente, y no solo en el lenguaje algebraico, constituyen situaciones problema de contextualización geométrica. Además, la posibilidad de trabajar con diferentes funciones, intervalos y valores de la constante k favorece la ejercitación y aplicación de los resultados obtenidos y las conjeturas establecidas, así como la problematización (surgimiento de nuevas situaciones problema como: ¿qué pasa si la función es negativa, qué pasa si k es negativo?, etc.), atendiendo a los indicadores de la Tabla 1.

Por otro lado, la realización de las prácticas matemáticas enlistadas arriba involucra diferentes objetos matemáticos primarios visuales y no visuales: situaciones problema, lenguajes, conceptos/definiciones, procedimientos, proposiciones/propiedades y argumentos.

Situaciones problema. Se plantean las siguientes situaciones ¿Qué relación encuentras entre $\int_b^a f(x)\,dx$ y $\int_b^a kf(x)\,dx$? ¿Qué puedes afirmar en cuanto a $\int_b^a kf(x)\,dx$ y $k\int_b^a f(x)\,dx$? Se guía al estudiante para que aborde las situaciones problema de manera gráfica, explorando con funciones, intervalos, cantidad de rectángulos y valores de la constante k específicos, a través de la comparación (cualitativa y cuantitativa) de las áreas de rectángulos con alturas dadas por f y kf para mismos valores de x (Figura 5).

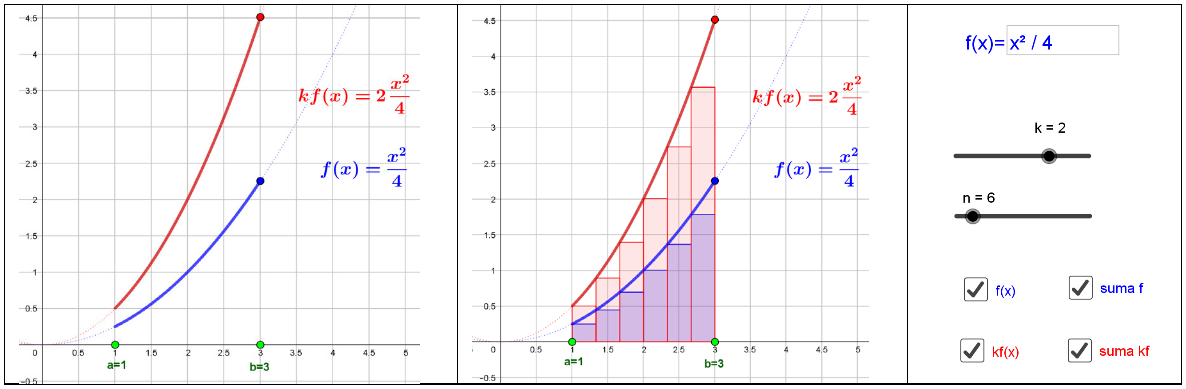


Figura 5. Comparación de áreas de rectángulos correspondientes a las funciones f y kf en el lenguaje gráfico con la mediación del applet de GeoGebra.

Lenguaje. Esta exploración implica, a su vez, que el estudiante establezca relaciones entre el leguaje gráfico y el algebraico, por ejemplo:

- La expresión analítica de la función f se asocia con la curva mostrada en GeoGebra.
- La expresión analítica $\int_b^a f(x)\,dx$ se relaciona con el área de una región limitada por la gráfica de f, $x = a$, $x = b$, y el eje x, pero distinguiendo cuándo el área y la integral coinciden (si f es positiva en $[a, b]$) y cuándo no.
- El intervalo $[a, b]$ se asocia con el segmento comprendido entre a y b sobre el eje x.

Procedimientos. Como procedimientos visuales, se promueve:

- La multiplicación de una función por una constante, la que gráficamente conduce a una contracción o a un estiramiento.
- Comparar visualmente el área de rectángulos correspondientes, de altura f y kf, respectivamente, para conjeturar que el área de uno de ellos es proporcional al área del otro, de manera que se pueda establecer una conjetura sobre la proporcionalidad de la suma de las áreas de los rectángulos correspondientes a cada función y, posteriormente, una conjetura sobre la proporcionalidad en el valor de las integrales definidas de f y kf.

Como procedimientos no visuales, se requiere:

- La multiplicación de una función por una constante en el lenguaje analítico.
- Calcular numéricamente el área de un rectángulo (fijo, y también de uno arbitrario) con altura dada por $f(x)$ o por $kf(x)$.
- Calcular antiderivadas algebraicamente.

Conceptos. Los conceptos visuales involucrados en la actividad son emergentes de actividades previas, como:

- Integral entendida como el área de la región delimitada en un intervalo por la gráfica de la función f y el eje x, cuando f es positiva en el intervalo.
- Integral como el inverso aditivo del área de la región delimitada en un intervalo por la gráfica de la función f y el eje x cuando f es negativa en el intervalo.

También se requieren algunos conceptos no visuales, como el de integral entendida como función y como antiderivada.

Propiedades. A través de la exploración guiada en el applet de GeoGebra, se favorece la emergencia de propiedades de la integral definida como las siguientes:

- Visualmente, el área correspondiente a $\int_b^a f(x)\,dx$ es mayor o menor que $\int_b^a kf(x)\,dx$ de pendiendo del valor de k.
- El área de cualquier rectángulo de altura $kf(x)$ es proporcional al rectángulo correspondiente de altura $f(x)$.

Por otro lado, se requiere que en las actividades previas hayan emergido propiedades de la integral definida como las siguientes:

- El área de la región delimitada, en un intervalo cerrado, por la gráfica de la función f y el eje x se puede aproximar, tanto como se quiera, mediante la suma del área de rectángulos cuya altura es un valor de la función, haciendo la cantidad de rectángulos cada vez más grande.
- Tanto la suma superior y la suma inferior (así como suma izquierda y derecha) de áreas de rectángulos aproximan el área de la región de interés.

Argumentos. Los argumentos se pueden basar en las propiedades visuales, así como en los cálculos realizados en el lenguaje algebraico. Además, pueden ser inductivos al variar la función, la constante k, la cantidad n de rectángulos para probar la generalidad de los resultados.

Conclusiones

Como se ha mostrado en el trabajo, la promoción de los procesos de visualización no es espontánea ni surge de manera natural. Es necesario entrenarse en el tratamiento para la formación de imágenes adecuadas y la interpretación de la información que se presenta por medio de objetos visuales.

Por otra parte, el aprendizaje de las matemáticas, así como no se pude reducir al manejo del registro algebraico o analítico y su consecuente algoritmia, tampoco se puede quedar en el nivel visual, por lo cual para la visualización es imprescindible desarrollar habilidades para la conversión entre registros de representación, articulando los objetos visuales entre sí y con los objetos no visuales inherentes a los procesos matemáticos.

Por último, se tiene proyectado aplicar los diseños con estudiantes de ingeniería y con base en los resultados obtenidos se podrán establecer conclusiones generales sobre el desarrollo de habilidades de visualización de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Duval, R. (2017). Understanding the Mathematical Way of Thinking —The Registers of Semiotic Representations. doi: 10.1007/978-3-319-56910-9.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Godino, J. D. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 30*(2), 109-130.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *10,* 7-37.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. The Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165.

Grijalva, A. (2007). *El papel del contexto en la asignación de significados a los objetos matemáticos. El caso de la integral de una función* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, U. Legaria, México.

Grijalva, A. e Ibarra, S. (2017). Una experiencia de diseño de actividades de enseñanza con base en los criterios de idoneidad didáctica. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.) *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Oropeza, C. y Lezama, J. (2008). La visualización, como estrategia de estudio en el concepto de dependencia e independencia lineal. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *21*, 23-31.

Peirce, C. S. (1966). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (vols. 1-2). Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press.

Peirce, C. S. (1986). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Nueva Visión.

Peirce, C. S. y Vericat José. (1988). *El hombre, un signo (el pragmatismo de Peirce)*. España: Editorial Crítica.

GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES, DESPERTANDO EL ASOMBRO A TRAVÉS DE LA INDAGACIÓN

DYNAMIC GEOMETRY IN CONTINUOUS TEACHER TRAINING; AWAKENING AMAZEMENT THROUGH INQUIRY

Ivette León, Constanza Ripamonti, Beatriz Flores
Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)
ileonl@uc.cl, m_constanza.ripamonti@umce.cl, bflores@mat.uc.cl

Resumen
Frente a las demandas y desafíos actuales del currículum de nuestro país, se plantea un requerimiento desde un museo interactivo para la formación continua de profesores. Se diseña un curso de Geometría para profesores de Educación Básica (primaria), donde se propone una secuencia didáctica desde la estrategia de la indagación y el trabajo colaborativo en el marco de la geometría dinámica. La secuencia permite desarrollar en los docentes las competencias necesarias para gestionar aprendizajes de los cambios e invariantes en las figuras 2D y 3D en contextos reales y geométricos, utilizando estrategias innovadoras y evaluando los aprendizajes de sus estudiantes. La investigación presenta algunos de los resultados obtenidos al evidenciar los obstáculos en el aprendizaje de la didáctica de la geometría en profesores en ejercicio.

Palabras clave: formación de profesores, geometría dinámica, indagación, obstáculos, aprendizaje colaborativo

Abstract
Faced with the current demands and challenges of the national curriculum, we raised a requirement, from an interactive museum, for continuous teachers' training. A geometry course is designed for primary school teachers, where a teaching sequence is proposed from the inquiry strategy and the collaborative work in the frame of dynamic geometry. This sequence allows developing on teachers the needed competences to manage learning of the changes and invariants in 2D and 3D figures, in real and geometrical contexts, by using innovative strategies and by evaluating their students' learning. The research shows some of the results obtained when evidencing in service teachers' obstacles in the learning of geometry didactics.

Key words: teacher training, dynamic geometry, Inquiry, obstacles, collaborative learning

Introducción

"Es bastante extraño ver que a muchos niños les desagrada las matemáticas, pero si observamos a los más pequeños son muy intuitivos. Hemos visto circuitos en el cerebro que se ocupan de los números, del espacio o la geometría que están presentes en la infancia temprana. Creo que el error en la escuela es enseñarle a los niños que la matemática es muy abstracta, muy complicada. Si basáramos las matemáticas en intuiciones, que ya están presentes en el cerebro del niño, podríamos ayudarles a que las disfruten."

Stanislas Dehaene, El cerebro matemático

Las nuevas Bases Curriculares como currículum vigente para la enseñanza de la asignatura de Matemática en Educación Básica en Chile, demandan que el profesorado entregue a sus estudiantes oportunidades para que estos sean protagonistas activos en la construcción de sus aprendizajes.

Con relación a la situación de la enseñanza aprendizaje de la Geometría, lo que se espera que aprendan los estudiantes es:

En este eje, se espera que los estudiantes aprendan a reconocer, visualizar y dibujar figuras, y a describir las características y propiedades de figuras 2D y 3D en situaciones estáticas y dinámicas. Se entregan algunos conceptos para entender la estructura del espacio y describir con un lenguaje más preciso lo que ya conocen en su entorno. El estudio del movimiento de los objetos - la reflexión, la traslación y la rotación - busca desarrollar tempranamente el pensamiento espacial de los alumnos (Mineduc, 2012 p 91).

En el Eje de Geometría, Chile es uno de los países que presenta puntajes más bajos en las mediciones internacionales como, por ejemplo, en las pruebas Timss de 2011 y 2015. (Agencia de la Calidad de la Educación, 2017). En la comparación de ambas mediciones se observa que Chile es el único país cuyo rendimiento no aumentó en el dominio de contenido de Figuras Geométricas y Medidas entre 2011 y 2015.

Según estudio del MIDE UC (Rodríguez, Mahias, Maira, González, Cabezas, Portigliati, 2016), los docentes reconocen principalmente (Tabla 1) debilidades en el diseño o implementación de estrategias metodológicas o didácticas adecuadas, que atiendan a la diversidad de estudiantes, o en el uso de recursos de aprendizaje; déficit a nivel del conocimiento sobre la disciplina, la asignatura o del currículum nacional; dificultades para conducir o gestionar los momentos de la clase, y debilidades en el diseño o aplicación de instrumentos de evaluación pertinentes entre otros (Fig. 1).

TIPO DE DEBILIDAD	DEFINICIÓN
Estrategias de enseñanza	Debilidades en el diseño o implementación de estrategias metodológicas o didácticas adecuadas, que atiendan a la diversidad de estudiantes, o en el uso de recursos de aprendizaje.
Gestión de la clase	Dificultades para conducir los momentos pedagógicos de la clase, administrar el tiempo durante su desarrollo o activar la motivación de los estudiantes.
Estrategias de evaluación	Debilidades en el diseño o aplicación de instrumentos de evaluación pertinentes o en el uso de los resultados de la evaluación para retroalimentar a los estudiantes.
Conocimiento pedagógico o dominio de asignatura	Déficit a nivel del conocimiento sobre la disciplina o asignatura, o del currículum nacional.
Gestión de la convivencia	Dificultad para gestionar la convivencia con los estudiantes y establecer un clima de aula apropiado para el aprendizaje.
Trabajo con otros	Dificultad para llevar a cabo un trabajo colaborativo con colegas o para incorporar a la familia o apoderados en las actividades.
Características personales	Debilidades asociadas a características individuales, físicas, socioemocionales o rasgos de personalidad que afectan negativamente el trabajo del profesor.
Organización del trabajo fuera del aula	Dificultades para organizar el trabajo administrativo o profesional fuera del aula.
Debilidades externas	Dificultades que no son propias del docente, sino de otros factores externos a él.

Tabla 1. Clasificación de debilidades percibidas por los profesores (Fuente: Rodríguez et al., 2016)

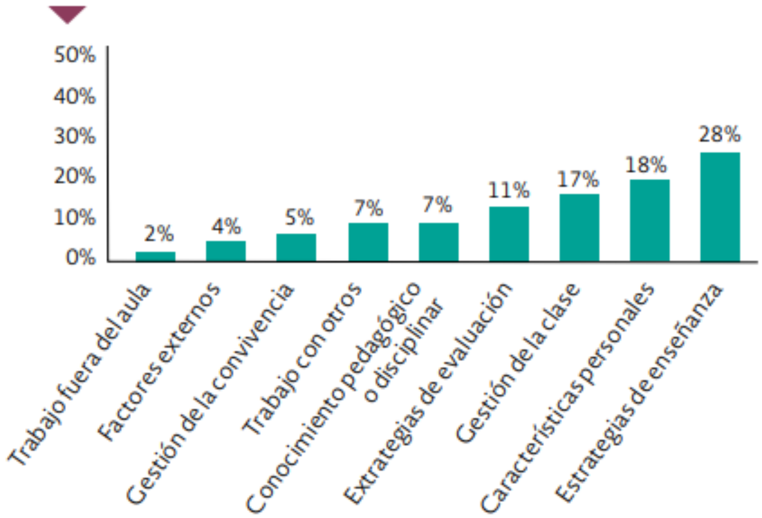


Fig. 1. Distribución de los tipos de debilidades que los docentes perciben sobre su práctica.
(Fuente: Rodríguez et al., 2016)

Rodríguez, Carreño, Muñoz, Ochsenius, Mahías y Bosch, (2013) en su investigación orientan la formación continua de los profesores de Educación Básica hacia el desarrollo de oportunidades de aprendizaje con base en su propia práctica, es decir, instancias de formación cuyo objetivo sea promover la reflexión pedagógica en contexto, con foco en el aprendizaje de los estudiantes.

En virtud de lo anterior, en el año 2016 se diseña un curso para docentes de Educación Básica cuyas claves se fundamentan en el asombro, la indagación, la exploración autónoma, lo lúdico entendido como el goce y la diversión por aprender, la interactividad que conlleva la experimentación y el aprendizaje colaborativo.

El objetivo es hacer reflexionar a los docentes sobre su práctica y la forma de proveer a sus estudiantes de oportunidades de aprendizaje en la clase de Geometría que promuevan el desarrollo de habilidades de pensamiento matemático.

El curso fue aplicado a diferentes grupos de docentes en todo el país y evaluado durante 3 años (2016-2019). Ha sido fuente de información sobre los errores y obstáculos recurrentes en el aprendizaje de la geometría, sus creencias y las conceptualizaciones desarrolladas en su propia formación. Esto en contraste con los efectos de la didáctica de una geometría dinámica, que incluye la estrategia del asombro y la indagación como modelos para fortalecer el aprendizaje en la matemática.

Marco referencial

La indagación como modelo de aprendizaje en la práctica

Los modelos de enseñanza aprendizaje centrados en la transmisión, han favorecido tradicionalmente en los estudiantes actitudes de desidia, de recepción pasiva o de reproducción de la información, mientras que las actitudes de interés y participación activa se han visto desfavorecidas. Es por ello que se debe hacer énfasis en la generación e implementación de modelos de enseñanza aprendizaje efectivos para el desarrollo de competencias básicas, así como de estrategias que estimulen la motivación intrínseca de los estudiantes por aprender, es decir, favorecer una educación matemática de calidad, pero… ¿qué entendemos por educación científica y matemática de calidad?

El grupo de trabajo que avala el proyecto de investigación basado en la indagación para el aprendizaje de la ciencia y matemática PRIMAS (Abril, García, Ariza, Quesada y Ruiz, 2011), entiende por educación científica y matemática de calidad aquella que favorezca en los estudiantes, entre otros aspectos:

- La estimulación de la motivación intrínseca y genere interés por aprender ciencias y matemáticas;
- El desarrollo de conocimiento básico;
- El uso de tareas relacionadas con su vida cotidiana y de ámbito interdisciplinar;
- El aprendizaje a partir de sus errores;
- El desarrollo autónomo y acumulativo del aprendizaje;
- La cooperación entre estudiantes; y
- La reducción de los estereotipos de género.

Algunas de las acciones que están implicadas en el aprendizaje basado en indagación son: observar y visualizar, clasificar y crear definiciones, realizar representaciones y conectarlas entre sí, calcular, medir y cuantificar, valorar, experimentar y controlar las variables. Como han señalado algunos autores, se trata de desarrollar las capacidades humanas naturales que empleamos desde nuestro nacimiento para aprender. Cuando los profesores aprovechan y desarrollan estas capacidades para ayudar a los alumnos a comprender conceptos matemáticos y científicos, los alumnos se interesan y se involucran mucho más en su aprendizaje (PRIMAS, 2010a).

El Museo mandante de este proyecto tiene como misión “ofrecer a sus visitantes una experiencia autónoma, lúdica e interactiva de aproximación a las ciencias” (MIM, 2017), para ello ha desarrollado un modelo educativo que se basa en los pilares que se observan en la Figura 2 (Fig. 2).

Este modelo educativo también considera la indagación como exploración autónoma a partir de la motivación intrínseca de la visitante producida por el asombro y la interacción lúdica con sus módulos.

Fig. 2. Modelo Educativo Museo MIM (Fuente: Modelo Educativo. Documento Ejecutivo, MIM, 2017)

El asombro y la curiosidad como motores del aprendizaje

L’Ecuyer (2014) propone que el alcance del asombro es mayor que el de una mera respuesta emocional, ya que la segunda sería una consecuencia de la primera y no a la inversa. La curiosidad es la necesidad de explicar lo inesperado (Piaget, 1969) o bien la necesidad de saber más (Engel, 2011), y puede ser una respuesta instintiva. “El asombro es el deseo de conocer lo desconocido, pero también lo conocido. Ante lo ya conocido, un niño puede asombrarse una y otra vez, porque el asombro consiste en “nunca dar nada por supuesto”, incluso lo que ya se conoce.” (L’Ecuyer, 2014)

Según la autora, el asombro es una especie de conciencia basada en la realidad, de que algo “pudo ser” (una primera vez) y “podría no ser más” (una última vez).

En el modelo educativo del museo, el asombro aparece en el primer nivel de la experiencia, cuando la persona toma primer contacto a través de sus sentidos, interpretando estas sensaciones para generar percepciones y también evocando emociones positivas.
La confianza, la curiosidad y el asombro se declaran elementos esenciales para el logro de una visita autónoma, lúdica e interactiva (MIM, 2017).

La geometría del movimiento y el cambio, una didáctica de la geometría dinámica

En Chamorro (2006) se postula la relevancia de cambiar los modelos de enseñanza aprendizaje de la Geometría hacia una *geometría dinámica* que favorezca:

- La enseñanza a través de modelos móviles o software dinámico que permita comprender las figuras geométricas desde sus propiedades invariantes y no desde la posición o el tamaño.
- El aprendizaje de las relaciones de las figuras entre sí por composición o descomposición.
- La comparación de semejanzas y diferencias y, por lo mismo, la conceptualización o clasificación.

Por el contrario, el uso de un modelo *estático* de enseñanza de la geometría produce efectos evidentes que se han traducido en una serie de obstáculos didácticos que emergen apenas se profundiza un poco en los conocimientos geométricos que tienen estudiantes o profesores:

- No identifican los elementos de las figuras (ángulos, base, altura lados) si esta se encuentra en una posición diferente a la presentada tradicionalmente en formatos rígidos como textos, láminas o guías de trabajo.
- No son capaces de construir o dibujar figuras o elementos de ellas en una posición diferente a la línea base habitual.
- No reconocen figuras rotadas, reflejadas o trasladadas como la figura original.
- No son capaces de imaginar y reproducir los efectos de transformaciones en figuras.

Sandoval (2009) plantea que una dificultad conocida por los profesores de geometría es la relacionada con el aprendizaje de las propiedades geométricas. Esto implicaría la capacidad de descubrir relaciones en la estructura de los objetos geométricos, la posibilidad de expresar dichas propiedades tanto de manera oral como escrita o a través del dibujo. Una posible causa de esta dificultad es el tipo de representación estática que se utiliza para *mostrar* las ideas geométricas durante una clase.

Trabajo colaborativo, potenciador del aprendizaje

Los estilos tradicionales de enseñanza no fomentan el debate de ideas entre los estudiantes. Sin embargo, no todos los estudiantes que trabajan juntos y se comunican logran aprendizajes científicos de calidad.

En el proyecto PRIMAS (2010b) se han generado algunas sugerencias para profesores con el fin de favorecer el debate científico en el trabajo colaborativo:

- tener en cuenta aquellas características del debate que favorecen el proceso de aprendizaje;
- reconocer y afrontar sus propias inquietudes acerca de la introducción del debate cooperativo en sus clases;
- estudiar las técnicas que fomentan un debate eficaz entre estudiantes;
- ser consciente de su propio papel en la gestión del debate entre estudiantes;
- preparar clases basadas en debates.

Herrada y Baños (2018) analizan diferentes estudios que relacionan el aprendizaje de la matemática y estrategias de aprendizaje colaborativo:

- La complejidad del mundo real, tal y como es representado mediante las Matemáticas, puede abordarse de forma eficaz haciendo uso de dicha metodología activa, ya que puede ayudar a percibir mejor la realidad (Llopis-Pla, 2011).
- El Aprendizaje Colaborativo es una herramienta imprescindible para el estudio de las Matemáticas, ya que favorece el aprendizaje significativo y la cultura científica, mejorando el clima en el aula al implicar a docentes y discentes en una tarea común (Vilches y Gil-Pérez, 2011)
- Las estrategias metacognitivas utilizadas por los estudiantes para mejorar de forma significativa el aprendizaje siguiendo estrategias cooperativas (Mato-Vázquez, Espiñera, y López-Chao, 2017).

Metodología/ Modelo para el diseño del curso

En el diseño del curso de Geometría para profesores de Educación Básica en ejercicio (1° a 6° grado) en el marco del Programa de Formación Continua de un museo de tercera generación, como el MIM, con un modelo educativo definido, *se elaboró un modelo para cada secuencia de actividades propuestas a los profesores* de manera que integrara aspectos como la curiosidad, la indagación y el trabajo colaborativo como pilares fundamentales para lograr aprendizajes de calidad. (Fig. 3)

Fig. 3. Modelo de diseño de ciclo/secuencia de actividades (Elaboración propia)

Ejemplo de un ciclo de actividades o secuencia:

En este modelo se considera iniciar cada ciclo con una experiencia que *despierte la curiosidad*, un experimento, un desafío, una exploración de fenómenos físicos, un cuento, un video, una exploración digital o con material concreto; es una vivencia personal de descubrimiento, donde no hay respuestas esperadas ni tareas específicas, hay una puesta en común abierta a descubrimientos tanto cognitivos como afectivos.

Iniciamos el ciclo con una historia extraída de la novela "Señor Dios soy Anna" (Hopkins, 1974) donde se relata un juego con espejos y una línea. La pregunta que activa la curiosidad es ¿Qué creen que vio Anna? Se les pide un dibujo con lo que imaginaron.

El segundo momento del modelo incluye actividades *colaborativas* de *indagación* con material manipulativo, en este momento hay tareas propuestas que dirigen la exploración de manera flexible con múltiples soluciones, el objetivo es levantar y descubrir los *conocimientos previos* de los docentes, producir desequilibrios cognitivos que permitan la *resignificación* de los conceptos geométricos involucrados.

Los profesores exploran con libros de espejos, papel, lápices y regla para reproducir la situación descrita en la lectura y explorar diferentes respuestas dependiendo de las diferentes posiciones de la línea y los espejos. Ponen en común sus descubrimientos.

El tercer momento está incluido en la actividad de indagación, ya que propone tareas que permiten ir sistematizando los descubrimientos del grupo para poder alcanzar algunas generalizaciones y ponerlas a prueba, realizando así un proceso *inductivo-deductivo.*

Se les entregan diferentes figuras 2D (triángulos, paralelogramos, hexágonos, entre otros) y se les pide que observen y dibujen lo que pasa al interactuar con el libro de espejos. Comentan en grupo y responden preguntas ¿Qué nuevas figuras se forman? ¿Qué pasa con los ángulos de abertura de los espejos? Resuelven problemas que involucran las figuras de las que disponen y otros en los que la figura no está disponible.

El cuarto momento busca fortalecer la habilidad comunicativa de los docentes y el análisis metacognitivo de los aprendizajes tanto conceptuales/disciplinares como didácticos/pedagógicos.

Se les pide analizar el trabajo colaborativo, sus aprendizajes y los conceptos geométricos relacionados con la actividad de indagación con el espejo y las figuras 2D.

El último momento se refiere a la reproducibilidad de la enseñanza y a la posibilidad que tienen los profesores de transferir sus experiencias y aprendizajes a su propia realidad de aula. Las tareas se refieren a relacionar el trabajo del ciclo de actividades con el currículum nacional, los niveles de aprendizaje de sus estudiantes, la diversidad dentro de sus aulas, seleccionar y adaptar materiales y actividades propuestas a su realidad, entre otras.

Resultados

Desde la primera implementación del curso con docentes de Educación Básica (primaria), se observaron conocimientos previos, creencias y actitudes emergentes en los primeros momentos de cada ciclo del diseño que se manifestaban potencialmente como obstáculos de aprendizaje de la Geometría.

Para efecto del análisis, se presentan algunas evidencias de obstáculos didácticos según las siguientes categorías basadas en los autores revisados:

a) Obstáculos originados a partir de una *enseñanza estática* como único modelo para aprender geometría:

Los profesores:

- No identifican los elementos de las figuras si ésta se encuentra en una posición diferente a la presentada tradicionalmente, por ejemplo, no reconocen triángulos rectángulos que estén presentados en distintas posiciones.
- Se observa resistencia para construir o dibujar figuras o elementos de ellas en una posición diferente a la línea base habitual, por ejemplo, se les hace difícil representar las vistas y la proyección isométrica de figuras construidas.
- Se les dificulta imaginar y reproducir los efectos de transformaciones en figuras, por ejemplo, al pedirles que muestren en un dibujo sobre una cuadrícula la imagen rotada, trasladada o reflejada de una figura en posición.
- No consideran figuras constitutivas de otras figuras ni de figuras constituidas por otras varias, lo que les impide relacionar figuras con base en criterios de composición y descomposición, por ejemplo, al pedirles

que formen diferentes cuadriláteros usando solo triángulos, en general, obtienen el cuadrado, el rectángulo, el romboide, pero no hay indagación para formar un trapezoide o un trapecio.

b) Obstáculos originados a partir de *la ausencia de un nivel suficiente de representación intrafigural* de la geometría:

Los profesores:

- Tienen la idea de independencia de las figuras entre sí, considerando cada una como un ente aislado de las demás, por ejemplo, al intentar clasificar un cuadrado como rombo y rectángulo se resisten, ya que su preconcepto es que un cuadrado es solo un cuadrado.
- Consideran en forma aislada y exclusiva las propiedades esenciales de una figura sin poder compararlas con aquellas que son consideradas en su clase correspondiente, por ejemplo, reconocen que es un cuadrilátero, pero no pueden encontrar otras características comunes a otras figuras para encontrar su clase y nombrarlo.

c) Obstáculos originados desde *el uso de diferentes registros* en la geometría:

Los profesores:

- Manifiestan dificultad en expresar las propiedades tanto de manera oral como escrita o a través del dibujo (o gestos), por ejemplo, al dar indicaciones de cómo construyen una figura con las piezas del tangrama y los movimientos (transformaciones) que realizan con las figuras.
- Cometen errores debidos a la dificultad del lenguaje, por ejemplo, al identificar y nombrar figuras, al precisar una descripción, al argumentar una solución o enviar un mensaje de construcción.
- Cometen errores debidos a dificultades para obtener información espacial, por ejemplo, al escuchar una descripción literaria de una actividad con espejos, no son capaces de imaginar y representar lo relatado al contener marcadores espaciales.

Conclusiones

Primeras evidencias sobre efectividad del diseño para el aprendizaje de la geometría en profesores

El modelo basado en la indagación ha resultado inclusivo, desafiante y motivador para los diferentes grupos de profesores, pese a las diferencias en la formación profesional de cada docente. Cada grupo ha desarrollado conclusiones y reflexiones tanto geométricas como pedagógicas que permiten avanzar en su desarrollo profesional y transferir los aprendizajes al aula.

Así mismo, como señala Chamorro (2006), el cambio de modelo de enseñanza a una geometría dinámica a través de modelos móviles favorece la comprensión de las propiedades invariantes y las relaciones entre figuras, así como la construcción de conceptos y la clasificación a través de la comparación de semejanzas y diferencias.

El trabajo colaborativo de indagación se manifiesta en la aplicación de este diseño eficaz en el desarrollo de habilidades comunicativas, la argumentación científica, el aprendizaje en la práctica de modelos de gestión pedagógica y aprendizajes disciplinares y didácticos en juego en la formación continua de los profesores. (PRIMAS, 2010b).

Estos resultados refuerzan la necesidad de continuar sistematizando la información recogida de la aplicación de un diseño de formación continua de profesores que incorpore modelación de procesos indagativos (científicos) en el aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Abril, A. M., García, F. J., Ariza, M. R., Quesada, A. y Ruiz, L. (2011). Aprendizaje en ciencias y matemáticas, basado en la investigación, para la formación del profesorado europeo. En Ana Abril. (Ed.). *XXIV Encuentros de Didáctica de las Ciencias Experimentales.* (pp. 604-612). Baeza, España: Departamento Didáctica de las Ciencias y Asociación Española de Profesores e Investigadores en Didáctica de las Ciencias Experimentales (APICE). Recuperado de: https://www.pedocs.de/volltexte/2013/7214/pdf/Abril_et_al_2011_EDCCEE.pdf

Agencia de la Calidad de la Educación. (2017). *Informe de Resultados Nacionales TIMSS 2015.* Santiago de Chile. Recuperado de: http://archivos.agenciaeducacion.cl/informe_nacional_de_resultados_TIMSS_2015.pdf

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid, España: Pearson Educación S.A.

Dehaene, S. (2016). *El cerebro matemático*. Buenos Aires, Argentina: Siglo Veintiuno Editores.

Engel, S. (Diciembre, 2011*).* Children's need to know: curiosity in schools. *Harvard Educational Review*, *81*, 625–645.

Herrada, R. y Baños, R. (2018). Experiencias de aprendizaje cooperativo en matemáticas*. Espiral. Cuadernos del Profesorado*. *Revista Multidisciplinar De Educación*, *11* (23), 99-108. Recuperado de: http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/6220/2131-6251-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Hopkins, S. (1974). *Señor Dios, soy Anna*. Londres: William Collins Sons & Co. Ltd.

L´Ecuyer, C. (2014). *The wonder approach to learning*. Frontiers in Human Neuroscience. Recuperado de: https://doi.org/10.3389/fnhum.2014.00764

Llopis-Pla, C. (2011). Aprendizaje cooperativo. *Crítica, 972*, 37-41.

Mato-Vázquez, D., Espiñera, E. y López-Chao, V.A. (2017). Impacto del uso de estrategias metacognitivas en la enseñanza de las Matemáticas. *Perfiles Educativos, XXXIX (158),* 91-111.

MIM (2017) (Museo Interactivo Mirador). *Memoria Anual 2017,* 29. Recuperado de: https://mim.cl/index.php/el-museo/publicaciones

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares para la Educación Básica.* Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación, Ministerio de Educación. Recuperado de: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=2ahUKEwiRq7WT1szmAhVxE7kGHQkKCJMQFjAAegQIARAC&url=http%3A%2F%2Farchivos.agenciaeducacion.cl%2Fbiblioteca_digital_historica%2Forientacion%2F2012%2Fbases_curricularesbasica_2012.pdf&usg=AOvVaw3nB_2h7xIz0dvB7FPrdMzM

Piaget, J. (1969*). The Psychology of Intelligence*. NY: Littlefield, Adams.

PRIMAS (2010a). *Aprendizaje de conceptos por investigación.* Reino Unido: © University of Nottingham. Recuperado de: https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/1340_53_3_Concepts-ES.docx

PRIMAS (2010b). *Promover el trabajo colaborativo*. Reino Unido: © University of Nottingham. Recuperado de: https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/1363_43_5_Collaborative_work-ES_revisado_final.doc

Rodríguez, B., Mahias, P., Maira, M.P., González, M.C., Cabezas, H., y Portigliati, Ca. (2016). La mirada de los profesores: debilidades que reconocen en su práctica y cómo proponen superarlas. *MidEvidencias 5, 1-6.* Recuperado de: https://www.mideuc.cl/wp-content/uploads/2016/MidEvidencias-N5.pdf

Rodríguez, M.B., Carreño, X., Muñoz, V., Ochsenius, H., Mahías, P. y Bosch, A.(2013) *¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?*: MINEDUC. Recuperado de: https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-F611150-PUC-Beatriz-Rodríguez.pdf

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, *21*(1), 5-27. Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262009000100002&lng=es&tlng=es

Vilches, A. y Gil-Pérez, D. (2011). El trabajo cooperativo en las clases de ciencias: una estrategia imprescindible pero aún infrautilizada. *Alambique, Didáctica de las Ciencias Experimentales, 69*, 73-79.

CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO RELACIONAL DE NIÑOS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL

CHARACTERISTICS OF THE RELATIONAL THOUGHT OF INTELLECTUAL DISABLED CHILDREN

Paulina Romero Montes Oca, Carolina Carrillo García, J. Marcos López-Mojica
Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma de Guerrero (México)
pauu.montes.de.oca@gmail.com, cgcarolin@hotmail.com, mojicajm@gmail.com

Resumen
El presente trabajo tuvo la finalidad de promover un pensamiento relacional por medio de los patrones figurales lineales. Para lo anterior, se caracterizaron los desempeños que mostraron los alumnos (con discapacidad intelectual en nivel moderado y leve): formas de pensamiento y uso de esquemas compensatorios para establecer tipos y niveles de compresión matemática. Los resultados de esta investigación cualitativa pretenden ser un apoyo para el docente frente a grupo que tenga en su aula alumnos con estas características y así aportar estrategias didácticas para potenciar las capacidades de los niños.

Palabras clave: discapacidad intelectual, pensamiento relacional, esquemas compensatorios

Abstract
This research work was aimed at promoting a relational thought by using linear shape patterns. So, we characterized the performance shown by students (with low and moderate level of intellectual disability) to establish types and levels of mathematical understanding: ways of thinking and the use of compensatory schemes. The results of this qualitative research aim to be a support for teachers who have intellectual disabled students in their classrooms, and to provide didactic strategies for enhancing children abilities.

Key words: Intellectual disability, relational thought, compensatory schemes.

Introducción

En la actualidad, a pesar de los esfuerzos que se han realizado en la educación básica en México (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2010), aún se percibe una inadecuada o escasa atención a los alumnos con algún tipo de discapacidad. Esto puede deberse, entre otros aspectos, a que los docentes frente a grupo, en ocasiones no tienen los conocimientos ni las estrategias necesarias para poder trabajar con esta población. Lo anterior lleva a contribuir involuntariamente en el rezago o deserción por parte de los alumnos. (Acle, Roque, Zacatelco, Lozada y Martínez, 2007).

En ese sentido, a partir de la experiencia docente de la primera autora, surgió la necesidad de implementar actividades favorecedoras para la inclusión de niños con Discapacidad Intelectual (DI) en el aula regular. Dado que actualmente en México se está viviendo un movimiento en el que, según instancias institucionales, los niños con discapacidad deben ser incorporados en las aulas regulares de la educación básica (SEP, 2010). Sin embargo, se carece de estrategias de enseñanza que promuevan un pensamiento matemático.

Los aportes presentados en esta investigación tienen la finalidad de ser un apoyo para el docente frente a grupo que tenga en su aula alumnos con estas características, de tal manera que pueda diseñar estrategias didácticas para potenciar las capacidades de esta población y así desarrollar un pensamiento matemático dada la naturaleza de la discapacidad.

Planteamiento del problema

Indagar sobre el pensamiento algebraico de personas con discapacidad es un reto actual para la Matemática Educativa. Más aun, el enfoque de la educación inclusiva es relativamente joven con muchos campos posibles de actuación. Quizá debido a ello, el establecimiento de marcos de referencia para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de tópicos matemáticos son objeto de estudio de escasas investigaciones en nuestra disciplina (López-Mojica, 2013). En ese sentido, la problemática atendida desde este proyecto de investigación recae en el poco énfasis que hay en el campo de la Educación Especial y, por consiguiente, en la falta de atención en el ámbito educativo hacia personas con DI.

Por otro lado, diversos resultados de investigación en torno a la enseñanza del álgebra han reconocido la transición de la aritmética al álgebra (Gallardo y Rojano, 1988; Aké, 2013) como un factor determinante que puede provocar errores en el pensamiento algebraico (dentro del cual se encuentra el pensamiento relacional), y produce no sólo frustración y rechazo por parte de los alumnos, sino también poca comprensión.

Kaput y Blanton (2001) argumentan la importancia de enseñar los conceptos algebraicos en el sistema educativo básico ya que el pensamiento algebraico se encamina a desarrollar habilidades de generalización, expresión y justificación. Por ello, existen diversas investigaciones que aportan avances para determinar qué tratamiento didáctico se le puede dar a esta problemática tratando siempre de que los alumnos sean los principales beneficiados y que sea menos enfática la ruptura entre la aritmética y el álgebra. Derivado de ello, ha resultado una tendencia curricular llamada *Early Algebra*, en la que se propone un cambio en el currículo escolar a nivel primaria, implementando el álgebra en este nivel educativo con la finalidad de que desde la primaria se comiencen a trabajar sus principios básicos; y así, en el momento en que los alumnos lleguen a la secundaria, tengan una mayor movilidad de saberes algebraicos y puedan comprender mejor sus conceptos y principios (Socas, 2011).

Entre los ejemplos de investigadores que apoyan esta propuesta podemos señalar, por ejemplo, a Empson, Levi, y Carpenter (2011) quienes señalan la importancia de llevar a cabo un enfoque del pensamiento relacional en el currículo elemental, ya que a través de él es posible llegar al pensamiento algebraico. La comprensión relacional se traduce en una eficiencia en el aprendizaje de las matemáticas avanzadas, tales como el álgebra (Empson, Levi, y

Carpenter, 2011), lo cual es un objetivo dentro de la propuesta *Early Algebra*. Molina (2009) señala al respecto que la introducción del pensamiento algebraico en la matemática escolar desde los primeros cursos se da mediante la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Por su parte, Socas (2011) argumenta que una parte de esta transición recae en la idea de desarrollar el pensamiento relacional a través de patrones (Zapatera, 2016). Lo anterior concuerda con lo señalado por Godino y Font (2003) cuando explican que el álgebra es la ciencia de los patrones y el orden.

Señalando estas dos vertientes: la poca atención que existe hacia los alumnos con discapacidad y la dificultad que provoca la transición de la aritmética al álgebra, la presente investigación se interesó en desarrollar estrategias para disminuir las dificultades a las que se enfrentarían los alumnos con DI y así poder ofrecerles una matemática básica integral. Se conjetura que un medio que permitiría el acercamiento entre el *Early Algebra* y la DI son los materiales didácticos, dada la oportunidad que brindan para interactuar con ellos, además de ser un medio para mantener la atención y la motivación en esta población.

Por lo tanto, el problema radica en la deficiente atención escolar a los niños con DI para desarrollar un pensamiento matemático con sus propias características y propios medios (Vigotsky, 1997). Es decir, es necesario conocer sus capacidades de manera más precisa o que los profesores traten de desarrollarlas, ya que los docentes que nos desempeñamos en la educación regular generalmente no tenemos la suficiente preparación para trabajar con alumnos con discapacidad.

De lo anterior se planteó la pregunta ¿Qué caracteriza el pensamiento relacional de niños con DI al resolver tareas sobre patrones figurales lineales? Para dar una respuesta se estableció el siguiente objetivo caracterizar la construcción del pensamiento relacional de niños con DI al resolver problemas de patrones lineales.

Una primera pista para abordar esta tarea fue la consideración los esquemas compensatorios (López-Mojica, 2009) que los niños utilizan para generar aprendizaje ante tareas sobre patrones figurales lineales, en las cuales se empleen materiales didácticos, además de someter a escrutinio el desempeño de los niños (Inhelder, 1971).

Fundamento teórico

Dada la naturaleza del proyecto de investigación, se consideró una perspectiva teórica que permite el análisis de los fenómenos que surgen de la enseñanza de las matemáticas a personas con discapacidad. En ésta se consideran tres elementos, organizados en tres ejes rectores: eje epistemológico, eje cognitivo y eje didáctico (López-Mojica, 2013).

Eje epistemológico. Interesó la tendencia del *Early Algebra* (Socas, 2011), que establece la introducción de nociones matemáticas lo más temprano posible en el currículo y que permitan el desarrollo del pensamiento algebraico. En particular el interés al pensamiento relacional a través de patrones figurales lineales, entendido como "actividad o acción intelectual de examinar y buscar relaciones entre objetos matemáticos, reflexionar y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados" (Molina y Castro, 2006, p. 4).

> El pensamiento relacional es un precursor crítico (quizás el más crítico) del álgebra, porque si los niños comprenden la arquitectura matemática que aprenden, entonces están mejor preparados para resolver problemáticas y generan nuevas ideas en el dominio del álgebra (Empson, Levi, y Carpenter, 2011, p. 17).

El pensamiento relacional consta de tres partes importantes: la correspondencia, la relación uno a uno y la seriación:

Correspondencia: "Es la capacidad del niño de establecer relaciones simétricas (de igualdad) entre un objeto y otro; es decir cuando se le presenta al niño un grupo de objetos el niño elige uno y luego busca a través de comparaciones encontrar ciertas equivalencias o igualdades en cuanto a sus riesgos característicos entre un objeto y otro" (Bautista, 2013, p. 5).

Relación uno a uno: "La correspondencia uno a uno consiste en la asignación de una sola etiqueta o rótulo verbal a cada ítem de la colección. De esta manera, para contar la totalidad de sus elementos, es necesario que a cada uno de ellos se le asigne una sola palabra de la secuencia numérica convencional" (Orozco, 2008, p. 1).

Seriación: "Es la capacidad que tiene el niño para ordenar objetos según un determinado criterio común a todos, este proceso lo hace comparando un objeto con otro y encontrando al mismo tiempo su diferencia, para ejecutar esto el niño establece relaciones asimétricas. Por ejemplo: criterio común palos a los cuales los ordena comparando uno con otro según su tamaño" (Bautista, 2013, p. 18).

Para esta investigación se consideró que un patrón es "una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia" (Orozco, 2016, p, 2).

Eje cognitivo. Según Vigotsky (1997), la peculiaridad positiva del niño con discapacidad no se debe al hecho de que en él desaparezcan funciones observables en un niño normal, sino a que la desaparición de funciones hace nacer *nuevas formaciones* que representan en su unidad la reacción de la personalidad de la discapacidad. Los procesos cognitivos de memoria de trabajo, atención y percepción están íntimamente relacionados con el esquema visual y en conjunto desarrollan un esquema compensatorio que superan las dificultades del pensamiento en las personas con discapacidad intelectual (López-Mojica, 2013).

Eje didáctico. Se tomó en cuenta la definición de materiales didácticos propuesta por Alsina, Burgués y Fortuny (1998) como "objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje" (p. 13). En cuanto a la relevancia del material didáctico, esta investigación se orienta por la propuesta de Empson, Levi y Carpenter (2011), quienes destacan que los materiales concretos se utilizan para apoyar el desarrollo del pensamiento relacional, ya que éste ayuda a generar relaciones, a crear estrategias y ayuda a los estudiantes a generar operaciones más eficientes para simplificar sus procesos.

Metodología

La investigación de tipo cualitativa (Vasilachis, 2009) se desarrolló en cuatro fases que se muestran en la Figura 1. De manera particular interesaron los desempeños de los estudiantes en las tareas de patrones figurales lineales para poder identificar indicios de su pensamiento relacional.

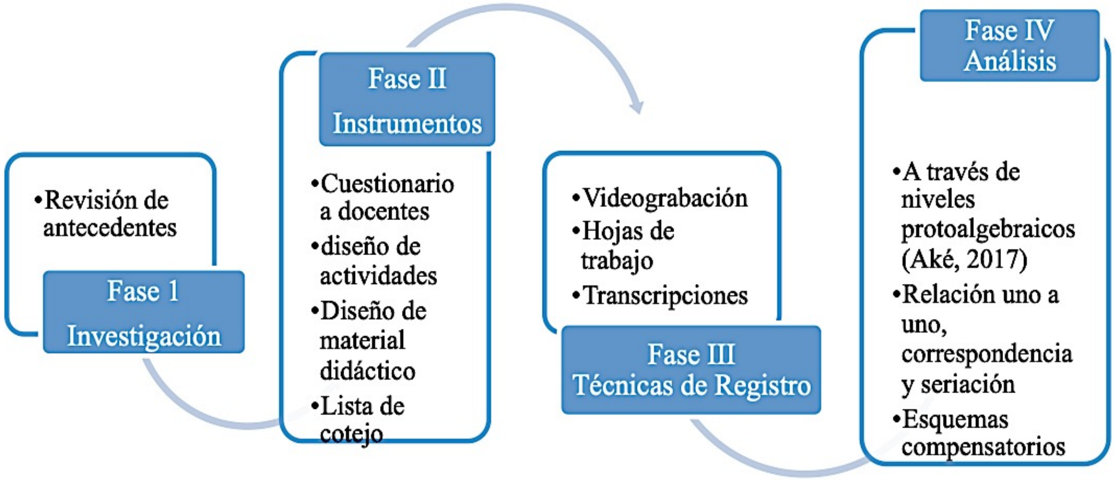


Figura 1. Esquema del procedimiento de la investigación.

Indagaciones bibliográficas. Se llevó a cabo un análisis de distintas fuentes de información, artículos, revistas, libros y tesis de posgrado. Para establecer el orden de esta indagación, y dada la naturaleza de la misma, el análisis bibliográfico se estructuró en torno a tres orientaciones: contenido algebraico, educación especial y materiales didácticos.

Diseño de actividades. Después de realizar la indagación bibliográfica se diseñaron 24 actividades, algunas fueron modificadas de artículos, libros de texto, y otras fueron diseñadas con base en los resultados reportados por otros autores, la experiencia como docente y datos obtenidos en el cuestionario aplicado a docentes. Cada una de estas actividades contó con un material específico para su realización, ello con la finalidad de que éste apoyara su acercamiento al concepto matemático y a su vez para mantener la motivación en los estudiantes.

Las actividades se organizaron en cuatro niveles de complejidad, de tal forma que la secuencia de cada nivel fuera aumentando su grado de dificultad de manera gradual, ello para observar el desempeño de los alumnos en las actividades de cada nivel y su manera de ir creando nociones en su pensamiento relacional.

Para validar las actividades se aplicó un cuestionario de tipo jueceo a seis docentes de una USAER (Unidad de Servicio de Apoyo a la Educación Regular). El objetivo de este instrumento fue recopilar información en torno a la metodología que los profesores consideraban más adecuada para trabajar con alumnos con DI, además de retroalimentar las actividades propuestas y hacer las modificaciones pertinentes.

En la Tabla 1 se muestran las actividades que se llevaron a cabo con los estudiantes, exponiendo cuál era la noción matemática en ella, la situación planteada para cada una, además de identificar los términos que se emplearon durante la aplicación debido al lenguaje de los participantes, caracterizando así cada una de las actividades propuestas.

Tabla 1. Caracterización de las actividades.

Actividad	Noción matemática	Términos empleados
Mariposas	Seriación, orden, tamaño.	Grande, chico, mediano

Gusano de colores	Relación uno a uno, correspondencia.	Colores, seguido de, orden.
Regletas Cuisinaire	Seriación, orden, tamaño.	Grande, chico, mediano, después de, antes, formar, fila.
Completar gusanos	Relación uno a uno, correspondencia.	Después, uno y uno, ordenar.
Triángulos y hexágonos	Relación uno a uno, correspondencia, seriación.	Abajo, arriba, a un lado, iguales, colores.
Estrellas	Relación uno a uno, conteo de números naturales.	Números, después.
Pinta gusanos	Relación uno a uno correspondencia, conteo de números naturales.	Números, sigue, después.
M &M	Relación uno a uno, correspondencia, seriación.	Rojo, amarillo, formar, fila, iguales.

Cabe aclarar que estas actividades fueron seleccionadas para aplicarse de entre el total de actividades propuestas, su elección se decidió en el momento mismo de la aplicación, debido al desempeño observado en los estudiantes.

Aplicación. Las actividades se realizaron con tres estudiantes de una escuela primaria de Zacatecas, México, en una escuela de jornada completa, con el permiso y apoyo de la USAER y padres de familia. Los alumnos participantes contaban con las siguientes características en el momento de la aplicación:

Tabla 2. Características de los participantes.

Nombre	Grado de la DI	Edad	Grado escolar
Pedro	Leve	7 años	Segundo de primaria
Mary	Moderada	8 años	Cuarto de primaria
Diana	Leve	12 años	Sexto de primaria

La aplicación se realizó acorde a cuatro niveles de complejidad, previamente propuestos para la organización de las actividades, de tal manera que se trabajaba con las propuestas para el primer nivel y, si las condiciones y los estudiantes lo permitían, se avanzaba al siguiente de manera gradual, de lo contrario se detenía la aplicación. Se realizaron videograbaciones en cada una de las actividades y con cada uno de los estudiantes, además de obtener evidencias escritas.

Análisis. Para el análisis se revisaron las videograbaciones y las evidencias de los estudiantes, observando cuáles fueron los esquemas compensatorios (atención, memoria y percepción) utilizados por los niños para poder crear nociones sobre el concepto de *patrón*, además se utilizó una lista de cotejo que permitiera hacer anotaciones inmediatas respecto a esquemas compensatorios.

Es necesario establecer que, para poder analizar el tipo de respuestas y desempeños de los estudiantes con DI en tareas sobre el pensamiento relacional, se establecieron los siguientes criterios de análisis:

- Nociones matemáticas: aquí fue de interés señalar si el estudiante llega a la generalidad del patrón figural lineal. Si había en las respuestas nociones de *relación uno a uno*, *correspondencia* y *seriación*.
- Niveles de algebrización (Aké, 2017) correspondientes al objeto matemático de *patrón*, incluidos dentro de los niveles protoalgebraicos, entendidos como niveles de pre-álgebra.

Los niveles para plantear las actividades estuvieron planteados de la siguiente manera:

Tabla 3. Características de los niveles de complejidad en las actividades.

Nivel	Objetivo	Actividades
Nivel 1	Establecer un orden al material didáctico que se les presentara, ya sea de menor a mayor, o a la inversa.	Mariposas, regletas Cuisinare, gusano de colores, las estrellas, flores, puntos.
Nivel 2	Pudieran continuar el patrón figural de manera oral. Identificar el orden establecido por las figuras que se les presentaba en el material didáctico.	Completar gusanos, triángulos y hexágonos, M&M, sandías, pizzas, medusas.
Nivel 3	Continuar y completar el patrón que se les presentaba, siendo entonces capaces de identificar la regularidad que cada uno de los patrones.	Estrellas, pinta gusanos, M&M, bloques figuras geométricas, fichas de dominó.
Nivel 4	Identificar una generalidad en cada uno de los patrones.	Óvalos, cuadrados, mariquitas, bastones, líneas y cuadrados, domino.

Análisis de los resultados

En este apartado, a través de las actividades aplicadas, los niños mostraron nociones de correspondencia, seriación y relación uno a uno, para ello hicieron uso de su memoria, atención, percepción y de sus sentidos.

Actividad de las mariposas (Nivel 1)

Una de las actividades propuestas fue “Las mariposas”, en la cual se pretendía trabajar con los conceptos de seriación, orden y tamaño. La indicación consistió en que los estudiantes dieran un orden a las mariposas presentadas. Según el criterio que ellos usaron, posteriormente se les hicieron preguntas con la finalidad de que explicaran y justificaran sus respuestas, de este modo a partir de su desempeño analizar las nociones en cuanto a su pensamiento relacional a partir del concepto *patrón*.

En la aplicación con una de las estudiantes, que nombraremos Mary, se apreció que mostraba interés; el material que se utilizó llamó su atención, lo que permitía que fuera una actividad más llevadera dada la hora y la situación en la que se estaba aplicando, pero también era notorio que le costaba mucho trabajo poder concentrarse y comprender las indicaciones que se le estaban dando.

> *Maestra:* -Mira, te voy a dar estas mariposas y quiero que me las ordenes. ¿Cómo las puedes ordenar?
> *Mary:* -Mariposas… ésta va aquí, con su mamá y ésta también aquí con su mamá.
> *Maestra:* (señalando una mariposa pequeña) ¿Por qué pusiste ésta aquí? (Mary la mueve de lugar).
> *Maestra:* ¿Ahora por qué la acomodas ahí?
> *Mary:* Es que debe estar con su mamá.

Imagen 1. Seriación con mariposas según Mary

En esta parte es importante rescatar que Mary relaciona los tamaños de las mariposas con la edad de las personas, lo cual sugiere un principio de su pensamiento relacional, en cuanto a la seriación, ya que Beard (1971) explica que el niño desarrolla la capacidad de agrupar cuando visualiza como un todo a la familia y pone en juego su capacidad de seriar cuando necesita, por ejemplo, ordenar a sus hermanos por edades.

Conclusiones y aportes

Se puede concluir que la secuencia de tareas diseñadas sobre el concepto de patrón figural lineal fue favorable para los participantes, ya que gracias a la colaboración de los docentes que trabajan a diario con esta población, se ayudó a organizar estas actividades de manera gradual, con la finalidad de observar y analizar el desarrollo procesual de los tres estudiantes en escena.

Los resultados fueron interesantes, ya que nos proveen muchas áreas posibles de actuación, entre ellas el uso y la importancia de implementar materiales didácticos acorde al contenido matemático, en donde se deberán considerar las características y necesidades de los estudiantes. A su vez es indispensable tomar en cuenta los esquemas compensatorios que los niños priorizan para, con base en ello, diseñar el material didáctico que potencie las habilidades que tienen los estudiantes, lo cual nos ayudará a mantener su esquema de atención en una mayor cantidad de tiempo, favoreciendo así su aprendizaje.

También es importante rescatar la viabilidad de implementar actividades con nociones matemáticas para adentrarnos en la propuesta de *Early Algebra.* Lo anterior permite argumentar que, si bien los niños con DI no llegan a una generalización, sí desarrollaron nociones relevantes para la construcción de su pensamiento relacional, como fue el caso de la relación uno a uno.

Sobre la pregunta de esta investigación se encontró que los estudiantes necesitan hacer relación con algo de su vida cotidiana, desde cosas muy simples como las edades de sus familias para poder dar sentido a las actividades que realizan. Hacer uso de actividades diversas y llamativas ayuda en gran medida a la motivación del estudiante, lo cual resulta ser otro factor relevante en su aprendizaje. La interacción con el material concreto permitió el tránsito a los niveles de nociones matemáticas.

El desempeño de los alumnos con DI presenta niveles respecto a su pensamiento relacional, dependiendo de las características de cada estudiante, del uso de esquemas compensatorios y el grado de la afección. Si bien no están muy distantes unos de otros en desempeño, hubo una estudiante a la cual se le facilitaron más las actividades que a los otros dos alumnos, debido a que la niña prestaba atención por periodos más largos, además de tener un mejor manejo en su lenguaje. Había una estimulación más marcada en ella que en los otros dos casos, además de tener una mayor memoria de trabajo por lo cual gozaba de una mayor retención lo que le facilitaba algunas de las actividades, relacionándolas con otras similares que anteriormente, en otros grados había realizado, o relacionándolas con cosas ya conocidas por ella.

Las nociones matemáticas de *correspondencia*, *seriación* y *relación uno a uno*, permitieron sentar bases para la constitución de un pensamiento relacional, sobre todo al momento de hacer relación uno a uno, con la población que se trabajó y con estas características, se logró siempre y cuando no fueran más de cuatro o cinco objetos.

Los niveles propuestos en este trabajo se establecieron conforme los componentes del pensamiento relacional y los niveles protoalgebraicos (Aké, 2017) para el concepto de *patrón*.

Tabla 4. Niveles de los componentes del pensamiento relacional

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Esquema compensatorio observado
Seriación	Identifica diferencias en los objetos, sin determinar exactamente éstas.	Compara objetos.	Establece relaciones entre los objetos.	Memoria. Percepción.
Correspondencia	No reconoce características iguales entre dos objetos.	Encuentra igualdades entre dos objetos.	Encuentra igualdades entre más de dos objetos.	Memoria. Atención.
Relación uno a uno	No relaciona objetos.	Puede asociar un elemento con otro en una colección.	Asigna una sola palabra de la secuencia numérica convencional.	Memoria. Percepción.

Se considera que el enfoque del *Early Algebra* puede ayudar a desarrollar el pensamiento relacional desde la educación especial, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje que facilite el estudio posterior del álgebra en educación secundaria. Si bien esta propuesta está pensada para alumnos regulares de primaria, se considera de suma importancia que existan actividades específicas para estudiantes con DI, debido a la importancia de la inclusión educativa, ya que todos los alumnos tienen derecho a oportunidades de aprendizaje acorde a sus características y necesidades.

La consideración de los niveles protoalgebraicos (Aké, 2017) de "patrón" y su correspondencia con las nociones del pensamiento relacional permitieron analizar y ser una vía para determinar la característica del pensamiento matemático de niños con DI. Además, es imperante el uso de materiales didácticos con un soporte físico para que el estudiante con estas características pueda otorgar sentido a las acciones por su uso.

Referencias bibliográficas

Acle, G., Roque, M., Zacatelco, F., Lozada, R., & Martínez, L. (2007). Discapacidad y rezago escolar: riesgos actuales. *Acta Colombiana de Psicología, 10*(2), 19-30.

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. (Tesis de doctorado inédita). Universidad de Granada. España.

Aké, L. (2017). El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Alsina, C., Burgués C., & Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometria*. Madrid: Síntesis.

Bautista, J. L. (2013). *El desarrollo de la noción de número en los niños*. Disponible en: http://www4.congreso.gob.pe/historico/cip/eventos/congreso/ICongreso/ponencia/21-25JOSE_21.pdf

Beard, R. (1971). *Psicología evolutiva de Piaget*. Argentina: Editorial Kapelusz.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In J. Cai & E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (p. 409- 428). Berlin: Springer-Verlag.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(2), 155-188.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* España: Universidad de Granada.

Inhelder, B. (1971). *El diagnóstico del razonamiento en los débiles mentales*. España: Nova Terra.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structure. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent, y J. Vicent (Eds.). The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Vol. 1 (pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.

López-Mojica, J.M. (2009). *Estocásticos en el segundo grado de educación especial.* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

López-Mojica, J.M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

Molina, M. (2009). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España.

Molina, M., & Castro, E. (2006). *Comprensión del signo igual y desarrollo de pensamiento relacional en alumnos de tercero de primaria. Una investigación en curso*. Universidad de Granada. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/539/1/MolinaM06-2801.PDF

Orozco, G. (2016). *Patrones numéricos y geométricos*. Disponible en: http://patronesmatematicos.blogspot.mx

Orozco, M. (2008). *Cómo comprende el número el niño*. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados en Psicología, Congnición y Cultura. Disponible en: http://cms.univalle.edu.co/cognitiva/wp-content/archivos/recursos/Como%20comprende%20el%20ni%C3%B1o%20el%20n%C3%BAmero.pdf

SEP (2010). *Discapacidad intelectual. Guía didáctica para la inclusión en educación inicial y básica.* Consejo Nacional de Fomento Educativo. SEP. Disponible en:

https://www.educacionespecial.sep.gob.mx/2016/pdf/discapacidad/Documentos/Atencion_educativa/Intelectual/2discapacidad_intelectual.pdf

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Vasilachis, I. (2009). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vigotsky, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obras Escogidas V*. España: Visor Dis.

Zapatera, A. (2016). La transición de la aritmética al álgebra. *Revista de didáctica de las matemáticas*. Universidad CEU Cardenal Herrera. Elche.

VARIABLE ALEATORIA: UNA PROPUESTA BAJO LA MIRADA DE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

RANDOM VARIABLE: A PROPOSAL FROM THE PERSPECTIVE OF THE THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS

Manuel Alejandro Cuevas León, Carlos Andrés Ledezma Araya
Escuela de Negocios Internacionales de la Universidad de Valparaíso, Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
manuel.cuevas@uv.cl, carlos.ledezma.a@mail.pucv.cl

Resumen
Esta investigación tiene por objetivo validar una propuesta didáctica para el aprendizaje del concepto de Variable Aleatoria en estudiantes de segundo año medio (15-16 años). Para ello, se consideró como referente la Teoría de Situaciones Didácticas, enfocándose principalmente en las situaciones de Acción, Formulación y Validación. Se diseñó una secuencia didáctica de tres clases, y se implementó la primera de éstas, siguiendo la metodología del Estudio de Clases. Se clasificaron las producciones de los sujetos participantes de acuerdo a la presencia de las fases ya declaradas, y el análisis de los resultados evidenció las dificultades y errores que presentaron los estudiantes, además de obstáculos epistemológicos relacionados al aprendizaje del concepto.

Palabras clave: propuesta didáctica, teoría de situaciones didácticas, variable aleatoria

Abstract

The aim of this research is to validate a didactic proposal for the learning of Random Variable concept for high school second-year students (aged 15-16). The Theory of Didactic Situations was considered as a referent, mainly focused on Action, Formulation, and Validation situations. A didactic sequence made up of three lessons was designed and the first one was implemented, following the Lesson Study methodology. Students' performances were classified according to the phases previously mentioned. The analysis of the results showed difficulties and mistakes that students made, as well as some epistemological obstacles related to the learning of the concept.

Key words: didactic sequence, random variable, theory of didactic situations

Introducción

Desde la década de los 80 que se viene incorporando con fuerza en los currículos de matemática de diversos países el eje temático de probabilidades, siendo el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) el pionero en esta reforma (Vásquez y Alsina, 2014). En este contexto, Heitele (1975) propone que existen diez conceptos fundamentales a ser aprendidos por los estudiantes, entre los que se encuentra la Variable Aleatoria.

Los documentos curriculares chilenos sitúan el concepto de Variable Aleatoria en el nivel segundo año medio (estudiantes de 15-16 años). El Programa de Estudios –vigente hasta 2017– ubicaba este contenido en la unidad de Datos y Azar, de acuerdo al cuarto aprendizaje esperado que declaraba “comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios” (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2011, p. 85). Por su parte, las Bases Curriculares (MINEDUC, 2016a) –vigentes desde 2018– ubican este contenido en el eje Probabilidad y Estadística, de acuerdo con el décimo objetivo de aprendizaje que declara que los estudiantes deben “mostrar que comprenden las variables aleatorias finitas: definiendo la variable; determinando los posibles valores de la incógnita; calculando su probabilidad; graficando sus distribuciones” (MINEDUC, 2016b, p. 154).

Como parte de este estudio, nos propusimos conocer la definición aportada desde el ‘saber sabio’ y compararla con la del ‘saber enseñado’ (véase Chevallard, 1985) sobre la Variable Aleatoria, ello con la intención de apropiarnos del conocimiento del objeto matemático de nuestro interés. Desde el punto de vista del ‘saber sabio’, nos adherimos a la definición de Variable Aleatoria que propone Shiryaev (2016) como una propiedad numérica de un experimento cuyo valor depende de la ‘posibilidad’, siendo de nuestro interés aquélla del tipo discreta (véase Shiryaev, 2016, pp. 206-207). Desde la perspectiva del ‘saber enseñado’, consideramos la definición de Variable Aleatoria aportada por el texto escolar de distribución ministerial *Matemática 2º Medio Texto del Estudiante* (Muñoz, Jiménez y Rupin, 2013), en donde se presenta como “dado un experimento aleatorio cualquiera, se llama variable aleatoria (v.a.) a la función que, a cada suceso del espacio muestral (Ω), le asigna un único número real $x\colon \Omega \rightarrow \mathbb{R}$” (p. 281).

La diferencia entre ambas definiciones es evidente en los aspectos estructurales sobre los que cada una se cimenta. Mientras que la definición de Shiryaev (2016) tiene como base un espacio medible $(\Omega, \mathscr{F})$ y se complementa con funciones y conjuntos de Borel, la definición en Muñoz et al. (2013) se basa en la utilidad del concepto para modelizar un experimento aleatorio, relacionándola con la Función de Probabilidad que emerge de la Variable Aleatoria. No obstante, ambas definiciones se sustentan en los conceptos de espacio muestral (Ω) y función de variable real.

Para este estudio se consideró la propuesta curricular de MINEDUC (2011), ello debido a que era el documento curricular vigente al momento de su implementación (véase Cuevas, 2017). Sin embargo, debido a que nuestra investigación se encuentra actualmente en una fase ampliación y reformulación, nos es imperativo considerar la propuesta vigente de MINEDUC (2016a; 2016b) para esta segunda etapa.

Siendo este estudio una continuación al trabajo de Cuevas (2017), nuestro objetivo es validar, desde la Teoría de Situaciones Didácticas, una propuesta didáctica para el aprendizaje de la Variable Aleatoria en estudiantes de segundo año medio (15-16 años), planteándonos como preguntas de investigación ¿qué fases de la Teoría de Situaciones Didácticas se presentan en nuestra propuesta de aprendizaje para el objeto matemático Variable Aleatoria?, ¿cómo aporta esta propuesta al aprendizaje de la Variable Aleatoria en estudiantes de segundo año medio (15-16 años)?

Marco teórico

Nuestra investigación se enmarca en la Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante TSD) (Brousseau, 2002), la cual se basa en el estudio del sistema didáctico que se sustenta en el triángulo epistemológico: *docente – saber matemático – alumno*, y en el conjunto de interacciones que entre éstos se suceden. La elección de este referente se relaciona con una de las intenciones de este estudio, la cual es contribuir –a partir de las herramientas didácticas que aporta la TSD– al diseño de una propuesta para el aprendizaje de la Variable Aleatoria.
En términos de Brousseau y Warfield (2014), una *Situación Didáctica* –en el ámbito de la matemática– se entiende como un proyecto que se organiza para provocar que un(os) estudiante(s) se apropie(n) de un fragmento de conocimiento matemático de referencia, constituyendo así un proceso donde el *docente* proporciona un *milieu* (medio didáctico) para que el *alumno* pueda construir su conocimiento (Brousseau, 2002). Dentro de este proceso se encuentra el de *Situación A-didáctica*, que en términos de Warfield (2014), se sucede cuando el *docente* no explicita a los estudiantes sus intenciones sobre enseñar un concepto específico, de manera tal que el *alumno* es capaz de trabajar sin su intervención, lo cual no significa que el *docente* adquiera un carácter de dispensable, sino que los estudiantes no son conscientes de sus intenciones.

Brousseau (2002) plantea la existencia de tres situaciones o fases, por parte de los estudiantes: a) la *Situación de Acción* es la fase en que el *alumno* trabaja en forma individual con un problema, es decir, actúa sobre el *milieu* (Warfield, 2014), para poder resolverlo a través del descubrimiento y la experimentación; b) la *Situación de Formulación (o de Comunicación)* es la fase en que el *alumno* trabaja con otros estudiantes para comunicar y compartir sus experiencias con el problema, provocando que un emisor formule un mensaje explícito a un receptor, para que este último lo comprenda y actúe sobre el *milieu* basado en dicho mensaje, de manera tal que el *alumno* tenga la necesidad de articular las ideas que –implícitamente– venía desarrollando desde la fase anterior (Warfield, 2014); c) la *Situación de Validación* es la fase en que dos *alumnos* (o dos grupos de) enuncian aseveraciones sobre el problema, y deben ponerse de acuerdo en cuanto a su veracidad o falsedad, siendo sometidas –desde otros pares– a cuestionamientos, aprobaciones, rechazos, contrastaciones, etc., que requieren del convencimiento –tanto propio como ajeno– de la validez de la idea que se está proponiendo (Warfield, 2014). Si bien las fases a), b) y c) se presentan de manera muy puntual y secuencial, es común que se superpongan unas a otras o que incluso se fusionen (Warfield, 2014).

Por parte del *docente*, Brousseau (2002) menciona dos situaciones que protagoniza: i) la *Situación de Devolución* es el acto en que el enseñante insta al *alumno* a comprometerse con la situación matemática que le ha planteado, de manera que la realice sin su ayuda explícita (Brousseau y Warfield, 2014), lo cual es comparable con una negociación entre ambos, donde el *alumno* debe asumir su responsabilidad en el proceso, pero sin desmerecer la autoridad del *docente* (Warfield, 2014); ii) la *Situación de Institucionalización* se sucede cuando el *docente* toma en consideración los elementos que emergieron durante las fases a), b) y c), para así establecer relaciones entre éstos y el saber cultural (Brousseau y Warfield, 2014), lo que implica una revisión, pulimiento y ordenación de las ideas para establecer un puente entre las producciones de la clase y los aspectos curriculares (Warfield, 2014).

Metodología

Nuestro estudio es de enfoque cualitativo y paradigma interpretativo, enmarcado en una investigación-acción del tipo práctica. En una primera etapa, se diseñó una secuencia didáctica de tres clases para el aprendizaje de la Variable Aleatoria (en adelante V.A.), cada una estructurada como una situación didáctica para estudiantes de segundo año medio. En este escrito presentamos los resultados de implementación sólo de la primera clase de la secuencia, la cual fue aplicada en dos cursos del nivel segundo año medio (paralelos A y B) de un establecimiento educacional de la ciudad de Viña del Mar (Chile), siguiendo la metodología del Estudio de Clases (Isoda y Olfos, 2009), lo cual implicó que el plan de clase se revisara y se hicieran las adecuaciones pertinentes luego de cada intervención.

Durante la fase de implementación del estudio, el Investigador 1 asumió el rol del *docente*, mientras que el Investigador 2 se encargó de la recolección de datos. Estas funciones se mantuvieron en las dos intervenciones que aquí se presentan y analizan. Por otra parte, el contexto curricular en que se llevó a cabo la fase de implementación fue durante el desarrollo de la unidad de Datos y Azar (véase MINEDUC, 2011), y se consideran como prerrequisitos los conceptos de conjunto (y representación en diagrama sagital), relación, experimento, principio multiplicativo, regla aditiva, función (dominio, codominio y recorrido; representación en registros tabular, gráfico y de diagrama sagital), Regla de Laplace, y espacio muestral (asociado a un experimento aleatorio).

Para la situación didáctica diseñada, cuya duración aproximada es de máximo 90 minutos, el *docente* solicitó a los estudiantes leer –en forma individual– la actividad (véase
Figura ***14***) que a cada uno se le entregó, y luego conformar grupos de 4 o 5 integrantes para discutir el problema y lograr un consenso que dé respuesta al mismo. El diseño de la actividad es producto de la adaptación de un ejercicio de Ruiz (2014).

Bingo del Día del Alumno

A raíz de los festejos del Día del Alumno, el profesor del taller de cine del Colegio Sol Naciente desea conocer el número de estudiantes que tiene cada uno de los 30 apoderados en el taller, por lo cual solicita la información a la secretaria del establecimiento. Los datos que le entregó fueron los siguientes:

Número de estudiantes	1	2	3	4
Número de apoderados	8	13	7	2

La intención es realizar un bingo que beneficie a los alumnos, por lo que se asignará a cada apoderado un boleto. En la celebración del Día del Alumno se efectuará el sorteo y se premiará a los estudiantes de un apoderado con entradas para el cine, las cuales se deben comprar con anticipación, pues están con un descuento especial sólo por 24 horas. Bajo estas condiciones, el profesor debe decidir cuántas tiene que comprar, a fin de abaratar costos.

Dados los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ definidos por:
$\boldsymbol{A}$: el conjunto de 30 apoderados del taller.
$\boldsymbol{B}$: el conjunto de cantidad de estudiantes.
$\boldsymbol{C}$: el conjunto de posible ocurrencia de cada situación.
Defina y represente la relación entre $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, y entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$.

Figura 14. Actividad desarrollada por los estudiantes. Adaptada desde Ruiz (2014, p. 214)

El objetivo de esta clase es que los estudiantes comprendan el concepto de V.A., sin embargo, en el momento de inicio sólo se declara que se va a resolver un problema de probabilidades, esto para evitar conclusiones apriorísticas por parte de los sujetos participantes. Si bien el objeto basal de la situación didáctica es la V.A., también se desprende el concepto de Función de Probabilidad (en adelante F.P.). La clase finaliza con la exposición de los distintos grupos sobre sus respuestas a la actividad, posterior a lo cual el *docente* realiza la *Situación de Institucionalización* del objeto matemático que se pretende introducir.
Para el desarrollo de esta actividad, se espera que los estudiantes establezcan una relación entre los conjuntos A y B, donde sus elementos son:

- A: los apoderados que tienen uno (a_1), dos (a_2), tres (a_3) y cuatro estudiantes (a_4) inscritos en el taller.
- B: la condición de tener uno (1), dos (2), tres (3) o cuatro (4) estudiantes inscritos en el taller.

Luego, se espera que establezcan una relación entre los conjuntos B y C, donde este último corresponde a la probabilidad de que un apoderado a_n con n estudiantes inscritos en el taller sea seleccionado. De este modo, la relación $A \rightarrow B$ representa una V.A., y la relación $B \rightarrow C$ una F.P., lo cual se explicita por el *docente* durante la *Situación de Institucionalización*.
La Figura 15 muestra la representación a través de conjuntos que se considera como respuesta esperada al desafío planteado a los estudiantes.

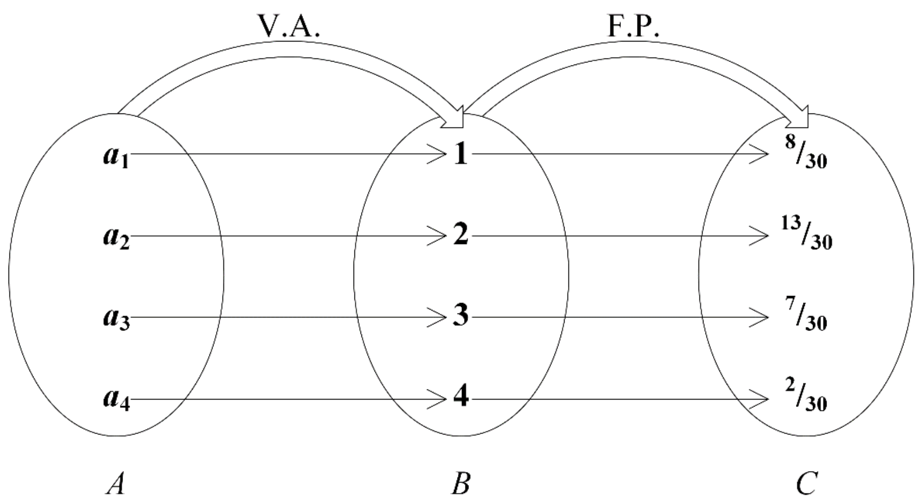


Figura 15. Respuesta esperada para la actividad. Adaptada desde Cuevas (2017, p. 25).

La Tabla 3 muestra la clasificación y rotulación de los grupos de estudiantes que participaron durante la fase de implementación, de acuerdo con la intervención en que se aplicó la clase.

Tabla 3. Clasificación y rotulación de los grupos de estudiantes por intervención.

Intervención / Curso	Rótulos de los grupos	Rótulos de los estudiantes
Primera intervención / Curso A	G1A	E1A a E5A
	G2A	E6A a E10A
	G3A	E11A a E15A
	G4A	E16A a E20A
Segunda intervención / Curso B	G1B	E1B a E5B
	G2B	E6B a E10B
	G3B	E11B a E15B
	G4B	E16B a E20B
	G5B	E21B a E25B

NOTA. Curso A: Segundo Medio Paralelo A; Curso B: Segundo Medio Paralelo B.

Para esta investigación se utilizaron dos técnicas de recolección de datos durante la fase de implementación del estudio, descritas en la Tabla 4.

Tabla 4. Técnicas de recogida de datos para el estudio.

Técnica	Descripción
Registro escrito	– Actividad 'Bingo del Día del Alumno', la cual desarrollaron los grupos de estudiantes en cada intervención, registrando sus procedimientos y respuestas en hojas de cuaderno. – Representación de los conjuntos en cartulinas, que utilizaron los grupos de estudiantes para presentar sus respuestas finales ante el curso.
Registro audiovisual	– Grabación en video del trabajo de los grupos de estudiantes durante las intervenciones y de la presentación de sus respuestas frente al curso.

Se diseñaron categorías de análisis para las situaciones de *Acción* y *Formulación*, cuyos descriptores asociados corresponden a indicadores de logro para dar respuesta al desafío propuesto (véase Tabla 5), de acuerdo con un análisis a priori de posibles estrategias que los estudiantes podrían seguir para concretar la actividad. No obstante, la situación de *Validación* se encuentra supeditada por los argumentos que declaren los estudiantes al momento de presentar sus respuestas ante el curso.

Tabla 5. Categorías de análisis para las situaciones de *Acción* y *Formulación*, y sus descriptores asociados.

Fases de la TSD	Categorías de análisis	Subcategorías de análisis	Descriptores
Acción	C_1: Identificación de los conjuntos y de sus elementos.	$C_{1.1}$: Identificación de los elementos de 1 o 2 de los conjuntos.	Extraen información del enunciado de la actividad sobre los diferentes conjuntos (apoderados y estudiantes) y sus elementos.
		$C_{1.2}$: Identificación de los elementos de los 3 conjuntos	
	C_2: Representación* de los elementos de cada conjunto.	$C_{2.1}$: Representación de los elementos de 1 o 2 de los conjuntos.	Identifican los elementos de cada conjunto y los representan.
		$C_{2.2}$: Representación de los elementos de los 3 conjuntos.	
	C_3: Representación de los conjuntos en diagramas disjuntos y no-disjuntos.	$C_{3.1}$: Representación de 1 o 2 conjuntos en diagramas.	Representan en un conjunto a los apoderados, en otro al número de estudiantes por apoderado, y en otro el nivel de ocurrencia de la situación.
		$C_{3.2}$: Representación de los 3 conjuntos en diagramas.	

Formulación	C_4: Relación de los elementos del conjunto $\boldsymbol{A}$ con los del conjunto $\boldsymbol{B}$.		Relacionan la pre-imagen del conjunto $\boldsymbol{A}$ con su imagen en el conjunto $\boldsymbol{B}$.
	C_5: Relación de los elementos del conjunto $\boldsymbol{B}$ con los del conjunto $\boldsymbol{C}$.		Relacionan la pre-imagen del conjunto $\boldsymbol{B}$ con su imagen en el conjunto $\boldsymbol{C}$.
	C_6: Representación de los conjuntos en diagramas sagitales; reconocimiento de la relación $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$.		Representan los conjuntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ en diagramas sagitales; reconocen la relación $\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$.

* La representación de los elementos de los conjuntos se encuentra supeditada a la respuesta esperada definida en la Figura 15.

Para el análisis de los resultados, se clasificaron las producciones escritas de los estudiantes de acuerdo a las situaciones de *Acción* y *Formulación* que evidenciaron los distintos grupos; los registros de las presentaciones finales permitirán el análisis de la situación de *Validación*; y los registros audiovisuales complementarán la discusión de resultados en general.
Este trabajo fue desarrollado como parte del programa de Magíster en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, donde se validó el estudio por expertos de didáctica.

Resultados

Para efectos de presentación y análisis de los resultados, se muestran algunos momentos representativos de las intervenciones llevadas a cabo, en las cuales se evidencian las fases de *Acción* y *Formulación* por las que transitaron los estudiantes mientras desarrollaban la actividad propuesta. Los extractos que se presentan a continuación incluyen parte de la transcripción de los diálogos y –en algunos casos– la captura de video asociada.

Sobre la primera intervención, en el siguiente extracto se presenta una discusión del G3A durante la fase de *Acción*.

> E11A: Si hay 13 [señalando la tabla de la actividad], significa que hay 2, 2, 2, … [alumnos], así. Hay más de 30 [alumnos].
> E12A: Eh, no [dubitativa].
> E13A: No, hay 10 [sumando el par (3,7)], acá son 6 [sumando el par (4,2)].
> E14A: Pero, está bien, porque ella [E11A] dice que, si ahí [señalando la tabla de la actividad] hay 8 apoderados, y que 8 personas tienen un hijo, entonces ahí son 8 hijos.
> E11A: Sí, son 8 […]. Acá hay 13 [señalando la tabla de la actividad], entonces, si hay 13 personas, cada persona tiene 2 hijos, no son…
> E15A: Son 26 [hijos].
> E11A: Si hay 7 [señalando la tabla de la actividad].
> E15A: Son 21 [hijos].

La suposición inicial del grupo era incierta con respecto a qué representaban los valores de la tabla, pues mientras que la E11A declaraba que la primera entrada indica el número de hijos que tienen cada uno de los apoderados de la segunda entrada, la E13A suponía que el número de hijos estaba dado por la suma –en sentido vertical– de los valores de la primera entrada con los de la segunda. Ello evidencia una dificultad, por parte de la E13A, con la noción de relación entre variables, y una tendencia a considerar la primera entrada de una tabla como la variable independiente, sin importar el contexto en que esté inserta la tabla. Por su parte, la E14A dio soporte a la idea de la E11A, y la complementó con el cálculo necesario para obtener el número total de estudiantes del taller que, aunque no es un dato determinante para resolver la situación, da luces tanto de una comprensión de las variables involucradas en la situación, como de los conjuntos y sus elementos constitutivos.

La Tabla 6 muestra un diálogo entre el G2A y el *docente* (D) durante la fase de *Formulación*.

Transcripción del diálogo	Captura del registro audiovisual
E6A: Acá [señalando el conjunto *C*] tenemos la probabilidad de que un solo alumno gane una entrada. E8A: No, acá [señalando el conjunto *B*] tenemos el conjunto de los apoderados que tienen 1 estudiante, el que tiene 2 […]. Éste [señalando el conjunto *A*] es el conjunto de los estudiantes del taller. D: Ya, y éste [señalando el conjunto *C*] ¿qué es? E6A: Ésta es la relación que tienen los 30 apoderados por separado, es decir, la probabilidad de que el ganador salga entre los 8, entre los 13, entre los 7 o entre los 2, pero que salgan uno de entre estos 8.	 Texto en la imagen: $1 \leftarrow 8 \quad 8/30$ $2 \leftarrow 13 \quad 13/30$ $3 \leftarrow 7 \quad 7/30$ $4 \leftarrow 2 \quad 2/30$ $A = \{30\}$; $B = \{63\}$; $C = \{8/30, 13/30, 7/30, 2/30\}$

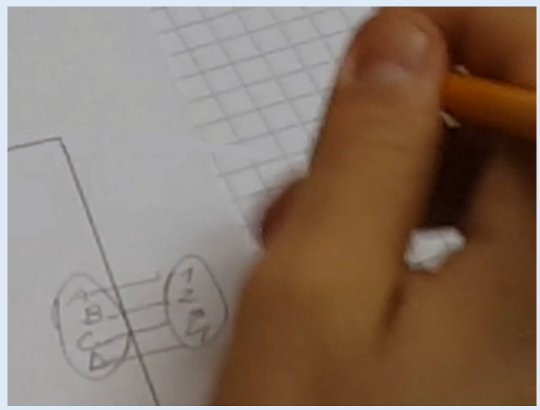
Durante la clase, el *docente* interactuó con el grupo tras notar que, si bien tenían claridad sobre los elementos que conformaban cada conjunto, estaban confundidos en cuanto a su representación y posterior relación. Esta dificultad llevó al error de escribir los conjuntos A y B de dos maneras diferentes: según la representación de sus elementos ($\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{8, 13, 7, 2\}$), y como el total de elementos de cada uno ($\{30\}$ y $\{63\}$); sin embargo, el conjunto C fue el único que representaron de una única manera. La relación que explicaron se podría interpretar como $B \leftarrow A$, dejando al conjunto C –presumiblemente– relacionado con A, de acuerdo con la forma en que los representaron.

Sobre la segunda intervención, en el siguiente extracto se presenta un diálogo entre el G1B y el *docente* (D) durante la fase de *Acción*.

> E1B: Tenemos 3 grupos [sic], *A*, *B* y *C*. Éste [señalando el conjunto *A*] se relaciona con éste [señalando al conjunto *B*].
> D: ¿Cuáles son los elementos del conjunto *A*?
> E2B: Son los 30 apoderados del taller.
> E1B: 8, 13, 7, 2.
> D: ¿Y cuáles son los elementos del conjunto *B*?
> E1B: ¡Ah!, en el conjunto *A* hay que poner los números así [los escribe]: 8, 13, 7 y 2. Después acá [señalando el conjunto *B*], hay que poner 1, 2, 3, 4, y después acá [señalando el conjunto *C*] se debe colocar la suma de los estudiantes.

En esta intervención el *docente* interactuó con todos los grupos de estudiantes durante la fase de *Acción*, ello con la intención de que le explicasen cómo identificaron los conjuntos y sus respectivos elementos. El caso del G1B es que, si bien lograron identificar los conjuntos A y B, cometieron un error común a los demás grupos que fue el de escribir la cardinalidad del conjunto A como sus elementos, es decir, definir $A = \{8, 13, 7, 2\}$. Otro error fue suponer que los elementos del conjunto C eran valores obtenidos a partir de una suma de elementos de los conjuntos A y B, donde el último elemento de C debía ser igual al total de estudiantes de la situación, es decir, como una frecuencia acumulada.

La Tabla 7 presenta un diálogo del G3B durante la fase de *Formulación*.

Transcripción del diálogo	Captura del registro audiovisual
E12B: ¿Cómo podemos representar la relación de los distintos conjuntos? E15B: Es que éstos [señalando el conjunto B] dependen del conjunto A… ¡ah!, o sea, esto sería a, b, c, d. E12B: Ya [dubitativo]. E15B: Sí, y acá se ponen como los estudiantes. E12B: ¿Cuál? E15B: Sería como, este apoderado a tenía un estudiante. E12B: Ya [dubitativo]. E15B: El otro [apoderado] sería b tenía 2 estudiantes, c tenía 3 estudiantes y d tenía 4 estudiantes [señala las relaciones entre los elementos]. E12B: Pero, ¿cuál es la relación? E15B: ¡Ahí está!, a es 1, b es 2, c es 3 y d es 4.	

El E12B explica su idea al E15B sobre cómo nombrar los elementos del conjunto A, y luego relacionarlos a los del conjunto B. Los estudiantes lograron representar al conjunto de los apoderados como $A = \{A, B, C, D\}$ y al de los alumnos del taller como $B = \{1, 2, 3, 4\}$, estableciendo una relación entre éstos, sin embargo, su error estuvo en la relación $B \rightarrow C$, pues asociaron todos los elementos de B con el 30, definido como el único elemento de C.
Para sintetizar los resultados obtenidos de la fase de implementación, la Tabla 6 muestra una clasificación de los grupos de estudiantes de acuerdo con las categorías y subcategorías en que se evidenciaron sus producciones.

Tabla 6. Síntesis global de los resultados del estudio.

Fases	Categorías	Subcategorías	Grupos
Acción	C_1	$C_{1.1}$	G2A, G3A, G4A | G1B, G2B, G5B
		$C_{1.2}$	G1A | G3B, G4B
	C_2	$C_{2.1}$	G2A, G3A, G4A | G1B, G2B, G5B

		$C_{2.2}$	G1A | G4B
	C_3	$C_{3.1}$	G3A, G4A | G3B
		$C_{3.2}$	G1A | G2B
Formulación	C_4		G1A, G3A | G2B, G3B, G4B, G5B
	C_5		G1A | G2B
	C_6		G1A | G2B

En términos generales, en la segunda intervención se registraron mejores resultados en cuanto al establecimiento de relaciones entre los conjuntos A y B que en la primera, ello debido también a que se revisó el plan de clase implementado antes de volver a aplicarlo, y se adecuaron las *devoluciones* que realizaba el *docente* a los *alumnos* durante el desarrollo de la actividad. Lo anterior, que se encuentra en consonancia con la metodología del Estudio de Clases, permitió otorgarle a nuestra propuesta un carácter de perfectible.

Para la situación de *Validación* se solicitó a los estudiantes presentar sus procedimientos ante el curso utilizando la cartulina que se les entregó. A continuación, se presentan algunas producciones relevantes (véase
Figura *16* y
Figura *17*) de cada intervención.

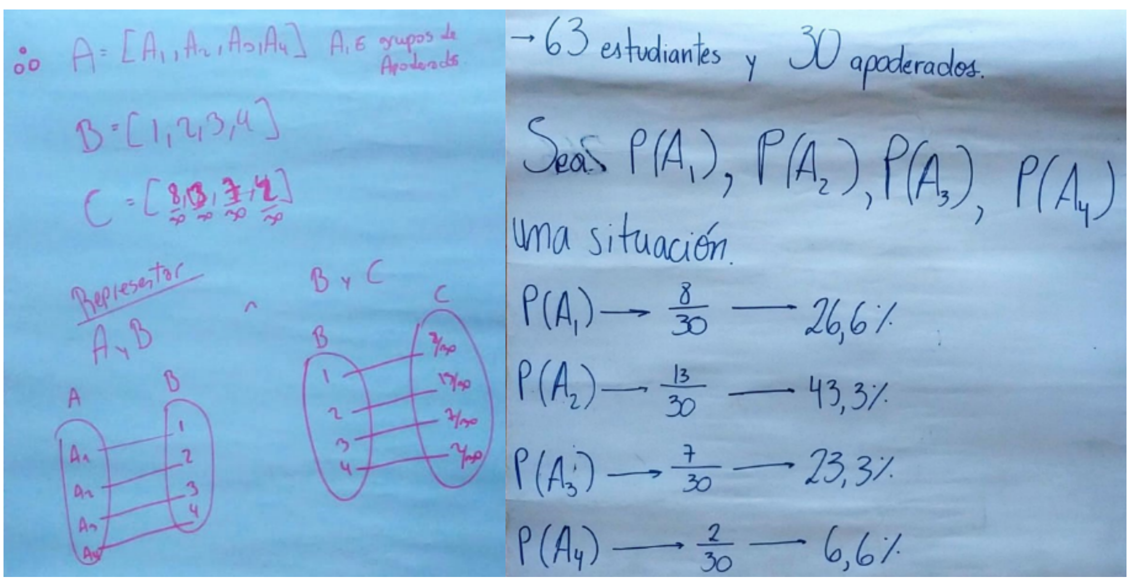


Figura 16. Evidencias de la fase de *Validación* en la primera intervención: G1A (izquierda) y G4A (derecha).

Con respecto a la primera intervención, el G1A estableció una relación congruente con la esperada para este problema, aunque la representaron de manera que $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$ se encuentran visualmente aislados, más se subentiende que –al no variar la representación del conjunto B– sí lograron establecer la relación entre los tres conjuntos. El G4A, en cambio, recurrió a valores que, para la resolución del problema, eran irrelevantes. Su producción final evidenció que calcularon las probabilidades de ocurrencia de cada evento de manera individual, es decir, sin que formasen parte de un conjunto, razón por la cual no consideraron la representación de diagramas sagitales como se esperaba.

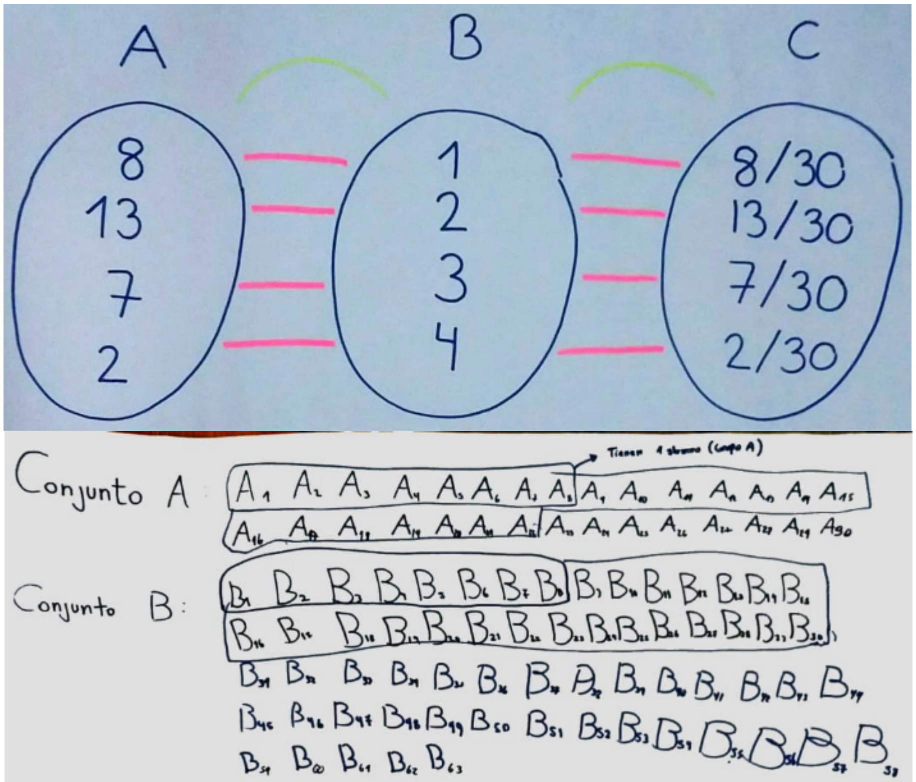


Figura 17. Evidencias de la fase de *Validación* en la segunda intervención: G2B (arriba) y G1B (abajo).

Con respecto a la segunda intervención, el G2B también logró un resultado cercano al esperado para el problema, aunque representaron los elementos del conjunto ***A*** como cardinalidades individuales de apoderados. El G1B, por el contrario, fue el único grupo de ambas intervenciones que representó los conjuntos ***A*** y ***B*** por extensión, cuya producción evidenció que lograron agrupar elementos, pero no así relacionarlos. En el conjunto ***A***, agruparon los elementos A_1-A_8 definiéndolos como el 'grupo A' que 'tiene 1 alumno', pero no existe una relación explícita entre este conjunto y el ***B*** de los alumnos. Al momento de exponer sus resultados, no expresaron claridad en sus argumentos y declararon 'agrupamos de acuerdo con lo que la actividad nos entregaba' [sic].

Posterior a las presentaciones de ambas intervenciones, el *docente* realizó la *Situación de Institucionalización*, tomando las ideas de los estudiantes y relacionándolas con la V.A.

Conclusiones

La propuesta didáctica que diseñamos se aplicó a estudiantes del nivel segundo año medio (15-16 años) con el objetivo de validarla como un aporte a la enseñanza de la V.A. Con base en los resultados obtenidos de las implementaciones, se lograron evidenciar las dificultades a las que se enfrentan y los errores que cometen los estudiantes al trabajar con este objeto matemático, e incluso la presencia de un obstáculo epistemológico reportado por Ruiz (2014), sobre la dificultad para identificar la V.A. involucrada en un enunciado. Los estudiantes tuvieron dificultades para considerar la V.A. como una función que sirve como base para comprender el concepto de F.P., pues la mayoría de las producciones evidenciaron que la consideraban sólo como una magnitud y, al mismo tiempo, generaron una necesidad de efectuar cálculos para obtener resultados (cantidad total de alumnos en el taller, porcentajes, frecuencias acumuladas, etc.) que no eran relevantes para resolver la actividad. Desde la perspectiva de la TSD (Brousseau, 2002), la dinámica de la clase permitió a los grupos ir transitando por las *Situaciones de Acción* y *Formulación* de manera no-lineal y cíclica, es decir, en la interacción e intercambio de ideas entre pares, se formaban acuerdos o discusiones que permitían cuestionar la forma de resolver el problema que se les planteó. Por su parte, la *Situación de Validación* les permitió expresar y defender sus ideas frente al curso cuando presentaron sus resultados finales, las cuales fueron consideradas por el *Docente* en el momento de efectuar la *Institucionalización* del contenido matemático.

Desde el año 2018 que esta propuesta se implementa para introducir los conceptos de V.A. y F.P. en el establecimiento en que se aplicó, lo cual permite dar continuidad a nuestra investigación y aportar a la enseñanza de la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques, 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y V. Warfield, Trads.). Nueva York, EE.UU.: Kluwer Academic Publishers. doi:10.1007/0-306-47211-2

Brousseau, G. y Warfield, V. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 163-170). Dordrecht, Países Bajos: Springer. doi:10.1007/978-94-007-4978-8_47

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Cuevas, M. (2017). Variable Aleatoria: una secuencia didáctica, bajo la mirada de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau (Tesis de magíster). Recuperado desde Catálogo Bibliográfico de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (http://opac.pucv.cl/pucv_txt/txt-2500/UCC2556_01.pdf)

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. Educational Studies in Mathematics, 6(2), 187-205. doi:10.1007/bf00302543

Isoda, M. y Olfos, R. (2009). El Enfoque de Resolución de Problemas: en la Enseñanza de la Matemática a partir del Estudio de Clases. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Ministerio de Educación de Chile. (2011). Matemática: Programa de Estudio para Segundo Año Medio. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2016a). Bases Curriculares 7º básico a 2º medio. Santiago, Chile: Autor.

Ministerio de Educación de Chile. (2016b). Programa de Estudio Segundo medio. Santiago, Chile: Autor.

Muñoz, G., Jiménez, L. y Rupin, P. (2013). Matemática 2º Medio Texto del Estudiante. Providencia, Chile: Ediciones SM Chile.

Ruiz, B. (2014). Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios (Tesis doctoral). Recuperado desde Repositorio Institucional de la Universidad de Granada. (http://hdl.handle.net/10481/31706)

Shiryaev, A. N. (2016). Probability-1 (R. P. Boas y D. M. Chibisov, Trads.) (3ra ed.). Nueva York, EE.UU.: Springer. doi:10.1007/978-0-387-72206-1

Vásquez, C. y Alsina, Á. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. NÚMEROS: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 85, 5-23.

Warfield, V. M. (2014). Invitation to Didactique. Nueva York, EE.UU.: Springer. doi:10.1007/978-1-4614-8199-7

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

EDUCAÇÃO FINANCEIRA E O TRABALHO COOPERATIVO EM UMA ABORDAGEM POR MEIO DE PROJETOS

FINANCIAL EDUCATION AND COOPERATIVE WORK IN A PROJECT APPROACH

Cassio Cristiano Giordano
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brasil)
ccgiordano@gmail.com

Resumo
Apresentamos aqui os resultados de em uma pesquisa qualitativa sobre gestão e desenvolvimento de um projeto de Educação Financeira. Nosso objetivo é identificar possíveis contribuições de uma abordagem por meio de projetos para a educação financeira de cento e vinte e três estudantes do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública brasileira. A abordagem metodológica é estudo de caso, o quadro teórico é a Educação Matemática Crítica. Concluímos que tal abordagem contribui para a o diálogo e para o trabalho cooperativo entre os estudantes, aprimorando a sua compreensão sobre conceitos e produtos financeiros, fortalecendo a confiança e as competências necessárias para desenvolver consciência e criticidade frente a oportunidades e riscos financeiros e, consequentemente, para alcançar um nível satisfatório de bem-estar financeiro, para fazer escolhas que melhorem a sua qualidade de vida individual e o seu bem-estar social.

Palavras-chave: educação financeira, matemática crítica, projetos

Abstract
This paper presents the results of a qualitative research on the management and development of a Financial Education Project. It is aimed at identifying possible contributions of a project-approach for the financial education of one hundred and twenty-three high-school third-year students in a Brazilian public school. The methodological approach is the case study, and Critical Mathematics Education constitutes the theoretical framework. We conclude that such an approach contributes to the dialogue and cooperative work among students, enhancing their understanding of financial concepts and products, and strengthening the confidence and skills needed to develop awareness and criticism in the face of financial opportunities and risks; and consequently, to achieve a satisfactory level of financial well-being, and to make decisions that improve the quality of their individual life and social welfare.

Keywords: financial education, critical mathematics, projects

Introdução

A Educação Financeira é um campo da Matemática que tem conquistado cada vez mais espaço nas discussões que envolvem a reestruturação curricular dos mais diversos sistemas de ensino no Brasil, quer sejam públicos ou privados, graças à homologação da Base nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), documento normativo elaborado pelo Ministério da Educação e Cultura – MEC. Até então, apesar de sua forte presença na mídia, por meio de veículos de informação e comunicação, como rádio, TV, jornais impressos, *internet*, segundo Azevedo (2019), não havia garantias de sua presença nos currículos formais das escolas. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997, 1998, 2000), não havia menção alguma à Educação Financeira, mas apenas à Matemática Financeira.

Atualmente a Educação Financeira é reconhecida como um complexo campo de investigação que mobiliza saberes, habilidades, competências, crenças e concepções envolvendo diferentes áreas do conhecimento humano. No ambiente escolar, está associada a diversas disciplinas, tais como Geografia, História ou Sociologia, bem como temas transversais como Ética e Cidadania, Trabalho e Consumo, Meio Ambiente e Saúde.

Para explorar tal complexidade na Educação Básica, acreditamos ser fundamental sua introdução no currículo formal das escolas desde os anos iniciais, como preconiza a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico – OECD (2005B, p.5): “A educação Financeira deve começar na escola. As pessoas devem ser educadas sobre questões financeiras o mais cedo possível em suas vidas”.

A OECD (2005B), considera que:

> A educação financeira pode ser definida como o processo pelo qual os consumidores/investidores financeiros melhoram a sua compreensão dos produtos, conceitos e riscos financeiros e, através de informações, instruções e/ou conselhos objetivos, desenvolvem habilidades e confiança para tomar consciência dos riscos e oportunidades financeiras, para fazer escolhas bem informadas, para saber onde pedir ajuda e tomar outras medidas eficazes para melhorar seu bem-estar financeiro. A educação financeira vai além do fornecimento de informações financeiras e consultoria, deve ser regulamentada, como já é, com frequência, o caso, particularmente para a proteção dos clientes (ou seja, consumidores em relações contratuais). (OECD, 2005B, p.4)

A partir de 2018, a publicação da BNCC (Brasil, 2018) a Educação Financeira foi introduzida oficialmente no Ensino Médio brasileiro. Encontramos na BNCC um forte incentivo ao desenvolvimento de projetos. A Educação Financeira transcende a vida escolar, sendo fundamental para o desenvolvimento da criticidade e do exercício pleno da cidadania.

Assim, por meio de um estudo de caso, procuramos responder à questão de pesquisa: Quais as possíveis contribuições de uma abordagem por meio de projetos, com trabalho cooperativo, ¿para a educação financeira dos estudantes brasileiros?

Marco teórico

Na perspectiva da Educação Matemática Crítica, Skovsmose (2001) ressalta que o desenvolvimento da criticidade emerge de práticas investigativas dinâmicas e colaborativas em situações contextualizadas na realidade dos estudantes. A relação entre o professor e o estudante assume papel fundamental nos processos de ensino e aprendizagem. Eles devem ser parceiros, se tratar como iguais. Não cabe ao professor um papel decisivo e prescritivo, pelo contrário, deve haver amplo diálogo entre os sujeitos envolvidos no processo educacional.

Destacando a importância da Educação Financeira para o cidadão comum, Teixeira (2015) ressalta que:

> A Educação financeira não consiste somente em aprender a economizar, cortar gastos, poupar e acumular dinheiro, é muito mais que isso. É buscar uma melhor qualidade de vida, tanto hoje quanto no futuro, proporcionando a segurança material necessária para obter uma garantia para eventuais imprevistos. (Teixeira, 2015, p. 13)

Campos, Teixeira e Coutinho (2015), na perspectiva da Educação Matemática Critica, defendem uma Educação Financeira contextualizada em uma realidade condizente com a vida dos estudantes, enfatizando o papel do professor e a necessidade de capacitá-lo para enfrentar tal desafio. Para tanto, propõem como estratégias possíveis a resolução de problemas, a modelagem matemática e utilização das tecnologias de informação e comunicação (TIC).

Para educar nossos estudantes financeiramente, de modo significativo, dependemos do desenvolvimento do seu letramento. A OECD (2011) define letramento financeiro como uma combinação de consciência crítica, conhecimentos, habilidades, atitudes e comportamentos necessários para que cada cidadão possa tomar decisões acertadas e alcançar um nível satisfatório de bem-estar financeiro.

Já segundo Orton (2007), esse processo envolve a competência leitora para análise e interpretação das condições financeiras pessoais que determinam o bem-estar material, como a capacidade para tomar decisões financeiras de forma consciente, falar sobre dinheiro, tratar de assuntos financeiros, fazer projeções, enfrentar novos desafios e adaptar-se às mudanças do cenário político e econômico.

Na concepção de Mandell (2008) o letramento financeiro consiste na capacidade de avaliar complexos instrumentos financeiros em diferentes contextos, empregando conscientemente as ferramentas da Educação Financeira para tomar decisões, baseando-se em dados provenientes de confiáveis, o que nos parece convergir para a definição de Educação Financeira da OECD (2005A).

Lusardi e Mitchell (2011) consideram a falta de letramento financeiro um problema social, concluindo que não devemos pensar em educar financeiramente um indivíduo, mas a sociedade, de modo mais amplo. Particularmente, ela atribui a crise financeira nos Estados Unidos da América no início do século XXI, em parte, ao precário letramento do povo norte-americano como um todo, embora os efeitos da crise afetem de modo mais agudo as pessoas mais vulneráveis financeiramente.

O conceito de letramento financeiro de Atkinson e Messy (2012), embasado em pesquisa promovida pela OECD, envolvendo quatorze países em quatro continentes, considera essencialmente três amplas dimensões, a saber: conhecimento financeiro, comportamento financeiro e atitude financeira. Para dar conta dessa demanda, contemplando também as exigências da BNCC pelo desenvolvimento de pesquisa com participação ativa dos estudantes, julgamos necessário a exploração do trabalho cooperativo em pequenos grupos, como proposto por Garfield (1993), na perspectiva da abordagem por meio de projetos.

Para propiciar, aos estudantes, condições para o aprimoramento das competências necessárias para o desenvolvimento do seu letramento financeiro, empregamos uma abordagem por meio de projetos, com foco no orçamento doméstico familiar.

Método e procedimentos metodológicos

Realizamos uma pesquisa qualitativa, na perspectiva de Creswell (2010). Esse autor considera que a investigação qualitativa emprega múltiplas concepções filosóficas, múltiplas estratégias de investigação e métodos de coleta, análise e interpretação de dados, o que está em consonância com a proposta de uma Educação Financeira Crítica. A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador como instrumento principal, sendo essencialmente descritiva, centrada nos processos ao invés dos resultados e valorizando a intuição do investigador na busca de significados, ou seja, *o que* acontece na situação didática não é tão importante quanto o *como* acontece.

Em nosso caso, trata-se mais especificamente de um estudo de caso, como concebe Ponte (2006):

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida, como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse. (Ponte, 2006, p. 125)

Segundo esse autor, o estudo de caso não é exclusivo da educação, apresentando ampla tradição em outros campos do conhecimento humano. O estudo de caso pode envolver apenas uma pessoa, um grupo de pessoas, uma escola ou um sistema delimitado qualquer.

O caso por nós investigado se refere ao desenvolvimento do letramento financeiro, realizado em uma abordagem por meio de projetos, seguindo as orientações propostas pela BNCC (Brasil, 2018), como estratégia de ensino no campo da Educação Financeira de estudantes concluintes do Ensino Médio.

Não é nossa intenção elaborar generalizações, uma vez que o estudo de caso busca retratar uma dada realidade com ênfase na interpretação e análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, sem, contudo, permitir a manipulação das variáveis de modo que venha a favorecer a generalização.

Em nosso caso, particularmente, cento e vinte e três estudantes de uma escola pública brasileira, com idades entre dezesseis e dezenove anos, de quatro turmas do terceiro ano do Ensino Médio, responderam, sem se identificar (em muitos casos, com a ajuda dos pais), a um questionário com vinte e cinco perguntas de caráter socioeconômico, que permitiram um esboço do perfil financeiro de suas famílias, bem como o apontamento dos seus anseios.

Os estudantes de todas as turmas do Ensino Médio realizaram um trabalho de elaboração e análise de orçamentos familiares, dividido em três etapas:

1ª etapa

Sem se identificar por nome e número de chamada, utilizando um código alfanumérico por eles mesmos criados, com quatro letras e quatro algarismos, os estudantes, com a ajuda de seus familiares, realizaram um levantamento da receita e dos gastos de suas próprias famílias, dessa forma:

Perfil financeiro de sua família da sua família

1. Qual a renda familiar (em R$)? _________________
2. Quantas pessoas vivem na casa? _______
3. Quantas pessoas trabalham? _______
4. Quantas pessoas estão desempregadas? _______
5. Quantas pessoas estão aposentadas? _______
6. Quantas pessoas estudam? _______

7. Quais as idades (anos)? ____
8. Alguma dessas pessoas necessita de cuidados médicos especiais? ________
9. Qual o custo (em R$)? __________________
10. Quanto essa família gasta com transporte (em R$)? __________________
11. Quanto essa família gasta com plano de saúde (em R$)? __________________
12. Quanto essa família gasta com estudos (em R$)? __________________
13. Quanto essa família gasta com água (em R$)? __________________
14. Quanto essa família gasta com luz (em R$)? __________________
15. Quanto essa família gasta com gás (em R$)? __________________
16. Quanto essa família gasta com telefone/celular (em R$)? __________________
17. Quanto essa família gasta com tv/internet (em R$)? __________________
18. Quanto essa família gasta com compras de mercado (em R$)? _____________
19. Quanto essa família gasta com remédios (em R$)? __________________
20. Quanto essa família gasta com feira livre (em R$)? __________________
21. Quanto essa família gasta com lazer (em R$)? __________________
22. Quanto essa família gasta com moradia (em R$)? __________________
23. Quanto essa família gasta com serviços (limpeza, lavanderia, etc (em R$)? ___
24. Essa família tem empréstimos? ¿De que valor? __________________
25. Quais as quatro principais metas financeiras dessa família? (uma faculdade, um carro novo, uma casa própria, uma casa no campo ou na praia, uma viagem para Disney, para a Europa, um cruzeiro, um plano de previdência privada, uma cirurgia plástica, um curso de idioma, ...)

1º) ____
Essa meta custa aproximadamente (em R$): _____________________
2º) ____
Essa meta custa aproximadamente (em R$): _____________________
3º) ____
Essa meta custa aproximadamente (em R$): _____________________
4º) ____
Essa meta custa aproximadamente (em R$): _____________________

Acrescente ao final, se necessário, quaisquer lançamentos significativos não previstos nesse questionário.

2ª etapa

O professor trocou as folhas de forma que cada estudante recebesse a ficha não identificada (exceto por código) de um estudante de outra turma e analisasse sua situação, considerando a saúde financeira daquela família, suas metas (de uma a quatro) e a possibilidade de realizá-las.

Para tanto, os estudantes elaboraram planilhas orçamentárias utilizando o *software Excel*, na sala de informática. Eles também pesquisaram alternativas financeiras propondo cortes no orçamento, remanejamento de verbas, etc. Por exemplo:

- Se a família gastava muito na conta de água, luz, telefone, gás encanado, TV a cabo, etc, eles davam dicas de redução de consumo e indicavam sites que forneciam essas orientações.
- Se a família queria fazer uma viagem, eles procuravam os melhores pacotes em agências de viagem, indicando o endereço físico e/ou eletrônico da agência.
- Se sobrava dinheiro ao final do mês, eles procuravam simuladores de investimento, faziam projeções e propunham alternativas para aplicação desse dinheiro.
- Se um sonho da família era a casa própria, procuravam imobiliárias e bancos que financiassem esse imóvel.

- Enfim, os estudantes pesquisaram na internet fundos de previdências privada, planos de saúde, universidades, dentre outras instituições que pudessem viabilizar a realização dos principais sonhos daquela família.

Foram apresentadas três planilhas, para os meses de outubro, novembro e dezembro. A seguir, foram apresentadas projeções para um ano, cinco anos e, em alguns casos, até mais.

Havia metas a curto, médio e longo prazo (universidade, aquisição de veículos, de imóveis, aposentadoria, procedimentos cirúrgicos, etc).

Esse trabalho teve um momento de produção individual e um momento de produção coletiva. Na sala de informática, os estudantes se organizaram em grupos, analisaram coletivamente um orçamento e enviaram para o autor desse artigo, por e-mail, dois arquivos: um .doc (*Word*), com a análise, e outro .xls (*Excel*) com as planilhas.

Utilizando aplicativos (como *Numbers, XLS Open, Excel* Grátis, Planilhas *Google,* Meu Orçamento*,* Guia Bolso*,* Minhas Economias, Orçamento Diário) e softwares diversos (como o *Excel)*, incluindo simuladores de financiamento bancário, eles elaboraram planilhas orçamentárias com projeções para o quadro financeiro dessas famílias por um período de poucos meses até vinte anos.

3ª etapa

De modo sigiloso, essas planilhas retornaram para os estudantes para o *feedback*, com conselhos financeiros detalhados e referenciados.

Cada estudante recebeu a sua ficha, com o aconselhamento financeiro de outro estudante e escreveu um bilhete agradecendo e comentando suas sugestões.

A partir da produção oral e escrita dos estudantes, observamos o desenvolvimento dos seguintes elementos representativos de Educação Financeira.

Quadro 1: Modelo de letramento financeiro

Elementos de conhecimento	*Elementos de disposição*
Ideias básicas sobre Matemática Financeira Cálculo do valor do dinheiro através do tempo Conhecimento da linguagem Conhecimento do contexto Questionamento crítico	Postura crítica Crenças e atitudes Valores Sentimentos sobre incerteza e risco
Letramento financeiro	

Fonte: elaborado pelos autores

A análise do desenvolvimento de tais elementos é apresentada na seção 4 desse artigo.

Resultados e conclusões

Os estudantes puderam rever seu orçamento familiar original e aperfeiçoá-lo a partir das sugestões recebidas de outros colegas. Seguiu-se uma ampla discussão, em cada uma das quatro turmas, sobre o papel do planejamento financeiro e da projeção do orçamento familiar. Um assunto que despertou interesse particular foi o financiamento de cursos superiores, uma vez que esses estudantes estavam há poucos de ingressar na universidade.

Analisamos a primeira versão do orçamento comparamos com a versão final, reelaborada a partir do aconselhamento financeiro dos colegas, não somente no que diz respeito a avaliação do valor do dinheiro e dos bens através do tempo, mas também no que diz respeito à maturidade das escolhas, das prioridades e dos ajustes orçamentários.

Quanto aos aspectos cognitivos, observamos que os estudantes aplicaram ideias básicas da Matemática Financeira ao elaborar o orçamento, desenvolvendo cálculos sobre o valor do dinheiro através do tempo, ao projetar os resultados financeiros para os meses seguintes. Demonstraram domínio de linguagem ao propor ajustes orçamentários, bem como ao aconselhar financeiramente seus colegas. Além disso, demonstraram questionamento crítico e conhecimento de contexto ao avaliar a viabilidade de suas metas financeiras, definindo prioridades.

Quanto aos aspectos cognitivos, a mobilização de valores, crenças e atitudes, sobretudo ao estabelecer realisticamente suas metas financeiras, se posicionando criticamente frente aos obstáculos e incertezas econômicas vividas pelo nosso país.

A abordagem da Educação Financeira por meio de projetos contribuiu para a o diálogo e para o trabalho cooperativo. Para a maioria dos estudantes, foi a primeira oportunidade de discutir orçamento doméstico. Foi possível refletir tanto sobre questões de caráter pessoal (microeconomia) quanto sobre questões de cunho socioeconômico (macroeconomia), como se espera de uma proposta educacional crítica e cidadã, à serviço tanto da melhoria da qualidade de vida individual quanto do bem-estar social.

Referências

Atkinson, A.; Messy, F. (2012) Measuring financial literacy. OECD.

Azevedo, S. S. (2019). Educação Financeira nos Livros Didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base: Ensino Médio. Brasília. MEC.

Brasil (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática (1.º e 2.º ciclos do ensino fundamental) v. 3. Brasília: MEC.

Brasil (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: matemática (3.º e 4.º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC.

Brasil (2000). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais (ensino médio). Brasília: MEC.

Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base: Ensino Médio. Brasília: MEC.

Campos, C. R.; Teixeira, J.; Coutinho, C. Q. S. (2015) Reflexões sobre a Ed. Financeira e suas interfaces com a Ed. Matemática e a Educação Crítica. EMP, v.17, n. 3, p. 556-577.

Creswell, J. W. (2010) Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed.

Garfield, J. (1993). Teaching statistics using small-group cooperative learning. Journal of Statistics Education, 1(1). Disponível em < http://jse.amstat.org/v1n1/garfield.html > Acesso em: 02 abr 2019.

Lusardi, A.; Mitchell, O. S. (2011) Financial literacy and retirement planning in the United States. Journal of Pension Economics & Finance, v. 10, n. 4, p. 509-525.

Mandell (2008), L. Financial literacy of high school students. In: Handbook of consumer finance research. Springer, New York, NY, p. 163-183.

OECD (2005A) Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies. Paris: Secretary General of the OECD.

OECD (2005B). Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness. Directorade for Financial and Enterprice Affairs. Jul. 2005B. Disponível em < https://www.oecd.org/daf/fin/financial-education/35108560.pdf> Acesso em: 02 abr 2019.

OECD (2011). Measuring financial literacy: Questionnaire and guidance notes for conducting an internationally comparable survey of financial literacy. Periodical Measuring Financial Literacy: Questionnaire and Guidance Notes for conducting an Internationally Comparable Survey of Financial Literacy.

Orton, L. (2007) Financial Literacy: Lessons from international experience. Canadian Policy Research Network - CPRN Research Report.

Ponte, J. P. (2006) Estudos de caso em educação matemática. Boletim de Educação Matemática, v. 25, p. 103-132.

Skovsmose, O. (2001) Educação Matemática Crítica: a questão da democracia. Campinas: Papirus.

Teixeira, J. (2015) Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e matemática financeira. Tese (doutorado), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Brasil.

EL DIÁLOGO EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

THE DIALOGUE IN THE LEARNING OF THE CONCEPT OF FUNCTION

Yuri Carolina Niño Castillo
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – UPTC (Colombia)
yuricarolina.nino@uptc.edu.co

Resumen
Durante el desarrollo de algunos cursos de Cálculo en el nivel universitario, se observó dificultad al abordar la temática de funciones, y al reflexionar sobre la práctica docente se reconoció que la dinámica de la clase no permitía al estudiante indagar y explorar para dar solución a determinadas situaciones, por lo que la finalidad de la investigación fue caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función, y para lograrlo se realizó un estudio de caso con un grupo conformado por cuatro estudiantes. Los instrumentos usados para recolectar la información fueron las grabaciones en audio y la observación; y en esta ocasión se muestran los resultados de una de las categorías de análisis, la cual se concentró en los actos dialógicos que se evidenciaron al desarrollar las actividades y su relación con las interpretaciones de la función, que se reflejan en las representaciones de la misma. Así, se pudo reconocer que el diálogo como proceso de interacción social, puede influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: aprendizaje dialógico, función, representaciones de la función

Abstract
During the development of calculus courses at the University, a difficulty to approach function topics was observed. When reflecting on teaching practice, it was recognized that the class dynamics did not allow the student to examine and explore solutions to given situations. So, this study was aimed at characterizing students' learning through the mathematical modeling in research-exploring scenarios of the concept of function. A case study was carried out with a group of four students. Recordings and observation were the tools used to collect data. This paper shows the results of one of the categories of the analysis which was focused on dialogic acts that were evidenced when developing activities and their relationship with the interpretations of the function, reflected in its representations. So, it was possible to recognize that the dialogue, as a social interaction process, can influence positively on mathematics learning.

Keywords: dialogic learning, function, representations of the function

Introducción

Con el paso del tiempo las necesidades de la sociedad van cambiando, lo cual repercute de manera directa en la educación, que debe adaptarse a estos cambios con el fin de fortalecer las habilidades de los estudiantes en diferentes ámbitos y canalizar sus intereses positivamente. En este proceso de cambio es normal encontrarse en ocasiones con ciertas dificultades, por lo que se hace necesaria la búsqueda de herramientas que permitan superarlas; en el caso específico de la docencia, es muy difícil eliminar los obstáculos que se presentan, por el contrario, lo que se busca es "modificar la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos existentes" (Gascón, 1997, p. 21).
Por otro lado, la necesidad de cambiar implica redefinir o asumir una nueva perspectiva para entender la enseñanza y el aprendizaje como dos procesos que tienen puntos en común, pero que aun así pueden llegar a refractarse tomando direcciones distintas. En acuerdo con Riscanevo (2017) y Wenger (2001), se reconoce que el proceso de enseñanza no se fundamenta en la transmisión y transferencia de conocimiento ya existente, y que el proceso de aprendizaje no implica únicamente procesos individuales de internalización de dicho conocimiento, sino que enseñanza y aprendizaje son procesos sociales dinámicos que implican participación de profesores y estudiantes en actividades culturalmente contextualizadas.

De esta manera, reconociendo el poco protagonismo que se le estaba dando al trabajo en equipo, enfocado a desarrollar y fortalecer procesos de interacción social que podrían favorecer el aprendizaje de las matemáticas; dentro de la teoría de la Educación Matemática Crítica se encontraron propuestas para plantear actividades que permitan dar un rumbo distinto a las clases, evadiendo la dinámica tradicional (Skovmose, 2000); así que la investigación se llevó a cabo a partir de la implementación de actividades denominadas escenarios exploratorio-investigativos, fijándose el objetivo de caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función.

En cuanto al aprendizaje del concepto de función, es de tener en cuenta que por lo general su limitada comprensión puede deberse a que la manipulación que se hace de éste, solo se remite al aspecto algebraico (Hitt, 2003); además, los métodos de enseñanza en matemáticas se han basado desde hace tiempo en la matemática formal, la memoria y la algoritmia (Cantoral, 2001), y no se considera pertinente abordar el concepto de esta manera, ya que puede generar apatía, aprendizaje sin comprensión y altos índices de reprobación (Salinas & Alanís, 2009). Por otra parte, estas dinámicas de clase tradicional pueden llegar a reproducir desigualdades sociales como la sumisión o dominación, invitando al estudiante únicamente a replicar los procedimientos llevados a cabo por el docente (Skovmose, 2000).

Elementos teóricos

Evidenciando que la educación matemática silenciaba y suprimía a las personas, a raíz de que el docente asumía una actitud autoritaria que lograba controlar y aplacar a los estudiantes, el danés Ole Skovmose se ha propuesto generar cambios a través de su labor docente, evitando que dicha autoridad se convierta en represión, por lo que sugiere que se debe relacionar la matemática con aspectos de índole social, que le permitan al estudiantado asumir una actitud crítica frente a dichos aspectos (Skovmose, 1999).

Como componente de una educación matemática que brinde libertad a los estudiantes, se proponen entonces actividades que los motiven a indagar e investigar, y les concedan autonomía para decidir hasta dónde quieren llegar con sus aprendizajes. Skovmose (2000) se refiere a este tipo de actividades como ambientes de aprendizaje, los cuales se mueven entre el denominado paradigma del ejercicio y entre un paradigma investigativo; en el primero lo que se busca es que el estudiante replique los procedimientos que usa el docente, basándose en la existencia de una única respuesta; mientras que en el segundo se pretende dar más protagonismo a la investigación, eligiendo libremente el camino para llegar a la solución de determinada situación.

Partiendo del hecho de que las actividades con un carácter plenamente investigativo pueden llevar un tiempo considerable, impredecible en la mayoría de los casos, que posiblemente haga perder el interés de los estudiantes (Ponte, 2004); se proponen actividades que tengan una duración promedio, de modo que se abordan sin encasillar los caminos de solución, tampoco se consideran exclusivamente investigativas, sino que tienen en cuenta la exploración y la indagación; la primera asumida como una actividad experimental que tiene un carácter investigativo (Camargo, 2010), es decir, en esta el estudiante aplica conocimientos previos, identifica aspectos que desconoce y pone a prueba sus puntos de vista; y a través de la segunda, él busca explicaciones, aclara sus dudas, relaciona lo que ya sabía con lo que ha podido aprender, e identifica la manera en la que puede aplicar todo esto a la situación planteada (Skovmose, 2000), por lo que se denominaron escenarios exploratorio-investigativos, tomando en consideración que en matemáticas se pueden trabajar tareas de exploración (Ponte, 2004) y escenarios de investigación (Skovmose, 2000).

Es de tener en cuenta que a través de este tipo de actividades se puede fomentar el diálogo y el trabajo en equipo, lo cual le daría una orientación diferente al aprendizaje de las matemáticas; Alro y Skovmose (2012) consideran que el aprendizaje dialógico yendo de la mano con la indagación y reflexión, es un elemento importante para el aprendizaje crítico de las matemáticas; estos autores hacen referencia a un aprendizaje dialógico cuando en un proceso de enseñanza y aprendizaje se incluye una variedad de actos dialógicos, los cuales se enuncian en un orden específico, sin embargo, no quiere decir que se observen conservando dicho orden; la jerarquía que se tiene en cuenta para enunciarlos es: entrar en contacto, localizar, identificar, defender, pensar en voz alta, reformular, controvertir y evaluar. A continuación, se describe en qué consiste cada acto dialógico de acuerdo con los autores mencionados.

Entrar en contacto hace referencia a estar presente y consciente a lo largo de la conversación, poniéndose a tono con el otro, este contacto puede perderse cuando no logran captarse realmente las ideas propuestas por el otro. Así mismo, el docente y los estudiantes pueden localizar nuevas perspectivas, que quizá están latentes, pero no han emergido en la conversación, esto lo pueden lograr explorando diferentes posibilidades. También a lo largo del diálogo se pueden identificar ideas matemáticas, prioridades y perspectivas globales, cuando se dan explicaciones más profundas.

En cuanto al acto dialógico de defender, no precisamente hace alusión al hecho de tratar de convencer a los otros de la propia opinión, sino que se refiere a examinar las perspectivas personales, determinar hasta dónde puede encontrar apoyo a través de buenas razones y así mismo, ser objetivo frente a las propuestas de los demás, y si es el caso, argumentar a favor de éstas. De hecho, pensar en voz alta hace alusión a expresar con total libertad los pensamientos, ideas y emociones, que pueden surgir a lo largo del proceso de indagación, esto teniendo en cuenta la igualdad que se debe mantener en el diálogo, además que no sólo se da de manera verbal, ya que puede vincularse el lenguaje corporal, señalando, por ejemplo, una expresión algebraica, indicando acuerdo o desacuerdo con esta.

Respecto a reformular, esto se evidencia cuando se repite lo que se ha dicho, pero en un tono de voz distinto o adicionando algo, y no solo se da cuando alguien reformula sus propias ideas, sino que también comprende lo que el otro plantea y lo complementa. Controvertir se refiere al cuestionamiento que puede surgir respecto a supuestos que ya han sido aceptados, por lo que se debe efectuar de manera prudente y cautelosa, ya que si se hace de manera muy directa puede contribuir para que el proceso de indagación se detenga; este acto dialógico puede ayudar a percibir otras posibilidades que esperan ser localizadas. Así pues, cuando se corrige, critica o confirma, se está realizando una evaluación.

Es de tener en cuenta que en el aprendizaje dialógico no es estrictamente necesario que se den absolutamente todos los actos dialógicos mencionados anteriormente, sino que éste se da cuando los procesos de enseñanza y aprendizaje incluyen "una rica variedad de actos dialógicos", además el orden en el que se explican no es el mismo orden en el que se presentan a lo largo de una actividad (Alro y Skovmose, 2012, p. 168).

Por otro lado, se considera que quien aprende es un ser social que participa activamente en el proceso de interacción con los otros (Andrew, 2010), y precisamente el lenguaje se considera un medio de interacción social (Vygotsky, 1978); además, el intercambio de ideas o interpretaciones es un elemento esencial para las posibilidades de aprendizaje de cada persona (Valero, 2006). De esta manera, teniendo en cuenta que el diálogo puede influir en el aprendizaje de las matemáticas, y que en este caso se habla específicamente del aprendizaje del concepto de función, a continuación, se exponen algunos aspectos referentes al mismo.

En relación a su evolución histórica, diferentes autores muestran que antes de que se formalizara el concepto ya se usaban diversas representaciones de la función de acuerdo a las necesidades que surgían (véase, por ejemplo, Font, 2011; Hitt, 2002; Riscanevo, Cristancho & Fonseca, 2011), por lo que podría decirse que este ha adquirido importancia a lo largo de los años por los ámbitos en los que se ha reconocido, y que ha evolucionado bajo la influencia de las necesidades y avances de la humanidad, así que con el paso del tiempo se vio representado de distintas maneras.

Actualmente se reconocen cuatro maneras de representar una función, como son: la expresión verbal, con la que textualmente se describe la situación que se está representando; la algebraica, en la que se usan variables para denotar las diferentes cantidades que intervienen en la situación planteada; la tabla de valores, que proporciona una visión cuantitativa de la situación, sin embargo, no permite extraer características globales de la función; y la gráfica que le corresponde a esta, la cual se considera un excelente instrumento para poner de relieve características de la dependencia entre las variables (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Cabe la posibilidad de que un tipo de representación se considere más adecuada que las otras (Ugalde, 2014), probablemente porque cada una está diseñada para destacar ciertas características de la función; sin embargo, no es favorable para el aprendizaje de los estudiantes darle prioridad, por ejemplo, a la representación algebraica sin transitar a las otras, ya que no es suficiente contar con varias representaciones si no se cuenta con la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario (Acosta, 2005).

Del mismo modo, la función puede interpretarse de varias maneras, por ejemplo, puede verse como una ley de correspondencia entre valores de variables o entre elementos de dos conjuntos (Azcárate & Deulofeu, 1996), sin embargo, Posada y Villa (2006) mencionan que si la función se ve sólo como una regla de correspondencia, deja de verse como un objeto matemático que se relaciona con la variación y el cambio, así que la idea más general con la que se trabaja, se basa en que la función es una dependencia entre magnitudes que son susceptibles de cambio (Font, 2011), en otras palabras, se asume como "una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables" (p.17).

De esta manera, podría considerarse que las situaciones que permitan al estudiante acercarse al concepto de función, se pueden abordar desde los escenarios exploratorio-investigativos, que sugieren a los estudiantes indagar y explorar para reconocer las variables que intervienen en cada situación, fortaleciendo a su vez el diálogo y el debate de una manera democrática, conservando la igualdad (Skovmose, 2000).

Aspectos metodológicos

La investigación se considera de tipo cualitativo, ya que se buscaba determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función, tomando como elemento determinante en este proceso los diálogos de los estudiantes, además de la manera en que sus planteamientos se modificaban en el desarrollo de las actividades propuestas y el modo en el que interactuaban entre sí; y precisamente el tipo de investigación mencionado centra su interés en la comprensión de los fenómenos basándose en la perspectiva y experiencia de los participantes; así mismo, este tipo de estudios se concentran en examinar los puntos de vista, interpretaciones y significados que los involucrados le otorgan al fenómeno (Hernández, Fernández & Baptista, 2014).

Por otro lado, teniendo en cuenta que, a diferencia de los estudios cuantitativos, los cualitativos se aplican a un número reducido de casos que permitan trabajar hasta comprender el fenómeno y responder al planteamiento del problema (Hernández *et al*, 2014); se realizó un estudio de caso con un grupo conformado por cuatro estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, en el desarrollo de la asignatura denominada Matemática Aplicada a la Informática.

En cuanto a las actividades implementadas, fueron tres, cada una con un tema diferente, y en la tercera actividad los estudiantes debían elegir el ámbito en el que se recolectarían los datos para analizar su comportamiento y reconocer la utilidad de las matemáticas en dicho ámbito. A continuación, la primera y segunda actividad:

> *Primera actividad:* Representar un rectángulo con un perímetro de 24 centímetros y calcular su área. Responder las siguientes preguntas:
> - ✓ ¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 centímetros pueden construirse?
> - ✓ ¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera(s) se podría representar dicha relación?
> - ✓ ¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir?
> - ✓ ¿Será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Si, no, por qué?
>
> *Segunda actividad*: Tome una hoja de papel de forma rectangular y recortando cuadrados en sus esquinas construya una caja sin tapa. Responder las siguientes preguntas:
> - ✓ ¿Cuál es el volumen de la caja?
> - ✓ ¿Utilizando el mismo tamaño de la hoja de papel se podrán construir cajas con diferente volumen? ¿Cómo se podría calcular el volumen de cualquiera de esas cajas?
> - ✓ ¿Con hojas de diferente tamaño se podrán construir cajas de igual volumen? Compare sus respuestas con dos de sus compañeros.

Del mismo modo, los instrumentos usados para recolectar la información fueron las grabaciones en audio y la observación, además, cada actividad comprendió varias etapas, por lo que las grabaciones se obtuvieron de manera independiente para cada una de éstas, y las respectivas transcripciones, que se realizaron teniendo en cuenta las indicaciones de Tusón (2002), se enumeraron de la misma manera.

Respecto al estudio de la información, se tuvieron en cuenta tres categorías de análisis, la primera buscaba reconocer el papel de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función, la segunda caracterizar actividades exploratorio-investigativas del concepto de función como situaciones de enseñanza, y la última determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos como metodología de enseñanza en el aprendizaje del concepto de función.

Teniendo en cuenta que en esta ocasión se presentarán los resultados de la tercera categoría de análisis, cabe aclarar que esta tuvo en cuenta el aprendizaje a partir del diálogo y la relación con las diferentes representaciones de la función, así como la manera en la que se estaba interpretando. Así mismo, los escenarios exploratorio-investigativos se implementaron a través de la modelación matemática, sin embargo, en relación con la categoría mencionada, solo se tomaron los elementos teóricos pertinentes.

Resultados

En el primer escenario exploratorio-investigativo se dieron diferentes actos dialógicos como entrar en contacto, localizar, identificar, controvertir, defender y reformular. Por un lado, al abordar la actividad los integrantes del grupo establecen contacto al construir la representación de un rectángulo con 24cm de perímetro, en el siguiente aparte de la transcripción se evidencia en las líneas 7, 8 y 9, ya que los estudiantes mencionan al tiempo los valores de las dimensiones del rectángulo, lo cual indica que reconocen la idea que plantea el compañero, están en sintonía con él:

1. *Camilo- no por eso, yo =pensaria que acá los 24=*
2. *Marcela- =23 y aca uno=…*
3. *Camilo- coger los 24 cm, los dividimos en 4 ¿sí?, sería de a 12 ¿cierto? Digo…5 de a 6, 6 cm cada lado, cojo esos 6 cm y 2 de esos, como tenemos 4 y 6 cm, dos le añadimos 1 y le quitamos 1 a los otros, ¿si me entiende? O sea quedarían dos de 5 y los otros de 7, y ahí tendríamos los 4 lados, y sumando esto nos da 24*

4. *Karol - o sea…*
5. *Camilo - ese sería uno*
6. *Karol - si*
7. *Camilo - porque así tendríamos este aquí así, de 5, =5, 7 y 7=, ese sería uno y ahí podríamos empezar a jugar*
8. *Karol - = 5, 7 y 7=*
9. *Marcela - =7 y 7= mmm a si*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Más adelante los estudiantes identifican que hay infinitas posibilidades para construir rectángulos que tengan 24cm de perímetro; sin embargo, cabe mencionar que, en el siguiente aparte de la respectiva transcripción, se reconocieron simultáneamente otros actos dialógicos

25. *Karol - ya habrían 3 opciones*
26. *Camilo - y el de 2 ya sería el de 10*
27. *Marcela - ujummmm si*
28. *Camilo - creo que no podemos más*
29. *Marcela - ¿por qué no?...ese se…*
30. *Camilo - ¿porque cual más?*
31. *Marcela - el máximo digámoslo por así decirlo =sería este=*
32. *Camilo - =el mínimo=*
33. *Marcela - sí, pero igual uno puede ponerle menos de uno… de uno… =¿no dijo usted que en decima...?, ay nooo=*
34. *Camilo - = ¿menos 1 cm?=*
35. *Marcela - debajo del uno quien va, =decimales=, sii*
36. *Karol - = ¿con decimales? =*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Los estudiantes se encuentran en el proceso de determinar cuántos rectángulos de 24cm de perímetro se pueden construir, lo que los lleva a identificar que las dimensiones de éste pueden tomar valores decimales, así que aumentan las opciones. Así mismo, en la línea 29 de la transcripción anterior, la estudiante cuestiona lo que su compañero afirma en la línea 28, acerca de no tener más opciones, lo cual tiene que ver con el acto dialógico de controvertir, y el hecho de que él le responda preguntando qué otras opciones tendrían, conlleva a que la estudiante en las líneas inmediatamente siguientes, defienda la idea de usar decimales para las dimensiones de los rectángulos.

Como derivado de esta situación, más adelante dicha idea aflora nuevamente, pero en este caso *Camilo* es objetivo y apoya a *Marcela* en la defensa de su propuesta, lo cual también se contempla en el acto dialógico de defender, ya que no solo se trata de argumentar los propios supuestos, sino que también se da cuando se pone de por medio la objetividad para dar argumentos a favor de las ideas de los otros, lo mencionado se evidencia en el siguiente aparte:

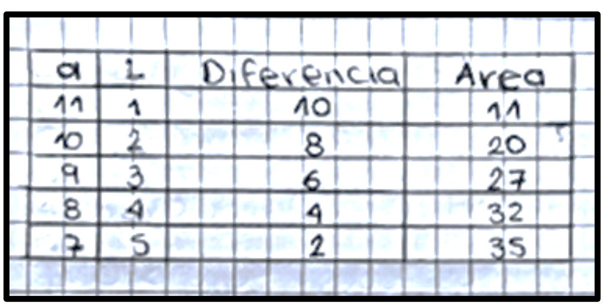
> ***136.*** *Marcela - aja, y ya decimales si tomamos en cuenta que el ancho y el largo tiene que ser mayor a cero, y se debe cumplir que la suma de los lados sea 24, o sea que el perímetro sea igual a 24cm, serían como dos formas de ver la…*
> ***137.*** *Camilo - si porque es que si los vamos a tomar decimales, entonces podemos tomar desde uno sobre 999999, o sea, hay una infinidad*
> ***138.*** *Marcela - hay infinidad de combinaciones*
> ***139.*** *Camilo – sí, exacto*

(Transcripción de la grabación en audio N° 1, 2018)

Luego de este proceso en el que se determina que hay infinitas posibilidades para construir rectángulos con 24cm de perímetro, se encuentra una relación entre las dimensiones de cada figura y su respectiva área; en este caso surge el acto dialógico de reformular, ya que la estudiante *Karol* toma los indicios que le proporciona su compañera *Marcela* y los complementa; además, se evidencia que la función se está interpretando como una dependencia entre variables y la manera de representar los datos se podría asociar con la representación tabular de ésta (Figura 1), tomando en cada fila las dimensiones de cada rectángulo y su respectiva área, indicando la dependencia entre éstas:

> ***48.*** *Marcela – cuando el ancho, la diferencia entre el ancho y el largo es =me…=*
> ***49.*** *Karol - =menor, mayor es su…=*
> ***50.*** *Marcela - =mayor=*
> ***51.*** *Camilo - aaa ya le … si si*
> ***52.*** *Karol - mayor es su…mayor es su área?, no*

(Transcripción de grabación en audio N° 2, 2018)



a	L	Diferencia	Area
11	1	10	11
10	2	8	20
9	3	6	27
8	4	4	32
7	5	2	35

Figura 1. Relación entre los datos

Durante el desarrollo del segundo escenario exploratorio-investigativo también se dio una variedad de actos dialógicos; por ejemplo, se localizó la idea que se podían construir infinitas cajas a partir de hojas del mismo tamaño, y lo que principalmente varía como cantidad independiente es el lado de los cuadrados que se recortan en las esquinas de dichas hojas, lo cual conlleva a que los estudiantes inicialmente identifiquen parcialmente cómo representar este hecho, usando la variable “x”:

17. *Marcela – o sea, sería como dibujar el, digamos la hoja rectangular, hacer las medidas y de acuerdo ahí… =o sea=*
18. *Camilo - = y a los cuadrados= colocar, nombrarlo "x" más bien [lado del cuadrado]*
19. *Marcela – sí*
20. *Camilo – porque es una variable*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Por otro lado, se destaca principalmente que en esta actividad surgió por primera vez el acto dialógico de evaluar, a través del cual se valora lo que se ha hecho, lo que permite reconocer falencias y así tener la oportunidad de corregirlas. En las siguientes líneas se evidencia cómo los estudiantes identificaron una falla que habían tenido en los valores que tomaron para hallar el volumen de la caja:

34. *Camilo – nosotros estamos haciendo mal las medidas*
35. *Marcela – ¿por qué?*
36. *Karol – =no, más bien varía es el ancho y el…=*
37. *Camilo – =porque si tomamos la medida de acá = listo, 17 centímetros, está bien, y este son 10 centímetros, 11 centímetros*
38. *Karol – es que la altura*
39. *Camilo – estamos tomando mal las medidas, porque nosotros lo tomamos de una vez completa la hoja*
40. *Marcela – es que…*
41. *Camilo – las dimensiones de la hoja*
42. *Marcela – ah sí, o sea el anterior nos quedó, no, ¿sí?*
43. *Camilo – nos quedó mal*
44. *Marcela – ujum*
45. *Karol – ah sí, porque es el volumen como tal de la caja ya hecha =no de la hoja [risas]=*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Así mismo, luego de que en las líneas 17 a 20 del aparte de la transcripción N°6, se dio el acto dialógico de identificar cómo representar el lado del cuadrado de manera general, y se reconoció la idea de variación inmersa en el concepto de función; se estableció el modelo matemático que permitiría hallar el volumen de cada caja, delimitando el dominio de dicha función, condicionado por las dimensiones de la hoja a partir de la cual se construían las cajas (Figura 2); es decir, en la búsqueda de la manera en la que se podía hallar el volumen de cualquiera de las cajas armadas con piezas rectangulares del mismo tamaño, salió a flote la representación algebraica de la función y nuevamente ésta se interpretó como una dependencia entre variables a través del acto dialógico de controvertir, en las líneas 21 a 23:

19. *Camilo – eso normal, así, por 17 menos*
20. *Marcela – "2x"*
21. *Camilo – "2x", ¿por qué "2x"?*
22. *Marcela – porque… se quitan de lado a lado los, la medida del cuadrado*
23. *Camilo – exacto*
24. *Karol – ahí ya varía… = para cualquiera…varía acá este número =*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

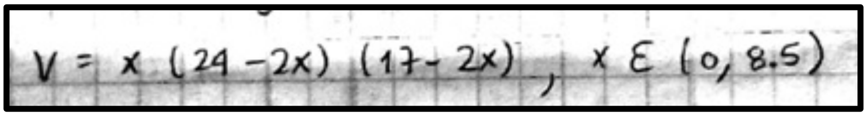


Figura 2. Representación simbólica de la función como modelo matemático

En cuanto al tercer escenario exploratorio-investigativo, los estudiantes eligieron como tema la venta ambulante de productos de bonice, que en Colombia son distribuidos por la empresa Quala; el producto denominado bonice es una barra congelada con variedad de sabores y tres tamaños distintos: pequeño, sencillo y doble; y las popetas son crispetas listas para el consumo, que también tienen diversos sabores y dos presentaciones en el tamaño.

Cabe mencionar que la elección del tema debía ser por la cercanía al contexto de los estudiantes, y ellos debían reconocer y mostrar la utilidad de las matemáticas en el ámbito que se eligiera; en este caso un familiar de una integrante del grupo es vendedor de dichos productos, por lo que fue quien facilitó los datos necesarios, de esta manera los estudiantes se apoyaron en las dos actividades anteriores, y empezaron buscando relaciones entre estos. De acuerdo con la indagación que realizaron, cada producto tiene una comisión de venta diferente, popetas grandes \$160, pequeñas \$80, bonice pequeño \$70, sencillo \$80 y doble \$100, además, a los vendedores les pagan un bono de \$5000 diarios sin importar las ventas que se hayan tenido, así que los estudiantes se propusieron formular una expresión algebraica que permitiera determinar los ingresos semanales de estos vendedores ambulantes.

Inicialmente se aclara cómo tener en cuenta el bono mencionado anteriormente en los modelos matemáticos; así que en la línea 83 de la transcripción correspondiente, la estudiante cuestiona por qué se considerarían \$1000 diarios en el modelo de los ingresos que genera cada producto, esto conlleva a que su compañero defienda su idea, defensa que se ve apoyada por otra integrante del grupo, así que juntos explican a la compañera el funcionamiento del modelo y la razón por la que un bono de \$1000 diarios por producto suma un total de \$35000 semanales, que representan los \$35000 por concepto de un bono diario de \$5000, todo esto se refiere respectivamente a los actos dialógicos de controvertir, defender e identificar; a continuación el aparte que evidencia lo mencionado:

83. Karol – son 5000 usted está diciendo que es mil por cada producto
84. Camilo – exacto, entonces ¿si son siete días?
85. Karol - ¿por qué va a dar 7000?
86. Camilo – porque =siete por uno =
87. Marcela – =son mil= son mil por día
88. Camilo – son mil por día, mil pesos por siete días
89. Marcela – siete por cinco treinta y cinco, =sí ahí está=
90. Karol – =ah sí da lo mismo=
91. Camilo – claro [risas]

(Transcripción de grabación en audio N° 12, 2019)

Luego de aclarar que el bono de \$5000 se tendría en cuenta en cada modelo matemático sumando \$7000 a los ingresos que genera cada producto, surge entonces la representación simbólica de la función (figura 3), que permite reconocer nuevamente que la función se interpreta como una dependencia de variables, entre la cantidad de productos vendidos y los ingresos que se generan semanalmente, lo cual se evidenció también en la representación gráfica que usaron los estudiantes, que reflejó un comportamiento lineal.

- **BonIce pequeño:**

b: Cantidad de BonIce pequeño vendidos por semana.
B (b) = (70 * b) + 7000

- **BonIce sencillo.**

s: Cantidad de BonIce sencillo vendidos por semana.
B (s) = (80 * s) + 7000

- **BonIce doble:**

d: Cantidad de BonIce Doble vendido por semana.
B (d) = (100 * d) + 7000

- **Popetas grandes:**

g: Cantidad de popetas grandes vendidas por semana.
P (g) = (160 * g) + 7000

- **Popetas pequeñas:**

q: Cantidad de popetas pequeñas vendidas por semana.
P (q) = (80 * q) + 7000

Figura 3. Representación simbólica de la función en la venta de productos de bonice

Reflexiones finales

Al implementar los escenarios exploratorio-investigativos a través de la modelación matemática, salen a flote varios actos dialógicos, que de acuerdo a Alro y Skovmose (2012) favorecen el aprendizaje dialógico, evidenciando que los estudiantes reformulan sus ideas teniendo en cuenta los planteamientos de sus compañeros, y también las apoyan o refutan objetivamente, fortaleciendo su aprendizaje al enlazar conocimientos previos con las nuevas temáticas, en este caso relacionadas con la modelación y el concepto de función.

Cabe mencionar que a pesar de que los grupos se conformaron por elección de los mismos estudiantes, uno de los integrantes del grupo parecía no compaginar con sus compañeros, y su participación en las actividades pasó casi desapercibida, tanto así que al final decidió desertar del curso; resulta incierto afirmar que la ausencia de diálogo fue determinante en su experiencia, sin embargo, el desempeño de sus compañeros y los debates que se forjaron durante el desarrollo de las actividades, ponen de relieve que el diálogo como proceso de interacción social, puede influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, la indagación que se deriva de los escenarios exploratorio-investigativos, se relaciona, hasta cierto punto, con el acto dialógico de identificar, a través del cual se dan explicaciones y se cristalizan las ideas; es decir, el proceso de indagar tiene que ver con la búsqueda de explicaciones, y el acto dialógico de identificar, las concreta. Esto permite identificar una diferencia entre los procesos mencionados, y es que no siempre identificar va de la mano con indagar, ya que en cuanto al acto dialógico se refiere, no siempre se da con el fin de aclarar dudas, porque puede ser que las ideas ya se hayan planteado, pero no de una manera clara. Aun así, sigue existiendo una relación ya que cuando se da la identificación tiene que ver con las explicaciones que se dan, las cuales están vinculadas al por qué de las cosas, y el hecho de explicar favorece el desarrollo de las matemáticas (Bishop, 1999, citado en Silva, 2010).

Ahora, la implementación de este tipo de actividades facilita dejar de ver la función como un ente abstracto, y más bien interpretarla como uno que se relaciona con la idea de variación y cambio entre dos variables, es decir, como un modelo matemático (Posada & Villa, 2006); en esto influye positivamente el diálogo, ya que intercambiando interpretaciones de determinada situación se pueden identificar las diferentes aplicaciones de dicho concepto.

En este mismo sentido, se observa que de manera verbal los estudiantes también ponen en evidencia la manera en la que interpretan la función, y lo plasman en las representaciones en las que se apoyan, lo cual en este caso se relaciona de manera directa con los planteamientos de Skovmose (1999), en los que se propone brindar más autonomía a los estudiantes, por ejemplo, en el primer escenario exploratorio-investigativo surgió la representación tabular para poner de relieve la relación entre los datos, en el segundo escenario se planteó una expresión algebraica que representaba la situación, incluyendo un conjunto de valores para la variable independiente, y en el tercero la atención se fijó en las comisiones de venta para analizar la utilidad de las matemáticas, sin embargo, ninguno de estos aspectos era explícito en las actividades, solo fue elección de los estudiantes el camino para dar solución a las situaciones.

Finalmente, no se puede dejar de lado el hecho de que para comprender lo que realmente sucede en la educación matemática, es importante la prudencia al creer todo lo que se percibe, ya que la realidad no siempre es como parece, y lo que es real es muy difícil de ver (Skovmose, 1999).

Referencias bibliográficas

Acosta, J. (2005). Tránsito entre representaciones en Matemáticas. ¿Pensamiento global o local? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18,* 5-10. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Alro, H. y Skovmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero y O. Skovmose. *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 149-171). Bogotá: Una Empresa Docente.

Andrew, P. (2010). La identidad y el aprendizaje: una perspectiva social. *Multidisciplina, 6*, 5-13.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad de Valencia.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. *Revista Electrónica Sinéctica* (19), 3-27.

Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi, J. Barragués, M. Callejo, J. Fernández, S. Fernández, V. Font y G. Torregrosa. *Matemáticas, Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-185). Barcelona: Graó.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma, 26*, 11-21.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2002). *Funciones en Contexto.* México: Pearson Educación.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. *Undécimo Encuentro de profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacan de San Nicolás de Hidalgo*, (pp. 1-25). Morelia, México.

Ponte, J. (2004). Problemas y investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. Ponte. *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Posada, F. y Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. *Didáctica de las matemáticas, 2*(2), 127-163.

Riscanevo, L. (2017). *Aprendizaje, experiencia y formación investigativa del profesor de matemáticas: tejiendo historias.* Tesis de Doctorado no publicada, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Riscanevo, L., Cristancho, K. y Fonseca, C. (2011). La influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función. *Praxis & saber, 2*(3), 119-137.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Silva, D. (2010). De lo real a lo formal en matemática. *Integra Educativa, 3*(2), 157-178.

Skovmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá, Colombia: Una empresa Docente.

Skovmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *EMA, 6*(1), 3-26.

Tusón, A. (2002). El análisis de la conversación: entre la estructura y el sentido. *Estudios de sociolingüística, 3*(1), 133-153.

Ugalde, W. (2014). Funciones, desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, educación e internet, 14*(1), 1-48.

Valero, P. (2006). ¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática. *Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia- Competencias Matemáticas.* Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia - MEN.

Vygostky, L. (1978). *Pensamiento y Lenguaje.* La habana: Editorial Revolucionaria.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Ediciones Paidos Ibérica, S.A.

LA HOMOTECIA: ANÁLISIS CONCEPTUAL Y ANÁLISIS DE CONTENIDO

THE HOMOTHECY: CONCEPTUAL ANALYSIS AND CONTENT ANALYSIS

Yosenith González Flores, Ignacio Arias Gómez, Miguel Picado Alfaro
Universidad Nacional, Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional (Costa Rica)
yflowers3@gmail.com, arias.i.30@gmail.com, miguel.picado.alfaro@una.cr

Resumen
Se presenta el proceso y los resultados de una investigación finalizada cuyo objetivo principal fue realizar un análisis conceptual y de contenido de la homotecia para su enseñanza en octavo año de la educación secundaria en Costa Rica. La investigación es de tipo cualitativa y de naturaleza descriptiva. El método empleado para la recolección y el análisis de la información fue el análisis didáctico. Se consideraron cuatro fuentes: libros de texto, diccionarios, investigaciones previas y profesores. Para la recolección de la información se usó: la revisión bibliográfica y la entrevista semiestructurada. Se determinó que el concepto de homotecia se puede englobar en dos sentidos, dependiendo del contexto en el que se ubique; y que algunos docentes no tienen un amplio conocimiento de esta noción.

Palabras clave: homotecia, análisis didáctico, educación secundaria.

Abstract
This paper presents the process and results of a completed investigation which was aimed at making a conceptual and content analysis of homothecy for its teaching in the eighth year of secondary education in Costa Rica. The research is qualitative and descriptive in nature. The method used for the collection and analysis of the information was the didactic analysis. Four sources of information were considered: textbooks, dictionaries, previous research and teachers. For collecting information, the bibliographic review and the semi-structured interview were used. It was concluded that the concept of homothecy can be encompassed in two ways, depending on the context in which it is located; and on the fact that some teachers do not have extensive knowledge of this notion.

Key words: homothecy, didactic analysis, secondary education.

Introducción

El profesor de matemáticas tiene un papel preponderante en la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina. Al respecto Vélez de Medrano y Vaillant (2009) indican que “los docentes importan para influir en el aprendizaje de los estudiantes y para mejorar la calidad de la educación. Importan, en definitiva, como un recurso necesario e imprescindible para la sociedad del conocimiento” (p. 11). Desde esta perspectiva, los docentes tienen como parte de sus responsabilidades, brindar una formación de calidad a los estudiantes, a través de propuestas adecuadas de enseñanza.

El Consejo Nacional de Rectores de Costa Rica (CONARE, 2012) resalta que “el ejercicio profesional requiere de una constante actualización y paralelamente van surgiendo nuevas necesidades de formación que de manera conjunta complementen y perfeccionen los conocimientos adquiridos en la carrera” (p. 38).

En Costa Rica, el Consejo Superior de Educación aprobó en el año 2012 un nuevo Programa de Estudio en Matemática (PEM-2012) que se caracteriza por un cambio en la metodología que utilizan los profesores en sus clases y la inserción de contenidos nuevos respecto al programa anterior. Uno de ellos es la homotecia en el área de geometría, lo que sugiere que los profesores deban incluir en su planeamiento didáctico este contenido e implementar estrategias para su enseñanza y su aprendizaje.

Para abordar la enseñanza de la homotecia, consideramos que es necesario realizar un estudio en profundidad de este contenido, que incluya el concepto, sus distintas representaciones, los fenómenos asociados y otras nociones relevantes que posibiliten el diseño de un planeamiento didáctico. Para esto, el análisis didáctico permite realizar un planeamiento fundamentado, con bases teóricas que permitan realizar un estudio reflexivo del contenido en cuestión, sobre su aprendizaje y su enseñanza (Gómez, 2005; Rico y Fernández-Cano, 2013).

El objetivo central de nuestro estudio fue realizar un análisis conceptual y de contenido de la homotecia para su enseñanza en octavo año de la educación secundaria en Costa Rica. Dichos análisis corresponden a dos de los cinco análisis parciales del análisis didáctico, propuesto por el Grupo de Investigación Pensamiento Numérico, de la Universidad de Granada en España (Gómez, 2005; Lupiáñez, 2013; Rico y Fernández-Cano, 2013).

Marco teórico

Los fundamentos teóricos de esta investigación se organizaron en dos apartados. El primero presenta los antecedentes, que corresponden a la literatura relacionada con la homotecia. El segundo, sobre el posicionamiento conceptual, que destaca las bases teóricas que guiaron el estudio.

Antecedentes

La bibliografía consultada se organizó en tres grupos: (a) investigaciones en matemática formal, (b) estudios sobre matemática aplicada y, en menor cantidad, (c) investigaciones vinculadas a la enseñanza y el aprendizaje de la homotecia.

Entre las *investigaciones centradas en la matemática formal*, se reconocen los trabajos de Barreto (2010), quien demuestra la relación pitagórica utilizando el concepto de homotecia. Usa la noción de homotecia en las figuras que están sobre los lados del triángulo, debido a que son homotéticas. En este caso, el autor no puntualiza sobre el concepto de homotecia, sino que lo usa para demostrar la relación que existe con las áreas de las figuras que están sobre los lados del triángulo rectángulo. Por su parte, Julio (2014) indaga sobre transformaciones en el plano (isomórficas e isométricas) y la noción de semejanza. Puntualiza en la definición de homotecia, en varios teoremas vinculados con ella y propone actividades para su enseñanza.

En cuanto a *los estudios sobre matemática aplicada*, se pueden englobar en áreas como la medicina, la astronomía y la industria. En este sentido, Raković, Kouvaritakis, Findeisen y Cannon (2012) utilizaron el concepto de homotecia en sistemas discretos lineales; Bokov, Mauroy, Mahut, Delclaux y Flaud (2014) hicieron un estudio a través de un modelo computacional, sobre el vínculo de la homotecia de los diámetros de las vías respiratorias y el sitio de la resistencia de las mismas, considerando personas sanas y las que tienen la enfermedad pulmonar obstructiva crónica.

Finalmente, en *las investigaciones vinculadas a la enseñanza y el aprendizaje de la homotecia*, solo se reconoció el estudio Ortiz y Angulo (2010), estos autores resaltan una serie de actividades orientadas a alumnos de sétimo año de Educación Secundaria en Colombia. Como resultado de la investigación, se precisa que a medida que se desarrolla la enseñanza de la homotecia, se identifican dificultades asociadas a otros conceptos matemáticos.

Posicionamiento conceptual

En este apartado se muestra el soporte teórico-conceptual del estudio. Se definen los conceptos relevantes de la investigación. La descripción del concepto de homotecia se muestra en el capítulo de resultados, ya que su estudio forma parte de los análisis parciales de la metodología considerada para la fase de análisis.

El análisis didáctico

El análisis didáctico "es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2005, p. 3). Este procedimiento ha permitido realizar un estudio detallado, oportuno y ordenado del concepto de homotecia, contemplando aspectos conceptuales y pedagógicos de esta noción (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Análisis conceptual

Según Rico (2001) y Rico y Fernández-Cano (2013) este análisis se caracteriza por trabajar con enunciados textuales que involucran descripciones, definiciones, listas extensivas, ejemplos, la contraposición de textos con significados alternos y formulaciones que incluyan símbolos. Puntualmente, estudia en profundidad para cada campo conceptual, la diversidad de significados, las posibles conexiones entre los términos y los niveles intersubjetivos (concepciones), subjetivos (creencias) y objetivos (conceptos). Revisa con detalle el concepto matemático en estudio, puntualizando en sus fundamentos, historia y génesis, para realizar una reflexión que posibilita caracterizar las ideas o nociones del mismo.

Análisis de contenido

Este análisis pretende describir la estructura matemática desde una óptica de enseñanza y aprendizaje, a través del procedimiento, el diseño, el desarrollo y la evaluación de los significados de los conceptos y procedimientos relevantes a su planeamiento (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013). Considera tres organizadores curriculares: *la estructura conceptual*, que comprende el establecimiento de los descriptores y componentes particulares de los conceptos, los procedimientos y las actitudes (Cañadas y Gómez, 2013; Fernández-Plaza, 2016), estas últimas no se consideraron en este trabajo; *los sistemas de representación,* que se emplean para representar diferentes nociones del concepto, sus propiedades y cualidades (Cañadas y Gómez, 2013; Lupiáñez, 2013; Valverde, 2012); *el análisis fenomenológico*, que pone en evidencia las situaciones donde se usan los conceptos matemáticos y los ámbitos en que se utilizan (Lupiáñez, 2013).

Metodología

En este apartado se presenta el tipo de estudio, las fuentes de información, además de la técnica de análisis de la información y las categorías para dicho análisis.

Tipo de estudio

El estudio es cualitativo de carácter exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Es exploratorio pues no se conocen antecedentes de estudios similares en Costa Rica para el tema de homotecia, basado en la metodología del análisis didáctico, y descriptivo debido a que se analizó, clasificó, interpretó y comparó la información obtenida de las diferentes fuentes.

Fuentes de información

Para realizar el análisis conceptual y de contenido de la homotecia, consideramos fuentes documentales como libros de texto e investigaciones previas que aportaron elementos teóricos, además, se contó con la participación de profesionales en matemática y en la enseñanza de la matemática quienes brindaron información sobre su enseñanza.

Los libros de texto empleados fueron los que incluían el concepto de homotecia. En el caso de los dirigidos a la educación secundaria, consideramos además que fueran editados a partir de 2013 y que su población meta fuese octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica. Por otra parte, consideramos estudios que emplearan el análisis didáctico como metodología de investigación y estudios relacionadas con la homotecia. Los profesores de matemática de educación secundaria participantes impartían octavo año desde el 2013 y trabajaran en colegios del circuito de educación central de Heredia y Alajuela. Finalmente, los docentes de matemática universitarios considerados, residían en Costa Rica, habían impartido el curso de Geometría en la Universidad y manifestaron conocimientos sobre el concepto de homotecia y su enseñanza.

La recolección de la información en los libros de texto y documentos electrónicos se realizó mediante la revisión bibliográfica y la elaboración de una ficha para cada documento que contempla seis apartados, tres elaborados con base en las categorías del análisis conceptual y tres realizados con base en las categorías del análisis de contenido. En el caso de los docentes, se realizó una entrevista semiestructurada con una guía de 11 preguntas, tres sobre información académica del entrevistado, tres elaboradas con base en las categorías del análisis conceptual y cinco realizadas con base en las categorías del análisis de contenido. Dichas categorías se mencionan más adelante (ver tabla 1).

Análisis de la información

La información se analizó con base en el análisis didáctico, ya que permite estudiar en profundidad el significado de un contenido matemático escolar. Para esto se establece un conglomerado de procedimientos, técnicas y métodos para recopilar, organizar y analizar la información (Gómez, 2002; Gómez, 2005; Rico y Fernández-Cano, 2013). En este estudio se adoptaron las categorías de Rico y Fernández-Cano (2013) para el análisis conceptual y el análisis de contenido en el marco del análisis didáctico, estas se detallan en la tabla 1.

Tabla 1. Categorías para el análisis del concepto de homotecia.

Tipo de análisis	Categorías
Análisis conceptual	Conceptos y términos básicos Aproximación histórico-crítica Génesis epistemológica
Análisis de contenido	Estructura y análisis formal Sistemas de representación Análisis fenomenológico

Nota: Elaboración propia.

Según McMillan & Schumacher (2005), las categorías *etic* hacen referencia a nociones externas a una situación, es decir, refieren a lo que el fenómeno en estudio significa para el investigador. Las categorías *emic* refieren a aspectos desde el interior de una situación, es decir, a lo que el fenómeno en cuestión significa para los sujetos de investigación.

Con base en lo anterior, en nuestro estudio las seis categorías planteadas para realizar el análisis conceptual y el análisis de contenido, son las categorías *etic*. Asimismo, las categorías *emic* estuvieron presentes en las respuestas de los docentes a la entrevista en la que se les preguntaba como empleaban las categorías del análisis conceptual y de contenido en su desempeño profesional, debido a que en algunas ocasiones las respuestas de los docentes no necesariamente eran estructuradas en función de las categorías ya establecidas, por lo tanto, tuvimos que hacer una reinterpretación y un análisis de sus respuestas para ubicarlas en la categoría correspondiente. Asimismo, en la revisión bibliográfica también se evidencian las categorías *emic* debido a que cuando se analiza un texto, este tiene una organización y perspectiva de interior del autor, quien no necesariamente escribe desde una postura teórica del análisis conceptual y de contenido, y fue nuestra labor identificar los elementos que aludían a cada una de las seis categorías preestablecidas.

Resultados

Se presentan los resultados de dos de los análisis parciales del análisis didáctico, a saber: el análisis conceptual y el análisis de contenido.

Análisis conceptual

El análisis conceptual ha posibilitado un acercamiento a los significados que se otorgan al concepto de homotecia. Se acentúan algunas particularidades del concepto en textos de matemáticas y las concepciones de este.

Sobre la historia de la homotecia

A través de la historia, la homotecia sobresale en la evolución de las trasformaciones geométricas. Diferentes matemáticos estudiaron las transformaciones en el siglo XIX. Debido al avance de la geometría, por parte de los trabajos de Monge y Klein, se consideraba la semejanza y la homotecia como objetos matemáticos (Escudero, 2005; Julio 2014; Moriena, 2006; Zurita, 2011).

Los programas de las matemáticas modernas de la década del 70 presentan la homotecia como una aplicación lineal, relacionada con isomorfismos de espacios vectoriales y como una aplicación afín en vinculación estrecha con las estructuras del plano. En la década de los años 90, el interés radicaba no solo en la estructura de la homotecia, sino en presentarla desde dos contextos matemáticos: el vectorial y el analítico (Lemonides, 1991).

La tabla 2 muestra una síntesis de las definiciones de algunos diccionarios de matemática consultados en las bibliotecas universitarias públicas. En estos, se puede reconocer una misma definición, basada en la similitud de los significados propuestos.

Tabla 2. *Concepto de homotecia presente en diccionarios de matemática, en las décadas del 70 y del 90.*

Warusfel (1972)	Jackson (1973)	James (1976)	Schwartzman (1994)
Transformación que hace corresponder a todo punto P otro punto P' situado sobre la recta OP, de tal modo que sea $\frac{OP'}{OP} = h$, donde O es punto fijo.	Relación entre dos sistemas de puntos con un centro común y que sus distancias a este sean una constante.	Figuras que relacionan las líneas que unen puntos correspondientes con un punto fijo y que al dividirlas tiene razón constante.	Las figuras homotéticas están en la misma posición relativa, además, cumplen que las rectas que contienen a los vértices correspondientes concurren en un mismo punto y al dividir los segmentos correspondientes generan una constante.

Nota: Elaboración propia.

Las definiciones en la tabla 2 resaltan que tres los diccionarios de matemáticas consultados, editados en la década de los años 70, exponen la homotecia con base en una transformación o relación entre puntos, de modo que se obtenga una razón constante. En el diccionario editado en 1994, se destacan caracterizaciones sobre la homotecia, es decir, no se aprecia una definición explícita de esta, sino que describen las características que tienen las figuras homotéticas.

Sobre las concepciones de homotecia

Desde una óptica etimológica, la palabra homotecia tiene su origen en los términos “homo” que alude a igualdad y “tithénai” que refiere a colocar (Grupo Norma, 1992; Jackson, 1973; Casares, 1984; Schwartzman, 1994), es así como etimológicamente la homotecia se puede entender como colocar igualdades.

La literatura examinada muestra diferentes definiciones para el concepto de homotecia. En libros de texto de matemática, las definiciones usan representaciones simbólicas y puntualizan en la homotecia como una aplicación afín que involucra vectores. Por ejemplo, De Burgos (1977) define la homotecia como: “en un espacio vectorial V sobre un cuerpo K, se llama homotecia afín de centro $\boldsymbol{a} \in V$ y razón $k \in K$ a la aplicación $h_{a,k}: V \to V$ definida, $\forall\, \boldsymbol{v} \in V$, mediante: $h_{a,k}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} + k(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a})$” (p. 162).

En diccionarios de matemáticas, algunos fundamentan o mantienen la tendencia reconocida en los textos de matemática, como Espinosa de los Monteros (2004) y Chambadal (1972), mientras que otros textos se inclinan más por una definición a través de una representación verbal, destacando relaciones entre distancia; tal es el caso de Sierra (2012) quien define esta noción como una "transformación geométrica que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor (…) donde una recta y su homóloga son paralelas" (p. 62). En diccionarios de la lengua, a pesar de no ser especializados en matemática, conservan el estilo de estos últimos diccionarios de matemáticas, como Alemany (1957) que indica que una homotecia es una "relación existente entre dos sistemas de puntos de tal modo dispuestos que cada dos de una serie estén en línea recta, tengan un centro común y sus distancias al centro estén en una razón constante" (p. 722).

Por otra parte, en los libros de texto de educación secundaria se da un abordaje más intuitivo de la noción de homotecia, prevalece la representación verbal o la mezcla de la verbal y la simbólica. Estas características las muestra F prima Grupo Editorial (2014), que define la homotecia como "una transformación que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor. En general una homotecia de razón k diferente de 1 deja un único punto fijo, llamado centro" (p. 36). Estos libros especializados evidencian una concordancia de la noción intuitiva del concepto, con la definición propuesta por el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012): la homotecia es "una transformación mediante la cual se obtiene una figura semejante a la figura que se le aplica. Esta semejanza preserva ángulos, aunque puede cambiar la longitud de los segmentos" (p. 352).

Los estudios previos enfocan la definición de homotecia, atendiendo el propósito de la investigación. En matemática la definición es más formal y rigurosa, mientras que los trabajos enmarcados en la didáctica de la matemática, exponen una definición más descriptiva e intuitiva del concepto.

Finalmente, los docentes entrevistados se refieren a la homotecia como aquella transformación que amplía o disminuye una figura; su noción de homotecia deja sin destacar elementos como el centro de homotecia, a excepción de cuatro profesores que sí lo refieren.

Análisis de contenido

Una vez que fueron reconocidas las *representaciones,* en las fuentes documentales, estas se han clasificado en cinco tipos: simbólicas, verbales, gráficas, icónicas y ejecutables.

Las representaciones *simbólicas* se muestran como parte de la definición, las propiedades o particularidades del concepto de homotecia. Por ejemplo, cuando se indica que para representar un punto homólogo de una homotecia en el plano cartesiano, se debe considerar un punto $P = (x, y)$ y $O = (a, b)$, como centro de la homotecia, con razón k, $P' = (kx - ka + a, ky - kb + b)$ (Chavarría, 2014; Cubillo, Garita, Mena, Morera, Rodríguez y Vargas, 2014).

Las representaciones *verbales* se identifican en la presentación en prosa de la información sobre el concepto. Por ejemplo, al destacar que la homotecia es una "transformación en la que la imagen de un punto se halla sobre la recta que une a un punto fijo, y en la que la distancia disminuye o aumenta en una relación constante" (El pequeño diccionario Larousse ilustrado, 1996, p. 528).

Las representaciones *gráficas,* son aquellas que se identifican en una cuadrícula o un plano cartesiano. La figura 1 muestra un ejemplo.

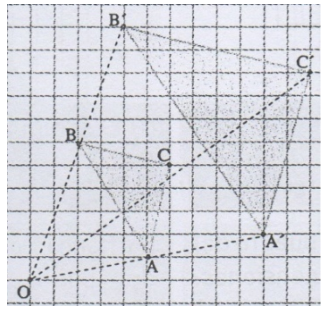


Figura 1. Representación de una homotecia directa
Fuente: Publicaciones Porras y Gamboa (2013), p. 82.

Las representaciones de tipo *icónico*s se reconocen en aquellas figuras mostradas sin especificar un plano cartesiano o cuadrícula (figura 2).

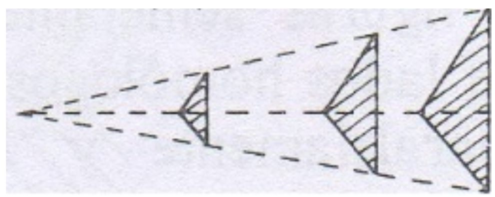


Figura 2. Homotecias directas.
Fuente: Rodríguez y Rodríguez (1984), p. 228.

Las representaciones denominadas *ejecutables* se presentan a través de un software, como las producidas en el software GeoGebra (figura 3).

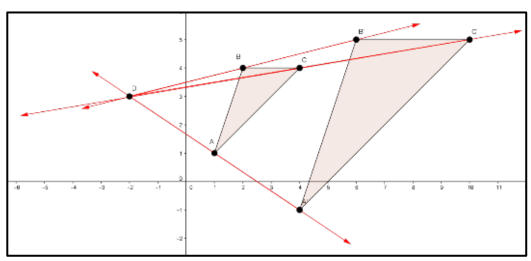
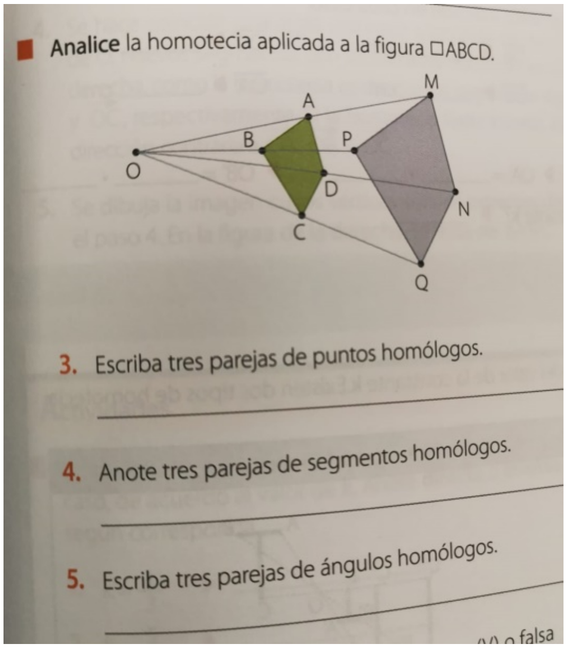


Figura 3. Representación de una homotecia usando GeoGebra.

En la categoría correspondiente a la *estructura conceptual*, específicamente en el campo del conocimiento conceptual, se identificaron en los *hechos* términos como razón, producto, ampliación; como parte de *resultados* se hallaron indicaciones que destacan que en una figura homotética el perímetro es $k$veces el perímetro de la figura original, y que el volumen de esta □la figura homotética□ es k^3 veces el volumen de la figura original, donde k es la razón de homotecia. Algunos de los *conceptos* relacionados con la homotecia son: función, relación y espacio afín. La estructura conceptual que se identificó corresponde a *las transformaciones geométricas,* que se según Julio (2014) se clasifican de acuerdo con el aspecto de la figura homóloga. Se determinaron como trasformaciones geométricas, las isométricas, las isomórficas y las anamórficas.

En el campo procedimental, algunas de las *destrezas* identificadas se dirigen a reconocer ángulos homólogos de un polígono, obtenido al aplicar una homotecia, y reconocer una homotecia a partir de una figura en el plano cartesiano.

Se evidenciaron *razonamientos* de tipo deductivo e inductivo y *la estrategia* identificada orientaba a la resolución de problemas de la vida cotidiana mediante la aplicación de la homotecia. En la figura 4 se identifican tres destrezas y en la figura 5 se muestra un razonamiento deductivo.



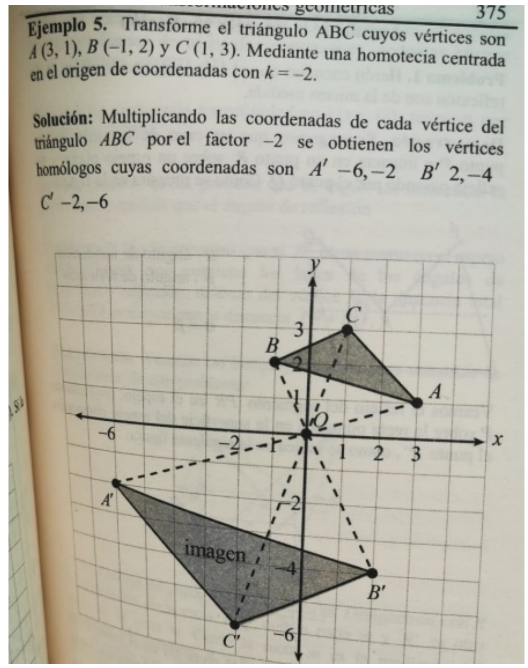
Analice la homotecia aplicada a la figura □ABCD.

3. Escriba tres parejas de puntos homólogos.

4. Anote tres parejas de segmentos homólogos.

5. Escriba tres parejas de ángulos homólogos.

Figura 4. Destrezas
Fuente: Santillana (2017), p. 75



375

Ejemplo 5. Transforme el triángulo ABC cuyos vértices son $A(3, 1)$, $B(-1, 2)$ y $C(1, 3)$. Mediante una homotecia centrada en el origen de coordenadas con $k = -2$.

Solución: Multiplicando las coordenadas de cada vértice del triángulo ABC por el factor -2 se obtienen los vértices homólogos cuyas coordenadas son A' $-6, -2$ B' $2, -4$ C' $-2, -6$

Figura 5. Razonamiento deductivo
Fuente: Jiménez (2014), p. 375

El estudio de la *fenomenología* condujo a la identificación de tres contextos: (1) *determinar la razón de homotecia,* en el campo de la Medicina se evidencia la necesidad de determinar la razón de homotecia para realizar comparaciones, que permitan conocer la resistencia respiratoria que puede tener una persona a una enfermedad pulmonar (Bokov et al.,2014); (2) *trazar figuras homotéticas*, en la astronomía se aplica la homotecia a un haz de luz a través de simulaciones que facilitan la detección de exoplanetas (Habib,Azagrouze, El Azhari, Benkhaldoun, y Lazrek, 2010); también, en Anatomía, específicamente en el estudio del ojo humano, la visualización de imágenes produce una homotecia inversa, debido a que el ojo humano percibe las imágenes invertidas en la retina, de acuerdo con su orientación real; también, se evidencia una homotecia directa, en la dilatación y contracción de la pupila del ojo al exponerse a la luz, donde el centro del ojo sería el centro de homotecia (Aracena, 2014; Puell, 2006); (3) *medir distancias,* la homotecia es aplicable en Astronomía, para aproximar el diámetro solar mediante un experimento casero, que consiste en tomar un tubo de papel (puede ser el interior del papel de cocina) y en extremo se tapa con papel aluminio y en el otro se tapa con papel cebolla, se hace un pequeño hueco en el extremo del papel aluminio y se dirige al sol, de esta manera se observa un círculo que aparece en la parte del papel cebolla (figura homotética del sol), aquí se genera un homotecia inversa (Gil, 2013); en Ingeniería se usa la homotecia para calcular la profundidad de un pozo, la distancia de un túnel, entre otras.

Las indicaciones de los docentes entrevistados mostraron ciertas inconsistencias en cuanto a las aplicaciones de la homotecia, algunos destacaban el uso de la homotecia para el establecimiento de la semejanza entre figuras, sin destacar el centro de homotecia, un elemento fundamental de este concepto.

Conclusiones

La investigación llevada a cabo ha permitido el estudio de la homotecia desde los principios del análisis conceptual y de contenido, particularmente para organizar su enseñanza en octavo año de la educación secundaria en Costa Rica.

El análisis conceptual conduce a un acercamiento —inicial— a la noción de homotecia; desde la historia se ha puesto de manifiesto su evolución con el paso del tiempo en un periodo de tiempo particular.

El concepto de homotecia muestra una caracterización distinta a partir del campo conceptual y las fuentes consideradas. En el marco de la matemática, a través de los libros y diccionarios de matemática, se reconocen definiciones más rigurosas y formales. Desde la Didáctica de la matemática, con fundamento en investigaciones y libros de matemática para Educación Secundaria, se muestran definiciones descriptivas e intuitivas, es decir, se apela más a caracterizaciones de las figuras homotéticas, que involucran su forma y su tamaño.

A partir del análisis de contenido, se reconocen diversas representaciones para la homotecia. En particular, el concepto se hace presente desde lo gráfico, lo icónico y lo ejecutable, sin descartar el uso de símbolos que complementan estas representaciones o que forman parte esencial de la definición que se muestra. Conceptualmente, se señalan diversos conceptos vinculados a la homotecia —o a los que esta se asocia—; los procedimientos sobre homotecia destacan habilidades de visualización, a partir de figuras geométricas, promueven el razonamiento inductivo y deductivo y la aplicación de a homotecia en la resolución de problemas matemáticos.

Los fenómenos utilizados para mostrar el uso de la homotecia se organizan en acciones de cálculo aritmético, trazo de figuras y medición. Su utilidad se presenta en situaciones diversas que trascienden las matemáticas pero que muestran el uso de estas en otros campos, como la medicina, astronomía y anatomía.

En cuanto los docentes participantes, se reconoce la falta de un conocimiento amplio sobre el concepto de homotecia que, de alguna manera, puede tener fundamento en la ausencia de su abordaje en los planes de formación profesional de estos profesores. Esto toma fuerza con la discordancia reconocida entre elementos conceptuales y cognitivos sobre el concepto de homotecia, particularmente en las definiciones y ejemplos sugeridos. Por otra parte, el conocimiento histórico manifestado por los profesores es escaso; se refiere a la historia de conceptos afines a la semejanza, con el concepto de homotecia.

Referencias bibliográficas

Alemany, J. (1957). *Diccionario enciclopédico ilustrado de la lengua española*. Barcelona, España: Sopena.

Aracena, C. (2014). *Estudio de la relación entre neurodatos, dilatación pupilar y emocionalidad basado en técnicas de minería de datos.* Tesis de pregrado. Chile: Universidad de Chile. Recuperado de: http://repositorio.uchile.cl/handle/2250/115629

Barreto, L. (2010). Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *Unión, 23*, 71-91.

Bokov, P., Mauroy, B., Bruno Mahut, B., Delclaux, C.y PatriceFlaud, P. (2014). Homothety ratio of airway diameters and site of airway resistance inhealthy and COPD subjects. *RespiratoryPhysiology& Neurobiology,191*, 38-43.

Cañadas, M. y Gómez, P. (2013). *Apuntes sobre análisis de contenido. Módulo 2 de MAD*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes.

Casares, J. (1984). *Diccionario ideológico de la lengua española: desde la idea a la palabra; desde la palabra a la idea* (2ª ed.). Barcelona, España: G. Gill.

Chambadal, L. (1972). *Diccionario de las matemáticas modernas.* Francia, Paris: Larousse.

Chavarría, G. (2014). *Afrontando retos: matemática octavo.* Heredia, Costa Rica: Ediciones Educativas Andrómeda, S. A.

CONARE. (2012). Seguimiento de la Condición Laboral de las Personas Graduadas 2000-2007 de las Universidad es Costarricenses. *Consejo Nacional de Rectores*. 978-9977-77-044-4

Cubillo, A., Garita, T., Mena, M., Morera, J., Rodríguez, G. y Vargas, M. (2014). *Unidad didáctica para abordar el tema de transformaciones geométricas en el plano en educación secundaria desde el enfoque de resolución de problemas* (Tesis de licenciatura). Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

De Burgos, J. (1977). *Curso de algebra y geometría.* Madrid, España: Editorial Alhambra, S. A.

Larousse (Ed.) (1996). *El pequeño diccionario Larousse ilustrado*. México: Autor.

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*, *23*(3), 379-392.

Espinosa de los Monteros, J. (2004). *Diccionario de matemáticas.* Madrid, España: Cultura, S. A.

F prima Grupo Editorial. (2014). *Matemática 8: Hacia la resolución de problemas (1ª edición)*. Alajuela, Costa Rica: F prima.

Fernández-Plaza, J. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103–118). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Gil, F. (27 de abril del 2013). Medir el diámetro del sol [Mensaje en un blog]. Recuperado de http://elterrero.blogspot.com/2013/04/medir-el-diametro-del-sol.html

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA, 7*(3), 251-292.

Gómez, P. (2005). *El Análisis Didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/394/1/GomezP05-2797.PDF

Grupo Norma. (1992). *Diccionario enciclopédico ilustrado práctico.* Colombia: Editorial Norma, S. A.

Habib, A., Azagrouze, O., El Azhari, Y., Benkhaldoun, Z. y Lazrek, M. (2010). Circular aperture interferometric apodization using homothety. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* (406), 2743-2748. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16873.x

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ª edición). D. F., México: McGraw Hill.

Jackson, W. (Ed.). (1973). *Diccionario léxico hispano Enciclopedia ilustrada en la lengua española.* D. F., México: W. M. Jackson, Inc.

Jiménez, R. (2014). *Álgebra y geometría y estadística 8º.* (2º ed.). San José, Costa Rica: Academia de Matemática AMP.

Julio, L. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza*. (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Colombia.

Lemonides, C. (1991). Analyse et réalisationd'une experience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathétiques, 11*(23), 295-324.

Lupiáñez, J. (2013). Análisis Didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico., J. L.Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.81-101). Granada, España: Comares, S.L

McMillan, J. & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5ªed.). Madrid: Pearson.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. Costa Rica, San José: autor Recuperado de https://mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Moriena, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geometrías en el plano*. Recuperado de http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Moriena.pdf

Ortiz, J. y Angulo, J. (2010). *La Homotecia, Un Tema Casi Olvidado en la Enseñanza de la Educación Matemática en Buenaventura: Una Propuesta desde el Punto de Vista Algebraico.* Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1176/1/692_La_Homotecia_Asocolme2010.pdf

Publicaciones Porras y Gamboa. (2013). *Matemática 8.* San José, Costa Rica: Compas ERV.

Puell, M. (2006). *Óptica fisiológica: el sistema óptico del ojo y la visión binocular*. Madrid, España: Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de: http://eprints.sim.ucm.es/14823/1/Puell_%C3%93ptica_Fisiol%C3%B3gica.pdf

Raković, S., Kouvaritakis, B., Findeisen, R. y Cannon, M. (2012). Homothetictubemodelpredictive control. *Automatica 48,* 1631-1638. doi:10.1016/j.automatica.2012.05.003

Rico, L. (2001). *Análisis conceptual e investigación en Didáctica de la Matemática.* Granada, España: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes. uniandes.edu.co/523/1/RicoL01-2593.PDF

Rico y Fernández-Cano. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. L. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp.1-22). Granada: Comares, S.L.

Rodríguez, L. y Rodríguez, M. (1984). *Diccionario de dificultades matemáticas resueltas.* Barcelona, España: Oikos-tau, S. A.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante el uso del Análisis Didáctico. En L. Rico., J. L. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp.231-253). Granada, España: Comares, S.L.

Santillana. (2017). *Matemática 8.* San José, Costa Rica: Santillana.

Schwartzman, S. (1994). *The words of mathematics. An etymological dictionary of mathematical terms used in english.* Washington, DC.: MathematicalAssociation of America.

Sierra, J. (2012). *Diccionario JAS matemática. ¡Para entender las matemáticas!* (3ª ed.). D.F., México: Direct Libros, S. A.

Vélaz de Medrano, C. y Vaillant, D. (2009). Introducción. En OEI – Fundación Santillana (Ed.), *Aprendizaje y desarrollo profesional docente* (pp. 11-14). Recuperado de http://www.oei.es/publicaciones/detalle_publicacion.php?id=2

Valverde, G. (2012). *Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.

Zurita, F. (2011). *Semejanza de figuras.* (Tesis de maestría). Universidad de Granada, España.

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

OBSTÁCULOS EN LA ENSEÑANZA – APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA. REVISIÓN SISTEMÁTICA

OBSTACLES IN MATHEMATICS TEACHING-LEARNING; SYSTEMATIC REVIEW

Luis Fernando Plaza Gálvez, José Rodrigo González Granada, Olena Vasyunkina
Unidad Central del Valle del Cauca, Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia)
lplaza@uceva.edu.co, jorodryy@utp.edu.co, o.vasyunkina@utp.edu.co

Resumen
A través de una revisión sistemática, en este documento se pretende hacer un análisis y recopilación de los aportes teóricos sobre Obstáculos en la enseñanza – aprendizaje de la matemática, como elemento fundamental en la Resolución de Problemas Matemáticos. Para lo anterior, se usó el motor de búsqueda de Google Académico durante el mes de julio de 2018, teniendo en cuenta para ello los términos: obstáculos, dificultades, errores, matemáticas, enseñanza y aprendizaje por medio del operador booleano AND. Fueron tenidos en cuenta aspectos del tipo didáctico, epistemológico y cognitivo, así como su incidencia en el error matemático.

Palabras clave: aprendizaje, dificultades, enseñanza, matemáticas, obstáculos

Abstract
By means of a systematic review, this paper is intended to analyze and compile the theoretical contributions on obstacles in the mathematics teaching-learning process, as an essential element in mathematics problem solving. With this aim in mind, Google Scholar search engine was used during the month of July in 2018, taking into account the terms: obstacles, difficulties, errors, mathematics, teaching and learning through the Boolean operator AND. Didactic, epistemological and cognitive aspects were taken into consideration, as well as their incidence in the mathematical error.

Key words: learning, difficulties, teaching, mathematics, obstacles

Introducción

Es una preocupación en la educación matemática, el construir sobre bases bien sólidas, la enseñanza de la matemática que le permita tanto al docente como al estudiante, mediante estrategias didácticas y de aprendizaje respectivamente, enfrentarse a los diferentes obstáculos y dificultades presentes, así como evitar algunos errores que se pudieran originar, permitiendo finalmente que el estudiante adquiera las destrezas y habilidades para la resolución de problemas matemáticos.

Obstáculo, puede recibir definiciones como: la barrera que impide seguir adelante y obliga a tomar alternativas de solución, o la situación física o mental que no permite el normal desarrollo de la ruta que se desea seguir. El obstáculo no debe ser eliminado

Gastón Bachelard (1981), afirmó que las investigaciones sobre los obstáculos epistemológicos se han interesado por las condiciones psicológicas que impiden evolucionar el espíritu científico y no en los elementos que impiden en el nuevo conocimiento identificar su complejidad o la dificultad para captar el nuevo fenómeno (conocimiento a estudiar). Barrantes (2006), destaca la importancia de los obstáculos epistemológicos en la didáctica de las matemáticas, así el estudiante puede indagar sobre la respuesta de un problema y sortear los obstáculos que se le puedan presentar. Autores como Andrade (2011), afirman que los obstáculos didácticos se originan en los procesos de la instrucción, y se deben evitar porque impiden superar los obstáculos epistemológicos, es decir, impiden ver las cosas de una nueva manera. Además, se encuentran los obstáculos cognitivos que son reconocidos como conocimientos que han sido convenientes para la solución de algunos problemas durante cierto tiempo, son ubicados en la mente y luego resultan ser inapropiados y de compleja adaptación al tenerse que enfrentar el estudiante a problemas distintos, además son los inherentes a la construcción del conocimiento por parte del alumno, según lo plantean Palarea y Socas (1994).

La presente revisión de literatura, permite centrar la atención en la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué tipo de obstáculos se han detectado en los procesos de enseñanza - aprendizaje de la matemática?

Conocer los diferentes obstáculos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, permite diseñar estrategias, habilidades y destrezas, así como potencializar el pensamiento lógico frente al conocimiento matemático y en la resolución de problemas.

Metodología

La investigación es cualitativa del tipo documental. Para ello se llevó a cabo una revisión sistemática teniendo en cuenta que uno de los objetivos de ésta es la compilación de una temática específica, según lo propone Pérez (2012), con el motor de búsqueda Google Académico, por medio de los términos obstáculo, dificultad, error, enseñanza, aprendizaje, matemática, combinándose con el operador booleano AND. Para identificar los documentos relevantes, la primera búsqueda incluyó la identificación de artículos científicos, capítulos de libro, libros especializados, memorias de presentación de eventos y Tesis como resultado de investigación. La búsqueda se llevó a cabo en julio de 2018, con publicaciones desde 1981 hasta 2018.

Después de prescindir de los documentos repetidos, solo se dejaron los que cumplían con los criterios de inclusión, entre los que se considera la metodología, teniendo en cuenta para ello estudios cualitativos, cuantitativos o mixtos. Inicialmente se documentó sobre los primeros estudios sobre obstáculos y dificultades en el proceso enseñanza - aprendizaje de la matemática, y finalmente sobre las diferentes experiencias a los diferentes niveles de formación matemática.

Codificación, caracterización y análisis de los datos

Con base en los anteriores criterios, 30 estudios fueron elegidos como objeto de revisión, los cuales fueron estudiados en profundidad, entre los que se encontraban dos libros (Bachelard, 1981; Brousseau, 1997) y un artículo clásico (Brousseau, 1983). La distribución de las fuentes permitió analizar 15 artículos (50 %), 4 conferencias en eventos científicos (13.3 %), 3 libros especializados (10 %), 4 capítulos de libro (13.3 %) y 4 tesis, como resultado de investigación (13.3 %). En cuanto al idioma de publicación se tienen 23 en español (76.7 %), 4 en inglés (13.3 %) y finalmente 3 en francés (10 %). El análisis por fecha de publicación arrojó los siguientes intervalos de tiempo: 2 entre 1981 y 1990 (6.7 %), 6 entre 1991 y el año 2000 (20 %), 7 entre el 2001 y el 2010 (23.3 %) y por último 15 documentos entre el año 2011 y el 2018 (50 %).

Primeros estudios sobre teoría de obstáculos

Uno de los precursores del concepto de obstáculo, fue Gaston Bachelard (1981), quien afirma que la construcción del conocimiento científico se puede lograr a partir de enfrentarse a los obstáculos epistemológicos que se presentase, y entre los que identifica los siguientes tipos, así:

1. La experiencia básica (inicial): La primera información es la que se impone. El hombre por naturaleza es reacio a los cambios.
2. El conocimiento general: Vaga idea que se tiene acerca de algo y no se demuestra seguridad.
3. Hábitos verbales (una imagen o una palabra): Está presente en las costumbres, en las formas de analizar, expresarse y proceder.
4. El conocimiento unitario y pragmático: Solo “Yo tengo la razón”, donde el conocimiento está centralizado. Desde el punto de vista científico, no se aceptan otras opciones.
5. El obstáculo sustancialista: Se opone a la modernidad. En un objeto se centran todos los conocimientos.
6. El obstáculo realista: No se aceptan otros tipos de argumentos, pues se cree que la propia postura es la real.
7. El obstáculo animista: Es la exposición que tiene el hombre a los cambios de la naturaleza. Cuando ciertos “objetos adquieren vida”, fruto de nuevos conocimientos.
8. El mito de la digestión: Se toma analogías de la digestión humana y el contexto con la naturaleza, pues este tiene mayor valor explicativo.
9. La libido y conocimiento objetivo: Es tomado como las ansias de poder o dominio hacia otros.
10. El conocimiento cuantitativo: Supone que los procesos siempre están libres de errores, lo cual equivale a decir que siempre se tiene la razón.

Características de los obstáculos

Tal como se expone en Palarea y Socas (1994), Brousseau reflexiona acerca de los obstáculos y hace énfasis en que es un conocimiento que ha sido bien aplicado al resolver cierto tipo de problema, pero que falla al aplicarlo en otro contexto. Por su buen desempeño, se resiste al cambio o al rechazo, por lo que se convierte en una barrera de un proceso de formación posterior. Para lograr eludir dichos obstáculos, es necesario identificar algunas situaciones didácticas, que permitan en los estudiantes crear conciencia en el sentido de que estos cambien sus concepciones y brindarles apoyo en pos de su logro. El investigador identifica en los obstáculos, las siguientes características:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- Se manifiesta por los errores, que no son debidos al azar, son persistentes y reproductibles.
- El estudiante utiliza dicho conocimiento para resolver problemas adaptados a un entorno, que suele encontrarse.
- Cuando se emplea este conocimiento, por fuera de ese entorno, se producen soluciones incorrectas. Una solución universal exige un punto de vista distinto.
- Los obstáculos epistemológicos, no son explícitos necesariamente, ni difíciles de

franquear.
- El estudiante opone resistencia a los efectos contrarios que el obstáculo genera y a la producción de un mejor conocimiento.
- Después de identificar su inexactitud, este persiste en su manifestación en forma aislada.

Se evidencia por medio de un análisis histórico, que el obstáculo debe considerarse como parte integral de la interpretación de una concepción en especial. Por lo que identificarlo y eludirlo, llega a ser una condición ineludible de un concepto relevante.

Los obstáculos y la teoría de las situaciones didácticas

Brousseau (1997), en su libro *Théorie des situations didactiques*, expone la importancia de los obstáculos epistemológicos y su vínculo con la teoría de las situaciones didácticas. Inicialmente, plantea estudiar las condiciones que deben incluir los problemas que se les proponen a los estudiantes, para que así aparezcan y se pongan en funcionamiento de nuevos conceptos. Además, propende rechazar aquellos conocimientos iniciales que impiden el aprendizaje (bien sea por incorrectos, o tal vez porque representan un obstáculo para un nuevo conocimiento). Así de esta manera se hace un esbozo del concepto de obstáculo epistemológico, en el sentido de que este no es un conocimiento erróneo, sino que es un conocimiento que obstaculiza la creación de uno nuevo. El franquear un obstáculo, exige la puesta en práctica de situaciones didácticas y a-didácticas. El uso de situaciones didácticas a través de las actividades en el ejercicio docente, son necesarias en diferentes instantes del proceso. A su vez, la evidencia en forma explícita de los obstáculos, requiere la implementación de situaciones a-didácticas. Reconocer la existencia de obstáculos epistemológicos, lleva al docente a reconocer el recorrido a través del tiempo del conocimiento en sus alumnos.

Clasificación de algunos obstáculos matemáticos

Retomando lo expuesto por Brousseau (1983) a continuación, se clasifican algunos obstáculos encontrados en los procesos de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, así:

Obstáculos ontogenéticos

Son innatos en los estudiantes, inician en su formación escolar, incidiendo en el desarrollo del alumno y se presentan cuando su capacidad de análisis es inferior a su exigencia, impidiendo el normal desarrollo mental para analizar los conceptos u objetos matemáticos.

Obstáculos didácticos

Los obstáculos didácticos son producidos por los errores en la enseñanza (metodológicos, curriculares o conceptuales), por uso inadecuado de expresiones o por mala construcción del currículo que impide los conceptos necesarios para obtener el conocimiento, incluyendo modos de tiempo y espacio, así como guías inadecuadas. De la misma manera se presentan, cuando el docente repite lo que él aprendió y no identifica el concepto (Andrade, 2011).

Obstáculos epistemológicos

Aquí los obstáculos son las clases de conocimiento que impiden la construcción de una nueva idea y no permiten su correcta apropiación (en este caso, conceptos y/u objetos matemáticos), y se identifica por medio de la presencia de errores frecuentes de los estudiantes en los cursos de matemáticas a través del tiempo.

Otros obstáculos matemáticos en la enseñanza y el aprendizaje

El obstáculo cognitivo

En estudios como el realizado por Nyikahadzoyi, Mapuwei y Chinyoka (2013), se ha demostrado que algunos estudiantes aprenden sobre diferentes formas de conocimiento, incluyendo el conocimiento matemático intuitivo, sin embargo, esto puede ser insuficiente, inapropiado, impreciso o engañoso y es aquí donde este conocimiento se interpone en el camino de una nueva comprensión; el éxito radica en la rapidez con la que se desaprenda. Si no se contribuye en forma temprana a rectificar un concepto matemático herrado, es probable, que se conduzca a un fracaso en estudios futuros. En algunas investigaciones, sobre cálculo, como el caso de teoría de límite, realizada por Medina y Rojas (2015), se reconocen algunos obstáculos cognitivos de inicio epistemológico, con las siguientes particularidades: es un conocimiento y no de una ausencia de conocimiento; el cual permite al estudiante generar respuestas correctas en algunos problemas; este mismo conocimiento puede producir respuestas equivocadas para ciertos problemas; los errores producidos no son ocasionales sino constantes y esta clase de errores son muy reacios a la corrección.

El obstáculo pedagógico

Su origen está presente, en los procesos de enseñanza, y se presentan como inconvenientes en los procesos de aprendizaje del alumno, donde confluyen características de forma didáctica, institucional y cognitiva, según lo expone Rodríguez (2009). Los obstáculos pedagógicos son producidos por errores de tipo: metodológicos, pedagógicos y conceptuales, teniendo para ello razones como: falta de claridad entre la teoría y la práctica docente, falta de innovación y de experimentación, y el desempeño tradicional de la enseñanza.

El obstáculo psicológico y el Obstáculo mental

Cornu (1991), al estudiar la teoría de límite, tiene en cuenta en este tipo de obstáculo (psicológico), el desarrollo personal de los alumnos y su forma de pensar; siendo las dificultades de aprendizaje de algunos tópicos matemáticos. Moreira y Greca (2004), definen un obstáculo mental, como la representación mental interna (algo que representa algo o que está en lugar de, o representa simplemente algo para el alumno) desde el punto de vista de la psicología cognitiva, el cual es incuestionable semánticamente por el alumno (o sea que este no cuestiona el significado del obstáculo mental). El miedo a fracaso le impide al estudiante avanzar, y esto se presenta de tres maneras, cuando no sea el momento oportuno, no esté preparado o piense en llegar a fracasar.

El obstáculo epistemofílico

Es referido solamente por los inconvenientes de tipo motivacional en forma de ansiedad. Se presentan cuando emergen los miedos al tener que abandonar los saberes previos y están presentes en las situaciones de aprendizaje, según lo expone Franzante y otros (2011), al citar a Pichon-Rivière con su obra El proceso Grupal.

El obstáculo semiótico

Está presente, en la construcción de los objetos matemáticos por parte de docentes y estudiantes por el no uso adecuado de la simbología matemática (lenguaje), pudiendo originar confusiones, haciendo presencia la rigurosidad matemática, el cual permite entender el concepto del objeto matemático, tal como lo sustenta Rodríguez (2017).

Algunos obstáculos en la comunicación

Adicionalmente, se ha evidenciado que los procesos de enseñanza aprendizaje del lenguaje matemático, son liderados desde la postura institucional impartida por el docente quien es la persona que permite o no la intervención de los alumnos, bien sea constructiva o a manera de consulta. De esta manera, dichos procesos se convierten en un obstáculo, por la permisividad que se le dé al alumno de participar, de tal manera que se le pueda escuchar, se le resalte y motive su participación, y así aislarlo de temor alguno de no preguntar o llegar a sentirse en ridículo por parte de una mofa llevada a cabo por el docente, lo anterior según estudios hechos por Castillo (2011) y Galindo (2013).

La tecnología como obstáculo

Se ha evidenciado que las tecnologías digitales, así como son una estrategia didáctica indudable, también podrían ser un obstáculo para el estudiante, pues algunas veces las usa para fines no matemáticos, lo cual no contribuye con su objetivo inicial (Rojano, 2014). Es importante mencionar la ayuda de las TIC, en la comprensión de los conceptos matemáticos, pero éstas han generado un cambio tan rápido que ni los docentes han logrado llevar dicho ritmo, no permitiendo ir al unísono y enfrentándolos a fuertes impactos culturales en la parte curricular (Artigue, 2011).

Obstáculo del formalismo

Un grupo de investigación dirigido por Dorier, entre 1987 y 1994, encontró que varias de las dificultades de los estudiantes en Álgebra Lineal provienen de un mismo obstáculo, el cual aparece en todas las generaciones sucesivas y prácticamente en todos los métodos de enseñanza empleados en sus investigaciones, al cual llamaron obstáculo del formalismo (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1997). Lo anterior se presenta cuando el estudiante se enfrenta a la clásica definición “Lema-Prueba-Teorema-Prueba-Corolario”, pues tienen dificultades para entender las pruebas, sino que también quedan abrumados por la cantidad de nuevas definiciones y sienten que están aterrizando en un nuevo planeta.

Obstáculo y dificultad en Matemáticas

Un documento clásico es el planteado por Socas (1997), en el que se identifican los obstáculos, dificultades y errores producidos en los procesos de enseñanza – aprendizaje de matemáticas, teniendo en cuenta para ello las diferentes formas de construcción de conocimiento y objetos matemáticos. En el inicio han existido posiciones conductistas, en el sentido de que a los errores matemáticos no se les ha dado el sitial que se merecen, pues se les ha mirado tan solo en las respuestas erróneas y son ignorados hasta que la respuesta sea la esperada, por lo que los errores fueron observados desde el principio, simplemente como un desvío en el proceso algorítmico en el que se hallan inmersos. Algunos estudios en Matemática Educativa han permitido identificar que muchas de las dificultades de los estudiantes se deben tanto a los conceptos como a sus metodologías (Andrade, 2011).

Andrade (2011), afirma que cuando las dificultades no pueden ser evitadas, se convierten en obstáculos porque no permiten progresar en el diseño de nuevos conocimientos y los obstáculos de tipo didáctico se estudian a través del análisis de los errores más frecuentes de los alumnos. Se hablará de error, en el momento que estos alumnos no puedan ejecutar una labor que esté en un contexto matemático. La expresión dificultad tendrá cabida, cuando en una menor o mayor proporción, un grupo de alumnos no hayan podido culminar con éxito una tarea en contexto matemático, y el grado de dificultad estará ligado en forma proporcional al número de procedimientos incorrectos de dicha tarea. En el momento que el estudiante use un concepto válido en un contexto, pero no es válido en el actual, provocando un error, se dará la presencia de un obstáculo, tal como lo expresa Neira (2009).

El error es una realización normal en el importante proceso de la solución de un problema, y es ocasionalmente, muestra de un desarreglo cognitivo, o en su defecto donde se procesa un concepto. El docente debe identificar el lugar y momento donde se presentan los errores que pueden determinar los obstáculos en el proceso de aprendizaje. Por principios formadores, es importante que el docente investigue el origen de dichos errores y así buscar las debidas correcciones ante el estudiante, cerrando el ciclo de su aprendizaje. Apoyándose en el procedimiento de la información, se puede afirmar que: los sentidos son fuente de ingreso de la información (primera causa de error), mientras el cerebro actúa sobre dicha información (segunda causa de error). La información transformada genera una estructura mental (tercera causa de error) que se relaciona con la memoria (cuarta causa de error). Dicha estructura mental interactúa con la memoria y con otras fases mentales para emitir una respuesta (quinta causa de error). Las anteriores menciones, son las principales fuentes de error al no interactuar en forma correcta.

Los errores identificados con mayor facilidad, son los indicados por Astolfi (1999), así:

- Los que son relevantes de la redacción y comprensión de los indicadores.
- Los que son el resultado de las costumbres académicas o fruto de una mala decodificación de las interpretaciones, como el mal uso de propiedades.
- Aquellos que se originan de las concepciones alternativas que son ofrecidas por los estudiantes y que certifican la equivocación, cuando el docente no se ha percatado y al mismo tiempo no alcanza a realizar la corrección. No por llegar al resultado, el procedimiento es correcto.
- Aquellos, que crean las estrategias de estudio adaptadas.
- Los que son originados por la sobrecarga cognitiva en el desarrollo de la actividad que se realiza. Tanta información colapsa.
- Aquellos que se han originado en otra actividad, y de la cual no se han establecido sus diferencias, por lo que las transferencias de conocimiento son mal hechas. No todos los procedimientos tienen cabida en todo contexto matemático.
- y finalmente, aquellos que se originan en la complejidad propia de su contenido.

Aparecen trabajos interesantes como el de Neira (2013), en el que se ha analizado el proceso del tránsito del álgebra al cálculo, permitiendo detectar dificultades, obstáculos y rupturas que son del tipo semiótico, didáctico, epistemológico y culturales entre otros, y en las que al retomar a Sierpinska, cuando ésta clasifica en tres los tipos de dificultades con los que se enfrenta el estudiante, los cuales son: la conceptualización, la complejidad de los objetos matemáticos estructurales (obstáculos epistemológicos) y finalmente el rompimiento de los modos de pensamiento netamente algebraico.

En orden temático al anterior, se encuentran estudios (Kashefi, Ismail & Mohd, 2010), en los que se demostró que algunos estudiantes en su formación de cálculo, han encontrado algunos obstáculos en:

- la selección de la representación apropiada de los tres mundos de pensamiento matemático (conceptual – embebido, proceptual – simbólico y axiomático – formal).
- la transición de un mundo a otro, del pensamiento matemático.
- la falta de comprensión de dos formas de realización diferentes.
- la falta de comprensión de dos valores simbólicos diferentes.

En trabajos como los de Moreno (2011), se han encontrado las dificultades de aprendizaje en matemáticas debidas a factores como la actitud negativa del estudiante hacia la matemática, ausencia de metodologías adecuadas por parte del docente del área, falta de observación y detección temprana de disfunciones físicas (visión, audición y/o lenguaje) en los estudiantes. Además, plantea una serie de propuestas de índole curricular, adaptaciones educativas especiales, así como una intervención asociada a los objetos y al pensamiento matemático que permitan mejorar procesos cognitivos y la actitud afectiva y emocional por parte del estudiante hacía la matemática.

El lenguaje empleado por docentes y estudiantes en el contrato didáctico puede ser visto como un obstáculo en la construcción del conocimiento matemático, tal como lo sustentan Crespo, Homilka y Lestón (2011). En Có y del Sastre (2008), se plantean los diferentes errores detectados en el ejercicio docente, los cuales conducen a obstáculos en los procesos de aprendizaje. Finalmente, se encuentran trabajos como el de Aponte y Rivera (2017), en el que se evidencia, que durante el proceso de construcción del conocimiento matemático surgen constantemente errores que son una inquietud del maestro y que inciden en el aprendizaje de los diferentes contenidos matemáticos.

Dificultades del aprendizaje de las matemáticas (DAM)

Después de ver el significado de los obstáculos cognitivos y de los ontogenéticos (capacidad del estudiante de crear y asimilar conocimiento), es importante mencionar los orígenes de las dificultades (Bolívar, 2015; De la Peña y Bernabéu, 2018; Ruiz, 2010), que permiten la presencia de dichos obstáculos, entre los que se tienen:

- Acalculia, como la alteración en las habilidades y procesamiento matemático debido a lesiones cerebrales, entre las que se encuentran: alexia, agrafía, Espacial, Anaritmética, etc.
- Discalculia, como la dificultad de carácter persistente y específica para comprender y realizar cálculos matemáticos, entre los que se encuentran: verbal, léxica, gráfica, operacional, etc.

Conclusiones

Por medio de esta revisión sistemática, se puede evidenciar las diferentes características de los diversos obstáculos detectados en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, partiendo de la obra insigne de Bachelard (1981). Igualmente, importante mencionar el proceso del obstáculo, las dificultades y los errores como preocupación de la educación matemática.

Esta investigación, permitió identificar algunas de las estrategias llevadas a cabo en procesos de formación en matemáticas. El análisis en el tiempo, muestra que específicamente a partir del año 2011, es donde se han intensificado los estudios sobre obstáculos en matemáticas como preocupación de la educación matemática, así como las dificultades, sus orígenes y los efectos que estos pueden obtener en la comprensión de conceptos.

Entre los obstáculos matemáticos detectados, se encuentran los de tipo epistemológico, didáctico y ontogenético. Además de los anteriores, se evidenciaron obstáculos y presencia de inconvenientes en el escenario cognitivo, pedagógico, el mental, el semiótico, la formalidad (léase como rigurosidad) como el caso del Algebra Lineal, y los de origen neurogenético (Discalculia y Acalculia) y los presentes en la comunicación de las diferentes formas de representación del conocimiento. Si se detectan a tiempo fallas y dificultades en los estudiantes, en los procesos de formación matemática, por parte de los docentes, estos van a contribuir con un éxito en matemáticas de mayor exigencia, así como en la mejora del razonamiento lógico que la vida les depara.

Al final con este trabajo se pueden crear estrategias que permitan eludir dichos obstáculos contribuyendo a una mejor formación en la resolución de problemas matemáticos por parte de nuestros estudiantes de la educación básica, como en: mejor preparación de nuestros docentes, actualización tecnológica en provecho de estrategias didácticas, mayor conocimiento del entorno de los estudiantes, mejorar los canales de comunicación (saber transmitir y saber recibir el mensaje matemático), no alejarse del formalismo matemático.

Referencias bibliográficas

Andrade, C. (2011). Obstáculos Didácticos en el aprendizaje de la Matemática y la formación de docentes. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 999 – 1007. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aponte, P. y Rivera, M. (2017). *Dificultades, Obstáculos y Errores en el Aprendizaje del Numero Entero Presentadas en un Objeto Virtual de Aprendizaje.* Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Recuperado de http://hdl.handle.net/11349/12897

Artigue, M. (2011, junio). L'impact curricularie des technologies sur l'éducation mathématique. Ponencia presentada en *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil. Recuperado de https://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2891/1189

Astolfi, J. (1999). *El error un medio para enseñar*. Sevilla: Editorial Diada.

Bachelard, G. (1981). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (9ª ed.). México D.F.: Siglo XXI Editores.

Barrantes, H. (2006). Los Obstáculos Epistemológicos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *1*(2). 1-7. Recuperado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/6886/6572

Bolívar, R. (2015). *Perfil neuropsicopedagógico del niño con trastorno especifico de aprendizaje de la aritmética. Diseño de programas de prevención de la Discalculia*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de León, España. Recuperado de https://buleria.unileon.es/xmlui/bitstream/handle/10612/4635/tesis_a82de4.PDF?sequence=1

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(02), 101-117.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Castillo, M. (2011). Es la comunicación un factor de aprendizaje de las matemáticas, *Revista Iberoamericana de Educación, 56* (3), 1 - 5. Recuperado de https://rieoei.org/historico/deloslectores/4381Castillo.pdf

Có, P. y del Sastre, M. (2008). Prácticas docentes y errores de los alumnos. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21*, 527 – 537. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166), Boston: Kluwer.

Crespo, C., Homilka, L. y Lestón, P. (2011). Acerca del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24*, 728 – 737. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De La Peña, C., & Bernabéu, E. (2018). Dislexia y Discalculia: una revisión sistemática actual desde la neurogenética. *Universitas Psychologica, 17*(3), 1-11. https://doi.org/10.11144/Javeriana.upsy17-3.ddrs

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, R. & Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Franzante, B., Hormaiztegui, M., Pitter, P., Malugani, C., Fellay, C. y Germaniez, C. (2011, diciembre). *Los Obstáculos que enfrentan los estudiantes en el primer año universitario y las estrategias construidas para afrontarlos*. Ponencia presentada en XI Colóquio Internacional sobre Gestão Universitária na América do Sul. Florianópolis. Recuperado de https://core.ac.uk/download/pdf/30354886.pdf

Galindo, E. (2013). *La Comunicación Docente - Estudiante en el aprendizaje de la Matemática en estudiantes de la Universidad Central*. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá. Recuperado de http://www.etnomatematica.org/publica/trabajos_maestria/TesisElsaGalindoPDF.pdf

Kashefi, H., Ismail, Z, & Mohd, Y. (2010). Obstacles in the Learning of Two-variable Functions through Mathematical Thinking Approach. *Procedia - Social and Behavioral Sciences 8*, 173-180. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042810021294

Medina, A. y Rojas, C. (2015). Obstáculos cognitivos en el aprendizaje de las matemáticas: El caso del concepto de límite. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 330 - 336. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. ISSN: 2448 - 6469.

Moreira, M. y Greca, I. (2004). Obstáculos Representacionales Mentales en el Aprendizaje de Conceptos Cuánticos, en: Moreira, M.A.; Greca, I.M. (Ed.). *Sobre cambio conceptual, obstáculos representacionales, modelos mentales, esquemas de asimilación y campos conceptuales*. Porto Alegre: UFRGS.

Moreno, L. (2011). *Dificultades de aprendizaje en matemática.* Ponencia presentada en XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil. Recuperado de https://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2901/1199

Neira, G. (2009, septiembre). Obstáculos epistemológicos en la educación matemática: Visiones y perspectivas actuales. Conferencia presentada en el VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística, Duitama – Colombia. Recuperado de http://virtual.uptc.edu.co/procesos/matematicas2009/memorias/Archivos /Conferencias

Neira, G. (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Revista Infancias imágenes, 12* (1), 44 – 50. DOI: https://doi.org/10.14483/16579089.4919

Nyikahadzoyi, M., Mapuwei, T. y Chinyoka, M. (2013). Some Cognitive Obstacles Faced By 'A' Level Mathematics Students in Understanding Inequalities: A Case Study of Bindura Urban High Schools. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development 2* (2). Recuperado de http://hrmars.com/admin/pics/1910.pdf

Palarea, M. y Socas, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *Revista Suma*, *16*, 91-98. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/16/091-098.pdf

Pérez, J. (2012). *Revisión sistemática de literatura en ingeniería.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

Rodríguez, L. (2009). Desafíos pedagógicos de la enseñanza de metodología de la investigación: hacia una reconceptualización antropológica del sujeto de aprendizaje. *Revista Integra Educativa, 2*(2), 1055-126. Recuperado de http://www.iiicab.amisis.org/

Rodríguez, J. (2017). *Obstáculos representacionales en el aprendizaje de los números racionales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma de Manizales, Recuperado de http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/bitstream/11182/392/1/Obst%C3%A1_represen_aprendi_n%C3%BAmeros_racionales.pdf

Rojano, T. (2014). El futuro de las tecnologías digitales en la educación matemática: prospectiva a 30 años de investigación intensiva en el campo. *Educación Matemática 25*, 11-30. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854002

Ruiz, Y. (2010). Dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Temas para la educación*, *8*. 1 – 10. Recuperado de https://www.feandalucia.ccoo.es/andalucia/docu/p5sd7235.pdf

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Ed), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

TÉCNICAS DE ESTUDIO PARA LA COMPRENSIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS DURANTE EL PRIMER SEMESTRE UNIVERSITARIO

STUDY SKILLS FOR THE UNDERSTANDING OF MATHEMATICAL CONCEPTS DURING THE FIRST SEMESTER AT THE UNIVERSITY

Zaida Margot Santa Ramírez, Yury Elena García Puerta
Tecnológico de Antioquia IU (Colombia)
zaida.santa@tdea.edu.co, yegarcia@tdea.edu.co

Resumen
Más del 70% de los estudiantes del Tecnológico de Antioquia, Colombia, aprueban los cursos de matemáticas en el primer semestre universitario; sin embargo, se ha percibido que más del 60% reprueban los exámenes generales (parciales). Esta situación se podría relacionar con la falta de técnicas de estudio que propicien la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos. Por lo tanto, con este estudio, se busca hacer un diagnóstico de las técnicas de estudio que utilizan los estudiantes y, a partir de allí, proponer y evaluar algunas que permitan la comprensión de conceptos, desde el marco de la Enseñanza para la Comprensión. Los resultados parciales que han emergido de la aplicación de algunos instrumentos permiten concluir, de manera previa, que los estudiantes de esta Institución Universitaria no suelen utilizar técnicas de estudio como lectura crítica, estrategias de síntesis, subrayado o uso de esquemas, en la comprensión de conceptos.

Palabras clave: comprensión, enseñanza para la comprensión, técnicas de estudio

Abstract
More than 70% of the students of Colombia, Antioquia Technical College pass the mathematics courses in the first semester of the university. However, it has been observed that more than 60% fail mid-term exams. This situation could be related to the lack of study skills that propitiate the understanding of mathematical concepts and procedures. Therefore, this study seeks to diagnose the study skills used by students and, from there on, to propose and evaluate some study skills that allow the understanding of concepts, from the framework of the Teaching for Comprehension. The partial results that have emerged from the application of some instruments allow drawing a prior conclusion: that the students of this university do not usually apply study skills such as critical reading, synthesis strategies, underlining, or use of schemes, in the understanding of concepts.

Key words: understanding, teaching for comprehension, study skills

Introducción

En el último año, se ha encontrado que un 73% de los estudiantes aprueban los cursos de matemáticas del primer semestre en el Tecnológico de Antioquia (TdeA). Pese a que es un porcentaje alto, hay diferentes variables que deben ser analizadas. En primer lugar, la evaluación del seguimiento es equivalente al 60% en todas las materias; en este caso, los parciales (evaluaciones temáticas) solo tienen un porcentaje del 40%. En los informes de semana nueve y de semana 17 que se deben presentar ante estamentos académicos, se ha observado que aproximadamente el 60% de los estudiantes pierden tanto el primero como el segundo parcial; esto permite inferir que los estudiantes están aprobando la materia con el seguimiento que, en muchos grupos es evaluado con pruebas cortas o talleres. La mayoría de estudiantes no se están preparando para los parciales y no usan técnicas de estudio adecuadas para comprender conceptos o procedimientos matemáticos.

Por otro lado, los estudiantes que ingresan a esta institución universitaria ,deben presentar una prueba inicial que permita reconocer sus saberes en matemáticas antes de empezar su período académico. Para el semestre 2018-1, el 86% de los estudiantes que presentan la prueba, obtienen notas inferiores a 3,0 (lo que se considera pérdida). Así mismo, para el semestre 2018-2, el 81% de los estudiantes que la presentan obtienen bajos desempeños. Se resalta que las preguntas de esta prueba se relacionan con ejercicios sencillos de aritmética, álgebra o lógica, los cuales no fueron resueltos, en su mayoría, por los estudiantes. Estas situaciones permiten identificar ciertas dificultades que se tienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el bachillerato, las cuales podrían estar asociadas con la falta de técnicas de estudio para abordar las matemáticas por parte de los estudiantes. De acuerdo con Dubon, Navarro, Pakhrou, Segura y Sepulcre (2013):

> En general, en los últimos años se observa en los nuevos alumnos universitarios una falta generalizada de esfuerzo para poder conseguir sus propósitos, una carencia en cuanto a la reflexión y al razonamiento individual que, junto con una falta de ilusión por el trabajo bien hecho, provocan que los resultados globales de dichos alumnos no sean los esperados, ni por ellos ni por el profesorado (p. 2718).

Estos autores mencionan que, desde su experiencia en la Universidad de Alicante, España, han observado grandes dificultades en los estudiantes a la hora de superar los cursos de matemáticas del primer nivel. De hecho, pese a que durante los primeros semestres los estudiantes deben adquirir y consolidar los desempeños matemáticos necesarios para abordar estudios posteriores, esto no se está logrando (Dubon, et al., 2013). En algunas instituciones colombianas, la situación es muy similar a la de España. En el caso del TdeA, las pruebas iniciales que realizamos muestran que más del 80% de los estudiantes ingresan al primer semestre con serias dificultades en matemáticas. Sin embargo, el paso por los cursos del primer nivel, aunque la mayoría de estudiantes aprueban la asignatura, no está generando la comprensión necesaria para afrontar cursos posteriores de cálculo, física, química, álgebra lineal o ecuaciones diferenciales.

Este tipo de dificultades se relacionan, entre otras cosas, con aspectos emocionales, motivacionales o con la poca aplicación encontrada a los conceptos matemáticos. En esta línea, Rivière (1990) menciona que muy pocas personas, al pasar por la educación básica, alcanzan el dominio de formas de pensamiento matemático, que les permita desarrollar cierto grado de emoción por la experiencia matemática. Es decir, este autor precisa que muchos estudiantes se sienten frustrados o tienen sentimientos negativos hacia las matemáticas, lo que puede generar, incluso, que puedan elegir carreras que no son de su agrado solo por no tener un acercamiento a esta área del conocimiento. Adicionalmente, se observa que una actitud negativa también puede generar rechazo o frustración por las matemáticas y, por lo tanto, poca comprensión de sus conceptos o procedimientos. Autores como Flores y Auzmendi (2016) afirman que existe una relación significativa entre la comprensión y las emociones; es decir, “al crecer el nivel de comprensión hacia los objetos matemáticos crecen los sentimientos y emociones hacia las matemáticas” (p. 58).

Por otro lado, también se ha observado en los estudiantes del TdeA, falta de técnicas de estudio que realmente propicien la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos. Incluso, muchos estudiantes han manifestado no saber cómo estudiar para una prueba ni cómo afrontar algunas temáticas de esta área. En este escenario, se busca, con este proyecto de investigación, analizar de qué manera el uso de algunas técnicas de estudio permite la comprensión de algunos conceptos matemáticos.

Para dar consecución a este objetivo, se plantea como marco conceptual la Enseñanza para la Comprensión (EpC), el cual relaciona la comprensión con un desempeño flexible, es decir, estar en la capacidad de hacer con un tópico una cantidad de acciones que estimulen el pensamiento: explicar, dar ejemplos, demostrar, probar, establecer hipótesis, justificar analogías, o presentar el tópico de una manera nueva o novedosa (Perkins, 1999). En este marco, la comprensión se describe desde el contenido (conceptos clave), desde los métodos o procedimientos para entender el contenido, desde la relación entre la teoría y la práctica, y desde las formas de comunicar dicho conocimiento.

Por lo tanto, el proyecto se enmarca en un enfoque cualitativo, ya que pretende analizar la comprensión de conceptos matemáticos, como un fenómeno de tipo social, que es subjetivo y personal, y que depende de las necesidades e intereses de los estudiantes. El tipo de estudio que se aborda es un estudio de casos de un grupo de estudiantes del primer semestre del TdeA, dado que se pretende analizar profundamente un caso (cada estudiante que participe del proceso) para generar perspectivas teóricas (Hernández, Fernández y Baptista, 2006) acerca del uso de dichas técnicas en la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos. En consecuencia, se realiza, en primer lugar, un diagnóstico de las técnicas de estudio que utilizan los estudiantes de dicha institución para estudiar temas de matemáticas y, en segundo lugar, se proponen y evalúan algunas que permitan la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos.

Con la implementación del proyecto, que se encuentra en la fase inicial de trabajo de campo, se espera que algunos estudiantes puedan utilizar ciertas técnicas de estudio, como lectura crítica, mapas conceptuales o uso de medios audiovisuales, para la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos (pensamientos numérico y variacional). La evaluación de las técnicas propuestas se realiza en el marco de un semillero de investigación, que se empieza a consolidar en la institución a mediados del primer semestre del año 2019.

Marco conceptual: Enseñanza para la Comprensión (EpC)

Generalidades

El marco conceptual que sustenta el estudio es La Enseñanza para la Comprensión (EpC), el cual surgió, de acuerdo con Stone (1999), de un proyecto de investigación colaborativo llamado Proyecto Cero, que se llevó a cabo entre 1988 y 1995, en el marco de la Escuela de Graduados de Educación de Harvard. Esta autora menciona que en este proyecto se analizaron cuatro preguntas básicas: “¿qué tópicos vale la pena comprender?, ¿qué deben comprender los alumnos sobre estos tópicos?, ¿cómo podemos fomentar la comprensión?, ¿cómo podemos averiguar qué es lo que comprenden los alumnos?” (p. 24)

Este marco conceptual está constituido por cuatro elementos, que responden a cada una de las preguntas planteadas anteriormente por Stone (1999); estos elementos se explican a continuación, desde las ideas de esta autora:

Tópicos generativos. Este elemento responde a la pregunta “¿qué tópicos vale la pena comprender?” (p. 24). Es decir, el currículo se organiza en una serie de temas o tópicos, que son centrales para la materia e interesantes para los estudiantes y los profesores. En particular, en el estudio, se tiene un tópico generativo relacionado con ciertos conceptos y procedimientos matemáticos de los pensamientos numérico y variacional, que se desarrollan en un curso de matemáticas del primer semestre universitario.

Metas de comprensión. Este elemento responde a la pregunta "¿qué deben comprender los alumnos sobre estos tópicos?" (p. 24) y dan claridad sobre lo que los estudiantes van a comprender; deben ser explícitas, estar centradas en ideas y problemas de la disciplina y deben ser públicas para la comunidad educativa. Específicamente, en el estudio, se espera que los estudiantes comprendan algunos conceptos de los pensamientos numérico y variacional, a partir del uso de diferentes técnicas de estudio, como lectura crítica, mapas conceptuales o uso de medios audiovisuales.

Desempeños de comprensión. Este elemento responde a la pregunta "¿cómo podemos fomentar la comprensión?" (p. 24). De acuerdo con Stone (1999), este, quizás, sea el elemento más importante del marco, pues les exige a los estudiantes "extender, sintetizar y aplicar lo que saben" (p. 24). En la fase de exploración, la cual se asocia con los conocimientos previos de los estudiantes, se hace un reconocimiento de saberes de algunas técnicas de estudio; posteriormente, en la fase de investigación guiada, se realizan diferentes actividades que permitan la comprensión de conceptos a partir del uso de diferentes técnicas; finalmente, los estudiantes demuestran su comprensión de conceptos o procedimientos de la asignatura de matemáticas de primer semestre, a partir de la elaboración y exposición de un mini proyecto de investigación, donde muestren de qué manera las técnicas de estudio utilizadas, les permitieron avanzar en dicha comprensión; adicionalmente, este proyecto debe dar cuenta de la aplicación de conceptos matemáticos en sus diferentes carreras profesionales.

Evaluación diagnóstica continua. Este elemento responde a la pregunta "¿cómo podemos averiguar qué es lo que comprenden los alumnos?" (p. 24) y permite 'medir' la comprensión de los estudiantes realizando una valoración de sus desempeños. En la presente investigación, esta valoración se hace durante todo el proceso, a partir de entrevistas, grupos focales, exposiciones o construcción de proyectos.

Concepto de comprensión

Perkins (1999) precisa que comprender es "la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe" (p. 70); es decir, es "la capacidad de desempeño flexible" (p. 70), haciendo principal acentuación en la flexibilidad de uso de los conceptos en otros contextos. Comprender un tópico, de acuerdo con este autor, es ser capaz de desempañarse, de manera flexible, en relación con el tópico; es decir, "explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria" (p. 73).
En esta línea, Blythe y Perkins (1998) afirman que "la comprensión incumbe a la capacidad de hacer con un tópico una variedad de cosas que estimulan el pensamiento, tales como explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y presentar el tópico de una nueva manera" (p. 39). Por lo tanto, "la capacidad de desempeño flexible es la comprensión" (Perkins, 1999, p. 73).

Dimensiones de la comprensión. Las dimensiones describen las características que son observables en los desempeños de los estudiantes. Estas dimensiones se precisan a continuación, desde las ideas de Boix y Gardner (1999):

Dimensión de contenido: evalúa el nivel de trascendencia desde el conocimiento intuitivo o no escolarizado hasta el grado de actuar con flexibilidad en una red conceptual coherente. Dimensión de métodos: evalúa la capacidad de los estudiantes, en primer lugar, para analizar lo que conocen o lo que reciben del medio y, en segundo lugar, para usar métodos válidos para construir y probar afirmaciones. Dimensión de praxis: evalúa la capacidad que tienen los estudiantes para reconocer e identificar los objetivos e intereses que guían la construcción del conocimiento, su capacidad para hacer uso del conocimiento en diversas situaciones y para establecer los resultados de hacerlo. Dimensión de formas de comunicación: evalúa el uso, por parte de los estudiantes, de sistemas simbólicos (visuales, verbales, escritos, cinestésicos, corporales, matemáticos, entre otros) para expresar su comprensión.

Considerando las dimensiones descritas, en este estudio se pretende que los estudiantes puedan explicar, generalizar, presentar ejemplos o contraejemplos, utilizar diferentes métodos para construir o probar situaciones matemáticas, resolver problemas de contextos matemáticos o extra matemáticos, relacionar la teoría con la práctica, encontrar aplicaciones concretas de las matemáticas en sus vidas cotidianas o en sus carreras, utilizar sistemas simbólicos de comunicación para demostrar lo que han logrado comprender, a partir del uso de diferentes técnicas de estudio, que les facilite la comprensión de conceptos o procedimientos de las matemáticas de primer semestre universitario.

Para ello, es necesario reconocer que la profundidad de la comprensión puede variar dentro de cada una de las dimensiones. Por lo tanto, se hace necesario distinguir los desempeños débiles de otros más avanzados y complejos (Boix y Gardner, 1999). A continuación, se caracterizan cada uno de los niveles de comprensión:

Comprensión ingenua. Los estudiantes en este nivel se basan en su conocimiento intuitivo; captan información del mundo, sin analizarla ni problematizarla; no pueden ver la articulación entre lo que aprenden en la escuela y su vida cotidiana (Boix y Gardner, 1999).

Comprensión de novatos. Los estudiantes pueden establecer relaciones entre ideas y conceptos, de manera mecánica y rudimentaria (Boix y Gardner, 1999). La validación de los procedimientos depende de la autoridad académica externa del estudiante (Pogré, 2012).

Comprensión de aprendiz. Los estudiantes pueden demostrar un uso flexible de conceptos o ideas de la disciplina. Con apoyo, pueden articular algunos conocimientos disciplinarios con su vida cotidiana, evaluando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento de manera flexible (Boix y Gardner, 1999).

Comprensión de maestría. Los estudiantes son “integradores, creativos y críticos” (p. 241). Pueden moverse, de manera flexible, entre dimensiones, articulando los criterios que permiten construir y validar el conocimiento en una disciplina; pueden usar el conocimiento para “reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea” (p. 241). En resumen, demuestran una comprensión disciplinaria (Boix y Gardner, 1999).

Metodología

Paradigma de investigación. El proyecto se enmarca en un paradigma de corte cualitativo, dado que se pretende analizar un fenómeno de tipo social, que es la comprensión de conceptos matemáticos por parte de algunos estudiantes del TdeA. De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), el o los investigadores plantean un problema, pero su resolución no sigue un proceso definido, como el que plantea el paradigma cuantitativo. En este sentido, se pretende hacer un diagnóstico inicial, que permita identificar las técnicas que utilizan los estudiantes al momento de abordar algún tema de matemáticas para, posteriormente, diseñar y evaluar algunas técnicas que propicien la comprensión de conceptos y que consideren las necesidades, intereses y el contexto de los participantes.

Durante este proceso, no se van a probar hipótesis, sino que se van generando a lo largo de la investigación (Hernández et al., 2006). Así mismo, la información será recolectada a través de observaciones, análisis documentales, entrevistas, los cuales son métodos no estandarizados que no posibilitan el análisis numérico (Hernández et al., 2006).

Por otro lado, el análisis considerado es de tipo inductivo, en tanto que se parte de la identificación e interpretación de los procesos que realizan los estudiantes cuando pretenden estudiar matemáticas. Posteriormente, se focalizarán algunos casos para analizar cómo el uso de algunas técnicas de estudio particulares, propician la comprensión de conceptos. En este sentido, se pretende explorar, describir y, posteriormente, generar perspectivas teóricas (Hernández et al., 2006). De hecho, atendiendo las directrices de Bogdan y Biklen (2006) sobre los investigadores cualitativos, estos tienden a analizar sus datos de forma inductiva.

Adicionalmente, se considera fundamental la historicidad de los estudiantes y su interpretación subjetiva de la realidad (que depende de sus vivencias, experiencias, entre otros), para poder describir, en un primer momento, las técnicas utilizadas y, en un segundo momento, las que se proponen para alcanzar la comprensión de conceptos matemáticos.

Tipo de estudio. El tipo de estudio que abordará esta investigación será un estudio de casos de un grupo de estudiantes del TdeA. En este sentido, se pretende analizar profundamente un caso (cada estudiante que participe del proceso) para responder al planteamiento del problema y a los objetivos propuestos (Hernández el al., 2006). De acuerdo con lo anterior, se espera generar perspectivas teóricas acerca del uso de técnicas de estudio en la comprensión de conceptos matemáticos; se pretende que estas perspectivas teóricas emerjan a la luz del marco conceptual de la EpC.

En la perspectiva de Yin (1984), un estudio de casos “investiga un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto de vida real” (p. 9). En el caso particular de esta investigación, se analizará la manera en que algunas técnicas de estudio permiten la comprensión de conceptos matemáticos, en el contexto de los estudiantes, es decir, en las clases, en algunos ambientes de la universidad, en semilleros, entre otros. Adicionalmente, la situación estudiada es contemporánea debido a que se han encontrado muchas dificultades en los estudiantes, con respecto a la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos en el TdeA. Incluso, se reportan casos de estudiantes que, en cursos avanzados, demuestran falencias en matemáticas básicas, lo cual nos lleva a inferir que no se alcanza la comprensión cuando se recibe un curso de matemáticas en el primer semestre.

Por otro lado, Yin (1984) expone que en un estudio de casos “habrá muchas más variables de interés que apuntes de datos, y como resultado confía en las fuentes múltiples de evidencia, con datos que necesitan converger en una moda triangular” (p. 9). En este orden de ideas, el estudio de casos que se pretende llevar a cabo, permite estudiar el fenómeno desde muchas perspectivas y no desde una sola variable. Por lo tanto, se espera utilizar varias fuentes de información como las observaciones, las entrevistas, el análisis de textos bibliográficos, la discusión en grupo, interacción e introspección con grupos o colectivos, entre otras, que se describirán con más detalle en los siguientes apartados.

Participantes. En la primera fase del proyecto, los participantes fueron algunos estudiantes del primer semestre de matemáticas del TdeA que, de manera voluntaria, desearon hacer parte de encuestas, entrevistas o grupos de enfoque, para determinar las técnicas de estudio más utilizadas al momento de estudiar alguna temática de matemáticas. También se invitaron a algunos profesores de los primeros semestres universitarios, para revisar, desde su perspectiva, las técnicas usadas por sus estudiantes al momento de intentar comprender algún concepto o procedimiento matemático durante las clases.

En la segunda fase, se han invitado a 15 estudiantes, de diferentes grupos y profesores, a participar en un semillero de matemáticas, el cual fue pensado para propiciar el uso de algunas técnicas de estudio, propuestas por las investigadoras, que permitan la comprensión de conceptos o procedimientos. Estos estudiantes han venido participando, de manera activa, en las reuniones semanales del semillero, creado para los fines del proyecto investigativo. Los encuentros se iniciaron en la segunda mitad del semestre y continuarán durante el segundo semestre del año 2019.

Métodos de recolección de la información. La información está siendo recolectada a través de los siguientes métodos:

Observaciones: durante las observaciones, el investigador cualitativo debe registrar bien los acontecimientos para ofrecer una descripción relativamente incuestionable de la realidad que servirá para análisis posteriores y, claro está, el informe final (Stake, 1999). Además, la observación cualitativa implica mantener un papel activo y una reflexión permanente sobre los hechos (Hernández et al., 2006). Por lo tanto, en este estudio, se han estado observando los estudiantes cuando utilizan algunas técnicas de estudio en la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos, durante los encuentros del semillero.

Encuestas: son formatos que permiten la recolección de información, a partir de algunas directrices establecidas previamente. En este estudio, se han utilizado para identificar los métodos de estudio que utilizan los estudiantes, con frecuencia, en sus procesos de comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos. La encuesta virtual, que albergó preguntas relacionadas con los hábitos de estudio y uso de diferentes técnicas (toma de notas, revisión de medios audiovisuales, trabajo en equipo, entre otros), fue enviada a 1349 estudiantes que ingresaron nuevos al TdeA en el semestre 2019-1; esta fue respondida por 206 estudiantes, de manera voluntaria (15,3%).

Sesiones en profundidad o grupos de enfoque: dado que el interés de la investigación es analizar cómo algunas técnicas de estudio permiten la comprensión de conceptos matemáticos, entonces se torna fundamental hacer "reuniones de grupos pequeños o medianos (tres a 10 personas), en las cuales los participantes conversan en torno a uno o varios temas en un ambiente relajado e informal" (Hernández et al., 2006, p. 605). En este caso, se realizaron dos grupos de enfoque; el primero, de estudiantes, donde se dialogó sobre las técnicas de estudio utilizadas en los procesos de aprendizaje de las matemáticas y, el segundo, de profesores, en el que se identificaron las técnicas de estudio usadas por los estudiantes, pero desde el proceso de enseñanza, es decir, desde la perspectiva de los mismos profesores.

Análisis de la información. Para analizar la información, en primer lugar, se hará un proceso de organización y clasificación de la misma; luego, se hará un proceso de transcripción de las diferentes observaciones (actividades del semillero y grupos focales). Posteriormente, se generarán algunos códigos y, consecutivamente, algunas categorías. La triangulación metodológica de los diferentes métodos de recolección de la información, dará lugar a una descripción detallada de las técnicas de estudio utilizadas por los estudiantes al momento de estudiar algún concepto matemático. Actualmente, el proyecto de investigación se encuentra en la fase de organización y clasificación de la información recolectada hasta el momento, a partir de los grupos de enfoque, la encuesta y algunas actividades llevadas a cabo en los primeros encuentros del semillero.

Con base en los resultados de la triangulación, se diseñarán algunas técnicas de estudio que permitan la comprensión de conceptos matemáticos. Dichas técnicas serán validadas por personas expertas en el tema y serán aplicadas en un grupo de estudiantes, con el fin de evaluar su pertinencia en la comprensión de conceptos.

Resultados parciales

Hasta el momento, se ha realizado la encuesta a los estudiantes, se han desarrollado dos grupos focales y se han hecho los primeros encuentros del semillero. Para el segundo semestre de 2019, se pretende seguir el trabajo de campo y establecer los resultados finales del estudio.

Del análisis parcial de la encuesta, se observa que el 52,4% de los estudiantes, aproximadamente, tienen edades entre los 16 y 18 años; el 55,3% son del género femenino, el 44,2% del género masculino y el 0,5% de otro género. Se observó que el 67,5% decidió ingresar a la universidad porque quiere ser un excelente profesional. Con respecto a la forma de estudiar matemáticas, se precisa que la mayoría de estudiantes ponen atención a sus clases y, posteriormente, estudian los temas o realizan ejercicios propuestos; así mismo, si tienen dificultades de entendimiento, buscan videos en Youtube para comprender los temas. Esta forma de estudiar, de acuerdo con los resultados de la encuesta, les es útil solo al 47,1% de los estudiantes; a los demás, a veces les funciona o, definitivamente, no les funciona. Algunos de estos resultados se pueden visualizar en la ilustración 1.

El primer grupo focal se realizó con 15 estudiantes del primer semestre del Tecnológico de Antioquia, que cursan matemáticas. De estos, el 40% son hombres y el 60% mujeres. Las respuestas a las preguntas, en su mayoría, coinciden con los resultados parciales de la encuesta; en este caso, se precisa que más del 70% de ellos repasan los temas vistos en clase y realizan los ejercicios propuestos; sin embargo, no presentan un método de estudio estructurado. Algunos de estos estudiantes buscan videos para complementar sus estudios, pero, los demás, no encuentran en esta estrategia una vía para el aprendizaje de conceptos. El aspecto más significativo mencionado por estos estudiantes, es la motivación que un buen profesor les puede generar a la hora de un proceso de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, de acuerdo con Font (1994), para que sea posible el aprendizaje es necesario que el estudiante demuestre una disposición para aprender el nuevo conocimiento y esta disposición debe propiciar deseo y perseverancia por comprender lo que estudia, es decir, relacionar el nuevo contenido con el que ya conoce.

El segundo grupo focal se realizó con diez profesores que acompañan los cursos de matemáticas del primer semestre universitario. Ellos mencionaron que su forma de enseñar, en la mayoría de los casos, era mediante el método tradicional: explicación magistral, talleres y evaluación. También enfatizaron que los estudiantes suelen estudiar los temas de las notas tomadas en clase o a partir de la realización de los talleres propuestos. Especificaron que muchos de sus estudiantes utilizan videos de internet o se remiten a los blogs que los profesores mismos construyen. Adicionalmente, se notó que, la mayoría de los docentes, focalizaban la complejidad de los procesos educativos en matemáticas, en el estudiante, sin precisar que ellos también son protagonistas de este proceso de enseñanza y aprendizaje.

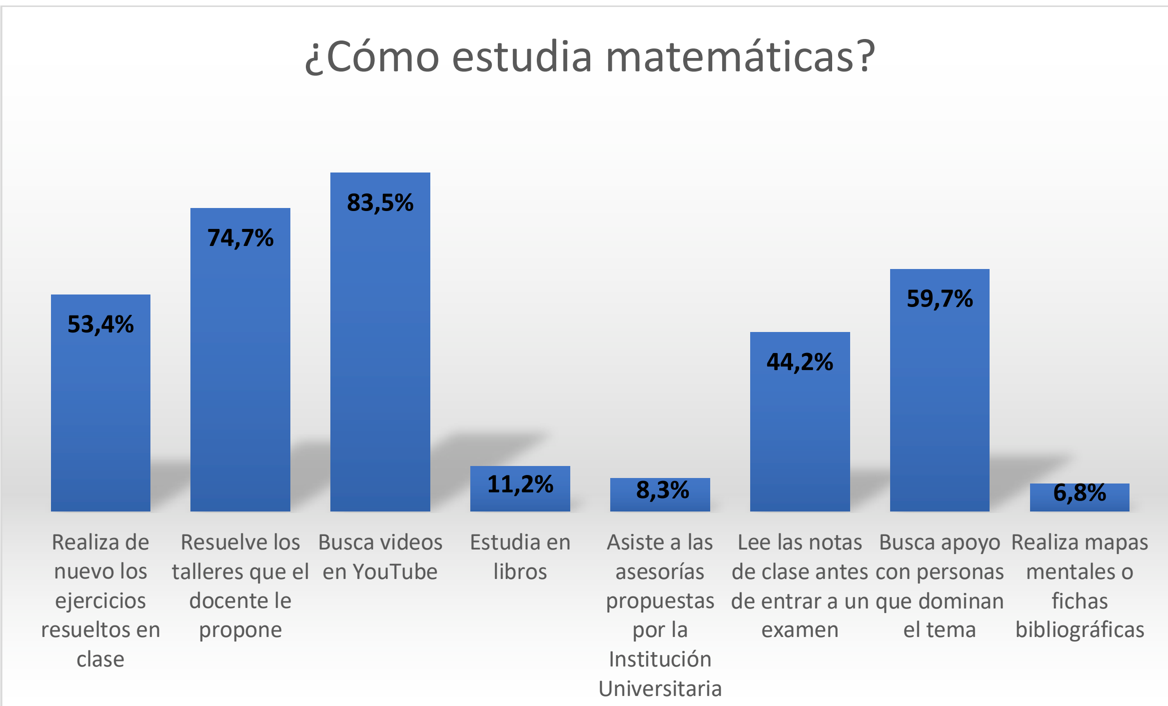
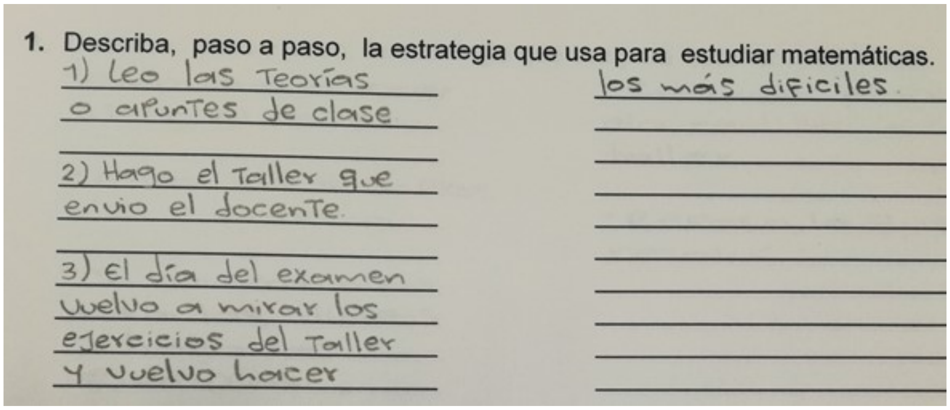


Ilustración 1. Respuesta a pregunta ¿cómo estudia matemáticas?
Fuente: Encuesta realizada a los estudiantes (total: 206), febrero-abril de 2019

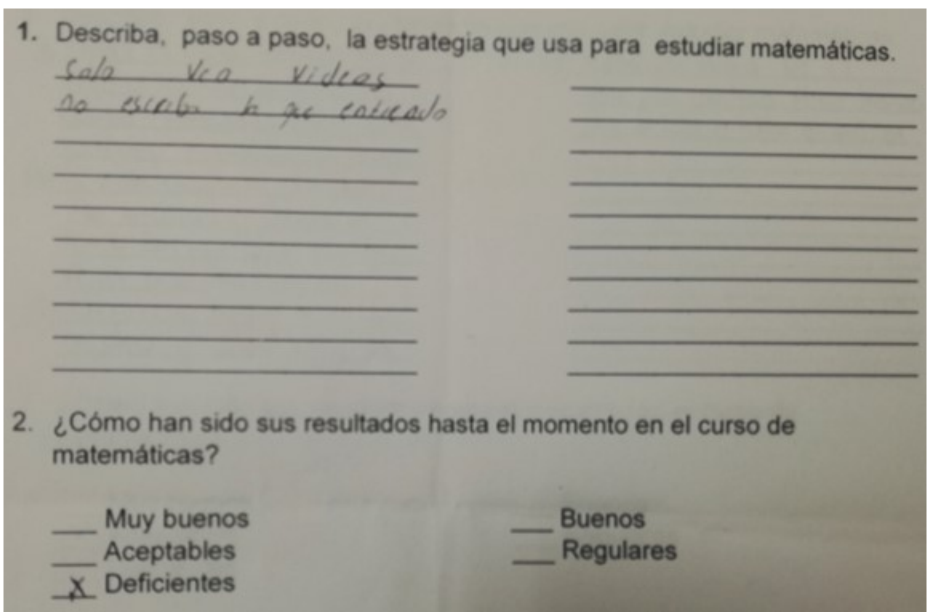
Con respecto a los encuentros del semillero, en el primero se realizó una actividad que pretendía reconocer la estrategia que los estudiantes usan para estudiar matemáticas; así mismo, identificar cómo han sido los resultados al utilizar dicha estrategia y si les permite adquirir conocimientos a largo plazo. En coherencia con la encuesta y los grupos focales, se percibió que algunos estudiantes no tienen una estrategia estructurada de estudio o, si la tienen, es muy similar a las mencionadas anteriormente: leer los apuntes de clase, hacer el taller enviado por el docente o volver a repasar los ejercicios el día de la evaluación (ver ilustración 2).



1. Describa, paso a paso, la estrategia que usa para estudiar matemáticas.
1) Leo las Teorías o apuntes de clase los más dificiles.
2) Hago el Taller que envio el docente.
3) El día del examen vuelvo a mirar los ejercicios del Taller y vuelvo hacer

Ilustración 2. Material de los estudiantes del semillero.

Uno de los estudiantes del semillero mencionó que solo veía videos, pero que no tomaba nota o escribía lo que lograba entender (ver ilustración 3). Por esta razón, enfatizó que sus resultados en matemáticas eran deficientes. En términos de la comprensión, se infiere que el estudiante no logra "explicar, demostrar y dar ejemplos, generalizar, establecer analogías y presentar el tópico de una nueva manera" (Blythe y Perkins, 1998, p. 39).

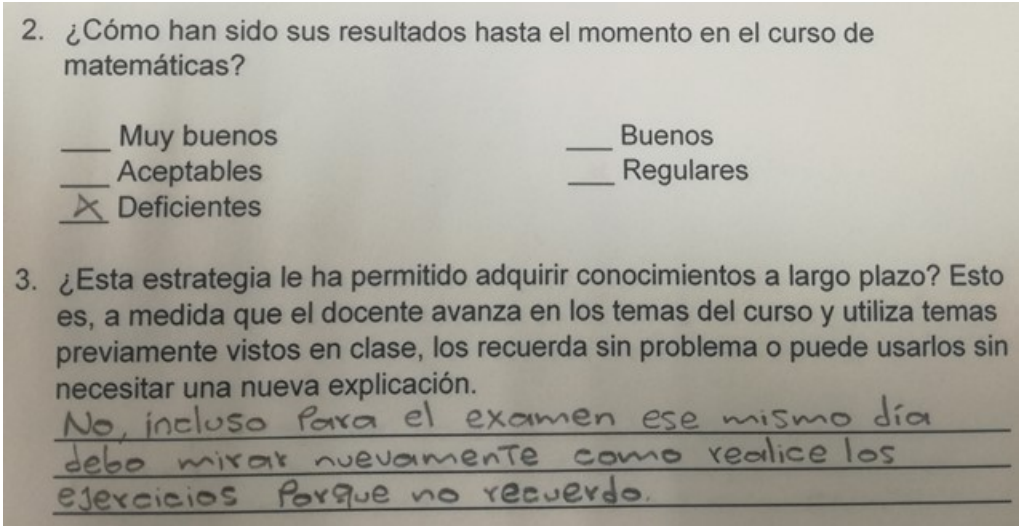


1. Describa, paso a paso, la estrategia que usa para estudiar matemáticas.
Solo veo videos
no escribo lo que entiendo

2. ¿Cómo han sido sus resultados hasta el momento en el curso de matemáticas?
___ Muy buenos
___ Buenos
___ Aceptables
___ Regulares
_X_ Deficientes

Ilustración 3. Material de los estudiantes del semillero.

Otro de los estudiantes menciona que su estrategia de estudio no le ha permitido adquirir conocimientos a largo plazo, pues debe revisar nuevamente cómo realizó los ejercicios, para poderlos recordar (ver ilustración 4). Esta situación también permite precisar que los estudiantes no están desarrollando conocimientos a largo plazo, ni están logrando comprensiones de las temáticas asociadas a las matemáticas, ni mucho menos pueden utilizar los conocimientos para resolver problemas matemáticos o, incluso, extra matemáticos.



2. ¿Cómo han sido sus resultados hasta el momento en el curso de matemáticas?

___ Muy buenos ___ Buenos
___ Aceptables ___ Regulares
_X_ Deficientes

3. ¿Esta estrategia le ha permitido adquirir conocimientos a largo plazo? Esto es, a medida que el docente avanza en los temas del curso y utiliza temas previamente vistos en clase, los recuerda sin problema o puede usarlos sin necesitar una nueva explicación.

No, incluso Para el examen ese mismo día debo mirar nuevamente como realice los ejercicios Porque no recuerdo.

Ilustración 4. Material de los estudiantes del semillero.

Conclusiones preliminares

De los resultados parciales del estudio, se puede concluir que algunos estudiantes del TdeA no poseen una estrategia estructurada para estudiar matemáticas que les permita alcanzar la comprensión de conceptos o procedimientos. En su mayoría, suelen apoyarse de videos de Internet, resolver los ejercicios propuestos por su docente, buscar el apoyo de personas que dominan el tema o realizar de nuevo los ejercicios resueltos en clase. Sin embargo, se percibe que para el 47,1% de los estudiantes, aproximadamente, estas estrategias no les son útiles, pues no logran obtener los resultados deseados.

Así mismo, se infiere que algunos estudiantes no logran alcanzar conocimientos a largo plazo al considerar la forma en la que están estudiando. Es muy probable que no estén logrando niveles de comprensión de aprendiz o de maestría y que se estén quedando en niveles de ingenuo o de novato, en los cuales no se sobrepasan los conocimientos intuitivos iniciales o, si se logran establecer relaciones entre ideas y conceptos, se hacen de manera mecánica y rudimentaria, y tienden a ser olvidadas en el tiempo.

En los resultados parciales, no se logra percibir el uso de técnicas de estudio como lectura crítica, estrategias de síntesis, subrayado o uso de esquemas, tanto en la encuesta como en los grupos de enfoque o en el semillero mismo. Lo que se infiere de la encuesta, en particular, es que el 6,8% de los estudiantes encuestados realiza mapas mentales o fichas bibliográficas, el 11,2% estudia en libros y el 83,5% busca videos en YouTube. En este último aspecto, algunos estudiantes del grupo de enfoque mencionan que no utilizan con mucha frecuencia los videos de Internet, porque los consideran tediosos o aburridos. Sin embargo, en la encuesta se precisa que su ventaja radica en que se pueden reproducir las veces que sean necesarias hasta entender algún procedimiento determinado. También se resalta que los estudiantes del semillero rescatan el trabajo en equipo y la toma de nota como aspectos fundamentales a la hora de analizar un proceso de comprensión en matemáticas.

Finalmente, se espera que, con el proyecto, se pueda analizar de qué manera el uso de algunas técnicas de estudio, como lectura crítica, uso de medios audiovisuales o de mapas conceptuales, permitan la comprensión de algunos conceptos matemáticos del primer semestre universitario del Tecnológico de Antioquia, en el marco de la EpC. Este análisis haría parte de los resultados finales del proyecto que, como se dijo anteriormente, está en su etapa de trabajo de campo.

Referencias bibliográficas

Blythe, T. y Perkins, D. (1998). Comprender la Comprensión. En T. Blythe (Ed.), *Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente*. Buenos Aires: Paidós.

Bogdan, R. y Biklen, S. (2006). *Investigação cualitativa em educação*. Traducción: Santos y Batista. Portugal: Porto Editora LDA.

Boix, V. y Gardner, H. (1999). ¿Cuáles con las cualidades de la comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 215 – 256). Buenos Aires: Paidós.

Dubon, E., Navarro, J., Pakhrou, T., Segura, L. y Sepulcre, J. (2013). Estudio de las deficiencias matemáticas en los alumnos de nuevo ingreso. En J. Álvarez, M. Tortosa y N. (Coord.), *La Producción Científica y la Actividad de Innovación Docente en Proyectos de Redes* (pp. 2717-2730). España: Universidad de Alicante.

Flores, W. y Auzmendi, E. (2016). Los problemas de comprensión del álgebra en estudiantes universitarios. *Revista Ciencia e Interculturalidad, 19*(2), 54-64.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en Matemáticas. *Suma*, (17), 10-16.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.

Perkins, D. (1999). ¿Qué es la Comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-95). Buenos Aires: Paidós.

Pogré, P. (2012). *Enseñanza para la Comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Recuperada de la base de datos DIALNET (57811_pogre_paula.pdf).

Rivière, A. (199 0). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. En M. Alvaro, C. Coll y J. Palacios (Comp.), *Desarrollo psicológico y educación, III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar, Capítulo 9* (pp. 155-182), Madrid: Alianza.

Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Casos*. España: Ediciones Morata S.L.

Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 21 – 34). Buenos Aires: Paidós.

Yin, R. (1984). *Case study research: design and methods*. Beverly Hills: Sage.

DESARROLLO DE HABILIDADES DE MODELACIÓN Y DE CREACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE LA ORIENTACIÓN VOCACIONAL

DEVELOPING MODELING AND CREATION SKILLS IN THE CONTEXT OF VOCATIONAL GUIDANCE

Miguel A. Hernández Machado, Lucía Argüelles Cortés, Miguel A. Gutiérrez Arce
Departamento de Matemática de la UCLV (Cuba)
mihmachado@uclv.cu, largue@uclv.edu.cu, migutierrez@uclv.cu

Resumen
Entre las habilidades más difíciles de lograr por el matemático figuran las de modelación y creación. La impartición por profesores universitarios de una asignatura para la enseñanza media superior, plantea la necesidad de formalizar un conjunto de ejercicios que se corresponden con las temáticas: inferencia, ecuaciones, problemas con ecuaciones, cálculos algebraicos, geometría y técnicas matemáticas, por lo que se concibió la tipología de los ejercicios en correspondencia con los procedimientos típicos de los métodos de la matemática para desarrollar las citadas habilidades. Resultó funcional establecer la tipología, pues permite la apropiada ampliación de la ejercitación en el contexto requerido. La Orientación Vocacional en el preuniversitario debe procurar desarrollar los intereses cognoscitivos, conocimientos y habilidades relacionados con las diferentes áreas del saber, mediante una asignatura y las demás actividades que se realizan en el proceso formativo.Una de las actividades que se ha concebido desde el curso 2014-2015 es la atención a la asignatura Matemática en el currículo de los grados décimo y onceno, destinada a despertar motivación y entrenar habilidades matemáticas, impartida por profesores universitarios.

Palabras claves: **o**rientación vocacional**,** habilidades de creación

Abstract
Among the most difficult skills to be achieved by the mathematician are creation and modeling. The teaching of an upper secondary school subject by university teachers has shown the need to establish a set of exercises corresponding with the topics: inference, equations, and problems with equations, algebraic calculations, geometry and mathematical techniques. Consequently, the typology of exercises was conceived in correspondence with the typical procedures of Mathematics methods to develop the skills mentioned above. It was functional to establish the typology, since it allows the appropriate intensification of exercises in the required context. Vocational Orientation in pre-university education must make every endeavor to develop the cognitive interests, knowledge and skills related to the different areas of knowledge through a subject and other activities carried out in the educational process. One of the activities conceived from the 2014-2015 school year is the attention to Mathematics subject in tenth-and-eleventh-grade curriculum, addressed to rouse motivation and to train mathematical skills, being taught by university teachers.

Keywords: vocational guidance, creation skills

Introducción

La problemática de educar las motivaciones de los jóvenes desde las edades tempranas es una tarea en la que maestros y la familia juegan un decisivo papel en la educación de la vocación ofreciéndole al educando vías, métodos y procedimientos para la búsqueda entre el sistema de profesiones en correspondencia con las necesidades sociales. Por lo tanto, una de las problemáticas más acuciantes en el nivel preuniversitario consiste en el logro de una orientación vocacional (OV) efectiva de los estudiantes, lo que debe incidir en la elección correcta de las carreras universitarias.

La revisión bibliográfica acerca de la OV (González, 2002, Álvarez, 2001, Grañeras, 2009) permite definirla esencialmente como un proceso de ayuda para la elección y desarrollo profesional, que tiene como objetivo despertar intereses vocacionales, ajustar dichos intereses a las competencias del sujeto y a las necesidades del mercado de trabajo. Sin embargo, este concepto ha evolucionado desde los que se limitaban a elección de la profesión a partir de las condiciones innatas o impulsos de la persona, hasta las más actuales que la enfocan como un proceso más integral de desarrollo de la personalidad.

En Cuba (Mendoza Cedeño, Machado Ramírez, & Montes de Oca Recío, 2016), se reconocen como vías para la orientación vocacional, los círculos de interés, las charlas, talleres, conferencias, excursiones, visitas a centros especializados, etc. Las mismas, a criterio de los autores de este artículo, cumplen un importante papel, pero es necesario, encontrar nuevas vías, ajustadas a las condiciones actuales del presente siglo, desde las que el estudiante no solo tenga un papel protagónico y se involucre como un ser activo y consciente en la elección de una profesión; sino además logre con autonomía darle un sentido a su vida que no necesariamente la impliquen. Así, cobra importancia la elaboración de los proyectos personales de vida, como medio para estos fines.

Esta es una acción considerada de vital importancia para las carreras de Ciencias Básicas por la reducida matrícula y la baja calidad académica de los estudiantes que ingresan en las mismas.

Para acometer esta acción, la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas (UCLV)
organiza actividades de carácter global y cada facultad desarrolla actividades adicionales en dependencia de sus características. Las carreras de Matemática y de Física son carreras de Ciencias Básicas que pertenecen a la Facultad de Matemática, Física y Computación.

En particular, la carrera de Matemática ha mantenido durante varios años un trabajo sostenido para aumentar la motivación por la carrera y desarrollar habilidades requeridas por el matemático. Entre estas habilidades, las más difíciles de lograr son las de modelación y creación, porque requieren desarrollar recursos con características integradoras.

La OV en el preuniversitario debe procurar desarrollar los intereses cognoscitivos, conocimientos y habilidades relacionados con las diferentes áreas del saber, mediante una asignatura y las demás actividades que se realizan en el proceso formativo. Se dirige a preparar al educando para la selección profesional consciente. Resulta muy importante que en ella se tengan en consideración las necesidades sociales en consonancia con las necesidades individuales. Elegir una profesión sin estar convencido, puede ser tan nocivo como seleccionar solo aquella que satisfaga solo los intereses personales, por eso se recalca en orientar por grupo de profesiones. (Columbié, 2007, Gómez, 2009, Grañeras, 2009, Quisaguano, 2017)

Una de las actividades que se ha concebido para la OV desde el curso 2014-2015 es la atención a la asignatura Matemática en el currículo de los grados décimo y onceno, destinada a despertar motivación y entrenar habilidades matemáticas, impartida por profesores universitarios.

En este contexto, surgió la necesidad de formalizar el plan temático de los tópicos a tratar con el objetivo de conformar un conjunto de problemas destinados a desarrollar las habilidades que se persiguen.

Marco teórico

El fundamento teórico atiende dos perspectivas: la primera, el plan de orientación vocacional concertado entre la educación superior y la enseñanza media y la segunda el propósito específico de los procedimientos típicos de los métodos matemáticos.

Las acciones para realizar el trabajo de OV deben guardar relación con los objetivos formativos del preuniversitario y de los objetivos para cada grado, de manera que paso a paso se contribuya al desarrollo de la OV en los educandos de preuniversitario dirigida a lograr una elección consciente de su futuro profesional.

Los objetivos para cada grado deben alcanzarse en función de los núcleos básicos de conocimientos generales, los cuales reflejan el contenido de las acciones que integralmente respondan a los intereses del proceso de OV.

Entre estas acciones (Columbié, 2007) figuran:

- *Actividades de contenido instructivo-profesional*, las cuales se encaminan a ofrecer los conocimientos necesarios y suficientes sobre la caracterización general de las carreras.
- *Actividades dirigidas al establecimiento del vínculo afectivo con la profesión*, destinadas a desarrollar motivaciones, intereses profesionales y la vocación, para elegir conscientemente aquella que satisfaga las expectativas individuales y las necesidades sociales del territorio.

Las *técnicas fundamentales* son las técnicas participativas, los talleres, diálogos, debates, exposiciones, conferencias, etc.

Es precisamente en el marco de estas actividades donde deben aplicarse los procedimientos típicos de los métodos matemáticos, que son: el análisis (basado en la descomposición de las observaciones), la síntesis (obtenida por agrupación de características esenciales), la inducción (que generaliza a partir de lo particular) y la deducción, utilizada para establecer relaciones.

Los métodos y procedimientos correspondientes que se utilizan en la concepción de la ejercitación se resumen en la tabla1.

Tabla 1. Métodos y proedimientos utilizados en la concepción de la ejercitación.

Métodos	Procedimientos
Análisis	División o fragmentación, clasificación
Síntesis	Definición, resumen, conclusión
Inducción	Observación (destinada a encontrar concordancias y diferencias), experimentación, comparación, abstracción, generalización
Deducción	Demostración, comprobación

Método

En primer lugar, se requiere establecer la tipología temática sobre la cual se trabaja y formular los objetivos que persigue cada tipo de tema. Este resultado se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 2. Tipología temática y sus objetivos.

Tipología temática	Objetivos
Inferencia	Valorar el pensamiento lógico del estudiante
Ecuaciones	Formar y resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales a partir de situaciones prácticas
Álgebra	Determinar la correcta aplicación de las operaciones algebraicas
Geometría y Trigonometría	Aplicar las fórmulas más importantes para resolver problemas prácticos
Funciones	Aplicar propiedades de funciones familiares al estudiante
Estadística	Calcular estadísticos usuales

En segundo lugar, asociada a la tipología temática, hay que determinar los tipos de problemas que más se prestan para la creación de las habilidades perseguidas. En el Anexo A se describen los tipos de ejercicios relacionados con la tipología temática mencionada.

La tipología de los ejercicios seleccionados y los procedimientos asociados se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Tipología de los ejercicios y los procedimientos seleccionados.

Tipología		Procedimientos
1	Determinar dominios mediante intersecciones	Síntesis
2	Analizar comportamiento de gráficos	Clasificación
3	Separar de casos de análisis	Conclusión
4	Establecer inferencias mediante analogías	Observación
5	Seleccionar alternativas descartando errores	Experimentación
6	Aplicar método de coeficientes indeterminados	Comparación
7	Trabajar con variables genéricas	Abstracción

8	Aplicar el método de inducción	Generalización
9	Probar propiedades a partir de hipótesis dadas	Demostración
10	Determinar el conjunto solución de un problema	Comprobación
11	Modelar un problema a partir de información disponible	Modelación
12	Buscar una ley para completar una sucesión	Inducción intuitiva

Los ejercicios se corresponden con las siguientes temáticas establecidas en la tabla 2.
Se obtiene un conjunto mínimo de 20 ejercicios por temática que se distribuyen de la manera que indica la siguiente tabla.

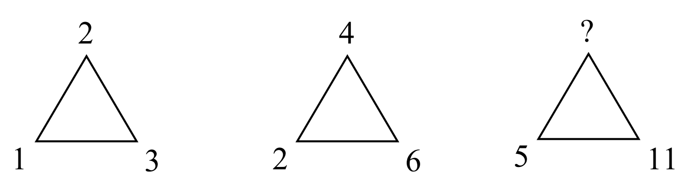
Tabla 4. Distribución de ejercicios por temática.

Temática	**Tipología**
Inferencia	8, 12
Ecuaciones	5, 10
Problemas con ecuaciones	9, 11
Cálculos algebraicos	3,7
Geometría	4
Técnicas matemáticas	1, 2 ,6

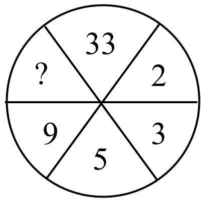
A continuación, se ejemplifican las temáticas consideradas mediante las tipologías correspondientes (Argüelles Cortes & Sosa Gómez, 2011, Cortés, 2018).

1. Inferencia.
- *Tipología:* Buscar una ley para completar una sucesión.

Ejemplo 1: ¿Cuál es el número que falta en el triángulo de la derecha?



Ejemplo 2: ¿Cuál es el número que falta?



Ejemplo 3: En la siguiente secuencia, ¿cuál de los números está errado?
60, 52, 45, 39, 35.

Ejemplo 4: Infiere la ley que permita llenar los cuadros de la última figura

1	1
1	2

5	10
2	10

9	27
3	18

Los tres primeros ejemplos, aunque con diversos enfoques y grados de dificultad, requieren una observación simple, mientras que el cuarto necesita una observación múltiple para realizar una inducción intuitiva sobre la base de relaciones detectadas.

- *Tipología:* Aplicar el método de inducción

Ejemplo 1: El promedio del peso de un grupo de 20 estudiantes es de 86kg. El promedio de 9 de ellos es de 75kg. ¿Cuál es el promedio de los 11 restantes?

Ejemplo 2: En la siguiente progresión, cada término se obtiene multiplicando el anterior por un cierto factor constante. $a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt[3]{2},\ a_3 = \sqrt[6]{2}$. ¿A qué número es igual a_4?
En estos dos ejemplos existe la posibilidad de generalizar la información disponible por la utilización de fórmulas apropiadas.

Ejemplo 3:
Aplicar los siguientes procedimientos de inducción a la demostración de

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a) Observación geométrica asociada a un cuadrado
b) Experimentación mediante triángulos recurrentes
c) Formación de parejas de Gauss
d) Comprobación por inducción completa

Este ejemplo resulta muy ilustrativo y completo.

2. Ecuaciones
   - *Tipología:* seleccionar alternativas descartando errores

Ejemplo 1: Si $x > 0$ ¿Cuál es su valor en la expresión: $|2x - 3| = 39$?

Ejemplo 2: ¿Cuántos números enteros multiplicados por si mismos son iguales a la mitad del número?

En ambos ejemplos, aunque con distintas variantes, la hipótesis y la experimentación permiten llegar al resultado.

3. Problemas con ecuaciones;
   - *Tipología:* Modelar un problema a partir de información disponible

Ejemplo: El cuadro Las Meninas fue pintado por Velásquez en 1656, a los 57 años de edad, después de vivir 34 años en Madrid, donde se instaló a los 4 años de casado. ¿A qué edad se casó?
En este problema, el manejo de los datos conduce a la modelación que permite calcular la incógnita.

   - *Tipología:* Probar propiedades a partir de hipótesis dadas

Ejemplo: Probar que si $y+z=10$, entonces $(10x+y)(10x+z)=100x(x+1)+yz$ y calcular el producto de 84 por 86 utilizando el segundo miembro de la igualdad.
Para este caso, la demostración se ha combinado con una ilustración particular para evidenciar la utilidad del resultado.

4. Cálculos algebraicos
   - *Tipología:* Separar casos de análisis;

Ejemplo:
¿Cuál de los siguientes es el gráfico de una función?

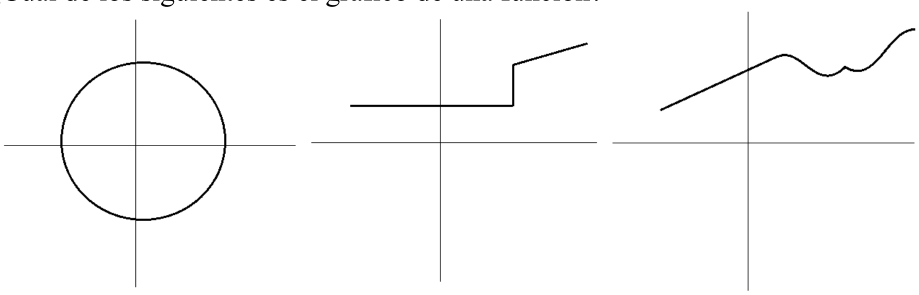


Gráfico A Gráfico B Gráfico C

La conclusión se extrae al verificar las condiciones requeridas por la definición que se maneja.

   - *Tipología:* Trabajar con variables genéricas

Ejemplo: Si $\frac{a}{b}=3$. ¿Cuál es el valor del cociente $\frac{a+3b}{a-b}$?

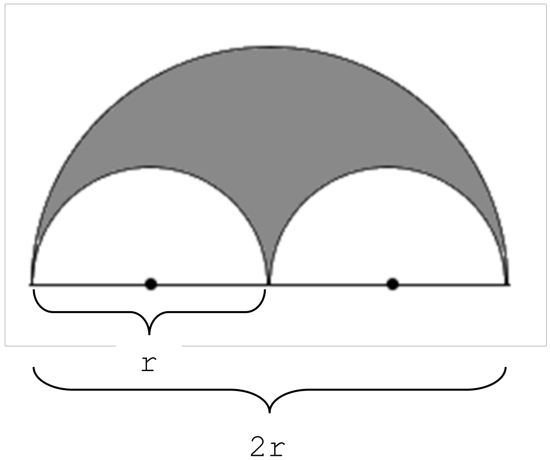
En este caso, se ha combinado el análisis abstracto requerido con condiciones concretas para establecer una relación entre lo general y lo particular.

5. Geometría
   - *Tipología:* Establecer inferencias mediante analogías

Ejemplo1: Dos círculos concéntricos son tales que el círculo interior y el anillo tienen igual área. Si el radio exterior r se conoce. ¿Cuál es el radio del círculo interior?

Ejemplo2: Calcular los 3 ángulos interiores de un triángulo sabiendo que están en progresión aritmética de razón igual a 20.

Ejemplo3: ¿Cuál es el perímetro de la región sombreada en la figura constituida por los semicírculos cuyos radios se indican?



En los tres ejemplos, la observación de propiedades geométricas, conjuntamente con la utilización de fórmulas apropiadas, conduce al resultado. En ellos se integra el álgebra y la Geometría.

6. Técnicas matemáticas

- *Tipología:* Aplicar método de coeficientes indeterminados

Ejemplos:

a) ¿Cuánto debe valer m para que el cociente $\frac{2+3i}{2+mi}$ sea un número real?

b) ¿Para qué valores de a y b $\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\right)^4$ toma la forma $a+b\sqrt{2}$?

c) ¿Para qué valores de A, B, C se cumple que: $\frac{x^2-6x+2}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$?

La comparación es utilizada en todos los casos, pero el inciso c) ilustra un caso que se utiliza posteriormente en la integración.

- *Tipología:* Determinar dominios mediante intersecciones

Ejemplo:

¿Cuál es el dominio de la función $f(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{\log(10-x^2)}$?

El proceso de análisis y síntesis se manifiesta como una unidad.

- *Tipología:* Analizar comportamiento de gráficos

Ejemplo: ¿Cuál es el menor valor que puede tomar x^2+8x si $x \in \mathbb{R}$?

La clasificación que se deriva del comportamiento puede llevar al concepto intuitivo de función convexa.

En el desarrollo de habilidades de manipulación de propiedades lógicas, el tipo de pregunta juega un papel importante. Por su forma, existen varios tipos que deben ser explotados:

1) Verdadero o falso.

Propician familiaridad con operaciones entre proposiciones y sus leyes. El formato de la pregunta puede ser: Cuál de las proposiciones siguientes (asociadas a los datos del problema) es cierta (o falsa)

2) Completar el sentido

Propician la fundamentación de un juicio. El formato de la pregunta puede estar constituido por una aseveración inconclusa que el estudiante debe completar correctamente mediante su selección.

3) Opciones negativas
Se introduce como opción de respuesta "ninguna de las respuestas anteriores" o "falta información", con lo que se logra que los estudiantes busquen las propiedades que exige el ejercicio.

4) Contradicciones teóricas
Se muestran contradicciones con el objetivo de medir el dominio que posee el alumno acerca de hipótesis o propiedades teóricas requeridas. Señalamos a continuación dos posibilidades:

- Mostrar gráficos de representación de funciones con características inaceptables de acuerdo con los datos.
- Indicar valores que no cumplen con el logro de las restricciones requeridas.

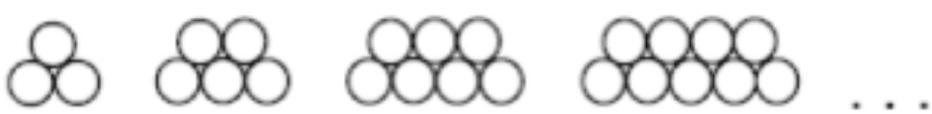
5) Elaboración algebraica
La respuesta a seleccionar requiere modificaciones algebraicas que obliguen a la utilización de propiedades operativas

6) Rango lógico
En la mayor parte de las opciones deben proponerse respuestas dentro del rango permitido por las propiedades que se manejan, en particular pueden indicarse respuestas obtenidas a partir de considerar errores comunes en el tema abordado.

Ejemplo 1
Tipología de pregunta: Completar el sentido.
Dentro de la tipología temática de Álgebra, seleccionar la pregunta.
Si $3^x + 3^{-x} = P$, entonces $9^x + 9^{-x}$ es igual a:
Considerar el *rango lógico* en las diversas opciones a ofrecer, de acuerdo con las propiedades que se manejan. En particular se indican respuestas obtenidas a partir de errores comunes en la operatoria.

A) P^2
B) $P^2 + 2$
C) $P^2 - 2$
D) $P^2 - 1$
E) $3P$

Ejemplo 2
En la tipología temática: Inferencia, escoger el tipo de pregunta: seleccionar respuestas verdaderas.
La pregunta es:
Con los círculos se ha formado la siguiente secuencia de figuras.



¿Cuál (es) de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera (s)?
I. La décima figura se la secuencia está formada por 21 círculos.
II. De acuerdo a la formación de la secuencia cualquier figura tendrá un número impar de círculos.
III. La diferencia positiva en cuanto a la cantidad de círculos entre dos figuras consecutivas es 2.
Construir el conjunto para la selección con las características descritas

A) Sólo I B) Sólo I y II C) Sólo I y III D) Sólo II y III E) I, II y III

Ejemplo 3

Para la tipología temática: Ecuaciones, escoger dentro del tipo de pregunta de selección de respuestas verdaderas una que requiera realizar transformaciones algebraicas sencillas a la modelación directa del problema.

La pregunta es:
¿Cuál de las siguientes ecuaciones permite resolver el siguiente problema:
"Si te regalo la quinta parte de mis lápices y a Carmen le regalo 5 más que a ti, me quedo con 4". ¿Cuántos lápices tenía?
El conjunto para la selección de respuestas es:

A) $\frac{2x}{5} + 5 = 4$
B) $\frac{2x}{5} + 5 = x$
C) $\frac{x}{5} + 9 = x$
D) $\frac{2x}{5} + 9 = x$
E) $\frac{x}{5} + 5 = 4$

Conclusiones

Las temáticas abordadas recorren importantes aspectos del conocimiento correspondiente a la enseñanza media. La concepción de la tipología de los ejercicios en correspondencia con los procedimientos típicos de los métodos de la investigación matemática, permite incidir en la formación de habilidades de modelación y de creación matemática, lo cual contribuye a la motivación por la matemática. Resultó funcional como guía metodológica, establecer la tipología de los ejercicios, pues permite la apropiada ampliación de la ejercitación en el contexto del objetivo propuesto. También se abordó la importancia de enfocar preguntas intencionadas

Referencias bibliográficas

Álvarez, A. (2001). *Una estrategia pedagógica para el trabajo de formación vocacional profesional en el departamento docente de la enseñanza preuniversitaria. Santiago de Cuba.* Universidad de Oriente. Santiago de Cuba: Tesis presentada en opción al Título Académico de Master en Educación. CEES "Manuel F. Gran".

Argüelles Cortés, L., & Sosa Gómez, G. (2011). *Inferencias lógicas.* Santa Clara: Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas.

Columbié, Z. d. (2007). Orientación vocacional profesional en la etapa de preparación para la selección de la profesión del estudiante de preuniversitario. *Curso 100.* La Habana: Órgano Editor Educación Cubana. Ministerio de Educación, 2007.

Cortés, L. A. (2018). *Bases metodológicas de la investigación.* Santa Clara: Universidad Central de Las Villas, No publicado.

Gómez, Á. H. (2009). Una WebQuest para la orientación vocacional y profesional en Bachillerato. *Revista Científica de Educomunicación*, 215-221.

González, V. (2002). Orientación educativa vocacional. Una propuesta metodológica para la elección y desarrollo. *Congreso Universidad 2002.* La Habana.

Grañeras, P. (2009). *Orientación educativa: modelos institucionales y nuevas perspectivas.* . España. : CIDE.

Mendoza Cedeño, I. G., Machado Ramírez, E. F., & Montes de Oca Recío, N. (2016). La orientación vocacional y la elaboración de los proyectos personales de vida. Tendencias y enfoques. *Cognosis. Revista de filosofía, letras y ciencias de la educación*, 67-84.

Quisaguano, E. C. (2017). La educomunicación como estrategia de orientación vocacional. *Revista de ciencias sociales y humanidades*, 27-34.

Anexo A

Inferencia

- Para una secuencia indicada por algunos términos, determinar alguna de las siguientes variantes: término n-simo, el siguiente al último dado, completar un término que falte, corregir un término errado, obtener un término pedido.
- Determinar una condición suficiente para el cumplimiento de alguna propiedad especificada.
- Ordenar de acuerdo con algún criterio dado.
- Comprobación por inducción completa.

Ecuaciones

- Formación descriptiva de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, en particular utilizando por cientos.
- Resolución de sistemas cuadráticos
- Resolución de ecuaciones con radicales.
- Utilización de cuadrados mágicos.
- Resolución en términos de una relación entre variables.

Geometría y Trigonometría

- Determinación de un área sombreada
- Combinación de Geometría y Trigonometría
- Suma de ángulos formados por triángulos y rectas notables
- Ángulos notables entre circunferencias y cuerdas
- Longitudes entre vértices
- % constituido por el área calculada con respecto al total
- Combinación de Geometría y Ecuaciones

Álgebra

- Propiedades de las potencias
- Comparar fracciones
- Operaciones con monomios
- Operatoria con números pares
- Operaciones con radicales
- Despeje
- Comparación de números
- Propiedades del módulo
- Coeficientes indeterminados
- Desigualdades (a través de gráficas)
- Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

Funciones

- Evaluación
- Gráficos que representan dos funciones
- Leyes del logaritmo

Estadística

- Media y mediana con parámetros
- Combinaciones
- Problemas con promedios
- Valor utilitario del trabajo

"EMPODERANDO" A LOS ESTUDIANTES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS: CONTRIBUCIONES DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA CRÍTICA

"EMPOWERING" STUDENTS IN THE MATH CLASS: CONTRIBUTIONS FROM CRITICAL MATHEMATICS EDUCATION

Martha Cecilia Clavijo Riveros, Edna Paola Fresneda Patiño
Secretaría de Educación del Distrito – Bogotá (Colombia)
marthacclavijor@gmail.com, epfresnedap@gmail.com

Resumen
En este documento narramos un avance de la investigación que estamos realizando frente a algunas reflexiones que hemos alcanzado luego de incursionar nuestras prácticas pedagógicas e investigativas en la Educación Matemática Crítica desde hace varios años. Cada una de las investigadoras, desde contextos similares y con puntos de convergencia en escenarios académicos, hemos procurado generar espacios en la clase para abordar aspectos sociopolíticos de la educación matemática que inciden en la formación ciudadana de los estudiantes. En este sentido, confluimos en la hipótesis que es posible "empoderar" a los estudiantes frente a situaciones sociales de su contexto usando como herramienta las matemáticas, que permiten leer y escribir el mundo, para generar cambios sobre él. Relatamos el camino que ha permitido consolidar este reporte de investigación resaltando los discursos teóricos y metodológicos, seguido de algunos resultados obtenidos, para finalizar señalando conclusiones que hemos consolidado.

Palabras clave: competencia democrática, alfabetización crítica, conocer reflexivo

Abstract
In this paper we report the progress of the research we are carrying out, based on some reflections that we have reached after entering our pedagogical and research practices in Critical Mathematics Education for several years. Each of the researchers, from similar contexts and with points of convergence in academic environments, has tried to devote time in class to tackle socio-political aspects of mathematics education that influence on students' citizenship formation. In this sense, we state the hypothesis that it is possible to empower students in social situations of their context by using mathematics as a tool that allows them to read and write the world in order to cause changes in it. We describe the path that has allowed completing this research report, highlighting the theoretical and methodological discourses; followed by some results obtained, to finish by pointing out conclusions that we have consolidated.

Key words: democratic competence, critical literacy, reflective knowledge

Introducción

De acuerdo con las particularidades de nuestras subjetividades y vivencias con las prácticas matemáticas comenzamos a inquietarnos por hacer que en nuestras aulas lo social antecediera a lo matemático y en esta búsqueda encontramos discursos relacionados con la Educación Matemática Crítica —EMC— (Valero, Andrade y Montecino, 2015) que compartían nuestra preocupación. Confluimos con estos discursos en diferentes espacios de formación en pregrado y posgrado, congresos académicos, semilleros, grupos de investigación y redes de maestros.

Mientras más estudiamos al respecto, mayor es la resonancia que evidenciamos entre las necesidades de los entornos en los que trabajamos y las ideas de este enfoque, del cual somos oyentes y precursoras. Actualmente somos docentes en dos instituciones de carácter público en la ciudad de Bogotá en las cuales vivenciamos escenarios durante algunos años, con estudiantes de primaria y bachillerato, configurando la investigación en torno a la pregunta: *¿cómo generar espacios en los que se propenda por el "empoderamiento" de los estudiantes desde la EMC?*

Nuestra preocupación reside en la reflexión acerca de la manera en que la escuela y los docentes de matemáticas aportamos a la formación integral de nuestros estudiantes, en la medida en que propendamos por la formación de ciudadanos críticos que usen las matemáticas como herramientas que brindan *identidad* y *poder,* frente a las situaciones de su realidad histórica, cultural, social, económica, política y académica. En este sentido, buscamos "empoderar" a nuestros estudiantes y para ello matizamos este "empoderamiento" —el matiz es nuestro— desde constructos teóricos como la competencia democrática, la alfabetización matemática, especialmente la alfabetización crítica, y el conocer reflexivo (Skovsmose, 1997, 1999; Fresneda y Sarmiento, 2018).

Para mostrar algunos avances de esta investigación, presentamos una discusión que se sustenta en las prácticas pedagógicas realizadas por las investigadoras en relación al estudio del cuidado de sí: uso de la motocicleta en la institución Educativa Departamental Ricardo Hinestrosa Daza (Fresneda y Sarmiento, 2018), el estudio del medio ambiente desde las reflexiones de estudiantes de grado quinto del Colegio Técnico Menorah IED (Fresneda y Camelo, 2019) y la comprensión de las problemáticas sociales actuales a través de las matemáticas, realizado en el CEDID San Pablo IED. Con estas experiencias es posible describir los alcances que estas prácticas han tenido en el empoderamiento de los estudiantes desde la clase de matemáticas.

Marco referencial

Desde hace más de dos décadas se empezó a generar una discusión en torno a la afirmación que las matemáticas y la educación matemática se relacionan con la democracia, la política y el poder, lo cual generó sorpresa e incluso rechazo. En este sentido, la EMC se ha constituido como un enfoque sociopolítico de la educación matemática que busca virar la mirada hacia aspectos sociales, culturales, económicos y políticos, abandonando el desarrollo de investigaciones centradas únicamente en visiones cognitivas de la educación matemática para privilegiar el desarrollo de investigaciones con orientaciones socioculturales (Valero, Andrade y Montecino, 2015).

Por esta razón reconocemos en la EMC un enfoque teórico que presta atención en cómo la sociedad hace uso de las matemáticas, en las consecuencias de su uso y en las implicaciones de las matemáticas como parte de las prácticas educativas. Además, busca entender cómo el conocimiento matemático y el conocimiento de las matemáticas escolares se imbrican en y con la sociedad y sus procesos económicos, políticos, sociales y culturales (Valero, Andrade y Montecino, 2015). Sustentadas en estas ideas coincidimos en la hipótesis acerca de que desde la clase de matemáticas es posible "empoderar" a los estudiantes en relación con la toma de una postura crítica frente a las situaciones sociales de su contexto.

Para matizar la idea de "empoderar" nos valemos de otras ideas que hemos estudiado en el marco de la EMC como la *competencia democrática* caracterizada por la alfabetización matemática —alfabetización crítica— y el conocer reflexivo como elementos que les permiten a los estudiantes leer y escribir el mundo con las matemáticas (Gutstein, 2006) generando un cambio sobre él. Para dar lugar a estos elementos es fundamental reconocer que en el aula de matemáticas hay mucho más que matemáticas en juego, y esto implica romper las barreras del aula de clase para abrirse a experimentar el mundo y las actividades humanas en las que se generan prácticas que podrían describirse como "matemáticas", como una estrategia para vivir y desarrollar la competencia matemática real y por supuesto su relación con la democracia.

Desde la EMC existe una preocupación natural por el desarrollo de una educación matemática que sustente la democracia, como aquella competencia que permite interpretar y actuar ante una situación social y política (Skovsmose, 1999). En tal sentido la microsociedad del salón de clase debe encarnar aspectos democráticos, lo que implica reconocer el aula de clase como un espacio público, un espacio social de debates en el que se anima a los estudiantes a mostrar apertura hacia los demás, responsabilidad, solidaridad, cuidado y conciencia crítica. Aquí, como lo enuncia Gutstein (2006),

> Los maestros y no solo los maestros de matemáticas necesitan conceptualizarse como "transgresores", reconocerse como parte de movimientos sociales más grandes y, explícitamente, intentar crear condiciones para que los jóvenes se conviertan en participantes activos de cambio en la sociedad (p.4).

En nuestro caso tenemos unas orientaciones para el área de matemáticas, las cuales proponen entender las matemáticas y la educación de las matemáticas escolares como un conocimiento que constituye la realidad social, cultural y política, a la vez que es construido e influido por dichas realidades (Skovsmose, 2011 citado por SED 2014). Esto implica una comprensión matemática del mundo en nuestros tiempos contemporáneos como un elemento clave para poder participar en la vida y en el mundo como sujetos históricos con capacidades lógicas para la agencia política y el desarrollo de los propios proyectos de vida. Por supuesto no se desconoce la contribución de las matemáticas a la estructuración del pensamiento analítico y científico, sin embargo, el énfasis se centra en una visión sociocultural del conocimiento en general y del conocimiento matemático en particular (SED, 2014).

Bajo estos planteamientos reconocemos que la *competencia democrática* ofrece espacios para la construcción de herramientas y argumentos con los cuales los individuos y colectividades pueden tomar posturas críticas y reflexivas frente a los problemas de su realidad. En este sentido, la competencia democrática no se refiere únicamente a la capacidad de elegir nuestros gobernantes, sino a la capacidad de tomar una posición, participar y dar vida a una ciudadanía crítica; es un modo de vida en comunidad donde hay una experiencia comunicativa conjunta. Por tanto, es necesario enfocar la democracia en la esfera de las interacciones sociales, donde día a día las personas se relacionan unas con otras para producir sus condiciones materiales y culturales. Aquí, la competencia democrática representa "una manera de vivir", una acción política abierta llevada a cabo por las personas en una entremezcla compleja de relaciones y procesos locales, regionales, nacionales y globales (Held, 1995, p. IX; citado por Skovsmose y Valero, 2012).

Esta competencia se ejerce gracias a la alfabetización matemática, que permite caracterizar la habilidad para usar técnicas formales y matemáticas; y como un constructo radical enraizando en un espíritu de crítica y proyecto de posibilidad, le permite a las personas participar en la comprensión y transformación de la sociedad; convirtiéndose en una condición previa para la emancipación social y cultural (Skovsmose, 1997). Asumimos la *alfabetización crítica* (Gutstein, 2006) que implica un acercamiento al conocimiento de manera crítica y escéptica, cuestionando los intereses a los cuales responde y ayudando a los sujetos a reconocer los actos opresores de la sociedad para participar en la creación de un mundo más justo (Macedo, 1994, citado por Gutstein, 2006). Implica examinar la propia vida y la de los demás en relación con los contextos sociopolíticos e histórico-culturales, a partir de la construcción de conocimiento, conceptos, ideas, habilidades y hechos particulares para contribuir a la transformación de la sociedad, considerando que otros mundos más justos y democráticos, son posibles.

Aportar al desarrollo de estas ideas en la clase de matemáticas, contribuye a una educación de la resistencia, la búsqueda y la crítica de las causas fundamentales de la injusticia y las desigualdades estructurales, no examinadas, que perpetúan la opresión. En la medida en que se propicien espacios para examinar el poder de las matemáticas en contextos cotidianos y reales, esos conocimientos que los estudiantes no solo han construido sino vivenciado desde sus intereses y necesidades particulares, se convierten en un insumo fundamental tanto para la consolidación de la alfabetización crítica como para la emancipación. Aquí cobra importancia el *conocer reflexivo* que se entiende como la capacidad de tomar una posición justificada en una discusión sobre asuntos sociales y políticos a partir de la conjugación del conocimiento matemático y tecnológico (Skovsmose, 1997), desde el estudio de una situación social que movilice las intenciones e intereses de los estudiantes.

A su vez reconocemos que "los estudiantes deben estar preparados a través de su educación matemática para investigar y criticar la injusticia, y para desafiar en palabras y acciones, a estructuras y actos opresivos, es decir, a leer y escribir el mundo con las matemáticas (Gutstein, 2006). En esencia, leer el mundo es entender las condiciones sociopolíticas, históricas y culturales de la vida, la comunidad, la sociedad y el mundo de cada uno; y escribir el mundo es efectuar un cambio sobre él (p. 4). Cuando enseñamos matemáticas para la democracia y la justicia social en escuelas públicas en las que el desarrollo de la capacidad crítica y la toma de decisiones es fundamental, hacemos la diferencia en la vida de los estudiantes más allá del aula y la escuela. Por lo tanto, consideramos que se "empodera" a los estudiantes cuando se conjugan estos tres elementos —*competencia democrática, alfabetización crítica y conocer reflexivo*—, para tomar una postura crítica y reflexiva frente a las problemáticas de su entorno al involucrarse como sujetos y como colectivos en busca de la transformación.

Metodología

En resonancia con los anteriores posicionamientos la *investigación crítica* (Skovsmose y Borba, 2004) es el enfoque metodológico que configura nuestra investigación, ya que posibilita acoplar las contradicciones inherentes de la intervención de enfoques sociopolíticos en la Educación Matemática a través de sus herramientas teórico-metodológicas, contribuyendo al avance teórico y práctico de estos enfoques (Vithal, 2000). Desde aquí se pretende investigar *"lo que no es, pero podría ser"* (Skovsmose, 2015), es decir, la investigación de las posibilidades; buscando cambios tanto en la en la realidad observada como en la metodología usada. Para ello se reconocen tres situaciones: actual, imaginada y dispuesta que se relacionan por medio de tres procesos: imaginación pedagógica, organización práctica y razonamiento crítico (Vithal, 2000, 2004; Borba y Skovsmose, 2004; Clavijo y Mora, 2016, Fresneda y Sarmiento, 2018), los cuales se caracterizan a continuación teniendo en cuenta la investigación específica.

La *situación actual* es la que tiene lugar antes de la práctica educativa, en la cual se evidencian las necesidades, intereses y realidades de los sujetos implicados y sus contextos. Sobre la base de las observaciones se toma una postura crítica y reflexiva para reinterpretarla y producir ideas sobre lo que podría ser, de forma distinta. Es necesario reconocer la importancia de visibilizar el contexto y sus particularidades, así como las subjetividades de los participantes en la investigación. Para nuestro caso, la situación actual, al inicio del proceso de la investigación, estaba dada por el trabajo con grupos e instituciones en las cuales no se evidenciaba un empoderamiento de los sujetos frente a sus saberes, subjetividades y porvenires para la comprensión de su contexto desde, por ejemplo, las matemáticas; unos contextos ricos en situaciones socialmente relevantes y un interés de las investigadoras por construir clases desde un enfoque sociopolítico.

La *situación imaginada* representa una situación ideal pensada por los sujetos implicados a través de su reconocimiento, un paisaje teórico, subjetividades, porvenires y contexto. Esta situación no es estática, es probable que esté en constante desarrollo ya que contiene las ideas hipotéticas de la transformación de la situación actual, inspirando cambios allí. A partir del reconocimiento de la multiplicidad de sujetos involucrados, esta situación, conformada por subconjuntos de situaciones imaginadas de los participantes da espacio a la crítica, la disidencia y la posibilidad de escribir el mundo, juntos. De esta manera, nuestra situación imaginada se materializaba con clases de matemáticas en las cuales los implicados fueran sujetos empoderados, que leyeran y escribieran el mundo con las matemáticas. Para esto en cada iniciativa, proyecto y/o escenario que construimos con los estudiantes se dio un matiz distinto, a partir del estudio de situaciones sociales propias de su contexto. Esto a su vez, se nutrió por las situaciones imaginadas de los estudiantes, sus expectativas, intenciones y porvenires.

La *situación dispuesta* se entiende como una alternativa a las dos situaciones anteriores, ya que media entre ellas, pues la situación actual fue reorganizada con referencia a las ideas y la inspiración de la situación imaginada. Desde allí los participantes en la investigación analizan lo que en realidad surgió en el proceso de manera crítica, poniendo énfasis en cómo se desarrolló la práctica en referencia a lo teórico y además se evidencia lo que emerge como distancia entre esto y la práctica real. Este proceso de análisis no sólo nutre la investigación a partir de la consideración de nuevas alternativas sino que posibilita la teorización desde ideas que surgen en la práctica pedagógica desarrollada. Particularmente para este momento de la investigación esta situación dispuesta aún se encuentra en proceso, algunos de los rasgos que podemos evidenciar es un cambio en las prácticas matemáticas privilegiadas por el diálogo, la investigación, el análisis y la caracterización de situaciones del contexto de la comunidad educativa, y con ello un cambio de paradigma de los estudiantes.

Para comprender el proceso de investigación es preciso describir los tres procesos que interactúan entre estas situaciones (Vithal, 2000, 2004; Borba y Skovsmose, 2004; Clavijo y Mora, 2016; Fresneda y Sarmiento, 2018). Así mismo es preciso aclarar que como se evidenció en la relación de la triada de situaciones encontramos que se desarrollan en distintas dimensiones de forma alterna.

La *imaginación pedagógica* está relacionada con las expectativas, las experiencias y las esperanzas de los investigadores que generan posibilidades y alternativas frente a la situación actual, mediadas por la situación imaginada. Emerge como un acto creativo que hace posible pensar alternativas pedagógicas diferentes a partir del reconocimiento del contexto de los estudiantes siendo necesaria una sensibilidad histórica, antropológica y crítica. En esta investigación a partir de la subjetividad de las maestras y los estudiantes, el reconocimiento de la situación actual, los conocimientos de los estudiantes frente a su comunidad y contexto, y el paisaje teórico que enunciamos en el apartado anterior frente a la EMC —competencia democrática, conocer reflexivo y alfabetización crítica—, hemos propuesto alternativas y escenarios distintos en las clases habituales de matemáticas desde el estudio de situaciones relevantes. Este es un proceso que apenas inicia y que requiere de un trabajo constante y evolutivo.

La *organización práctica* permite establecer tareas prácticas de planificación a partir de la elección, la negociación y las acciones para transitar de la situación actual a la situación dispuesta orientados por las expectativas de la situación imaginada. Dado que el contexto educativo limita la imaginación pedagógica, la organización práctica depende de la calidad de la cooperación de los participantes, la negociación y las limitaciones particulares del contexto. Así, la organización práctica es una versión realista de la imaginación pedagógica puesto que se reúnen todas las acciones que hemos realizado los involucrados en la investigación, en relación con el quehacer pedagógico que tiene lugar en el aula de clase. En esta investigación se han hecho evidentes las tensiones propuestas por Clavijo y Mora (2016) dadas por aspectos propios de los sujetos implicados, por normas implícitas dentro de la cultura, por requerimientos de las políticas públicas, por la organización escolar, y por la naturaleza de las matemáticas. Estas tensiones son las que modifican los elementos teóricos a partir de la práctica.

El *razonamiento crítico* es el proceso en el cual se mira a través de los datos de las dos situaciones —imaginada y dispuesta—, propiciando una reflexión y teorización sobre la viabilidad de la imaginación pedagógica junto con los elementos innovadores de la organización práctica. Permite un proceso de análisis crítico de las posibilidades que no fueron tenidas en cuenta, pensando en —"qué habría pasado si"—, dando lugar al replanteamiento de nuevas ideas y escenarios de investigación. En el proceso de nuestra investigación podemos reflexionar en qué medida hemos avanzado en la tarea de "empoderar" a los estudiantes en la clase de matemáticas al abordar situaciones socialmente relevantes. Aquí es fundamental retomar algunos elementos clave de la investigación crítica como la negociación, la deliberación, la cooperación y el trabajo en equipo; los cuales permean los procesos de participación e interacción de los sujetos dando vida a posibles situaciones de enseñanza y aprendizaje en las que se dé la posibilidad de desarrollar conocimientos sociopolíticos en la clase de matemáticas.

Resultados y análisis

Con el propósito de generar la discusión en relación a nuestra hipótesis que enuncia que —es posible "empoderar" a los estudiantes en la clase de matemáticas—, tomamos como insumo el estudio de situaciones socialmente relevantes que se han materializado en prácticas pedagógicas e investigativas que hemos realizados con nuestros estudiantes, entre las cuales resaltamos: el cuidado de sí: uso de la motocicleta - grado 8°, el medio ambiente y la contaminación - grado 5°, costo de la guerra - grado 9°, sistema financiero - grado 7°, comercialización del agua embotellada- grado 8°, las matemáticas en la salud - grado 6° y 9° y la remodelación de mi hogar -grado 9°. Para ello describimos tres de las experiencias señaladas dando cuenta de la manera como se evidencia la competencia democrática, caracterizada por la alfabetización crítica y el conocer reflexivo en relación con el estudio de situaciones sociales de su contexto, que nos permiten matizar la idea de "empoderar".

La primera experiencia pedagógica se desarrolló en la Institución Educativa Departamental Ricardo Hinestrosa Daza con estudiantes de grado octavo quienes estudiaron el *cuidado de sí: uso de la motocicleta* —ver Fresneda y Sarmiento, 2018— que se constituyó como la situación social que en ese momento generaba interés en la mayoría de los estudiantes. El contexto social y cultural de los estudiantes se enmarca en un municipio de clima cálido cercano a la capital, donde el uso de la motocicleta por propios —incluso menores de edad— y visitantes es el común denominador. Debido a esta situación, se empezaron a registrar con frecuencia competencias ilegales de motocicletas y accidentes de tránsito en los cuales los estudiantes resultaron involucrados, incluso con la pérdida de su vida. Esta situación generó desconcierto y preocupación en la comunidad y por tanto en los estudiantes, razón por la cual decidió abordarse como una situación social relevante del contexto escolar, y en el trascurrir de su investigación caracterizar el desarrollo de la competencia democrática.

Para el desarrollo de la investigación, en el aula de clase se empezó a generar la discusión frente a los distintos elementos relacionados con la situación en los que se evalúo como factores relacionados con el vehículo, con el conductor o con el medio ambiente incidían en los accidentes de tránsito. A partir de estos factores se propusieron distintos temas de investigación que fueron abordados por los estudiantes de acuerdo con la afinidad, interés y gusto con la temática, en pequeños grupos de trabajo. Esta dinámica de acción en el aula no sólo buscaba generar cambios en la rutina de clase, sino principalmente propiciar espacios para el desarrollo de la competencia democrática, donde el trabajo colectivo, la discusión y puesta en común de ideas y argumentos, era el insumo fundamental. Los estudiantes en sus grupos de trabajo generaron cuestionamientos y un proceso de investigación propio en el cual consultaban información nueva que ponían en discusión en el aula de clase con el propósito de avanzar en la consolidación de su informe de investigación. Allí, las matemáticas emergieron como herramienta para tomar una postura frente a situaciones como el exceso de velocidad, el estado de embriaguez, el uso de elementos de protección, el respeto a las normas de tránsito, entre otras relacionadas con el uso de la motocicleta.

En el desarrollo de los diversos proyectos de investigación que realizaron los estudiantes fue posible reconocer rasgos de la competencia democrática en el quehacer y actuar de la clase, ya que la situación social propuesta para generar el estudio no sólo generó interés en los estudiantes, sino que además propició espacios de estudio, discusión y puesta en común de ideas en relación con las temáticas de investigación. En este sentido, se modifica la rutina habitual de la clase de matemáticas, posibilitando el diálogo y la reflexión de situaciones sociales del contexto donde las matemáticas se convierten en argumentos para criticar y tomar posturas. Allí la *alfabetización matemática* tomo su lugar, de manera espontánea, para que los estudiantes construyeran no sólo conocimientos matemáticos específicos sino para que reconocieran su uso en la comprensión de la situación social estudiada. Con esas herramientas matemáticas que consolidaron desde su trabajo en grupo con la orientación del profesor, los estudiantes tomaron una postura crítica en relación con el cuidado de sí: uso de la motocicleta, evidenciando el *conocer reflexivo* en el trabajo que desarrollaron en el aula de clase. Ahora los estudiantes tienen mayor conciencia frente a las implicaciones del uso de la motocicleta, donde no sólo está en riesgo la vida del conductor sino de otros a su alrededor.

En la segunda práctica pedagógica realizada en el Colegio Técnico Menorah IED, —institución pública de carácter femenino—, las estudiantes de grado quinto estudiaron *el cuidado del medio ambiente y la contaminación* considerando que es un proyecto transversal de gran importancia para la institución y frente al cual las estudiantes muestran interés y a su vez preocupación —ver Fresneda y Camelo, 2019—. En este caso, para generar la discusión y el cambio en la rutina habitual de la clase de matemáticas se presentaron algunos videos e imágenes que buscaban ilustrar el problema de la contaminación de nuestro planeta a causa de acciones realizadas por los mismos seres humanos que no somos conscientes del daño que le hacemos a nuestro propio hogar. Por supuesto, la actividad generó la reacción esperada y las estudiantes dieron a conocer sus puntos de vista, reflexiones y comentarios los cuales estaban sustentados en la experiencia, dando lugar a más de diez problemáticas que podían ser estudiadas en torno a esta situación social del contexto. Posteriormente las estudiantes se organizaron en pequeños grupos de trabajo para indagar en torno a aquella problemática que llamó su atención proponiendo una pregunta de investigación que ciertamente no tenía una respuesta inmediata y que daría el rumbo a su proceso de indagación en la clase de matemáticas.

Los equipos de trabajo con orientación de la docente iniciaron la búsqueda de información en relación a: ¿cuáles son los residuos que tardan más en descomponerse?, ¿cuál es el proceso para volver el agua potable?, ¿por qué el plástico se explota cuando lo entierran?, ¿los muertos se descomponen y contaminan?, ¿cómo es el proceso de producción del papel y su relación con los árboles?, ¿a dónde llevan la basura y qué hacen con ella?, ¿cuánta basura produce una persona en un año?, ¿cómo contamina el petróleo? Para ello, usaron distintas fuentes de información y en clase hacían uso de los computadores de la sala de informática con conexión a internet para ponerla en discusión y organizarla para avanzar hacia la consolidación de una respuesta a la pregunta de investigación que se plantearon. En sus indagaciones preliminares se reconocían indicios de elementos matemáticos, aunque no fueran conscientes de ello, los cuales desde la alfabetización matemática se pueden transformar en argumentos y herramientas que empoderen sus decisiones, reflexiones y posturas en relación con la situación que han definido estudiar.

En el proceso de aproximación de las respuestas a los cuestionamientos que se propusieron se reconocen indicios de la *alfabetización crítica* (Gutstein, 2006), donde elementos de carácter matemático como: proporciones, regla de tres, estimaciones de unidades de tiempo y masa, operaciones básicas y datos estadísticos toman lugar en el proceso de interpretación de la problemática estudiada, permitiendo un acercamiento al conocimiento de manera crítica, buscando explicaciones a fenómenos y cuestionando tanto intereses como beneficios. De este modo, las reflexiones suscitadas en relación con la problemática estudiada están acompañadas de nuevos argumentos que ya no provienen de la experiencia o las vivencias, sino que se sustentan en las matemáticas como herramienta que permite tomar una postura crítica. Esta dinámica de trabajo no sólo aportó al desarrollo del proyecto educativo institucional en el que se busca empoderar a la mujer en la transformación de su contexto inmediato, en este caso, haciendo énfasis en el cuidado del medio ambiente; sino que además posibilitó el *conocer reflexivo* en la medida en que las estudiantes se apropiaron de su proceso frente a una situación que no es ajena y que les genera preocupación por el impacto que tiene en nuestra vida diaria, lo que implica propiciar cambios en nuestro entorno e invitar a otros para que se unan y se concienticen de la dimensión de esta problemática y de los efectos que causa para el planeta.

La tercera experiencia generada en el colegio CEDID San Pablo ubicado en la localidad de Bosa al suroccidente de Bogotá colindante con el municipio de Soacha, que cuenta con varios estudiantes procedentes de allí. En esta zona se evidencia bastante contaminación visual, ambiental y auditiva, por las actividades económicas del sector y el flujo masivo de automotores. Otra característica dentro de la comunidad educativa son las ausencias de estudiantes por temas de salud especialmente por virosis, algunas de las razones que encontramos a partir del abordaje son:

ingreso a la institución desde muy temprano, desinformación frente al tema de salud y altos niveles de contaminación por cercanía con la autopista sur (lugar por el que transitan los estudiantes que residen en el vecino municipio) y la industria de Soacha. En estas zonas se había declarado alerta naranja por el nivel de contaminación del aire y una de las recomendaciones hechas por la Secretaría de Salud del Distrito era el uso del tapabocas. Así mismo para esa época de invierno se proliferan los episodios de gripe, por tanto, en los medios de comunicación se promovió el uso de tapabocas, sin embargo, el uso de este fue casi nulo en la comunidad.

De esta manera, el abordaje del proyecto de investigación realizado por los estudiantes de grado noveno estuvo centrado en la pertinencia del uso de tapabocas y todas aquellas amenazas que encontraban hacia su salud por medio del aire. En su proceso de indagación los diálogos de los estudiantes giraron en torno a la contaminación ambiental desde un análisis: económico, político y social, profundizando matemáticamente en el contagio de virus, considerando la tendencia de las personas por no utilizar tapabocas. En el proceso hicieron uso de nociones como: secuencias numéricas, lenguaje algebraico, ecuaciones, diagrama de árbol, representaciones estadísticas y tablas de frecuencias para modelar una situación hipotética, tomada desde unas condiciones de su cotidianidad. Al realizar algunas variaciones pudieron comprender la relevancia del uso del tapabocas, la importancia de la modelar matemáticamente situaciones de su contexto y descubrir cómo las matemáticas les permite comunicar eficazmente una idea. Esta última emergió como una propuesta de los estudiantes porque tenían la intención de comunicar y compartir con su familia y comunidad en general, los hallazgos de su investigación para el beneficio de todos.

Lo anterior posibilita ver el empoderamiento de los estudiantes al construir herramientas y argumentos frente a una situación que les afecta tomando una postura crítica y reflexiva al respecto. Desde su trabajo autónomo usaron técnicas formales y matemáticas para la comprensión, divulgación y transformación de una situación que viene afectando a la comunidad Paulista, evidenciando la *alfabetización crítica.* Así, les fue posible identificar el poder de las matemáticas para modificar su situación actual, exaltando el valor de los conocimientos propios de su comunidad, fortaleciendo la identidad del territorio y el bienestar del otro y con el otro. Además, se generó el *conocer reflexivo* al evidenciar en los estudiantes la necesidad de mejorar sus hábitos de salud, usando tapabocas para proteger a otros y cuidar su salud. Aquí, reconocieron que la no comprensión de esta situación socialmente relevante tenía gran incidencia en su proceso académico (por las ausencias) y por tanto su proyecto de vida. Esto implicaba una acción inmediata pues requería tomar una postura crítica frente a las recomendaciones hechas por expertos, evidenciar acciones para involucrar a las familias y a la comunidad proponiendo iniciativas para mejorar su entorno.

En efecto estas experiencias muestran un avance en oportunidades para que estos estudiantes puedan leer y escribir el mundo con las matemáticas como lo propone Gutstein (2006), donde se comprende, se toma un posicionamiento y se realiza una transformación bajo la premisa de que otros mundos son posibles cuando dejamos de pensar de forma individual y consideramos a los otros con sus necesidades, porvenires, expectativas e intenciones. En la medida en que continuemos abordando estos escenarios desde la educación matemática sin duda estamos contribuyendo a la formación ciudadana de nuestros estudiantes de forma sustancial puesto que les damos la oportunidad de notar, en la práctica, que las matemáticas son una herramienta que permite no sólo ser conscientes de su realidad social sino además tomar una postura frente a ella para generar transformación y cambio, en la búsqueda de una sociedad más justa, democrática y equitativa.

Conclusiones

De acuerdo con los avances que hemos logrado con el desarrollo de esta investigación podemos evidenciar que desde un enfoque sociopolítico de la educación matemática es posible "empoderar" a los estudiantes frente a situaciones sociales de su contexto usando como herramienta las matemáticas, que permiten leer y escribir el mundo, para generar cambios sobre él. Para ello es importante que los docentes generemos escenarios en el aula de clase en los cuales se usen las matemáticas para comprender y/o tomar una postura crítica frente a problemáticas de su contexto, posibilitando mayor identidad de los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje y su ejercicio como ciudadanos, propiciando un empoderamiento de sus saberes, subjetividades y porvenires.

En esta búsqueda del empoderamiento se hace relevante el fortalecimiento de la competencia democrática como la posibilidad de reflexionar y/o transformar en torno a situaciones sociales, políticas, económicas o ambientales. Resaltamos que es posible ahondar en la alfabetización crítica desde el aula de matemáticas cuando se vivencian o analizan situaciones en las cuales se visibiliza la no neutralidad de las matemáticas, la complejidad de la sociedad y las relaciones de poder presentes y a partir de ello se concibe como puede ser eso diferente. Además, es importante el conocer reflexivo en la medida en que se reconoce que las matemáticas se convierten en una herramienta poderosa para tomar decisiones y generar reflexiones frente a situaciones de la realidad de los sujetos involucrados.

Por otra parte, logramos un cambio en la clase de matemáticas puesto que se abren espacios para la discusión, la investigación y el análisis de situaciones del contexto posibilitando un cambio en los roles de los estudiantes y las docentes-investigadoras propiciando cambios en la cultura habitual de clase. Se reconoce que el conocimiento no reside únicamente en las docentes, sino que es una construcción social y cultural a la que todos tenemos acceso. Estas transformaciones en el aula cambian las dinámicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje y el paradigma que tienen los estudiantes frente a las matemáticas ya que les permiten verlas más cercanas y útiles en su realidad. Además, fomentan la participación de los sujetos en las dinámicas de su sociedad generando sentido de pertenencia o identidad por su clase, su micro y macrocontexto, su actuar, sentir y hacer, viendo con ojos críticos su futuro, fuera de la escuela.

También somos conscientes, desde la investigación crítica, que existen situaciones que alejan la situación dispuesta de la imaginada, estas se describen en detalle en Clavijo y Mora (2016) como tensiones que se dan por aspectos propios de los sujetos implicados, por normas implícitas dentro de la cultura, por requerimientos de las políticas públicas, por la organización escolar, y por la naturaleza de las matemáticas. Estas las hemos considerado y vivenciado a lo largo de la investigación lo que ha generado un avance al afrontarlas proporcional al tiempo de trabajo, notando que esta visión sociopolítica en la clase de matemáticas es posible. Reconocemos que los aportes desde la EMC son un proceso evolutivo y de largo aliento que no se da de un momento a otro y que por tanto implica un alto compromiso de los educadores matemáticos e investigadores que nos apasionamos por esta perspectiva de la Educación Matemática.

Por lo anterior, con este reporte de investigación hacemos extensiva la invitación a los docentes en investigadores en educación matemática para continuar transformando las prácticas matemáticas ya que los resultados son satisfactorios aun cuando nos encontremos ante múltiples obstáculos. Consideramos que desde la EMC hacemos grandes aportes a la Educación Matemática desde una visión sociopolítica de las matemáticas y damos un valioso reconocimiento a la disciplina matemática, alejándonos de su carácter puramente cognitivo para acercarla a la realidad del aula, la escuela y la vida de nuestros estudiantes y donde el proceso de enseñanza-aprendizaje se convierte en una experiencia donde todos los involucrados somos partícipes activos. Sin lugar a duda, la realidad actual nos exige ofrecer espacios para que nuestros niños, niñas y jóvenes construyan herramientas que les permitan actuar y enfrentarse a los fenómenos y situaciones que están fuera de la escuela.

Referencias bibliográficas

Clavijo, M y Mora, D. (2016). Transformando el aula desde un enfoque sociopolítico de la educación matemática: tensiones de un docente. Tesis de maestría no publicada, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Fresneda, E. y Sarmiento, S. (2018). El desarrollo de la competencia democrática en la clase de matemáticas. Tesis de maestría no publicada, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá, Colombia.

Fresneda, E. y Camelo, F. (2019). La competencia democrática desde ambientes de modelación matemática: reflexiones con estudiantes de grado quinto. *XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.* 1-9.

Gutstein, E. (2006). *Reading and Writing the World with Mathematics. Towards a Pedagogy for Social Justice.* New York: Routledge-Taylor & Francis Group.

SED, (2014). *Currículo para la formación académica y la formación integral: Orientaciones para el área de matemáticas.* Bogotá.

Skovsmose, (1997). Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas. *Revista EMA*, *2(3)*, 191-216.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Uniandes.

Skovsmose, O. y Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: El compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 1-23). Bogotá: Uniandes.

Skovsmose, O. (2015). Pesquisando o que não é, mas poderia ser. En C. Lopes y U. D´Ambrosio. (Eds.). *Vertentes da Suversão na Producção Científica em Educação Matemática*. (pp. 63-90). Campinas SP: Mercado das Letras.

Skovsmose, O. y Borba, M. (2004). Research Methodology and Critical Mathematics Education. En P. Valero y R. Zevenbergen. (Eds.). *Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education* (pp. 207-226). United States: Springer.

Valero, O., Andrade, M. y Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(3), 287-300.

Vithal, R. (2000). Re-searching mathematics education from a critical perspective. En J. F. Matos y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the Second International Mathematics Education and Society Conference* (pp.87-116). Lisboa, Portugal: ciefc-Universidade de Lisboa.

Vithal, R. (2004) Methodological Challenges for Mathematics Education Research from a Critical Perspective. En Valero, P. y Zevenbergen, R. (Eds.). *Researching the Socio-political Dimensions of Mathematics Education: Issues of Power in Theory and Methodology* (pp. 227-248). Kluwer academic publishers.

ACTIVIDADES DIDÁCTICAS PARA INTRODUCIR EL CONCEPTO DE VECTOR MEDIANTE ESCENARIOS DIDÁCTICOS VIRTUALES

DIDACTIC ACTIVITIES TO INTRODUCE THE VECTOR CONCEPT THROUGH VIRTUAL DIDACTIC ENVIRONMENTS

Sofía Paz Rodríguez, Armando Cuevas Vallejo, José Orozco Santiago
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
sofia.paz@cinvestav.mx, ccuevas@cinvestav.mx, jorozco@cinvestav.mx

Resumen
Se presenta una primera experiencia didáctica de la implementación de actividades diseñadas para introducir el concepto de vector en $\mathbb{R}^2$ y promover su comprensión usando la tecnología digital. Las actividades didácticas se desarrollaron mediante escenarios didácticos virtuales interactivos en un entorno de geometría dinámica que simula el movimiento de un brazo robótico elemental como primer escenario y en un segundo escenario se sitúa al vector en un entorno geométrico. Las actividades toman elementos teóricos de la didáctica Cuevas & Pluvinage (2003). La experiencia se aplicó a estudiantes universitarios. Los resultados proporcionan datos para un rediseño de las actividades, las cuales muestran deficiencias de los estudiantes en conceptos como magnitud y dirección de un vector.

Palabras clave: brazo robótico, entorno de geometría dinámica, escenarios didácticos virtuales interactivos, vector

Abstract
This paper presents a first didactic experience on the implementation of didactic activities to introduce the concept of vector in $\mathbb{R}^2$, and to promote its understanding by using digital technology. Didactic activities were developed through interactive virtual didactic scenarios in a dynamic geometry environment which simulates the movement of an elemental robotic arm as a first scenario. Meanwhile in a second scenario the vector is placed in a geometric environment. The activities take theoretical elements from Cuevas & Pluvinage's didactics (2003). The experience was applied to university students. The results provide data for a redesign of activities and show students' deficiencies in concepts such as magnitude and direction of a vector.

Key words: robotic arm, dynamic geometry environment, interactive virtual didactic scenarios, vector

Introducción

El cálculo se convirtió en una de las ramas de las matemáticas más importantes por sus aplicaciones en la industria, la física y demás, al tratar los problemas de optimización y estabilidad. En el actual siglo XXI el álgebra lineal se ha incluido en el currículo escolar de escuelas con carreras como física, ingeniería, economía y administración por su importancia en la mayoría de las profesiones (Oktaç & Trigueros, 2010); además, se considera una rama indispensable para el desarrollo tecnológico por su aplicación en la robótica, medicina, música, procesamiento de imágenes, desarrollo de GPS, y mucho más, de ahí que en este siglo tenga un rol similar al del cálculo.

El algebra lineal tiene un nacimiento tardío en la matemática, por ende, contiene muchos conceptos matemáticos abstractos complejos, formalidad y rigor (Dorier, 2000; Masters, 2000). Esto ha provocado problemas en su enseñanza y aprendizaje, por lo que se ha convertido en el centro de atención de diferentes investigadores (Dorier, 2000; Oktaç & Trigueros, 2010).

Uno de los conceptos básicos del álgebra lineal es el de vector y es a la vez uno de los conceptos más abstractos de la matemática, puesto que puede representar una fuerza, aceleración, imagen digital, melodía digital, función continua, una nota de consumo, una matriz, una coordenada y muchas cosas más (Madrid, 1981; Sierpinska, 2000); aunque este concepto se introduce desde la educación media como parte de los cursos de física para modelar fuerza, velocidad, y más, al introducir este concepto en un primer curso de álgebra lineal como elemento de un espacio vectorial, poca o nula relación se tiene con lo previamente definido (Gueudet, 2006; Harel, 2000).

El objetivo de esta investigación consiste en diseñar actividades didácticas que faciliten el tránsito del concepto de vector visto en la educación elemental a la formal y dónde el estudiante sea capaz de construir su propia definición. Esto es, a través de la resolución de ejercicios, el estudiante pueda adquirir una interpretación del concepto antes de presentarle una definición formal y con ello promover una mejor comprensión del mismo (Cuevas & Pluvinage, 2003).

Para realizar las actividades didácticas utilizamos herramientas tecnológicas en el intento de transformarlas en herramientas cognitivas como apoyo para una enseñanza significativa e ir habilitando al estudiante en el tránsito del concepto de vector en la física al concepto de vector en álgebra lineal.

Marco teórico

Sobre el Vector

El concepto de vector tiene múltiples representaciones dependiendo del contexto en donde se utilice, de tal forma que puede verse como una invariante de representaciones según el contexto dónde se aplique (Sierpinska, Dreyfus, & Hillel, 1999). Por ejemplo, en la física un vector representa objetos o conceptos que para ser definidos necesitan de una magnitud o módulo, un sentido y una dirección (Feynman, Leighton, & Sands, 1998; Madrid, 1981) (Feynman, et al, 1987; Madrid, 1981); en los libros de física los vectores aparecen como dibujos de flechas representando fuerzas que actúan sobre objetos o como desplazamientos donde la punta de la flecha indica la dirección de desplazamiento (Feynman et al., 1998; Resnick, Halliday, & Krane, 2001); y en algunos libros de álgebra lineal se interpretan como segmentos de recta dirigidos, como dibujos de flechas que representan posiciones de puntos en el espacio asociados a un origen, como eneadas de números reales con una aritmética de n-tuplas de números reales, o en general, interpretado como un elemento de un espacio vectorial (Anton, 1986; Grossman & Flores, 2012).

Particularmente, Hillel (2000) muestra cinco formas de representar a los vectores, ya sea como objetos que pueden ser segmentos de línea dirigidos que parten de un punto en común en un sistema libre de coordenadas geométricas y que tienen magnitud y dirección; como flechas dentro de un espacio bidimensional y tridimensional dentro de un sistema de coordenadas geométricas; como puntos en el plano o algebraicamente como n-tuplas de números reales que en su forma abstracta son elementos de un espacio vectorial.

Para introducir el concepto de vector presentamos al estudiante diversas representaciones del concepto dentro de diferentes contextos. Primero, elegimos el contexto de la robótica y en este sentido diseñamos las actividades de forma tal que el vector es parte de la arquitectura de un brazo robótico y se representa por una flecha que parte de un origen en un sistema libre de coordenadas cartesianas con magnitud y dirección; y en una segunda instancia, mostramos al vector como una flecha que representa posiciones de puntos a través de parejas de números ordenados.

Marco didáctico

La didáctica Cuevas & Pluvinage (2003) es un programa didáctico orientado a la enseñanza de las matemáticas a nivel post elemental, cuyos principios promueven la participación activa del estudiante para evitar la enseñanza rutinaria y memorística en la que se cree que el estudiante aprenderá al memorizar y repetir lo hecho por el profesor.

Destacamos brevemente algunos de los principios de este marco didáctico utilizados en el diseño de las actividades: (1) la acción dentro del proceso enseñanza y aprendizaje debe de corresponder al estudiante, por consiguiente, para introducir un concepto matemático de cierta complejidad se deben elaborar proyectos de acción práctica que permitan al estudiante estar siempre desarrollando una acción, de tal forma que el o los conceptos matemáticos emerjan de la propia actividad sin necesidad de ser definidos de manera formal previamente; (2) partir de un problema en cierto contexto de interés a partir de una situación real para el estudiante; (3) descomposición de un problema complejo en subproblemas que lleven al estudiante a definir el concepto matemático deseado y nunca introducir un concepto mediante su definición formal; (4) implementación de procesos de operación inversa cada vez que se introduce un concepto y donde esto sea posible; y (5) representar el concepto en los diversos registros de representación que le sean propios y si el concepto lo permite.

La tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje

Hoy en día la tecnología digital se ha convertido en un actor incuestionable dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no sólo para realizar complejos cálculos numéricos, sino para realizar simulaciones y hacer factibles recomendaciones didácticas, como afirma Rodríguez (2014, p.6) “la utilización de herramientas tecnológicas junto con un proceso de implementación didáctica puede contribuir en forma significativa a mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje”.

En el mismo sentido, la NCTM (2008, p.1), asociación norteamericana influyente en el medio académico, afirmó que “la tecnología es esencial para el aprendizaje de las matemáticas en el siglo XXI, y todas las escuelas deben asegurar que sus estudiantes puedan acceder a ellas”.

Debido a su evolución dentro de la sociedad, actualmente las herramientas tecnológicas se encuentran al alcance de todos y es más común escuchar el uso de estas para el aprendizaje de conceptos matemáticos. En particular, el uso de un Entorno de Geometría Dinámica, definido por Jupri, Drijvers, & van den Heuvel-Panhuizen (2016, p.2) como “un entorno basado en la web que proporciona: herramientas digitales interactivas para el aprendizaje de las matemáticas; un diseño de tareas abiertas en línea; retroalimentación inmediata para las tareas…y un almacenamiento para el trabajo de los estudiantes”, promueve la participación activa del estudiante para que siempre esté desarrollando una acción, además, permite “establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas” (Santos, 2003, p.197). Para la implementación de las actividades y el diseño de los escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI) se utilizó el software libre de Geometría Dinámica GeoGebra (clásico 6).

Metodología

En este documento se reportan los resultados de una experiencia didáctica que forma parte de un estudio más amplio cuyo objetivo es el diseño de actividades didácticas mediante EDVI para introducir el concepto de vector en un curso de álgebra lineal a estudiantes universitarios de primer año. Para validar la experiencia didáctica se tuvo la participación de siete estudiantes voluntarios de ingeniería de una universidad pública en México.

La experiencia se llevó a cabo en un aula de cómputo en una sesión de 60 minutos y consistió en dos etapas La primera etapa fue la aplicación de un pretest individual de ocho ítems a lápiz y papel para conocer los conocimientos previos del estudiante sobre temas como: plano cartesiano, coordenadas, cuadrantes, localización de puntos en el plano, etc. La segunda etapa consistió en dos actividades que implicaron la interacción de los estudiantes con los EDVI; en esta etapa los estudiantes trabajaron en tres equipos de dos personas por computadora y una estudiante que trabajó de manera individual (Andy). El profesor trabajó únicamente como observador y apoyando en la resolución de dudas.

Para la recopilación de datos se entregaron hojas de trabajo con instrucciones para el manejo de los EDVI y preguntas de opción múltiple que guían al estudiante en la construcción del concepto de vector; y se grabó la sesión y la pantalla de cada una de las computadoras utilizadas por los estudiantes.

Debido a la limitación del formato presentaremos el análisis de los resultados de Andy y de dos estudiantes que trabajaron en equipo, Beto y Ángel.

Actividades diseñadas

De acuerdo con los primeros dos principios del marco didáctico propuesto por Cuevas & Pluvinage (2003), para introducir el concepto de vector se diseñó como primera actividad el proyecto de acción práctica denominado “Brazo Robótico” como un problema de interés para estudiantes de ingeniería en el área de la robótica. En esta actividad se proporciona a los estudiantes el EDVI mostrado en la Figura 1(a), este EDVI simula el movimiento de un brazo robótico de un grado de libertad dispuesto sobre una mesa en una habitación en la que hay cuatro botones, cuatro focos indicadores y un letrero led. El entorno cuenta con dos deslizadores, uno que permite controlar el movimiento rotacional del brazo robótico y otro con el que se puede modificar la longitud de su eslabón. Adicionalmente se colocó una casilla de control en la parte superior izquierda, la cual, al activarse muestra al vector asociado al brazo en su representación gráfica como una flecha que tiene magnitud, dirección y sentido. La función del brazo es incidir sobre los botones de dos tableros, los cuales al ser presionados encienden un foco indicador y mandan un mensaje al tablero led indicando que se ha activado o desactivado uno de los cuatro procesos automatizados de una casa inteligente: el accionamiento del aire acondicionado, la activación del sistema de riego, el encendido de luces y el cierre del suministro de gas.

Con base en el cuarto principio del marco didáctico Cuevas & Pluvinage (2003), en el cuestionario de esta actividad se incluyeron ejercicios de operación inversa. Por ejemplo, se le solicita al estudiante que mueva los deslizadores para configurar los valores dados de la longitud del eslabón del brazo robótico y su posición, y a partir de ello, se le pide que señale cual es el proceso que se ha activado tomando como referencia el mensaje desplegado en el tablero led; de manera inversa, se solicita al estudiante encuentre los valores de la longitud del eslabón y la posición en la que debe estar el brazo robótico para activar el proceso indicado.

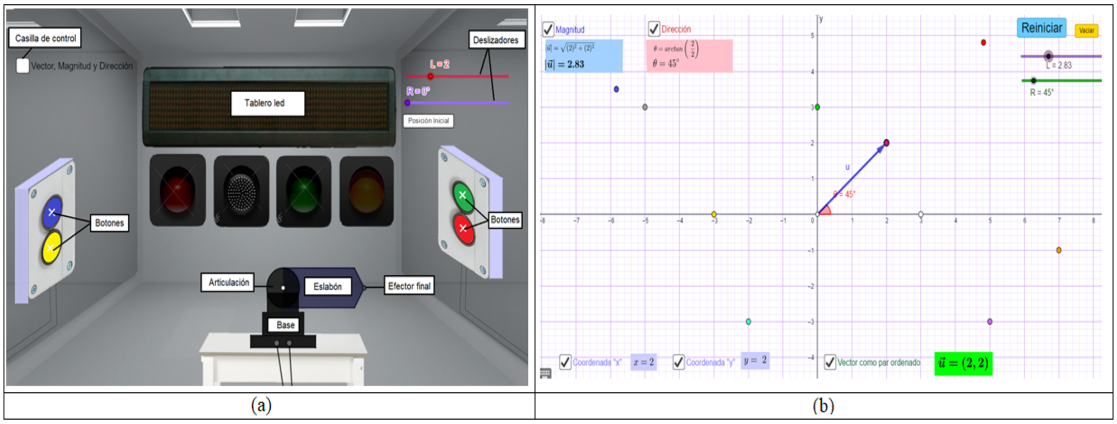


Figura 18. (a) EDVI "Brazo Robótico" (b) EDVI "Par ordenado"

Para la segunda actividad se diseñó el EDVI denominado "Par ordenado" que se puede ver en la Figura 1(b). En este EDVI se utilizan algunas de las representaciones mostradas por Hillel (2000) para presentar diversos registros de representación del vector como señala el quinto principio del marco didáctico. Así, el vector aparece como una flecha dentro de un espacio bidimensional que parte del origen dispuesto sobre el plano cartesiano de la vista gráfica de GeoGebra, cuya magnitud y dirección puede modificarse usando los deslizadores; como un punto en el plano unido a la punta de la flecha, y, al activar una casilla de control, aparece en su representación algebraica como una pareja de números ordenados. Además, el escenario cuenta con casillas de control que permite al estudiante observar el valor de las coordenadas (x, y) en las que se encuentra la punta del vector y las fórmulas usadas para calcular su magnitud y dirección.

Los ejercicios de operación inversa propuestos en esta segunda actividad permiten al estudiante transitar de un registro de representación semiótica a otro. Por ejemplo, se pide a los estudiantes que utilicen los deslizadores para asignar cierta magnitud y dirección al vector mostrado como flecha (registro geométrico), posteriormente que activen las casillas de control que hacen visibles las coordenadas (x, y) en las que se encuentra ubicada la punta del vector y finalmente, que elijan la expresión correspondiente al vector como pareja de números ordenados (registro algebraico). De manera inversa, se proporciona al estudiante un vector como pareja de números ordenados (registro algebraico) y se le solicita que utilice la herramienta "vector" de GeoGebra para dibujar el vector en el plano (registro geométrico) y obtener el valor de su magnitud y dirección (registro aritmético).

Resultados

La Figura 2 muestra la cantidad de aciertos y fallos en los ítems del pretest. Las resultados establecen que los estudiantes saben graficar puntos en el plano dadas sus coordenadas (ítem 1), sin embargo, el 42.8% tiene problemas para graficar una figura dadas las coordenadas de sus vértices (ítem 7), reflejando problemas en la ubicación de coordenadas con valores negativos; el 85.7% de los estudiantes dibujan rectas a 45° sobre el plano partiendo del origen (ítem 4), por el contrario, solo el 42.8% dibuja rectas a 90° tomando como referencia el origen (ítem 5); el 85.7% sabe cómo usar el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa de un triángulo (ítem 6), no obstante, solo el 42.8% emplea dicho teorema para calcular la distancia entre dos puntos (ítem 8). Como se puede observar, los estudiantes cometieron más errores en los temas de los ítems 5,7 y 8.

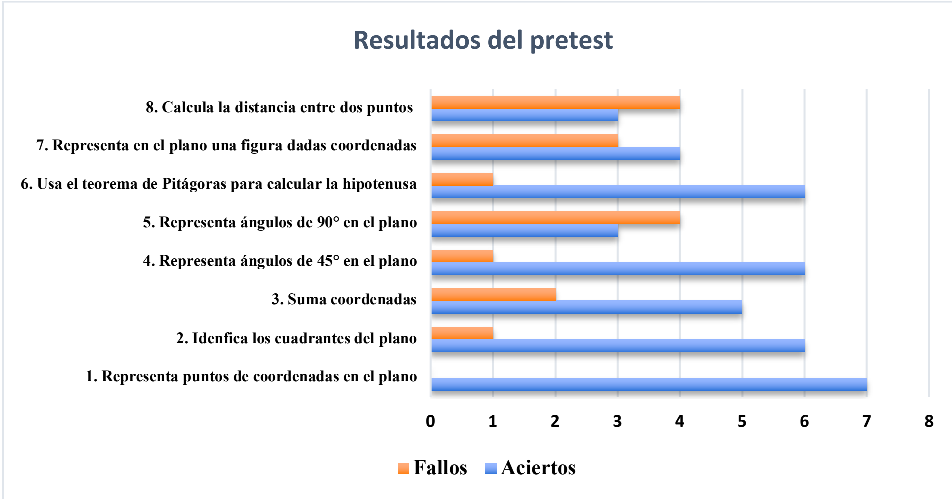


Figura 19. Aciertos y fallos de los estudiantes en el pretest

En la Figura 3 presentamos las respuestas de dos estudiantes a los ítems 7 y 8 del pretest. En el ítem 8 los estudiantes tenían que calcular la longitud de la diagonal de la figura graficada en el ítem 7, y se esperaba que resolvieran el problema con la misma estrategia utilizada en el ejercicio del ítem 6, sin embargo, Andy emplea la fórmula del área del triángulo para dar solución al ítem 8, calculando en realidad el área de la mitad del rectángulo dibujado en el ítem7 y no la diagonal solicitada, mientras que en el ítem 6 ha usado el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa de un triángulo; a diferencia de Ángel, quién emplea el teorema de Pitágoras para resolver los ejercicios del ítem 6 y 8.

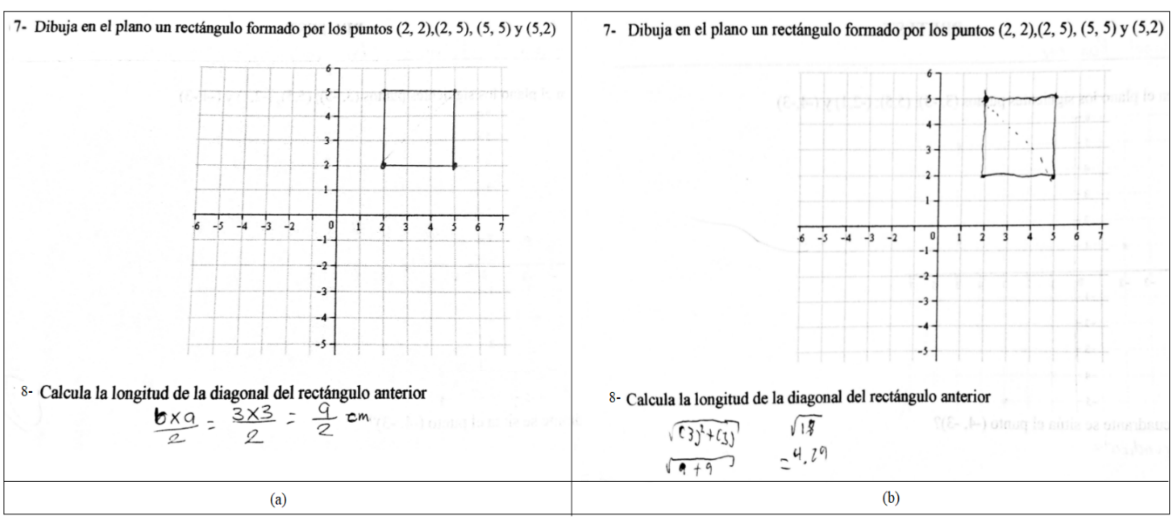


Figura 20. Respuestas de ítems 7 y 8 en pretest de Andy (a) y Ángel (b)

La Figura 4 muestra al grupo de estudiantes interactuando con los EDVI. Para los resultados que se presentan en esta sección se eligieron preguntas que permiten observar la percepción que tienen los estudiantes sobre ciertos conceptos y preguntas que muestran sus dificultades y errores cometidos.

Figura 21. Estudiantes voluntarios interactuando con los EDVI

En la primera actividad, se puso en el cuestionario la pregunta mostrada en la Figura 5. El objetivo de esta pregunta era conocer la percepción del estudiante sobre el concepto de vector en relación con la vida real y en la cual, tenía que asociar el vector con un elemento del brazo robótico. Para el caso (a), observamos que Andy relaciona al vector con la base del mecanismo, elemento que permanece fijo y mediante su articulación permite el cambio de posición del eslabón, o, el cambio de dirección del vector, sin embargo, este elemento no posé una magnitud, una dirección y un sentido, lo que indica que Andy no está asociando las propiedades del vector con el movimiento y longitud del eslabón del brazo. Para el caso (b) se puede observar que Ángel y Beto relacionan al vector con el efector final del brazo robótico (representado gráficamente como un punto) y, por lo tanto, podemos deducir que están viendo al vector como una flecha que representa la posición de un punto en el espacio.

(a)	De acuerdo con lo observado. ¿Qué elemento del brazo robótico crees que podría representarse mediante un vector? [X] Base [ ] Articulación [ ] Eslabón [ ] Efector final
(b)	De acuerdo con lo observado. ¿Qué elemento del brazo robótico crees que podría representarse mediante un vector? [ ] Base [ ] Articulación [ ] Eslabón [X] Efector final

Figura 22. Respuesta de Andy (a) y de Ángel y Beto (b) a relación del vector con elemento del brazo robótico

En la segunda actividad, uno de los ejercicios que el estudiante tenía que resolver era deducir la expresión del vector como par ordenado de números al observar su representación gráfica. Como se muestra en la Figura 6, Ángel y Beto seleccionan una expresión correcta del vector, sin embargo, cuando se les pregunta sobre la magnitud y dirección de dicho vector, no realizan cálculos, eligen el valor de la magnitud y dirección basándose únicamente en la expresión seleccionada del vector como par ordenado.

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones representa a ese vector como par ordenado?
[X] $\vec{u} = (4.81, 4.81)$
[ ] $u = (4.81, 4.81)$
[ ] $\vec{u} = (0, 4.81)$
[ ] $\vec{u} = (4.81, 0)$

d) ¿Cuál es la magnitud y dirección del vector en ese punto?
[X] $|\vec{u}| = 4.8$ y $\theta = 45°$
[ ] $|\vec{u}| = 5.8$ y $\theta = 90°$
[ ] $|\vec{u}| = 6.8$ y $\theta = 45°$
[ ] $|\vec{u}| = 3.8$ y $\theta = 90°$

Figura 23. Respuesta de Ángel y Beto para expresión de vector como par ordenado

Los resultados de esta actividad muestran que, aunque los estudiantes tienen problemas para graficar rectas a 45° o 90° partiendo del origen, si hacen una relación entre el cuadrante en el que se encuentra el vector y el valor de su dirección, tal y como señalan las respuestas de Andy, Ángel y Beto de la Figura 7.

i) ¿Por qué la fórmula para calcular la dirección de este vector es diferente a la fórmula usada para calcular la dirección del vector ubicado sobre el punto rosa? Porque se tienen que restar los angulos ya que se inicia desde el cuadrante I	(a)
i) ¿Por qué la fórmula para calcular la dirección de este vector es diferente a la fórmula usada para calcular la dirección del vector ubicado sobre el punto rosa? Porque se encuentra en un diferente cuadrante	(b)

Figura 24. Respuestas de pregunta en actividad de EDVI "Par ordenado" (a) Ángel y Beto (b)Andy

Conclusiones

Para dotar de un significado al concepto de vector, iniciamos con una situación didáctica contextualizando el concepto de vector, dentro de un problema de brazo robótico, usual dentro de las carreras de ingeniería con especialidad en electrónica. Para ello realizamos un EDVI que plantea el escenario de un brazo robótico en una situación "real" y en un segundo escenario se sitúa al vector dentro de un sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$. En este EDVI se muestra al vector como una flecha que parte del origen y al hacer clic sobre una casilla de control, el estudiante puede observar al vector como una pareja de números ordenados.

Con estas actividades se pretende introducir el complejo concepto de vector, partiendo de un problema real donde se puede observar al vector como una flecha en un sistema libre de coordenadas, hasta llegar a su representación como pareja de números ordenados, en la idea de que este proceso ayude a desarrollar el pensamiento analítico de los estudiantes para facilitar el tránsito de la representación de vector aprendida en los cursos elementales de física hasta su representación abstracta como elemento de un espacio vectorial en los cursos de álgebra lineal. Algunas de las propiedades del vector quedan evidenciadas a partir de propiedades del brazo robótico, de tal forma que propiedades como magnitud y dirección no serían abstractas para los estudiantes, cuando se definan en su representación como flechas.

Los datos preliminares muestran que alumnos como Andy, Ángel y Beto lograron apropiarse/vincular del concepto de vector en $\mathbb{R}^2$ como: "una flecha en un sistema libre de coordenadas, como una flecha que representa puntos en el plano y como un par ordenado (x, y)", sin embargo, algunos de los estudiantes presentan dificultades para calcular la magnitud y dirección de un vector y para relacionar este concepto con la vida real.

Los EDVI y la secuencia de actividades que se les proporcionó a los estudiantes en una primera experiencia, nos proporcionaron la base para realizar un rediseño para experiencias posteriores, por ejemplo, los datos obtenidos en el pretest muestran que los estudiantes tienen deficiencias al calcular la longitud entre dos puntos por lo que en las actividades se debe hacer énfasis en subproblemas que guíen al estudiante en la construcción de la noción de magnitud y dirección del vector, así como el cálculo de sus valores.

Referencias bibliográficas

Anton, H. (1986). *Introducción al álgebra lineal*. México: Editorial Limusa.

Cuevas, C. A., & Pluvinage, F. (2003). Les projets D' Action pratiqué éléments D'Une Ingénierie D' enseignement des mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *8*, 273–293.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 3–81). Springer Netherlands.

Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (1998). *Física. Volumen I: Mecánica, radiación y calor*. México: Addison Wesley Iberoamericana S.A.

Grossman, S. I., & Flores, J. J. (2012). *Álgebra Lineal*. México: McGrawl-Hill.

Gueudet, G. (2006). Using Geometry to teach and learn Linear Algebra. *Research in Collegiate Mathematics Education*, (6), 171–195. https://doi.org/10.1090/cbmath/013/06

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 177–189). Springer Netherlands.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 191–207). Springer Netherlands.

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2016). Learning algebra on screen and on paper: The effect of using a digital tool on students' understanding. *Proceeding of International Seminar on Mathematics, Science, and Computer Science Education*, *1708*(060002), 1–5.

Madrid, H. (1981). *Quisicosas Vectoriales*. *Enseñanza de la matemática*. Facultad de Ciencias, UNAM.

Masters, R. (2000). *The effect of students' physics background on their understanding of linear algebra*. Montréal: Concordia University Library.

NCTM. (2008). The Role of Technology in the Teaching and Learning of Mathematics. A position of the National Teachers of Mathematics.Recuperado el 14 de marzo de 2019 de: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=14233

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4–II), 373–385.

Resnick, R., Halliday, D., & Krane, K. S. (2001). *Física Vol.1*. México: Compañía Editorial Continental.

Rodríguez, L. M. (2014). Uso de la Tecnología en la Enseñanza de la Matemática. *Edu@tecnología*, 6–7.

Santos, L. M. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 195–211.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). https://doi.org/10.1094/AACCIntM

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches En Didactique Des Mathematiques*, *19*(1), 7–40.

ABANDONO ESTUDIANTIL EN CARRERAS DE INGENIERÍA: INFLUENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

STUDENT DROPOUT OF ENGINEERING DEGREES: THE INFLUENCE OF MATHEMATICS

Esther Ansola Hazday, Eugenio Carlos Rodríguez
Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, CUJAE. La Habana (Cuba)
esther@ind.cujae.edu.cu, ecarlos@tesla.cujae.edu.cu

Resumen
Este trabajo muestra los resultados de una investigación realizada en la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, Cujae. La investigación se propone como objetivos determinar si la Matemática está influyendo en el abandono por insuficiencia académica, y al mismo tiempo estudiar qué factores determinan esta influencia y cómo incidir sobre ellos para reducir su impacto. Se aplicaron métodos empíricos cuantitativos y de la estadística, sustentado todo en la integración teórica del Enfoque Histórico–Cultural de Vygotsky y de la Didáctica Desarrolladora de Zilberstein.

Palabras clave: abandono, índice de abandono, insuficiencia académica, incidencia de la Matemática.

Abstract
This paper shows the results of a research carried out at “José Antonio Echevarría” Technological University of Havana (CUJAE). The research is intended to determine if Mathematics is causing that students drop out university due to academic failure, and at the same time, to examine which factors determine this influence, and how to approach them to reduce their impact. Quantitative and statistical empirical methods were applied; all based on the theoretical integration of Vygotsky’s Cultural-Historical Approach and the Developing Didactics of Zilberstein.

Key words: dropout, rate of dropout, academic failure, mathematics effect

Introducción

Un hecho que se ha generalizado en los estudios superiores de la mayoría de los paíseses el alto grado de abandono de los estudios universitarios. Hecho que se demostró en los resultados que se obtuvieron al concluir el Proyecto Gestión Universitaria Integral del Abandono (GUIA) (Proyecto, 2014), estos resultados muestran que en algunos países la tasa de abandono está alrededor del 40%, además que una de las causas más importantes es el fracaso académico. Investigaciones en este campo muestran que una influencia importante han sido los resultados en las asignaturas de Matemática (Arriaga, Burillo, Carpeño y Casaravilla, 2011; Portales, Estay y Cabezas, 2015; Argote, Hernández y Martínez, 2014; Mendoza, 2013).

Numerosos resultados de investigación presentados en algunas Reuniones Latinoamericanas de Matemática Educativa, Relme, muestran que las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas es una de las causas del fracaso escolar (Andrade, 2011; Prado, 2005; Recillas, Velázquez y Rodríguez, 2016; Reyes y Crespo, 2011).Este trabajo muestra los resultados de una investigación realizada en la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría, Cujae,teniendo en cuenta el alto por ciento de abandono estudiantil en los primeros años de las carreras de ingeniería. En él se da respuesta a las preguntas siguientes: ¿está influyendo la Matemática en el abandono por insuficiencia académica?, ¿qué factores determinan esta influencia?, ¿cómo incidir sobre ellos para reducir su influencia? Estas preguntas determinaron las etapas en que se dividió la investigación. La investigación se plantea como objetivo mejorar las expectativas de éxito académico en las materias de Matemática y así reducir los índices de abandono debido al fracaso en estas materias, determinando la influencia de las mismas en el índice de abandono por insuficiencia académica, las causas que lo provocan y las posibles soluciones.

Marco teórico

El sustento teórico de la investigación está en el enfoque histórico –cultural y en la zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1979), así como en los referentes teóricos de la Didáctica Desarrolladora (Zilberstein, 2006 y Zilberstein y Portela, 2002). En las soluciones al problema se debe generaruna interacción entre el docente y el estudiante, poniendo en práctica el carácter social del aprendizaje (Vygotsky, 1979). Centrando la atención en la interrelación entre el docente y el estudiante en el que debe formarse un pensamiento reflexivo y creativo (Zilberstein y Olmedo, 2015).

Método

En la primera etapa de la investigación, dando respuesta al primer objetivo, determinar si la Matemática está influyendo en el abandono por insuficiencia académica, se aplicaron métodos cuantitativos (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006) para probar la hipótesis planteada con base en la medición numérica. En la segunda etapa, y final, dando respuesta a los restantes objetivos, se utilizaron métodos estadísticos, se consideraron dos de las carreras con mayor incidencia en el estudio realizado, y se tomó una muestra de estudiantes para aplicarle una encuesta que indagaba sobre los factores que incidieron en la reprobación de la Matemática. La encuesta aplicada fue validada y la muestra responde a los métodos clásicos para definir los participantes, a los cuales se habrán de recolectar los datos, así como para determinar el tamaño adecuado de una muestra (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006).

Resultados

En la primera etapa de la investigación se analizaron las bajas de cuatro períodos académicos [2013-2014, 2014-2015, 2015-2016 y 2016-2017] específicamente las que ocurrieron por insuficiencia académica para las trece carreras de la universidad, a saber, las carreras de Ingeniería Informática, Industrial, Civil, Eléctrica, en Automática, en Telecomunicaciones y Electrónica, Hidráulica, Geofísica, Mecánica, Metalurgia y Materiales, Química, Biomédica y la carrera de Arquitectura. Se estudió el 100% de las bajas por los que los resultados son confiables.

Del estudio se obtuvo información sobre los estudiantes que abandonaron la carrera teniendo al menos una asignatura de Matemática desaprobada. Se pudo observarque en más del 61% de las bajas por insuficiencia académica, los estudiantes tienen al menos una asignatura de Matemática desaprobada.

En la Figura 1 se muestra el por ciento de bajas de estudiantes que al menos desaprobaron una asignatura de Matemática, con respecto al total de bajas por insuficiencia académica, por carrera y curso académico.

A partir de esta información se analizó la influencia de cada asignatura en el porciento total así como las combinaciones de estas asignaturas con mayor incidencia. Se puede apreciar que el mayor por ciento se alcanza con la combinación de dos asignaturas desaprobadas, con un 35,59%. Lo anterior se aprecia gráficamente en la Figura 2.

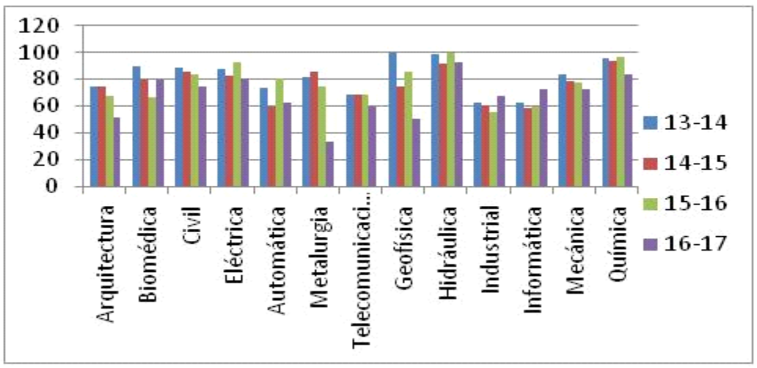


Figura 1. Porciento de estudiantes con al menos una asignatura de Matemática desaprobada, en los cuatro cursos analizados, con respecto al total de bajas por insuficiencia académica.

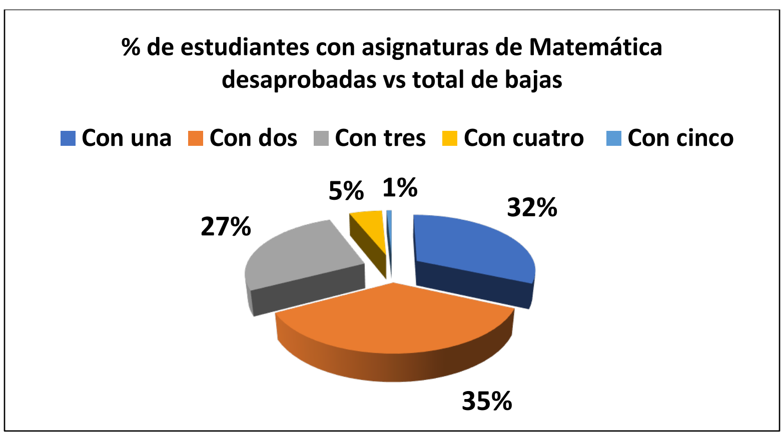


Figura 2. Por ciento de estudiantes con una o más asignaturas desaprobadas con respecto al total de bajas con al menos una asignatura desaprobada.

La segunda etapa

Una vez conocidos estos resultados, con el objetivo de dar respuesta a las siguientes preguntas formuladas en la investigación, teniendo en cuenta que se aplicaría una encuesta a los estudiantes que formaban parte de la investigación y dado el gran volumen de información que habría de analizarse, se consideró seleccionar dos de las carreras con mayor número de estudiantes incluidos en este grupo y que además sus resultados eran similares en los cuatro períodos académicos analizados: Ingeniería Eléctrica e Ingeniería Mecánica, y se utilizó solamente la información del curso 2016-2017, determinándose una muestra del total de estudiantes para ser encuestados.

De un total de 73 estudiantes, se tomó una muestra de 53, lo que garantizó un 98% de probabilidad de certeza en los resultados del instrumento aplicado. El instrumento consistió en una encuesta de preguntas cerradas.

¿Por qué preguntas cerradas y no abiertas? Como se plantea en Hernández, Fernández-Collado y Baptista, "Las preguntas cerradas contienen categorías u opciones de respuesta que han sido previamente delimitadas. Es decir, se presentan a los participantes las posibilidades de respuesta, quienes deben acotarse a estas" (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006, p 310).

Más adelante los mismos autores plantean:

> Las preguntas cerradas son más fáciles de codificar y preparar para su análisis. Asimismo, estas preguntas requieren un menor esfuerzo por parte de los encuestados. Estos no tienen que escribir o verbalizar pensamientos, sino únicamente seleccionar la alternativa que sintetice mejor su respuesta (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006, p 315).

La encuesta aplicada fue validada por un grupo de expertos mediante el Método Delphy, considerando que esta técnica ofrece un alto nivel de interacciónentre los expertos, evitando las desventajas de la dinámica grupal (Hurtado, s.f., Escobar y Cuervo, 2008).

La encuesta, en lo fundamental, recogió aspectos relacionados con: contexto social y familiar, dedicación al estudio, profesores de Matemática y clases de Matemática.

A continuación, se relacionan algunas de las preguntas contenidas en la encuesta, simplificadas para mostrarlas en este trabajo:

- Al ingresar a la universidad procedía de: Preuniversitario, Técnico Medio, Orden 18, Facultad Obrera u Otro
- Al momento de abandonar sus estudios estaba participando activamente en grupos de carácter (puede señalar varias opciones): Político (activista o dirigente de la FEU o UJC), Académico (grupo de investigación, Grupos Estudiantiles de Trabajo Científico), Cultural (grupos de aficionados, Proyectos Socioculturales o Proyectos Comunitarios), Deportivo o No estaba participando activamente en algún grupo.
- ¿Antes de su ingreso a la universidad recibió orientación vocacional?
- La elección de la carrera obedeció a: Interés personal, Interés por el mercado laboral, Tradición familiar, Orientación vocacional o Embullo.
- ¿Considera que su salud era buena al momento de abandonar?
- ¿Al momento de abandonar sus estudios presentó problemas económicos que afectaron su permanencia en la universidad?

  - Durante su permanencia en la universidad, consideró que: El tiempo dedicado al estudio fue suficiente o insuficiente.
  - Su nivel de concentración en el estudio fue suficiente o insuficiente.
  - Las técnicas de estudio que empleó para responder a las exigencias académicas fue suficiente o insuficiente.
- En las clases prácticas de Matemática:
  - Usted resolvía los ejercicios antes de verlos en la pizarra
  - Los estudiantes resolvían los ejercicios antes de verlos en la pizarra
  - Usted no resolvía los ejercicios y los copiaba de la pizarra resueltos por el profesor.
  - Los estudiantes no resolvían los ejercicios y los copiaban de la pizarra resueltos por el profesor.
  - Usted entendía al profesor cuando impartía las clases.
  - Los estudiantes entendían al profesor cuando impartía las clases
- ¿La cantidad de clases de Matemática fueron suficientes para los contenidos que se impartieron?
- Durante el último año de su permanencia en la universidad:
  - Experimentó la pérdida por muerte del padre, la madre u otro familiar cercano
  - Experimentó sentimientos de depresión en forma recurrente
  - Experimentó sentimientos de preocupación en forma recurrente
  - ¿Tuvo cambios en su estado civil
  - ¿Tuvo hijos?
  - ¿Cambió las personas con las que convivía (padres o familiares)?
  - ¿Sufrió la separación o abandono de sus padres?
  - ¿Se insertó en el mercado laboral?
- ¿Al momento de abandonar sus estudios su contexto familiar favorecía o facilitaba los hábitos de estudio adecuados?

El análisis de las encuestas arrojó que en la generalidad de los casos no se presentaban problemas sociales, personales o familiares que incidieran en el abandono de las aulas universitarias, lo que se muestra a continuación en algunos resultados obtenidos.

Algunos de los resultados del entorno social obtenidos se muestran en las Figuras 3, 4, 5 y 6.

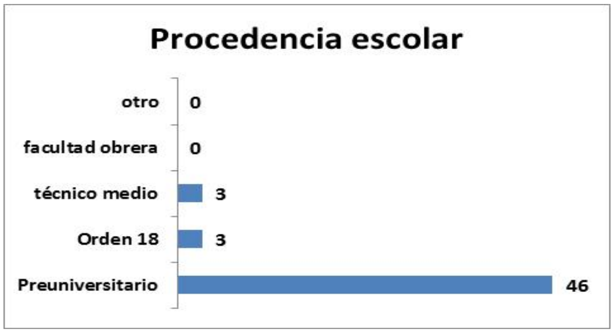


Figura 3. Procedencia escolar de los encuestados

Figura 4. Participación en grupos estudiantiles de los encuestados

Figura 5. Estado de salud de los encuestados en el momento de abandonar la universidad.

Figura 6. Situación económica de los encuestados al abandonar los estudios.

Otros datos de interés tienen que ver con la elección de la carrera y la orientación vocacional recibida antes del ingreso a la universidad. Solo el 40% informó que recibió orientación vocacional. Lo expuesto anteriormente y los resultados mostrados en la tabla 1, indican que estos aspectos no incide el abandono de los estudios universitarios.

Tabla 1. Motivaciones para la elección de la carrera en los encuestados

Motivaciones	%
Interés personal	46
Tradición familiar	12
Orientación vocacional	12
Embullo	8
Interés por el mercado laboral	4
Asignación	4

Algunos resultados importantes son los siguientes: los encuestados señalan que, durante su permanencia en la universidad, el tiempo dedicado al estudio, las técnicas de estudio empleadas y el nivel de concentración en el estudio fueron insuficientes (Figura 7).

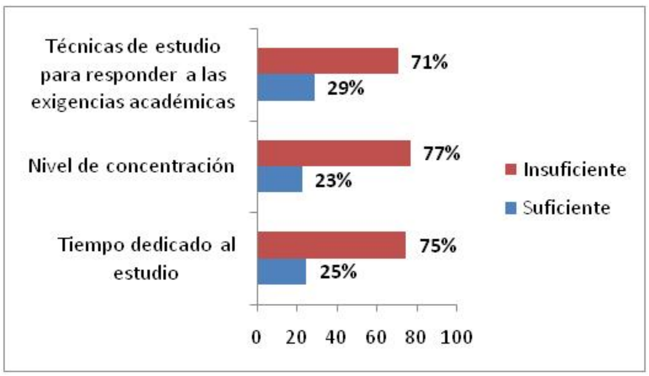


Figura 7. Resultados de las encuestas relacionados con el tiempo dedicado al estudio, nivel de concentración y técnicas de estudio.

Otro resultado importante arroja que un 63% de los encuestados expresa que la cantidad de clases de Matemática no fueron suficientes para los contenidos que se impartieron y un 68% apunta necesitar más actividades prácticas.

En la Figura 8 se observa que a pesar de que los estudiantes opinan que sus profesores tienen calidad (68% entre buena y muy buena), solo el 33% planteó que la comunicación entre el estudiante y el profesor era muy buena o buena. Otro resultado de la encuesta reveló que el 51% opina que no entendía a los profesores.

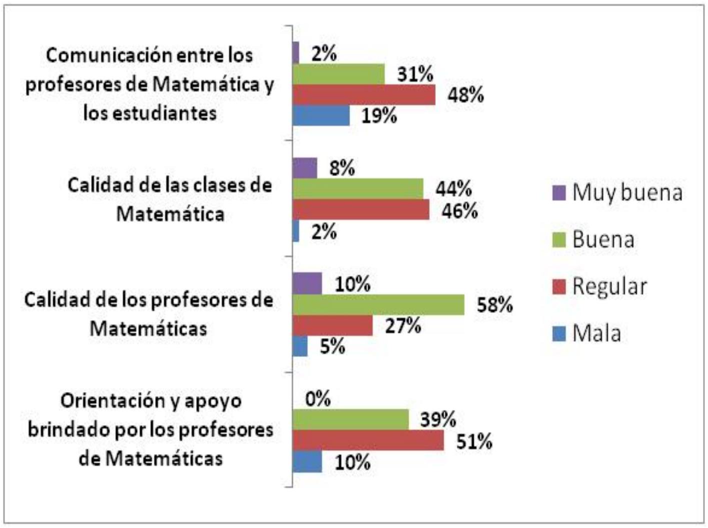


Figura 8. Valoración de los encuestados sobre los profesores y las clases de Matemática.

Es evidente que las causas fundamentales del abandono por la influencia de las Matemáticas radican en:

- Tiempo dedicado al estudio,
- Técnicas incorrectas de estudio,
- Nivel de concentración en el estudio,
- Incorrecta distribución entre clases teóricas y clases prácticas y
- Problemas de comunicación alumno-profesor.

¿Cómo incidir sobre estos factores para reducir su influencia en el abandono?

En el análisis de cómo incidir sobre los factores que influyen en el índice de abandono debido a las Matemáticas, para reducir su impacto, se tienen en cuenta los aspectos teóricos que sustentan la investigación.

Las propuestas para incidir sobre estos indicadores para mejorar las expectativas de éxito académico en las materias de Matemática y así reducir los índices de abandono debido al fracaso en estas materias, están relacionadas con incentivar técnicas de enseñanza aprendizaje que centren la atención en la interrelación entre el docente y el estudiante, en el que debe formarse un pensamiento reflexivo y creativo, mejorando hábitos y técnicas de estudio (Zilberstein, 2006 y Zilberstein y Portela, 2002). En las soluciones al problema se debe generar una interacción entre el docente y el estudiante, poniendo en práctica el carácter social del aprendizaje (Vygotsky, 1979). Centrando la atención en la interrelación entre el docente y el estudiante en el que debe formarse un pensamiento reflexivo y creativo (Zilberstein y Olmedo, 2015). Además, proponer un rediseño de los programas de las asignaturas de Matemática, incrementando las actividades prácticas, que incentiven la participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje.

El uso de técnicas de enseñanza aprendizaje que centren la atención en la interrelación entre el docente y el estudiante y que incentiven la participación de los estudiantes en el proceso de enseñanza aprendizaje requiere de un conjunto de exigencias (Silvestre y Rico, 2002), a saber:

1. *Diagnóstico de la preparación y desarrollo del alumno.*

El diagnóstico permite orientar de forma eficiente, en función de los objetivos propuestos, las acciones del maestro al concebir y organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje y dar atención a las diferencias individuales del alumno; de ahí, que violar este requerimiento conduce a desarrollar el proceso sin elementos objetivos, "a ciegas", convirtiéndose en una de las causas que incide en su calidad (Silvestre y Rico, 2002, p.71).

2. *Protagonismo del alumno en los distintos momentos de la actividad de aprendizaje.*

Lograr una posición activa requiere que la participación del alumno haya implicado un esfuerzo intelectual que demande orientarse en la tarea, reflexionar, valorar, suponer, llegar a conclusiones, argumentar, utilizar el conocimiento, generando nuevas estrategias, entre otras acciones (Silvestre y Rico, 2002, p.72).

3. *Organización y dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje.*

Las exigencias planteadas acerca de un elevado protagonismo del alumno en el proceso precisan de una concepción diferente, en cuanto al papel a asumir por el educador en su organización y dirección. Precisamente en esta dirección que deberá realizarse la principal renovación metodológica, pues aún persiste en nuestras aulas una actividad centrada en el maestro, manteniéndose la del alumno en un plano muy reproductivo (Silvestre y Rico, 2002, p.75).

4. *Concepción y formulación de la tarea*

La remodelación del proceso de enseñanza aprendizaje precisa, además de lo señalado, de un cambio esencial en la concepción y formulación de la tarea, porque es en la tarea donde se concretan las acciones y operaciones a realizar por el alumno (Silvestre y Rico, 2002, p.78).

Para lograr esto se requiere introducir cambios importantes en el proceso de enseñanza aprendizaje, se requiere innovar, como se expresa en (Addine, 2007):

> ¿Cómo definir innovación didáctica?
> Cambios novedosos en uno de los componentes del proceso de enseñanza aprendizaje que aportan nuevas formas de conocimiento, cambios originales en cualquiera de sus partes que en consecuencia traen aparejados la optimización en el logro de los objetivos, el perfeccionamiento de su dirección (Addine, 2007, p. 20).

Las transformaciones anteriores, han sido propuestas y serán analizadas por los docentes de Matemática y los responsables del proceso en la universidad. Estas acciones, que incluyen el rediseño de los programas de las asignaturas de Matemática, incrementando las actividades prácticas, requieren de un arduo trabajo metodológico por parte de los docentes de Matemática.

Conclusiones

Los resultados alcanzados en la primera etapa de la investigación muestran que las asignaturas de Matemática influyen notablemente en los índices de abandono por insuficiencia docente. En la segunda etapa se determinaron factores que inciden de manera importante en estos resultados y se proponen acciones para mejorar las expectativas de éxito académico en las materias de Matemática y así reducir los índices de abandono debido al fracaso en estas materias. Las transformaciones que se proponen requieren de un arduo trabajo metodológico por parte de los docentes de Matemática.

Referencias bibliográficas

Addine, F. (2007). ¡Didáctica! ¿Qué Didáctica? En F. Addine, S. Recarey, M. Fuxá y S. Fernández (Eds.), Didáctica: Teoría y Práctica (pp. 1-24). La Habana: Pueblo y Educación.

Andrade, C. (2011). Obstáculos didácticos en el aprendizaje de la Matemática y la formación de docentes. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 999-1007. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Argote, I., Hernández, G. y Martínez, A. (2014). Matemáticas para la ingeniería de sistemas. *IV Conferencia Latinoamericana sobre el Abandono en la Enseñanza Superior (IV CLABES).* Recuperado el 15 de marzo de 2018 de http://www.alfaguia.org/www-alfa/index.php/es/claves-alfaguia.org/claves-2014.

Arriaga, J., Burillo, V., Carpeño, A. y Casaravilla, A. (2011). Caracterización de los tipos de abandono. Dividamos el problema y venceremos más fácilmente. I Conferencia Latinoamericana sobre el Abandono en la Enseñanza Superior (I CLABES). Recuperado el 15 de marzo de 2018 de http://www.alfaguia.org/www-alfa/index.php/es/claves-alfaguia.org/claves-2011.

Escobar, J. y Cuervo, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Revista Avances en Medición 6(1),* 27–36.

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación (Cuarta edición).* México, D: F. McGraw-Hill Interamericana.

Hurtado, S. (s.f). *Criterio de expertos. Su procesamiento a través del método Delphy.* Recuperado el 20 de junio de 2019 de http://www.ub.edu/histodidactica/index.php?option=com_content&view=article&id=21:criterio-de-expertos-su-procesamiento-a-traves-del-metodo-delphy&catid=11&Itemid=103

Mendoza, J. B. (2013). Estudio cualitativo de abandono escolar en el área de las ciencias físico-matemáticas y de las ingenierías de la UNAM (Universidad Nacional Autónoma de México). *III Conferencia Latinoamericana sobre el Abandono en la Enseñanza Superior (III CLABES)*. Recuperado el 15 de marzo de 2018 de http://www.alfaguia.org/www-alfa/index.php/es/claves-alfaguia.org/claves-2013.

Portales, S., Estay, G. y Cabezas, M. (2015). Nivelación académica en Matemática: ¿un factor que aporta a la disminución del abandono? *V Conferencia Latinoamericana sobre el Abandono en la Enseñanza Superior (V CLABES)*. Recuperado el 15 de marzo de 2018 de http://www.alfaguia.org/www-alfa/index.php/es/claves-alfaguia.org/claves-2015.

Prado C. (2005). Plan Estratégico para Mejorar la Eficiencia Terminal en Cursos de Matemáticas.En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18,* 169-175. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Proyecto ALFA-III. (2014). *Gestión Universitaria Integral del Abandono*. Recuperado de http://www.alfaguia.org/www-alfa/index.php/es/.

Recillas G., Velázquez M., Rodríguez M. (2016). Perfil del tutor una estrategia en matemáticas para abatir reprobación y deserción en bachillerato. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 29,* 464-472. México: México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Reyes, D. y Crespo, C. (2011). Un estudio acerca del fenómeno de exclusión a nivel superior en la carrera de profesorado de matemática. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24,* 897-904. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Silvestre, M. y Rico, P. (2002). Proceso de enseñanza aprendizaje. En ICCP (Ed.), *Compendio de Pedagogía* (pp. 68-79). La Habana.

Vygotsky, L. S. (1979). El desarrollo de los procesos psíquicos superiores. Barcelona, España: Edición crítica.

Zilberstein, J. (2006). Categorías de una Didáctica Desarrolladora. Posición desde el enfoque Histórico-Cultural. En Colectivo de Autores. *Preparación Pedagógica Integral para Profesores Integrales,* pp. 33-43. La Habana: Editorial Félix Varela.

Zilberstein, J. y Olmedo, S. (2015) Didáctica desarrolladora: posición desde el enfoque Histórico Cultural. En Educação e FilosofiaUberlândia 29, n. 58, 61-93. Uberlandia, Brasil: Editora da Universidade Federal de Uberlândia.

Zilberstein, J. y Portela, R. (2002). *Una Concepción Desarrolladora de la Motivación y el Aprendizaje de las Ciencias*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

UNA METODOLOGÍA PARA EL DISEÑO DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

METHODOLOGY FOR DESIGNING DIDACTIC SEQUENCES FOR MATHEMATICAL EDUCATION

Jamil Fabiola Alvarado Sánchez, José Luis Soto Munguía
Universidad de Sonora (México)
jamilalvarados@gmail.com, jlsoto@mat.uson.mx

Resumen

En este trabajo se presentan los avances de una propuesta didáctica, la cual consiste en una metodología dirigida a docentes de matemáticas de nivel secundaria, que permite diseñar secuencias didácticas; esta metodología fue elaborada con base en la articulación de: la estructura didáctica de Díaz- Barriga, el método de enseñanza ACODESA de Hitt y los desarrollos curriculares de Taba. La metodología se ha puesto a prueba con un grupo de 11 docentes en un curso-taller de 40 horas, los resultados obtenidos fueron tres secuencias didácticas elaboradas por tres equipos de docentes en un contexto tecnológico (usando GeoGebra), donde se percibe que es posible realizar diseños aplicando esta metodología, sin embargo, presentan algunas dificultades durante el proceso de articulación con la tecnología.

Palabras clave: metodología, secuencia didáctica, geogebra, diseño

Abstract

In this paper we present the advances of a didactic proposal that consists of a methodology addressed to secondary school mathematics teachers, which allows teachers to design didactic sequences. This methodology was elaborated based on the connection of: Diaz-Barriga's didactic structure, Hitt's ACODESA teaching method, and Taba's curricular developments. The methodology was tested with a group of 11 teachers in a 40-hour- workshop-course. The results showed three didactic sequences prepared by three teams of teachers in a technological environment (using GeoGebra), where it is perceived that it is possible to design sequences by applying this methodology, however, they present some difficulties during the process of connection with technology.

Key words: methodology, didactic sequence, GeoGebra, design

Introducción

Dentro de los planteamientos que señala el currículo de educación básica en México, se encuentra la importancia de que el docente se involucre en el diseño de actividades o secuencias didácticas, como parte de su práctica; esto con el propósito de establecer una enseñanza de la matemática más completa y significativa para el alumno, sin embargo, esta tarea puede resultar complicada para el docente, puesto que sus condiciones laborales y las practicas docentes predominantes han limitado su práctica a la reproducción de actividades de los libros de texto, alejándolos del diseño y la planeación de la enseñanza.

Un análisis cuidadoso nos muestra que los planes y programas de estudio no proporcionan las orientaciones suficientes para que el docente pueda diseñar actividades de enseñanza. Se explica así la escasa producción de secuencias didácticas diseñadas por los docentes. En el plan de estudios (SEP, 2011) se insiste en el uso de las tecnologías digitales en los salones de clase, pero contradictoriamente, ninguno de los diseños mostrados como ejemplo utilizan tales tecnologías.

Tomando en cuenta la ausencia de recomendaciones metodológicas específicas para el diseño de secuencias didácticas matemáticas nuestro objetivo es estructurar y valorar una propuesta metodológica que permita a los docentes de matemáticas diseñar secuencias didácticas con el apoyo del software GeoGebra, teniendo como objetivos específicos, los siguientes:

1. Establecer una estructura didáctica para el diseño de las secuencias.
2. Caracterizar el tipo de situaciones problema que serán el punto de partida para cada secuencia.
3. Determinar el papel que jugará GeoGebra dentro del diseño de secuencias didácticas.
4. Elaborar la metodología y experimentarla diseñando secuencias didácticas.
5. Estructurar un curso-taller dirigido a docentes de matemáticas para valorar la metodología.

Se realizó una revisión de las aportaciones de varios investigadores acerca de la problemática que se aborda en este trabajo, se consideraron aquellas que han sido útiles para desarrollar la metodología de diseño y que tienen relación con los objetivos planteados; estas investigaciones son útiles para conocer estrategias, métodos y estructuras que sirvan como apoyo para llevar a cabo el objetivo planteado.

En lo que se refiere a la estructura didáctica de una secuencia, ha resultado útil la siguiente aportación en que se conceptualiza a la secuencia didáctica como:

> "Una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Es por eso que es importante organizar de manera adecuada el plan de enseñanza para obtener aprendizajes" (Díaz-Barriga, 2013, p. 1)

De acuerdo con lo que señala el autor, se necesita establecer una estructura didáctica que permita la organización de las actividades, es por ello que se contempló dentro de nuestra propuesta metodológica, la línea que el autor propone, dado que, a pesar de ser una propuesta general de estructura aplicable a cualquier asignatura, se considera apropiada para adaptarla a las necesidades de la disciplina.

Por otro lado, (Hitt y Cortés, 2009) enfatizan la importancia de utilizar la tecnología en el diseño de actividades didácticas; y caracterizan las nociones de ejercicio, problema y situación problema, al haber analizado las diferencias entre estos tres conceptos ponemos especial atención en la caracterización de la situación problema ya que la hemos retomado en el diseño de nuestra metodología, por el hecho de que consideramos que el punto de partida en la secuencia didáctica debiera ser una situación problema, acorde con la que los autores describen.

En la medida de lo posible nuestra propuesta recomienda que las situaciones como punto de partida estén inmersas en un contexto de la vida real. Los siguientes autores definen una situación problema en los siguientes términos:

> "La situación debe ser simple, fácil de entender (ello no implica que sea fácil de resolver), ella debe provocar la reflexión y por tanto no puede ser un ejercicio. La matemática que debe utilizarse no debe ser explicitada en el enunciado" (Hitt, Saboya y Cortés, 2017, p. 47).

Es importante que el docente elabore situaciones problema que resulten interesantes para el alumno y que a su vez estén vinculadas con la realidad para intentar que el estudiante se interese en las herramientas matemáticas requeridas para resolver la situación problema y de esta manera pueda aplicarlas en los problemas que se presentan en su vida cotidiana, dándole así validez y aplicabilidad a esta disciplina.

(Díaz-Barriga, 2013) plantea que es adecuado proponer un problema que se constituya en el elemento que articule las nociones conceptuales con la realidad y que sirva como detonante en el desarrollo del conocimiento, entonces podemos afirmar que muchos de los recursos que ofrecen las Tecnologías de la información y la comunicación (TIC) permitirían, la resolución de los problemas.

En esta era de lo numérico, se muestra imprescindible la integración de la tecnología en el aula de matemáticas, por lo cual en este trabajo la incorporamos en el diseño de secuencias didácticas para vincular varios contenidos y poner en juego el pensamiento matemático del alumno. Se considera que el software GeoGebra es una herramienta potente para llegar al objetivo propuesto, ya que esta tecnología brinda la posibilidad de enriquecer la discusión sobre los conceptos, de diversificar los problemas o ejercicios y de explorar varias estrategias de solución. Permite además que el alumno explore y visualice el significado de las relaciones entre los objetos matemáticos.

Referentes teóricos

A continuación, se describen los tres referentes teóricos utilizados para posteriormente describir y justificar la articulación de ellos.

Elementos para estructurar una secuencia didáctica

Es necesario antes de diseñar alguna secuencia, tomar en cuenta cuál será la estructura en la que se desglosarán las actividades, es por lo que se requiere retomar o idear una, para poder establecer los propósitos que se desarrollarán. Dentro de este trabajo se utiliza la estructura didáctica propuesta por (Díaz-Barriga, 2013), dado que es una forma apropiada para organizar las actividades y además rescata algunos puntos que nos han parecido importantes para el diseño. Sin embargo, los aspectos que considera Díaz-Barriga se han modificado dentro de esta propuesta metodológica por el hecho de que se adaptaron a las necesidades de la disciplina matemática.

Metodología ACODESA

La metodología ACODESA se utilizó con el propósito de organizar la gestión dentro del aula y el conocimiento matemático. Esta metodología propuesta por (Hitt y Cortés, 2009), contiene características necesarias a considerar en el diseño de actividades didácticas, una de las principales es que utiliza como punto de partida las situaciones problema. Dentro de la metodología que se propone en este trabajo, se considera la situación problema tal como la describe Hitt y Cortés. La metodología para el diseño de la enseñanza que presenta ACODESA se divide en etapas que toman en consideración el trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula y auto-reflexión; es importante mencionar que dentro de esta metodología el participante activo dentro de las primeras cuatro etapas es el alumno y el docente juega el papel de guía para rescatar los conocimientos más significativos que surjan durante el trabajo en colaboración, para después intervenir en la etapa final de institucionalización, donde el docente retoma las representaciones funcionales que los alumnos obtuvieron y propone las representaciones institucionales, en las cuales los conceptos se formalizan y se generalizan resultados.

Esta metodología propone una manera específica de cómo llevar a cabo el proceso de enseñanza y el de aprendizaje, resaltando el papel que el alumno debe jugar dentro del aula y el que debe realizar el docente mediante el uso de situaciones problema, donde la tarea del alumno es especifica en cada una de sus etapas, poniendo especial atención a las representaciones que se generan durante el desarrollo de la actividad matemática.

Metodología para planificar una unidad de aprendizaje

Taba (1962), propone un conjunto de cuatro etapas para elaborar lo que ella llama una “unidad de enseñanza-aprendizaje”, entendida como “un sector organizado de un plan de enseñanza-aprendizaje” (Taba, 1962, p. 452), estas etapas son:

1ª etapa: introducción, descubrimiento, orientación;
2ª etapa: desarrollo, análisis, estudio;
3ª etapa: generalización;
4ª etapa: aplicación, resumen, culminación

De estas etapas, que describen una forma de estructurar una unidad de enseñanza-aprendizaje, solamente hemos tomado y adaptado, la etapa de *generalización*, la cual se considera una etapa crucial en la disciplina matemática. Esta etapa no se ve reflejada en otras propuestas, pero aquí se ha considerado importante para involucrar al alumno en actividades que le permitan generalizar los conceptos matemáticos discutidos en una secuencia

Articulación de los referentes teóricos utilizados

Se tomó como base el planteamiento de estructura didáctica que propone Díaz- Barriga: apertura, desarrollo y cierre; rescatando algunos propósitos que establece en su teoría, mismos que se fueron complementando con la inclusión de la etapa de generalización que propone (Taba, 1962) en su metodología para planificar una unidad de enseñanza. La generalización es un proceso importante en matemáticas que no está considerado de manera explícita en la estructura didáctica de Díaz-Barriga, por eso se consideró aquí intercalar la generalización entre el desarrollo y el cierre. Al mismo tiempo, se incorporaron las formas de gestión en el aula contempladas en la metodología ACODESA (trabajo individual, en equipo y grupal), como formas específicas de organizar el debate científico, la autorreflexión y la institucionalización.

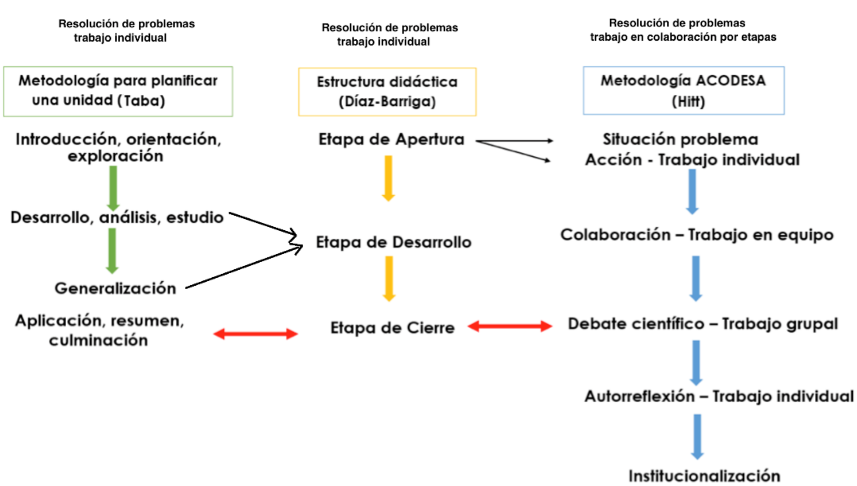


Figura 1: Esquema de la articulación teórica. Fuente: elaboración propia

Acciones metodológicas

La metodología es de carácter cualitativo y está constituida por las siguientes acciones.

Tabla 1: Acciones metodológicas

Fases	Acciones metodológicas
1.- Acciones relacionadas con el objetivo específico 1	Investigación de las aportaciones hacia el diseño de secuencias didácticas. Selección de una estructura didáctica para las secuencias, a partir del análisis de varias estructuras didácticas.
2.- Acciones relacionadas con el objetivo específico 2	Caracterización y elaboración de las situaciones problema, a partir de la revisión de libros y revistas científicas relacionadas con la matemática.
3. Acciones relacionadas con el objetivo específico 3	Establecimiento del uso de GeoGebra para la secuencia didáctica.
4. Acciones relacionadas con el objetivo específico 4	Elaboración de la metodología de diseño para secuencias didácticas, tomando como base la articulación de los referentes teóricos utilizados. Diseño de secuencias didácticas basándose en la metodología elaborada. Elaboración de las reflexiones didáctico – matemáticas, con el propósito de que el docente identifique las características que describe la metodología de diseño. Análisis a priori de las secuencias didácticas diseñadas, tomando como referencia las características que presenta la metodología y analizando su correspondencia con esta.
5. Acciones relacionadas con el objetivo específico 5	Estructuración un curso-taller dirigido a docentes de matemáticas para probar la metodología y diseños de secuencias didácticas elaborados. b) Valoración de la metodología de diseño, a partir del análisis general del curso-taller implementado.
6. Acciones relacionadas con el objetivo general	Valoración de la metodología de diseño elaborada con base en los productos obtenidos en el curso-taller.

Fuente: elaboración propia

Características de la metodología de diseño propuesta

Una vez realizada esta articulación, se ha dado forma a una propuesta metodológica que presenta las siguientes características: se parte de una situación problema que no hace alusión a la matemática que será utilizada, contextualizada en la medida de lo posible para mostrar la aplicación, significado y utilidad de la matemática.

La metodología especifica el objetivo de cada uno de los elementos de la estructura didáctica (apertura, desarrollo y cierre); las actividades y preguntas en la apertura están orientadas hacia la comprensión de la situación problema, en el desarrollo se ponen en juego los procedimientos matemáticos necesarios para la resolución de la situación problema; cuando se considera pertinente se abre una etapa de generalización cuyo propósito es la ampliación de las aplicaciones de los conceptos matemáticos en la etapa de desarrollo y por último en el cierre se institucionalizan y formalizan los conceptos matemáticos que han emergido durante la resolución de la situación y durante la generalización.

La metodología incluye recomendaciones específicas para incorporar el uso de tecnología digital, específicamente GeoGebra, para cada una de las etapas de la estructura didáctica. En la etapa de apertura GeoGebra se utiliza para construir simulaciones de la situación problema, que permitan explorar esta situación de manera cualitativa, en la etapa de desarrollo y generalización GeoGebra se utiliza para modelar la situación problema desprovista del contexto en el que se planteó y para modelar también las generalizaciones surgidas durante el proceso de resolución de la situación.

En la etapa de cierre el software se usa como herramienta para justificar los resultados matemáticos surgidos durante el desarrollo de la secuencia o bien para plantear estrategias de solución diferentes a las empleadas.

Diseños y análisis de las secuencias didácticas elaboradas

Con base en la propuesta metodológica elaborada se realizaron tres diseños de secuencias didácticas, con la intención de poner a prueba la metodología y aplicarlas en un curso-taller para docentes. Estos diseños fueron analizados a priori para identificar si la secuencia lograba responder a las características que se establecieron en la propuesta metodológica elaborada. Una vez concluido el diseño de las secuencias didácticas se elaboró el programa de un curso-taller para docentes en el cual se describen las secuencias se tomaron como referencia.

Planeación e implementación del curso-taller

La metodología aquí propuesta se ha puesto a prueba con un grupo de docentes de matemáticas, en un curso-taller de diseño que ha tenido una duración de 40 horas, con la finalidad de analizar si se podían elaborar diseños de secuencias didácticas, los cuales presentaran las características que integran esta metodología. Para llevar a cabo este curso-taller, se diseñaron las secuencias didácticas y reflexiones didáctico – matemáticas, así como también se elaboró un banco de situaciones problema para el diseño de secuencias didácticas, con el propósito de facilitar la tarea a los participantes en la transformación de las situaciones para los fines del presente estudio.

Participaron 11 docentes de matemáticas, desarrollando las siguientes actividades: a) Abordar y analizar secuencias didácticas previamente diseñadas con la metodología propuesta, b) analizar la metodología propuesta tomando como referencia las secuencias didácticas discutidas y c) diseñar secuencias didácticas a partir de la metodología propuesta.

Las actividades realizadas en la implementación del curso-taller se presentan a continuación, en tres momentos.

En un primer momento se realizó lo siguiente:

- Discusión sobre los elementos de una secuencia didáctica
- Resolución de las secuencias didácticas
- Discusión de las reflexiones didácticas matemáticas

En un segundo momento se llevaron a cabo las siguientes acciones:

- Exposición y discusión de los elementos y características de la metodología de diseño propuesta

- Formación de los equipos de trabajo
- Selección de la situación problema por equipo

En un tercer momento se realizaron las actividades de diseño:

- Diseño de las secuencias didácticas por parte de los docentes
- Presentación y análisis de las secuencias didácticas
- Refinamiento de las secuencias didácticas
- Presentación final y análisis de las secuencias didácticas

Análisis

A continuación, se describen los análisis que se realizaran del presente trabajo.
Las herramientas para recolectar la información fueron:

- Producciones en papel de los docentes,
- Grabaciones de audio a un equipo de trabajo
- Diario de campo (observaciones durante el diseño de secuencias)
- Grabación de video a las exposiciones de las secuencias diseñadas
- Formato de evaluación para los participantes

Análisis a posteriori de las secuencias didácticas propuestas

Una vez que los profesores respondieron las secuencias diseñadas y tomando en cuenta sus respuestas escritas a estas secuencias, las grabaciones en audio y las notas que se tomaron durante el desarrollo de este trabajo:

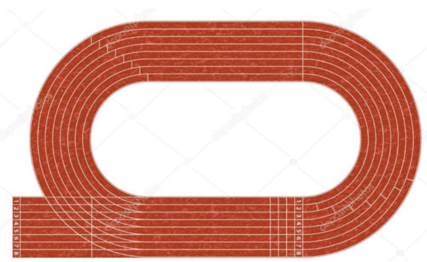
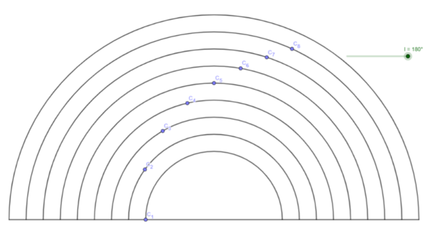
- Se analizaron los resultados obtenidos por los docentes en la aplicación de las secuencias didácticas propuestas.
- Se analizaron las dificultades presentes en la resolución de las secuencias didácticas propuestas.
- Se refinaron las secuencias propuestas a partir de las interpretaciones que los docentes obtuvieron.

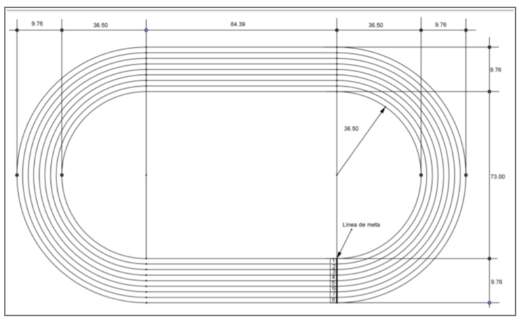
Análisis de las secuencias didácticas diseñadas por los docentes

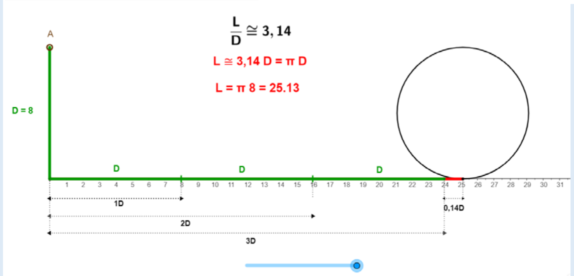
Se tomaron como foco de atención los productos elaborados por los docentes, para evaluar la forma en que toman en cuenta las características de la metodología propuesta en los diseños construidos, así como también se identificaron los propósitos que persiguen en cada una de las actividades, esto con la finalidad de analizar la correspondencia entre la perspectiva de diseño que tiene el docente y las ideas propuestas por los instructores en el curso-taller.
Se analizó de manera general la forma en que se contrastan los elementos del producto con la metodología, la coherencia entre las actividades elaboradas con los propósitos de la estructura didáctica, la forma en que sugieren organizar el trabajo en el aula y el papel que presenta el alumno y docente, el uso que le asignan los docentes a la tecnología en la secuencia diseñada y el nivel de matemática que se utiliza en el producto elaborado por el docente.

A continuación, se muestra un ejemplo de análisis del producto elaborado por el equipo #1.

Tabla 2: análisis de la secuencia elaborada por el equipo 1

	Secuencia didáctica elaborada por los docentes	**Análisis del producto**
Apertura	**Secuencia Didáctica: La pista** **Apertura** En la figura 1 se muestra un plano con las medidas oficiales en metros que debe tener una pista de atletismo para carreras de 400 metros planos. La pista tiene 8 carriles numerados del 1 al 8, llamaremos aquí corredor 1 al atleta que corre por el carril 1, corredor 2 al que corre por el carril 2 y así sucesivamente.  **Trabajo individual** 1. ¿Correrán todos los jugadores la misma distancia si todos parten de la línea de meta y su línea de llegada es también la línea de meta? Explica tu respuesta. 2. El applet1 muestra que sucedería en la primera curva de la pista si todos los jugadores salen de la línea de meta al mismo tiempo y suponiendo que todos corren a la misma velocidad.  3. Escribe con tus palabras lo que observas. 4. Explica por qué el corredor 1 es el primero en recorrer la curva si todos avanzan a la misma velocidad. **Trabajo en equipos** 5. ¿Por qué los corredores, al inicio de una carrera, se ubican en una fila escalonada?	El docente seleccionó una situación problema del banco de situaciones problema, sin embargo, adaptan la situación problema acorde al contenido que desean promover. Una situación ideal sería que primero el docente fuera consciente de un contenido y a partir de ahí concebir una situación problema (Hitt y Quiroz, 2009; Soto, Hitt y Quiroz, 2019). Dentro de la situación problema, el texto se dedica a dar información acerca de la imagen incluida en tal situación. Sin embargo, no se define un contexto que dé pie a la formulación de un problema. La motivación es uno de los puntos más importantes en la enseñanza de las matemáticas (Gravemeijer y Doorman, 1999). Se requiere una mayor cantidad de interrogantes para lograr que el alumno comprenda la situación. Al no elaborar apropiadamente la situación problema, los docentes no analizan con mayor profundidad cuál será la matemática presente. Establecen preguntas muy generales, en lugar de plantear cuestionamientos que necesiten de mayor profundidad, que vayan conduciendo hacia una temática matemática específica. Solicitaron apoyo técnico y matemático de los instructores para realizar la construcción, dado que ellos tenían la idea de cómo podría ser la construcción, pero desconocían como elaborarla en GeoGebra. Los docentes no tenían claro que la construcción de un applet requiere establecer relaciones matemáticas en el software para poder plasmar la idea pretendida en la actividad (Rabardel, 1995).

<table>
<tr><td></td><td></td><td>El applet logra cumplir con el papel de simulador de la situación problema.
El docente necesita tener una mayor interacción con el uso de softwares para desarrollar su potencial en las tareas matemáticas. Precisamente el docente tendría que pasar por un proceso de "génesis instrumental" como lo han señalado autores como (Rabardel, 1995; Guin y Trouche, 1999).</td></tr>
<tr><td>D
e
s
a
r
r
o
l
l
o</td><td>Desarrollo
Trabajo en equipos

5. Describan la trayectoria que realiza cada corredor.
6. ¿Cómo obtendrían la distancia que corre un jugador en las curvas?
7. Calculen la distancia que recorre el jugador 1 al dar una vuelta completa.
8. Expongan ante el grupo como obtuvieron la distancia recorrida por el jugador 1.
Trabajo individual
9. Como el ancho de cada carril tiene una medida oficial de 1.22 m, ésa será la distancia que separará a los Corredores 1 y 2. Calcula la distancia que recorrerá el Corredor 2, si parte de la línea de meta y su línea de llegada es también la línea de meta.
10. Si la línea de salida del Corredor 1 es la línea de meta, ¿dónde deberá ubicarse la línea de salida del Corredor 2 para que los Corredores 1 y 2 recorran la misma distancia para llegar a la meta?
11. Indica dónde deberán ubicarse, al inicio de la carrera, cada uno de los otros corredores (corredores 3, 4, 5, 6, 7 y 8) para que todos recorran la misma distancia al llegar a la meta.
12. Expón ante el grupo tus conclusiones</td><td>La etapa de desarrollo rescata los propósitos que se establecen en la metodología propuesta.
Los docentes lograron identificar en qué momento introducir las diferentes modalidades de trabajo con respecto al propósito de aprendizaje del alumno.
Los tipos de preguntas muestran un intento de involucrar otros contenidos matemáticos como la proporcionalidad, pero los docentes descartan introducir este contenido y se enfocan en el perímetro.
Incluyen el trabajo en equipo como apoyo para llevar a cabo tareas complicadas de la secuencia didáctica, y al mismo tiempo el diálogo grupal para comunicar las diferentes representaciones de las estrategias de cada equipo, así como la autorreflexión para reforzar lo aprendido de manera individual a partir de la práctica (Hitt, Saboya y Cortés, 2017).
No se describe el papel que el docente tendrá al momento de llevar a cabo en el aula estas diferentes modalidades de trabajo, lo cual es sumamente importante en esta parte del desarrollo (Hitt, Saboya y Cortés, 2017).
El diseño no presenta un applet dentro de la etapa de desarrollo, dado que los docentes presentaron dificultades para poder realizarlo dentro del software por falta de conocimiento acerca de su uso y de cómo representar la imagen de la pista (Rabardel, 1995; Guin y Trouche, 1999; Soto, Hitt y Quiroz 2019).</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Cierre</td>
<td>
Cierre
Trabajo individual
1. Se te entregará el dibujo de una circunferencia y su punto medio en una hoja blanca.
Sigue las instrucciones para que a partir de ellas descubras un procedimiento para calcular la longitud de una circunferencia.
-Traza el diámetro de la circunferencia.
-Corta al menos cuatro trozos de hilo cuya longitud sea la medida del diámetro.
-Con esos trozos de hilo rodea la circunferencia,
¿Cuántos trozos de hilo necesitaste para rodear completamente la circunferencia?
2. A partir de lo realizado expresa un procedimiento para encontrar la longitud de la circunferencia.
3. Observa cuidadosamente el Applet 2 y responde lo siguiente: ¿el procedimiento que desarrollaste es equivalente al mostrado en el Applet?


</td>
<td>
Se promueve el uso de manipulables, lo cual motiva al alumno a realizar la actividad y permite activar su imaginación y su razonamiento matemático (de acuerdo con el método de enseñanza ACODESA).
Se promueve la generalización a partir del establecimiento de una fórmula que permita calcular el perímetro del círculo.
El proceso de institucionalización fue una tarea complicada para los docentes dado que el cierre se limita a descubrir fórmulas geométricas en lugar de enfatizar la formalización de los conceptos matemáticos utilizados (Hitt y Cortés, 2009).
El applet sirve para mostrar los resultados de la actividad realizada con los manipulables. Este applet fue tomado de la página web de GeoGebra.
El docente debe realizar sus propias construcciones para obtener un mayor dominio técnico y matemático.
Se concluye que el docente tuvo dificultades al institucionalizar, lo cual nos indica que estos docentes no logran abstraer la matemática que se desglosa en la secuencia didáctica para formalizarla. Sería conveniente proponer otro curso-taller de actualización docente en donde se explicite una enseñanza de corte sociocultural y la integración del uso de tecnología.
</td>
</tr>
</table>

Fuente: elaboración propia.

Análisis general del curso-taller impartido

Dado que el análisis general del curso-taller no está concluido, se describen a continuación las categorías en la que se realizará dicho análisis.

- La correspondencia entre el producto y la metodología propuesta.
- Las percepciones de los docentes sobre los elementos metodológicos.
- Refinamiento de las secuencias didácticas presentadas a los docentes.
- Análisis de las secuencias elaboradas por los docentes

A partir de este análisis se pretende obtener una idea general sobre cuáles fueron los aspectos en los cuales se requirió dedicarle más tiempo y por qué, y cuáles fueron las ventajas y desventajas de haber impartido en tales condiciones el curso-taller a los docentes.

Resultados y conclusiones

A pesar de que los productos generados en el curso-taller no han terminado de analizarse, pueden adelantarse hasta este momento algunas conclusiones:

a) Los docentes lograron adaptarse a la metodología propuesta a partir de la experiencia que obtuvieron al abordar y analizar las secuencias didácticas contrastándolas con la metodología; las reflexiones didáctico-matemáticas sobre las secuencias previamente diseñadas les permitieron identificar las características de la metodología empleada para el diseño.
b) El curso-taller ha puesto en evidencia que los docentes pueden aplicar esta metodología para diseñar sus propias secuencias cuando trabajan en colaboración con otros docentes, aunque han enfrentado dificultades principalmente a la hora de institucionalizar la matemática involucrada en la secuencia y al construir en GeoGebra los applets propuestos por ellos mismos.
c) Las situaciones problema resultaron ser un reto para el docente, se recomienda en una segunda aplicación que primero el profesor sea consciente de un contenido y a partir de ahí concebir una situación problema. Así como se propone abrir un espacio para la construcción y modelación de situaciones problema.
d) La metodología se logró estructurar articulando elementos teóricos, esta fue valorada a través de la implementación de un curso – taller en el que los participantes lograron diseñar secuencias didácticas.
e) Los elementos teóricos tomados de Díaz – Barriga y Taba sirvieron como base para el diseño de la estructura didáctica, sin embargo, fue necesario adaptarlos de acuerdo con las especificaciones que la disciplina necesita.

Referencias bibliográficas

Díaz-Barriga, Á. (2013). Secuencias de aprendizaje. ¿Un problema del enfoque de competencias o un reencuentro con perspectivas didácticas? *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *17*(3), 11-33. Disponible en: https://recyt.fecyt.es/index.php/docenteado/article/view/41685/23758

Gravemeijer, K. and Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39, 111-129. https://doi.org/10.1023/A:1003749919816

Guin, D., y Trouche, L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3, 195-227. doi:10.1023/A:1009892720043

Hitt, F. y Cortés, C. (2009). Planificación de actividades en un curso-taller sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-30. Disponible en: http://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1977

Hitt, F., Saboya, M., and Cortés, C. (2017). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, y U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology* (pp. 13–30). Cham, Switzerland: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-51380-5

Hitt, F., and Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de las matemáticas a través de la modelación matemática en un medio sociocultural ligado a la teoría de la actividad. *Revista Colombiana de Educación* 73, 153-177.

National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematics: reasoning and sense making*. Reston, Va.: NCTM.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments Contemporains*. Disponible en: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document

SEP (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. CDMX: SEP. Disponible en: http://comisioniberoamericana.org/gallery/planestudios11.pdf

Soto, J-L., Hitt, F. y Quiroz, S. (2019). Distinción entre ejercicio, problema y situación problema en un medio tecnológico y ejemplos en diferentes niveles educativos. En S. Quiroz, E. Nuñez, M. Saboya y J. L. Soto (Eds.), *Investigaciones teórico prácticas sobre la modelación matemática en un medio tecnológico* (pp. 25-40). México: AMIUTEM.

Taba, H. (1962). *La elaboración del currículum*. Buenos Aires: Troquel

LA MATEMÁTICA Y EL ARTE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

MATHEMATICS AND ART IN THE TEACHING-LEARNING PROCESS OF GEOMETRY

Fernando González Aldana
Universidad Antonio Nariño UAN (Colombia)
fernalmat@hotmail.com

Resumen
El presente proyecto de investigación tiene como objetivo, dar a conocer una propuesta de aula, cuya innovación pedagógica, parte de la experiencia y contacto con elementos geométricos y artísticos, de la exploración y uso de la tecnología con un programa, como el GeoGebra; para que las estudiantes adquieran herramientas pedagógicas importantes en su desarrollo espacial. La implementación del sistema de actividades sobre la matemática y arte, sirven como motivación para el estudio de la geometría, específicamente en la relación que tienen estas dos disciplinas, especialmente en la demostración de teoremas y en la resolución de problemas retadores, se mejora así, la percepción visual y a la vez se crean espacios de estimulación matemática, con métodos menos complicados y más didácticos.

Palabras clave: arte, geometría, GeoGebra, elementos, desarrollo

Abstract
This research project is aimed at showing a classroom proposal whose pedagogical innovation comes from the experience and contact with geometric and artistic element, from the exploration and use of technology with a program, such as the GeoGebra; so that the students acquire important pedagogical tools in their spatial development. Implementing the system of activities on mathematics and art serves as motivation for the study of geometry, specifically with respect to the relationship these two disciplines have; particularly, in the demonstration of theorems and in the solution of challenging problems. Like that, visual perception is improved, and mathematical stimulation spaces are created as well, by using less complex and more didactic methods.

Keywords: art, geometry, GeoGebra, elements, development

Introducción

La presencia de la matemática en el arte se manifiesta desde tiempos remotos: los griegos, los artistas del Renacimiento (siglo XV), y los árabes (s. XII-XV), utilizaron la geometría en la construcción de sus monumentos, decorados y pinturas. En el siglo XX muchos artistas han utilizado figuras geométricas y elementos de geometría en sus obras.

La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría tienen un rol significativo, pues contribuye a lograr un aprendizaje significativo del contenido geométrico. En este proceso se propicia el desarrollo del pensamiento matemático y espacial, se favorece la creatividad en las estudiantes en la resolución de problemas retadores y permite la independencia cognoscitiva para el trabajo en el aula. El contenido geométrico está presente en todos los currículos de los diferentes niveles educativos, por tal motivo es necesario lograr un aprendizaje adecuado de este contenido en cada nivel, y esto sirve de base para los grados superiores.

Por otro lado, la geometría es uno de los campos de la matemática con mayores aplicaciones a la realidad, pero en las pruebas PISA, CERSE, Pruebas Saber, Prueba Simulacros internos, demuestran que es el contenido matemático con más bajos resultados y por ende el de mayores dificultades en su aprendizaje. El presente trabajo, tiene su origen en la necesidad de crear estrategias para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría y a la vez, que permitan a las estudiantes adquirir conocimientos y habilidades creativas que conduzcan a la visualización y apreciación del arte en una demostración o práctica matemática.

El uso de los elementos artísticos para el aprendizaje de la geometría, es una propuesta que surge de la experiencia de trabajo en el aula del investigador, al tener experiencia profesional en el campo de las matemáticas y en el campo de las artes, lo ha llevado a observar el limitado desarrollo del componente geométrico en los estudiantes. En este sentido, se pretende retomar, además de materiales manipulables como la regla y el compás, conceptos básicos de geometría, el uso de la tecnología, elementos artísticos y sumados a esto, el ingenio y la creatividad para que haya una apropiación y disfrute de la geometría.

En una demostración matemática se despiertan sentimientos y cambios de estado de ánimo que también se encuentran al crear una obra de arte, siendo éste, el verdadero valor de motivación. Esto implica que se puede incluir, para lograr un aprendizaje significativo del contenido geométrico en las estudiantes, la técnica de Omar Rayo (1928-2010), artista colombiano considerado geométrico-óptico, que aprovecha los cuadrados, los rectángulos y las líneas en zig-zag y se expresa con el blanco, el negro y el rojo. También se puede tomar al artista Húngaro Víctor Vasarely (1906-1997), considerado como el padre del op art o modelo propio de arte abstracto geométrico, con efectos ópticos de movimiento, ambigüedad de formas y perspectivas, e imágenes inestables.

La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría en el grado octavo, ha sido abordada por diferentes investigadores, donde plantean sus ideas y características importantes. Esta temática ha ocupado a los investigadores, en diferentes reuniones y congresos, en particular se destacan las investigaciones presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), en el Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME), en la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las reuniones latinoamericanas de matemática educativa (RELME), en Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), los Simposios de Matemática y Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño (MEM), entre otros.

En el ICMI (2001), se considera a la geometría como una herramienta vital para el entendimiento, y también como una parte intuitiva y concreta de las matemáticas, ligada a la realidad. El ICMI 2008 centra su atención en la enseñanza-aprendizaje de la geometría mediante software de geometría dinámica (SGD). Koyuncu, Akyuz & Cakiroglu (2014) enfatizan que la interacción con los SGD favorece el desarrollo cognitivo y la adquisición de conocimientos. Estos autores consideran que para ubicar de nuevo la geometría en un lugar prominente se hace necesario retomar las herramientas con las que se generó la geometría y su historia.

Para lograr resultados satisfactorios en el aprendizaje del contenido geométrico, debe existir una colaboración entre matemáticos y artistas; aunque no se asista a un nuevo Renacimiento, sin embargo, se puede esperar resultados interesantes entre ambas. Para dar una idea cada vez mayor de la importancia de este aspecto visual, basta recordar los congresos que se han celebrado en el Mathematical Science Research Center (MSRI) de Berkeley desde 1988, el año siguiente al inicio del Geometry Supercomputer Project en la Universidad de Minnesota en Minneapolis.

El segundo congreso se realiza en octubre de 1992, recordando las ideas de Piero Della Francesca, de gran importancia para el estudio de la relación entre matemática y arte. Esa misma semana del MSRI se publicó el número especial de Leonardo titulado Visual Mathematics. Emmer, M. (1992) dedicado a Piero Della Francesca.

En las actas del congreso Matemáticas y arte celebrado en 1991 en el Centre Culturel Cerisy La Salle, el matemático habla de la espontaneidad matemática, se refiere a que:

> La intuición inicial del matemático o del artista es libre… La matemática, aparte de la evolución relacionada con la física, se desarrolla siguiendo una lógica propia y, de hecho, no está ligada a la realidad. El matemático, práctica la matemática por introspección, como lo haría un artista (Mandelbrojt 1995, p. 29).

En la resolución de problemas, donde se involucra la historia de las matemáticas, relacionadas con matemática y arte, favorece el razonamiento de los estudiantes, enseña a enfrentar situaciones nuevas y se tiene la oportunidad de involucrarse con las aplicaciones del arte en la matemática. También, brinda una buena base matemática y favorece la idea de que hacer matemáticas es crear obras de arte.

Las valoraciones anteriores y el estudio epistemológico inicial realizado, permiten determinar el siguiente problema de investigación: ¿cómo favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través del uso de algunos elementos del arte, en las estudiantes del grado octavo del colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué?

Se infiere como objetivo general: favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, mediante la implementación de actividades basadas en problemas, que permitan a las estudiantes adquirir habilidades y destrezas creativas que conduzcan a la visualización y apreciación del arte en una demostración o práctica matemática.

Marco teórico

Con relación al arte y las matemáticas se plantea: «… las matemáticas como quehacer humano pueden volverse profundamente satisfactorias, y aún apasionantes, porque están más cerca de las artes que de las ciencias. En efecto, los verdaderos matemáticos practican sus matemáticas como arte» (Vasco 2006, p. 23). Ratifica que «… si los profesores y maestros vivieran y enseñaran las matemáticas como arte, todos podríamos vivir esa experiencia creativa, y tal vez muchos de los artistas serían también matemáticos, muchos de los matemáticos artistas…» (Vasco 2006, p. 24) La matemática y el arte en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría tienen un rol significativo, pues contribuye a lograr un aprendizaje significativo del contenido geométrico.

Por otra parte, «Sugiere que la geometría se encuentra ligada a la realidad y por ello hay numerosas herramientas que permiten manipular y abstraer conceptos y propiedades» (Castillo 2011, p. 523). Una de estas herramientas para el trabajo en el aula, con el contenido geométrico; es la utilización de la manipulación geométrica y de la visualización como una herramienta didáctica, y la integración de la matemática y el arte, para el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Se puede decir, que la geometría, va más allá de la belleza superior, de la armonía existente entre líneas, puntos, polígonos y color; gracias al orden armonioso de las partes y su relación con las formas y los números. El trabajo del matemático es encontrar las semejanzas y diferencias entre una y otra forma matemática, cuya esencia conduce a una apreciación artística, «… se considera arte la producción por un ser humano de un objeto bello» (Velázquez 2005, p. 10). Las matemáticas son la esencia de la realidad de la naturaleza y al reflejarla, lleva a la creación de un objeto matemático al igual que las artes, es allí donde se encuentra la cercanía entre estas dos ciencias. Esta temática ha sido abordada por diferentes investigadores, donde plantean sus ideas y características importantes (De Guzmán 2013, p.243). La relación entre la geometría, la matemática, el arte y el diseño es bastante obvia. La belleza de muchos objetos de la geometría es inspiración para los artistas.

La naturaleza por sí sola tiene un diseño único artístico-matemático. Cada uno de los objetos naturales tiene una armonía, un juego de colores que contrastan todo tipo de sensación y es allí, donde se encuentra implícita la matemática porque esto hace que sea perfecto, que sea irrepetible. Cada fenómeno natural funciona gracias a su matemática. Falk de Losada (2013, p.53), precisa que los griegos no fijaron su atención en la simetría sino en la proporcionalidad y terminaron por estudiar temas relacionados con construcciones de regla y compás. Emmer, Michelle (2005) "Un hecho matemático debe ser, ante todo bello. Un teorema puede y debe ser bello, como lo es, por ejemplo, una poesía...". Es allí donde se puede encontrar la relación matemática y arte.

Metodología

La investigación se orienta a encontrar la relación entre matemática y arte en el aula, con una metodología que propicia "conocer y actuar" en el contexto de un proceso de apropiación y aplicación del conocimiento geométrico. Para ello, en el grupo seleccionado se realizan talleres sobre dominio de herramientas físicas y tecnológicas. Los métodos empíricos e instrumentos de geometría, de dibujo y el uso de la tecnología a través de GeoGebra, conducen a encontrar la relación entre matemáticas y el arte. En esta parte se consideran:
La población objeto de investigación son las estudiantes del grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué, de carácter estatal, nivel muy superior, ubicado en el departamento del Tolima, país Colombia y como muestra 37 estudiantes del grado octavo C.

La investigación se lleva a cabo bajo el paradigma cualitativo, con un enfoque de investigación acción. Este enfoque en el área de la matemática y el arte permite transformar, mejorar y enriquecer el quehacer docente, dirigido a despertar la motivación y el interés para lograr un aprendizaje significativo en las estudiantes de grado octavo del colegio Santa teresa de Jesús de Ibagué. Aquí se combinan métodos y técnicas de investigación científica, en un nivel teórico y empírico. En el primero se hace relación al histórico-lógico porque se emplea, con el fin de valorar la evolución y desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría a través del arte. El segundo se relaciona con las experiencias que tienen cada una de las estudiantes en el manejo de algunos elementos del arte y de la geometría (observación participante y encuesta). También se utilizan los métodos estadísticos matemáticos para el procesamiento de la información obtenida, a través de los métodos y técnicas del nivel empírico.

Durante la exploración se utilizan elementos del arte y de la geometría, imágenes pictóricas de los artistas Omar Rayo y Víctor Vasarely, software de geometría dinámica (GeoGebra), materiales visuales manipulables de geometría y dibujo como la regla, compás, escuadras, colores, borrador, lápices, entre otros. El instrumento de contenido se dirige a constatar cómo se manifiesta el proceso de diseño y reproducción de ejercicios pictóricos (representación visual), como resultado de una práctica o de una demostración geométrica, importante en la resolución de problemas.

La investigación se fundamenta teórica y prácticamente en la visualización, ya que el estado final de la resolución de problemas, tiene como resultado ejercicios artísticos, geométricos y abstractos, presentes en el proceso de enseñanza aprendizaje. Además, se propone una metodología, con el propósito de contribuir a la lectura, interpretación de imágenes, a la vez que se sugieren la implementación de reglas heurísticas que les son inherentes a este. Por último, se realiza una implementación parcial en la práctica con estudiantes de grado octavo y se muestran los resultados alcanzados, los cuales se contrastan con una encuesta de satisfacción aplicada a las estudiantes para valorar el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría con ayuda de la relación que existe entre las matemáticas y el arte, una vez terminada la aplicación de la práctica pedagógica.

El contenido de las actividades se dirige a encontrar la relación entre las matemáticas y el arte, con el propósito de aprender geometría apoyada en la resolución de problemas que constituyen retos para los estudiantes.

Resultados

Para la búsqueda de la relación entre matemática y arte, en la investigación se desarrollan seis actividades basadas en problemas retadores. Las acciones de las estudiantes en el proceso de resolución de los problemas se encaminan a establecer conjeturas, en las cuales ellas apliquen recursos heurísticos. En este proceso, se busca que desarrollen las cuatro fases propuestas por Polya (1945) para el momento de la resolución de problemas, hasta conseguir elaborar ejercicios artísticos con sentido matemático. Estas actividades son: Construcción de figuras geométricas con regla y compás, Teorema de Pitágoras y su aplicación a los números irracionales, Aplicación del Teorema de Tales para la resolución de problemas, Perspectiva en el arte óptico, Problemas geométricos y Exposición concurso intercolegiado "Matemáticamente" 2017.

Las estudiantes del grado octavo realizaron los siguientes ejercicios pictóricos (ver figura 1), que se encontraban en cada una de las actividades, utilizando elementos de geometría, elementos del arte y aplicando la técnica del op art del artista Víctor Vasarely en la perspectiva y las series de cuadrados, se muestra la creatividad, el buen manejo y uso de los elementos de geometría en la creación y construcción de cada pintura.

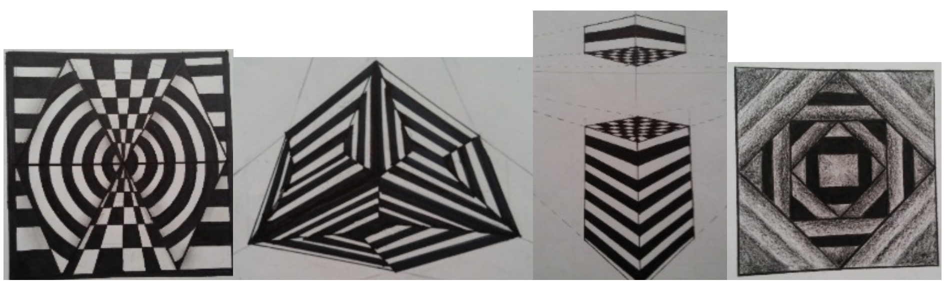


Figura 1. Ejercicios artísticos geométricos
Fuente: Elaboración de los estudiantes

Se le ha dado continuidad al proceso de investigación en donde una gráfica o una demostración geométrica pueden dar origen a una obra de arte, realizadas por el autor, como son los casos del Teorema de Feuerbach, que dice "En un triángulo el círculo de los nueve puntos es tangente al incírculo y a los tres excírculos". La segunda pintura hace referencia al problema ¿cómo en encontrar un cuadrado a partir de un triángulo isósceles?; la tercera pintura es la solución al problema: sea ABC un triángulo. Una circunferencia de centro en un punto que pasa por B y C y corta a AB y AC en M y N respectivamente. Los circuncírculos de los triángulos ΔAMN y Δ ABC se cortan en los puntos A y K. Demostrar que el ángulo AKO es recto.

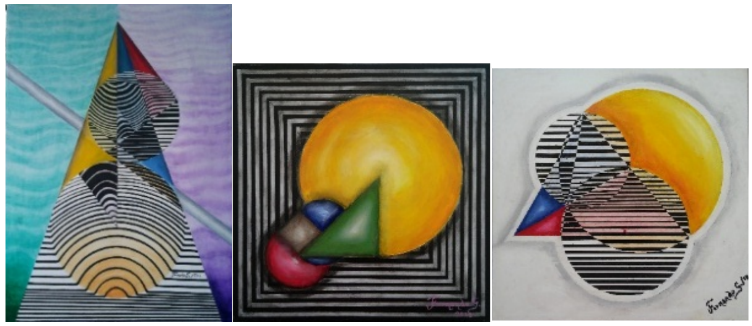


Figura 2. Obras de arte en óleo
Fuente: Elaboración del autor

Análisis de resultados

Se realiza un análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las actividades propuestas para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, utilizando algunos elementos del arte, en las estudiantes del grado octavo de la Educación Básica. En cada actividad se valora su descripción y análisis, motivación, logros obtenidos y dificultades presentadas. También se muestran evidencias fotográficas del trabajo realizado en el aula. Los resultados de las actividades son analizados teniendo en cuenta la forma como fueron desarrolladas, la motivación por el aprendizaje, los logros obtenidos y las dificultades presentadas. En la descripción del desarrollo de cada actividad se precisa la forma como las estudiantes afrontaron la resolución de cada problema y los resultados obtenidos por ellas.
También se resalta como a través del trabajo en grupo y de la heurística de cada una de las preguntas, conllevan a despertar interés en las estudiantes, quienes desarrollan cada problema con gusto, interactúan entre sí, en de cada grupo, acompañamiento docente permanente en cada socialización, fortaleciendo así conceptos, manejo de instrumentos de arte y de geometría, uso de las TIC en la cual se logra un aprendizaje significativo, analizar tareas desde lo visual con enfoques dinámicos y gráficos como lo manifiesta Santos Trigo y Luis Moreno (2016), y sobre todo el encontrar la relación matemática y arte, manifestado en cada uno de los ejercicios artísticos realizados en la práctica.

En estas actividades, es fundamental la resolución de problemas, resaltando en algunos casos los materiales didácticos y los niveles de ayuda ofrecidos para la construcción de la solución. De esta manera, a medida que las actividades incrementaban en complejidad, las estudiantes tomaban lo aprendido y lo aplicaban en la solución de los siguientes problemas, lo que permite apreciar la apropiación de un robusto conocimiento.

La quinta actividad se desarrolló con la participación de 37 estudiantes divididos en 10 grupos, de a 4 y 3 estudiantes respectivamente. Adicionalmente se usó un video beam para proyectar las diferentes partes de la guía y que se pudiera tener mejor visión de las imágenes. Para el desarrollo de la actividad se le suministraron las carpetas con la actividad el cual desarrollaron los problemas de la siguiente manera:

Conocidas las técnicas de los artistas Omar Rayo y Víctor Vasarely, en el problema 1, hubo dificultad en un 40% en el literal b, debido a que no lograban reproducir las figuras geométricas utilizadas por Omar Rayo, se orientó utilizando el concepto de mediatriz, de sectores circulares y de radio, utilizando como medida la abertura del compás; 3 grupos no respondieron el literal e, en donde muestran dificultad en querer expresar sus ideas por el temor al error. Los literales a, c, y d, los respondieron correctamente en un 100%.

En el problema 2, las estudiantes siguieron las instrucciones de análisis y diseño de la pintura de Víctor Vasarely, pero la circunferencia del medio la dibujaron arbitrariamente y al aplicarle geometría en 7 grupos, se dieron cuenta que la habían dibujado incorrectamente, esto sirvió para que las estudiantes se dieran cuenta, que la pintura tuvo su inicio en un problema geométrico, cuyos orígenes están en la construcción geométrica de un rombo y que este a la vez ubica las dos circunferencias concéntricamente o siendo más ambicioso que las dos circunferencias de la pintura es el lugar geométrico de otra circunferencia (ver Figura 3). En un 30% de las estudiantes, se les dificulta expresar ideas sobre el problema que versa en esta obra de arte, del enciso j.

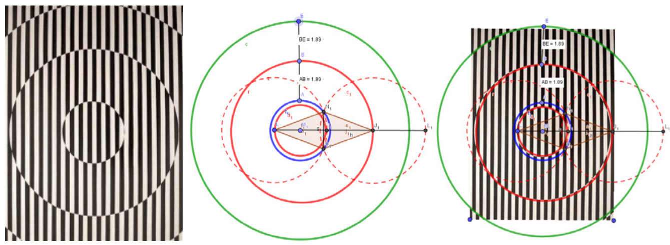


Figura 3. Matemática en obra de arte.
Fuente: Elaboración de los estudiantes

Los problemas 3 y 4, no tuvieron dificultades, en un 100% respondieron las preguntas correctamente en todos los grupos, al igual que los ejercicios de arte y matemática que allí se relacionan. Figura 4.

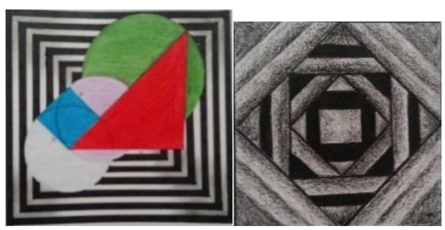


Figura 4. Problemas que conducen a obras de arte.
Fuente: Elaboración de los estudiantes

En el problema 5, de la imagen de Víctor Vasarely, las estudiantes replicaron la obra partiendo del siguiente problema “Sean dados el punto P y la circunferencia de centro O. Supongamos que P está en el interior de la circunferencia dada”. El problema parte de la solución “Sea el segmento AB, el diámetro de la circunferencia que contiene a P, el segmento EF es la cuerda de la cual P es el punto medio, entonces P y O están en el lugar geométrico que se desea construir. Para una cuerda cualquiera el segmento DH donde C es el punto medio de seta, se cumple que r_{OC} es perpendicular a r_{DH}, y todos los triángulos que se formen al trazar las diferentes cuerdas, análogos a POC, tendrán en común la hipotenusa PO y estarían inscritas en la circunferencia de centro O´ y de radio ½ *l* (PO) es el lugar geométrico buscado”. Se descubrió que las demás circunferencias son el resultado de puntos medios que son los centros de las circunferencias y muy interesante desde el punto de vista geométrico por la armonía artística que producen este patrón. Las estudiantes respondieron en un 70%, los encisos g e i, porque aún sienten cierto temor en expresar sus ideas. Las demás preguntas fueron interpretadas y contestadas de acuerdo con lo esperado. Figura 5.

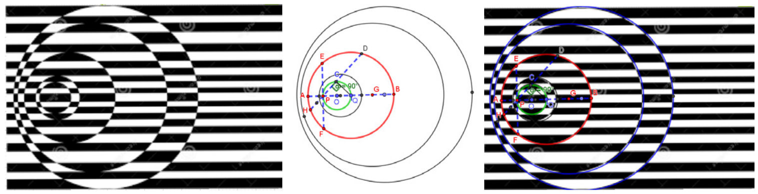


Figura 5. Matemática en obra de arte.
Fuente: Elaboración de las estudiantes

El problema 6, se realizó con ayuda de tabletas, suministrada a cada estudiante, en donde se encuentra debidamente instalado el GeoGebra, se continúa trabajando en grupo y con ayuda del video beam, se fueron aclarando los pasos. Las estudiantes lograron realizar con mucha creatividad la réplica de la pintura en un 80% terminada, dos grupos les falto terminar porque aún tienen cierta dificultad en el manejo del software de geometría dinámica. Figura 6.

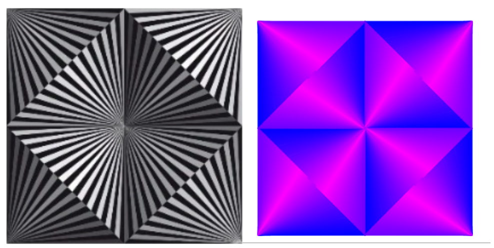


Figura 6. Obra de arte con GeoGebra.
Fuente: Elaboración de las estudiantes.

Finalmente se socializó la actividad, en donde se observó, menor el temor a expresar sus ideas a sus compañeras, en cuanto a la solución de un problema o a la creación de una situación geométrica o matemática. Se escucharon comentarios muy positivos sobre todo en la utilización del GeoGebra para la clase de matemáticas.

Resultados de la encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes y discusión

Al realizar el análisis respectivo de la encuesta de satisfacción, aplicada a 33 estudiantes presentes del grado octavo C, del colegio Santa Teresa de Jesús de Ibagué, acerca de la percepción que tienen las niñas involucradas en la práctica pedagógica, se evidencia en alto porcentaje de favorabilidad el cumplimiento de los objetivos planteados en la tesis (ver gráfico 2), tabla de datos de la encuesta de satisfacción.

Preg \ Valor	1	2	3	4	5
1			1	2	30
2				8	25
3	1	1	1	6	24
4	1		2	7	23
5			2	3	28
6			2	10	21
7				12	21
8			1	7	25

Gráfico 2. Tabla de datos de la encuesta de satisfacción.
Fuente: Elaboración propia.

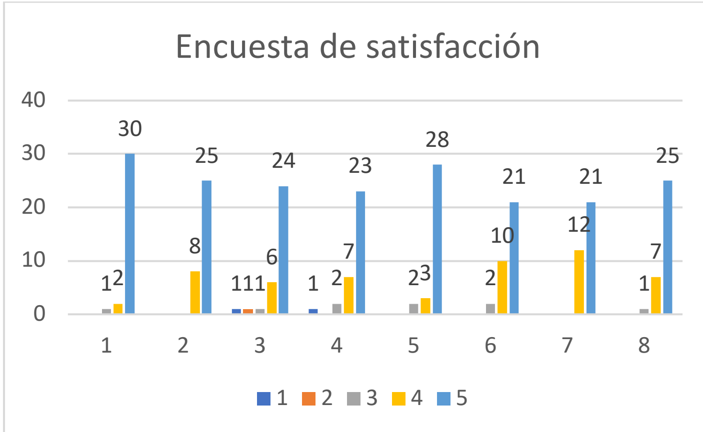


Gráfico 3. Análisis estadístico de la encuesta de satisfacción
Fuente: Elaboración propia.

El anterior gráfico de barras (gráfico 2), análisis estadístico de la encuesta de satisfacción, en donde participaron 33 estudiantes de las 37 de la muestra, se evidencia la calificación más alta de uno a cinco, la tienen un gran número de estudiantes en cada una de las ocho preguntas realizadas, en la pregunta uno, 30 estudiantes manifestaron 5, dos en 4 y una en 3; en la segunda pregunta, 25 en 5 y ocho en 4; en la tercera pregunta 24 en 5, seis en 4 y una estudiante en el 1, 2 y 3; en la cuarta pregunta 23 en 5, siete en 4, dos en 3 y una en 1; la quinta pregunta 28 en 5, tres en 4, dos en tres; en la sexta pregunta 21 en 5, diez en 4 y dos en 3; en la pregunta 7, 21 estudiantes 5, y doce estudiantes en 4 y en la octava pregunta 25 en el 5, siete estudiantes en 4 y una en 1.

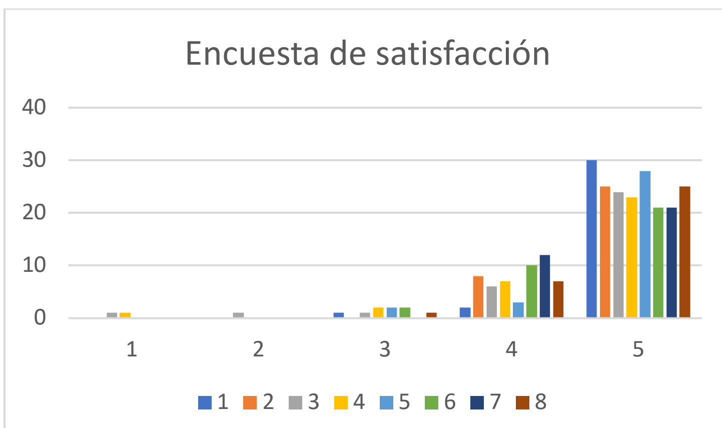


Gráfico 3. Análisis de datos por valoración
Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 3, análisis de datos por valoración, nos muestra que de las 33 estudiantes encuestadas, se concentra en la valoración de 5 en cada una de las preguntas así; la 1 en un 91%, la 2 en un 76%, la 3 en un 73%, la 4 en un 70%, la 5 en un 85%, la 6 y la 7 en un 64% y la 8 en un 76%; en la valoración 4, el porcentaje es en la pregunta 1 es de 6%, la 2 de 24%, la 3 de 18%, la 4 de 21%, la 5 de 9%, la 6 de 30%, la 7 de 36% y la 8 es de 21%; la valoración de 3 en un porcentaje en la preguntas 1, 3 y 8 de un 3% y las pregunta 4, 5 y 6 en un 6%, las preguntas 2 y 7 0%; la valoración de 2, la pregunta 3 un 3% las demás preguntas 0%, en la valoración de 1, sólo las preguntas 3 y 4 con un 3%, las preguntas 0%. Las estudiantes hicieron valoración de la pregunta 3 y 4 de 1 porque no consideraron un reto las actividades y tienen ciertas dificultades en el manejo de los elementos artísticos y geométricos.

Informalmente, siguiendo en clase el progreso de las estudiantes y hablando con ellas, se pudo recopilar algunas ideas interesantes sobre cómo estaba cambiando su percepción. En general, las estudiantes se mostraron sorprendidas de los logros que obtuvieron y de la forma como se puede aprender matemática con ayuda de los elementos del arte, se propuso una reflexión y una mirada hacia las expresiones artísticas que utilizan exclusivamente formas geométricas como objeto representado, en cada uno de los ejercicios tal como lo plantea Franco (2003), es aquí donde existe una, aproximación interdisciplinar entre la geometría y el arte, como lo manifiesta Serenato (2008).

Por otra parte, el dibujo en la geometría podría parecer una redundancia, como diría Recreo (2016) pero en esta práctica es en sí misma dibujada, esto llevó a las estudiantes a construir ejercicios artísticos, con un lenguaje geométrico adecuado. También constituye un lenguaje de la misma pintura y la belleza de muchos objetos de la geometría en el arte y el diseño (Nuere, 2002). El dibujo en la geometría según Mariño (2004) constituye una inspiración para las estudiantes al momento de crear pequeñas obras, pues estas creaciones fueron el resultado de preguntas heurísticas que conducen a la aplicación de los cuatro pasos de Polya (1945), en la resolución de los problemas. Otro aspecto que se observó fue la motivación de que sus trabajos se hizo público, expuestos en un concurso de matemática que realiza la institución Santa Teresa de Jesús de Ibagué, Colombia, en donde participan 10 instituciones del mismo municipio y que fueron visitadas por un evaluador de la Universidad Antonio Nariño, dándole mayor importancia a sus trabajos y su aprendizaje.

Se pudo constatar que en algunas ocasiones se sintieron con cierta frustración, pero que con el correr del tiempo esa dificultad se convirtió en fortaleza. Algunas estudiantes crearon ejercicios artísticos sorprendentes, dignos de replicar en obras de arte.

Conclusiones

El proceso de investigación sobre matemática y arte, en el grado octavo de la Educación Básica, permitió dar respuesta al objetivo. Los resultados obtenidos permiten destacar algunos elementos en este trabajo, ellos son:

- La teoría de la resolución de problema es fundamental para el trabajo en el aula con la solución de problemas de matemática y arte. En la investigación se retoman las ideas de especialistas en Educación Matemática, los cuales aportan definiciones sobre problemas, resolución de problemas y estrategias para la resolución, que constituyen elementos básicos en la propuesta de actividades, basada en problemas retadores.
- La resolución de problemas aporta a la construcción de ejercicios artísticos con contenido matemático, a través del uso de algunos elementos del arte, pues las estudiantes aprenden a pensar y a razonar de manera geométrica abstracta, a explorar y a crear sus representaciones y modelos mentales. Mediante este proceso se propicia resolver situaciones de la matemática, del arte y de la vida real.
- La visualización favorece la construcción de ejercicios artísticos, a través del uso de elementos de geometría como la regla y el compás. En este proceso se considera que la visualización es una habilidad, que permite formar imágenes y representaciones, para la búsqueda de una interpretación geométrica de las obras de arte y de utilizar las técnicas artísticas como el op art y geometría abstracta en una gráfica geométrica o en un teorema.
- La comunidad de práctica para el trabajo de la matemática y arte en el aula, transitó durante su desarrollo por las fases: potencial, coalescencia, madurez, gestión y transformación. El tránsito por estas fases permite su consolidación como comunidad y favorece la construcción del conocimiento, donde es esencial la

participación, la imaginación de las estudiantes, para la búsqueda de su propia identidad. El trabajo en comunidades de práctica permite la comprensión y socialización en el salón de clases de la construcción y apropiación de conocimientos geométricos.

- Como resultado de la implementación de las actividades en la práctica escolar, se constata:

  - ✓ Comprensión por las estudiantes acerca del proceso de relacionar imágenes de obras de arte con sus respectivas soluciones geométricas y viceversa.
  - ✓ El diseño de las actividades, la heurística utilizada en los problemas, el estilo de trabajo en grupo, la relación entre matemática y arte, motivaron a las estudiantes en querer socializar sus ideas y mostrar sus experiencias pictóricas.
  - ✓ Se interpretan y analizan los Teoremas de Pitágoras y Tales y, se fortalecen otros conceptos matemáticos y geométricos que implican estas demostraciones.
  - ✓ El uso de los materiales didácticos en la clase, genera mayor motivación en las estudiantes para la resolución de los problemas geométricos que relacionen la matemática y el arte.
  - ✓ Los diferentes procedimientos que utilizaron las estudiantes para la resolución de los problemas se constatan en la socialización de las actividades, tanto en los grupos de comunidades de práctica, como en el debate con todas las estudiantes del aula.
  - ✓ Se fortalece el sentido de cooperación, responsabilidad y compañerismo y la participación entre las estudiantes, lográndose su satisfacción al notar avances en el desarrollo de sus procesos matemáticos.
  - ✓ En las actividades participaron 10 grupos de trabajo, para un total de 37 estudiantes, de ellos un 90% responde de forma correcta cada una de las actividades.
  - ✓ La exposición de sus trabajos sobre matemática y arte en el concurso intercolegiado "Matemáticamente 2017", a diez delegaciones de instituciones privadas y públicas de Ibagué, fortalecen su motivación y autoestima.

Referencias bibliográficas

Castillo, A. (2011). *El geo plano:* Una alternativa para mejorar la enseñanza de la geometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26.* Recuperado el 24 de junio de 2017, de http://funes.uniandes.edu.co/4082/1/CastilloElgeoplanoALME2013.pdf

De Losada, M. (2013). *Corrientes de pensamiento matemático del siglo XX. Segunda parte: Estructuralismo.* Universidad Antonio Nariño. P. 53-80

De Guzmán, M. (2013) *Polivalencia de las matemáticas: Ciencia, técnica, arte, juego, filosofía*. Real Academia de Ciencias. www.rac.es/ficheros/doc/00337.pdf p.243

Emmer, M. (1992). *Visual Mathematics*. Edición especial: "Leonardo". Oxford: Pergamon Press, vol. 25, pp. 3-4.

Franco, C. (2003). Arte geométrico: Análisis y tendencias de su desarrollo plástico. Universidad de Granada. Granada España

Krulik s y rudnick k, 1980. Problem solving in school mathematics. National council of teachers of mathematics; *Year Book*. (Reston: Virginia).

Koyuncu, I. Akyuz, D & Cakiroglu, E. (2014) investigating plane geometry problem-solving strategies of prospective mathematics teachers in technology and paper-and-pencil environments. International Journal of Science and Mathematics Education. Recuperable el 01 octubre de 2014 de la URL: http://link.springer.com/article/10.1007/s10763-014-9510-8.

Lütfiye G. K. (2014). Karabuk University. The Faculty of Literature The Department of History of Art, Karabuk, TURKEY

Mandelbrojt, J. (1995). Spontanément mathématique. En: Loi, M. (ed.). *Mathématiques et Art*. París: Herman editeurs, pp. 29-38.

Mariño, R. (2004). La geometría en el arte y el diseño. Univesidad Nacional de Colombia. Bogotá Colombia.

McGee, M. (1079). Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic; Hormonal, and Nurilogical Influence, Psychological Bulletin, vol. 86.

Minerva, F. (2006). *El proceso de investigación científica.* Zulia, Venezuela: Universidad del Zulia. p. 116

Moreno, L. & Santos, M. (2015). *The Use of Digital Technology in Mathematical Practices Reconciling Traditional and Emerging Approaches*. Cinvestav-IPN, México.

Nuere, M. (2002). El lenguaje geométrico en la pintura. Soportes audiovisuales e informáticos Serie Tesis Doctorales. Fundación Dialnet Universidad Coplutense de Madrid España.

Polya, G. (1945). How to solve it, Editorial Princenton University press, Princenton.

Recreo G.V. (2016). *Geometría dibujada análisis crítico y comparado de metodologías de su enseñanza* Soportes audiovisuales e informáticos Serie Tesis Doctorales. Fundación Dialnet Universidad de Nueva Granada. España

Riad, S. (2014). Faculty of Instructional Technology, Troy University, Troy, Alabama, USA, raisami@troy.edu

Rodríguez, A. (2005). Periódico de El espectador. La geometría abstracta de Omar Rayo. Recuperado de www.jornada.unam.mx/2005/04/20/index.php?section=cultura&article=a09n1cul

Sandín, E. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: Mc Graw Hill. p. 123.

Serenato, L. (2008). *Aproximações Interdisciplinares entre Matemática e Arte: Resgatando o Lado Humano da Matemática*. universidade federal do paran á sistema de bibliotecas coordena çã o de rocessos técnicos. Brasil.

Trigo, S. & Moreno, A. L. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. Centre for Research and Advanced Studies, Cinvestav-IPN, San Pedro Zacatenco, México DF, México.

Vasco, C. E. (2005). "*Didáctica de las matemáticas: artículos selectos"* U. Pedagógica Nacional.

Velázquez, M. (2005). *Presentación de la monografía: Matemáticas, belleza y arte. Art, de UNO*. Revista Uno 40. Recuperado de www.grao.com/revistas/uno/...matematicas-belleza-y-arte/presentacion-de-la-monogra*.*

Weltman, A. (2015). Libro *this is Not a Maths Book: A Smart Art Activity Book*. Reino Unido.

CONTEXTOS EM PROBABILIDADE CONDICIONAL: ASPECTOS DA EDUCAÇÃO PROBABILÍSTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CONTEXTS IN CONDITIONAL PROBABILITY: ASPECTS OF PROBABILISTIC EDUCATION IN BASIC EDUCATION

Cileda de Queiroz Silva Coutinho, Auriluci de Carvalho Figueiredo
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Universidade Metropolitana de Santos (Brasil)
cileda@pucsp.br, aurilucy@uol.com.br

Resumo
A utilização e análise de um contexto adequado para se trabalharem situações-problema é uma preocupação constante do professor que precisa conceber situações de aprendizagem. Este artigo sobre educação estatística focaliza aspectos da probabilidade condicional analisando contextos que favoreçam o desenvolvimento do letramento probabilístico dos alunos ao longo da educação escolar. Essa análise pode permitir, por meio de várias representações do contexto, identificar abordagens que facilitem não só a compreensão, como também apresentar algumas possíveis soluções para os problemas.

Palavras-chave: probabilidade condicional, árvore de probabilidades, tabela de contingência

Abstract
The use and analysis of an appropriate context for working problem situations is a constant concern of the teacher who needs to devise learning situations. This article addresses aspects related to statistical education in terms of conditional probability, based on the analysis of contexts that favor the development of students' probabilistic literacy throughout school education. This analysis can allow, through various representations of the context, identifying approaches that not only facilitate the understanding of the problems, but also point to some possible solutions to the problems.

Keywords: conditional probability, probability tree, contingency table

Introdução

Na sociedade em geral, e particularmente nos meios de comunicação, é frequente a necessidade de ler e interpretar probabilidades em diferentes contextos, entre eles o contexto de risco. Interpretar tais dados contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico, que permite aos cidadãos entender e comunicar os diferentes tipos de informação presentes nas inúmeras situações da vida cotidiana, nas quais os fenômenos aleatórios, o acaso e a incerteza estão presentes. Torna-se premente, portanto, educar os alunos nessa área desde o ensino fundamental, a fim de que a sociedade disponha de cidadãos probabilisticamente letrados, “capazes de lidar com uma ampla gama de situações do mundo real que envolvem a interpretação ou geração de mensagens probabilísticas, bem como a tomada de decisões” (Gal, 2005, p. 40).

No Brasil, a inclusão de conteúdos relativos à probabilidade é preconizada em documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do Ensino Fundamental (Brasil, 1998) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Na BNCC, o ensino de probabilidade ganha destaque, fazendo parte, juntamente com a estatística, de uma das cinco unidades temáticas ali focalizadas. No eixo ‘Probabilidade e estatística’, o documento sugere que estes objetos de conhecimento sejam trabalhados desde os anos iniciais do ensino fundamental, de modo a capacitar os alunos a construir espaços amostrais de eventos equiprováveis utilizando árvores de possibilidades, o princípio multiplicativo ou simulações. No entanto, desde os anos 1980 as pesquisas sobre didática da probabilidade, particularmente as realizadas pelo casal Lecoutre, têm apontado a inadequação de iniciar o contato com a probabilidade por meio de espaços amostrais equiprováveis. Mais especificamente, Lecoutre (1985) chama atenção para problemas didáticos devidos à presença de um obstáculo epistemológico: o viés da equiprobabilidade. No entanto, o que percebemos é que autores de livros e materiais didáticos, e mesmo as formações iniciais e continuadas de professores, têm negligenciado tais observações.

Neste artigo abordaremos aspectos do ensino e aprendizagem de probabilidade, particularmente o desenvolvimento do conceito de probabilidade condicional na educação escolar. Também discutiremos o impacto que a utilização de contextos adequados em enunciados de problemas tem sobre o desenvolvimento do letramento probabilístico, buscando inclusive evitar a equiprobabilidade.

Salientaremos a importância de proporcionar a alunos da educação básica uma variedade de contextos para que desenvolvam competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a promover-lhes a capacidade de fazer conjecturas e de formular e resolver problemas.

Marco teórico e caminhos metodológicos

Nossa investigação é qualitativa (estudo documental e bibliográfico), focalizando uma situação de aprendizagem da probabilidade condicional.

No Brasil, tanto os PCN quanto a BNCC explicitam que uma das finalidades do estudo da probabilidade é que o aluno compreenda que muitos dos eventos de seu cotidiano são de natureza aleatória e que consiga identificar possíveis resultados desses eventos. Para poder compreendê-los, é necessário que o aluno esteja letrado probabilisticamente (Gal, 2005). Para tanto, deve dispor de um conjunto de habilidades básicas que lhe permitam ler e interpretar informações probabilísticas, bem tomar decisões frente a elas. Gal (2005) propõe um modelo de letramento probabilístico com dois componentes: os cognitivos (Quadro 1) e os disposicionais.

1. Grandes tópicos	Abordagem com tópicos fundamentais: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza
2. Cálculos probabilísticos	Maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos
3. Linguagem	Termos e métodos usados para comunicar sobre probabilidade.
4. Contexto	Compreender o papel e as implicações das questões probabilísticas nas mensagens em vários contextos, incluindo os cotidianos.
5. Questões críticas	Questões para refletir quando se lida com probabilidade.

Quadro 1. Elementos cognitivos do letramento probabilístico.
Fonte: Adaptado de Gal (2005).

Os elementos disposicionais, por sua vez, envolvem postura crítica; crenças e atitudes; e sentimentos pessoais sobre incerteza e riscos.

Gal (2005) aponta que os dois tipos de elementos estão interligados, interagindo de forma complexa durante a aprendizagem. Adverte que focar o ensino de probabilidade apenas em parte desses elementos não será suficiente para desenvolver o letramento probabilístico dos estudantes, e ressalta: “exige-se atenção para a questão da transferência de competências na sala de aula para aprender as situações fora da sala de aula” (p. 58).

Nosso marco teórico também inclui reflexões de pesquisadores que têm se dedicado a temas que envolvem conceitos de probabilidade condicional, como Henry (2001), Parzysz (2003), Batanero, Contreras, Díaz e Cañadas (2013) e Batanero e Borovcnik (2016), indicando possibilidades de ensino e aprendizagem e contextos que as mobilizam e apontando dificuldades vivenciadas por alunos e professores ao lidarem com tais conhecimentos.

Nosso foco neste artigo são contextos envolvendo probabilidade que podem ser trabalhados com alunos da educação básica.

Gal (2005) indica uma série de contextos cuja interpretação requer conhecimento probabilístico (Quadro 2).

O mundo natural e físico (clima, evolução)
Processos tecnológicos (garantia de qualidade, fabricação)
Comportamento humano (encontros profissionais, esportes, dirigir veículos)
Medicamentos, saúde pública (distúrbios genéticos, riscos do tabagismo)
Justiça e crime (correlação de impressões digitais ou de DNA)
Finanças e negócios (investimentos, seguros)
Pesquisa e estatística (amostragem, inferência estatística)
Políticas públicas, previsões de resultados (imunização)

Jogos de azar, jogos a dinheiro, apostas (jogos com dados, loterias)
Decisões pessoais (usar cinto de segurança, ingressar na universidade)

Quadro 2. Exemplos de contextos utilizáveis no letramento probabilístico.
Fonte: Adaptado de Gal (2005).

Como linguagem para comunicar ou estruturar informações ao se trabalharem conceitos que envolvem probabilidade condicional em alguns dos contextos citados, Henry (2001) advoga a utilização de diferentes registros de representação semiótica – linguagem natural, simbólica, diagramas de árvore de possibilidades e de Venn (ambos registros figurais) e tabelas de contingência (registro tabular) – como representações para a resolução de problemas – que são aspectos da teoria de registros de representação semiótica (Duval, 2003). Henry (2001) classifica as situações que envolvem probabilidade condicional em cronológicas, causais e conjuntistas – classes que remetem a alguns dos contextos citados alguns anos mais tarde por Gal (2005).

Em 2001, Henry defendia o uso de mais de uma representação e, Duval (2003, p.14) declara que "a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo momento o registro de representação". Parzysz (1997, 2003) descreve a utilização desses registros em atividades que mobilizam probabilidade condicional e destaca a importância do conhecimento sobre árvores de possibilidades e de tabelas de dupla entrada, não só como linguagem adequada ao ensino e aprendizagem de probabilidade condicional, mas também quanto à pertinência de estudá-las como objetos de conhecimento. Embora em atividades que envolvam probabilidades condicionais se possam utilizar diagramas de Venn, os contextos que aqui focalizaremos podem ser mais proveitosamente tratados utilizando-se tabelas de dupla entrada e árvores de probabilidades (nome que aqui utilizaremos para designar as árvores de possibilidades em que os valores de probabilidade de cada etapa são explicitados na figura).

Análises e discussões

Um dos contextos a que Henry (2001) se refere – e que Batanero e Borovcnik (2016) corroboram – é o de situações que envolvem causa. Um exemplo:

> 100 cobaias são tratadas por três produtos que provocam uma doença M; 50 são tratadas pelo produto P_1 que provoca M com probabilidade 0,25; 25 são tratadas pelo produto P_2 que provoca M com a probabilidade 0,25; 25 são tratadas pelo produto P_3 que provoca M com probabilidade 0,3. Uma cobaia tirada ao acaso tem doença M. Qual a probabilidade de ter sido tratada por P_1? (Henry, 2001, p. 175).

Estabeleceremos algumas notações para resolver essa situação:

- $P(P_1) = 0{,}5$: em 100 cobaias, há 50 tratadas com o produto P_1.
- $P(P_2) = 0{,}25$: em 100 cobaias, há 25 tratadas com o produto P_2.
- $P(P_3) = 0{,}25$: em 100 cobaias, há 25 tratadas com o produto P_3.
- $\overline{M}$ representa o evento de as cobaias serem tratadas com um produto, mas não contraírem a doença M (Figura 1).

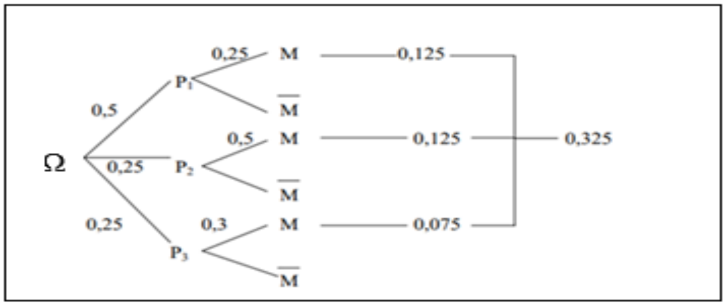


Figura 1. Árvore de probabilidades em contexto de causa.
Fonte: Os autores

Os produtos a que se refere Henry (2001) são $P(P_1)$. $P(M/P_1) = 0{,}125$, que significa a probabilidade da cobaia ter sido tratada por P_1 e contrair a doença. Em linguagem simbólica, $P(P_1 \cap M)$. Da mesma forma, calculamos as probabilidades, $P(P_2 \cap M)$ e $P(P_3 \cap M)$, e a somas destas probabilidades $P(P_1 \cap M) + P(P_2 \cap M) + P(P_3 \cap M) = 0{,}325$ é a probabilidade de uma cobaia tratada por alguns produtos, ter contraído a doença M. Temos ainda que calcular a probabilidade de que o produto utilizado tenha sido P_1. Para isso utilizamos a probabilidade clássica, que é a divisão da probabilidade dos casos favoráveis pelos casos possíveis, e temos: 0,125/0,325 = 0,384. Ou seja, o aluno deve poder identificar entre os caminhos na árvore quais conduzem ao sucesso visado: "ser tratado" e "contrair a doença", separando os demais resultados apontados na árvore. Espera-se que um aluno no segundo ano do ensino médio tenha desenvolvido a competência necessária para tal.

A solução do problema pode ser apresentada pelos alunos sem necessariamente compreenderem a representação formal das probabilidades, pois tal situação envolve conceitos além dos de probabilidade condicional, do teorema de Bayes e do teorema da probabilidade total. A árvore de probabilidades é um registro de representação muitas vezes tratado como mera ilustração da situação probabilística, simplesmente como auxílio aos registros linguísticos e simbólicos. No contexto de probabilidade condicional que envolve causa, no entanto, a árvore adquire *status* de registro, pois definem-se regras, como as propostas por Parzysz (1997), de tratamento (intrarregistros), e também possíveis regras de conversão (inter-registros) – neste caso, da árvore para o registro simbólico, no qual se efetuam os cálculos.

Analisaremos a mesma situação das cobaias utilizando um registro tabular: a tabela de contingência (Tabela 1).

	P1	P2	P3	Total
M	0,125	0,125	0,075	0,325
$\bar{M}$	0,375	0,125	0,175	0,675
Total	0,5	0,25	0,25	1

Tabela 1. Probabilidades.
Fonte: Os autores.

A tabela contém as informações que estão representadas na árvore de probabilidades, mas em outro sistema de registro (um caso de conversão entre registros), que também nos permite visualizar as probabilidades oferecidas pelo enunciado e outras que podem ser calculadas. Cada um desses registros traz consigo facilidades e dificuldades inerentes, más ambos conduzem à resolução por uso do registro simbólico. Os dois registros de representação semiótica aqui apresentados são efetivamente facilitadores do processo de resolução do problema proposto, pela clareza de leitura que permitem e por envolverem competências esperadas de um aluno do ensino médio.

Atividades que mobilizam situações de causa (Henry, 2001) em contextos propostos por Gal (2005) que se referem à imunização ou a problemas de saúde também são propostas por Carvalho (2015), Batanero e Borovcnick (2016) e Figueiredo (2018). A seguir apresentamos uma proposta de atividade que envolve situação de causa em contexto de saúde pública, que Carvalho (2015, p. 122) aplicou a alunos da educação básica em Portugal:

A leptospirose é também conhecida como doença de Weil. Esta doença é causada por duas espécies de bactérias. Numa população de ratos, a probabilidade de encontrar um rato portador destas bactérias é 6%. Foi proposto um novo teste de diagnóstico da doença e, para avaliar a sua qualidade, foram efetuados vários testes àquela população de ratos, no sentido de detectar a existência destas bactérias. Do estudo efetuado resultaram as seguintes conclusões:

- a probabilidade de um rato ter teste positivo (T_+), sabendo que é portador das bactérias, é 99,8%;
- a probabilidade de um rato ter um teste negativo ($T_–$), sabendo que não é portador destas bactérias, é de 99,6%.

Seja A o acontecimento “Rato ser portador das bactérias”.
Escolhendo ao acaso um rato dessa população, qual é a probabilidade de ele ser portador das bactérias, sabendo que o teste efetuado deu negativo?

Informa-se que a probabilidade de um rato ter teste positivo (T_+) sabendo-se que é portador das bactérias é 0,998 e a probabilidade de um rato ter um teste negativo ($T_–$) sabendo-se que não é portador dessas bactérias é de 0,996. Tais probabilidades são condicionais e podem ser representadas respectivamente por $P(T_+/D)$ e $P(T_-/\overline{D})$. Utilizando-se a árvore de probabilidades para compreender os dados nesse contexto e adotando D para representar o evento de o rato ser portador da bactéria e $\overline{D}$ para representar o evento de o rato não a portar, temos a árvore apresentada na Figura 2.

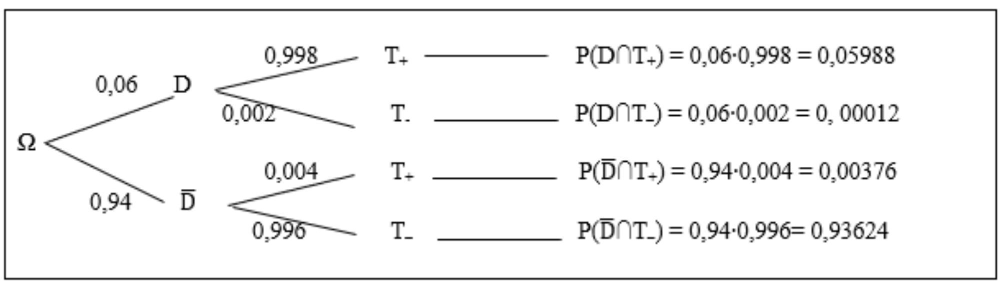


Figura 2. Árvore de probabilidades em contexto de causa.
Fonte: Os autores.

Esta árvore não facilita obter de imediato uma resposta à pergunta do problema, que é a probabilidade de que o rato seja portador da bactéria quando o teste foi negativo, ou seja, $P(D/T_-)$. Podemos então converter a árvore de probabilidades em tabela de contingência (Tabela 3).

	T_+	$T_–$	Total
D	0,05988	0,00012	0,06
$\overline{\mathbf{D}}$	0,00376	0,93624	0,94
Total	0,6364	0,93636	1

Tabela 3. Probabilidades.
Fonte: Os autores.

Nesta tabela, obtemos o total referente ao teste negativo somando as linhas da coluna T_{-}. Utilizando o conceito da probabilidade clássica, temos: 0,00012/0,93636 = 0,000128.

Batanero e Borovcnick (2016) consideram a probabilidade condicional como chave para avaliar probabilidades subjetivas. Para Batanero e Gea (2018), tais contextos nas atividades também ajudam a alcançar interpretação correta em situações de risco e de possíveis erros em resultados de exames. Apontam que o diagnóstico médico é um contexto natural em que consideram subgrupos com probabilidades condicionais. Díaz e La Fuente (2005), bem como Diaz, Contreras, Batanero e Roa (2012), expõem que a probabilidade condicional é fundamental em aplicações estatísticas, pois permite incorporar conhecimentos sobre eventos aleatórios à medida que adquirimos novas informações.

Para exemplificar problemas relativos à saúde, Junqueira (2014) discute atividades que envolvem probabilidade, dentre elas a intitulada 'Problema da mamografia', que mobiliza conceitos relativos à condicional:

> A probabilidade de câncer de mama é de 1% para uma mulher de quarenta anos de idade que participa de exames de rotina. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com 9,6% das mulheres sem o câncer. Uma paciente nessa faixa etária tinha uma mamografia positiva em um exame de rotina. Qual é a probabilidade dessa paciente realmente ter um câncer de mama? (Junqueira, 2014, p. 73).

Analisando o enunciado, podemos fazer um esquema utilizando a tabela de contingência como registro, pois informa-se *a priori* a probabilidade de que a paciente tenha câncer e que o teste é positivo, sendo por isso mais conveniente encontrar as probabilidades conjuntas e utilizar o registro tabular, passando antes pelo registro simbólico:

- $P(T_{+} \cap C) = 0{,}80 \cdot 0{,}01 = 0{,}008$: probabilidade de o teste ser positivo e a mulher ter câncer.
- $P(T_{+} \cap \bar{C}) = 0{,}99 \cdot 0{,}096 = 0{,}09504$: probabilidade de o teste ser positivo e a mulher não ter câncer.
- $P(T_{-} \cap C) = 0{,}01 \cdot 0{,}20 = 0{,}002$: probabilidade de o teste ser negativo e a mulher não ter câncer.

Acrescentando as interseções à Tabela 3, temos a Tabela 4.

	T_{+}	T_{-}	Total
C	0,008	0,002	0,01
$\bar{C}$	0,09504	0,89496	0,90
Total	0,10304	0,89696	1

Tabela 4. Tabela de probabilidades
Fonte: Os autores.

Obtemos assim a probabilidade total de teste positivo ao somarmos as linhas da coluna T_{+}. Utilizando o conceito da probabilidade clássica, temos: 0,008/0,10304 ≈ 0,00776, o que permite concluir que a chance de a paciente não ter câncer de mama é de 0,922, contra chance de 0,00776 de o ter.

Para compreender qual registro favorece a articulação entre os dados fornecidos e o que cada registro possibilita, torna-se necessário, segundo Figueiredo (2018), que esses registros constem nos enunciados das atividades, a fim de que o aluno perceba a importância destes para a resolução de situações que envolvam probabilidade, e também para que os reconheçam como registros que têm tratamento próprio. Queremos dizer que é fundamental que, em algum momento da aprendizagem, a árvore de probabilidades e a tabela de contingência constituam objetos de estudo: o aluno precisa compreender suas estruturas, propriedades e possibilidades, para que possa escolher as representações com autonomia.

Destacamos que tal manipulação de registros de representação semiótica para esta resolução depende do letramento probabilístico dos alunos, ou seja, dos elementos expostos no Quadro 1: grandes tópicos, cálculos de probabilidade, linguagens, contexto e questões críticas.

Analisaremos a seguir as situações indicadas por Henry (2001) como cronológicas, que são particularmente adaptadas às representações com árvores de probabilidades. A experiência é decomposta em eventos sucessivos: ocorre o primeiro evento e em seguida se desenrola o segundo. Para este tipo de situação, Henry (2001) nos remete a um contexto de jogos referenciado por Gal (2005) e retomado por Batanero (2013) para que as atividades baseadas em jogos possam favorecer a aquisição intuitiva do conceito de probabilidade, considerando-se que por meio de experiências simples pode-se levar os alunos a progressivamente compreender situações mais complexas.

A seguinte atividade cronológica foi adaptada de Henry (1997) por Figueiredo (2000, p. 14):

> Uma urna (I) contém 2 bolas brancas (B) e 3 vermelhas (V). Uma segunda urna (II) contém 4 bolas brancas e 2 vermelhas. Escolhe-se ao acaso uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que ela seja branca?

A cor da bola obtida depende de dois sorteios sucessivos: o resultado está condicionado à ocorrência do primeiro evento (escolha da urna) e então do segundo (escolha da bola). Pode-se tomar como ponto de partida a árvore de probabilidades (Figura 3).

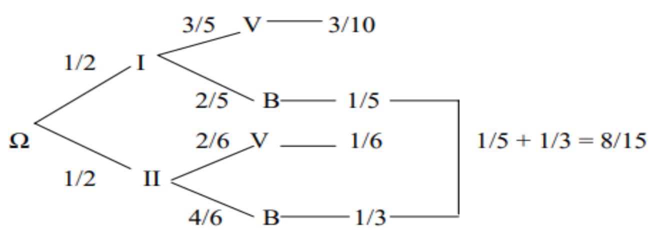
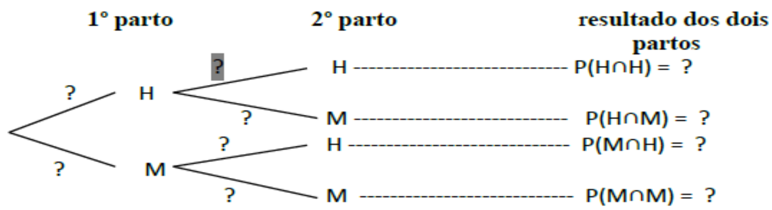


Figura 3. Árvore de probabilidades em contexto de causa.
Fonte: Figueiredo (2000, p. 15).

- A probabilidade de se obter uma bola branca é então composta das probabilidades: P(I), P(II) e P(B), podendo ser calculada por: $P(I) \cdot P(B/I) + P(II) \cdot P(B/II)$. Como as urnas são escolhidas ao acaso (sorteio), suas escolhas são equiprováveis e tem-se $P(I) = P(II) = 1/2$.
- As duas bolas brancas podem ser escolhidas dentre as cinco presentes na urna I, de onde $P(B/I) = 2/5$. Do mesmo modo, $P(B/II) = 4/6$.
- A soma das probabilidades $1/5 + 1/3 = 8/15$, nos fornece a probabilidade desejada, de a bola ser branca independentemente da urna de que foi extraída.

Se a pergunta do problema fosse: “Qual a probabilidade de a bola ter saído da urna I, sabendo-se que ela é branca?”, teríamos que construir a árvore de probabilidades indicando primeiramente as bolas nos primeiros ramos, pois a condição dada pela questão é a cor da bola e não a urna. Neste caso, poderíamos recorrer ao registro tabular, como nas situações anteriores, para depois calcular a resposta à nova pergunta. Os alunos da educação básica devem ser levados a utilizar e perceber essas articulações entre os dois tipos de registro (tabela de contingência e árvore de probabilidades) para também os reconhecerem como importantes aliados na resolução de problemas que envolvem probabilidade condicional. Figueiredo (2000) defende que o próprio enunciado das questões deva trazer tais registros para interpretação. Também destaca uma situação cronológica de probabilidade condicional, adaptada de Godino, Batanero e Castellano (1996), que envolve o nascimento de crianças:

Ao estudar números dados de natalidade de uma cidade do Brasil, observamos que a probabilidade de nascer um homem é de 40% e a de nascer uma mulher é de 60%. Em determinada manhã um médico irá fazer dois partos.

> Utilize o diagrama de árvore para poder responder as questões a seguir:
>
> 
>
>
> Substitua todas as interrogações acima pelas respectivas probabilidades. Na árvore acima assinalamos uma interrogação (?), que significa a probabilidade de nascer um homem no segundo parto, sabendo ter sido homem no primeiro. (Figueiredo, 2000, p. 86)

Além de apresentar no enunciado um contexto cronológico que envolve o nascimento de crianças, mobilizando a leitura da árvore de probabilidades, Figueiredo (2000) também busca fugir da equiprobabilidade, quando estabelece probabilidades de nascimento diferentes para homens e mulheres em uma cidade. Pesquisas no campo da educação estatística indicam, desde a década de 1980, que a limitação a espaços equiprováveis favorece a manifestação de um marcante obstáculo epistemológico à aprendizagem: o viés da equiprobabilidade, identificado por Lecoutre (1985). Para a construção do letramento probabilístico, ao trabalharmos com probabilidade condicional torna-se importante utilizar contextos que tragam espaços não equiprováveis.

Contextos conjuntistas, segundo Henry (1997, 2001), são situações razoavelmente bem descritas por tabelas de contingência de dupla entrada, fornecendo as probabilidades conjuntas e as probabilidades marginais de eventos A e B. Por exemplo, em uma tiragem ao acaso de uma pessoa da população, medem-se seu peso e sua altura e definem-se os seguintes eventos: A = a pessoa pesa mais de 65 kg; B = mede mais de 1,75 m (adaptado de Henry, 2001).

Para melhor compreender, vamos exemplificar o contexto dizendo que 60% das pessoas dessa população pesam menos de 65 kg, 50% medem menos de 1,75 m e 10% medem mais de 1,75 m e pesam mais de 65 kg. Tal contexto nos remete à noção de conjunto, o que permite que tais dados sejam também representados por diagramas de Venn. Estes dados podem ser inseridos em uma tabela de dupla entrada, facilmente completada observando-se os complementares de cada um dos conjuntos, as probabilidades conjuntas e as probabilidades marginais dos eventos A e B estudados nesse contexto, como nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 5. Dados do problema.

Altura / Peso	B	$\overline{B}$	Probabilidades marginais
A	?	?	0,6
$\overline{A}$	0,1	?	?
Probabilidades marginais	?	0,5	1

Fonte: Os autores.

Tabela 6. Completada com as probabilidades complementares dos eventos

Altura / Peso	B	$\overline{B}$	Probabilidades marginais
A	0,4	0,2	0,6
$\overline{A}$	0,1	0,3	0,4
Probabilidades marginais	0,5	0,5	1

Fonte: Os autores.

A complementação dos dados no registro tabular (Tabela 6) permite explicitar os tratamentos desse registro quando se utilizam conceitos que envolvem complementares dos eventos, probabilidades marginais e interseção de eventos com as probabilidades totais de cada um deles.

Considerações finais

Analisar contextos de atividades que envolvem probabilidade (Gal, 2005) nos levou a pesquisar na literatura maneiras de enunciar atividades que envolvem probabilidade condicional, particularmente quanto a suas possíveis linguagens e termos usados para comunicar probabilidade. Os contextos que envolvem probabilidade condicional citados por Henry (1997, 2001) nos remeteram a interpretá-la em três situações: de causa, de tempo e conjuntista, sendo que a de causa também é focalizada por Batanero e Borovcnik (2016). Para representar probabilidades, utilizaram-se dois registros de representação que se mostram profícuos para a resolução de atividades nesses contextos: árvores de probabilidades e tabelas de contingência. A teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003), articulada em contextos que envolvem probabilidade condicional, nos possibilitou compreender determinados tratamentos e conversões para trabalhar com estes, em concordância com Parzysz (1993, 1997, 2003), que considera que tais registros precisam ser tratados como objetos antes de serem utilizados para a resolução de atividades.

Cada uma das situações (Henry, 2001), ou contextos (Gal, 2005), nos remete a formas de interagir com os registros – conversão de registros, na teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003). Os enunciados das atividades podem expressar o registro mais apropriado para a resolução da atividade, desde que o aluno da educação básica seja apresentado a contextos que envolvem probabilidade condicional e que os façam mobilizar tais registros e refletir sobre seus usos e formas de representação. Isto requer que seus professores também sintam necessidade de trabalhá-los em suas salas de aulas.

Batanero e Gea (2018), ao apontarem que algumas pesquisas que focalizam contextos que envolvem risco (tratados por nós como situações de causa) e avaliarem o nível de raciocínio dos alunos e sua evolução nas experiências, ressaltam a possibilidade de usar tais situações para aperfeiçoar o raciocínio probabilístico dos alunos. Concordando com essa visão, esperamos que outros professores e pesquisadores contribuam no desenvolvimento de contextos e linguagens e em sua incorporação ao trabalho em sala de aula, e que também os contextos que envolvam situações de tempo e conjuntistas ampliem esse repertório.

Referências bibliografica

Batanero, C. B. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? In J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu, (Eds.), *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga (Portugal): Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense.

Batanero, C. B., & Gea, M. M. (2018). El riesgo como contexto en la enseñanza de la probabilidad condicional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(1), 1410-1417.

Batanero, C. B., Contreras, J. M., Díaz, C., & Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: un estudio con futuros profesores. *Revemat*, Florianópolis (Brasil), *8*(1), 75-91. doi:10.5007/1981-1322.2013v8n1p75.

Brasil. (1998) Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC.

Carvalho, J. I. F. (2015). Conhecimentos de futuros professores de matemática sobre probabilidade condicional por meio do jogo das três fichas. In: Contreras, J. M., Batanero, C., Godino, J. D., Cañadas, G.R., Artega, P., Molina, E., GEA, M. M., & López, M. M. (Eds.). *Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria*, *2*, 189-196.

Díaz, C.; La Fuente, I. (2005). Razonamento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59*, 245-260.

Diaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. B., & Roa, R. (2012). Assessing prospective secondary school teachers' biases in conditional probability reasoning. *Bolema*, *26*(44), 1207-1226. http://dx.doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400006.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 7-10). Campinas: Papirus.

Figueiredo, A. (2000). Probabilidade condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Figueiredo, A. (2018). Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. In: II Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática – LADIMA.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. B., Castellano, J. C. (1996). *Azar y probabilidad: matemáticas, cultura y aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Henry, M. (1997). Modélisation en probabilités conditionnelles. In M. Henry, & B. Chaput (Eds.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 93-102). Reims: IREM de Reims.

Henry, M. (2001). Modélisation en probabilités conditionnelles. In M. Henry (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (pp. 173-185). Besançon: Presses Universitaires de Franche-Comté.

Junqueira, A. L. N. (2014). Probabilidade na educação básica: um estudo sobre concepções de professores de matemática. Dissertação de mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Lecoutre, M.-P. (1985). Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *6*(2-3), 193-213.

Parzysz, B. (1993). Des statistiques aux probabilites: exploitons les arbres. *Repères Irem*, *10*, 93-104.

Parzysz. B. (1997). Utilisation des arbres dans l'enseignement des probabilités. In Commission Inter-Irem Statistique et Probabilités.(Eds.), *Probabilities au lycée* (pp.75 -90). Paris: APMED.

Parzysz, B. (2003). Utilisation des arbres dans l'enseignement des probabilités. In Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (Eds.), *Probabilités au lycée* (pp. 225-238). Paris: APMEP.

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

PROPUESTA DE METODOLOGÍA PARA PROPICIAR EL ROL ACTIVO Y PROTAGÓNICO DEL ESTUDIANTE EN LA EVALUACIÓN DE SU APRENDIZAJE

PROPOSING A METHODOLOGY TO FAVOR THE ACTIVE AND LEADING ROLE OF STUDENTS IN THE EVALUATION OF THEIR LEARNING

Alejandro Martínez Castellini, Rosa Adela González Noguera
Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) (Cuba)
alexmc@uci.cu, rosygonzan@uci.cu

Resumen
Numerosas investigaciones han roto con la tradición en la que el profesor es el actor principal y único en la evaluación del aprendizaje. Dichas investigaciones refieren ventajas de la implicación activa del estudiante en la evaluación de su aprendizaje. No obstante, el análisis de informes semestrales correspondientes a asignaturas de Matemática en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas, las observaciones de clases y la aplicación de encuestas aplicadas a estudiantes y a profesores permitieron concluir que el proceso de evaluación del aprendizaje en estas asignaturas no propicia el rol activo y protagónico del estudiante. En este trabajo se propone una metodología para propiciar el rol activo y protagónico del estudiante en la evaluación. Se presentan las perspectivas teóricas que fundamentan la metodología, así como su correspondiente vía de obtención. La metodología propuesta involucra al estudiante en todas las etapas del proceso evaluativo, por lo que se concluyó que constituye una solución al problema de investigación.

Palabras clave: evaluación, enseñanza-aprendizaje, educación superior

Abstract
Many investigations have changed the tradition where the teacher is the main and only actor in the evaluation of leaning. These investigations refer to the advantages of the active involvement of the students in their learning evaluation. Nevertheless, the analysis of the qualitative and quantitative half-yearly results of Mathematics discipline in the Computing Science University, as well as the observations of different classes and the surveys applied to students allowed getting to the conclusion that students' learning evaluation process in this discipline does not favor students' active and leading role. This paper proposes a methodology to foster the active and leading role of the students in their evaluation. The theoretical perspectives that support the methodology are presented, as well as the corresponding way of obtaining them. This methodology involves the student in all the stages of the evaluation process, so it was concluded that it constitutes a solution to the research problem.

Key words: evaluation, teaching-learning, higher education

Introducción

Los problemas en torno a la evaluación del aprendizaje en el contexto de las instituciones docentes han sido debatidos por diversos autores tanto en el ámbito nacional como el internacional. Algunos estudios que han focalizado la problemática de la evaluación del aprendizaje de la Matemática en el nivel universitario son: (Pérez González, O. L., 2000); (Pérez González, O. L., 2007); (Diez, 2008); (Del Puerto, S. & Seminara, S., 2014); (Fuentes, D. & Solís, J. D., 2016); (Digión, M. & Digión, L., 2016); (Trelles, Bravo &Barrazueta, 2017); (Reinel, Álvarez &Velázquez, 2018) y (Guzmán, L.E., 2018).

¨Desde la década de los 80, y sobre todo en la década de los 90 del pasado siglo, son numerosas las investigaciones que rompen con una tradición en la que el profesor es el actor principal y único en la evaluación del aprendizaje. Estas investigaciones vienen a demostrar y reclamar la importancia de la participación activa de los estudiantes en los procesos de evaluación¨. (Rodríguez, Ibarra, Gallego, Gómez, & Quesada, 2012, p.2).

También en el presente siglo se cuenta con numerosos estudios que refieren ventajas de la implicación activa del estudiante en la evaluación de su aprendizaje. En el ámbito nacional, algunos autores son: (Pérez, 2000); (Diez, 2008); (Gort, 2008) y (Hernández, 2013); y, en el ámbito internacional: (Álvarez, 2008); (Gill & Padilla, 2009); (Bautista & Murga, 2011), (Ibarra, Rodríguez & Gómez, 2012); (Gómez & Quesada, 2017); (Vizcaíno, Marín & Ruiz, 2017); (Balderas, I. & Balderas, K., 2018), (Ruíz, Milevicich & Lois, 2018) y (García- Martínez, L.F. 2019). Algunas de las ventajas detectadas por estos estudios son: el rol protagónico del estudiante al valorar su progreso durante el periodo lectivo; el carácter formativo al promover el análisis, la reflexión y la capacidad de valoración, el pensamiento crítico y la toma de decisiones; la contribución al desarrollo de valores como la honestidad, la responsabilidad, la crítica, la autocrítica, la autonomía, el respeto a la opinión del otro y el consenso; propicia el trabajo colaborativo; es apropiada en clases con una gran cantidad de estudiantes; y que la evaluación deviene objeto de aprendizaje por el estudiante.

Los sistemas de evaluación de las asignaturas de Matemática en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas[1] han sido objeto de sucesivas adecuaciones en aras de su perfeccionamiento; no obstante, el análisis de informes semestrales correspondientes a asignaturas de Matemática en esta carrera, las observaciones de clases y la aplicación de encuestas a estudiantes y a profesores, permitieron ubicar el problema de investigación:

El proceso de evaluación del aprendizaje en asignaturas de la disciplina de Matemática en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas no propicia el rol activo y protagónico del estudiante.

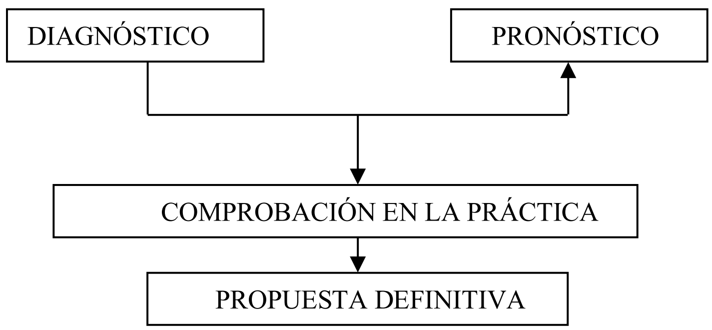
Con el propósito de proporcionar una solución al problema de investigación, se desarrolló una investigación se orientada hacia el logro del siguiente objetivo:
Elaborar una metodología para propiciar el rol activo y protagónico del estudiante en la evaluación del aprendizaje en asignaturas de la disciplina de Matemática en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas.

Marco referencial

Fueron identificados como referentes teóricos de la metodología propuesta: los modelos educativos centrados en el aprendizaje; los problemas y tendencias de la evaluación de aprendizajes en la universidad; las declaradas por (González, 2000) como "funciones relevantes para una evaluación educativa de aprendizajes en la enseñanza universitaria"; y las modalidades y técnicas evaluativas que propician el rol activo y protagónico del estudiante: las pruebas o exámenes escritos con preguntas de formato diverso y con el uso de materiales bibliográficos, el debate, la entrevista, el portafolio, las tareas extraclase, la autoevaluación, la evaluación entre pares y la evaluación compartida.

Metodología/desarrollo de algunos ejemplos[2]

Para elaborar la metodología, se pusieron en práctica las acciones propuestas por (De Armas, 2003) para la elaboración de resultados científicos como aportes de investigaciones; así como una de las variantes de elaboración presentadas por (Valle, 2010a), la cual se esquematiza y describe a continuación:



Esta variante consiste en partir de diagnosticar la realidad que se pretende transformar; luego se pronostica el estado final de la realidad transformada; posteriormente se establece la metodología, que es validada en la práctica, después de lo cual se elabora la propuesta definitiva.

Etapas de la metodología. Procedimientos que corresponden a cada etapa

Etapa 1: Fase inicial diagnóstica

Esta fase está encaminada a diagnosticar el nivel de aseguramiento de condiciones previas para la aplicación del proceso de evaluación del aprendizaje de los estudiantes, para lo cual se aplican instrumentos dirigidos a recopilar información con respecto a las opiniones de profesores y los estudiantes en torno a la evaluación. A partir de los resultados del diagnóstico, se determinan las necesidades del claustro de profesores para emprender el proceso de evaluación de manera adecuada.

Los procedimientos de esta etapa son:
1.1 Estudio del Modelo del profesional de la carrera.
1.2 Estudio del programa analítico de la disciplina y los de las asignaturas de Matemática en la carrera.
1.3 Elaboración de los instrumentos de diagnóstico.
1.4 Aplicación de los instrumentos de diagnóstico.
1.5 Recopilación, procesamiento y análisis de datos proporcionados por los instrumentos de diagnóstico.
1.6. Identificación de necesidades.

Etapa 2: Fase de ejecución u operativa

Esta etapa está destinada a la ejecución de procedimientos dirigidos a preparar al personal administrativo y el docente para implementar el proceso de evaluación del aprendizaje de modo tal que el estudiante desempeñe un rol activo y protagónico.

Los procedimientos de esta etapa son:

2.1 Comunicación los resultados de la aplicación de los instrumentos de diagnóstico.
2.2 Identificación de necesidades para la implementación de la evaluación de manera que el estudiante desempeñe un rol activo y protagónico.
2.3 Desarrollo de un ciclo metodológico destinado al tratamiento de la participación activa y protagónica del estudiante en la evaluación de su aprendizaje.

Etapa 3: Fase de control

En esta fase tiene lugar el seguimiento y control del proceso de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas, con el propósito de comprobar si los profesores siguen las orientaciones metodológicas y si tienen en cuenta las experiencias comunicadas en el taller metodológico. Para ello, se planifican observaciones de los distintos tipos de formas de organizativas del proceso docente y les son aplicadas encuestas y/o entrevistas a estudiantes y profesores. Se arribará a conclusiones a partir del análisis de los resultados de la implementación de la metodología.

Acciones a realizar en correspondencia con el tipo de evaluación

Tipo de evaluación: frecuente o sistemática
Momento de realización: durante el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
Responsables: el profesor, cada estudiante y la brigada estudiantil.
Propósito: retroalimentar la enseñanza, el aprendizaje del estudiante y el propio proceso de enseñanza-aprendizaje.

Acciones:

1. Análisis de los objetivos específicos a lograr en cada una de las formas organizativas del proceso docente, para identificar las demandas de aprendizaje expresadas en dichos objetivos.
2. Análisis y discusión de los criterios o referentes de valoración del estado del aprendizaje.
3. Los criterios o referentes les son presentados a los estudiantes, con la intención de reducir al mínimo la subjetividad contenida en las valoraciones, además de orientarlos respecto a cómo realizarlas.
4. Monitorear el proceso de aprendizaje de los contenidos a asimilar.
5. Los estudiantes se involucran activamente en el control de su aprendizaje y el de sus compañeros, por medio de la autoevaluación, la evaluación entre pares y la evaluación compartida con el profesor.
6. Retroalimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura, a partir de los resultados de las evaluaciones frecuentes.
7. Los resultados de las evaluaciones serán usados por el profesor y los estudiantes para revertir los desaciertos en la enseñanza, el aprendizaje y la propia evaluación.
8. Consensuar cuáles decisiones tomar en aras de erradicar las dificultades identificadas por medio del (auto) diagnóstico.
9. Puesta en práctica de las decisiones acordadas en 5. Valoración de los resultados de su implementación.

En las evaluaciones frecuentes en las clases de conferencia: Los estudiantes serán implicados activamente en el aseguramiento del nivel de partida evaluando las respuestas emitidas por sus compañeros a preguntas formuladas por el profesor. También pudieran valorar la exposición realizada por ellos (o un compañero) de algún tópico del contenido cuyo estudio fue orientado previamente o durante la clase; autoevaluarse en torno a la autopreparación previa a la clase (la de cada estudiante y la del grupo estudiantil), además de su desempeño durante la clase. Las valoraciones por ellos emitidas serán contrastadas con las hechas por el profesor.

En las evaluaciones frecuentes en las clases prácticas: Lo referido anteriormente a las conferencias es válido en este tipo de clase. Como aspecto relacionado con esta tipología de clases, se considera oportuno expresar que, en cada una de estas, los estudiantes realizarán autoevaluaciones y evaluaciones entre pares en torno al dominio del contenido matemático requerido ante cada ejercicio (definiciones, teoremas, procedimientos, entre otros), la correcta escritura de los pasos lógicos, razonamiento lógico, limpieza y organización, el uso adecuado del lenguaje oral y el escrito de la Matemática y la utilización de la vía más racional ante determinado ejercicio. Las valoraciones emitidas por ellos serán contrastadas con las realizadas por el profesor.

Como entrenamiento del estudiante para el acto de aplicación de los exámenes, serán incluidas, a modo de ejercicios, preguntas de formato diverso: de opción múltiple, de completamiento y las de verdadero-falso con justificación. Las preguntas de desarrollo requerirán no solo de la memorización, sino también de la interpretación y la aplicación del contenido a la solución de problemas. En tal sentido, los estudiantes emitirán valoraciones del estado de su entrenamiento con vistas a la aplicación de cada examen.

En las evaluaciones frecuentes en clases de seminario: usar el debate como técnica oral de evaluación, para indagar en el aprendizaje de los contenidos teóricos; en actitudes tales como el respeto a la opinión ajena, saber escuchar, ser crítico y/o autocrítico; la honestidad; contenidos procedimentales(dominio de procedimientos algorítmicos y desarrollo del pensamiento lógico-deductivo), la fijación de conceptos, así como el contenido declarativo factual(memorización de definiciones de conceptos, uso de simbologías y del lenguaje técnico de la Matemática, enunciados de teoremas, reglas, entre otros).

En el caso de las evaluaciones frecuentes en las consultas: a través de las respuestas dadas por los estudiantes a preguntas formuladas por el profesor u otro(s) estudiante(s) durante las orientaciones pedagógicas y científico-técnicas que este dará a los estudiantes(indicaciones, aclaraciones, ejemplificaciones y respuestas a preguntas formuladas por ellos), el estudiante ejercerá la autoevaluación y la evaluación de su autopreparación y la de los otros estudiantes; para ello, también podrán tomarse como base el trabajo individual o colectivo en pizarra y el debate en torno a la vía de solución de ejercicios.

Tipo de evaluación: evaluación parcial (exámenes, encuentros comprobatorios y trabajos extraclase):
Momento de realización: al realizarse un corte en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
Responsables: el profesor, cada estudiante y la brigada estudiantil.
Propósito: realizar un balance del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, hasta el momento en que se decide hacer el corte evaluativo.

Acciones:

1. Análisis de los objetivos particulares de cada tema a evaluar, para identificar las demandas de aprendizaje expresadas en dichos objetivos.
2. Elección y análisis de los objetivos que serían incluidos en la evaluación, como consecuencia de los resultados de las evaluaciones frecuentes.
   El estudiante colaborará en las decisiones respecto a cuáles objetivos deben ser incluidos en la evaluación y cuáles han resultado suficiente y satisfactoriamente evaluados.
3. Consensuar la(s) posible(s) técnica(s) de evaluación a aplicar. Análisis de las condiciones para su aplicación.
   Se prepara a los estudiantes para enfrentar las situaciones de evaluación, a través de la familiarización con las ventajas y limitaciones de las técnicas de evaluación de las que se hará uso. Entre las que serán usadas están el portafolio y los trabajos extraclase.
4. Aplicación del correspondiente instrumento de diagnóstico.
5. Retroalimentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura a partir del análisis de los resultados de 4.
6. Consensuar cuáles decisiones tomar en aras de erradicar las dificultades identificadas por medio del (auto) diagnóstico.
7. Puesta en práctica de las decisiones acordadas en 6. Valoración de los resultados de su implementación.

En el caso de las evaluaciones parciales por medio de exámenes:

- Hacer de los estudiantes sujetos activos durante el proceso de realización de los exámenes parciales y finales. En tal sentido, el profesor y los estudiantes analizarán, de conjunto, los objetivos y los contenidos a incluirse en la evaluación, el tipo de examen, cantidad y tipos de preguntas, además de una posible disposición de estas en el cuerpo del temario de examen;
- serán incluidas preguntas de formato diverso[3] ;
- la incorporación del libro de texto y las notas de clases como fuentes de consulta durante la realización de ejercicios incluidos en el temario permitirá acercar las exigencias de la evaluación a las de la futura profesión y la vida cotidiana; además de poder evaluar el desarrollo de habilidades tales como el uso racional de bibliografías; la interpretación; la comprensión de conceptos, definiciones y teoremas matemáticos; la comprensión de procedimientos algorítmicos; y el razonamiento lógico;
- les serán declarados a los estudiantes elementos relacionados con los criterios de calificación, en aras de implicarlos, desde el propio acto del examen, en la valoración de sus resultados. Tal decisión contribuirá a facilitar el otorgamiento de notas calificativas derivadas de la discusión de los resultados de los estudiantes en los exámenes;
- la discusión entre el profesor y los estudiantes de los resultados de los exámenes será realizada tanto a nivel individual como a nivel de brigada;
- el profesor y los estudiantes consensuarán cuáles decisiones poner en práctica, derivadas de los resultados de los exámenes.

Resultados/análisis de resultados/implicaciones

- En principio, algunos estudiantes ofrecieron resistencia a participar en los debates, pero después, al percibir las potencialidades de esta técnica, comprendieron las ventajas de su uso;
- los estudiantes que resolvieron las tareas extraclase y recibieron el correspondiente seguimiento por parte del profesor y otros compañeros de la brigada estudiantil obtuvieron resultados satisfactorios en los exámenes parciales y finales con preguntas de formato semejantes, además de dar un salto cualitativo en lo que respecta a la valoración de sus aprendizajes. No obstante, algunos estudiantes ofrecen resistencia a la realización de tareas extraclase, por no haber sido aplicada en asignaturas de Matemática en cursos escolares anteriores, además de no haber erradicado el finalismo académico;
- en relación con el uso de los portafolios, inicialmente los estudiantes no comprendieron su utilidad, por no haberles resultado previamente conocido, pero algunos cambiaron su actitud ante el uso sistemático de este.

Con el propósito de conocer el criterio de los estudiantes en torno a la manera en que percibieron la evaluación, se les aplicó la técnica de PNI (Positivo-Negativo-Interesante) al concluir el semestre de la asignatura. El análisis de las respuestas permitió identificar las siguientes opiniones:

Positivo:

- la motivación hacia el estudio que el profesor creó en los estudiantes por medio de las técnicas de evaluación;
- la realización de seminarios en los que siempre un grupo de estudiantes desempeñó el rol de evaluadores del aprendizaje de los demás;
- las consultas desarrolladas les resultaron productivas, por tener que jugar el ellas el rol de evaluadores de su propio aprendizaje, del de los otros estudiantes y de la brigada.

Interesante:

- La utilización de portafolios para llevar a cabo el seguimiento del estudiante en su aprendizaje;
- la utilización de los portafolios constituyó una manera de enfatizar en los contenidos y de lograr que los estudiantes aprendieran de los errores y aciertos durante la realización de las tareas extraclase;
- la oportunidad de practicar la autoevaluación, lo cual demostró lo valiosa que es para realizar una valoración autocrítica acerca del nivel de desarrollo alcanzado en la asignatura y así ser capaz de identificar en qué aspectos del contenido hay que insistir hasta lograr su correcto aprendizaje;
- la práctica de la evaluación entre compañeros permitió identificar los estudiantes con mejores resultados en la asignatura y los de mayores dificultades, lo cual es de vital importancia para que los miembros de una misma brigada estudiantil se conozcan entre sí y se ayuden más y mejor.

Conclusiones

Se considera que con la implementación de la metodología propuesta se obtuvieron resultados satisfactorios, en tanto propició un rol activo y protagónico de los estudiantes en la evaluación de su aprendizaje matemático.

Al ser insertados los estudiantes en el proceso evaluativo mediante la autoevaluación, la evaluación entre compañeros y la evaluación compartida con su profesor, resultaron favorecidas la crítica y la autocrítica, así como el reconocimiento a los que obtuvieron mejores resultados en las asignaturas de Matemática.

La participación de los estudiantes a través de la autoevaluación, la evaluación entre compañeros y la evaluación compartida con su profesor, permitió reconocer el impacto positivo de la ayuda de los otros en el aprendizaje de cada uno, reafirmándose así el planteamiento de Vigotsky consistente en que el aprendizaje se da en dos planos: el intersicológico, en el que el individuo intercambia e interactúa con otros; y el intrasicológico, que se da en lo individual; al decir de Vigotsky, este es el verdadero aprendizaje.

Los criterios emitidos por los estudiantes acerca de la evaluación fueron positivos, destacando el uso del portafolio y la posibilidad de participar en la evaluación tanto de sus respectivos aprendizajes como en la de sus compañeros.

Notas:

1. Esta carrera se cursa en la Universidad de las Ciencias Informáticas, en La Habana, Cuba, desde el año 2002.
2. Otros ejemplos pueden verse en (Martínez, 2015).
3. Ver la descripción de lo realizado en las clases prácticas.

Referencias bibliográficas

Álvarez, I. (2008). Evaluación del aprendizaje en la universidad: una mirada retrospectiva y prospectiva desde la divulgación científica. *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, *14*(6), 235-272.

Balderas, I. & Balderas, K. (2018). Coevaluación en educación superior. *Debates en Evaluación y Currículum/Congreso Internacional de Educación*, *4*(4). Recuperado de https://posgradoeducacionuatx.org/pdf2018/A188.pdf

Bautista-Cerro, M.J & Murga, M. A. (2011). *"*La evaluación por pares: una técnica para el desarrollo de competencias cívicas (autonomía y responsabilidad) en contextos formativos no presenciales. Estudio de caso*"*. *XII Congreso Internacional de Teoría de la Educación, Autonomía y Responsabilidad. Contextos de aprendizaje y educación en el siglo XXI,* 20-22 octubre, Barcelona, Comunicación.

De Armas, N., Lorences, J. & Perdomo, J.M. (2003). Caracterización y diseño de los resultados científicos como aportes de la investigación educativa. *Evento Internacional Pedagogía, 40*.

Del Puerto, S. & Seminara, S. (2014). Experiencias innovadoras en evaluación. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *27*.

Diez, T. (2008). *Un sistema de evaluación del aprendizaje para la matemática superior en perfiles ingenieros*. Cuba: Universidad de La Habana.

Digión, M. & Digión, L. (2016). El portafolio de evaluación en un aula matemática universitaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *29*, 653-659.

Fuentes, D. & Solís, F. J. (2016). Incidencia de las prácticas evaluativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje en la asignatura matemática dos, en la Universidad Nacional de Ingeniería UNI-RUACS, Estelí, Nicaragua, 2015. *Revista Científica de FAREM-Estelí*, *(19)*, 46-60.

García-Martínez, L.F. (2019). La autoevaluación: alternativa constructivista para la metacognición y el rendimiento académico en un curso de Ingeniería Industrial. *Educación en Ingeniería*, *14*(27), 138-147.

Gil, J. & Padilla, Mª. T. (2009). La participación del alumnado universitario en la evaluación del aprendizaje. *Educación XX1*, *12*, 43-65.

Gómez, M.Á & Quesada, V., (2017). Coevaluación o evaluación compartida en el contexto universitario: la percepción del alumnado de primer curso. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *10*(2), 9-30.

González, M. (2000). Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria. *Revista Pedagogía Universitaria,* *5*(2).

Gort, A. (2008). *Diagnóstico y transformaciones en la evaluación del aprendizaje: un estudio en la Facultad de Biología de la Universidad de La Habana*. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Estudio para el Perfeccionamiento de la Educación Superior (CEPES). Ciudad de La Habana, Cuba.

Guzmán, L.E. (2018). *Incidencia de la rúbrica como instrumento de evaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje en el área de Matemática de los estudiantes de básica media de la Unidad Educativa Fiscal ¨Gral. Luis Alfredo Molina Arroyo¨, de la Ciudad de Guayaquil, año lectivo 2017-2018. Propuesta: manual de elaboración de rúbrica para evaluar a los estudiantes en el área de Matemática*. Ecuador: Universidad de Guayaquil. Recuperado de http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/34783

Hernández, A. (2013). *Sistema de actividades para propiciar la evaluación formativa en la enseñanza de la Física*. Palma de Mallorca: Universidad de Las Islas Baleares. Recuperado de https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/127225/tahc1de1.pdf

Ibarra, M.S, Rodríguez, G. & Gómez, M.A. (2012). La evaluación entre iguales: beneficios y estrategias para su práctica en la universidad. *Revista de Educación,* (359), 206-231.

Martínez, A. (2015). *Metodología para propiciar el rol activo y protagónico del estudiante en la evaluación del aprendizaje del contenido de la disciplina de Matemática en la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas*. Tesis de maestría no publicada. Universidad de de La Habana. Ciudad de La Habana, Cuba.

MES. (21 de junio de 2018). Reglamento para el Trabajo Docente y Metodológico. Resolución No. 210. *Gaceta Oficial de la República de Cuba*. Recuperado de https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwipiuappoHmAhVDmVkKHQftBasQFjAAegQIAxAB&url=https%3A%2F%2Fwww.mes.gob.cu%2Fes%2Fresoluciones&usg=AOvVaw3vVz4w577Vljmr5mf46Gqm

Pérez, O. L. (2000). *La evaluación del aprendizaje como elemento de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para ciencias técnicas*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Camagüey, Cuba.

Pérez, O. L. (2007). *La evaluación del aprendizaje en la Educación Superior.* República Dominicana: La Escalera.

Reinel, J. D., Álvarez, R.E. & Del Carmen, Y. (2018). *La evaluación formativa y el uso de estrategias didácticas para fortalecer el proceso de regulación y autorregulación de los aprendizajes en matemáticas en el grado quinto de la institución educativa Antonio Santos*. Colombia: Universidad Santo Tomás. Recuperado de http://hdl.handle.net/11634/13349

Rodríguez, G., Ibarra, M., Gallego, B., Gómez, M. & Quesada, V. (2012). La voz del estudiante en la evaluación del aprendizaje: un camino por recorrer en la universidad. *Relieve*, *18*(2).

Ruiz, G., Milevicich, L. & Lois, A. (2018). La evaluación como instrumento para la enseñanza del Cálculo. Alternativas en la educación universitaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2).

Trelles, C.A., Bravo, F.E. & Barrazueta, J.F. (2017). ¿Cómo evaluar los aprendizajes en Matemáticas? *INNOVA Research Journal*, *2*(6).

Valle, A. D. (2010a). *Algunos resultados científico-pedagógicos. Vías para su obtención.* Cuba: Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

Valle, A. D. (2010b). *La investigación pedagógica. Otra mirada.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Vizcaíno Avendaño, C., Marín Romero, F., & Ruiz Ospino, E. (2017). La coevaluación y el desarrollo del pensamiento crítico. *Advocatus*, (28), 141-149. Recuperado de https://doi.org/10.18041/0124-0102/advocatus.28.892

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DOBLE MEDIANTE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA CARRERA DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

FORMATION OF THE DOUBLE INTEGRAL CONCEPT THROUGH MATHEMATICAL MODELING IN THE COMPUTER SCIENCE ENGINEERING DEGREE

Jorge Luis Bravo Viera, Lissette Rodríguez Rivero
Universidad de Sancti-Spíritus "José Martí Pérez" (Cuba)
jlbravo@uniss.edu.cu, lrrivero@uniss.edu.cu

Resumen
El escrito muestra los resultados de la implementación práctica de un modelo didáctico para la formación del concepto de integral doble mediante la modelación matemática de problemas que se manifiestan en contextos físicos en un grupo de estudiantes que se preparan como ingenieros informáticos, los que como parte de su formación inicial cursan la disciplina Matemática Superior con un peso significativo en el plan de estudio por la importancia del contenido de esta para el adecuado desempeño profesional de los futuros egresados, los que en contraposición, rechazan la disciplina alegando que la Matemática es de poca utilidad práctica.

Palabras clave: conceptos matemáticos, modelación, contextualización

Abstract
This paper shows the results of the practical implementation of a teaching model for the formation of the concept of double integral through the mathematical modeling of problems that arise in physical contexts in a group of computer science engineering students, who in their initial training study the discipline Advanced Mathematics, which plays a significant role in the curriculum due to the importance of its content for the suitable professional performance of the future graduates, the ones who in opposition, reject the discipline by arguing that Mathematics is of little practical use.

Key words: mathematical concepts, modelling, contextualization

Introducción

Las universidades cubanas que asumen la formación de ingenieros informáticos en la actualidad se proponen que el futuro egresado sea un profesional capaz de desempeñarse de forma exitosa en su campo profesional; aspiración que se manifiesta desde los documentos rectores de la carrera donde se explicita la importancia del aprendizaje de los contenidos matemáticos tanto para el desarrollo intelectual del joven universitario como para resolver problemas profesionales.

En tal sentido, se ponderan la formación de conceptos, el desarrollo de habilidades de cálculo, el desarrollo de habilidades para la modelación y solución de problemas matemáticos que se refieren a contextos equivalentes a los que se enfrentará el egresado en ejercicio de la profesión.

El programa de la disciplina Matemática Superior para Ingeniería Informática exige el desarrollo de un amplio sistema de conocimientos matemáticos que en general se desarrollan en los dos primeros años de la carrera; en el primer año se desarrollan los contenidos de álgebra lineal, cálculo diferencial y cálculo integral, quedando para el segundo año sucesiones y series, ecuaciones diferenciales y matemática numérica.

En tal sentido, este escrito se centra en el desarrollo de un procedimiento para la formación del concepto de integral doble, contenido que se desarrolla en la asignatura Matemática II en el segundo semestre del primer año y forma parte de los resultados de los estudios de Doctorado en Ciencias Pedagógicas del autor principal y de un proyecto de investigación de la universidad, investigación aun en curso.

La adecuada comprensión de la integral doble es fundamental para la generalización del concepto de integral definida estudiado previamente y sirve como referencia para el tratamiento de otros conceptos como el de integral triple, integral de línea e integral de superficie.

En cumplimiento de una de las exigencias descritas, una tarea del docente es la búsqueda de los problemas de aplicación afines a los intereses de los estudiantes y que potencien su desempeño profesional.

Por tanto, se asume como problema: ¿Cómo formar el concepto de integral doble en estudiantes de Ingeniería Informática? El concepto de integral doble es complejo y en consecuencia se requiere de recursos didácticos para su formación y la práctica pedagógica muestra que no se desarrollan de forma adecuada a pesar de ser considerado esencial en la formación de ingenieros desde los documentos rectores de la carrera y la literatura científica en el campo de la Didáctica de la Matemática.

La bibliografía estudiada (Puig, 1997), (Fernández y Puig, 2002), (Martínez, 2003), (Mederos y González, 2005), (Ramos y Font, 2006), (Goizueta y Planas, 2013), (Claros, Marín y Machado, 2015), (PISA, 2015), (Botello, 2015), (Gómez y Cañada, 2016), (González, 2016), (Molina, 2017), (Puerto y Gamboa, 2018) y (Alexander, 2018) permitió inferir la relación entre la modelación matemática, el contexto matemático al que se refiere la tarea de modelación y la formación de los conceptos que forman parte inherente del modelo matemático en cuestión.

Consecuentemente, la alternativa para la formación de conceptos que se asume en este trabajo es la modelación (Mederos y González, 2005) y (Molina, 2017), que consiste en plantear un sistema de problemas que conducen a modelos particulares y mediante una generalización se obtiene un modelo general directamente relacionado con el concepto de integral doble.

Marco teórico

Los fundamentos teóricos se refieren a la formación de conceptos, la modelación matemática y la contextualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

En correspondencia con el objeto de esta investigación son relevantes los resultados expuestos en (Mederos y González, 2005) y (Molina, 2017), donde se muestra la importancia de un tipo especial de modelación denominada: modelación conceptual.

Estos autores proponen ideas valiosas dentro de las que se destaca la necesidad de asumir o elaborar un modelo didáctico adecuado para la formación de los conceptos centrales del Cálculo de acuerdo con la realidad educativa concreta, en este caso se trata de la formación del concepto de integral doble por su importancia en la construcción teórica del contenido matemático y en la modelación matemática de problemas que se manifiestan en contextos físicos.

De la consulta de estas y otras fuentes de información especializadas, se constata que la modelación conduce a la obtención de un modelo lo más sencillo posible, pero que sea capaz de reflejar una gran cantidad de aspectos del objeto modelado, de modo que al estudiar el modelo se puedan inferir rasgos del objeto real, por lo que la contextualización del proceso de enseñanza-aprendizaje es importante para tales fines.

En cuanto al estudio de la contextualización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática fue significativo el trabajo de Botello (2015) que realiza un estudio profundo del concepto de contexto, asume tres tipos: contexto real, contexto simulado y contexto evocado en correspondencia con autores clásicos de la temática como Martínez (2003) y el de (Puerto y Gamboa, 2018), donde se muestra la importancia de contextualizar la enseñanza de la Matemática para la asimilación de los conceptos en la formación de ingenieros, asumiendo este proceso desde una perspectiva interdisciplinaria.

La modelación y su importante rol en la formación de los ingenieros informáticos se argumentan en González (2016) y Alexander (2018) que plantea una clasificación de cuatro tipos de tareas de modelación matemática, las ejemplifica y hace referencia al contexto.

En la mayoría de los trabajos publicados sobre Didáctica de la Matemática, el término se utiliza en su sentido coloquial e impreciso, aunque se concuerda con la idea de que "con relación al término contexto, hay básicamente dos usos. Uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, el otro consiste en dar más detalles sobre el caso particular -enmarcarlo en el entorno-" (Ramos y Font, 2006, p.1).
Martínez (2003) realiza un estudio profundo del concepto de contexto, no lo define, pero sí identifica y caracteriza tres tipos de contexto en la enseñanza de la Matemática: contexto real, contexto simulado y contexto evocado. Esta clasificación es asumida además por Ramos y Font (2006) y Botello (2015).

> Desde la perspectiva asumida por los investigadores del proyecto PISA (2015) "un contexto es un entorno extra-matemático o intra-matemático dentro del cual se interpretan los elementos de un *complejo matemático* (por ejemplo, un problema, una tarea o una colección de objetos matemáticos, relaciones, fenómenos, etc.). Un contexto es tanto el entorno en el cual un complejo matemático dado ya se ha establecido (entorno intra-matemático), como un entorno que se presta a la activación de tal complejo y que entonces se establece en ese contexto (entorno extra-matemático)". (PISA, 2000, p.85).

Nótese que en esta definición utiliza el término entorno como concepto subordinante, pero este tampoco está bien definido, lo que implica un problema para la adecuada comprensión del concepto y la referida definición, sin embargo, aclara elementos esenciales al diferenciar lo intra-matemático, en general referente a aspectos teóricos de lo extra-matemático conformado básicamente por los problemas de aplicación.

Para el logro de la contextualización de los contenidos matemáticos en necesario realizar un profundo sobre el análisis didáctico fenomenólogo en la enseñanza de la Matemática, teniendo en cuenta que el contexto del aprendizaje de las matemáticas incluye las potencialidades del entorno cotidiano en que se desarrolla la vida del estudiante, lo cual es fundamental para que este asuma una actitud positiva ante el estudio de esta importante materia que es abstracta por excelencia.

Por el desarrollo actual de las nuevas tecnologías que han revolucionado casi todos los procesos sociales y científicos, el concurso del ingeniero informático es requerido no solo para realizar proyectos complejos, ya que también es necesario el desarrollo de programas o aplicaciones móviles que faciliten la solución de los problemas que pueden presentarse en la práctica cotidiana.

Para resolver estos problemas es necesario, además del conocimiento propiamente informático, conocer los modelos matemáticos para estos problemas o mejor tener habilidades para realizar esta modelación que implica invariablemente conocimiento del contexto inherente a la problemática objeto de estudio.

Metodología

En la formación de conceptos matemáticos por modelación, la actividad fundamental del docente consiste en la búsqueda de contextos en los que se aplique el concepto a formar y la formulación, reformulación o compilación de un sistema de tareas que exigen al estudiante la elaboración de un modelo matemático en el que se utilizan elementos representativos del referido concepto.

Si las tareas se refieren a contextos reales, en muchos casos esta contextualización supone la integración de conocimientos físicos al proceso de modelación. Para este caso se elaboró el siguiente procedimiento:

1. Realizar un estudio profundo del contenido matemático relacionado con el concepto.
2. Buscar los principales problemas de aplicación.
3. Realizar un estudio de los problemas físicos que se modelan con concepto matemático a desarrollar.
4. Compilar, reformular o formular problemas equivalentes donde se muestre la aplicación a la práctica cotidiana del concepto.
5. Seleccionar problemas propios de la profesión del estudiante en los que se aplique el concepto.
6. En esta investigación se asume como procedimiento para la modelación y estudio de conceptos el fundamentado por Mederos y González (2005), adecuado de modo que sea más operativo al caso particular que se estudia aquí:

1. Desarrollar un sistema de tareas que se manifiesten en diferentes áreas de la Física, que para su solución se necesite definir el concepto a formar.
2. Destacar cuáles son los rasgos esenciales o comunes a cada situación-problema y por un proceso de abstracción-generalización definir el concepto matemático.
3. Definir los conceptos de las otras áreas de la Física, ahora utilizando el concepto matemático ya definido.
4. Hacer un estudio del concepto matemático definido, utilizando un procedimiento que permita conocerlo de manera profunda.
5. Transferir los conocimientos acerca del estudio realizado del concepto definido a los conceptos de las áreas de la Física que le dieron origen.

A continuación, se presenta un ejemplo que se utilizó en la formación del concepto de integral doble en el grupo de primer año de Ingeniería Informática, se plantearon 5 tareas que se manifiestan en contextos relacionados con problemas físicos, cada una aportó elementos representativos del concepto. La lógica del proceso se puede representar en el siguiente esquema:

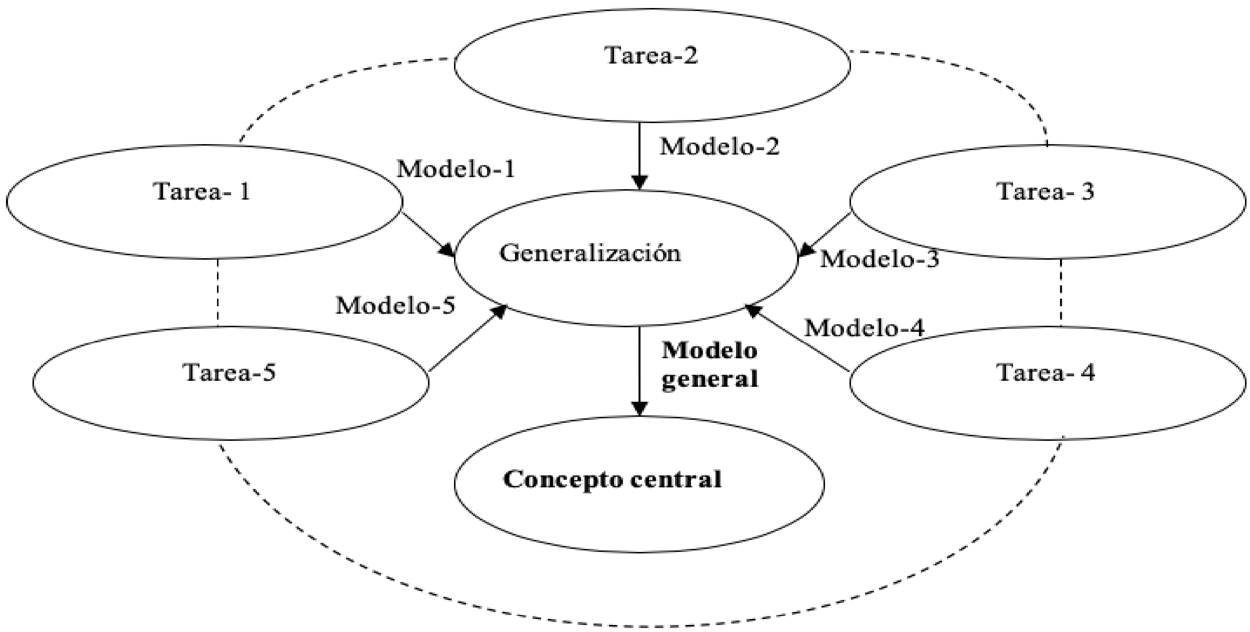


Figura1. Gráfico que ilustra el proceso de formación de un concepto matemático mediante la modelación. Fuente: propia.

Tareas:

1. Una habitación cerrada es fumigada con un pesticida tóxico, al finalizar el trabajo se han suministrado akg del material venenoso. Se conoce que el ambiente se hace respirable para una densidad de bkg/m^3, si la habitación tiene cuatro paredes planas, perpendiculares dos a dos y el techo tiene forma oblicua. ¿Cómo calcular la densidad?
2. En las máquinas de las industrias y los automóviles en muchas ocasiones un eje gira dentro de una cavidad, a este dispositivo tecnológico se le denomina cojinete de collarín. Entre las áreas en contacto se produce el denominado rozamiento discoidal; para que el sistema rote y se mantenga el equilibrio del eje, el momento M del par aplicado a este, debe ser numéricamente igual al de las sumas de los momentos de la fuerza de rozamiento ΔF . Luego para la construcción de maquinarias que incluyan este dispositivo hay que conocer el módulo del par M para vencer la resistencia debido al rozamiento del cojinete. ¿Cómo determinarlo?
3. En el diseño de un circuito eléctrico como el de un televisor o computadora se manejan muchas variables, una consiste en controlar la influencia de los campos eléctricos sobre las cargas en los conductores, por tanto, determine un modelo matemático para el cálculo de la intensidad del campo eléctrico (E) producido por una superficie cuadrada sobre una carga punto (q) situada a una distancia (x) de su centro.
4. En el diseño de un circuito eléctrico como el de un televisor o computadora se manejan muchas variables, una consiste en controlar la influencia de los campos eléctricos sobre las cargas en los conductores. Un caso típico es determinar la carga total (c) de una placa rectangular con una determinada densidad de carga (σ). Elabore un modelo matemático para el cálculo de c.
5. En el desarrollo de un experimento se observan dos variables aleatorias continuas V y E, donde V se refiere a la velocidad de una corriente de aire y E a la estabilidad del fuselaje de una aeronave. La función de densidad

de probabilidad conjunta puede determinarse por la función $d: A \to B, donde: A \subset R^2 \wedge B \subset R$, que usualmente se denota $d_p = d_p(v;e)$, pero cuando $a \le v \le b \wedge c \le e \le d$, su dominio toma la forma de un rectángulo de lados $l_1 = b - a$ y $l_2 = c - d$, además la representación gráfica de dicha función es una superficie de R^3 y el valor del volumen del cuerpo $W = \{(v;e;d) \in R^3; a \le v \le b, c \le e \le d \wedge 0 \le d_p \le d_p(v;e)\}$ es numéricamente igual a la probabilidad de que la velocidad del aire esté en el intervalo $[a;b]$ y que la estabilidad del fuselaje se encuentre en $[c;d]$. ¿Cómo determinar esta probabilidad?

6. Analice detenidamente las cuatro situaciones-problemas anteriores y reflexione en cuanto a:
   ¿Cuántas exigencias impone cada tarea? y ¿En qué consiste(n)?
   ¿Qué magnitudes se necesita calcular? y ¿Qué tienen en común?
   ¿En qué consistió el procedimiento cada caso? ¿Es posible construir un modelo general que incluya a los obtenidos como particulares?

Luego al desarrollar el sistema de tareas se comienza el proceso de formación del concepto de integral doble desde el análisis de problemáticas que se modelan con este objeto matemático y que tradicionalmente no son las que refieren los textos de Análisis Matemático o Cálculo.

Nótese que la solución del sistema de situaciones problemas implica el desarrollo de tareas integradoras siguiendo a Del Sol, Hernández y Arteaga (2014) y a López, González y Cardoso (2015) en las cuales tiene sentido aplicar la integral doble y transita siguiendo un esquema previamente establecido cuya representación gráfica puede ser la que se muestra en la Figura 1.

Aunque se han representado cinco tareas, en la práctica no se tiene que ser rígido, de hecho como cada una se modela con el mismo concepto, es realmente una situación-problema que se ha reformulado de modo que el estudiante se enfrente a diferentes contextos de trabajo y pueda realizar la generalización que deriva en la modelación del concepto central.

Solución de una de las tareas utilizadas

La tarea que se explicará es el número dos, esta tiene como objetivo: explicar la importancia de la integral doble para el análisis del rozamiento discoidal de modo que se muestre su importancia para el funcionamiento de los dispositivos tecnológicos que tienen este mecanismo.

Nótese que:

Es la segunda tarea y por tanto ya el estudiante tiene una idea primaria del concepto al asimilar algunas de sus características.

La tarea puede utilizarse luego como ejemplo de aplicación del cambio de variables a coordenadas polares.

El texto hace referencia a palabras técnicas a las que el docente debe dar un tratamiento adecuado y brindar los niveles de ayuda que requieran los estudiantes.

Para facilitar la comprensión de la problemática analizada se puede presentar la siguiente representación gráfica:

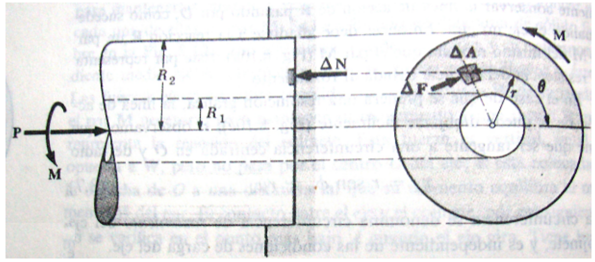


Figura 2. Fuente: (Beer y Russell, 1967)

En virtud de las características del contexto el profesor debe referirse a las ecuaciones físicas que permiten inferir la formulación del modelo matemático.

El módulo de la fuerza normal es: $\Delta N = P\Delta A / A$, donde A es el área de un anillo circular, que es el caso más general.

El módulo de fuerza de rozamiento es: $\Delta F = \mu_k \Delta N$, luego respecto al eje central:

$\Delta M = r\Delta F = \frac{r\mu_k P\Delta A}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}$,

Puede preguntarse a los estudiantes:
¿Cómo describirías el movimiento circular de una porción infinitesimal de área dA que dista del eje central una distancia r y describe un ángulo θ?

Al analizar el movimiento circular de una porción infinitesimal de área dA, se infiere que dista del eje central una distancia fija r y describe un ángulo θ describe una trayectoria en forma de circunferencia o porción de circunferencia de radio r y el centro coincide con el del disco.

Si interesa el rozamiento en toda el área ¿Qué hacer?
Como nos interesa toda el área de contacto hay que sumar las acciones de cada porción de área.

¿Qué operación matemática permite esta suma?

La integral definida o la integral doble, como la región de integración es un anillo circular la integral que se obtendrá será doble, ahora las características de esta región indica que es más adecuado utilizar el cambio de variables a coordenadas polares, este hecho es conocido por los estudiantes del curso de Matemática I.

Así la expresión $dA = rd\theta dr$, se explica de forma equivalente a $dA = dxdy$, donde r es el jacobiano de la transformación y los límites de integración son los siguientes: $R_1 \le r \le R_2$ y $0 \le \theta \le 2\pi$, puesto que en la expresión M solo depende de r y θ, la integral doble a calcular es:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} \frac{r\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} r dr d\theta = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta.$$

Luego:

$$M = \frac{\mu_k P}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r^2 dr d\theta.$$

El profesor como información puede dar la solución, pero no calcular propiamente, ya que todavía no se ha desarrollado el cálculo de integrales dobles mediante integrales iteradas.

Al resolver esta integral doble se tiene que : $M=\frac{2}{3}\mu_k P\frac{R_2^3-R_1^3}{R_2^2-R_1^2}$, con un proceso análogo se puede probar que cuándo el área de contacto en el cojinete es todo el círculo, $M=\frac{2}{3}\mu_k PR$.

Se destaca la importancia del cambio de variables a coordenadas a polares en el cálculo de la integral doble, hecho que será muy útil en el desarrollo del tema, en el resto de las asignaturas de la disciplina y en general cuando se resuelven problemas de aplicación, siempre que el contexto lo permita.

Se explica el procedimiento seguido, las aplicaciones del contenido tratado y se orienta la búsqueda de información en otras fuentes.

Al finalizar la actividad docente se aplicó una encuesta para constatar el nivel alcanzado por los estudiantes en la formación del concepto, este mismo instrumento se aplicó igualmente a otro grupo de la propia carrera donde se introdujo el concepto por la vía tradicional para comparar los resultados.

Resultados

La encuesta aplicada, y la observación participativa sugieren que la formación del concepto de integral doble por esta vía permitió la asimilación por parte de los 24 estudiantes del grupo de primer año de Ingeniería Informática de problemas de aplicación del concepto objeto de estudio desde que se comienza a desarrollar el contenido en cuestión.

Se constató que los estudiantes se implicaron en el desarrollo de las tareas con mayor motivación, no solo en las referidas a la formación del concepto, sino en las actividades posteriores que se desarrollaron como parte del curso.

La encuesta aplicada al finalizar la actividad corroboró que la formación del concepto de integral por modelación permite que los estudiantes identifiquen los elementos asociados a este concepto y puedan aplicarlo tanto en las tareas de la asignatura como en situaciones concretas relacionadas con el campo de su profesión o la vida cotidiana.

Otro elemento analizado fue el análisis del producto de la actividad docente, fundamentalmente en la autopreparación de las clases prácticas y seminarios donde la mayoría (74,36%) de los estudiantes desarrollaron las actividades de autopreparación.

Ante la pregunta de que si prefieren esta vía para la Introducción de los nuevos contenidos, cerca del 90% de las estudiantes (88,9% exactamente) se proyectó de forma positiva.

Conclusiones

La disciplina Matemática Superior tiene un peso significativo desde el currículo base en la formación de ingenieros, este hecho no es fortuito ya que amplía la gama de conocimientos que posibilitan el vínculo de la Matemática con la vida y otras ciencias.

La formación de conceptos matemáticos está estrechamente relacionada con la modelación y la contextualización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática.

La formación de conceptos matemáticos mediante la modelación implica la contextualización del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, por lo que el docente debe asumir la tarea de compilar, reformular o formular tareas que se manifiesten en los contextos asumidos.

Si se asumen tareas que en contextos relacionados con el perfil del futuro egresado se contribuye a su desarrollo profesional, al prepararlo para resolver problemas prácticos aplicando el contenido matemático.

La formación del concepto de integral doble siguiendo el procedimiento descrito en este escrito permitió una mayor asimilación de este concepto y potenció la motivación de los estudiantes por la asignatura y sus aplicaciones, hecho que permitió potenciar el desarrollo de los estudiantes tanto en su desempeño académico como en su formación profesional.

Referencias bibliográficas

Alexander Villa-Ochoa, J. (2018). *Tipos de tareas en Modelación en Educación Matemática.* Recuperado el 12 de febrero de 2019 de http://funes.uniandes.edu.co/12557/1/Conferencia_Manizales.pdf

Beer Fernandino, P. y Russell Johnston, E. JR. (1967) *Mecánica vectorial para Ingenieros*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Botello García, Y. (2015). *Interdisciplinariedad de la matemática con las ciencias sociales y naturales en el grado quinto*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Del Sol, J. L., Hernández, Y., y Arteaga, E. (2014). Un recurso didáctico para la integración de conocimientos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Ciencias Exactas: las tareas integradoras. *Revista Universidad y Sociedad*, 6(4), 39-47.

Fernández Lajusticia, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *LA GACETA DE LA REAL SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA*, 5(2), 397–416.

Gil Escudero, G., Fernández García, J., Rubio Miguelsanz, F. y López Ramos, C. (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación. Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos. Proyecto PISA*. Recuperado el 5 de diciembre de 2011 de https://studylib.es/doc/1350249/http---www.oecd.org-edu-school-programmeforinternationals

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA, 7*(4), 155-170.

González Hernández, W. (2016). La modelación como competencia en la formación del profesional informático. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, 10(2), 59-71.

Martínez, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: Un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Mederos Anoceto, O. y González, B. E. (2005). *La modelación en la Educación Matemática*. Saltillo: Salvador Impresor, S. A.

Molina Mora, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *UNICIENCIA*. 31(2), 19-36.

López Méndez, E. R., González Ortega, A. M. y Cardoso Lara, M. (2015). La aplicación de tareas integradoras interdisciplinarias en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la formación inicial de los profesores de Ciencias Naturales. *Mendive.* 13(51), 1815-7696.

Puerto Viera, Y. y Gamboa Graus, M. E. (2018). Importancia de la contextualización de los conceptos matemáticos en la formación inicial del ingeniero industrial. Recuperado el 10 de enero de 2019 de http://roa.ult.edu.cu/bitstream/123456789/3671/1/Ponencia%20Yelena%20Evento%20provincial%20Universidad%202018.pdf

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Ramos, A.B. y Font, V. (2006). *Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica*. Recuperado el 20 de marzo de 2010 de http://www.pagvf.esy.es/index_archivos/FontRamos.pdf

ATIVIDADES DE ESTUDO E INVESTIGAÇÃO PARA A CONSTRUÇÃO DE MODELOS DE PIRÂMIDES TRINGULARES

STUDY AND RESEARCH ACTIVITIES FOR THE CONSTRUCTION OF TRIANGULAR PYRAMID MODELS

Maria José Ferreira da Silva, Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (Brasil)
zeze@pucsp.br, saddoag@pucsp.br

Resumo

Neste artigo, os autores têm como objetivo fazer uma reflexão a respeito da razão de ser do ensino de planificação de superfícies de sólidos geométricos, para construção de modelos, partindo de um estudo matemático já realizado a fim de propor Atividades de Estudo e Investigação – AEI, no sentido de Chevallard. Este estudo, prioritariamente de cunho teórico, foca no significado que alunos do ensino básico poderão construir, especificamente, na construção do modelo para uma pirâmide triangular a partir da planificação de sua superfície. Para o desenvolvimento dessa reflexão, utilizamos o software Geogebra como ferramenta para a construção do modelo, por permitir a manipulação da construção geométrica realizada e levantar conjecturas e, ainda, a produção de modelos de diversos tipos. Por outro lado, possibilita ao professor ampliar discussões a respeito de planificações, tanto para outros conteúdos, como é o caso da medida de volumes, quanto para outros tipos de sólidos.

Palavras-chave: sólidos geométricos, modelos, planificação

Abstract

In this article, the authors aim to reflect on the *raison d'être* of the teaching of geometric solid surfaces planning, for the construction of models, starting from a mathematical study that has been already carried out in order to propose Study and Research Activities (AEI), in Chevallard's sense. This study, primarily of a theoretical nature, focuses on the meaning that primary school students can construct, specifically the construction of the model for a triangular pyramid from planning its surface. For the development of this reflection, we used GeoGebra software as a tool to construct the model, because it allows manipulating the geometric construction performed and raising conjectures, as well as producing models of various types. On the other hand, it allows the teacher to develop discussions about planning, both for other contents, as it is the case of volume measurement, and for other types of solids.

Keywords: geometric solids, models, planning

Introdução

Interessados nas questões do ensino de Geometria Espacial, em particular, naquelas que envolvem planificação de superfícies de sólidos geométricos, buscamos neste artigo, baseando-nos em Silva e Almouloud (2018), propor Atividades de Estudo e Investigação – AEI, no sentido de Chevallard (2002) para a construção de modelos de pirâmides triangulares. O citado artigo apresenta um estudo matemático do problema e, a partir dele, pretendemos desenvolver tais atividades com o objetivo de buscar uma razão de ser de tal conteúdo escolar. Quando falamos de razão de ser de um tema matemático, estamos buscando respostas para o "por quê" e "para que" tal conteúdo é ensinado. Para Gascón (2003), no ensino secundário espanhol (12 a 16 anos) não só desapareceu a razão de ser das questões temáticas, como também das diferentes áreas em que se divide a matemática escolar. Para o autor, o desempenho do aluno em problemas de geometria analítica melhoraria, significativamente, se, em lugar de treinarmos as técnicas analíticas, dedicássemos tempo para que os alunos traduzissem esses problemas para a geometria sintética e os resolvessem com suas próprias técnicas, como por exemplo, com régua e compasso. Nesse sentido, o desenho geométrico assume sua importância. De acordo com Costa e Rosa (2015, p. 67) "em meados do século XIX, o ensino do Desenho Geométrico também começou a ser difundido no Brasil, embora não fosse uma prática pedagógica utilizada em todas as escolas do país". Para Zuin (2001) esse ensino propicia compreensão e embasamento teórico para a geometria plana, tanto para professores quanto para alunos do ensino fundamental, acrescenta que "a compreensão de muitos conceitos geométricos se materializa através de construções geométricas" (p.16).

Voltando ao assunto que aqui será tratado, em termos dos níveis de codeterminação inferiores de Chevallard (2002), trataremos na disciplina Matemática, no domínio da Geometria, no sector Geometria Espacial a respeito do tema poliedros, considerando o assunto planificação de superfícies de poliedros. Do ponto de vista didático, ou seja, como ensinar tal conteúdo, optamos pelas AEI, dentro da Teoria Antropológica do Didático que envolvem o questionamento da matemática escolar sugerindo o paradigma de questionamento do mundo. Para tal, construímos em Silva e Almouloud (2018), um Modelo Epistemológico de Referência para a construção de modelos de pirâmides triangulares utilizando o Geogebra e, neste artigo, no sentido de complementar esse estudo, buscamos elaborar uma proposta didática para tal ensino a partir de três AEI. Essas AEI implicam na construção de uma rede de questões, a partir de uma inicial – geradora – que provoca uma rede de respostas até que o questionamento inicial seja respondido. Para que tais respostas sejam construídas é indispensável a utilização de construções geométricas com régua e compasso.

Assim, no desenvolvimento deste artigo, faremos um breve estudo a respeito da razão de ser para o ensino de Pirâmides no Ensino Médio (alunos de 15 a 17 anos), descreveremos do que trata o Atividades de Estudo e Investigação na Teoria Antropológica do Didático e apresentaremos, na sequência, nossa proposta didática alternativa e nossas considerações finais.

A razão de ser do ensino de Pirâmides no Ensino Médio

Um dos problemas discutidos em Gascón (2003) é a ignorância da razão de ser do estudo de uma questão matemática na escola básica, isto é, "por quê" e "para que" seu estudo na escola. Para o autor, há uma divisão entre o matemático e o pedagógico, pois na instituição escolar, o professor, no âmbito pedagógico, está sujeito ao matemático imposto pela instituição escolar via currículo, documentos oficiais e livros didáticos.

Olhando para o ensino de geometria espacial, nas orientações curriculares e livros didáticos, se vê que esse ensino apenas foca questões métricas (medidas de áreas e volumes) que implicam primordialmente na memorização de fórmulas. Silva e Almouloud (2018) afirmam que os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN+ (BRASIL, 2002) orientam para a construção de modelos em geometria como uma forma de representar ou visualizar partes do mundo real a partir de desenhos, planificações e construções com instrumentos.

Com relação ao Currículo do Estado de São Paulo – Matemática (SÃO PAULO, 2012) encontramos a menção à palavra poliedros duas vezes. A primeira, na página 59, quando determinam os conteúdos e habilidades para o sétimo ano do Ensino Fundamental I em que Geometria deve ser trabalhada no segundo bimestre. Para poliedros, os alunos devem desenvolver as seguintes habilidades: “saber identificar poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista e saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais”. A segunda, na página 68, quando determinam, da mesma forma, os conteúdos e habilidades para o segundo ano do Ensino Médio para serem trabalhados no quarto bimestre, cujas habilidades para poliedros são: “ saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, medidas de áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos; o mesmo para a pirâmide e o cone”. Não explicitam o que seriam diferentes contextos, o que conduz ao livro didático que, em um ou outro exemplo, buscam algum contexto para justificar o conteúdo. Procurando por planificação ou planificações nesse documento, encontramos na página 58, para o sexto ano do Ensino Fundamental, terceiro bimestre, em Geometria/Relações, no tópico relativo a formas espaciais, encontramos orientações para a construção das seguintes habilidades: “saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas” e “saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.” (SÃO PAULO, 2012, p. 58). Para esse nível de ensino, entendemos que seria impossível discutir as questões matemáticas para “saber planificar”, o que conduz, quando ocorre, ao professor apresentar planificações prontas. Tal habilidade poderia estar no Ensino Médio, mas tal assunto não é tratado. Assim, nos parece que a razão de ser do ensino de poliedros seria o cálculo de medidas de comprimento, área e volume, pois é o que privilegia o livro didático.

Em uma busca não aprofundada em um livro de história da Matemática alguma menção à construção de modelos de poliedros ou sólidos, Eves (2004) afirma que Euclides (que viveu na primeira metade do século III a.C.) inicia um tratamento matemático para os poliedros regulares e, em seu livro XIII, inscreve esses poliedros em uma esfera, ou melhor em uma superfície esférica. Acrescenta que Platão (427-347 a.C.) em *Timeu* “apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos, para formar suas faces.” (p. 114). Talvez aqui esteja a origem de, ainda hoje, algumas pessoas falarem que um cubo é formado por seis quadrados, o que o tornaria apenas uma superfície e não um sólido. O trabalho de Herão (segunda metade do século I d.C.) em *A Métrica*, livro II, dedica-se a mensuração de volumes cones, cilindros, paralelepípedos, prismas, pirâmides e outros, inclusive os poliedros regulares. Papus (final do século III d.C.) em sua *Coleção Matemática*, na quarta parte do livro II, volta à inscrição dos cinco poliedros regulares em uma esfera dada e no livro V trata de volumes de sólidos limitados por medidas de áreas iguais e atribui à Arquimedes a construção de trinta poliedros semirregulares. Luca Pacioli (c. 1445-1509) em *Summa de arithmetica*, utiliza álgebra para resolver problemas geométricos. Kepler (1571-1630) se interessou entre muitos outros assuntos a pavimentação de um plano com polígonos regulares e a preencher o espaço com poliedros regulares. No entanto, desde os primórdios, na antiguidade, surgiu a necessidade de armazenamento de líquidos e grãos, bem como de mensuração que foi suprida por artesãos. Só depois, surgiu uma primeira preocupação com o tratamento matemático para construção de sólidos geométricos e com o aprimoramento dos cálculos necessários para suas medidas.

Se ficamos apenas na reprodução de modelos na escola, as discussões matemáticas não aparecem. Para Gascón (2003), tratando da relação entre geometria sintética e geometria analítica as situações umbilicais da geometria elementar são as situações ligadas à determinação e construção de figuras geométricas, acrescenta que estas é que darão sentido ao estudo da geometria analítica.

Assim, pelo exposto entendemos que para planificar superfícies de sólidos temos que buscar estratégias de ensino que conduzam os estudantes a analisá-las matematicamente, como mostra Silva e Almouloud (2018) para as superfícies de pirâmides triangulares, e não apenas como manipulação de um modelo pronto apenas para percepção de forma e determinação de uma nomenclatura específica. Nesse sentido, escolhemos o Percurso de Ensino e Pesquisa para fazer uma sugestão didática para o ensino de tal planificação que apresentamos no que segue.

Atividade de Estudo e Investigação – AEI

Silva e Almouloud (2018), em análise das propostas da Base Nacional Comum Curricular e dos Parâmetros Curriculares Nacionais, mostram que há certa preocupação em conduzir os alunos à investigação, no entanto não há maiores orientações a esse respeito. Para que isso ocorra é necessário conduzir os alunos, no nosso caso, do Ensino Médio, a interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, além de verificar as soluções propostas. ¿O professor deve então se perguntar "como fazer tal condução?" Considerando nosso tema, poliedros e nele o assunto planificação de superfícies de poliedros, há necessidade de os alunos serem colocados em uma situação de investigação. A noção de Atividade de Estudo e Investigação (AEI) é um modelo didático que, segundo Bosch e Gascón (2010, p. 77), retoma a Teoria das Situações Didáticas com a "proposta de reconstrução funcional dos conhecimentos matemáticos a partir de "situações fundamentais, cujo objetivo é situar a "razão de ser" ou o "sentido" de tais conhecimentos no centro do processo de estudo". Essa perspectiva deve, também, possibilitar a construção escolar de organizações matemáticas (OM) relativamente completas.

A noção AEI concentra-se em reformar os saberes e suas razões de ser, ela responde à necessidade de fazer viver um ensino baseado no estudo das questões atribuídas aos alunos e a busca de respostas sob a direção do professor, em classes ordinárias, isto é, local onde a matemática prescrita no currículo é ensinada sem a priori organizar um dispositivo de observação.

Para Bosch e Gascón (2010), o desenho de uma AEI tem início com a busca de uma "situação do mundo" que permita uma questão problemática e, por sua vez, a reconstrução de uma OM Local mediante os momentos de tal processo. "O primeiro encontro se estabelece por uma questão geratriz bruta Q, que deverá ser refinada pela comunidade de estudo, no momento exploratório as tentativas de respostas podem ser avaliadas pela própria comunidade, o que caracteriza a situação como adidática.

Chevallard (2002) afirma que a realização de uma AEI se desenvolve no sistema didático denotado por $S(X; Y; Q)$ cuja finalidade é a produção de uma determinada resposta $R^{\heartsuit}$, o que é esquematizado por: $[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^{\heartsuit}$. Q é a questão estudada pelo coletivo X, (os alunos, por exemplo) sob a direção da equipe Y de ajuda ao estudo (o professor, por exemplo). $R^{\heartsuit}$ é a resposta do sistema didático $S(X; Y; Q)$, o que é indicado pela flecha encurvada descendente (➥). O pequeno coração ($^{\heartsuit}$) colocado em expoente significa, de um lado, que a resposta produzida deve satisfazer certas condições e restrições especificas do projeto do qual o estudo de Q faz parte, e, por outo lado, esta resposta será a resposta à questão Q aceita pelo sistema $S(X ; Y ; Q)$, pelo menos, até uma eventual retomada do estudo de Q, que poderia levar a substituir esta resposta por uma nova $R^{\heartsuit}$.

Para o autor, no processo do estudo de Q, diversos recursos podem ser mobilizados: os recursos que compõem o *milieu didático* ou *milieu para o estudo* (de Q), M, constituído notadamente do conjunto das ferramentas disponíveis na sala de aula para estudar a questão Q, produzir a resposta $R^{\heartsuit}$ e validá-la. A flecha encurvada ascendente (➦) indica que é o sistema didático $S(X; Y; Q)$ que constitui e "fabrica" esse milieu. A composição do *milieu* M é descrita como o conjunto $R_1^{\Diamond}, R_2^{\Diamond}, ..., R_n^{\Diamond}, O_{n+1}, ..., O_m\}$, no qual $R_i^{\Diamond}$ designa respostas institucionalmente carimbadas – o signo $^{\Diamond}$, que lê « pinçona », tem por função lembrar essa carimbagem -, O_j *das obras.*

Para Matheron e Noirfalise (2007) "devolver aos alunos a responsabilidade de construir uma resposta a uma questão é sem dúvida necessária [...] tornar os alunos autores e não expectadores da matemática, mas isso é ainda insuficiente [...] é necessário colocar a questão da utilidade" (p. 6). Para os autores, "trata-se de desenvolver um percurso de estudo que permite cobrir parte dos setores ou domínios do programa de um ou vários níveis" (p. 6). Barachet, Demichel e Noirfalise (2007), em seu artigo a respeito de um estudo de triângulos, analisam as restrições que pesam sobre o ensino atual francês:

> restrições dentro da civilização e da história (tradição do estudo da geometria do triângulo dos gregos, por exemplo) ou da sociedade que pensa a organização de sua escola que repercutem primeiro nos níveis da pedagogia (aulas de uma hora convidando os alunos a serem “ativos”) e da disciplina (presença ou ausência no programa de certos objetos matemáticos transpostos, abertura e fechamento do assunto ensinado em uma hora e consequências sobre a possibilidade de fazer os alunos encontrar razões para estudar). Essas restrições, por sua vez, induzem formas relativamente estáveis de ensino e de maneiras de pensar o estudo de matemática: corte, depois “confinamento” do ensino em temas (da ordem do capítulo) enfraquecendo a visão de sua articulação em organizações mais amplas, ritmo ternário (atividade, síntese, exercícios), ausência de recurso à mídias externas mínimas, fornecidas pelo professor e pela escola (o curso ou o manual, às vezes a calculadora), encaminhamento do estudo à esfera privada dos alunos fora da escola, etc. (Barachet, Demichel, Noirfalise, 2007, p. 6).

No entanto, reconhecem que na escola há grupos de professores reconhecidos, institucionalmente, como competentes que resistem e obstruem novos olhares para o ensino e, concluem, que “a profissão não possui ainda nem as ferramentas, nem o tempo, que permitam esse trabalho, sem evocar a consciência de sua urgente necessidade” (p. 7). Assim, os autores concebem, experimentam e observam proposições de AEI construídos a partir de questões problemáticas designados aos alunos a fim de desenvolver documentos para os professores, respeitando os conteúdos determinados nos currículos.

Não resta dúvida que essas restrições também pesam em nossas escolas e, como elas, nos desafiamos a propor uma alternativa para o conteúdo de planificações de superfícies de sólidos e para algumas orientações de documentos oficiais para que os alunos aceitem o papel de investigadores. Na proposta do ensino de poliedros podemos identificar alguns tipos de tarefas como: construir um modelo de sólido por planificação de sua superfície; determinar secções planas de sólidos e calcular a medida de grandezas geométricas, como comprimentos, áreas e volumes. Cada uma delas suscita a construção de uma Atividade de Estudo e Investigação que propomos no que segue.

AEI 1: Construção de um modelo para pirâmides triangulares de altura determinada

Para desenvolver uma AEI, temos que elaborar uma Organização Matemática Local e, para isso, nos basearemos no Modelo Epistemológico de Referência apresentado por Silva e Almouloud (2018). Uma possível Organização Matemática Local poderia ter como tipo de tarefa (T): construir planificações de superfícies de pirâmides de altura determinada, pois independente da superfície identificada, como base, temos o mesmo discurso tecnológico teórico para justificar a técnica.

Uma possível questão geratriz para essa atividade poderia ser: ¿Como construir um modelo para uma pirâmide triangular com uma altura determinada?

Propusemos a questão da altura para considerar alguma utilidade à construção, tendo em vista que o modelo para esse tipo de pirâmide é conhecido pelo aluno e, se não for, ele a encontra em livros ou na Internet, mas simplesmente para ser reproduzida sem qualquer questionamento matemático, a não ser a identificação de alguns de seus elementos.

Essa questão, que não tem resposta imediata, certamente suscitará outras perguntas, como por exemplo: ¿como se constrói um modelo para uma pirâmide triangular?

Um primeiro passo para responder essa questão seria o reconhecimento de propriedades das pirâmides e a observação do que deve ser considerado para projetar as faces no plano em que a base da pirâmide está contida. ¿O que temos que observar na pirâmide representada na figura 1 para poder planificar sua superfície? Ou seja, projetar as faces no mesmo plano da base.

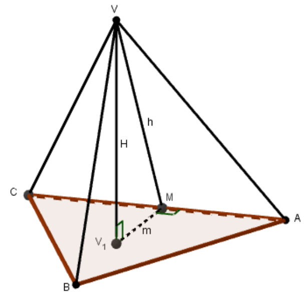


Figura 1 -Identificação de elementos de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

Cabe observar que as respostas dadas a esta questão servirão de tecnologia para justificar a técnica de construção que será realizada para a planificação da superfície da pirâmide. Os alunos devem observar que a planificação solicitada consiste em relacionar quatro triângulos, que cada aresta, não contida na base, é formada por lados de mesma medida de duas faces consecutivas da pirâmide e, ainda, que essas arestas se interceptam no ponto *V*, que ao mesmo tempo coincide com vértices dos triângulos que representam as faces da pirâmide. Além disso, é necessário observar que o segmento que representa a altura da pirâmide juntamente com o que representa a altura de cada face formam o triângulo retângulo VMV_1 que indica que ao rebatermos, por exemplo, o triângulo *ACV* no mesmo plano da base os segmentos V_1M e *MV* estão contidos em uma reta perpendicular à aresta *AC*.

Então, como planificar a superfície de uma pirâmide triangular? Esse tipo de tarefa pode ser resolvido por uma técnica de construção geométrica que pode ser assim obtida. Dado um triângulo, *ABC* (figura 2), que representa a base da pirâmide, determinamos um ponto, V_1, para representar a projeção do vértice da pirâmide sobre o plano em que a base está contida. Pelo ponto V_1 traçamos retas perpendiculares (*r, s, t*) aos três lados do triângulo (*BC*, *AB* e *AC*, respectivamente). Na reta *r* tomamos um ponto *D* e traçamos uma circunferência com centro em *C* e raio *CD* que determina na reta *t*, o ponto *E*. Com centro em *A* traçamos a circunferência de raio *AE* que determina na reta *s* o ponto *F*. Traçamos então os triângulos *BCD*, *ABF* e *ACE* para completar a planificação da superfície de uma pirâmide triangular que permite a construção de um modelo para tal objeto matemático. Se a construção for feita no Geogebra a manipulação do triângulo *ABC* e do ponto V_1 permite outras formas para o modelo, já a impressão permite a construção física do modelo.

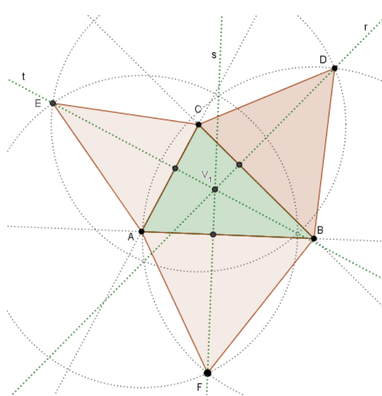


Figura 2 – Construção da planificação da superfície de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

A tecnologia que justifica essa técnica baseia-se nas propriedades de uma pirâmide triangular realizado no questionamento anterior e a teoria que justifica tal tecnologia se encontra na geometria espacial, que estuda os objetos definidos em um espaço tridimensional e objetos que não estão contidos em planos: superfícies (planos e superfícies curvas) e sólidos .
Após essa construção cabem questionamentos do tipo: quais posições a projeção do vértice da pirâmide pode ocupar em relação à base da pirâmide? Qual a relação dessas posições com o tipo de modelo que a planificação pode proporcionar? Os alunos devem perceber que o ponto V_1, pode pertencer ao interior ou exterior da superfície triangular que representa a base da pirâmide ou a uma de suas arestas. Esses resultados permitirão os modelos representados na figura 3, ou seja, a altura da pirâmide pode estar no interior ou exterior de sua região ou, ainda, coincidir com a altura de uma das faces laterais.

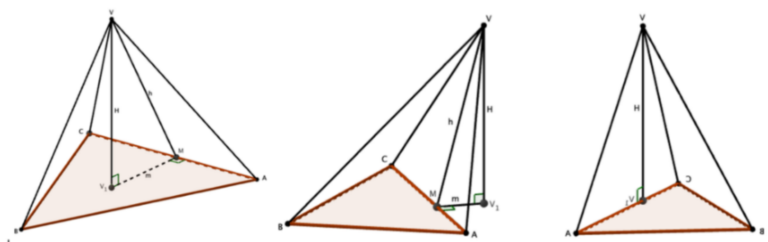


Figura 3 – Posições da altura de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

Mas, a questão inicial ainda está por responder: ¿como podemos determinar a altura da pirâmide se ela não é explicitada na planificação? Para buscar respostas, podemos propor a seguinte tarefa: construir um modelo para uma pirâmide triangular de altura 6 cm. A técnica para essa construção é determinar um triângulo *ABC*, que representa a base da pirâmide, e um ponto V_1 (figura 4) que representa a projeção do vértice da pirâmide no plano da base. Traçar por V_1 uma reta *r*, perpendicular ao lado *BC*, que determina neste o ponto *M*. Depois traçar por V_1 uma reta *s*, perpendicular à reta *r*. Traçar a circunferência de centro em V_1 e raio 6 cm, que determina na reta *s* o ponto *P* e o triângulo V_1PM em que o lado *PM* representa a altura da face *CBD*. A circunferência de centro em *M* e raio *MP* determina na reta r o ponto *D*. A partir daí a construção continua como feito anteriormente. Essa técnica pode ser justificada pela observação do triângulo VMV_1, na figura 1, e perceber que a altura de cada superfície triangular que representa uma face lateral depende da altura da pirâmide.

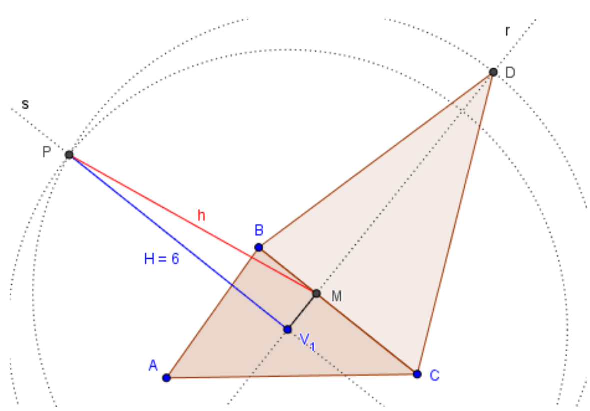


Figura 4 – Construção da altura dada para uma pirâmide triangular
Produção dos autores

Outras questões podem ser lançadas, como por exemplo: é possível construir o modelo de uma pirâmide triangular com altura de 6 cm, ¿cuja base é representada por um triângulo equilátero de lado medindo 6 cm e a projeção do vértice da pirâmide coincide com o centro do triângulo?

AEI 2: Construção de um modelo para troncos de pirâmides triangulares, ambas com altura determinada

Um outro conteúdo tratado no ensino é tronco de pirâmides com o fim apenas da memorização de uma fórmula para o cálculo de seu volume. No entanto, depois de trabalhar a primeira AEI é possível lançar uma nova questão: ¿é possível construir o modelo para um tronco de uma pirâmide triangular? A tarefa seria então: construir um modelo para o tronco de uma pirâmide triangular. A primeira construção é a da planificação da superfície de uma pirâmide triangulas, como mostra a figura 2. Depois, essa técnica deve ser ampliada para a construção do tronco solicitado (figura 5), ou seja, determinar no lado BD um ponto G qualquer, depois traçar uma circunferência com centro em B e raio BG para determinar no lado BE o ponto G_1. Tomar um ponto H no lado CD e traçar a circunferência de centro em C e raio CH que determina no lado CF o ponto H_1. Finalmente, determinar o ponto I no lado AE e traçar a circunferência de centro em A e raio AI que determina no lado AF o ponto I_1. Para terminar a construção do modelo traçar os segmentos GG_1, HH_1 e II_1.

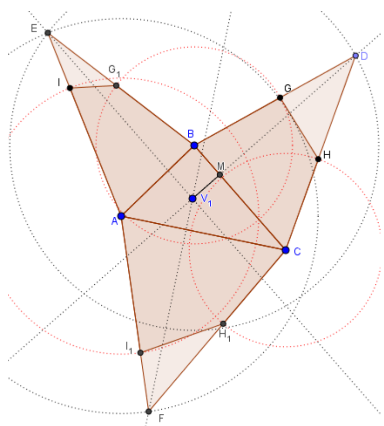


Figura 5 – Construção da planificação da superfície de um tronco de pirâmide triangular
Produção dos autores

O que justifica tal técnica é a determinação de um plano por três pontos (um em cada aresta da pirâmide que não sejam da base) e a necessidade de que as arestas de dois triângulos consecutivos devem ter mesma medida, ou seja, $\overline{BG} \equiv \overline{BG_1}$, $\overline{AI} \equiv \overline{AI_1}$ e $\overline{CH} \equiv \overline{CH_1}$.

Uma outra questão pode ser: ¿como construir o modelo para o tronco de uma pirâmide triangular de base equilátera de lado 6 cm, de altura 8 cm por um plano paralelo à base e a uma distância de 6 cm?

A técnica para cumprir esta tarefa, a partir da construção da planificação solicitada (figura 6), consiste em determinar o ponto H no segmento V_1G de tal forma que V_1H tenha 6 cm de comprimento.

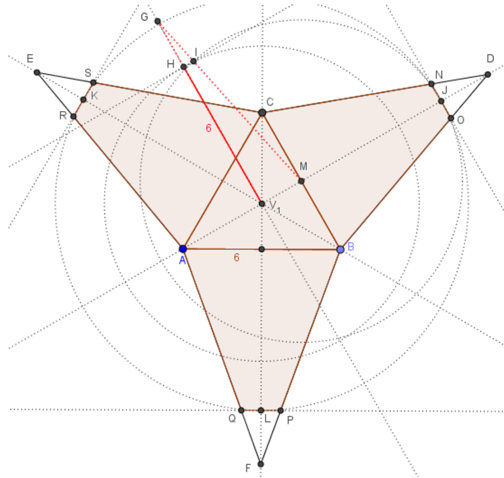


Figura 6 - Construção de outra planificação da superfície de um tronco de pirâmide triangular
Produção dos autores

A seguir traçar pelo ponto *H* uma reta paralela à reta V_1M que determina o ponto *I* no segmento *MG*. Traçar a circunferência de centro em *M* e raio *MI* para determinar o ponto *J*, no segmento que representa a altura do triângulo *CBD*. Traçar a circunferência com centro em V_1 e raio V_1J para determinar os pontos *K* e *L*. Traçar pelo ponto *J* uma reta paralela ao lado *CB* do triângulo da base que determina os pontos *N* e *O*, respectivamente, nos lados *CD* e *DB* do triângulo *DBC*. Traçar pelo ponto *K* uma reta paralela ao lado *AC* do triângulo da base que determina os pontos *R* e *S*, respectivamente nos lados *AE* e *CE* do triângulo *ACE*. Traçar a reta paralela ao lado *AB* do triângulo da base que determina os pontos *Q* e *P*, respectivamente nos lados *AF* e *BF* do triângulo *ABF*. Os quadriláteros *ABPQ*, *BCNO* e *ACSR* representam as laterais do tronco solicitado na tarefa.

A justificativa dessa técnica se dá pela percepção de que se tomarmos um ponto *H* no segmento que representa a altura da pirâmide e, por ele, passamos um plano paralelo ao plano da base, esse plano corta a altura do triângulo *BCV* no ponto *I* que é determinado pela construção de uma reta paralela ao segmento V_1M passando pelo ponto *H*. Para determinar os pontos em que o plano intercepta as arestas da pirâmide temos que traçar pelo ponto *I*, uma reta paralela ao lado *CB* que determina os pontos *N* e *O*, respectivamente, na aresta *VC* e *VB*. Traçando por *N* uma reta paralela ao lado *AC* obtemos o ponto *Q* na aresta *VA*.

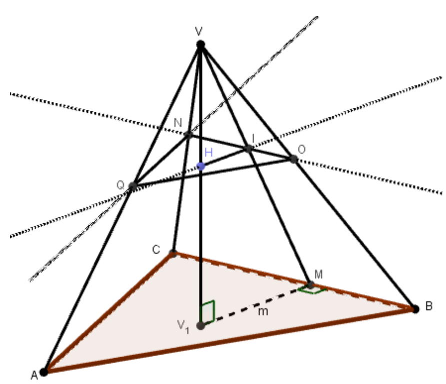


Figura 7 – Corte paralelo à base de uma pirâmide triangular
Produção dos autores

AEI 3 - Construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de um tronco de pirâmide triangular

Supondo que os alunos já saibam calcular a medida do volume de uma pirâmide triangular, podemos propor a seguinte questão: como determinar uma fórmula para calcular a medida do volume de um tronco de pirâmide triangular, cuja base é equilátera, a partir de um plano paralelo ao plano da base e que tenha como altura a metade da altura da pirâmide? Para cumprir essa tarefa, temos que recorrer à Álgebra. Considerando que a medida do volume da pirâmide inicial seja representada por $V_P = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H$, sendo V_P a medida do volume, A_B a medida da área do triângulo da base e H a medida da altura da pirâmide e a medida do volume da pirâmide que será truncada dada pela fórmula $V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, sendo V_p a medida do volume que será truncado, A_b a medida da área da superfície triangular do corte e h a medida de sua altura. Assim, podemos dizer que a medida do volume do tronco pode ser obtida por $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$. Mas, como a altura da medida da altura da pirâmide que será truncada tem a metade da medida da altura da pirâmide inicial, podemos escrever então que $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_B \cdot \frac{1}{2} \cdot H$ (1) considerando que se a base é representada por um triângulo equilátero a superfície do corte terá uma superfície com medida de área igual um quarto da medida da área da base da pirâmide inicial, isto é, $A_b = \frac{1}{4} \cdot A_B$ e que $h = \frac{1}{2} \cdot H$. Podemos voltar à fórmula (1) e determinar a fórmula equivalente $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$. Considerando que a altura da pirâmide que será truncada pode ser reduzida por um fator k qualquer, podemos generalizar a fórmula para $V_T = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H(1 - (k)^3)$.
Assim, encerramos a apresentação das três Atividades de Estudo e Investigação.

Considerações finais

Assumindo a possibilidade do ensino de planificações de superfícies de sólidos geométricos, como uma de suas formas de representação, tendo em vista que documentos oficiais orientam a construção de modelos, entre eles planificações e construções com instrumentos, decidimos apresentar um caminho alternativo à apresentação de planificações prontas.

Tal escolha envolve uma análise detalhada dos elementos e propriedades do sólido geométrico em questão e das relações que devem ser consideradas quando propomos planificar sua superfície. Essa análise desaparece quando simplesmente damos para os alunos um modelo já executado. Qual seria a razão de ensinar tal conteúdo? ¿Tal vez fazer uma embalagem? Este pode ser um motivo razoável visto que muitos professores pedem para que seus alunos tragam embalagens quando iniciam qualquer estudo de sólidos geométricos. No entanto, o aluno não desenvolve autonomia para, por si só, construir alguma de acordo com seus critérios. No caso de nosso sólido, a pirâmide de base triangular, por exemplo, não entende como fazer para que seu modelo tenha uma altura determinada.

Nossa proposta apresenta três Atividades de Estudo e Investigação que, com a ajuda do desenho geométrico com régua e compasso e do software GeoGebra permite discutir as relações que devem ser observadas para planificar a superfície de uma pirâmide triangular qualquer, de uma pirâmide desse tipo de altura determinada, da construção de planificações de troncos de pirâmides, além do desenvolvimento de uma fórmula para o cálculo da medida de seu volume. Alguns podem argumentar que tais atividades consomem muito tempo para serem desenvolvidas, no entanto rebatemos que elas podem ser a base para o ensino de outros conteúdos do programa que poderiam ser tratados mais rapidamente e com reflexões concretas, como é o caso de outros sólidos geométricos e suas medidas de volume. Por exemplo, propor a questão: ¿como construir um modelo para uma pirâmide pentagonal de altura dada?

Quanto à utilização do GeoGebra ela se torna importante porque além de permitir a própria construção das hipóteses levantadas, seu dinamismo permite uma série de alterações que conduzem à diferentes modelos. Além disso, a impressão da planificação realizada respeita as medidas escolhidas e a construção física do modelo em questão, ou seja, o aluno efetivamente coloca à prova o que fez.

Não temos dúvida da importância do ensino de geometria na escola básica, mas ele não pode ser desenvolvido por regras e fórmulas memorizadas e de exercícios de treinamento para sua aplicação. Caso contrário, "é uma questão fechada em si mesma (ou morta) porque se ignora o *por quê* e o *para quê* de seu estudo escolar" (Gascon, 2004, p.41)

Referências bibliograficas

Barachet, F.; Demichel, Y.; Noirfalise, R.(2007). Activites d´etude et de recherche (ERA) pour dynamiser l´etude de la geometrie dans l´espace en classe de seconde. *Petit x*, 75, 34-49.

Bosch, M.; Gascón, J. (2010). Fundamentación de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". IUFM de l´Académie de Montpellier, 55-91.

Brasil, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2002). PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC.

Chevallard, Y. (2002). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d´être, fonctions, devenir. En Actes de *Journées de la commission inter-IREM Didactique* (pp. 1-26) Dijon, France.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP.

Gacón, J. (2003). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometria en Secundaria. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometria. *SUMA 44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometria en Secundaria. II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. *SUMA 45,* 41-52.

Matheron, Y.; Noirfalise, R. (2007). Une recherche de la Comission inter-IREM (CII) didatique soutenue par l´INRP: *"Dynamiser l´étude des mathématiques dans l´enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d´AER et de PER".*

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. (2012). *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática e suas tecnologias. 1.ed. atual. São Paulo: SE, 72 p.

Silva, M. J. F. da; Almouloud, S. A. (2018). Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares. *Educação Matemática Pesquisa,* 20(3), 327-346, São Paulo.

Zuin, E. S. L. (2001) *Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.* Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

RESULTADOS DE UN DIAGNOSTICO SOBRE EL PENSAMIENTO PRE ALGEBRAICO CON ESTUDIANTES DE 6° GRADO DE PRIMARIA

RESULTS OF A DIAGNOSIS ABOUT PRE-ALGEBRAIC THINKING IN SIXTH- GRADE PRIMARY SCHOOL STUDENTS

Tzindejeh Rodríguez Quintero, José Antonio Juárez López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
kinndeh@hotmail.com, jajul@fcfm.buap.mx

Resumen
El presente trabajo muestra el avance de una investigación en proceso relacionada con el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos que cursan su último grado de estudios en la primaria. En este documento se expone el análisis de los resultados de un diagnóstico aplicado a un grupo de estudiantes de sexto grado de una escuela primaria federal de organización completa perteneciente a la Ciudad de Puebla, México, cuyas edades oscilaban entre los 11 y 12 años. El diagnóstico aplicado es uno de los pilares de esta investigación ya que a través del análisis de los resultados del mismo se pretende realizar una intervención en el mismo grupo a través de una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV en la cual se trabajarán los tres principales usos de la variable como lo son: la variable como incógnita, la variable como número general y la variable en relación funcional, posteriormente se empleará la misma prueba para medir el avance que se logró mediante dicha intervención.

Palabras clave: álgebra, pensamiento algebraico, modelo 3UV

Abstract
This work shows the progress of an ongoing research related to the development of algebraic thinking in sixth-grade primary school students. This paper presents the analysis of the results of a diagnosis applied to a group of sixth - grade students aged 11to12 of a complete-organization federal primary school from the City of Puebla, Mexico. The applied diagnosis is one of the supports of this research because through the analysis of its results, it is intended to perform an intervention in the same group through a didactic sequence based on the 3UV model in which the three main uses of the variable will be worked as they are: the variable as unknown quantity, the variable as general number and the variable in functional relation. Later, the same test will be used to measure the progress achieved through this intervention.

Key words: algebra, algebraic thinking, model 3UV

Introducción

El álgebra ha sido considerada hasta no hace mucho como una parte de las matemáticas que debía ser atendida por separado en la educación básica. Se le había relegado a ser considerada como una materia que se aborda después de haber dominado la aritmética. Bajo ese supuesto se podría pensar que después de varios años de educación preescolar y primaria los alumnos se encontrarían perfectamente preparados para asumir y superar los retos del álgebra propuesta en secundaria, lo que no es del todo cierto. Una cuestión interesante mencionada por Ursini (2011) es que es bien sabido que a los alumnos les resulta difícil usar las variables, sobre todo cuando se espera de ellos que logren una comprensión profunda.

La brecha que separa a la aritmética del álgebra se hace presente en los primeros grados de secundaria, lo cual denota la poca familiaridad con la que los estudiantes ingresan a esa última etapa de la escolaridad básica en México. Los alumnos de secundaria se muestran sorprendidos cuando se comienza a trabajar con literales a las cuales deben darle un sentido diferente al que concibieron en primaria. Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005) dicen que los estudiantes, “en su esfuerzo por darles algún sentido recurren a su experiencia aritmética que, por lo general, no se enseña con el propósito de facilitar el aprendizaje del álgebra” (p. 16). En lugar de dejar que esa brecha siga presente o se haga mayor, es necesario presentar un programa de estudio que vincule estrechamente la aritmética y el álgebra desde edades tempranas. Otra cuestión destacable es la importancia de llevar a cabo secuencias didácticas bien estructuradas y fundamentadas que permitan el desarrollo del pensamiento algebraico.

La realidad discrepa bastante de lo que se supone debería suceder ya que puede apreciarse claramente en los resultados de pruebas internacionales, los cuales no han sido favorables para países como México. Estas pruebas, aunque son estandarizadas y evalúan solo una parte del desempeño estudiantil, son un parámetro que ha permitido medir el rendimiento en el área de las matemáticas y compararlo con el de otros países, esto ha demostrado que el camino correcto no es atenderlas por separado, o sea una después de la otra, sino entrelazarlas de manera que sus raíces se vean fortalecidas desde la educación inicial.

> La gente piensa que la aritmética debería preceder al álgebra en el currículo escolar. Esta gente puede encontrar amplia evidencia para sostener su enfoque: la aritmética es fácil; el álgebra es difícil. La aritmética trata sobre operaciones que involucran números particulares; el álgebra involucra números generalizados. La aritmética aparece en todas las culturas; el álgebra aparece solo en algunas, y, aun en esas, ha hecho su aparición recientemente. (Schliemann, Carraher, y Brizuela, 2011, p.15)

El hecho de enfocarse en decir que la aritmética resulta fácil posiblemente se deba a que es relacionada con mayor familiaridad ante situaciones que se pueden vivir diariamente como ir de compras. Pero con el álgebra es distinto, la gente le percibe como una cuestión aislada que raramente o tal vez nunca utilizarán en su vida cotidiana.

Como se mencionó anteriormente, la introducción del álgebra al currículo de primaria no es algo tan novedoso. Actualmente en México, la matemática escolar se organiza en Ejes y Temas que abarcan gran variedad de contenidos, el eje central se encuentra establecido como número, álgebra y variación; el cual se desglosa en número, adición y sustracción, multiplicación y división, proporcionalidad, ecuaciones, funciones, patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes. Así como se puede apreciar que en México se ha optado por establecer como un eje al álgebra, ya se han realizado trabajos en los que se propone una intervención en el aula basándose en la idea del álgebra temprana. La edad para comenzar a trabajar con el álgebra en actividades escolares no está determinada, es por ello que resulta bastante común observar estudios cuyo rango de edad puede ser bastante amplio ya que puede comenzar con alumnos que se encuentran en grados preescolares. Aunque el rango de edad no esté determinado se ha percibido el gran empeño que tienen algunos investigadores por enfocarse en trabajar con alumnos de primaria como a continuación se informa.

Para comenzar se hará mención de los resultados hallados por Sutherland y Rojano (1993) citados en Schliemann et al. (2011) quienes mediante un estudio encontraron que estudiantes mexicanos e ingleses quienes habían estado involucrados en actividades que implicaban el uso de hojas de cálculo pudieron desempeñarse relativamente bien en tareas algebraicas.

Schliemann et al (2011), decidieron encaminar su trabajo hacia el desarrollo del pensamiento algebraico en alumnos de tercer grado de primaria. Su investigación demostró que después de trabajar a través de problemas verbales y notación algebraica existió un avance considerable en el desarrollo del pensamiento algebraico. En los resultados comentaron que los alumnos llegaron a reconocer a las variables no solo como incógnitas, sino como representaciones generales.

Chalouh y Herscovics (1999) trabajaron con estudiantes de primaria y secundaria. Su experimento consistió en plantear y aplicar problemas a través de un enfoque geométrico para enseñar expresiones algebraicas. Durante sus primeras lecciones buscaron que se hiciera bastante perceptible la incógnita en una ecuación, posteriormente propusieron otra clase de problemas en los que la variable ya se mostraba para que los alumnos pudieran visualizarla como el valor faltante de la expresión y que así lograran obtener el área de algunos rectángulos.

Ferrini-Mundy, Lappan y Phillips (1999) se enfocaron en trabajar el desarrollo del pensamiento algebraico desde el uso de patrones, lo realizaron con alumnos de preescolar, primaria y secundaria, a quienes se les propusieron actividades con diferente grado de dificultad. Su trabajo consistió en utilizar material manipulativo para que los alumnos crearan piscinas con diferentes tamaños a través de cuadrados de color azul y blanco que representaban los azulejos. A los alumnos se les permitió formar las piscinas para que lograran percibir más fácilmente la relación del incremento de azulejos entre una figura y la siguiente apoyándose también en el registro de datos mediante tablas.

Marco teórico

Esta investigación se basa en el Modelo 3UV de Ursini, et al (2005) que surge esencialmente como propuesta para la enseñanza de los tres principales usos de las variables. La elección de este marco es debido a la flexibilidad que ofrece al emplear cada uno de los tres usos que se reconocen para las variables, ya que la manera de introducir cada variable y relacionarla sin que sean percibidas de manera completamente aisladas permite que, a la interpretación, simbolización y manipulación se les otorgue la misma importancia.

Los tres usos de la variable de este modelo son la variable como incógnita específica, la variable como número general y la variable en relación funcional. De cada uno de estos usos se desglosan aspectos relacionados con ellos, como a continuación se describe.

Incógnita específica

I1 Reconocer e identificar, en una situación problemática, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado considerando las restricciones del problema.
I2 Interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación, como la representación de valores específicos.
I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.
I4 Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas, realizando operaciones algebraicas, aritméticas o de ambos tipos.
I5 Simbolizar las cantidades desconocidas identificadas en una situación específica y utilizarlas para plantear ecuaciones.

Número general

G1 Reconocer patrones y percibir reglas y métodos, en secuencias y en familias de problemas.
G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general, indeterminada, que puede asumir cualquier valor.
G3 Deducir reglas y métodos generales, en secuencias y en familias de problemas.
G4 Manipular (simplificar, desarrollar) la variable simbólica.
G5 Simbolizar enunciados, reglas o métodos generales.

Relación funcional

F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.
F3 Determinar los valores de la variable independiente, dados los valores de la dependiente.
F4 Reconocer la variación conjunta de las variables involucradas en una relación funcional, independientemente de la representación utilizada (tablas, graficas, problemas verbales, expresiones analíticas).
F5 Determinar los intervalos de variación de una de las variables, dado el intervalo de variación de la otra.
F6 Simbolizar una relación funcional, con base en el análisis de los datos de un problema.

En este trabajo de investigación solo fueron contemplados algunos de los aspectos de los antes mencionados, ya que tomando en cuenta estudios anteriores y el currículo actual se consideró que dichos aspectos podrían ser trabajados con alumnos educación primaria, además y como se mencionó anteriormente, el Modelo 3UV es bastante flexible y permite que no sea necesario emplear todos los aspectos para cada uno de los usos de la variable. De la variable como incógnita se tomaron los aspectos I1, I2, I3 e I4; de la variable como número general G1, G3 y G5; para la variable en relación funcional se tomaron en cuenta los aspectos F1, F2, F3 y F6.

El modelo 3UV en palabras de Ursini et al. (2005) "propone una enseñanza en espiral que acerca gradualmente a los alumnos al trabajo con los distintos usos de la variable en situaciones cada vez más complejas, para así abordar las diversas temáticas del álgebra" (p. 39). Esto quiere decir que se deben trabajar por separado actividades que inmiscuyan solo uno de los usos de la variable para posteriormente llevar a cabo tareas que involucren los tres usos. La primera fase de esta enseñanza en espiral juega un papel importante ya que mediante ella se pretende lograr la comprensión de cada uno de los distintos usos de la variable, mientras que la fase integradora tiene como finalidad la de desarrollar en los alumnos la capacidad de pasar entre los diferentes usos. Es necesario contemplar que al ser una espiral en ascenso cada actividad implica diferenciar los usos, y al terminar el trabajo con cada uno de los usos de la variable debe seguirle una actividad integradora.

Este modelo es descrito por Ursini (2011) "como una herramienta teórica desarrollada durante varios años de trabajo y pruebas" (p. 69), así que es parte de una seria investigación cuyo desarrollo no ha sido fortuito. Este modelo ya ha sido ampliamente utilizado, pero en palabras de la autora "es perfectible", esto permite que las actividades que se deseen realizar sean vastas y no solamente se deban aplicar las que hayan sido realizadas previamente.

■ Metodología

Después de revisar la manera en que ya ha sido abordada el álgebra en la escuela primaria, o sea a través de algunas tareas o secuencias, se decidió tomar en cuenta el Modelo 3UV como fundamento para desarrollar el trabajo de investigación. Entonces, para comenzar el trabajo se tomó como base la siguiente pregunta: ¿Cuál es el efecto que tiene una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV con alumnos de 6to grado de primaria?, esta pregunta es la guía que ha encaminado todo el trabajo, bajo esta orientación se pretende describir detalladamente lo que sucede al implementar esa forma de trabajo y si a través de ella es posible preparar a los alumnos para que logren emplear los tres usos principales de la variable.

El objetivo principal de este trabajo es, por lo tanto, analizar el efecto de una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV con estudiantes de 6to grado de primaria. Dentro de los objetivos específicos de la investigación está la tarea de diseñar, implementar y evaluar una secuencia didáctica basada en el modelo 3UV, observar y registrar los procedimientos mostrados por los estudiantes en cada una de las actividades propuestas para los tres usos de la variable, registrar y evaluar mediante la observación participante el progreso de los alumnos durante la secuencia didáctica, desarrollar en los alumnos la interpretación, la simbolización y la manipulación de la variable y medir el rendimiento en el uso de las variables a través de un pre-test y post-test.

De los objetivos específicos antes mencionados se han alcanzado el de diseño de la secuencia didáctica que se implementará posteriormente, además de que ya se aplicó el pre-test cuyos resultados se discutirán más adelante.

La investigación es pre-experimental con un diseño de preprueba/posprueba con un solo grupo, ya que por sus características se entrelaza mejor con los objetivos del estudio, porque a través de ella se aplica a un grupo una prueba previa a un estímulo o tratamiento experimental, para este caso sería la secuencia didáctica y después de eso se aplicará una prueba posterior al estímulo, de esa manera se puede revisar el avance de los alumnos.

La investigación es de tipo mixta con enfoque cualitativo mixto (CUAL-cuan) lo cual quiere decir que su preponderancia radica en lo cualitativo, además se decidió utilizar el Diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante (DIAC) el cual, según Hernández, Fernández y Baptista (2014) especifican que los datos cualitativos y cuantitativos son recolectados simultáneamente, pero uno de ellos posee mayor prioridad y el otro debe ser anidado dentro del central.

La escuela en la que fue aplicado el pre-test es una primaria federal de organización completa ubicada en la ciudad de Puebla, México. El grupo en el que se aplicó el diagnóstico fue en el sexto grado durante el mes de agosto en el ciclo escolar 2018-2019. El total de estudiantes fue de 34 de los cuales 21 eran niños y 13 eran niñas cuyas edades oscilaban entre los 11 y 12 años. En el grupo se lograron identificar tres estudiantes con dislalia, específicamente con problemas para pronunciar la letra r, que han sido canalizados para recibir terapia de lenguaje desde que cursan el segundo año. Por otra parte, siete estudiantes, incluyendo dos de los que presentan dislalia, reciben apoyo por parte del departamento de psicopedagogía ya que han demostrado dificultades para el aprendizaje.

Resultados

En el trabajo de Ursini et al. (2011) se menciona que “El Modelo 3UV proporciona una base teórica, fundamentada en la investigación educativa, que sirve de guía tanto en el desarrollo de instrumentos de evaluación y diagnóstico, como el análisis de las respuestas que dan los estudiantes” (p. 130).

El diseño del pre-test fue realizado a partir del cuestionario propuesto por Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996), de él se seleccionaron algunos ítems y otros fueron construidos por los autores de manera que pudiera amoldarse a las necesidades de este trabajo.

Los apartados fueron organizados según el uso de las variables propuesto en el modelo 3UV, esta organización consistió en tres hojas, la primera contiene actividades relacionadas con la variable como incógnita que abarcó las preguntas de la 1 a la 6 en las que se evaluaron los aspectos I1, I2, 13 e I4. En la segunda hoja se evaluaron los aspectos G1, G3 y G5, estuvo enfocada en actividades relacionadas con la variable como número general, preguntas de la 6 a la 13 y la tercera hoja incluyó actividades enfocadas a la variable en una relación funcional de la cual forman parte las preguntas de la 12 a la 20, evaluando los aspectos F1, F2, F3 y F6.

Cada uno de los apartados del modelo 3UV incluyó al menos una actividad al final de la hoja que reflejará un grado mayor de complejidad en comparación con las demás. Para la variable como incógnita fue la pregunta 6. En la variable como número general fueron las preguntas 12 y 13. En el caso de la variable en una relación funcional las preguntas de 19 y 20.

Al comenzar el análisis del pre-test se realizó una primera clasificación cuantitativa de todas las respuestas. La clasificación fue organizada en las siguientes categorías: contestadas correctamente (aciertos), contestadas incorrectamente (errores), el conteo de preguntas no resueltas (omisiones), como se puede apreciar en la siguiente figura.

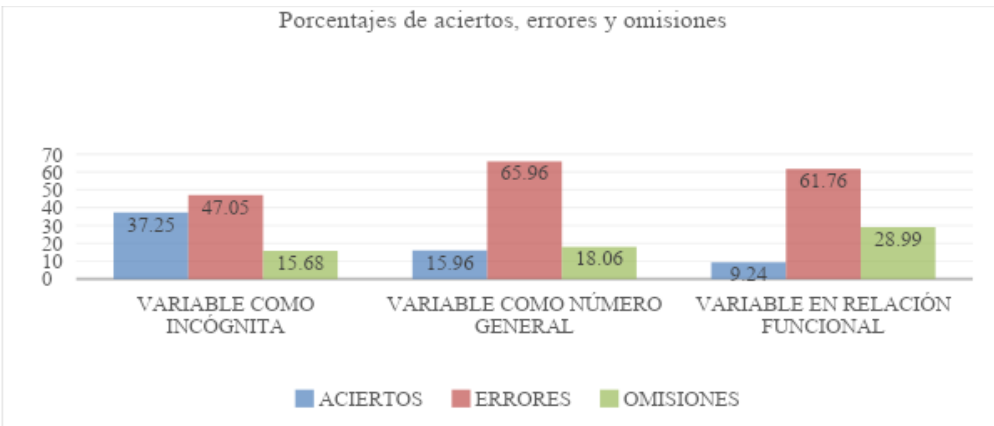


Figura 1. Resultados del diagnóstico

En la Figura 1 es posible apreciar que el porcentaje de aciertos va decreciendo en cada una de las diferentes caracterizaciones de las variables, también es necesario recalcar que las preguntas sin responder fueron en aumento en cada apartado lo cual hace notar lo complicado que les resultó a los alumnos la última parte del diagnóstico. A través de los resultados fue posible comprobar que los alumnos presentan menor dificultad en el uso de la variable como incógnita, aunque no precisamente porque la identifiquen con certeza, si no por que emplearon su conocimiento aritmético para resolver los ítems correspondientes a ese apartado. Es posible determinar que la variable como incógnita fue más sencilla para todo el grupo. Mientras que la variable como número general representó mayor dificultad para ellos. En el caso de la variable en relación funcional, al ser el último apartado del pre-test, fue el uso que en comparación con los otros dos usos tuvo mayor cantidad de preguntas sin contestar.

En realidad, no se esperaba que ningún estudiante pudiera completar con éxito los apartados de mayor dificultad tomados directamente del cuestionario propuesto por Trigueros et al, (1996). Fue sorpresivo que al menos uno de ellos lograra completar satisfactoriamente una de las preguntas debido a que en estudios previos, como es el caso de Juárez (2011), este tipo de actividades representaron un verdadero reto, incluso para profesores de matemáticas de secundaria.

1. Primera parte del pre-test: La variable como incógnita

En la primera actividad (preguntas de la 1 a la 3) se les pidió a los alumnos que escribieran el valor que podría tomar la letra para que la expresión que se les mostraba fuera correcta. En esa actividad algunos alumnos respondieron como se puede apreciar en la Figura 2.

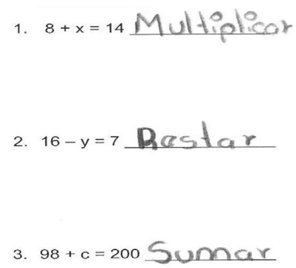

1. 8 + x = 14 Multiplicar
2. 16 – y = 7 Restar
3. 98 + c = 200 Sumar

Figura 2. Ejemplos de respuesta para los ítems 1-3

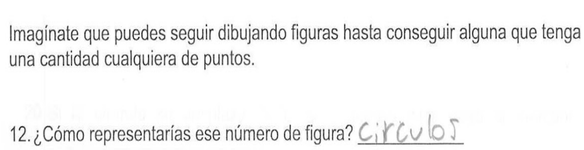
Se puede apreciar que no reconocieron la variable en ningún momento, incluso en el primer caso la interpretaron como el signo empleado para multiplicar. En el caso de las demás preguntas decidieron ignorarla, lo cual lo sitúa en la categoría de letra no utilizada según Küchemann (1980).

En el segundo apartado se logró apreciar que la comprensión de los problemas verbales les resultó difícil, además el dominio del algoritmo de la resta aún no está consolidado en todos los estudiantes. Algunos alumnos emplearon el cálculo mental para determinar sus respuestas ya que no escribieron ningún procedimiento.

2. Segunda parte del pre-test: La variable como número general

La primera actividad consistió en completar una tabla según el número de puntos de las figuras previamente dadas. En esta actividad solo 5 estudiantes lograron encontrar el patrón y así pudieron completar satisfactoriamente la tabla.

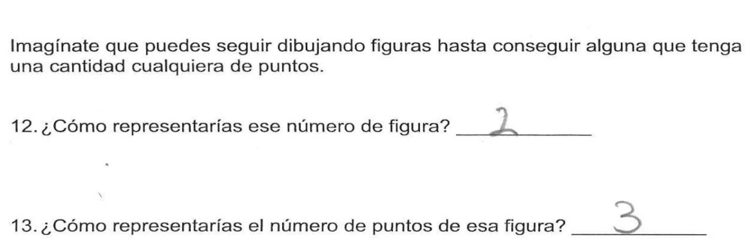
Al momento de contestar las preguntas 12 y 13 cuyo grado de dificultad es mayor, ningún estudiante pudo realizar las generalizaciones necesarias. Por una parte, algunos alumnos contestaron con números, probablemente con el afán de cumplir con la tarea, mostrando con ello una mayor adhesión al contrato didáctico (Brousseau, 1997).


Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? Circulos

Figura 3. Ejemplos de respuesta para los ítems 12 y 13

Otros alumnos probablemente no comprendieron las indicaciones y la actividad en general por que asumieron que al hablarles de representaciones se les pedía que eligieran una figura para hacerlo, como en la actividad previa de la tabla en la cual se empleaban puntos. Algunos estudiantes, siendo fieles al ejemplo, propusieron una cantidad cualquiera de puntos mediante los mismos, como se puede apreciar en la Figura 4.

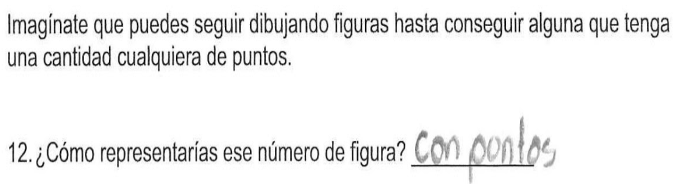

Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? 2

13. ¿Cómo representarías el número de puntos de esa figura? 3

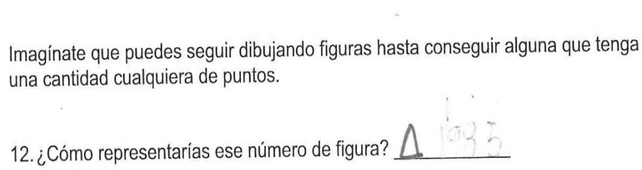
Figura 4. Ejemplo de respuesta para el ítem 12

En otros casos, algunos alumnos propusieron utilizar figuras geométricas como cuadrados o triángulos, como se puede apreciar en las Figuras 5 y 6.


Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? con pontos

Figura 5. Ejemplos de respuesta para el ítem 12


Imagínate que puedes seguir dibujando figuras hasta conseguir alguna que tenga una cantidad cualquiera de puntos.

12. ¿Cómo representarías ese número de figura? Δ

Figura 6. Ejemplos de respuesta para el ítem 12

3. *Tercera parte del pre-test: La variable en relación funcional*

En este último apartado se había considerado que era más probable que los estudiantes no tuvieran tantas dificultades como en los dos usos anteriores por que las preguntas 14 a la 18 son actividades bastantes similares a las que se trabajan en la escuela primaria. De hecho, no se esperaba que identificaran la relación entre las variables dependiente e independiente, y se contempló el hecho de que era bastante probable que trataran de resolver la actividad a través del uso de la regla de tres. Pero resultó sorprendente percatarse de que muchos alumnos dejaron sin resolver estas actividades y que para otros tantos les fue imposible responderlas exitosamente.

Conclusiones

Como se mencionó anteriormente este pre-test fue considerado como base para diseñar y aplicar una secuencia didáctica basada en las habilidades que los alumnos poseen en relación con las variables y posteriormente realizar una comparación de los resultados en contraste con el pos-test.

A partir de los datos analizados se logró determinar que el pensamiento algebraico no se encuentra desarrollado en el grupo ya que, para empezar, los alumnos no están familiarizados con el uso de variables, esto se pudo constatar ya que en ningún momento recurrieron a ellas para responder los ítems, salvo algunos casos observados en el apartado de la variable como incógnita en la que ciertos alumnos no ignoraron a las variables asignándoles un valor para que las ecuaciones resultaran correctas.

Los resultados mostraron que los alumnos no se encuentran preparados para proponer una regla que les permita determinar cualquier cantidad que se les pida dentro de una secuencia o al observar un patrón, además, al recurrir a los algoritmos que conocen se logró observar también que aun presentan algunas dificultades aritméticas como el uso satisfactorio de los algoritmos de la suma, resta y multiplicación.

A pesar de los resultados obtenidos y las carencias aritméticas que mostraron los alumnos, se considera que posiblemente puedan alcanzar una mejora significativa en el uso de las variables a través de una secuencia didáctica basada en el Modelo 3UV.

Referencias bibliográficas

Brousseau G. (1997). *Theory of didactical situation in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Chalouh, L. y Herscovics, N. (1999). Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 168-174). Virginia: NCTM.

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. y Phillips, E. (1999). Experiences with Patterning. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, grades K–12: reading from NCTM´s school- based journals and other publications* (pp. 112-119). Virginia: NCTM.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill Interamericana.

Juárez, J. A. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, *76*(3), 83-103.

Küchemann, D. (1980). *The Understanding of Generalised Arithmetic (Algebra) by Secondary School Children* (tesis doctoral). Universidad de Londres, Londres.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., y Brizuela, B. M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un Cuestionario de Diagnóstico acerca del Manejo del Concepto de Variable en Álgebra. *Enseñanza de las Ciencias*, *14*(3), 351-363.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática*, *6*(3), 90-108.

Ursini, S. (2011). Ill Modello 3UV: uno strumento teorico a disposizione degli insegnanti di matemática. *QuaderniCIRD*, *2*(10), 59-70.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa. México: Trillas.

EL CALENTAMIENTO Y ENFRIAMIENTO DE SUSTANCIAS Y LOS MODELOS MATEMÁTICOS: UNA SITUACIÓN REAL

HEATING AND COOLING OF SUBSTANCES AND MATHEMATICAL MODELS: A REAL SITUATION

Honorina Ruiz Estrada, Patricia Mendoza Méndez, Juan Nieto Frausto
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
hruizestrada@gmail.com, patriciamndzmndz@gmail.com, jfrausto@fcfm.buap.mx

Resumen
Proponemos el calentamiento y enfriamiento de una masa de agua como una tarea de modelado, la cual resolvió un grupo de estudiantes universitarios de la carrera de Física. Para conducirlos por las etapas de la modelación, se les presentó un dispositivo experimental para calentar agua hasta su punto de ebullición y su posterior enfriamiento a la temperatura ambiente. Antes de hacer los experimentos, ellos propusieron representaciones gráficas para ambos fenómenos. Para completar el ciclo de modelación, los estudiantes elaboraron un reporte, contrastando sus predicciones con los datos experimentales y la información existente en la literatura. En esta comunicación breve se discuten los modelos elaborados por los estudiantes considerando una modificación del ciclo de modelación matemática de Borromeo y se analiza si sus propuestas están relacionadas con el grado de consolidación de su reflexión cognitiva. Encontramos que los estudiantes no vieron la ventaja de proponer modelos matemáticos ni para el calentamiento ni el enfriamiento.

Palabras clave: modelación matemática, calentamiento y enfriamiento de sustancias, reflexión cognitiva

Abstract
We propose the heating and cooling of a water mass as a modeling task, which was solved by a group of university students of the Physics degree. In order to lead students through the modeling stages, an experimental device to heat water up to its boiling point and its subsequent cooling to room temperature was presented to them. Before experimenting, they proposed graphic representations for both phenomena. To complete the modeling cycle, the students prepared a report and compared their predictions with experimental data and the information available in the literature. In this brief report, the models developed by the students are discussed, considering a modification of Borromeo's mathematical modeling cycle and it is analyzed whether their proposals are related with the degree of consolidation of their cognitive reflection. We found that the students did not see the advantage of proposing mathematical models for neither heating nor cooling.

Key words: mathematical modeling, heating and cooling of substances, cognitive reflection

Introducción

La modelación matemática es un proceso cíclico que inicia en un fenómeno de la realidad, el cual se traduce al ámbito de las matemáticas y es aquí donde se obtienen los resultados matemáticos que deben ser interpretados y validados en el mundo real, completándose así un período del modelado. La conexión entre la situación real y la matemática involucra necesariamente conocimientos del mundo real que pueden pertenecer a la experiencia cotidiana o a las ciencias naturales y exactas como: la biología, la física o la química. Este aspecto puede ser un gran inconveniente para estudiantes y profesores que se enfrentan a problemas de modelado y es una de las razones por las que la modelación matemática es difícil de aprender y enseñar en las aulas. Además, en la modelación intervienen demandas de tipo cognitivo y competencias matemáticas como, comprender un texto, comunicar información, diseñar estrategias de resolución de problemas, así como trabajo matemático como calcular y razonar.

La modelación matemática ayuda a los estudiantes a comprender mejor el mundo que los rodea y a prepararse para desarrollar sus futuras responsabilidades ciudadanas, entre las que pueden considerarse a las científicas y tecnológicas. La modelación matemática motiva y ayuda al aprendizaje de la matemática escolar, desarrolla en los alumnos competencias matemáticas y contribuye a formar una imagen social positiva, a saber, que la matemática es útil en el mundo real. Estas consideraciones pudieran ser motivos suficientes para incluir problemas de modelado en la enseñanza. Sin embargo, da la impresión que la presencia cada vez más acentuada de la modelación en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar se debe a la prueba PISA, que en esencia evalúa la capacidad de los estudiantes para resolver situaciones del mundo real con argumentaciones sólidas.

Los libros de texto de matemáticas de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG) de la Secretaría de Educación Pública de México se ocupa de la modelación matemática desde la educación básica, como lo han relatado Quiroz y Rodríguez (2015). Las autoras han usado el ciclo de modelación matemática de Rodríguez (2010) que responde tanto a la Teoría Antropológica de lo Didáctico como a la Teoría de Transposición Didáctica. Este enfoque tiene la finalidad de detectar las praxeologías de la modelación matemática presentes en los seis libros de texto de matemáticas de la educación primaria. En los problemas de modelado de los libros de texto del nivel secundario es común que primero se presenten algunas gráficas para que el estudiante elija aquella que modela el fenómeno en cuestión y enseguida se den los datos “experimentales” para que verifique su elección.

Continuando con la experiencia mexicana, en los problemas matemáticos de los libros de texto del nivel medio superior suele desatenderse los pasos de modelado correspondientes al mundo extra-matemático. En la descripción de la situación problemática se proporciona parte del modelo matemático y se les deja a los estudiantes que lo completen, proponiendo las expresiones matemáticas convenientes y que realicen los cálculos correspondientes (Monterrosas, Ruiz, Slisko y Fuchs, 2018).

Otros autores han analizan las rutas de modelado que elaboran los estudiantes en la solución de problemas complejos de la matemática escolar, Borromeo (2010). En su artículo, esta autora enfatiza los nodos que componen el ciclo de modelado, las tareas cognitivas y trabajo matemático que llevan de uno a otro. En su propuesta es clara la participación de los conocimientos extra-matemáticos, propios de la naturaleza específica del fenómeno a modelar.

En esta comunicación breve se propone una tarea de modelado que involucra el calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua que inicialmente está a la temperatura ambiente. En ella, estudiantes universitarios son interrogados acerca de la forma en que se relacionan la temperatura del agua y el tiempo del calentamiento o enfriamiento. Seguidamente, ellos llevan a cabo estos dos experimentos y toman los datos. Esta información es el punto de partida de la actividad propuesta, misma que permite observar cómo se desempeñan los estudiantes a través del ciclo de la modelación: ¿qué tipo de modelos proponen?, ¿cómo confrontan sus modelos con la situación real, o sea, con los datos experimentales?, ¿usan sus conocimiento extra-matemático durante el proceso de modelación? El trabajo de los estudiantes se observa a través del ciclo de modelación matemática de Borromeo (2010) que modificamos para la presente investigación. Además, se estudia si el grado de consolidación de la reflexión cognitiva de los estudiantes está relacionado con sus propuestas y las justificaciones que las sustentan.

Marco teórico

La traducción de fenómenos de la realidad (la naturaleza, las disciplinas científicas, la sociedad, la vida cotidiana, entre otros) hacia la matemática y de regreso se denomina ciclo de modelado. Esta conceptualización entre el conocimiento matemático y elementos de naturaleza extra-matemático, fueron denominados por Pollak (1979) como: Resto del mundo y la Matemática, y son el basamento para los diferentes ciclos de modelado propuestos en la literatura.

En el ámbito, Resto del mundo, el ciclo de modelación de Borromeo (2010) considera la “Situación real”, la “Representación mental de la situación” y el “Modelo real” (vea la Figura 1). El primer nodo se refiere a una imagen, un texto o ambos, que presentan la situación problemática a resolver. El tránsito a la “Representación mental de la situación” requiere del entendimiento del problema presentado en el punto de partida; el resolvente construye en su mente la “Situación real”. Enseguida, es necesario Idealizar y simplificar esta imagen mental identificando los aspectos relevantes involucrados; es un proceso consciente e interno que conduce al “Modelo real”. En esta parte del proceso intervienen aspectos correspondientes a la naturaleza de la situación real (Conocimientos extra-matemáticos), los que pueden provenir incluso de la experiencia cotidiana del que intenta resolver el problema de modelado. La Matematización es el puente que conecta al Resto del mundo con el de las Matemáticas. En este tramo, el “Modelo real” se traduce (en términos de figura geométricas, constructos matemáticos, expresiones matemáticas entre otras) al “Modelo matemático” de la situación. El Trabajo matemático subsecuente conduce al quinto nodo del ciclo denominado “Resultados matemáticos”, con el que concluye la actividad correspondiente al ámbito matemático. El retorno al “Resto del mundo” se logra mediante el paso Interpretando; conocimientos extra-matemáticos y el razonamiento matemático conducen al nodo denominado “Resultados reales”. La validación de estos resultados puede sugerir la conveniencia de dar otra vuelta al ciclo. La validación se puede hacer considerando como punto de comparación alguno de los tres primeros nodos del ciclo de modelación.

En la presente investigación, la “Situación real” del ciclo de modelación de Borromeo (2010) es un dispositivo experimental para el calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua. Estos fenómenos son acompañados de conocimientos extra-matemáticos: cuando el agua se calienta, eventualmente llega a su punto de ebullición y una vez que esto sucede, su temperatura deja de incrementarse. Cuando se permite que esta agua muy caliente se enfríe, en algún instante de tiempo, su temperatura alcanza la del medio ambiente en la que se colocó. Estos conocimientos extra-matemáticos son decisivos en la formulación de la “Representación mental de la situación” y la construcción del “Modelo real”. Ahora, dadas las características experimentales del problema de modelado que proponemos, es necesario agregar el nodo “Datos experimentales”, justo después del “Modelo real”, el cual se alcanza mediante el paso: trabajando experimentalmente. El retorno al “Resto del mundo” se realiza Interpretando los “Resultados matemáticos” en “Resultados físicos”. La Validación de estos resultados se realiza directamente con el nodo “Datos experimentales” (vea la Figura 1).

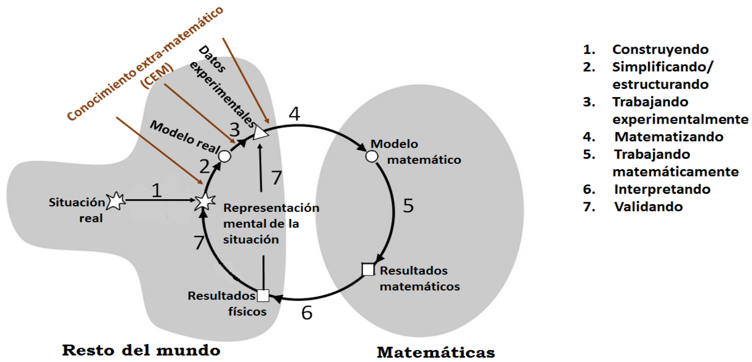


Figura 1. Traducción al español de la Figura 1 del artículo de Borromeo (2010). Los siete pasos indicados en el recuadro constituyen las barreras cognitivas que enfrentan los resolventes de problemas de modelado. Para los fines del presente trabajo, se agregó el nodo "Datos experimentales" y el paso *Trabajando experimentalmente*.

Consideramos como perfil de referencia estudiantil, la reflexión cognitiva, entendida como la capacidad o disposición que tiene una persona para resistirse a dar como respuesta, la primera que le ofrece su mente. Para identificarla se utilizó el test de reflexión cognitiva (TRC) en la versión castellana de López (2012). Es una prueba de lápiz y papel que contiene seis acertijos matemáticos. Los "pensadores rápidos" respondan correctamente 1 acertijo y los "pensadores lentos" obtienen de 5 a 6 aciertos. Los que obtienen de 2 a 4 puntos son "pensadores en transición".

El objetivo

La finalidad de este documento es presentar y analizar los modelos que elaboran estudiantes de física para el calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua. Además, se estudia la posible influencia de su reflexión cognitiva en los modelos que elaboran y las explicaciones que ofrecen cuando comparan sus predicciones con los datos experimentales que ellos mismos obtienen.

Los estudiantes involucrados

En la encuesta participó un total de 35 estudiantes universitarios, 14 mujeres y 31 hombres. 19 son estudiantes de un programa de física de generaciones 2015 y anteriores (11 mujeres y 8 hombres); 12 son pensadores lentos, 6 están en estado de transición y uno es pensador rápido. A este grupo de estudiantes lo denominamos como Muestra 1 (M1).

Los 16 alumnos restantes son estudiantes de física, generación 2016: 3 mujeres y 13 hombres. 5 son pensadores en transición y 11 son pensadores lentos. A este grupo de estudiantes lo denominamos como Muestra 2 (M2).

El experimento

El experimento se realizó en un laboratorio de enseñanza localizado en la ciudad de Puebla, México, que está a 2,135 m sobre el nivel del mar y consistió del calentamiento y posterior enfriamiento de una masa de agua. La temperatura del medio ambiente registrada durante el experimento fue de 24°C, por lo que dicha temperatura, es la temperatura inicial para el proceso de calentamiento y la temperatura final a la que llega la masa de agua en el proceso de enfriamiento.

Para realizar el experimento se utilizaron los siguientes materiales: una parrilla eléctrica con placa calefactora con agitación magnética marca Corning, una balanza digital marca Ohaus Adventure, 200 ml de agua destilada, dos termómetros de alcohol con una resolución de medio grado Celsius, un cronómetro, dos soportes universales, pinzas de doble nuez, pinzas para bureta o tipo Fisher, una plataforma de elevación, un vaso de precipitados y un agitador magnético.

Con respecto a la ejecución del experimento, los estudiantes encuestados recibieron la siguiente información en forma verbal. Para censar la temperatura del aire del laboratorio, coloque un dispositivo termómetro-soporte, el cual se mantendrá alejado de la parrilla. Luego, determine la masa de 200 ml de agua destilada, viértala en el vaso de precipitados y colóquelo sobre la parrilla eléctrica. Ésta tiene la posibilidad de rotar el agitador magnético con lo que se asegura una distribución uniforme de la temperatura del agua. Coloque un termómetro en la parte central de la masa de agua y fíjelo mediante un soporte universal. Asegúrese que el termómetro quede alejado de la superficie del agua, así como de las paredes y del fondo del vaso de precipitados. Permita que la parrilla trabaje en Heat-5 y Stir-2 y conéctela a la corriente eléctrica. Desde este instante, inicie la medición de la temperatura del agua y el tiempo de calentamiento hasta que se alcance el punto de ebullición. Tome datos cada dos minutos y regístrelos en una tabla. Además, se recomendó a los estudiantes hacer anotaciones describiendo lo que sucede con el agua durante el calentamiento: ascenso de burbujas de aire, corrientes de convección, evaporación del agua, ebullición, entre otros.

Para el enfriamiento del agua, las indicaciones fueron las siguientes: Una vez que el agua haya alcanzado el punto de ebullición, deslice el dispositivo vaso de precipitados-termómetro hacia la plataforma de elevación, la cual debe estar a la misma altura que la parrilla. Entonces, apague y desconecte la parrilla y aléjela de la plataforma. Luego, regrese el cronómetro a cero e inicie la medición de la temperatura del agua conforme se enfría. Finalmente, mida el volumen y la masa final de agua.

En la Figura 2 se muestra el arreglo experimental para el calentamiento y posterior enfriamiento de la muestra de 200 ml de agua destilada.

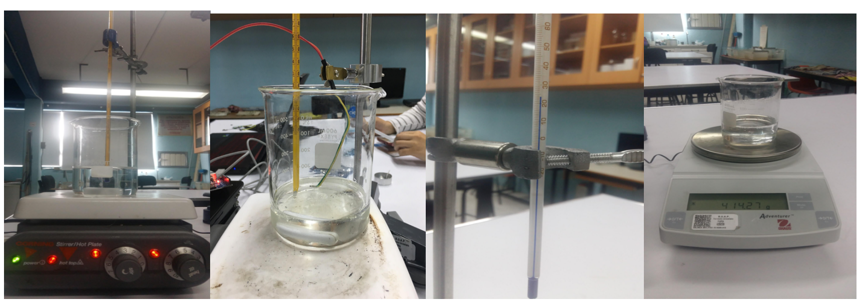


Figura 2. (a) Dispositivo experimental; parrilla, vaso de precipitados, termómetro y soporte universal durante el proceso de calentamiento, (b) Zoom: Vaso de precipitados y termómetro, (c) Dispositivo termómetro-soporte para monitorear la temperatura del medio ambiente y (d) Balanza digital y vaso de precipitados con el agua al concluir el proceso de enfriamiento.

El tiempo requerido para el proceso de calentamiento fue de 38 minutos, así que la ventana de tiempo para observar el proceso de enfriamiento fue al menos del mismo orden. Los datos experimentales obtenidos durante ambos procesos se presentan en las Tablas 1 y 2, respectivamente.

Tabla 1. Datos experimentales correspondientes al proceso de calentamiento de 200 ml de agua destilada.

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
T (°C)	24.0	27.0	34.0	42.0	50.0	57.0	63.0	69.0	73.0	76.0	79.0	81.0	82.0	83.0	84.0	84.2	84.8	85.0	85.1	85.1

Tabla 2. Datos experimentales correspondientes al proceso de enfriamiento de una masa de agua destilada en un medio ambiente a 24°C

t (min)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
T (°C)	85.0	75.0	69.0	64.0	60.0	56.5	54.0	51.2	49.0	46.0	45.0	43.5	42.0	41.0	39.5	39.0	38.0	37.0	35.5	35.0

Método

Previo al trabajo experimental, los estudiantes resolvieron el test de Reflexión Cognitiva. La prueba se contestó en el salón de clases y duró entre 40 y 60 minutos.

En cuanto al trabajo experimental, éste se realizó en una sesión de 150 minutos. El procedimiento experimental seguido se describió en la sección *El experimento.*

Antes de realizar los experimentos, se les pidió a los estudiantes que propusieran una representación gráfica para el calentamiento y otra para el enfriamiento, y que justificaran sus hipótesis. Con este fin, en el caso del calentamiento, se les sugirió que se hicieran las siguientes preguntas: ¿Qué le pasa al agua cuando se calienta? ¿Cómo varía la temperatura de la masa de agua conforme transcurre el tiempo, dado que el agua está inicialmente a la temperatura ambiente? Para el enfriamiento, la sugerencia fue que se preguntaran ¿Cómo será la variación de la temperatura de la masa de agua con el tiempo, dado que al inicio está hirviendo y se encuentra colocada en el medio ambiente?

Una vez elaboradas sus hipótesis, se recogieron los documentos para su posterior análisis y se procedió a realizar el experimento para la obtención de los datos

En cuanto a los datos experimentales, se les pidió a los estudiantes registrarlos en sendas tablas de datos, graficarlos, contrastar dichas gráficas con sus hipótesis y considerar la información existente en la literatura. En caso de haber diferencias se les sugirió pensar en los posibles factores involucrados. Por ejemplo: (1) Si el flujo de calor aportado a la masa de agua fue uniforme, (2) Si los datos de temperatura dependen de la masa de agua utilizada, (3) Si influye la temperatura del ambiente, y otros que ellos consideren relevantes. Finalmente, se les pidió elaborar sus conclusiones. Esta actividad fue dejada de tarea.

Resultados

En términos generales, los 35 estudiantes encuestados lograron simplificar y estructurar el fenómeno de calentamiento y el de enfriamiento, lo que les permitió identificar las variables que los describen y proponer, a través de gráficos, un “Modelo real” para cada uno de ellos. Para el calentamiento del agua, alrededor del 60% de los estudiantes propuso el “Modelo real” que no describe la evolución de la temperatura del agua con el tiempo, mientras que, aproximadamente, el 70% propusieron el modelo apropiado para el enfriamiento del agua caliente en presencia de su medio ambiente. Esto significa que el calentamiento de sustancias es menos intuitivo que el enfriamiento; lo que no deja de llamar la atención porque estos dos fenómenos son experiencias de la vida cotidiana.

A continuación, se discuten los “Modelos reales” presentados por las dos muestras de estudiantes universitarios y su posible correlación con el test de reflexión cognitiva (TRC).

La Muestra 1, conformada por 19 alumnos, tiene una calificación promedio de 4.4 en el TRC, que los ubica como “pensadores en transición”; son personas con algo de control sobre su reflexión cognitiva. No aceptan, de inmediato, la primera solución que les ofrece la mente, sino que se detienen a pensar en la solución, es decir, ellos son estudiantes que van camino a convertirse en “pensadores lentos”. Los 16 alumnos de la Muestra 2 alcanzaron una puntuación promedio de 4.9. Globalmente, son “pensadores lentos”, con más posibilidad de proponer los modelos más certeros para el calentamiento y el enfriamiento de una masa de agua. La Tabla 3 presenta valores promedio obtenidos por la Muestra 1 y la Muestra 2 en el test de reflexión cognitiva (TRC).

Clasificación	Número de Alumnos	
	M1	M2
Pensador rápido	1	0
Pensador en transición	6	5
Pensador lento	12	11

Tabla 3. Grupos clasificatorios de reflexión cognitiva de las dos muestras de estudiantes universitarios. Los pensadores rápidos obtienen de 0 a 1 acierto y los lentos de 5 a 6; el número de aciertos de los pensadores en transición es de 2 a 4.

Los 35 Modelos reales estudiantiles para el calentamiento de la masa de agua se agruparon en tres categorías, considerando en qué medida, contienen los siguientes rasgos característicos del calentamiento del agua: (1) una vez que se estabiliza la entrega de energía de la parrilla a la masa de agua, la temperatura del agua cambia linealmente con el tiempo y este comportamiento se mantiene hasta que el agua comienza a hervir. Una vez que alcanza su punto de ebullición la temperatura ya no cambia con el tiempo porque en este estado, todo el calor suministrado se utiliza para transformar porciones de agua en ebullición en vapor de agua. En la Tabla 4 se describen las categorías.

CATEGORÍAS		
C1	C2	C3
Curva cóncava para la temperatura del agua como función del tiempo de calentamiento.	*Curva convexa* para la temperatura del agua como función del tiempo de calentamiento.	*Línea recta con pendiente positiva* para la temperatura del agua como función del tiempo de calentamiento.

Tabla 4. Categorías para los Modelos reales propuestos por los estudiantes universitarios de las muestras M1 y M2 para el calentamiento de la masa de agua. La curva involucrada en la Categoría C3 describe apropiadamente el calentamiento y la que menos lo hace es la curva de la Categoría C2.

Los Modelos reales propuestos para el enfriamiento del agua en ebullición se agruparon en otras tres categorías. Éstas se presentan en la Tabla 5.

CATEGORÍAS		
K1	**K2**	**K3**
Exponencial decreciente **para la temperatura del agua como función del tiempo de enfriamiento.**	***Curva concava*** **para la temperatura del agua como función del tiempo de enfriamiento.**	***Línea recta con pendiente negativa*** **para la temperatura del agua como función del tiempo de enfriamiento.**

Tabla 5. Como en la Tabla 4 solo que ahora, para el enfriamiento de la masa de agua. La función involucrada en la Categoría K1 es la que describe el enfriamiento del agua en ebullición en contacto térmico con su medio ambiente.

La Tabla 6 muestra la distribución (por categorías) de los 35 Modelos reales estudiantiles para el calentamiento y el enfriamiento de una masa de agua.

CLASIFICACIÓN	C1	C2	C3	K1	K2	K3
MUESTRA 1	12/19	7/19	0/19	11/19	8/19	0/19
MUESTRA 2	9/16	5/16	2/16	10/16	3/16	3/16

Tabla 6. Distribución por categorías de los modelos matemáticos propuestos por los 35 estudiantes de física encuestados. Calentamiento (letra C), enfriamiento del agua (letra K).
La respuesta correcta para el calentamiento está en la categoría C3 y la del enfriamiento en la categoría K1.

En relación al proceso de calentamiento, de la Tabla 6 se observa que 21 de los 35 estudiantes propusieron una curva cóncava (Categoría C1). 14 de ellos piensan que el agua incrementará su temperatura con el tiempo de manera indefinida y 7 tienen la idea que, en algún instante de tiempo, el agua alcanzará una temperatura constante (vea las figuras Figura 3a y Figura 3b). De esta misma tabla se desprende que 2 de los 35 estudiantes proporcionaron el “Modelo real” apropiado, aunque solo uno de ellos sabe que el agua en ebullición no cambia su temperatura, aunque se le siga proporcionando calor (vea la Figura 3c). Algunos de estos estudiantes mencionaron el término “temperatura de ebullición”, aunque no la usaron apropiadamente en sus predicciones (“Modelo real”).

Ahora, hablando del enfriamiento y considerando la Tabla 6, se tiene que 21 de 35 alumnos propusieron el modelo correcto (Categoría K1). En la Figura 4a se muestra uno de estos modelos; observe que el estudiante sabe que, en algún instante de tiempo, el agua alcanzará la temperatura del medio ambiente y permanecerá fija en ese valor. De esta tabla también se desprende que 11 alumnos propusieron una curva cóncava (categoría K2); 4 de ellos consideran que la temperatura del agua desciende conforme transcurre el tiempo; incluso, que puede ser cero Celsius (vea las Figuras 4b y 4c). Se observa que el Estudiante E4 no se percata que se podría seguir midiendo la temperatura del agua para tiempos mayores que el instante en que alcanzó 0°C. El estudiante E2 piensa que, en algún instante de tiempo, el agua alcanzará 0°C y que no cambiará más. Llama la atención que hayan realizado estas predicciones porque ellos constataron que la temperatura del medio ambiente no era cero grados Celsius. No relacionan la “Situación real” con lo que la mente les ofrece como solución. Este comportamiento es inesperado porque ellos son pensadores lentos.

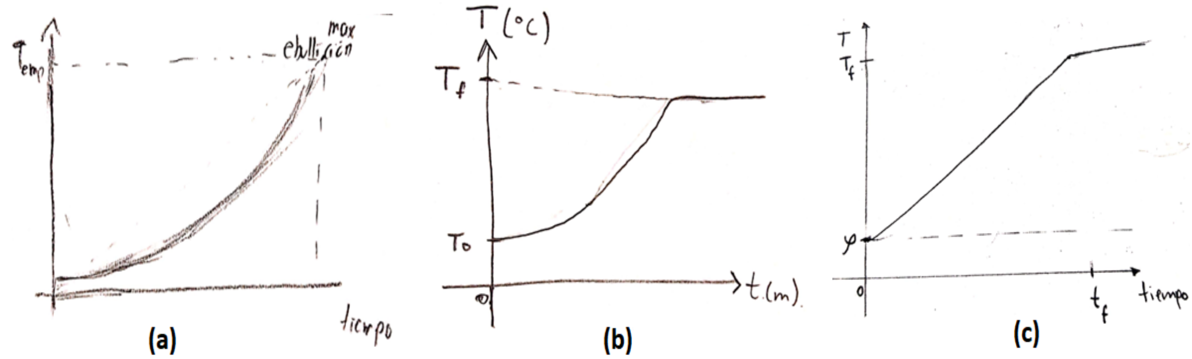


Figura 3. Calentamiento de 200 ml de agua. "Modelos reales" de la Categoría C1: (a) estudiante E1 (TRC=4) y (b) estudiante E2 (TRC=5). "Modelo real" de la Categoría C3: (c) estudiante E3 (TRC=4).

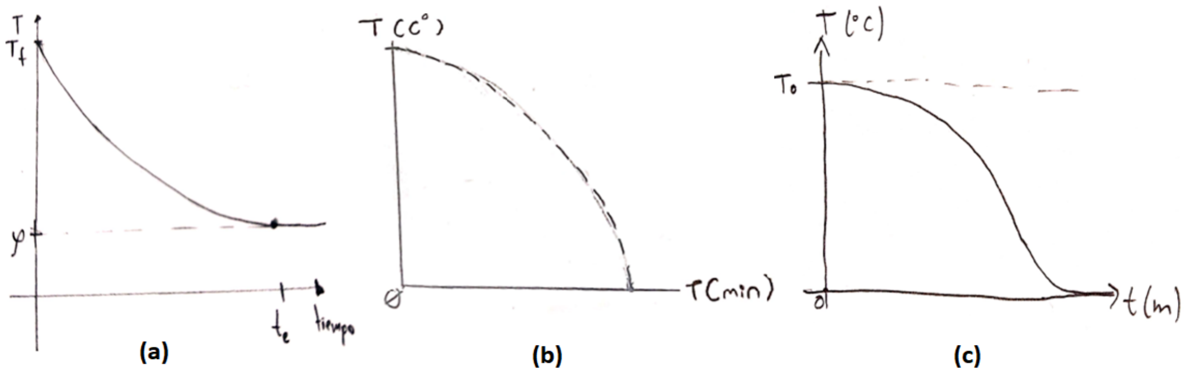


Figura 4. Enfriamiento de 200 ml de agua. (a) "Modelo real" de la Categoría K1 propuesto del estudiante E3 (TRC=4). Dos Modelos de la Categoría K2: (b) estudiante E4 (TRC=5) y (c) estudiante E2 (TRC=5).

Es menester comentar que no observamos una correlación evidente entre los puntajes promedio del TRC y las categorías, tanto del calentamiento como del enfriamiento. Por ejemplo, en el caso del enfriamiento y considerando la Muestra 2, las categorías K1 (modelo correcto) y K2 comparten un puntaje TRC de 4.93, que no está apreciablemente alejado del puntaje 4.80 de la categoría K3, que es el modelo lineal propuesto por los estudiantes encuestados. Algo similar ocurre con el calentamiento del agua. La Categoría C3 (modelo correcto) tiene un puntaje TRC de 4.33 y la C2 de 5.00. Un desempeño similar se observa en la Muestra 1, aunque con puntajes promedio menores.

Ahora, en relación con los reportes de los alumnos y considerando los datos experimentales del enfriamiento. Aunque algunos estudiantes mencionan la ley de enfriamiento de Newton, no la usaron como "Modelo matemático" para obtener los "Resultados matemáticos" que les permitieran completar el ciclo de modelación al comparar los "Resultados físicos" con los "Datos experimentales". Se esperaba que en su reporte, ellos incluyeran y discutieran la Figura 5 que más adelante se presenta.

La ley de enfriamiento de Newton establece que el cambio de la temperatura de una sustancia en un medio ambiente a la temperatura T_a está dada por la expresión:

$$\Delta T(t) = T(t) - T_a = c\ exp\{-t/\tau\}$$

Para el enfriamiento de la muestra de agua, $T_a = 24°C$, es la temperatura del aire del salón de clase, $\tau = 11.2\ min$ es el tiempo característico del enfriamiento y $c = 61°C$es la diferencia inicial de temperatura entre el agua y el aire circundante. Para identificar los valores de los parámetros c y τ se usaron los dos primeros pares de datos de la Tabla 2. Observe que el tiempo de medición de la temperatura del agua hirviente en su proceso de enfriamiento es suficiente, porque es más del triple del tiempo característico de este fenómeno. En la Figura 5 se presentan los datos del enfriamiento y su comparación con el modelo de Newton. La línea recta con pendiente cero representa la temperatura del aire del laboratorio mientras transcurría el experimento, $T(t) = 24$°C.

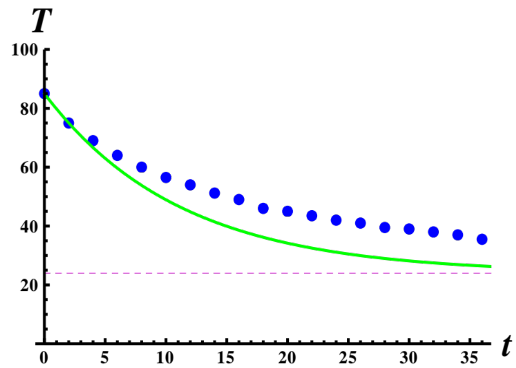


Figura 5. Curva de enfriamiento de una masa de agua destilada desde el punto de ebullición hasta una temperatura cercana a la del medio ambiente,$24°C$. El registro de los datos inició cuando el agua estaba a $85°C$. El tiempo se da en minutos y la temperatura en grados Celsius.

Ahora, en relación con el calentamiento de 200 ml de agua. En sus reportes finales, los estudiantes no le prestaron atención a la evidente contradicción entre sus Modelos reales y los datos experimentales que ellos mismos obtuvieron. Aunque en este caso, el "Modelo matemático" era más simple de identificar y proponer, ningún estudiante lo obtuvo. Ellos debieron de considerar un gráfico como el dado en la Figura 6. La línea recta con pendiente $\lambda = 3.6$ °C$/min$ representa el calentamiento lineal del agua una vez que la superficie de la parrilla y la del vaso de precipitados (con el agua) alcanzan el estado estacionario. En este caso, la temperatura varía con el tiempo como, $T(t) = \lambda\, t + b$, con $b = 19.5$°C. Para obtener los valores de λ y b se consideraron el tercer y séptimo par de datos de la Tabla 1. La línea recta con pendiente cero da cuenta de la forma que varía la temperatura del agua en estado de ebullición, $T(t) = 85.1$°C.

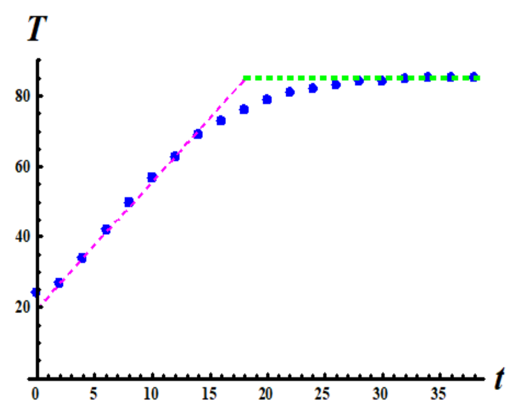


Figura 6. (a) Curva de calentamiento de 200 ml de agua destilada desde la temperatura ambiente ($24°C$) hasta su punto de ebullición ($85.1°C$). El tiempo se da en minutos y la temperatura en grados Celsius.

Conclusiones

Del presente estudio se concluye que el fenómeno de calentamiento de una masa de agua es poco familiar, incluso en estudiantes de física; solo 2 de 35 propusieron una línea recta con pendiente positiva como “Modelo real” para la variación de la temperatura con el tiempo. Este resultado llama la atención porque en los problemas de los libros de texto de matemáticas de la CONALITEG del nivel secundario, se usa el calentamiento de sustancias como contexto para la enseñanza y el aprendizaje de la línea recta, SEP (2017). A pesar de ello, pareciera que los estudiantes no relacionan estos problemas matemáticos con su realidad, por lo que sería conveniente que realicen actividades experimentales de modelado como la que proponemos. Esto les permitiría entender cómo funciona el mundo real y les ofrecería más posibilidades de enfrentar exitosamente, los problemas de modelación que tienen como punto de partida, situaciones reales provenientes de las ciencias naturales, exactas y la ingeniería.

No es claro que el puntaje obtenido por los estudiantes en el test de Reflexión Cognitiva esté relacionado con su propuesta de “Modelo real”, tanto en el calentamiento como el enfriamiento, ya sea a nivel individual o en términos de las categorías propuestas para estos modelos. Este resultado puede deberse al papel relevante que juegan los conocimientos extra-matemáticos en la elaboración de estas predicciones. Monterrosas y colaboradores (2018) encontraron que tal relación si llega a presentarse cuando se observa el desempeño de los estudiantes únicamente al ámbito matemático del ciclo de modelación.

De los reportes elaborados por los estudiantes encuestados se desprende que, ellos trabajaron únicamente en la porción del ciclo de modelación que involucra al Resto del mundo (Borromeo, 2010). Aunque, en el caso del enfriamiento de la masa de agua, algunos mencionaron a la ley de enfriamiento de Newton, no vieron la necesidad de buscar una expresión matemática para la temperatura como función del tiempo y de esta manera contestarse la pregunta: ¿cuánto tiempo es necesario esperar para que el agua que inicialmente está 85.1°C, alcance la temperatura del medio ambiente, 24°C? En relación al calentamiento, algunos estudiantes aceptaron que su “Modelo real” no se correspondía con la “Situación real”. Ninguno calculó la expresión matemática para la recta con pendiente positiva que modela el calentamiento de los 200 ml de agua destilada considerada en el experimento.

Llama la atención que los estudiantes encuestados no hayan usado los dos “Modelos matemáticos” antes citados porque son de su conocimiento a través de materias de matemáticas que ya han cursado. Aunque la presente investigación involucra únicamente a 35 estudiantes de física, los resultados discutidos sugieren que es conveniente trabajar conjuntamente, autores de libros de texto de matemáticas y maestros de las diferentes áreas del conocimiento, en la elaboración de problemas de modelado que tengan como punto de partida, situaciones del mundo real que involucra la experimentación.

Referencias bibliográficas

Blum, W., Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?, *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1, 45-58.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners’ modelling behavior, *Journal fur Mathematik didaktik* 31, 99-118.

López, J. (1979). Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad, *Revista Divulgación Matemática* 5, 17-18.

Pollak, H. (2016). The interaction between mathematics and other school subjects, in UNESCO, *New Trends in Mathematics Teaching IV* (pp. 232-248), Paris: UNESCO.

Monterrosas, Y., Ruiz, H., Slisko, J., Fuchs, L. (2018). Soluciones estudiantiles de un problema de movimiento propuesto en un libro de texto de geometría analítica: influencias del razonamiento lógico y de reflexión cognitiva, *Latin-American Journal of Physics Education* 12, 2303-1-2303-11.

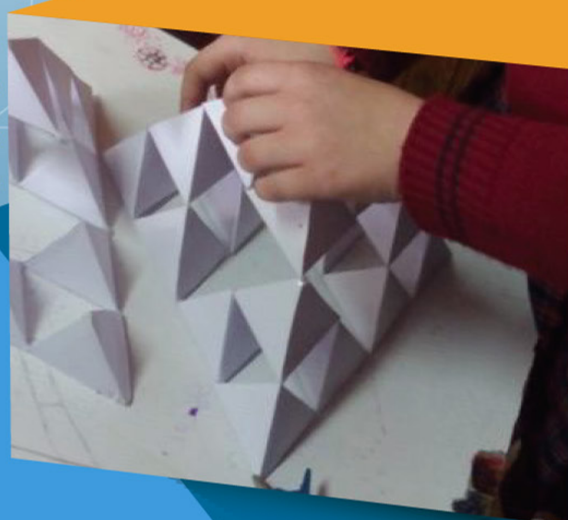
Quiroz, S., Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria, *Educación Matemática* 27, 45-77.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: un caso de las ecuaciones diferenciales, *Relime* 13 (4-I), 191-210.

Secretaría de Educación Pública (2017). *Aprendizajes claves para la educación integral, plan y programas para la educación básica*, Ciudad de México, México, Autor.

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ANÁLISIS DE INDICADORES DE CREATIVIDAD MEDIANTE UN EXAMEN DE PREMIO DE LA ASIGNATURA GEOMETRÍA ANALÍTICA

ANALYSIS OF CREATIVITY INDICATORS BY MEANS OF AN AWARD EXAMINATION OF ANALYTICAL GEOMETRY SUBJECT

Pedro Leonardo Rodríguez Quintana, Lucía Argüelles Cortés
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas (Cuba)
perquintana@uclv.cu, largue@uclv.edu.cu

Resumen
En el proceso docente de la asignatura Geometría Analítica para estudiantes de la carrera Ciencias de la Computación, se han considerado las dimensiones de la creatividad por su importancia en la formación profesional. Los exámenes de premio de la Educación Superior Cubana constituyen instrumentos especiales para medir el potencial creativo de los estudiantes más talentosos de un grupo. El presente trabajo tiene como objetivo fundamental: analizar determinados indicadores de creatividad en la resolución de problemas durante el examen de premio de la asignatura Geometría Analítica en estudiantes de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Computación. En el análisis de los resultados se evidenció que el desarrollo creativo de cada estudiante es diferente, pero la asignatura potencia el desarrollo de la originalidad, la flexibilidad y la elaboración.

Palabras clave: creatividad, examen de premio, geometría analítica

Abstract
In the teaching process of Analytical Geometry for students of the Computer Science degree, the dimensions of creativity have been considered due to their importance in the professional training. The award examinations of Cuban Higher Education constitute special tools to measure the creative potential of the most talented students of a group. The main objective of this work is to analyze certain indicators of creativity in problem solving during the award examination of the subject Analytical Geometry in students of the Computer Science degree. The analysis of the results showed that the creative development of each student is different, but the subject fosters the development of originality, flexibility and elaboration.

Key words: creativity, award examination , analytical geometry

Introducción

Los exámenes de premio constituyen un instrumento para motivar a los estudiantes de la Educación Superior cubana a profundizar en los conocimientos abordados de una asignatura cursada de una manera competitiva; pues el profesor debe seleccionar un primer, un segundo y un tercer lugar entre los trabajos evaluados de excelente. Por ello, en el artículo 220 de la Resolución 2/2018 del Ministerio de Educación Superior (MES) se plantea que “los exámenes de premio constituyen una vía para elevar la calidad de los egresados que forma la educación superior”.

En el desarrollo de la asignatura Geometría Analítica, asignatura impartida para futuros egresados de la carrera de Ciencias de la Computación, los estudiantes se deben enfrentar a disímiles problemas para darles solución. Problemas que en su mayoría poseen niveles de complejidad superior a los trabajados en la enseñanza general, y que poseen en ocasiones más de un método de solución. Esto unido a que el contenido de la propia asignatura combina técnicas de la Geometría y el Álgebra elementales, exige a los estudiantes el desarrollo de la creatividad.

Aunque el artículo 222 de la Resolución 2/2018 del Ministerio de Educación Superior (MES) propone calificar los exámenes de premio atendiendo a la calidad y originalidad de los trabajos, un examen de premio de la asignatura Geometría Analítica debe considerar el nivel de creatividad alcanzado por los estudiantes.

Por esta razón el presente trabajo tiene como objetivo fundamental:

Analizar determinados indicadores de creatividad en la resolución de problemas durante el examen de premio de la asignatura Geometría Analítica en estudiantes de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Computación.

Marco teórico

Muchos son los autores que han venido trabajando en el concepto de la creatividad. Pedagogos y psicólogos se han dado a la tarea de distinguir entre lo creativo y lo inspirador, entre lo creativo y lo inteligente, e incluso entre lo creativo y lo motivador.

En la investigación desarrollada por Sánchez y Ruiz se basan en el concepto enunciado por Eysenck que entiende la creatividad como:

Un estilo cognitivo, una disposición a actuar de un modo determinado en la esfera de la cognición, motivada por una particular tendencia a relacionarse con el entorno, en la que es característica la amplitud del rango de las asociaciones y la distancia afectiva de lo convencional. (Eysenck, 1995, citado en Sánchez y Ruiz, 2013, p.2)

Aunque los conceptos anteriores vinculan lo cognitivo y lo creativo, cierto es que no siempre las personas con mayor desarrollo cognitivo son las personas más creativas. Esto perfectamente lo explica Torres Pérez como sigue:

Dado que las personas con alto coeficiente de inteligencia por lo general pueden detectar con facilidad el algoritmo o principio de funcionamiento de algo, sin embargo, el sujeto creativo es el que quizás tenga esa gran facilidad para captar esos principios, por cuanto genera otros mecanismos. Los test de inteligencia se apoyan en el principio que para cada pregunta hay una sola respuesta correcta, mientras que la creatividad se basa en el criterio de que para cada pregunta o problema existe más de una solución. (Torres Pérez, 2008, p.18).

Por otra parte, Manuela Romo destaca el rasgo personológico de la creatividad cuando plantea que:

Aunque soy de los que conciben la creatividad como una forma de pensar, sin embargo, los procesos de pensamiento, por sí mismos, pueden dar cuenta de una obra aislada pero lo normal es una productividad mantenida en una vida de trabajo y, eso implica, además de una forma de pensar, una forma de ser (Romo, M. citado en Alvarez, 2010, p.7).

Mitjans propone valorar la creatividad como una unidad dialéctica entre lo cognoscitivo y lo afectivo.

Ninguna actividad creadora es posible o explicable solo por elementos cognitivos o afectivos que funcionan independientemente unos de otros. Actividad creadora es la de un sujeto que, precisamente, en el acto creador, expresa sus potencialidades de carácter cognitivo y afectivo en unidad indisoluble. Y es precisamente esa unidad condición indispensable para el proceso creativo. (Mitjáns, 1994, citado en Armada Arteaga, 2016, pp.86-87).

Más adelante la misma autora plantea que:

En el descubrimiento de un problema, en el hallazgo de una nueva estrategia de solución, en la elaboración de una novedosa teoría, están presentes y son decisivos procesos intelectuales complejos, donde el pensamiento juega un rol fundamental, pero a su vez, esos procesos intelectuales no funcionan con independencia de la esfera motivacional del sujeto, aún más operan allí donde la motivación del sujeto está comprometida, en el área donde el sujeto ha desarrollado sus intereses y se gratifican sus principales necesidades. El proceso creativo está pleno de vivencias emocionales, ya sea de carácter positivo o negativo. Estas vivencias son indicadores de la significación que en el plano afectivo tiene para el sujeto su actividad creadora, no constituyendo un simple resultado del proceso, sino parte del proceso mismo al que se integran en calidad de elementos dinamizadores. (Mitjáns, 1994, citado en Armada Arteaga, 2016, p.87).

La creatividad es un estado psicológico consustancial al ser humano, explicado esto último debido a que el hombre solo se orienta y ocupa de aquello que le resulta casual y novedoso. Pero la condición de ser creativo no solo está muy vinculado al pensamiento de un individuo o un grupo de personas, sino también a las formas de hacer.

La creatividad se concibe como una relación íntima entre la disposición de los recursos, la imaginación, la fantasía y la subjetividad de la persona, que se puede dirigir en su curso y contenido al pasado o se puede dirigir en su curso y contenido al futuro.

Según Callejo, 2003, p. 27, la creatividad en Matemática transita por varias fases: la preparación, la inspiración, la incubación y la verificación. Cada una de estas fases fue enunciada a partir de un discurso de Heinri Poincaré sobre el asunto pronunciado en la Sociedad Psicológica de París:

La fase de preparación, larga, habla de 15 días, en la que [Poincaré] se esforzaba en demostrar una conjetura sentándose una o dos horas diarias en su mesa de trabajo y no llegaba a ningún resultado. Pero ese trabajo no fue inútil porque la inspiración se produjo a partir de las ideas que activó en esas horas en que se enfrentaba al problema. Entre los períodos de trabajo consciente, su mente siguió trabajando en el problema aunque la atención se centrase en otra cosa, es la fase de incubación. A la inspiración siguió la verificación y la redacción de los resultados. La transición de la incubación a la inspiración aparece a menudo como una nueva e inesperada forma de ver las cosas, de relacionar, de percibir el problema. (Callejo, 2003, p. 27)

Armada Arteaga, Arteaga Valdés, y Del Sol Martínez, 2016, p.87 plantean que existen 5 dimensiones de la creatividad: el proceso, la persona, el producto, el entorno y la tarea. Es lógico pensar que, si se desea un estudiante creativo, se la ha de enseñar a ser creativo incidiendo por supuesto en cada una de estas dimensiones.

Vargaz, Cárdenas, Flores, y abarca Cedeño (2014) estudiaron las relaciones que se establecen entre el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas y el desarrollo de la creatividad en estudiantes mexicanos de nivel medio superior. En este caso utilizan dos instrumentos: uno para valorar las habilidades matemáticas y el test CREA, test psicológico que mide la creatividad mediante la capacidad del sujeto para elaborar preguntas a partir de un material gráfico suministrado en 4 minutos.

Como la creatividad se puede manifestar de muy diversas maneras, las actuales investigaciones vinculadas al tema abogan por estudiar los llamados indicadores de la creatividad. En Solaz y Piquet, 2017, pp. 201-202 se enumeran algunos de los indicadores más estudiados. Dicho estudio lo realizan estos autores con la intención de ajustar cada uno de esos indicadores a sus principales manifestaciones en un examen de Matemáticas que se emplean para decidir el ingreso a la universidad en España.

A pesar de la gran diversidad de problemas matemáticos con los que se encuentra un estudiante al cursar una asignatura, no cabe dudas de su influencia en la creatividad del estudiante si el problema como dice Polya "pone a prueba la curiosidad e induce a poner en juego las facultades inventivas" (Polya, 1965, p.5).

La solución de problemas se refiere a los procesos de conducta y de pensamiento dirigidos a la ejecución de una tarea intelectualmente exigente. Sin embargo, cuando se tiene un enfoque racional para la solución de problemas, surge una tendencia a utilizar un pensamiento restrictivo, lógico y rígido, siendo que la mayor parte de los problemas que se presentan en la práctica requieren de personas creativas, originales y flexibles. (Duarte Briceño, Díaz Mohedo, Osés Bargas, 2012, p.244)

Según Callejo, 2003, p. 28, "cuando la resolución de problemas se plantea ejemplificando a los alumnos métodos o procedimientos que luego se les pide que apliquen a otros problemas semejantes propuestos por el profesor, no se favorece que desarrollen la creatividad". Es importante que el estudiante sea capaz por sí solo de obtener una vía de solución que constituya de cierta forma una novedad para el resto de los interesados.

Los problemas constituyen tareas, y como tarea al fin cumplen con las funciones creativas que propone Arteaga et al, 2016, p. 89: "detectar y formular nuevos problemas docentes, encontrar nuevos conocimientos (conceptos, leyes, relaciones, reglas), encontrar vías novedosas y originales para solucionar tareas no rutinarias o no familiares y proponer nuevas vías de solución y soluciones a problemas ya resueltos". Observar que cada una de estas funciones conlleva a que el estudiante produzca de cierta forma conocimiento nuevo, lo cual es un fuerte indicio de la presencia de creatividad en la resolución de la tarea.

Solaz y Piquet, 2017, p.202, señalan que la originalidad, la flexibilidad, la elaboración, el análisis, la síntesis, la comunicación y la redefinición son los indicadores que más inciden en la resolución de problemas matemáticos. En el presente estudio se seleccionaron los cinco primeros por ser los que mejor se apreciaban en el examen propuesto y por ser los que más se fomentan en la asignatura.

Metodología

Para abordar los objetivos del estudio se ha realizado un análisis por los indicadores seleccionados de las respuestas al Examen de Premio de la Asignatura Geometría Analítica, del primer año de la carrera Licenciatura en Ciencias de la Computación de la Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas del año 2019.

La muestra estudiada está conformada por 4 exámenes, pues solo 4 estudiantes obtuvieron la nota de Excelente (5) al cierre de la asignatura, condición indispensable para participar en el examen.

El Examen de Premio consistía en responder un cuestionario de 10 problemas en una semana, permitiéndoles a los estudiantes el empleo de medios de cómputo, libros de texto y notas de clases. Por supuesto, quedaba terminantemente prohibida cualquier manifestación de fraude.

Según se explica en los artículos 222 y 223 de la Resolución 2/2018 del MES, las instrucciones para la calificación de los exámenes consisten en lo siguiente: el profesor primeramente distingue aquellos exámenes que obtuvieron Excelente (5); luego, selecciona un primer, un segundo y un tercer premio, considerando que puede declarar desierto alguno de estos lugares.

Para cumplir con este procedimiento, el profesor consideró que para obtener 5 puntos en el examen el estudiante debía responder correctamente al menos una pregunta. Y para determinar los lugares se tendría en cuenta la cantidad y calidad de preguntas resueltas, la creatividad y la originalidad de las soluciones propuestas y la presentación de las respuestas. Estas consideraciones también se explicaron a los participantes.

El cuestionario es el siguiente:

1) Los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ satisfacen la condición $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} = \vec{0}$. Calcular el valor de $\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$, si $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ y $|\vec{c}| = 2$.
2) Calcular la distancia del punto $P(1, -1, -2)$ a la recta $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.
3) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $3x + y - 5 = 0$, $x - 2y + 10 = 0$ y esté a la distancia $d = 5\,u$ del punto $C(-1, -2)$. Resolver el problema sin calcular las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas.
4) Demostrar que la pendiente de la tangente a la curva $9x^2 - 6xy + y^2 - 1 = 0$ en un punto cualquiera de ella es $m = 3$.

5) Sea la parábola: $y^2 = 8x$. Por el foco F se traza una recta que corta la curva en los puntos P_1 y P_2. Probar que:
$$\frac{1}{\left|\overrightarrow{P_1F}\right|} + \frac{1}{\left|\overrightarrow{P_2F}\right|} = \frac{1}{2}$$

6) En un triángulo ABC se tiene que $|AB| = c$, $|AC| = b$ y $|BC| = a$. Demostrar que la longitud de la mediana $|CM| = \frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}$.

7) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos que el producto de sus distancias a dos puntos dados $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ es una cantidad constante, igual a a^2. Este lugar geométrico de puntos se llama óvalo de Cassini.

   Verifique que cuando $c = a$, se obtiene una lemniscatas de dos pétalos. Exprese la ecuación de esta última en coordenadas polares.
8) Represente la región plana dada por el conjunto de puntos: $Q = \left\{(x, y) \colon \sqrt{2ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax + x^2}, 0 \leq x \leq 2a\right\}$ y exprese la variación de las coordenadas polares en Q.

9) Dado el sólido W_2, represéntelo gráficamente y exprese la variación de sus componentes esféricas. $W_2 = \{(x, y, z) \in \Re^3 \colon 9 \leq x^2 + y^2 \leq -z^2 + 25 ; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 2\}$

10) Dado el sólido W_1, represéntelo gráficamente y exprese la variación de sus componentes cartesianas.
$$W_1 = \left\{(x, y, z) \in \Re^3 : x^2 + y^2 \geq 1,\ 2 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2,\quad 0 \leq y \leq \sqrt{3}x, x \geq 0\right\}$$

Resultados

Antes de comenzar el análisis de los resultados, se debe aclarar que no todos los estudiantes respondieron la misma cantidad de preguntas. El Gráfico 1 representa el número de estudiantes que respondieron correctamente cada una de las preguntas. Observar que todos los participantes respondieron las preguntas 1 y 2 correctamente, y que para la pregunta 8 ningún estudiante llegó a obtener la respuesta correcta.

La originalidad es considerada como "la capacidad para producir respuestas novedosas, poco convencionales, lejos de lo establecido y de lo usual, únicas, irrepetibles y auténticas" (Solaz y Piquet, 2017, p.202).

Ante esta concepción se analizaron las respuestas a aquellos problemas que pudieran tener una solución poco convencional, entre los que destacan: los ejercicios 1, 6 y 8. Para resolver estos ejercicios el estudiante debe ser capaz de emplear métodos no tradicionales o pocos trabajados en clases.

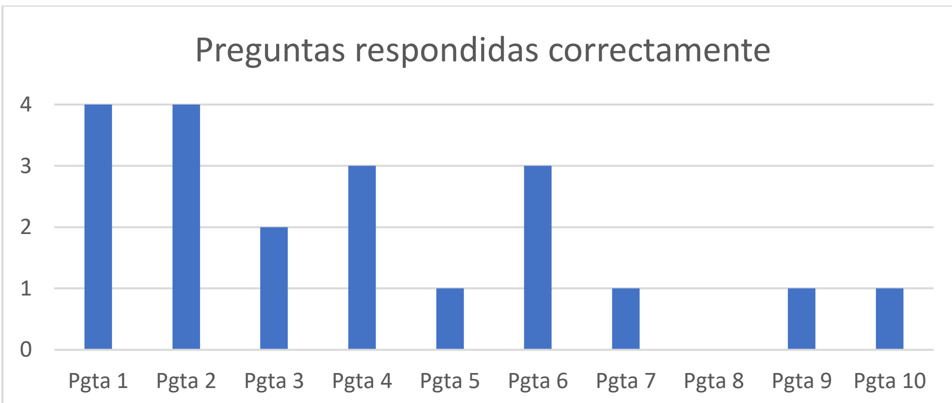


Gráfico 1: Cantidad de estudiantes que respondieron correctamente cada pregunta del cuestionario

La pregunta 1, que fue resuelta correctamente por todos los participantes, evidencia un nivel mínimo de originalidad en todos los estudiantes. Una solución elegante para el problema consistía en partir de $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{c}$, y con una simple elevación al cuadrado en ambos miembros de la última igualdad, combinado con un poco de trabajo algebraico se podía llegar a obtener $\lambda=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-{}^{25}/_{2}$.

Tres estudiantes hicieron uso de una elevación al cuadrado que en una secuencia lógica de solución del problema no tendría sentido hacerlo, pero que les permite al final obtener resultados parciales imprescindibles para llegar al resultado final. Esto da muestras del empleo de razonamientos heurísticos para resolver el problema, elemento importante para medir la originalidad.

En el caso del cuarto estudiante, aplica resultados derivados de la interpretación geométrica de los datos del problema como son: la regla del triángulo para la suma de vectores, la ley de los cosenos y las relaciones entre los ángulos interiores de un triángulo isósceles. O sea, analiza el problema desde una perspectiva más geométrica que algebraica, evidenciándose en su solución altas dosis de flexibilidad.

Las preguntas 6 y 8 exigían los niveles más altos de originalidad en el examen. En el caso de la pregunta 6 se deseaba que los estudiantes aplicaran propiedades del álgebra vectorial que derivaran de una interpretación geométrica de los datos del problema. Por ejemplo, se debía determinar por propiedades geométricas que $\overrightarrow{CM}=$

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$, primeramente. Luego, al elevar al cuadrado la igualdad y sustituyendo por los respectivos datos se obtiene que: $\left|\overrightarrow{CM}\right|^2=\frac{1}{4}(b^2+a^2+2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA})$. De la igualdad $c^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right|^2$ se logra determinar que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)$, e inmediatamente se llega al resultado que se pedía. Los estudiantes que contestaron correctamente se limitaron a realizar una demostración de la Geometría Elemental.

En el caso de la pregunta 8 se exigía trabajar indistintamente con los sistemas de coordenadas cartesianas y polares, combinado con un poco de análisis sobre las curvas que conforman la región. Ningún estudiante realizó correctamente este ejercicio.
En resumen, todos los estudiantes poseen un nivel significativo de originalidad, pero el que ninguno realizara los ejercicios que exigían más originalidad muestra que es este un indicador que puede perfeccionarse.

Solaz y Piquet (2017, p.202) definen a la *flexibilidad* como:

> la capacidad de desplazarse de una idea a otra, de un contexto a otro, dando respuestas variadas, modificando y moldeando ideas, haciéndose replanteamientos, reorientaciones y transformaciones de las situaciones u objetivos originales, superando la propia rigidez. Es la capacidad de cambiar de modo de pensar y poder abordar un problema desde diferentes perspectivas.

La flexibilidad fue evaluada a partir de aquellos ejercicios que exigían un replanteamiento del problema desde otra perspectiva: los ejercicios 2, 3, 4 y 5.

Por ejemplo, para resolver el ejercicio 2 el estudiante debía de realizar construcciones geométricas en el espacio, y valorar cuál de las distintas construcciones le resulta más fácil para resolver el problema. El estudiante tuvo que replantearse la incógnita sobre la base de la construcción geométrica hecha por él. En este caso, todos los participantes lograron responder correctamente el ejercicio, mostrando un nivel significativo de flexibilidad en su pensamiento creativo.

Las construcciones más comunes realizadas por los estudiantes para resolver el ejercicio consistieron en: el vector perpendicular a la recta dada que va desde un punto contenido en la propia recta hasta el punto P o un plano que contiene a P y que sea perpendicular a la recta dada,

En el caso del ejercicio 3, es obligado, tal y como se enuncia el ejercicio, hacer un replanteamiento del problema. Aunque este problema solo fue resuelto por dos estudiantes, resulta importante destacar que uno de ellos descubre una forma general de escribir las ecuaciones de las rectas que pasan por un punto del plano determinado por la intersección de dos rectas no paralelas, mediante la combinación lineal de ambas rectas conocidas. Luego demuestra matemáticamente su hipótesis para arribar satisfactoriamente a la solución empleando la fórmula de distancia de un punto a una recta.

En el caso del otro estudiante que resolvió el problema, es menos flexible pero más original porque trata de "encubrir" el dato de que las rectas pasan por el punto $(0,5)$ haciendo alusión de que cualquier recta que pasa por ese punto es de la forma $y=mx+5, m\in\mathbb{R}$. Resulta muy creativa la manera en que obtiene la solución a partir de intersectar una circunferencia con las rectas tangentes a la misma que sean de la forma anterior, y así determinar el valor de m.

El ejercicio 4 consistía en reconocer mediante artificiosos algebraicos que la curva dada constituye la ecuación de dos rectas de pendiente 3. Fue resuelto de esta manera por 2 estudiantes de los tres que resolvieron el ejercicio. El tercero aplicó los métodos tradicionales de la determinación de las rectas tangentes en un punto: intersectar la recta con la curva, por lo que su respuesta a pesar de ser correcta no fue creativa en ese sentido.

En el caso del problema 5, que exigía un alto nivel de flexibilidad como el problema 3, solo fue resuelto por un estudiante correctamente. El estudiante se apoya de una figura de análisis, reproducida en la Figura 1, para determinar aquellos elementos que le van a hacer falta en la demostración: la recta AB directriz de la parábola cuya ecuación es $x + 2 = 0$, el foco $F(2,0)$, A, D y B son las proyecciones ortogonales de los puntos de la parábola P_1, F , y P_2 respectivamente a la línea directriz, y el punto C es donde se intersecan la línea directriz con la recta P_1P_2.

Aplicando el Teorema de las Transversales se puede plantear que:

$$\frac{\overline{BP_2}}{\overline{CP_2}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AP_1}}{\overline{CP_1}}.$$

Luego aplicando el hecho que $\overline{DF} = 4\,u$, y algunas propiedades entre razones de proporcionalidad en la anterior ecuación, se logra obtener que: $\frac{1}{|\overrightarrow{P_1F}|} + \frac{1}{|\overrightarrow{P_2F}|} = \frac{1}{2}$.

La flexibilidad en la solución del problema radicaba en aplicar el Teorema de las Transversales y las relaciones algebraicas entre razones. Era imprescindible obtener resultados parciales a partir de métodos pocos trabajados del Álgebra y la Geometría elemental.

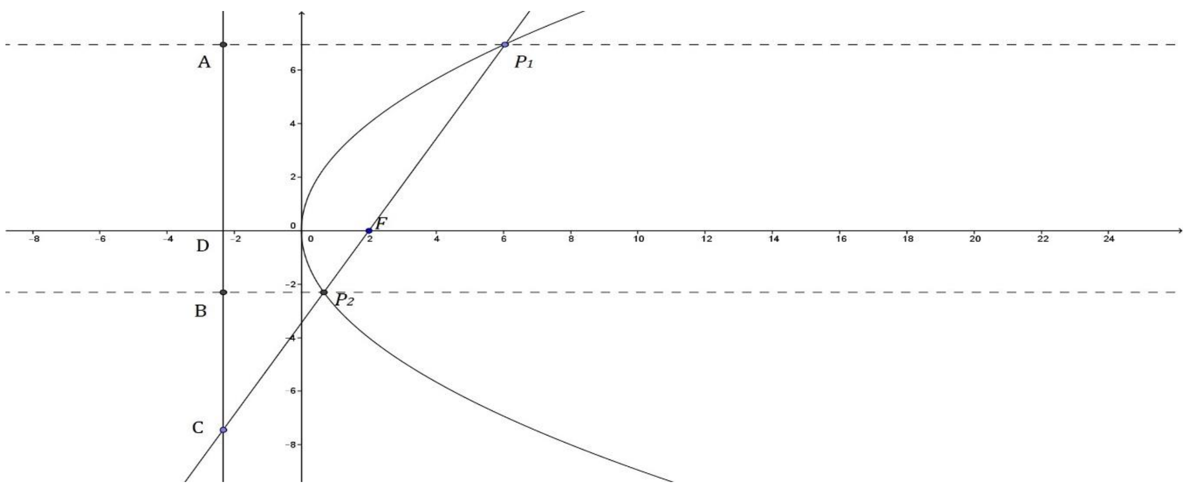


Figura 1: Figura de análisis del ejercicio 5

Como se ha podido apreciar el indicador flexibilidad es uno de los indicadores de más alto potencial desarrollado por los estudiantes. Si bien pudiera seguir perfeccionándose en dos estudiantes de la muestra, se puede plantear que la asignatura desde su enfoque interdisciplinar, al estrechar vínculos entre el Álgebra y la Geometría, incentiva el pensamiento flexible en los estudiantes.

Otro indicador de la creatividad analizado en la investigación es la *elaboración*, definida como “la capacidad para desarrollar o perfeccionar una idea o producción original alcanzando niveles de complejidad y detalle” (Solaz y Piquet, 2017, p.202). En la respuesta de un problema hay presencia de este indicador si se expone de forma pausada y precisa cada uno de los pasos del razonamiento hasta obtener la solución final del ejercicio.

Una condición indispensable en el examen para considerar correcta la solución de un ejercicio era el nivel de elaboración de la respuesta. Por supuesto, que al tener esta advertencia de antemano todos los aspirantes al premio lograron altos niveles de elaboración.

Las preguntas 8, 9 y 10 medían el nivel de *análisis* como otro de los indicadores de creatividad planteado por la literatura. El análisis es considerado como la "capacidad para estudiar una realidad determinando los límites del objeto, criterios de descomposición del todo, determinar las partes del todo y tratar cada parte por separado para así descubrir nuevos sentidos y relaciones entre los elementos del conjunto" (Solaz y Piquet, 2017, p.202).

En estos ejercicios el estudiante debía representar una región del plano en el ejercicio 8 y un sólido en el espacio en el caso de los ejercicios 9 y 10 a partir de un procedimiento que permite dividir la figura geométrica en las partes que la forman y analizar las interrelaciones que existen entre cada una de esas partes.

Solo un estudiante fue capaz de resolver correctamente el ejercicio 9 y 10, y ninguno respondió excelentemente el ejercicio 8. Este resultado evidencia que el indicador análisis es un indicador que debe potenciarse desde otras asignaturas en estos estudiantes, así como para cursos venideros de la asignatura proyectar un grupo de tareas que exijan de su aplicación.

El indicador *síntesis* es definido como la "capacidad para comparar las partes entre sí, rasgos comunes y diferencias, y descubrir nexos entre las partes para elaborar conclusiones acerca de un nuevo todo" (Solaz y Piquet, 2017, p.202).

Solo se evidenció significativamente en la pregunta 7 donde el estudiante se dio a la tarea de deducir ecuaciones de lugares geométricos no trabajados en clases. Los resultados fueron muy similares a los del indicador *análisis* pues solo un estudiante respondió correctamente esta pregunta.

En la siguiente tabla se resume el comportamiento de cada uno de los indicadores analizados por estudiantes.

Tabla 1: Análisis de los indicadores de creatividad por estudiante

Estudiantes	Originalidad	Flexibilidad	Elaboración	Análisis	Síntesis
MQM	Medio	Alto	Alto	Medio	La posee
AMM	Bajo	Medio	Alto	No lo posee	No la posee
EDG	Medio	Alto	Alto	No lo posee	No la posee
EPR	Bajo	Medio	Alto	No lo posee	No la posee

En el caso del estudiante MQM existe una tendencia a poseer la categoría de Alto en la mayoría de los indicadores, aunque se considera que pueden ser perfeccionados los indicadores de originalidad y análisis. El estudiante EDG muestra un alto potencial creativo en problemas donde tiene que hacer uso de la flexibilidad y la elaboración, pero debe trabajar por desarrollar aún más el resto de los indicadores. En el caso de los estudiantes AMM y EPR deben potenciar su desarrollo en prácticamente todas las componentes.

Conclusiones

Los exámenes de premio constituyen instrumentos especiales para medir el potencial creativo de los estudiantes más talentosos de un grupo. Un análisis de este tipo facilita el proceso de toma de decisión sobre qué tipo de examen puede ser premiado con un primer, segundo o tercer lugar.

En el presente estudio se evidenció que existen estudiantes que prefieren resolver problemas empleando técnicas que denotan más originalidad que flexibilidad o viceversa, lo cual corrobora el planteamiento que el desarrollo creativo del individuo es un rasgo personológico.

Además, se apreció que la asignatura Geometría Analítica potencia el desarrollo de los indicadores originalidad, flexibilidad y elaboración, pero que en cursos venideros se debe trabajar por que los estudiantes desarrollen los indicadores de análisis y síntesis.

Referencias bibliográficas

Armada Arteaga, L., Arteaga Valdés, E., y Del Sol Martínez, J. L. (2016). El desarrollo de la creatividad en la enseñanza de la Matemática. El reto de la educación Matemática en el siglo XXI. Revista Conrado, 12(54), 84-92.

Callejo, M. L. (2003). Creatividad matemática y resolución de problemas. Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria, (22), 25-34.

Duarte Briceño, E., Díaz Mohedo, M. T., & Osés Bargas, R. M. (2012). Solución creativa de problemas en la educación superior: significado y creencias. Enseñanza e Investigación en Psicología, 17(2), 243–261.

MES. (2018). Resolución No. 02 /18.

Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas.

Solaz, A. M., y Piquet, J. D. (2017). Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas. RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 20(2), 4.

Torres Pérez, L. (2008). Estrategia dirigida a la preparación metodológica de los maestros en formación de la educación primaria para la estimulación de la creatividad en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática. (Tesis en opción del título académico de Máster en Ciencias de la Educación). Instituto Superior Pedagógico «Félix Varela».

Vargaz, C. Y. C., Cárdenas, E. G. C., Flores, W. F. E., & abarca Cedeño, M. S. (2014). Relación entre creatividad y habilidad para solución de problemas matemáticos. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, 1(1).

RESIGNIFICACIÓN DE LA DERIVADA EN UNA SITUACIÓN ESCOLAR CON PERSPECTIVA DE DIALÉCTICA EXCLUSIÓN - INCLUSIÓN: UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

RESIGNIFICATION OF THE DERIVATIVE IN A SCHOOL SITUATION WITH A PERSPECTIVE OF EXCLUSION - INCLUSION DIALECTICS: A SOCIO-EPISTEMOLOGICAL STUDY

José Luis Morales Reyes, Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN (México)
luis.morales@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se discuten aspectos teóricos metodológicos, como parte de una investigación en ciernes, del diseño de una situación escolar que se socializará entre profesores de matemática en ejercicio. La base del diseño consiste en resignificar la derivada a través de sus usos en comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión, y en las vidas cotidianas. La socialización, con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión, proveerá datos de los procesos de valoración de los usos de la derivada entre los profesores: aproximación, variación y transformación. La investigación se sustenta con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.

Palabras clave: derivada, resignificación, diseños, usos

Abstract

This article, as part of an ongoing research, discusses theoretical-methodological aspects of the design of a school situation that will be socialized among practising mathematics teachers. The design is based on the resignification of the derivative through its uses in communities of people with mathematical knowledge: at school, at work or in a profession, and in our daily life. Socialization, with an exclusion-inclusion dialectical perspective, will provide data from the processes of the assessment of the derivative uses among teachers: approximation, variation and transformation. The research is based on the Socio-Epistemological Theory of Mathematics Education.

Key words: derivative, resignification, designs, uses

Introducción

Este escrito corresponde a la génesis de una investigación que pretende resignificar la derivada a través de sus usos en comunidades de conocimiento matemático. Para esto, se diseñarán situaciones escolares, las cuales se socializarán con profesores universitarios de matemática que se encuentran en ejercicio.

La intención de esta investigación es contribuir al rediseño del discurso matemático escolar; el cual corresponde a un constructo de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, la cual se asume como fundamento teórico de este trabajo. Desde esta perspectiva teórica se reconoce como problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática al discurso matemático escolar (dME) (Cantoral, Moreno-Durazo & Caballero-Pérez, 2018); el cual, por sus características, soslaya al docente de la construcción del conocimiento matemático, imponiendo significados, procedimientos y argumentaciones que delinean lo que está bien o mal dentro de la enseñanza y aprendizaje de la matemática (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Parte de la relevancia de la investigación planteada radica en rescatar las situaciones específicas donde emerge el conocimiento matemático y que el dME ha olvidado (Cordero et al, 2015). En este caso específico, se asumirá lo establecido por Cordero (2001), quien menciona que el concepto de derivada puede ser reconstruido a través de tres situaciones distintas: *aproximación*, *variación* y *transformación*.

En este escrito se aborda una revisión bibliográfica de estudios relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la derivada, además se explicitan los fundamentos teóricos de la investigación, y se mencionan algunos elementos metodológicos en relación al diseño de las situaciones escolares, así como las primeras posibles tareas que compondrán el diseño.

Revisión bibliográfica

La derivada es uno de los conceptos fundamentales del cálculo (Rosado y Cordero, 2006; Sánchez, García y Llinares, 2008), sin embargo, como señala Cordero (2001), un fenómeno didáctico con relación a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados a la misma, aunque sabe que la derivada es la pendiente de una recta. En muchos de los casos, se considera solo como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación (Rosado y Cordero, 2006).

Sánchez et. al (2008) sostienen que el fondo de la cuestión radica en que los alumnos no han construido un significado adecuado de la derivada, y esa construcción parcial que se realiza durante los primeros años puede generarles dificultades en los cursos de cálculo. Aunque, es importante destacar, que estos autores mencionan que los significados que se deseen desarrollar sobre la derivada dependerán de las perspectivas teóricas que asuman los investigadores que se propongan estas tareas.

En ese sentido, en la literatura de la disciplina Matemática Educativa se pueden encontrar diversas investigaciones relacionadas con la derivada. Entre ellas, podemos identificar algunas enfocadas en errores y dificultades que tienen los estudiantes en su aprendizaje, Sánchez et al. (2008) afirman que ese fue el objetivo de las primeras investigaciones realizadas en este tema. Entre ellas, se pueden mencionar las siguientes:

Badillo (2003) identifica algunas limitaciones de aprendizaje en la comprensión gráfica de $f(x)$, $f'(a)$ y $f'(x)$ como: a) confusión entre la derivada en un punto y la función derivada, b) la reducción de la expresión de $f'(x)$ a la ecuación de la recta tangente y c) la gráfica de $f'(x)$ a la de la recta tangente. Además, destaca que comprender la idea de función derivada en un punto no necesariamente repercute en comprender la idea de función derivada, aunque menciona que aquellos sujetos que comprendían la idea de función derivada parecía que entendían la de derivada de la función en un punto.

Otro estudio en esa misma línea es el de Orton (1983), mencionado por Sánchez et. al (2008), quien detectó los errores que comenten los estudiantes en tareas de diferenciación, y los clasificó en:

- Estructurales: relativo a los conceptos involucrados.
- Arbitrarios: cuando el estudiante se comporta arbitrariamente sin tomar en cuenta los datos del problema.
- Manipulación: si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

Adicionalmente, también se encuentran estudios relacionados con el conocimiento matemático que tiene los profesores sobre la derivada. Entre ellos Garrido (2014), quien exploró la compresión acerca del concepto de derivada de una función, con once profesores de cálculo de nivel medio superior. Su intención era determinar la articulación entre la parte conceptual (comprensión de la definición, de la interpretación geométrica, de la derivada como razón de cambio) y algorítmica (reglas de derivación y regla de la cadena) por parte de los profesores en la resolución de problemas.

Garrido (2014) concluye destacando que los profesores "conciben el proceso de derivación como la obtención de una fórmula a partir de otra mediante la aplicación formal de las reglas de derivación y no como el proceso para obtener la función derivada apoyado en un análisis previo sobre la derivabilidad" (p. 93).

Otro tipo de estudios que se pueden encontrar sobre la derivada son aquellos relacionados con las concepciones que tienen acerca de esta. Entre ellos, se puede mencionar el realizado por Bingolbali, Monaghan & Roper (2007) quienes muestran que las concepciones de los estudiantes de Ingeniería Mecánica y sus preferencias por la derivada se desarrollan en dirección de los aspectos de la tasa de cambio mientras que las de los estudiantes de Matemáticas se desarrollan en dirección de los aspectos de la tangente, además, señalan que los estudiantes de Ingeniería Mecánica ven las matemáticas como una herramienta y requieren los aspectos de aplicación en su curso.

Se puede notar que las investigaciones mencionadas destacan la poca significación que tienen sobre la derivada tanto docentes como estudiantes. Entendiendo significación, en estos casos, como el manejo de una expresión analítica, del límite del cociente incremental, o de la interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. Por ello, dichas investigaciones señalan la necesidad de articular entre las distintas definiciones de derivada, sus sistemas de representación y entre la derivada de una función en un punto y la función derivada.

Por otro lado, investigaciones como la de Cantoral, Molina y Sánchez (2005) señalan la predicción como una práctica social para ahondar en la derivada, entiendo predicción como una actividad racional que permite determinar el estado futuro de un sistema, de un objeto o de un fenómeno con base en el estudio sistemático de las causas que lo generan y los efectos que lo producen. Desde la perspectiva de estos autores destaca el papel que fungen el pensamiento y el lenguaje variacional para estudiar la derivada.

Montiel (2005) destaca que los trabajos enmarcados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa abandonan el acercamiento a la derivada a "partir de la definición de límite del cociente incremental y la explicación de la secante que deviene tangente".

En este sentido, Cordero (2008) menciona que en cálculo podemos distinguir dos escenarios, a saber: el Cálculo como un saber de la Obra Matemática y Cálculo Escolar (ver figura 1). Y afirma que de no apreciarse la diferencia entre esos saberes se pueden concebir planteamientos ingenuos de la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

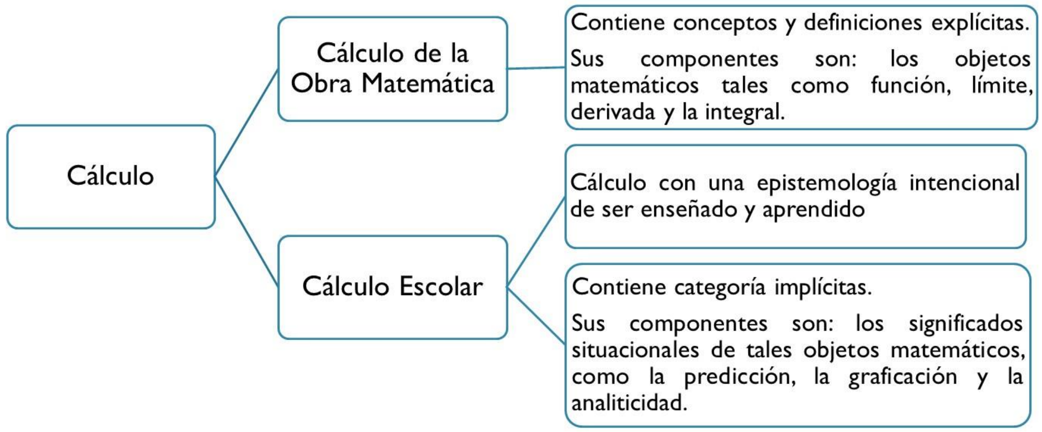


Figura 1. Escenarios en Cálculo. Elaboración propia, basado en Cordero (2008).

Debido a lo anterior, en esta investigación se planteará la resignificación de la derivada a través de tres situaciones: *aproximación, variación y transformación*.

Cabe destacar que, como menciona Cordero (2008), resignificación no es establecer un significado en un contexto, para que posteriormente se busque otro en otro contexto, y de esta manera se resignifique lo ya significado, sino es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano.

Fundamento teórico

Este trabajo se enmarca en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Cantoral (2013) menciona que esta asume la legitimidad de toda forma de saber; sea este popular, técnico o culto, pues considera que ellas, en su conjunto, constituyen la sabiduría humana. Además, Cordero et. al (2015) mencionan que dicha teoría reconoce una epistemología diferente a la del conocimiento matemático centrado en el objeto: la construcción social del conocimiento matemático (CSCM), lo que ha permitido criticar al dME que ha fundamentado la matemática escolar.

Además, Soto (2014) menciona que Bourdieu en la década de los setenta caracterizó un tipo de exclusión a partir de la imposición de significados arbitrarios legítimos socialmente, que denominó violencia simbólica. En la matemática que se enseña en las instituciones educativas existe un fenómeno que se comparta de manera similar; en el intento por una matemática para todos, es decir una inclusión, se ha considerado una epistemología dominante del conocimiento que ha impuesto argumentaciones, significados y procedimientos (Cordero, et. al, 2015); fenómeno que dentro del posicionamiento teórico asumido se denomina discurso matemático escolar.

Desde esta perspectiva se requiere el rediseño del dME; es decir, es necesario conocer, revelar y valorar el uso del conocimiento matemático de la obra, de la escuela, del trabajo y de la gente, todo ello en una relación horizontal y recíproca. De acuerdo a Cordero (2017) "eso será el marco de referencia del rediseño del dME, o sea, el cambio educativo de la matemática, acompañado siempre del Programa Académico Permanente, el cual valorará los procesos de transformación del dME".

Adicionalmente Cordero (2016) menciona que dichos procesos serán concretamente lo que se denominará diseños de situación escolar de socialización, donde sucederán los aprendizajes de las resignificaciones de la matemática, plasmadas en procesos permanentes (usos y significados) en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones).

Para ello, Cordero (2017) propone el programa socioepistemológico denominado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)*, el cual trabaja en dos líneas simultaneas, a saber: resignificación del conocimiento matemático e impacto educativo (ver figura 2). En la primera, se busca determinar cuáles son los usos del conocimiento matemático en distintas comunidades; y en la segunda se busca intervenir en el proceso educativo a través del diseño de situaciones en las que se resignifique el conocimiento matemático. Es en esta última línea de trabajo en la que se desarrolla la investigación que se presenta en este escrito.

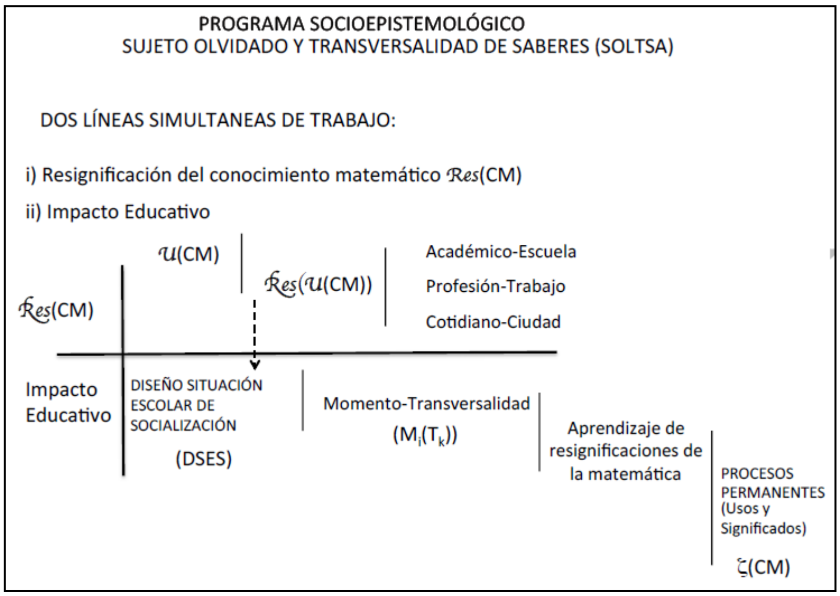


Figura 2. Programa socioepistemológico SOLTSA (Cordero, 2017).

Por otro lado, para dar cuenta de las valoraciones que realicen los docentes sobre la resignificación de la derivada, se recurrirá a la dialéctica exclusión – inclusión (ver figura 3) (Soto, 2014; Medina, 2019). Así, al entender los procesos de exclusión e inclusión como dialécticos, se señala que uno no vive sin el otro, además que la exclusión será caracterizada por los elementos del dME y la inclusión por la CSCM (Soto, 2014).

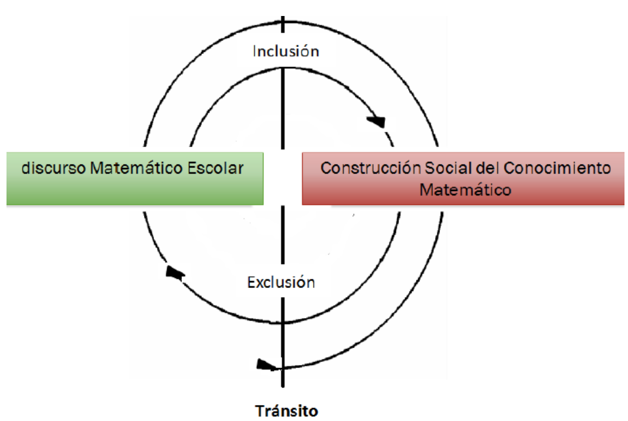


Figura 3. Modelo de la dialéctica Exclusión – Inclusión (Soto, 2014).

Soto (2014) afirma que, para lograr el tránsito dialéctico anterior, se requiere de tres condiciones del discurso matemático escolar y de la construcción social del conocimiento matemático, lo que permitirá la transformación. A continuación se describen cada uno de ellos:

1. Confrontación de argumentaciones de la situación específica y la matemática escolar: permite observar la continua confrontación entre los argumentos de los fenómenos estudiados y los argumentos que provienen del dME. Donde en general se vuelve al dME, demostrando la hegemonía en el discurso y la consideración de la pluralidad epistemológica sólo en momentos que coincidan con los argumentos, significaciones y procedimiento impuestos por el sistema de razón dominante.
2. Interacción de argumentaciones significaciones y procedimientos: Se señala que se debe cuidar de estas tres componentes ya que si una se aloja en el dME, probablemente no desarrollaran una CSCM.
3. La institucionalización como mecanismo de la dialéctica: es un mecanismo que se debe controlar, en el sentido que puede o no estar centrado en un objeto o en una práctica. Desde esta perspectiva nos direccionaríamos hacia las prácticas. De esta forma podríamos manipular el tránsito de la exclusión a la inclusión a la CSCM.

Estos tres ejes se conjugan para hacer funcionar la dialéctica entorno al conocimiento matemático, es decir el transito dialéctico anteriormente expuesto (Medina, Cordero y Soto, 2018; Medina, 2019).

Diseño de situación escolar de socialización

Se denominan diseños de situación escolar de socialización (DSES) a aquellos diseños que se basan en una epistemología que favorece los usos del conocimiento matemático, en contraparte de aquellos que promueven la emulación de un concepto; además, estos diseños requieren de una perspectiva teórica, que por una parte oriente el planteamiento del diseño y por otra permita analizar cómo fue el proceso de resignificación de los participantes; en el caso de esta investigación dicha perspectiva es la dialéctica exclusión-inclusión. De manera específica, la epistemología que se toma en este tipo de diseños es lo que se ha denominado Socioepistemología del Cálculo: construcción de lo matemático (ver figura 4), cabe mencionar que para efectos de la resignificación de la derivada se tomarán las situaciones: variación, transformación y aproximación.

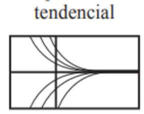
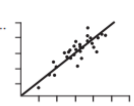
	Situaciones			
Construcción de lo matemático	*Variación*	*Transformación*	*Aproximación*	*Selección*
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación / Resignificación	Predicción $E0+variación=Ef$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$	Optimización 

Figura 4. Socioepistemología del Cálculo y Análisis (Cordero, Del Valle y Morales, 2019)

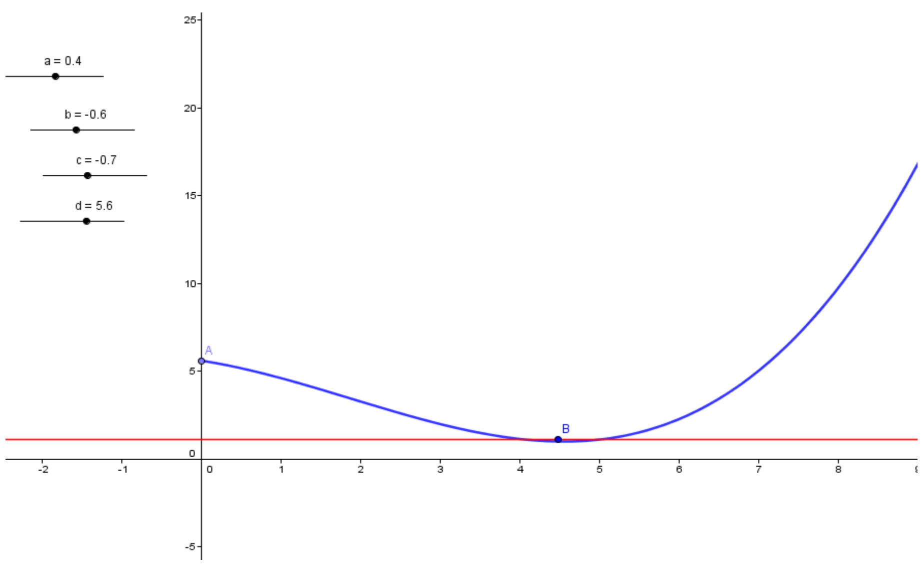
La cuestión es diseñar situaciones basadas en una epistemología que favorezca los usos y significados de la derivada. En ese sentido, Cordero (2001) menciona que el concepto de derivada consiste de varios significados: el límite de una función, la variación continua de cierta cantidad que fluye y la variación de parámetros de una función para organizar comportamientos. Y las resignificaciones de la derivada suceden cuando se ponen en juego los instrumentos que subyacen en las significaciones de la derivada, donde los funcionamientos y las formas de los instrumentos se confrontan para generar nuevos usos y resignificaciones de la derivada: cantidades de variación continua, instrucción que organiza comportamientos y función analítica (función de clase C infinito).

Para la articulación de esos instrumentos se retomará lo reportado por Pérez-Oxté y Cordero (2019) como elemento inicial para la construcción del diseño. Estos autores reportan la resignificación de usos del conocimiento matemático que emergen en una comunidad de Ingenieros Químicos Industriales que anticipan fallas en los transformadores eléctricos a través del análisis de comportamientos gráficos. Para ello construyen gráficas con el historial de las concentraciones de ocho elementos químicos registrados a lo largo del tiempo. De manera que, estos ingenieros deben buscar generar cierto comportamiento ideal para garantizar que el transformador se encuentra en buen estado. Un comportamiento ideal sería cuando no se presentan fluctuaciones extremas.

Específicamente en esta investigación se enfoca la atención en la resignificación de la derivada en esa comunidad de ingenieros para después socializarla con la perspectiva de la dialéctica exclusión-inclusión.

Cabe mencionar que la etapa en la que se encuentra la investigación es la elaboración de las situaciones que compondrán el diseño, y hasta el momento se ha trabajado en la situación de transformación, la cual se presenta a continuación:

Suponga que la siguiente gráfica representa dicha situación y que para que el transformador esté en buen estado la gráfica debe estar muy cerca de la recta dada. La curva es modelada por $y = 0.03x^3 - 0.63x^2 + 3.82x + 0.96$ y la recta dada es tangente a la curva en el punto B. ¿Qué modificaciones debe experimentar la gráfica para que el transformador no se dañe? Bajo las condiciones dadas: ¿Cuál sería la ecuación de la curva que representa el transformador ideal? ¿Cuál sería la ecuación que representa el transformador que requiere de mayor intervención?



De manera particular esta situación confronta lo usual del discurso matemático escolar, en el cual se da la ecuación de una curva, se señala un punto y se busca la ecuación de la recta tangente en ese punto. Adicionalmente, se pretende que las situaciones que compondrán el diseño, permitan que el límite de un cociente se resignifique a través de la predicción, la graficación y la analiticidad: la derivada y la recta tangente debaten contra la comparación de dos estados y la sucesión simultánea de las derivadas, pero también debaten contra la variación de parámetros y el comportamiento tendencial. Lo cual no compone, en la actualidad, ningún eje didáctico ni para los textos escolares ni para el currículo escolar.

Reflexiones finales

Los docentes que socializarán la situación escolar de resignificación de la derivada obligadamente procesarán una dialéctica exclusión-inclusión (Soto, 2014) para valorar la resignificación de la derivada. Posiblemente los momentos de exclusión se manifestarán cuando los docentes se enfrenten a las tareas planteadas, debido a que dudarán que estén asociadas a la derivada, y pensarán que son situaciones que no tienen solución.

Además, la exclusión a la que los ha llevado el discurso matemático escolar dificultará que consideren que a través de las situaciones planteadas se generen conocimientos sobre la derivada. Sin embargo, cuando emerjan argumentos distintos a los que les ha impuesto el discurso matemático escolar, el docente se encontrará en un momento de inclusión. Esta acción le permitirá al docente trastocar y transformar el conocimiento matemático escolar.

Referencias bibliográficas

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. (Tesis de Doctorado). Universitat Autónoma de Barcelona.

Bingolbali, E., Monaghan, J. & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38 (6), 763–777. doi: 10.1080/00207390701453579

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R.; Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, *50*, 77-89. doi:10.1007/s11858-018-0922-8

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4* (2), 103-128.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, Díaz de Santos – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F. (2016). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena-Lorca, J. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, P., y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., Del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22 (2), 185-212. https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Garrido, V. (2014). *La derivada: de lo conceptual a lo algorítmico. Un estudio de caso con profesores de bachillerato*. (Tesis de Maestría). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav –IPN, México.

Medina, D., Cordero, F. y Soto, D. (2018). Función del docente de matemáticas y la inclusión en la construcción social del conocimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31* (1), 662-670.

Medina, D. (2019). *Transformación educativa del docente de matemáticas. Un episodio: El uso de la compensación como una resignificación de la media aritmética*. (Tesis de Doctorado). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Montiel, G. (2005). Una caracterización del contrato didáctico en un escenario virtual. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 667-672. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Pérez - Oxté, I. y Cordero, F. (2019). *Modeling and anticipation of graphical behaviors in Industrial Chemical Engineering. The role of transversality of knowledge in learning mathematics*. Manuscript in preparation.

Rosado, M. y Cordero, F. (2006). Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica. En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*, 793-799. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (2), 267-296.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático*. (Tesis de Doctorado). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

ETNOMATEMÁTICAS: VIVENDO, APRENDENDO E ENSINANDO

ETNOMATEMATICS: LIVING, LEARNING AND TEACHING

José Vilani de Farias
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (Brasil)
vilanif@yahoo.com.br

Resumo
Este trabalho relata a minha experiência como professor de Matemática, diante do desafio de elaborar um projeto, junto com alunos do curso de Licenciatura em Educação no Campo. Um Projeto voltado para os moradores do acampamento *José Martí* / MST. A primeira parte da experiência foi vivenciar um dia com os acampados cujo objetivo era conhecer as pessoas que ali moravam para pensar num projeto que fosse adequado. Após essa vivência surgiu a ideia do projeto de um livro, contendo fotografias e depoimentos, no qual os moradores pudessem participar ativamente de sua construção, nos ensinando suas práticas matemáticas de medição. Nesse Projeto, fundamentado na Etnomatemática, procuramos por meio do registro, reconhecer e valorizar as práticas matemáticas dos moradores. A construção do livro nos permitiu muitas idas ao acampamento e muitas conversas, o que nos proporcionou não apenas uma produção acadêmica (livro) mas, uma formação política, social e cultural.

Palavras chave: etnomatemática, formação de professores, contexto cultural

Abstract
This paper reports my experience as a Mathematics teacher facing the challenge of creating a project with students of the bachelor's degree in Rural Education at IFRN in the city of Canguaretama. The focus of our project has been directed to the residents of the José Martí/MST camp. In order to achieve our goals, we firstly decided to spend a day with the campers with the objective of sharing experience and thinking about an appropriate way to develop our approaches. Secondly, we reflected upon the elaboration of a book containing photographs and reports in which the residents could actively participate, especially sharing their mathematical practices of measurement. With this project, based on ethno-mathematics, we seek through this register to recognize and value the mathematical practices of the residents involved. The development of this book allowed us many talks, which also gave us not only an academic production, but also a political, social and cultural formation.

Key words: ethno-mathematics, teacher training, cultural context

Introdução

Este trabalho procura relatar a minha experiência como professor de Matemática diante do desafio de desenvolver um projeto com os moradores do acampamento *José Martí / MST*. Para compreender melhor esse desafio faz-se necessário uma pequena exposição de minha trajetória docente. Como professor de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) desde 2009, atuei no Ensino médio regular, na Licenciatura em Química, em Programas voltados para a Educação de Jovens e Adultos e na preparação de alunos para olimpíadas de Matemática. Por minha solicitação, no ano de 2018, fui transferido para outra unidade de ensino, dentro do mesmo Estado do Rio Grande do Norte. Fui transferido para o campus Canguaretama, no qual passei a ministrar aulas para o curso de Licenciatura em Educação do Campo (LEDOC). Essa experiência por si só já se configurava, para mim, como um desafio, pela proposta do curso: "fomentar a integração entre conhecimentos científicos e populares, na busca pelo respeito à diversidade de saberes, em prol de um projeto de desenvolvimento no/para o campo" (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, 2016, p.11). No entanto, o maior desafio estava por vir.

Ministrando a disciplina denominada *Seminário de Orientação de Projeto Integrador*, fui provocado a desenvolver, junto com os alunos da LEDOC, um projeto que, seguindo a proposta do curso, fosse voltado para os moradores do acampamento *José Martí / MST*. Uma comunidade que está localizada, numa aérea rural, ao lado do IFRN, às margens da Rodovia (BR - 101).

Nosso objetivo era desenvolver um projeto que contemplasse questões relacionados a Matemática. Não queríamos trabalhar somente com uma Matemática acadêmica, distante da realidade dos moradores, mas uma matemática próxima das pessoas, aplicada ao cotidiano, que tivesse significado dentro do contexto sócio cultural dos acampados. Sentimos, portanto, a necessidade de trabalhar numa perspectiva Etnomatemática. Nessa abordagem compreendemos a matemática como uma prática social.

Queríamos, desse modo, desenvolver um projeto que valorizasse as práticas de contar, medir e classificar, próprias daqueles moradores; um projeto que contemplasse a história das pessoas por meio da qual se pudesse conhecer, compreender, reconhecer e valorizar os membros da comunidade. O desafio era desenvolver um projeto que fosse importante para os alunos de matemática e para os moradores; que envolvesse alunos, professores e principalmente, a comunidade.

Por que esse projeto se configurou, para nós e particularmente para mim, como um desafio? Em primeiro lugar por ser um professor recém-chegado à Instituição (campus Canguaretama) e por estar atuando pela primeira vez no curso de Licenciatura em Educação do Campo e, portanto, não conhecia a fundo a proposta do curso e nunca havia trabalhado com uma proposta, para mim, tão ousada, no sentido de carregar uma potencialidade de transformação pelo forte aspecto do envolvimento entre a comunidade escolar e as comunidades campesinas locais. Em segundo lugar, não conhecia a região em seus aspectos sociais, culturais, históricos, econômicos etc. e, por último, não conhecia o acampamento *José Martí* / MST e seus moradores.

A questão era: como desenvolver um projeto com uma comunidade da qual não fazemos parte e cujos membros não conhecemos? Buscamos a resposta na História da Matemática e na Etnomatemática que tem como orientação principal, para o desenvolvimento de qualquer atividade dentro de um grupo social, a necessidade de conhecer a comunidade que se pretende trabalhar para não incorrer no risco, apontado por D'Ambrósio (2008), de tomar como referência, nossa cultura, nosso próprio ambiente cultural, nossa Etnomatemática, ou o que é pior, nossa visão de um conhecimento acadêmico dominante e "esse é um dos maiores equívocos da educação" (D'Ambrósio, 2008, p.10).

Este foi, portanto, nosso primeiro passo: conhecer a comunidade.

Fundamentação teórica

Se a História da Matemática articulada com a Etnomatemática, segundo Lara (2013), nos dá condições de "explicar como os conhecimentos matemáticos foram gerados, adquiridos, organizados intelectual e socialmente e como foram difundidos" (Lara, 2013, p. 52), acreditamos que o mesmo ocorre ao buscarmos a história de uma comunidade em suas práticas de medir, contar, classificar e estimar. Para Scandiuzzi (2002) "um pesquisador da etnomatemática vai ao campo para conhecer um povo e tentar entender a maneira como este povo resolve seus problemas" (Scandiuzzi, 2002, p. 53).

Seguindo essa orientação fomos ao campo, ao acampamento *José Martí* / MST, para conhecer os moradores da comunidade: conhecer suas práticas sociais, sua maneira de faze e de resolver os problemas, conhecer seus sonhos, suas lutas diárias, suas histórias. Também fomos ao acampamento para conhecer o ambiente em que vivem essas pessoas: suas moradias, os espaços comuns (ruas, galpões etc.), os espaços de plantio etc. É verdade que nesse processo também nos damos a conhecer, também contamos nossa história, nossos sonhos e lutas.

Apoiados nos pressupostos da Etnomatemática em que "para trabalhar em etnomatemática, o principal é a capacidade de observar e analisar as práticas de comunidades e populações diferenciadas, [...]" (D'Ambrósio, 2008, p.8), propusemos uma atividade denominada: *um dia no campo*, para identificar e analisar essas práticas.

Um dia no campo teve como objetivo a aproximação com os moradores: conhecer seus espaços, suas histórias, seus nomes, suas dificuldades, seu cotidiano, suas tradições, suas práticas sociais e, mais especificamente, identificar práticas por nós consideradas como matemáticas. O objetivo da atividade foi alcançado: aproximar-se dos moradores para conhecê-los. Essa atividade nos deu elementos para elaborar um projeto que contemplasse ao mesmo tempo a história de vida das pessoas e a história de algumas de suas práticas matemáticas.

Tivemos como inspiração alguns trabalhos realizados no espaço rural relacionadas a agricultura, numa abordagem Etnomatemática. Um desses trabalhos foi o de Knijnik (2003) que trabalhou o cultivo da alface em um assentamento do MST e o trabalho de Gonçalves e Monteiro (2006) que discutiram, dentro da prática do cultivo de café, as práticas e instrumentos de medição nesse espaço.

No desenvolvimento do trabalho tivemos o cuidado de não tratar as práticas matemática dos moradores como algo folclórico, pois segundo D'Ambrósio (2008, p.15) "muitas vezes as matemáticas de outras culturas são apresentadas como curiosidade, jogos, folclore, e completamente descontextualizadas de sua inserção cultural". Ao contrário, procuramos valorizá-la, torná-la conhecida, reconhecida e respeitada dentro do seu contexto cultural, dentro da "complexidade de sua especificidade cultural" (D'Ambrósio, 2014, p. 17).

Outro aspecto a considerar nesse trabalho é que nessa perspectiva teórica não há uma rejeição da matemática acadêmica, mas uma articulação entre a prática matemática da comunidade e a prática matemática da escola, uma troca de conhecimentos e experiências, um compartilhamento de modos de ver e resolver os problemas da comunidade. Nesse sentido também estamos em conformidade com o que é defendido por *José Martí*, personagem importante também na luta pela educação dos povos campesinos e que teve seu nome lembrado e homenageado pelo MST quando ficou decidido nomear o acampamento de *José Martí*. Para esse líder e educador "é criminoso o divórcio existente entre a educação recebida numa determinada época e a época em si" (Martí II, 507 como citado em Nassif, 2010, p.17). Ricardo Nassif afirma que o líder cubano defendia uma teoria pedagógica na qual "a educação deve conformar o homem ao seu tempo" (Nassif, 2010, p.17). Assim, não podemos negar o ensino da matemática acadêmica à comunidade dos acampados, mas também não podemos desvalorizar a prática matemática desses moradores.

Metodologia

A atividade de vivência no acampamento, denominada *um dia no campo*, foi nosso primeiro passo para conhecer os moradores da comunidade. Essa atividade ocorreu num período de aproximadamente 12 horas. Iniciamos às 6h da manhã e terminando por volta das 18h da tarde. O grupo, composto por 6 alunos e 5 professores, foi divido em três equipes, cada equipe foi acolhida por uma família que nos recebeu em sua casa. Durante a vivência acompanhamos, essas e outras famílias, em suas atividades diárias: momentos de trabalho, de lazer, de reunião com a família, durante as refeições e ao fim do trabalho.

Participaram desse momento um grupo de alunos da LEDOC e alguns professores de diferentes áreas de formação (Artes, Filosofia, Matemática e Pedagogia). A participação dos professores foi de fundamental importância para construir um projeto que tivesse um caráter interdisciplinar, que é um princípio da Etnomatemática e está condizente com a proposta do IFRN para os cursos superiores como a LEDOC:

> estruturados numa matriz curricular articulada, constituída por núcleos articuladores, com fundamentos nos princípios da interdisciplinaridade, da contextualização, da interação humana, do pluralismo do saber e nos demais pressupostos dos múltiplos saberes necessários à docência (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, 2016, p.15).

A atividade também contemplou momentos de registro fotográficos e de entrevista, o que nos proporcionou conhecer um pouco mais da vida dos moradores. Uma comunidade que está localizada numa pequena área rural, ao lado do IFRN, às margens da Rodovia (BR - 101). Segundo dados coletados, pela Professora do IFRN Tatiana Calado - que dividia comigo a disciplina de *Seminário de Orientação de Projeto Integrador* - é uma comunidade pequena composta por 24 famílias e 79 moradores que participam do Movimento Sem-Terra (MST), porém alguns migraram para o Movimento Sem-Teto (MTST). O motivo dessa migração do MST para o MTST, pode ter sido ocasionado, segundo alguns moradores, pelo longo tempo de espera (mais de 12 anos), na condição de acampados.

As figuras 1 e 2 mostram uma vista área do acampamento e sua localização em relação ao IFRN e a Rodovia. Na figura 1 podemos observar uma quantidade relativamente pequena de moradias. Na figura 2 podemos verificar a vizinhança do IFRN com o acampamento e podemos observar também os pequenos espaços destinados ao plantio.

Figura 1. Vista aérea do acampamento José Martí / MST
Foto: Araújo (2018)

Figura 2. Localização do acampamento José Martí / MST
Foto: Araújo (2018)

Após a atividade *um dia no campo* idealizamos um projeto que pudesse registrar a história dos moradores e a história de suas práticas sociais relacionadas à matemática. Surgiu, portanto, a ideia da construção de um livro. Nossa pretensão era desenvolver um projeto que fosse interdisciplinar e, para além de um trabalho acadêmico interdisciplinar, guiados pelas palavras de Rosa e Orey (2003, p.1) quando afirma que o pesquisador em Etnomatemática deve estar atento as minorias, aos marginalizadas, aos rejeitados, atento as práticas do homem comum, pretendíamos trazer os moradores para o primeiro plano, fazendo-os protagonistas na construção desse livro.

Para a construção do livro, além dos alunos e professores participantes da vivência no acampamento, convidamos outros discentes e docentes que pudessem colaborar com ideias, textos, estudos e discussões, para tornar o livro, ao mesmo tempo, um instrumento de valorização da comunidade em seus aspectos sociais e culturais e uma ferramenta de denúncia de uma condição de acampado, que é provisória, ou que deveria ser, mas que já perdura mais de 12 anos.

Motivados pelo trabalho de Gonçalves e Monteiro (2006, p.1) que lidaram com medições agrárias no campo, também nós ambicionamos "olhar para a história da medida a partir de seu uso no cotidiano social [...]" (Gonçalves & Monteiro, 2006, p1).
Para a constituição do livro realizamos novas entrevistas, novos registros fotográficos, várias idas ao acampamento para compreender melhor os problemas e como eles eram resolvidos, para registrar suas práticas de medição de terra e os instrumentos utilizados. Essas visitas também contribuíram para manter uma relação de proximidade, de amizade, contribuíram para despertar na comunidade o sentimento de participantes desse projeto, de coautores desse livro.

O livro foi dividido em três partes principais: a primeira parte, que compõe os dois primeiros capítulos, descreve o acampamento e retrata a história de vida dos moradores; a segunda apresenta os relatos de professores e alunos em relação a experiencia da vivência com os acampados e a terceira parte versa sobre as práticas de medição da comunidade, suas unidades de medidas e seus instrumentos, bem como o modo como são realizadas essas medições. Os acampados apresentaram suas formas de medir, de calcular, de estimar. Mostraram seus instrumentos de medidas e nos ensinaram outras práticas matemáticas, nos convidando, ao seu modo, a mergulhar num espaço de saberes/fazeres que os caracteriza enquanto grupo cultural organizado, segundo D'Ambrósio (2018), em torno de conhecimentos compartilhados e de comportamentos compatibilizados.

Todos os dados foram constituídos por meio de entrevista (gravadas em áudio), questionários (organizado pela professora Tatiana Calado) e registros fotográficos.

Ao longo do projeto outros professores se somaram aos já existentes, o trabalho envolveu Filosofia, Arte, História, Didática, Agricultura Familiar, Língua Portuguesa e Matemática. Os moradores do acampamento participaram do projeto narrando suas histórias de vida e nos ensinando sobre suas práticas de medição: as unidades de medidas, os instrumentos, suas histórias relativas a essas práticas de medição, as relações com o sistema oficial de medidas. Tudo isso acompanhado de demonstrações práticas. Professores e futuros professores tomaram conhecimento dessas unidades de medida que não se encontram em livros didáticos, ou que não são tratadas a contento nesses manuais escolares, mas que são úteis naquele espaço onde vivem os moradores.

Antes da escrita do livro realizamos diversas leituras para aprofundar e compreender melhor a proposta metodológica do Programa Etnomatemática e, portanto, poder ir ao campo com uma postura de professor e pesquisador que tem essa linha como fundamentação teórica e metodológica. Pela própria exigência metodológica da Etnomatemática, outras leituras também foram necessárias no campo da História, da História da Matemática, da Filosofia e da Sociologia.

Realizamos pesquisa sobre a história das unidades de medidas e seus instrumentos de medição, analisando e discutindo sobre os motivos de algumas unidades de medidas serem preteridas e a relação de poder que permeiam essas escolhas. Numa perspectiva sociológica de Bourdieu (2013), que afirma que "uma língua vale tanto quanto valem aqueles que a falam" (Bourdieu, 2013, p. 153), os estudantes puderam observar esse fenômeno em relação as unidades de medida. Existe unidades de medidas marginalizadas e excluídas do espaço escolar, o mesmo ocorre com seus usuários, marginalizados e excluídos do sistema educacional e social. As consequências dessa exclusão passam pela desvalorização de práticas sociais e de seus praticantes. Parafraseando Bourdieu, um sistema de medidas vale tanto quanto vale seus usuários. Transformar essa realidade é o papel de pesquisadores em Etnomatemática, é esse sentimento que nos impulsiona a continuar.

Nas palavras do líder cubano: "Sentar-se para produzir livros que é coisa fácil, é impossível quando se é consumido pela intranquilidade e ansiedade e não há tempo para a tarefa mais difícil de todas, que é produzir homens" (Martí, 1953 como citado por Nassif, 2010, p.12)

A visita ao acampamento perdurou durante todo o processo de escrita do livro, pois esses momentos também eram utilizados para apresentar o andamento do projeto do livro: seus textos, suas fotografias e, também, proporcionar momentos de discussões sobre a nossa compreensão das práticas matemáticas dos moradores. Nessas ocasiões, por sugestão de alguns acampados, fazíamos alterações e melhoramentos no livro.

Por solicitação do morador realizamos medição da terra utilizando a fita métrica e, portanto, a unidade de medida do metro. A intensão era comparar a medida de área em hectares feito com a vara e aquela realizada com a fita métrica. Constatamos uma boa aproximação entre a medida com a vara e a medida com a fita métrica.

Por fim, submetemos o projeto do livro a Editora do Instituto.

Resultados

O objetivo material foi alcançado com a produção do livro. No entanto, com o desenvolvimento desse projeto, obtivemos outros resultados que podem ser elencados a partir das partes principais do livro.

Na primeira parte, que compõe os dois primeiros capítulos, descrevemos o acampamento e a história de vida dos acampados, tudo narrado e acompanhado pelos próprios moradores. Como resultado, conhecemos o acampamento e seus moradores. Em relação ao acampamento conhecemos as atividades agrícolas e pecuárias e a infraestrutura (moradias, ruas, espaços de lazer, espaços comuns como os galpões utilizados para reunião, espaço de cultivo etc.), percebemos a carência e a precariedade dos serviços básicos como saneamento, fornecimento de água potável e energia elétrica. Na figura 3 podemos ver uma das casas do acampamento.

Figura 3. Casa de taipa, construção de pau a pique

Em relação aos moradores, o resultado mais importante foi o protagonismo das famílias nesse projeto, isto é, a participação ativa da comunidade. Esse protagonismo deu-se em primeiro lugar ao relatar suas histórias de vida. Foi por meio dessas narrações que conhecemos o perfil das famílias, as principais fontes de renda, seus ofícios, suas práticas sociais e culturais (no trabalho, no lazer, no aspecto religioso etc.) e suas práticas denominadas por nós de práticas matemáticas.

Nos deram a conhecer, também, seus sonhos: sonho por um "pedaço de chão", por um espaço para morar, plantar e criar animais, sonho por um lugar que seja seu, definitivo, com uma estrutura mínima adequada. A líder do acampamento, Maria José de Brito, mais conhecida como Dona Nininha, expressa esse desejo. Em depoimento ela desabafa: "Eu lutei muito aqui, lutei! E estou lutando até o final da minha vida pra eu ganhar meu pedacinho de terra, para trabalhar, terra para plantar e área de lazer, que nós temos direito, que a gente precisa, a gente vive na barraca de barro esse tempo todinho e que também não é bom, não tem conforto de nada. Meus sonhos são esses" (entrevista concedida em 2018).

Em segundo lugar o protagonismo mostrou-se nas atividades instrutivas feitas por alguns moradores (Santino Gonçalo - conhecido por Seu Santino - e Maria Nazaré - conhecida por Dona Nazaré) para nos ensinar as práticas de medição utilizando a vara, o passo e a braça. Unidades de medida utilizadas para medir uma área denominada pelos acampados de "mil covas".

Na figura 3 o morador mostra a medida de uma braça e como construir a medida de uma vara. Na figura 4 o morador mostra como medir "mil covas" utilizando a vara e o passo.

Figura 4. Morador mostrando como construir a vara

Figura 5. Morador nos ensinando a medir a "mil covas" com a vara

Ao compararmos as medições de área utilizando como instrumento de medição a vara com as medições de área utilizando a fita métrica obtivemos uma aproximação razoável quando desejamos medir a área de uma região delimitada por um hectare. Seu Santino nos ensinou que um hectare medido com o uso da vara deve obedecer às seguintes regras: ter a forma retangular medido 25 varas por 75 varas.

Adotando, de acordo com o morador, a medida de uma vara como sendo aproximadamente 2,30 metros, temos, portanto, uma região retangular cujas medidas são:

25 x 2,30 = 57,5 metros e 75 x 2,30 = 172,5 metros. Fazendo os cálculos da área temos: 57,5 x 172,5 = 9.918,75 m².

Obtivemos, desse modo, com a medição por vara, valores muitos próximos de um hectare que é de 10.000 m².

Nas figuras 6 e 7, a seguir, os moradores apresentam as unidades de medida do pé e do palmo, respectivamente.

Figura 6. O pé

Figura 7. O palmo

O resultado de todo esse trabalho foi uma troca valiosa de saberes e experiências para alunos e professores do Curso da LEDOC e, também, para os moradores do acampamento *José Martí*. Esse resultado pode ser resumido nas palavras de *José Martí*: "Nós estudamos o que nos trazem da França, mas eles nos revelarão o que receberam da natureza" (Martí 1875 como citado por Nassif, 2010, p. 45).

Um trabalho pensado e executado numa perspectiva da Etnomatemática enquanto "conjunto de artes, técnicas de explicar e de entender, de lidar com o ambiente social, cultural e natural, desenvolvido por distintos grupos culturais" (D'Ambrósio, 2008, p.8), que nos convida à compreensão do saber/fazer matemático de diferentes comunidades culturais.

Conclusão

Foi uma experiência muito enriquecedora, uma vez que ainda é muito forte a concepção de uma Matemática única e universal. Essa maneira de compreender a Matemática estende-se para um modo de ensina essa disciplina que é distante das questões socioculturais e, quando há qualquer aproximação, na maioria das vezes, carrega uma hierarquização, uma relação de poder entre a Matemática acadêmica e a matemática da comunidade, entre a matemática do espaço escolar e as práticas matemáticas dos espaços não-escolares.

Nesse projeto, professores e alunos lidaram com uma matemática impregnada de vida, uma matemática que é parte da história de um grupo, que está relacionada à maneira de ver o mundo, de se ver no mundo e de participar de sua construção. A oportunidade de poder falar sobre suas atividades, de mostrar e ensinar aquilo que aprenderam dos antepassados e de perceberem que possuem práticas de medição, cálculos e estimativas reconhecidas como matemática, faz os moradores sentirem-se valorizados e isso fortalece suas raízes culturais, fortalece o sentimento e o orgulho de pertencer ao campo. Esse sentimento é percebido nos depoimentos e no desejo de participar do Projeto e de manter um relacionamento amistoso para além das atividades de pesquisa.

Ouvimos, mesmo que por uma fresta, as vozes que vem do acampamento *José Martí.* Quiséramos nós, invadidos por esse sentimento de justiça e livres dessa ignorância de que fala o mestre cubano, fazer ecoar essas vozes: “de todos os problemas hoje considerados capitais, de fato apenas um o é, e de tal importância que todo o tempo e zelo pouco fariam para conjura-lo: a ignorância das classes que têm a justiça ao seu lado” (Martí I, 737 como citado por Nassif, 2010, p. 20).

Como Professor de Matemática, vejo a Etnomatemática como uma possibilidade para superar a ingenuidade, subir as paredes da caverna platônica e ficar “atento aos fatos e as práticas marginalizadas, principalmente as práticas do homem comum, das comunidades, dos rejeitados, das minorias e dos povos que foram vencidos no processo de colonização” (Orey & Rosa, 2003, p.1).

Esse trabalho pode ajudar a pensar a matemática, e seu ensino, por outro viés, com outra visão, por outras práticas. Pode contribuir com a construção de um ensino de Matemática e com uma concepção de Matemática não como um instrumento de exclusão social, como historicamente se percebe pelos índices de reprovação, mas pode se configurar como um instrumento de luta por meio de práticas e de ações numa perspectiva contra hegemônica.

Referências bibliográficas

Araújo, B. G. *Acervo particular de fotografias do Acampamento José Martí / MST.* Canguaretama, 2018.

Bourdieu, P. (2013) A economia das trocas linguísticas. In: ORTIZ, Renato. *A sociologia de Pierre Bourdieu*. São Paulo: Olho d’Água.

D’Ambrósio, U. (2008). O Programa etnomatematica: uma síntese. *Acta Scientiae*, 10(1), 7 – 16.

D’Ambrósio, U. (2014). Como foi gerado o nome etnomatemática. Encontro de etnomatemática do Rio de Janeiro (ETNOMA-RJ). Niterói, 14 – 22.

D’Ambrósio, U. (2018). *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 5ª ed. Belo Horizonte: Autentica.

Gonçalves, E. C. S; Monteiro, A. (2006). Medidas e práticas sociais. *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática SIPEM*. Recuperado em 30 de maio de 2019 de http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemIII.pdf.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. (2016). *Projeto pedagógico do curso superior de licenciatura em educação do campo*. Natal - RN.

Kinjnik, M. (2003). Currículo, etnomatemática e educação popular: um estudo em um assentamento do movimento sem-terra. *Currículo sem Fronteiras*, 3(1), 96-110.

Lara, I.C. M. de. (2013). O ensino de Matemática por meio da História da Matemática: possíveis articulações com a etnomatemática. *Vidya*, 33 (2), 51 – 62

Nassif, R. (2010). José Martí. In: Santos, J. E. S.; Nassif, R (Org.). *José Martí*. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana, 2010, p. 11 – 25.

Orey, D. C.; Rosa, M. (2003). Vinho e Queijo: etnomatemática e modelagem. *Bolema*, 16 (20), 1 – 16.

Scandiuzzi, P. P. (2002). Água e óleo: modelagem e etnomatemática? *Bolema*, 52 – 58.

DINAMIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS NEGATIVOS: PRIMERA APROXIMACIÓN Y REFLEXIONES A PARTIR DE UNA EXPERIENCIA DOCENTE

ACTIVATING THE TEACHING OF NEGATIVE INTEGER NUMBERS: FIRST APPROACH AND REFLECTIONS FROM A TEACHING EXPERIENCE

Daniela Emmanuele, Viviana Abinal
Fac de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (UNR), Escuela Secundaria Orientada N° 515 "René G. Favaloro" (Argentina)
emmanueledaniela@gmail.com, viviabinal@hotmail.com

Resumen
Con este trabajo -que forma parte de una investigación en curso-, intentamos aportar al rediseño del discurso matemático escolar para la enseñanza de los números enteros negativos, mediante las reflexiones que hemos hecho a partir de una experiencia docente en la escuela secundaria orientada. Esta propuesta áulica pretende dinamizar las clases y la enseñanza de los contenidos a través de la recreación de prácticas de referencia y de la consideración de la historia epistemológica de la matemática como variable didáctica, favoreciendo la resignificación y apropiación de los saberes matemáticos por parte de los estudiantes, y priorizando el carácter funcional de dichos saberes por sobre el utilitario. Como conclusión preliminar, podemos asegurar que las prácticas de referencia propuestas permitieron una construcción significativa de número entero no ligada sólo al conteo ni exclusivamente al intercambio comercial, y sentaron las bases para un concepto más abstracto en cuanto a número se refiere.

Palabras clave: dinamización, resignificación, números enteros negativos

Abstract
With this work, which is part of an ongoing research, we try to contribute to the redesign of the school mathematical discourse for the teaching of negative integer numbers, through the reflections we have made from a teaching experience at the oriented secondary school. This classroom proposal aims to activate the lessons and the teaching of contents through the recreation of reference practices and the consideration of the epistemological history of mathematics as a didactic variable, favoring the resignification and acquisition of mathematical knowledge by students, and prioritizing the functional nature of such knowledge over the utilitarian one. As a preliminary conclusion, we can ensure that the proposed reference practices allowed a significant construction of the integer number not linked only to counting nor exclusively to commercial exchange; and laid the foundations for a more abstract concept as far as number is concerned.

Key words: activation, resignification, negative integer numbers

Introducción

En los resultados obtenidos mediante estudios y otras experiencias, realizados en el marco de los Proyectos de Investigación ING 418 e ING 548 (Emmanuele, 2016; Emmanuele, Rodil, Vernazza, 2018) se observa, en general, en los distintos actores del sistema didáctico (alumnos, docentes, estudiantes de profesorado y otros), un predominio de pensamiento acerca de la matemática que la caracteriza como un conjunto de elementos yuxtapuestos y sin articulaciones. No se la concibe, generalmente, como el resultado de un proceso que contempla o que depende, entre otras cosas, de sujetos pertenecientes a un contexto histórico, social y económico determinado, proceso que se da en el marco de una cultura y no de otro. Así mismo, cabe destacar que, en los casos en los que los docentes logran plantear esta mirada desde lo discursivo, al mismo tiempo, ponen en evidencia grandes contradicciones entre el discurso y las planificaciones didácticas y prácticas áulicas empleadas.

Con este trabajo -que forma parte de una investigación en curso- pretendemos aportar al rediseño del discurso matemático escolar para la enseñanza concretamente de los números enteros negativos, mediante las reflexiones que hemos hecho a partir de una experiencia docente en la escuela secundaria orientada. El propósito de esta propuesta áulica es dinamizar las clases y la enseñanza de los contenidos a través de la recreación de prácticas de referencia y de la consideración de la historia epistemológica de la matemática como variable didáctica.

Se han diseñado tres actividades (que se describen más abajo), pero por razones de espacio, omitiremos el relato de las dos últimas, sólo las presentamos para dar una idea del sentido pedagógico-didáctico que deseamos darle al diseño de la experiencia. En un próximo artículo, compartiremos reflexiones y conclusiones referidas a estas dos últimas actividades. Para esta publicación, nos dedicaremos a relatar, reflexionar y concluir a partir de la primera actividad desarrollada, de la que hemos obtenido abundante material.

Marco teórico

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), en su estudio de la construcción social del conocimiento, permite explicar la naturaleza de un discurso específico, el discurso matemático escolar (dME), que norma y regula la presentación y la acción sobre los objetos matemáticos exhibiendo características propias: atomización de conceptos, carácter hegemónico, conocimiento matemático acabado y continuo, carácter utilitario y falta de marcos de referencia para la resignificación (Soto, 2010).

> […] es frecuente observar que el diseño de una clase no contempla como actividad habitual el que los alumnos argumenten sobre lo que se trata o que ellos directamente expongan sus ideas, menos aún que refuten las consideraciones de sus compañeros o las de su profesor. Es así como se pierde el potencial que todo alumno posee para debatir en matemáticas y en ciencia; se pierden los hilos de la argumentación y sus ideas cotidianas no evolucionan hacia ideas más profundas" (Cantoral, 2016, p 86).

Dinamizar la enseñanza de la matemática implica revertir no sólo los rasgos antes enumerados del dME sino también este tipo de diseños. Para ello, el rol del docente debe ser protagónico en cuanto a la generación activa de condiciones de problematización del conocimiento, elaborando propuestas educativas que prioricen el carácter funcional de los saberes matemáticos por sobre el utilitario, reconociendo las prácticas sociales y el contexto histórico y cultural que originan los saberes para favorecer su resignificación y apropiación por parte de los estudiantes (Reyes Gasperini, 2016). Problematizar el conocimiento implica su historización y su dialectización, es decir, implica el abordaje de los conceptos desde una epistemología situada así como el reconocimiento de las contradicciones y luchas internas que se debieron sortear en pos de su construcción (Cantoral, 2016).

Metodología de trabajo

En esta propuesta didáctica se incorpora el diseño y recreación en el aula de elementos de una *práctica de economía*, con la que se busca dotar de significado a las actividades planteadas para la enseñanza de los números enteros y sus operaciones, a fin de hacerlas más dinámicas. Estas actividades, organizadas desde una perspectiva lúdica dado el grupo etario al cual se destinan (adolescentes entre 12 y 13 años), devienen de matematizar la realidad inmediata y son las que la socioepistemología concibe como *prácticas de referencia* (Camacho Ríos, 2011). La dinamización se efectúa al simular el intercambio de bienes o la comercialización de productos con acciones semejantes a las desarrolladas en ambientes reales de contextos económicos. El diseño de esta propuesta didáctica tiene la intencionalidad de construir la noción de número entero negativo mediante la confrontación del conocimiento práctico que los alumnos tienen del número en tanto cantidad, orden y medida con una nueva concepción en tanto entidad abstracta. Las distintas actividades desarrolladas oportunamente consisten en juegos (preparados por la docente a cargo en colaboración con nuestro equipo de investigación), atendiendo especialmente al contexto socioeconómico de los alumnos (la escuela a la que asisten está emplazada en una zona de vulnerabilidad social) y son los que se describen a continuación: 1) *"Vacaciones Soñadas"*: es la actividad con la que se da inicio al tema a desarrollar (números enteros) sin ningún otro tipo de introducción; es un juego que consiste en un tablero de 12 casillas correspondientes a las últimas 12 semanas del año -, tarjetas –que representan cobros por trabajos realizados o gastos de dinero- y un dado.

La actividad pretende recrear una situación en la que los estudiantes deban administrar sus finanzas y tomar decisiones respecto del *registro formal* de las acciones llevadas a cabo. Al finalizar esta actividad, se espera que los alumnos hayan acordado un modo de representación significante, la de los + y los –. 2) *"Los 100 Puntos"*: juego compuesto por cinco dados con caras verdes (representan puntos a favor) y caras naranjas (representan puntos en contra). Cada jugador, tira los cinco dados al mismo tiempo y debe anotarse para sí los puntos obtenidos como resultado de la tirada. Gana el jugador que llegue primero a los 100 puntos. 3) Lectura de fragmentos de textos histórico-epistemológicos (adaptados al nivel), actividad que fomenta no sólo la lectura, sino la discusión, el debate y la argumentación de ideas. Con la primera actividad se persigue el que los alumnos diferencien entidades positivas de entidades negativas y convengan un modo de registro para las mismas que les permita arribar consensuadamente al registro usual de "+" y "-". Con la segunda actividad se pretende avanzar en la conceptualización de número como una entidad abstracta, para superar el concepto de número como una cantidad asociada al conteo, y agilizar el método de cálculo mental. Por último, con la tercera actividad, se quiere generar un espacio de pensamiento que revalorice la palabra, el debate argumentativo y que ponga en evidencia las dificultades que la humanidad enfrentó para construir el concepto de número entero negativo.

La actividad presentada a continuación permite recrear una práctica de referencia, adaptada al contexto social y económico de los alumnos, que permitió a la humanidad la gestación incipiente del concepto de número entero negativo.

Actividad N° 1: "Vacaciones soñadas"

Objetivos de la actividad:
• Diferenciar entidades positivas de entidades negativas.
• Convenir un modo de registro para las entidades negativas diferenciándolas de cantidades positivas para llegar consensuadamente al registro usual de "+" y "-".

Elementos del juego y dinámica

Tablero: Este consta de tres casas distintas; de la puerta de cada casa sale un camino formado por 12 casilleros, que representan las últimas 12 semanas del año. (La selección de la casa se realizará por azar mediante dados). Al final del último día del año se encuentran las posibilidades de vacacionar; cada destino tiene un número distinto (1, 2 o 3) en relación a las posiciones obtenidas por cada familia en el juego. El tablero también posee un banco en el que las familias tienen depositado sus ahorros (colocados en un sobre); éstos se asignarán mediante la tirada de dados al iniciar el juego, pero se conocerán únicamente después de haber transitado el camino completo hasta llegar al último mes.

Tarjetas: las tarjetas contendrán las acciones del juego, por ejemplo: pago de impuesto municipal, cobro por trabajos realizados, compra de comida en almacén, reparación de techos, etc. Las tarjetas permanecerán boca abajo. Las que representan cobros por trabajos realizados estarán mezcladas junto a las que representan gastos de dinero. Cada grupo familiar se dedicará a una actividad diferente (herrería, carpintería, mecánica, plomería, electricidad) y sus ingresos y gastos dependerán de lo que indiquen las cartas que salgan en el juego.

Dado: Cada familia tirará el dado, uno por vez.

Ficha de registro: hoja en blanco; una para el banco, y una para cada familia.

Reglas del juego: Los participantes de la actividad se dividen en tres grupos, cada uno constituirá una familia; dos de los alumnos representarán el banco del pueblo; tendrán una caja con el tesoro y los ahorros de las familias. Cada familia deberá tirar un dado cada día, el número obtenido indicará la cantidad de tarjetas que deberá dejar pasar antes de dar vuelta la que contiene la acción a seguir.

Cada familia deberá administrar su dinero y llevar un registro para, al finalizar el mes, controlar y verificar que coincide el dinero que poseen con lo registrado. Al finalizar la actividad todos los registros deberán coincidir respecto de las acciones llevadas a cabo. Luego de mostrar y justificar sus finanzas, se establecerá un orden respecto del dinero obtenido por el cual la familia que más dinero tenga al finalizar podrá abrir el sobre número 1 en el que obtendrán los pasajes para viajar a *Cancún* junto con un premio extra (gaseosas); la familia que obtenga el segundo lugar podrá vacacionar en *Mar del Plata* y obtendrán un premio extra (palitos salados y chizitos); finalmente, la familia que salga en tercer lugar podrá vacacionar en un *camping de la zona* y también obtendrán un premio extra (platos y vasos). (Aclaramos que al final del juego, los grupos compartieron entre todos los premios extra obtenidos).

Un análisis a priori nos permite suponer que las preguntas e inseguridades de los alumnos respecto de la actividad girarán en torno a cómo se deben realizar los registros (ya que no se les ha indicado previamente de qué forma hacerlo) y cómo manejarse en los casos en que no les alcance el dinero para realizar los pagos indicados por las tarjetas. También, la banca deberá organizar sus registros a fin de llevar el control del dinero prestado y del dinero restante. En ambos casos, el de las familias y el de la banca, la búsqueda de la organización de las acciones que cada tirada de dado asigne y la necesidad de rendir cuentas al resto de los participantes al finalizar el juego, seguramente llevará a la búsqueda de un modelo que les permita ordenar las acciones. Serán las entidades negativas las que lo posibiliten. Entonces, para el docente, será oportuno formalizar estos números negativos para comenzar su tratamiento como sumas algebraicas.

Teniendo en cuenta que para los alumnos el conocimiento del número entero negativo exige una ruptura con ideas muy ligadas a experiencias prácticas y manipulación de elementos concretos, es necesario construir un buen camino hacia la abstracción porque, como sucedió históricamente, la identificación del número con la cantidad podría ser un obstáculo en la construcción del número entero negativo, más aún, para operaciones más complejas que las adiciones y sustracciones. Esto es, si no se logra el cambio pretendido en el concepto de número considerándolo una “estructura intelectual” como sostenía Hankel, entonces este nuevo tipo de números podrían no adquirir significatividad (Boyer, 1986). Siguiendo esta línea, se propone a continuación una segunda actividad con la intención de construir un paso hacia el pensamiento formal abstracto. Luego de la primer actividad realizada se espera que los alumnos hayan acordado un modo de representación significante, la de los + y los -, para ahora entonces, formalizar el tratamiento de sumas algebraicas. Pero esta vez buscando desligar la idea de número de las cantidades ganadas o perdidas, pues es necesario un avance en la conceptualización de número como entidad abstracta para lograr la genuina comprensión de los números enteros negativos. Ya mencionamos que, por razones de espacio, aquí omitimos el relato de la segunda y tercera actividad desarrolladas.

Desarrollo de la experiencia

Relato de la experiencia en torno a la Actividad N° 1

Se organizaron tres grupos sin decir anticipadamente de qué se trataba la actividad. (Cabe aclarar, que los grupos fueron elegidos por la profesora evitando que se formaran grupos ya establecidos dentro del aula por amistad o afinidad, con la intención de favorecer la integración). Dos alumnos formaron la banca: su deber era controlar la tirada de dados y administrar las fichas de acciones. Mientras se agrupaban y charlaban entre ellos, algunos festejando, otros algo incómodos, se presentó el material didáctico y en ese momento algunos alumnos se acercaron a colaborar juntando bancos y encastrando el tablero. El tablero se armó sobre dos bancos; el resto de los alumnos se paró alrededor. Se realizó la explicación de la actividad, dos veces, en medio de interrupciones y preguntas, a medida que se iba explicando. Al decirles que cada grupo representaba una familia, algunos quisieron reagruparse con sus compañeros de banco (de mayor afinidad). Se aclaró que no podía cambiarse la constitución de los equipos. Al explicar que se trataría de una competencia preguntaron qué ganarían. Se les dijo que los premios eran sorpresas. Cuando supieron que se trabajaría con dados un alumno preguntó a la docente si podía ser él quien tirara; se aclaró que todos los participantes tirarían el dado. Antes de explicar el contenido de las tarjetas apiladas en el tablero, dos alumnos intentaron tomarlas para leerlas, pero se les pidió que esperaran. Otros alumnos intervinieron pidiendo orden porque no dejaban hablar a la docente. (La docente interpretó que era parte de la ansiedad así que permitió que entre ellos acordaran hacer silencio, algunos pidiendo silencio, otros bromeando con que eran hermanitos; finalmente la docente propuso que escucharan toda la explicación y luego hicieran las preguntas correspondientes a sus dudas).

Cada grupo eligió un apellido que los representaba como familia.

Luego de terminar la explicación completa hubo una sola pregunta generalizada respecto de las hojas lisas de notas que se les entregó para hacer el rendimiento de cuentas a la banca. ¿Cómo debían anotar? Se aclaró que cada familia debía acordar y definir la forma en que llevarían sus registros.

Un integrante de cada familia tiró el dado para definir quién comenzaría la actividad. El grupo que obtuvo el número más grande fue el primero en seleccionar al azar un sobre cerrado que contenía los ahorros de las familias. Sobres que podrían abrirse sólo al final de la actividad. Luego comenzó el juego; se acomodaron los grupos, en el orden que salieron los dados de mayor a menor, alrededor del tablero.

Un alumno de cada grupo, (rotaban hasta pasar todos) tiraba el dado sobre un banco. Cabe aclarar que en reiteradas ocasiones el dado caía al piso debido a la falta de manejo de dimensiones y espacios, lo que llamó la atención de la docente. La banca, para cada familia, dejaba pasar las fichas de acciones de acuerdo al número obtenido con el dado y le entregaba la ficha siguiente que contenía las acciones que las familias debían realizar durante el transcurso de una semana (según el juego). Cada ficha debía ser leída en voz alta y colocada en el tablero.

El proceso continuó hasta completar las 12 semanas del juego. La actividad transcurrió en orden, en medio de chistes y bromas; algunos alumnos querían repetir la tirada de dados, pero los mismos compañeros les decían que debían esperar a que pasaran todos y decidían quiénes debían tirar el dado.

Al finalizar, cada familia se reunió en grupos para organizar, decidir y registrar la situación financiera de su grupo al cabo de las doce semanas transcurridas. En dos de los grupos volvió a surgir la pregunta de cómo debían registrar. Se los dejó organizar el registro libremente, sólo se aclaró que la situación financiera debía ser la real, y que luego debían explicar el procedimiento realizado como un modo de rendir cuentas.

Sobre las actuaciones de los grupos

Metodología de registro del grupo 1

Las hojas de registro de familia entregadas como parte del material de la actividad fueron utilizadas para hacer cálculos auxiliares. El registro formal se realizó en una hoja de carpeta, seguramente debido al tamaño de mayor amplitud que las ofrecidas.

Este grupo organizó dos columnas: perdido y ganado. Olvidando que las fichas correspondían a semanas, realizaron un registro diario en lugar de semanal; así las acciones que se realizaban semanalmente, para ellos fueron acciones que se realizaban diariamente. En cada columna anotaron: día 1, día 2, …, día 12. Para cada día calcularon los totales que debía pagar (para ellos montos perdidos) y los totales cobrados por trabajos y otros (montos ganados). Por ejemplo, en la primera y segunda ficha, el registro fue:

Perdido	Ganado
Día 1: 250	Día 1: 300
Día 2: 300	Día 2: 0

El total de lo perdido para este grupo fue de $4400. La utilización de calculadora de este grupo se puso en evidencia, por el registro utilizado al escribir el número: 4,400 en lugar de 4.400. El total de lo ganado fue de $2600. En el registro escrito figura: Total: $1800, pero no aclara si representa una cantidad perdida o ganada. Sin embargo, en la explicación oral realizada al curso, en ningún momento presentaron dudas sobre la pérdida que representaba esa cantidad según sus registros. Esto muestra la clara diferenciación entre entidades negativas y positivas que representan los montos a cobrar o pagar, así como una necesidad de formalizar simbólicamente la diferencia de entidades.

Al momento de exposición en el pizarrón se detectó error en el registro de acciones de la segunda ficha: $50 por compra de rifa no fueron registrado. Cuando se preguntó qué había pasado con esos cincuenta pesos dijeron que se les había pasado, que lo habían olvidado.

Al descubrir los ahorros, algunos alumnos del grupo festejaron y se mofaron de otros grupos (pues, por ejemplo, el grupo vecino que había terminado y abierto el sobre antes, tenía ahorrado $500). Este grupo había conseguido $1000 de ahorros. Sin embargo, uno de los alumnos del grupo dijo: "¡Igual seguimos pa' atrás!". La docente preguntó: "¿Cuánto están para atrás?", y se estableció, sin dificultad, que la familia tenía al momento una deuda de $800.

Al momento de exponer su situación en el pizarrón para el resto del curso hicieron bromas: "¿Quién nos presta plata?", "Y claro, ¿con todo lo que gastamos cómo no vamos a deber?", "Bueno… pero la pasamos bien, salimos a comer y a pasear. ¿De qué sirve tener plata y no disfrutarla?", fueron algunas de las frases que manifestaron.

Fue el primer grupo en exponer, les llevó tiempo acomodarse y decidir quiénes explicarían. Lo hicieron los más extrovertidos entre las bromas, risas y lamentos. Al realizar la explicación oral se dieron cuenta que algunos chicos no comprendían, entonces uno de ellos tomó una tiza y realizó a modo de ejemplo la anotación que se mostró más arriba. Eso clarificó la idea de lo que explicaban. Luego anotaron en el pizarrón:

Total $1800

Docente (D): “¿Qué significan esos $1800?”
Alumno A1: “Ahh… que debemos…”
D: “¿Se animan a explicar de dónde sacaron esos $1800?”
A1: “Sí.”
La docente le acerca una tiza y el alumno anota en el pizarrón:
Perdido: 4,400 (en este caso la docente explicó cómo funcionan las calculadoras respecto de los puntos y las comas).
Ganado: 2.600
D: “¿y los ahorros?”
A2: “¿No tenés anotados los ahorros?”, hablándole a su compañero A1.
A1: “No, no están”.
D: “No hay problema, ya lo charlamos en el grupo. ¿Cuánto tenían?”, dirigiéndose al grupo.
Varios alumnos del grupo en coro: $1000.
Entonces el alumno agrega en el pizarrón:

Ahorros $1000.

Luego, borra el total anterior y escribe: Total $800 (cuando se está por sentar, sin que nadie diga nada) se vuelve al pizarrón y agrega: Perdimos y hace una carita triste al lado.

Observación: el perdido o ganado utilizado se puede pensar en relación al juego, cobrar dinero resulta beneficioso para el grupo y tener que pagar algo, perjudicial.

Metodología de registro del grupo 2

Este grupo comenzó con una modalidad de trabajo y luego la cambió al encontrarse con operaciones que resultaron desordenadas y generaron incertidumbre. Los alumnos comenzaron a realizar en forma ordenada cada una de las acciones que indicaban las fichas, desde la primera hasta la quinta aproximadamente.

Primera y segunda ficha: Registros iniciales

Gastaron 150 pesos
Gastaron 250 en total
Deben 50 pesos
Ganan 200. Le quedan 150
Gastan 150. No les queda nada

El registro propuesto por algunos integrantes, que consistía en anotar, para cada acción, la situación económica de la familia terminó siendo un proceso desordenado que generaba dudas al resto que no lograban acompañar el proceso de cálculos. La intervención docente sugirió al grupo que quienes llevaran registro explicaran con claridad y paciencia lo que estaban haciendo a fin de que todos comprendieran, pues eran parte de la familia. La explicación del procedimiento fue comprendida, finalmente por todos los integrantes, pero en la misma explicación las autoras del método experimentaron dudas, que pusieron en evidencia y se dieron cuenta de lo tedioso que era controlar las acciones y justificar cada ítem y monto anotado. Por ello, el grupo decidió, cambiar su registro a uno que solo contiene montos: 300-150-100+200-150+500-20, etc.

Este grupo no hizo distinción verbal entre ganado y perdido, o entre cobrado y pagado. Tampoco utilizó el signo $. Para cada ficha (que representaba el monto semanal) comenzaban escribiendo los valores que representaban ganancias e ingresos y luego los gastos; eso sumado al azar que le asignó a este grupo fichas siempre con saldos positivos, las cuentas no generaron complicaciones. Hicieron la cuenta en una calculadora y obtuvieron una ganancia de $ 1100 + $1000 de ahorros. Tuvieron un total de $ 2100. Fue el equipo ganador.

Este grupo se resistió a pasar al pizarrón. La docente le ofreció hacerlo luego, para darles tiempo, pero una de las alumnas, muy tímidamente le dijo a otra: "¿Vamos?"; miraban el papel sin animarse. Por ello la docente las animó a pasar y se quedó con ellas en el pizarrón. Explicaron que fueron haciendo la cuenta; a medida que leían la ficha, iban explicando la cuenta que hicieron. La docente les preguntó si podían intentar anotar algo en el pizarrón. Le preguntaron a la docente señalando una parte de la hoja que tenía el total y al tener la aprobación de la docente escribieron:

final 1.100
ahorros + 1.000
total 2.200

Otro grupo que no detalla ganancia o pérdida; saben lo que es, pero no lo registran.

D (al curso): "Tengo una pregunta, para el resto de las familias … ¿Quién puede decirme si lo que dice ahí final $1100 significa que les quedó dinero o deben dinero?"
A3: "No lo escribió".
D: "No, se olvidó de anotarlo, pero… ¿pueden darse cuenta?, piensen tranquilos. Van a tener que explicar lo que digan". Y se hizo una pausa.
A1: "Ya sé, ya sé… es plata, porque los ahorros son plata y los juntó".
D: "¿Qué dice el resto?"
La mayoría de los chicos asintió en que tenía razón, luego de la aclaración, les resultó fácil verlo.
A1: "¿No ganamos nada? (Risas de los alumnos) ¡Cien pesitos aunque sea!"

Metodología de registro del grupo 3

Este grupo separó los montos en dos columnas: Perdió, ganó. Al total de la columna "ganó" de $4850 le agregó $800 obtenidos por los ahorros y a ese total le restó el total de la columna "perdió": $4250. En total, obtuvo una ganancia de $1400.

Éste fue el grupo que trabajó de manera más ordenada, terminó más rápido y pudo, con mayor claridad y orden, explicar el procedimiento empleado. La explicación para el resto del curso se realizó de manera sencilla, hicieron dos columnas en el pizarrón "perdió" y "ganó"; completaron las dos columnas con los valores de las fichas como en la hoja en la que trabajaron. En medio de la explicación y ante la pregunta de la docente sobre cómo lo pensaron, un alumno del grupo dijo: "Como que no había muchas opciones, teníamos que separar lo que cobrábamos de todo lo que teníamos que pagar para ver si nos quedaba algo de plata". La columna "perdió" daba un total de 4250, la columna "ganó" daba un total de 4850, a esta última le agregaron 800 (eran los ahorros pero no lo indicaron). Luego realizaron la resta correspondiente y tuvieron una ganancia de $1400.

Luego de las exposiciones y sin borrar lo que cada grupo expuso en el pizarrón la docente hizo preguntas para empezar a formalizar ideas respecto de los números positivos y negativos.

D: "¿Cómo podríamos hacer para diferenciar números que representan ganancias o dinero de números que representan pérdidas o cosas que tenemos que pagar sin tener que andar explicándolo?"
A4: "Separándolos, como hicimos nosotros", señalando el pizarrón.
La docente escribe en el pizarrón dos columnas con números y sus totales a modo de ejemplo, los totales son $800 y $1000. Luego dice: "Ok, acá hice como ustedes. ¿Quién puede decirme si tengo dinero o debo?"
A2: "¿Cuál es la columna de ganancia?"

D: “Ahhh, ésa es la pregunta. La repito: ¿Cómo podríamos hacer para diferenciar números que representan ganancias o dinero, de números que representan pérdidas o cosas que tenemos que pagar sin tener que andar explicándolo o sin tener que escribir la palabra al lado, porque nos lleva mucho tiempo?”
Miran el pizarrón con algo de temor a contestar, dubitativos. La docente vuelve a escribir en el pizarrón, esta vez números sueltos (muchos números). Pregunta: “¿y en este caso?”. Algunos alumnos se quejan: “Nooo!!!”, y otros se ríen.
D: “¿Y en este caso? ¿Quién entiende qué quise escribir, qué significan esos números?”
A5: “Y… como dice usted: ¡Yo no puedo meterme en tu cabeza para saber qué pensas!”
Risas de los alumnos, es una frase que la docente les dice con frecuencia.
D: “Me parece perfecto lo que decís, qué buena docente tienen; entonces tengo que intentar ser más clara para que todos ustedes puedan interpretar lo mismo que yo”.
A4: “¿Y no podemos ponerle al lado pagó o cobró?”
A1: “Ya dijo que palabras no”.
D: “Es que se hace muy largo, imagínense si tenemos cien números distintos, escribir cien veces perdió, ganó, ganó, ganó, perdió….”
A6: “¿Y letras sueltas, se puede? Porque de algún modo las tenemos que separar”.
D: “¿Cómo lo pensás?”
A6: “Y… A lo que ganó le ponés la g y a lo que perdió le ponés la p; eso es rápido”.
D: “Lo intentamos…” y delante de los números pone p o g para mostrarle qué representa cada número.
A7: “Ahhhh…. Qué bolu…!”
A8: “Era re fácil!”
D: “No, no es que era así, estamos pensando entre todos cómo agilizar la forma de escribir. Me parece que lo que aportó A6 es una buena idea. Esto que ella propone de utilizar letras en lugar de palabras es una forma de resumir una idea mediante un símbolo. En este caso, los símbolos serían g y p, g significa ganancia y p significa pérdida. A ella se le ocurrió ese y nos entendemos todos. ¿Podríamos haber elegido otros símbolos?”
A9: “Sí, C de cobrado”.
D: “Buen ejemplo”.
A1: “O puede ser una carita contenta y una carita triste”. (Risas)
D: “Puede ser perfectamente así, el tema es ponernos de acuerdo para que todos interpretemos lo mismo. Volvamos a algo que me parece interesante, miremos y recordemos las anotaciones de los distintos grupos y en particular la del grupo 2: ¿Pueden darse cuenta cuáles son las ganancias y cuáles los pagos?”
300-150-100+200-150+500-200…etc
A9: “Sí, lo que pagaron lo restaron”.
A1: “Todos restamos lo que pagamos. Solo que nosotros primero juntamos todo”.
D: “Claro, separaron lo que ganaron de lo que pagaron. Y está perfecto, pero mi pregunta es cómo hacer para diferenciarlo porque en el pizarrón escribieron los totales y no explicaron qué significaba; lo sabían, eso es claro, pero nosotros no. En este caso -señalando el pizarrón- ¿ellas utilizaron palabras?”.
Varios alumnos a la vez: “No”.
D: “¿Utilizaron la g y la p para diferenciar?”
Varios alumnos: “No”.
D: “¿Qué utilizaron para diferenciar las ganancias de las pérdidas?”
A1: “Sumaron lo que ganaban y restaban lo que pagaban”.
D: “Bien, qué dibujo o símbolo hicieron para que vos entiendas?”
A9: “El + y el –”.
A1: “Ahh… no entendía que me preguntaba”.
Suena el timbre que anuncia el recreo.
D: “¡¡Bien!! Esos son símbolos matemáticos. Ya que estamos en matemática podemos tomar estos símbolos para representar situaciones positivas de ganancia de situaciones negativas de pérdida. La próxima clase vamos a volver a pensar lo que estamos hablando hoy y repartimos los premios del juego, no falten”.
La clase siguiente comenzó volviendo a formar los grupos de la clase anterior y recordando la actividad.

D: “¿Se acuerdan qué fue lo que quedó pendiente de la clase anterior?”
A3: “Ver cómo vamos a hacer para anotar de manera diferente las ganancias de las pérdidas”.
D: “Bien, ¿cómo vamos a diferenciarlas? ¿En qué habíamos quedado?”
A5: “Que podían ser letras o caritas”.
D: “Y al final, ¿quedamos en algo?”.
A10: “Eso era al principio, al final íbamos a usar los + y – como los García”. (Risas de los compañeros; los “García” era el nombre que eligió el grupo que la docente había tomado como ejemplo, porque tres alumnos de dicho grupo se apellidan García).
D: “Díganme ustedes, ¿qué opinan?, ¿qué les parece más adecuado usar?”
A3: “Yo, las caritas no. ¿Te imaginás en una prueba haciendo caritas?”.

Docente y alumnos hablan de cómo la decisión de escribir g o p, o hacer una carita triste o contenta es una convención, o sea, un acuerdo de un grupo de personas que tienen que darle el mismo sentido al símbolo para que se pueda establecer una comunicación y podamos entender todos lo mismo. La docente les cuenta que los símbolos que se utilizan en matemática para diferenciar elementos positivos de elementos negativos surgieron de un acuerdo entre un grupo de personas y luego fueron ganando adhesión sobre otras formas de escritura, en distintos tiempos y contextos, hasta ser los que hoy utiliza la matemática para que todos entendamos lo mismo. Ahora la docente escribe en el pizarrón:

En matemática utilizamos distintos símbolos para diferenciar elementos que resultan positivos de los que resultan negativos:

- Para los negativos utilizamos el signo menos -.
- Para los positivos utilizamos el signo más +.

Consecuencias positivas en clases posteriores al uso de prácticas de referencia iniciales.

Volviendo al relato de la experiencia, el último de los grupos en la búsqueda de explicar ante los compañeros sobre cómo hicieron para realizar el registro expresó que era bastante obvio; que todos hicieron lo mismo siguiendo distintos caminos; pero en definitiva lo que tenían que hacer era separar lo que iban ganando de lo que tenían que ir pagando. Todo lo que ellos discutían en la actividad, estaba en relación a las actividades diarias que ellos pueden visualizar en la vida respecto de pagos y cobros. La actividad fue diseñada teniendo en cuenta el contexto socioeconómico de los alumnos y el contexto donde la escuela se inserta.

El alumno A2, tras reiterados días de faltas, en un momento en que se estaba desarrollando el tema relativo a las estructuras de las operaciones, y habiéndose perdido una buena parte de las explicaciones, en una corrección en el pizarrón aportó algo aprendido en el trimestre anterior, (esto pasó en el segundo trimestre, uno de los chicos recordó el juego, se refirió a él para explicar cómo trabajar en las sumas algebraicas) diciendo: “Profe, ahí en ese paréntesis, ¿tenemos que hacer como en el juego, separar los que son positivos de los que son negativos?”. Muestra la memoria ligada a una actividad en la que se han sentido involucrados.

Los alumnos pudieron mantener la estructura de las operaciones para resolver cálculos y dentro de las estructuras, diferenciar las reglas que rigen la multiplicación y división del procedimiento que aprendieron para el trabajo de sumas algebraicas.
El signo negativo surgió (en los alumnos) como una idea de algo contrario, lo contrario de tener plata, de estar bien, o de ganar. Aprovechando esta conceptualización la docente les preguntó qué significaría entonces -(-100). La primera aproximación y sin grandes dificultades fue la respuesta de varios alumnos: “Lo contrario de perder 100 pesos”.

Es normal que asimilen el número 100 al dinero porque la experiencia los ha llevado a eso. Ante la pregunta: “¿y en definitiva qué es lo contrario de perder $100?”, tampoco generó dificultad la conclusión de que significa ganar

$100 y que podemos escribirlo como +100. Luego se concluyó que: -(-100) = +100 y se pudieron expresar otras situaciones, como por ejemplo:

-(-15) = +15
-(+30) = -30

Esto lo hicieron a partir del lenguaje coloquial. También se los invitó a pensar qué significaría +(-100). De manera intuitiva surgió en uno de los alumnos que si el menos significaba lo contrario, el más significaría eso mismo que contiene el paréntesis. Uno de los chicos lo explicó así: "es tener una pérdida de cien pesos" - algunos no comprendieron esta expresión y el mismo alumno aclaró: "claro, no te cambia en nada, es lo mismo". Otro alumno intervino: "pero si "más" es sumar…". A lo que el alumno anterior aclaró: "bueno… sumale a lo que tenés una pérdida de 100 pesos". Esta última idea que planteó fue mejor aceptada que la primera. Pero requirió revisar estas dos ideas nuevas y ordenarlas, por lo que se escribieron en el pizarrón las siguientes situaciones, se los invitó a pensar un rato en silencio y luego se hizo una puesta en común:

-(-18)=
-(+60)=
+(-50)=
+(+12)=

No se animaron a participar. Esta vez, la actividad requería de un proceso de pensamiento y organización de las palabras distinto al de la actividad lúdica. El alumno que antes había cuestionado al primer participante, luego de un rato se ofreció.

D: "Contanos qué interpretaste en la primera situación, ¿cómo lo leerías?"
A2: "Es -señalando con el dedo- lo contrario de perder 18 pesos, o sea estoy ganando 18 pesos".
D: "¿Qué dice el resto?".
Los alumnos asintieron.
D: "¿Te animas a anotarlo?".
El alumno anotó +18.
D: "¿Quién pasa al segundo?"
A4: "Yo le digo, pero no paso".
D: "Dale, decinos cómo lo lees".
A4: "Es lo contrario de cobrar 60 pesos; es pagar 60 pesos".
D: "Y, ¿cómo se anotaría?".
A4: "Menos 60". (Varios alumnos respondieron a coro lo mismo).
D: "Dale pasá que si no pasás, tengo que ponerle un diez a otro" -los chicos se rieron de lo dicho por la docente y ella pasó.
D: "Nos quedan dos -silencio por parte de los alumnos. Para mí que dice que saque a pasear 50 tortugas al cine" - los alumnos volvieron a reírse.
A1: "Significa que tengo una pérdida de 50 pesos".
D: "¿Qué piensa el resto?".
A4: "Yo entiendo pero lo que no entiendo es…entonces no hace falta escribir el +, ¿para qué lo pone?".
A1: "Para avisarnos que la tenemos, no que es lo contrario; sino ¿cómo sabés si lo tenés o es lo contrario?"
D - Interviene ante la confusión de algunos alumnos: "No olviden que en matemática acordamos un modo de escribir. Bien dice A4, no hace falta escribir a ese más porque significa que tenemos plata o tenemos deuda. Pero si está delante es bueno que sepamos qué quisimos poner".
Les da tiempo para acomodar lo hablado.
D: "Y el +(+12) qué significa?"
A2: "Que tenemos una ganancia de doce pesos, y podemos poner solo +12".

Luego de más actividades se formalizó en el pizarrón:

-( ) = lo contrario de lo que está dentro del paréntesis

+( ) = lo mismo que está dentro del paréntesis

Así, durante el transcurso de las clases se trabajó la eliminación de paréntesis desde esta idea sin necesidad de utilizar reglas memorísticas.

Reflexiones finales

Creemos que las actividades que se desarrollaron -no sin dificultades-, permitieron un nivel de abstracción mayor que en el caso tradicional donde el aprendizaje de los números enteros resulta ser, para el alumnado, sólo un cúmulo de reglas que deben memorizar y aplicar convenientemente de acuerdo a ejemplificaciones dadas en clases. Resultó alentador el que al momento de resolver ejercicios con sumas algebraicas, a partir de reglas que ellos mismos habían enunciado (con sus propias palabras primero, con cierta formalidad después) los alumnos apelaran permanentemente al juego *"Vacaciones Soñadas"* manifestando expresiones como "¡Acordate cuando pagamos la tasa municipal pero después cobramos por el trabajo de electricidad!" para resolver la suma de un número negativo y uno positivo.

A modo de reflexión final, sostenemos que los resultados preliminares alcanzados (sin pretensión de generalización) permitirían concluir que las prácticas de referencia propuestas y ejecutadas posibilitarían una real y significativa mejora en cuanto a la construcción de conocimiento matemático se refiere (relativo al pensamiento numérico en este caso).

Puntualizamos además que la recreación de prácticas de referencia mejora notablemente el tipo de interacciones que se dan en el aula, así como los vínculos afectivos y colaborativos que allí se generan. Si bien al momento de esta comunicación, ya se han llevado a cabo las actividades N° 2 y N° 3, queda pendiente desarrollar varias otras actividades que se han sido planificadas para el fortalecimiento de los aprendizajes logrados y para la evaluación de estos. Creemos que la experiencia ha resultado -por lo menos hasta aquí- muy fructífera, en cuanto al logro de los objetivos específicos propuestos.

Conclusiones

Como conclusión preliminar, podemos asegurar que las prácticas de referencia propuestas permitieron una construcción significativa de número entero no ligada sólo al conteo ni exclusivamente al intercambio comercial, sino que se sentaron las bases para un concepto más abstracto en cuanto a número se refiere. Incluso, tenemos algunos indicios que señalarían que este tipo de encuadre disminuye y acota los factores generadores de error en el plano algebraico, lo que motiva nuestro seguimiento de los aprendizajes logrados por este grupo y el tipo de articulaciones que podrían hacer con conocimientos posteriores, especialmente con el tema ecuaciones.

Referencias bibliográficas

Camacho-Ríos, A. (2011) *Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial*. Recuperado el 31 de marzo de 2019 de http://ries.universia.net

Cantoral, R. (2016) *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Emmanuele, D. (2016) La deconstrucción del saber matemático del profesor como condición necesaria para la construcción de dicho saber en el alumno. *Revista Conexión, 13,* 41-61.

Emmanuele, D.; Rodil, F.; Vernazza, C. (2018) Concepciones Ontoepistemológicas y Proceso de Deconstrucción del Saber Matemático en la Formación de Profesores de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Volumen 31(2)*,1077-1084.

Reyes Gasperini, D. (2016) *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: Gedisa.

Soto, D. (2010). *Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV del IPN.

Boyer, C. (1986) *Historia de la matemática*. Editorial Alianza Universidad Textos, Madrid.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

HACIA LA REFLEXIÓN CRÍTICA DEL CURRÍCULO UNIVERSITARIO DE ESTADÍSTICA

TOWARDS THE CRITICAL REFLECTION OF THE UNIVERSITY CURRICULUM OF STATISTICS

Gabriela Pilar Cabrera[1]; Liliana Mabel Tauber[2]
Universidad Nacional de Villa María[1], Universidad Nacional del Litoral[2] (Argentina)
gabriela.pilar.cabrera@gmail.com, estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Resumen
Este taller se estructuró en tres ejes centrales. El primer eje se enfocó en hacer visibles las creencias, ideas previas, informaciones y actitudes que tienen los profesores en relación con las finalidades de la educación estadística en la educación superior universitaria y éstas se contrastaron con algunos constructos de la visión socio-política de la Educación Estadística. El segundo eje se orientó al análisis de variadas propuestas curriculares de Estadística o asignaturas afines de universidades de Latinoamérica a partir de una serie interrogantes propuestos por Giroux y Engel. Por último, el tercer eje se situó en el planteamiento del currículo por columnas como opción potente para promover la alfabetización estadística crítica de todo profesional. Se concluyó en la necesidad de una investigación educativa que contribuya a la delimitación de los objetivos y condiciones de enseñanza de la Estadística para la educación de profesionales críticos; situando al docente en su rol de transformador intelectual.

Palabras clave: currículo universitario, pedagogía crítica, alfabetización estadística

Abstract
This workshop was structured in three central focal points. The first one focused on showing teachers' beliefs, previous ideas, information and attitudes with respect to the aims of statistics education at the university, and they were contrasted with some constructs of the socio-political vision of statistics education. The second focal point was addressed to the analysis of several curricular proposals of statistics and related subjects of Latin American universities based on a set of questions proposed by Giroux and Engel. Finally, the third focal point focused on the approach of curriculum by columns as a strong option to promote the critical statistics literacy of every professional. We concluded that there is a need for educational research that contribute to the definition of the objectives and the teaching conditions of statistics for the education of critic specialists, making the teacher play his role of intellectual transformer.

Key words: university curriculum, critical pedagogy, statistics literacy

Introducción

En esta presentación consideramos indispensable la comprensión de la relevancia social, cultural y política (Valero, Andrade-Molina y Montecino, 2015) de la Educación Matemática, ya que describir el mundo a través de números genera conflictos sociales, culturales, económicos y políticos (J. Moreno y L. Moreno, 2010) que el currículo universitario de Estadística debe afrontar vinculándose con los contextos críticos del mundo de los estudiantes (Zapata-Cardona, 2018a).

En este marco entendemos que si bien resulta evidente la presencia de la Estadística en el currículo de la mayoría de las carreras universitarias de Latinoamérica ocurre que, como refiere Zapata-Cardona (2018a, p. 38): "(…) los profesionales con una buena formación estadística no se vuelven por sí mismos ciudadanos críticos y comprometidos" sino que se precisa de una alfabetización estadística concebida desde la visión socio-política de la Educación Estadística (Ferreira, Jacobini, Campos y Wodewotzki, 2011; Campos, 2016; Engel, Schiller, Frischemeier y Biehler, 2016; Engel, 2019 y Zapata-Cardona, 2018a y 2018b).

En consonancia con este planteamiento, cabe aquí el llamado de investigadoras e investigadores en Educación Estadística en la 30° Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) a desarrollar líneas de investigación relacionadas con el currículo de Estadística en la universidad:

> "Partimos de la premisa de que todo ciudadano y ciudadana de cualquier profesión, debe tener un nivel de alfabetización estadística que pueda ayudarle a comprender y criticar de manera significativa la información que llegue a sus manos. Sin embargo, la realidad es que poco se conoce sobre esto en educación superior en Latinoamérica (…) Por otro lado, no se sabe o no está documentado, cuáles saberes se deben articular para diferenciar o distinguir una Estadística para psicólogos, médicos, entre otros; y por consiguiente, no se identifican diferentes niveles de complejidad en los contenidos y profundidad de estudio" (Pinto, Tauber, Zapata-Cardona, Albert, Ruiz y Mafokozi, 2017, p.232).

Asimismo en Engel et al. (2016) se insta a los profesores de Estadística a tomar en cuenta que un estado de Bienestar requiere de una ciudadanía crítica y comprometida capaz de monitorear el progreso de la sociedad; interpelando de este modo a los profesores en su rol de intelectuales transformadores (Giroux, 1997).

En esta dirección resulta inminente incluir en el currículo de Estadística de todas las carreras universitarias, los fenómenos multivariados, datos agregados y datos dinámicos, la lectura y producción de textos ricos y visualizaciones innovadoras emergentes de contextos sociales significativos (Engel 2019).

El taller que presentamos se estructura en tres ejes centrales. El primero de estos ejes se enfoca en hacer visibles las creencias, ideas previas, informaciones y actitudes que tienen los profesores en relación con las finalidades de la Educación Estadística en la educación superior universitaria y éstas se contrastan con algunos constructos de la visión socio-política de la Educación Estadística.

En tanto, el segundo de los ejes se orienta al análisis de variadas propuestas curriculares de Estadística o asignaturas afines de universidades de Latinoamérica, a partir de una serie interrogantes propuestos por Giroux y Engel. Por último, el tercer eje se sitúa en el planteamiento del currículo por columnas como opción potente para promover la alfabetización estadística crítica de todo profesional.

Marco teórico

Desde el campo de la Educación Matemática, la investigación realizada por Valero et al. (2015), ofrece maneras de entender e imaginar los distintos aspectos filosóficos, sociológicos y pedagógicos de las matemáticas escolares. En este estudio, se sigue una línea de investigación que abandona la Psicología Cognitiva como marco interpretativo principal de la investigación en Educación Matemática, en favor de marcos con orientaciones socioculturales. En esta misma línea de pensamiento Engel (2019) sostiene que:

> La instrucción matemática no debe limitarse a la enseñanza de técnicas y términos formales con poca relevancia para el contenido, pero puede incluir en los temas estadístico-cívicos la relevancia del análisis matemático y, por lo tanto, capacitar a los jóvenes para que formen su propia posición basada en la evidencia y puedan participar en procesos públicos de toma de decisiones (p.17).

En esta misma dirección, desde el campo de la Educación Estadística la literatura actual da cuenta de un creciente interés en las investigaciones por la visión crítica y socio-política de esta área de la Educación (Zapata-Cardona, 2018a y 2018b; Campos, 2016; Engel et al., 2016; Engel, 2019; Ferreira et al., 2011; Pinto et al., 2017 y Weiland, 2017) siguiendo para ello, los lineamientos de una pedagogía que “intenta responder a un interrogante central de la educación: ¿qué relación existe entre lo que hacemos en el aula y nuestro esfuerzo por construir una mejor sociedad?” (McLaren, 2005, p.36).

Cabe precisar que en este marco, la alfabetización estadística supone mucho más que enseñar a la gente iletrada habilidades estadísticas básicas, lleva consigo una dimensión investigativa, reflexiva y crítica del mundo globalizado (Ferreira et al., 2011). No sólo busca que los ciudadanos tengan una mejor comprensión de la sociedad, sino que esas habilidades contribuyan a la transformación de la sociedad, es decir, busca la educación de los ciudadanos y ciudadanas (Pinto et al., 2017) y para ello procura el desarrollo de un pensamiento crítico concebido como la “capacidad de problematizar lo que hasta el momento se trató como evidente” (Giroux, 1997, p.108).

Por otra parte, cabe aclarar que la alfabetización estadística a la que nos referimos está estrechamente relacionada con la noción de alfabetización formulada por Freire (Skovsmose, 1999), ya que ésta se convierte en una competencia necesaria para leer y escribir el mundo.
En este contexto, se sitúa a la Educación Crítica como resultado de luchas particulares, conectadas a comunidades específicas, recursos disponibles y a historias, identidades y experiencias del alumnado (Giroux, 2009), entendiendo a la pedagogía como inspiradora para un mundo mejor, para un Estado de Bienestar, una pedagogía que aborda la interpretación como una práctica de intervención en el mundo (Giroux, 2019).

En esta misma dirección Zapata-Cardona (2018a, p.38) ubica “el aprendizaje de la Estadística como un cuerpo holístico que articula conocimiento estadístico, habilidades de pensamiento y procesos investigativos; pero su fin último es la formación de la conciencia ciudadana”. En tanto Engel (2019, p.1) advierte que “en un mundo cada vez más complejo, la participación de los ciudadanos es un recurso esencial para la toma de decisiones públicas a nivel internacional, nacional y local”.

Ahora bien, lo dicho pone de relieve la necesidad de que los profesores sean sensibles a las condiciones históricas, sociales y culturales que contribuyen a las formas de conocimiento y de significado que los estudiantes llevan a la universidad y experimentan en este mundo complejo (Giroux, 2003b, p. 241-242) y que tomen conciencia de que ese conocimiento debe proponerse en un currículo situado en ese contexto social, cultural, económico y político que le dio sentido (Apple 1986).

En otras palabras, los profesores en nuestro rol de intelectuales transformadores tenemos el deber de reflexionar y cuestionar los objetivos generales que nos proponemos a través del contenido que decidimos enseñar y de la forma en qué decidimos enseñarlo (Giroux, 1997; Camilloni, 2007). Se debe insistir en la idea de que “los docentes deben ejercer activamente la responsabilidad de plantear cuestiones serias acerca de lo que ellos mismos enseñan, sobre la forma en que deben enseñarlo y sobre los objetivos generales que se persiguen" (Giroux, 1997, p.176).

> (…) una reconceptualización del conocimiento que los profesores necesitan tener como conocimiento fundamentado y en qué direcciones lo utilizan para informar sus prácticas. De ahí la idea de profesores que se constituyan en estudiosos de sus enseñanzas, dando lugar a un nuevo marco epistémico, una nueva cultura del trabajo que recupere el protagonismo de los profesores en la construcción de conocimiento profesional docente (Edelstein, 2015, p.11).

Por otra parte y en consonancia con el requerimiento de la formación de conciencia ciudadana como fin último de la Educación Estadística, vale la siguiente reflexión de Giroux (1997, p.56)): "En vez de promover la reflexión crítica y la comprensión humana, el modelo de curriculum dominante acentúa la lógica de la probabilidad como definición última de la verdad y del significado". Cabe aquí el señalamiento respecto de que para comprender la idea que nos propone Giroux de curriculum dominante, se precisa de ciertos conocimientos de Estadística; específicamente, la comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad.
Sumado a esto consideramos que para optar por un determinado formato curricular o una combinación de formatos curriculares que posibiliten un currículo de Estadística que promueva la alfabetización estadística en cualquier profesión, se precisa conocer las potencialidades y limitaciones de los diferentes formatos curriculares.

En Camilloni (2016, p.80-86) se detallan el currículo por asignatura, el currículo por disciplina, el currículo con grupo de asignaturas que constituyen bloques, el currículo estructurado en ciclos y el currículo por columnas que esta autora recomienda como el que mejor responde a los problemas actuales de diseño de currículo en la universidad.
Cabe resaltar que la opción por el currículo por columnas supone pensar la formación general, la formación básica y la formación profesional, en un corte longitudinal para el lapso del tiempo curricular previsto para una determinada carrera.

Metodología

Este taller se estructuró en tres ejes centrales. El primero de estos ejes se concentra en la generación de un espacio para que los participantes tomen conciencia, reflexionen y visibilicen sus creencias, conocimientos previos, informaciones y actitudes en relación con las finalidades de la Educación Estadística en la educación superior universitaria.

Esto se llevó a cabo mediante un ejercicio individual de evocación jerarquizada siguiendo las indicaciones de Graca, Moreira y Caballero (2004) y Dany, Urdapilleta y Monaco, (2015). La producción escrita de cada participante se socializó en un marco dialógico que posibilitó la discusión sobre las distintas miradas y marcos teóricos subyacentes confrontándolas con los principales supuestos de la pedagogía crítica en términos de Giroux (1997, 2003a, 2003b, 2009, 2017, 2019) y McLaren (2005) y la perspectiva socio-política de la Educación Estadística antes expuesta en el marco teórico.

El segundo de los ejes propuestos adentra a los participantes en un diálogo con los planes curriculares de Estadística y asignaturas afines de variadas carreras universitarias de distintos países de Latinoamérica. Mediarán este diálogo una serie de constructos expresados a través de interrogantes planteados por Giroux (1997) desde la Pedagogía Crítica y Engel (2019) desde el campo de la Educación Estadística.

A continuación se listan los interrogantes que nos plantea Giroux (1997):

- "¿Qué conocimientos entran a formar parte del curriculum?
- ¿Cómo se producen esos conocimientos?

- ¿Cómo se transmiten esos conocimientos en el aula?
- ¿Qué tipos de relaciones sociales del aula sirven para establecer un parangón y reproducir los valores y normas incorporados en las relaciones sociales aceptadas de otros ámbitos sociales dominantes?
- ¿Quién tiene acceso a formas legítimas de conocimiento?
- ¿A qué intereses sirve este conocimiento?
- ¿Cuáles son las contradicciones y tensiones sociales y políticas mediatizadas a través de formas aceptables de conocimiento y relaciones sociales dentro del aula?
- ¿Cómo intervienen de hecho los métodos corrientes de evaluación para legitimar formas existentes de conocimiento?" (p.58)

Y desde el campo de la Educación Estadística (Engel, 2019):

- "¿Cómo podemos preparar a los estudiantes para que comprendan datos estadísticos e información sobre tendencias y cambios en temas sociales claves como el cambio demográfico, el crimen, el desempleo, la igualdad salarial, la migración, la salud, el racismo y otras áreas de interés para la sociedad?" (p.1)

Cabe señalar que este análisis se realizó en equipos de trabajo para promover la discusión y puesta a consideración de esas creencias, conocimientos previos, informaciones y actitudes que subyacen en nuestra toma de decisiones al diseñar una propuesta curricular determinada.
Los análisis obtenidos por los grupos se socializaron en una dinámica de plenario, volviendo en poner en consideración de todo el grupo las potencialidades y limitaciones que se reconocían en estos planes curriculares, en cuanto al desarrollo de la alfabetización estadística que la formación general de todo profesional debería lograr.

Por último, el tercer eje plantea la determinación de las potencialidades y limitaciones que generaría la decisión de optar por el currículo por columnas (Camilloni, 2016) para desarrollar en los profesionales de cualquier carrera la alfabetización estadística concebida desde una perspectiva socio-política. Para ello se presentan en un marco dialógico, los siguientes interrogantes:

- ¿Qué objetivos nos planteamos al incluir en la formación general de todo profesional el desarrollo de la alfabetización estadística concebida desde una visión socio-política de Educación Estadística?
- ¿Qué dispositivos y estrategias didácticas propician y potencian el desarrollo de la alfabetización estadística en la formación general de todo profesional?
- ¿De qué manera integrar, complejizar y situar en los contextos críticos de los estudiantes el currículo de Estadística a través de la formación general, la formación básica y la formación profesional en todas las carreras?
- ¿De qué manera evaluar y valorar el logro de la alfabetización estadística de un profesional?

Reflexiones finales

Las interacciones entre los participantes, los docentes del taller y los constructos puestos a consideración durante el desarrollo del mismo, permitieron la toma de conciencia de las creencias, informaciones, ideas previas y actitudes que el grupo tenía en relación con las finalidades de la Educación Estadística en la educación superior universitaria.

En este sentido cabe precisar que fueron muy pocos los profesores que evocaron el desarrollo de una conciencia ciudadana o el desarrollo del pensamiento crítico puesto al servicio de la transformación de la sociedad, como fin último de la Educación Estadístico en la universidad. Sumado a esto, quedó en evidencia la concepción difusa que tenía el grupo en relación al pensamiento crítico, la que fue esclarecida a partir de los aportes de Giroux.

Esto también dio lugar al requerimiento de que tanto profesores de Matemática como profesionales de otras áreas, que se abocan a la enseñanza de la Estadística en la universidad, accedan al marco teórico que procuran las nuevas miradas de las pedagogías críticas representadas a través de autores contemporáneos como Giroux y McLaren.

Los participantes manifestaron que sin esos marcos teóricos resulta dificultoso el ejercicio del rol del profesor como transformador intelectual, ya que muchas veces durante las clases se evita poner sobre la mesa de discusión, las crisis del mundo que nuestros estudiantes y nosotros mismos vivenciamos y que reiteradamente son nombradas y descriptas en un lenguaje estadístico cada vez más sofisticado y muchas veces mal utilizado.

En esta misma dirección se consensuó respecto al desafío que supone un currículo de Estadística que interpele a la Estadística misma, que se nutra y contemple las situaciones de la vida que viven nuestros estudiantes y reflexione sobre las crisis que atraviesa nuestro mundo y que son frecuentemente relatadas en números y gráficos estadísticos.

También se destacó la urgencia de incluir la estadística multivariada y modelos multidimensionales al servicio de la lectura crítica de las cifras y estadísticas que la democracia, la política y el poder usan para dialogar con los ciudadanos. En este aspecto los participantes expusieron sus dudas respecto de la complejidad conceptual que suponen estos modelos multidimensionales en contraposición con la necesidad de que un ciudadano pueda comprender el uso que se hace de éstos en la toma de decisiones de las políticas públicas, como por ejemplo, en la determinación de los niveles de pobreza de una nación.

Del análisis de los planes curriculares, surgió la falta de referencias a marcos teóricos que sitúen a la propuesta en un determinado encuadre pedagógico y didáctico. Los planes curriculares en su mayoría consistían en un listado de contenidos organizados desde una lógica lineal, con algunas menciones a la metodología de evaluación y escasa o nula referencia a lineamientos planteados desde la Educación Estadística o desde la Didáctica de la Estadística.

Esto pone en evidencia que muchos de los profesionales que se dedican actualmente a la enseñanza de la Estadística o asignaturas equivalentes en la universidad, no recibieron formación pedagógica específica en su trayecto de formación profesional; su formación es un emergente de su actividad profesional, de tareas de investigación en el área de incumbencia o de formación de posgrado en Estadística. Por otro lado, también se señaló que para el caso de los profesores de Matemática la Educación Estadística esta poco considerada en sus propios trayectos de formación docente.

Otra de las cuestiones que se manifestaron como relevantes se vincula con la necesidad de promover y potenciar la lectura crítica del mundo que se nos presenta en cifras y gráficos estadísticos. Al respecto, una de las estrategias didácticas que surgieron consiste en proponer que los estudiantes de todas las carreras universitarias tengan la experiencia de realizar el análisis crítico del discurso en noticias periodísticas presentadas tanto en periódicos, páginas web, programas de televisión, plataformas virtuales y redes sociales.

Por otro lado, el currículo por columnas resultó una novedad para los participantes del taller, quienes expresaron que esta forma de concebir el currículo en el que se integra de manera continua la formación general, básica y profesional durante el trayecto de la carrera supone un cambio de paradigma respecto del trabajo con asignaturas y/o disciplinas.

En este sentido, el aprendizaje por proyectos, el aprendizaje basado en problemas y las prácticas de extensión universitaria permitirían concretar esa integración de manera vertical y horizontal a lo largo de la carrera. Estos proyectos y actividades darían sentido a los conocimientos, habilidades, competencias, actitudes y valores implicados en una alfabetización estadística que promueva el desarrollo de pensamiento crítico.

También se consideró que un abordaje helicoidal de estos contenidos durante el tiempo curricular de una determinada carrera permitiría, por ejemplo que los modelos multidimensionales, pueden ser presentados de manera intuitiva en la formación general de todas las carreras y de manera formal en una formación básica y profesional para algunas carreras como pueden ser las ingenierías.

Asimismo los participantes señalaron que para la formación básica será necesario definir distintos niveles de especificidad, complejidad y profundidad de los contenidos de Estadística para cada grupo de profesiones afines. Y para la formación profesional, sería necesario propiciar la integración y aplicación de estos contenidos a la resolución de problemas y toma de decisiones del campo de actuación profesional de cada carrera en particular.

En síntesis, el currículo por columnas podría ser una opción innovadora que genere un espacio y un tiempo curricular para abordar de manera conjunta con otros espacios curriculares, situaciones emergentes del contexto significativo de la sociedad actual que se relatan en un lenguaje estadístico y que deberían presentarse desde el inicio de la carrera y hasta la conclusión de la misma.

Ahora bien, esto decantó en una discusión respecto de cómo instrumentar la creación de este espacio y este tiempo curricular donde confluyan en el abordaje de -por ejemplo la lectura de noticias periodísticas con mayor o menor complejidad respecto al lenguaje estadístico utilizado- varios espacios curriculares y se sostengan durante toda la carrera.

Lo dicho pone de relieve la necesidad de una investigación educativa dirigida hacia la reflexión crítica del currículo de Estadística a modo de contribuir a la delimitación de los objetivos y condiciones de enseñanza de la Estadística para la educación de profesionales críticos y en esta dirección es que se propuso este taller.

Queda continuar e implicarse en un proceso de revisión, reflexión e investigación del currículo de Estadística en la educación universitaria, que le otorgue una visión social y política para todas las carreras; siendo éste el común denominador. En tanto y en particular, en cada carrera lo específico se debería desagregar en diferentes niveles de profundización y complejidad.

Queda camino por recorrer, preguntas que responder. En ello estamos los que hacemos nuestras tesis de maestría y doctorado, los investigadores e investigadoras y los docentes en sus clases frente a sus planificaciones y decisiones didácticas cotidianas. Son estas, tareas que corresponde a nuestro rol de transformador intelectual; tareas que han de promulgarse, propagarse y hacerse piel en cada uno de los que optamos por una educación que promueva la esperanza.

Referencias bibliográficas

Apple, M. (1986). *Ideología y currículo* (*101).* Madrid: Ediciones Akal.

Camilloni, A. (2007). *El saber didáctico*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Camilloni, A. (2016). Tendencias y formatos en el currículo universitario. *Revista Itinerarios educativos*, (9).

Campos, C. R. (2016). *Towards Critical Statistics Education. Theory and practice.* Saarbrücken: Lambert Academic Publishing.

Dany, L., Urdapilleta, I., & Monaco, G. L. (2015). Free associations and social representations: some reflections on rank-frequency and importance-frequency methods. *Quality & Quantity*, *49*(2), 489-507. Recuperado de: https://scholar.google.pt/scholar?cluster=6332878720511381962&hl=es&as_sdt=0,5

Edelstein, G. (2015). La enseñanza en la formación para la práctica. *Educación, Formación e Investigación*, *1*(1). Recuperado de: http://ppct.caicyt.gov.ar/index.php/efi/ article/view/6219

Engel, J., Schiller, A., Frischemeier, D., & Biehler, R. (2016). Statistics education and monitoring progress towards civil rights. In *Promoting Understanding of Statistics about Society: Proceedings of the Roundtable Conference of the International Association of Statistics Education*.

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Recuperado de: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.htm

Ferreira, D. H. L., Jacobini, O. R., Campos, C. R., & Wodewotzki, M. L. L. (Junio, 2011). O ensino e a aprendizagem de conteúdos estatísticos por meio de projetos (CO). En *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, Brasil. Recuperado de: https://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/ 839/571

Giroux, H. (1997). *Los profesores como intelectuales hacia una pedagogía crítica del aprendizaje* (Reimpresión de Primera edición en español. Trad. I. Arias). Barcelona: Paidós. Recuperado de: http://funama.org/data/PEDAGOGIA%20CRITICA/ giroux/Los%20Profesores%20como%20Intelectuales.pdf

Giroux, H. (2003a). *La escuela y la lucha por la ciudadanía. Pedagogía crítica de la época moderna.* (Segunda edición en español. Trad. M. Ubasart de la primera edición en inglés). México: Siglo XXI.

Giroux, H. A. (2003b). *Pedagogía y política de la esperanza*. *Teoría, cultura y enseñanza* (Trad. H. Ponce de la 1a. ed. en inglés). Buenos Aires: Amorrortu.

Giroux, H. (2009). El reto y promesa de la pedagogía crítica en la nueva era de la información: una entrevista con Henry Giroux. *Education in the Knowledge Society (EKS)*, *10*(3), 243-255. Recuperado de: http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_ numero_10_03/n10_03_giroux.pdf

Giroux, H. (2017). Pensando peligrosamente: el rol de la Educación Superior en tiempos autoritarios. *Revista de Educación*, *12*(12), 13-24. Recuperado de: https://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ

Giroux, H. (2019). Hacia una pedagogía de la esperanza educada bajo el capitalismo de casino. *Pedagogía y Saberes*, (50), 153-158. Recuperado de: https://doi.org/10.17227/pys.num50-9508

Graca, M.; Moreira, M. & Caballero, C. (2004). Representacoes sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem: um estudo exploratório. Revista Investigacoes em Ensino de Ciencias, *9* (1). Recuperado de: http://www.if.ufrgs.br/ienci/

Pinto, J., Tauber, L., Zapata-Cardona, L., Albert, A., Ruiz, B. y Mafokozi, J. (2017). Alfabetización estadística en educación superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 30,* 227-235*.*

McLaren, P. (2005). *La vida en las escuelas. Una introducción a la pedagogía crítica en los fundamentos de la educación* (4a. edición en español. Trad. M.M González Arena y S. Guardado del Castro de la 4a. edición en inglés). Buenos Aires: Siglo XXI.

Moreno, J. y Moreno L. (2010). *La importancia de leer el mundo a través de las gráficas socialmente relevantes*. En 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, p. 443-448. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1068/1/443 _La_Importancia_de_Leer_El_Mundo_Asocolme2010.pdf

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica* (Trad. P. Valero). Una empresa docente. Universidad de Los Andes, Bogotá. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/673/1/Skovsmose1999Hacia.pdf

Valero, P., Andrade-Molina, M., & Montecino, A. (2015). Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(3), 7-20. doi: 10.12802/relime.13.1830

Weiland, T. (2017). Problematizing statistical literacy: An intersection of critical and statistical literacies. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 33–47.

Zapata Cardona, L. (2018a). *Enseñanza de la estadística desde una perspectiva crítica. Yupana, (10*) 30-31. https://doi.org/10.14409/yu.v0i10

Zapata-Cardona, L. (2018b). Students' construction and use of statistical models: a socio-critical perspective. *ZDM, 50*(7), 1213–1222. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0967-8

ALTERNATIVA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA APRENDIZAJE DE LA BIOESTADÍSTICA. CARRERA DE MEDICINA

DIDACTIC ALTERNATIVE TO DEVELOP THE TEACHING LEARNING PROCESS OF BIO-STATISTICS; MEDICAL DEGREE

Luis Alberto Escalona Fernández
Universidad de Ciencias Médicas de Holguín (Cuba)
luisalbert@infomed.sld.cu

Resumen
Actualizar los métodos, procedimientos y vías para resolver problemas, los cuales constituyen estereotipos de la Estadística Inferencial, en función de estimular el razonamiento del estudiante de la carrera de Medicina, lo que se ilustra mediante la resolución de problemas. Se emplean los métodos teóricos: análisis-síntesis, inducción-deducción y abstracción-concreción. Construcción de curvas de la distribución normal, procesos de comprensión, explicación e interpretación. Se elabora una alternativa didáctica para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Bioestadística, fundamentalmente la Estadística Inferencial. Se integran y se sistematizan conceptos de variable aleatoria, distribución normal, probabilidad, dominio de aceptación, dominio de rechazo, estimaciones puntuales, entre otros. A través de situaciones de salud a enfrentar por el Médico General en su quehacer profesional, las cuales evidencien las necesidades de interpretar los errores de primero y segundo género: α y β. Se aplican programas informáticos profesionales para visualizar y simular los resultados alcanzados.

Palabras clave: bioestadística, razonamiento, enseñanza, aprendizaje, inferencia estadística

Abstract
This work is aimed at updating methods, procedures and ways to solve problems, which constitute stereotypes of the Inferential Statistics, in order to stimulate the medical student's reasoning, what is shown through problem solving. Theoretical methods are used: analysis-synthesis, induction-deduction and abstraction-concretion, as well as construction of normal distribution curves, processes of understanding, explanation and interpretation. A didactic alternative to develop the teaching-learning process of Biostatistics, mainly Inferential Statistics, is designed. Among others, concepts of random variable, normal distribution, probability, acceptance domain, rejection domain, and point estimates, are integrated and systematized through health situations to be faced by the General Practitioner in his professional work, which evidence the needs to interpret the errors of the first and second genders: α y β. Professional computer programs are used, to visualize and simulate the outcomes that have been achieved.

Keywords: biostatistics, reasoning, teaching, learning, statistical inference

Introducción

En la carrera de Medicina se imparte la disciplina Informática Médica, la cual se compone por las asignaturas Metodología de la Investigación y Bioestadística y se desarrolla en los primeros años de la carrera.

En el programa de la asignatura de Bioestadística, se fundamenta el siguiente propósito, preparar a los estudiantes en la recogida, procesamiento, presentación e interpretación de los datos de salud, mediante un uso eficiente de herramientas estadísticas diseñadas para este fin. Por otro lado, se enfatiza lo importante de llevar al entendimiento de los estudiantes la necesidad de identificar cuándo necesita ayuda de un especialista en bioestadística, actuar según las recomendaciones recibidas por este e interpretar los resultados producto del procesamiento estadístico básico (Cuba, 2016).

En el análisis de los objetivos generales propuestos en el programa de esta asignatura, se destacan entre otros: Desarrollar la capacidad organizativa y el hábito de proceder reflexivamente en el enfrentamiento de los problemas relacionados con el tratamiento metodológico, estadístico y computacional de la información de salud. Interpretar los fundamentos de la teoría de las probabilidades y el muestreo como sustento de la Inferencia estadística. Analizar el propósito de la Inferencia estadística y de sus ramas: Estimación y Prueba de hipótesis en el proceso de investigación científica.

Al profundizar en los objetivos del Tema de Estadística Inferencial se muestra una correspondencia con los objetivos generales de la asignatura, así como los contenidos propuestos para el Tema en cuestión, elemento que precisa la revisión de las orientaciones metodológicas sobre el tema, donde se destaca:

Hacer hincapié en los aspectos conceptuales y generales en casos concretos de aplicación de técnicas de la inferencia estadística en la investigación biomédica sin detenerse en fórmulas ni métodos específicos, las actividades deben estar orientadas a responder qué es, cuándo y por qué se utiliza, cómo se interpreta su resultado y qué significado tiene para el conocimiento (Cuba, 2016).

Los elementos analizados anteriormente, nos permite afirmar que no se comparte la orientación dada en el programa, porqué para hacer hincapié, insistir firmemente, perseverar y empeñarse es profundizar en el conocimiento en aspectos conceptuales y generales, en casos concretos de aplicación de las técnicas de la inferencia estadística en la investigación biomédica, luego se plantea sin detenerse en las fórmulas, los métodos específicos, las actividades deben estar orientadas a responder qué es, cuándo y por qué se utiliza, cómo se interpreta su resultado y qué significado tiene para el conocimiento.

Para responder estas interrogantes es necesario dominar, los conceptos y definiciones, los métodos, los procedimientos, los algoritmos, los cuales facilitan la interpretación del problema que se resuelve (Cuba, 2016).

Esta orientación se contrapone a los objetivos generales y por temas, así como a las habilidades descritas en el programa de la asignatura. Para utilizar como ejemplos aquellos que involucren parámetros y estadígrafos conocidos por los estudiantes como son la media *aritmética* y la proporción o el porcentaje de las variables de interés, se deben escoger ejemplos cuidadosamente seleccionados por su simplicidad y la importancia de los resultados extraídos de la literatura científica disponible. Se asume la importancia que tiene estas variables y las relaciones a establecer, desde los componentes: Académico, laboral e investigativo.

Se sugiere al profesor que cree un banco de aplicaciones donde se utilicen técnicas de Inferencia estadística, de forma tal que pueda distribuir a los estudiantes para que valoren la importancia de aplicar dicha técnica en casos precisos y como su resultado de la interpretación en la toma de decisiones (Cuba, 2016).

Se consideran orientaciones necesarias, precisas e importantes a tener en cuenta por parte de los profesores de esta asignatura y el estricto cumplimiento de todas; por otra parte, no se limitan la creación y las potencialidades de los estudiantes de la carrera de Medicina, se alienta la capacidad creativa de los profesores y estudiantes.

En general, se precisan y se aclaran orientaciones y regulaciones importantes para el desarrollo óptimo del plan de estudio de la carrera de Medina, lo cual genera necesidades a resolver desde el punto de vista didáctico y científico-metodológico.

En el proceso de enseñanza aprendizaje, no se deben fijar patrones en la forma de proponer y resolver los ejemplos, los ejercicios, y los problemas para evitar estereotipos, los cuales se trasmiten entre los profesores de una disciplina durante años, basado en los resultados obtenidos.

Constituye el propósito de este trabajo: Proponer una alternativa didáctica para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de la Bioestadística en la Carrera de Medicina.

Desarrollo

Se emplean los métodos teóricos: análisis-síntesis, inducción-deducción, abstracción-concreción. El método para construir curvas de funciones elementales, procesos de comprensión, explicación e interpretación. Se aplican métodos, procedimientos y algoritmos matemáticos y estadísticos.

Los métodos empíricos aplicados se enmarcan principalmente en la observación participante y no participante, a fin de profundizar en el problema y obtener información sobre las dificultades principales que afectan el proceso de enseñanza aprendizaje, a partir de las clases, como formas de organización docente.

Se desarrollan talleres de socialización para valorar la viabilidad de la efectividad de la alternativa didáctica propuesta.

La población está constituida por 21 profesores de la asignatura Bioestadística del primer año de la carrera de Medicina, se realizaron 15 visitas a clases al azar. Se revelan en las actividades docentes desarrolladas por el colectivo de profesores las siguientes dificultades:

- No siempre se propician en las diferentes actividades docentes variantes en la manera de analizar y utilizar los conceptos estudiados en función de estimular el pensamiento creador en problemas que así lo exigen.
- No existe una estrategia de trabajo para profundizar en alternativas que desarrollen capacidades creativas en los estudiantes, las cuales se apoyen en programas informáticos profesionales para visualizar los resultados e interpretarlos.
- Es insuficiente la utilización de paquetes estadísticos profesionales.
- No existe un banco de problemas que rompa con los esquemas de la enseñanza tradicional de la estadística inferencial.

Por otro lado, se efectúa una revisión documental del programa de la disciplina y la asignatura, en general el plan de estudio de la carrera de Medicina, revisión científica de libros y artículos referente al tema: Introducción a la estadística inferencial.

Se proponen diferentes situaciones de la práctica médica, las cuales parten de problemas existentes en la comunidad, con datos reales tomados de los diferentes niveles de atención de salud, donde el estudiante pueda apreciar las amplias posibilidades de aplicación de los contenidos de la asignatura a la práctica médica que realizan.

Estas situaciones deben cumplir algunos requerimientos (Pérez, 2015):

- Elaborarse de forma tal que reflejen, en mayor o menor medida, los rasgos de la actividad cognoscitiva.
- Tener siempre un carácter productivo y no reproductivo, de manera que inciten al estudiante a reflexionar y poner en función sus conocimientos y capacidades, a la vez que se desarrolle en un plano cualitativamente superior.
- Ser tan diversas como sea posible para permitir posibilidades de elección y favorecer la toma de decisiones.

Para dar solución a las situaciones de la práctica médica se requiere utilizar en el proceso de enseñanza aprendizaje métodos que desarrollen el razonamiento, pues ello permite que los estudiantes se apropien de un modelo de estilo de pensamiento sólido por ser desarrollador, de esta forma los contenidos adquieren una mayor significación para los estudiantes al comprobar la utilidad de los mismos en el desempeño profesional, en una vinculación con las habilidades generales y específicas de la profesión y los problemas profesionales que ha de resolver en su desempeño, en relación con las exigencias sociales expresadas en el modelo del profesional.

Las potencialidades que brindan los contenidos de la disciplina permiten determinar su significación en la solución de los problemas de salud; para ello se deben contextualizar en la práctica médica y reconocer los nexos que se producen entre los mismos.

A partir de las consideraciones anteriores se ilustran las soluciones de los siguientes problemas, los cuales se orientan previamente, como trabajo independiente, lo cual garantiza la participación activa y creativa de los estudiantes:

Problema 1

Los datos contenidos en la certificación técnica de un medicamento muestran su efectividad en el 80 % de los casos para curar cierto tipo de dermatitis. Como resultado de las modificaciones de la terapéutica, se espera un aumento de la efectividad del mismo. Para verificar esta afirmación se efectúan comprobaciones se seleccionan al azar 64 pacientes, de ellos resultaron curados 57 con modificaciones en el tratamiento.

Supongamos que la muestra de los pacientes se ha obtenido, a partir de una población madre distribuida normalmente cuya proporción es $P_0 = 0.80$, cuya varianza es: $\sigma^2 = 0.0025$; es decir $N(p = 0.8; \sigma^2 = 0.0025)$ (Efímov, Korakulin, Pospélov, Teréschenko, Vokólov, Zemskov, Zolotarev, 2014) y (Koroliuk, 2016).

Utilice el criterio de significación para verificar la hipótesis: Las modificaciones de la terapéutica no ejercen influencias en el aumento de la efectividad del medicamento. Utilice un nivel de significación del 5% (Colectivo de autores, 2004) y (Olmedo y Ariza, 2012).

Problema 2

Considere válidos los datos del ejercicio anterior, supongamos que junto a la hipótesis H_0: $p = 0.8$, se examina la hipótesis alternativa H_1: $p = 0.9$. En calidad de estadística del criterio se toma la proporción muestral $\bar{p}$. Se sabe del problema 1 que el dominio crítico está dado por la desigualdad $\bar{p} > 0.882$. Determine la probabilidad de los errores de primer y segundo géneros α y β para el criterio del dominio crítico.

¿Cuál es la afirmación general, desde el modelo probabilístico acerca del comportamiento de las variables aleatorias que se describen en el fenómeno de estudio, es decir la tendencia de las proporciones, según la efectividad del medicamento para curar cierto tipo de dermatitis?

Es posible elaborar para el estudio independiente problemas que modelan el comportamiento de la efectividad de un medicamento seleccionado, con una significación del 0.01 (1 %); escoger al azar una muestra grande (conveniente).

Solución del problema 1:

1) Se comprueba la hipótesis.

> H_0: p = 0.8. Se aplica la terapéutica clásica, la cual no ejercen influencias en el aumento de la efectividad del medicamento.
> H_1: p > 0,8. Se aplica la terapéutica modificada, la cual ejerce influencia en el aumento de la efectividad del medicamento.

2) Se selecciona α = 0.05

3) $Z_{\text{cal}} = \frac{\frac{57}{64} - 0.8}{\sqrt{(0.8)*(0.2)/64}} = \frac{0.89 - 0.8}{0.05} = \frac{9}{5} = 1.8$

4) $Z_{\text{tab}} = 1.64$. Como el valor muestral de la estadística del criterio (el estadígrafo) pertenece al domino crítico ($Z_{\text{tab}} = 1.64 < Z_{\text{cal}} = 1.8$). La hipótesis nula se rechaza:

Conviene suponer que las modificaciones de la terapéutica causan (originan) un aumento de la efectividad del medicamento con nivel de significación de 0.05 (5%).

La frontera $\bar{p}$ del dominio crítico para la estadística inicial X (Variable aleatoria para proporciones) del criterio puede ser obtenida a partir de la relación

$$\frac{\bar{p} - 0.8}{\sqrt{(0.8) * (0.2)/64}} = 1.64; \ \bar{p} = 1.64 * \frac{0.4}{8} + 0.8; \ \bar{p} = 0.082 + 0.8 = 0.882$$

De donde se obtiene $\bar{p} > 0.882$, o sea, el dominio crítico la estadística (estadígrafo) $\bar{p}$ está definida por la desigualdad $\bar{p} > 0.882$.

Lo que significa que cualquier muestra de estudio, cuya proporción muestral resulte mayor 0.882, difiere de la proporción poblacional $P_0 = 0.80$; con nivel de significación 5 % (α = 0.05).

Solución del problema 2: La probabilidad del error de primer género. La estadística $\bar{p}$ del criterio, a condición de que sea cierta la hipótesis H_0: p = 0.8, es una distribución normal: N (p = 0.8; $\sigma = \sqrt{(0.8) * (0.2)/64}$) $\sim N(p = 0.8; \sigma = 0.05) \propto = P[\bar{p} > 0.882 \,/\, H_0\text{: p} = 0.8] = 0.0505 \approx 0.05$

De acuerdo con el criterio aceptado, significa que el 5 % de los medicamentos con efectividad del 80 %, se clasifican con el 90 % de efectividad.

A condición de que sea justa la hipótesis alternativa H_1: p = 0.9, la estadística $\bar{p}$ tiene distribución normal N (p = 0.9; σ = 0.05). La probabilidad del error de segundo género es igual a: $\beta = P[\bar{p} < 0.882/H_1\text{: p} = 0.9] = 1 - \emptyset(0.56) = 1 - 0.7126 = 0{,}2877$

Mejor precisión: $[\bar{p} < 0.85 \,/H_1\text{: p} = 0.9] + P[0.85 < \bar{p} < 0{,}882 \,/H_0\text{: p} = 0.8]$

Según la representación de las densidades de las distribuciones de probabilidad normal de las proporciones de la efectividad del medicamento y su aumento mediante modificaciones en la aplicación de la terapéutica: N (p = 0.8; σ =0.05) y N (p = 0.9; σ =0.05)

$$P[\overline{p} < 0.85 /H_1\text{: p} = 0.9] = 1 - 0.8413 \approx 0.16$$
$$P[\overline{p} > 0.85 /H_0\text{: p} = 0.8] = \emptyset\left(\frac{0.85 - 0.8}{0.05}\right) = \emptyset\left(\frac{0.05}{0.05}\right) = \emptyset(1) = 0.16$$
$P[0.85 < \overline{p} < 0{,}882 /H_0\text{: p} = 0.8] = 0.16 - 0.05 = 0.11$. Es decir que:
$$\beta = P[\overline{p} < 0.882 /H_1\text{: p} = 0.9] = 0.16 + 0.11 = 0.27$$

De acuerdo con el criterio aceptado, significa que el 27 % de los medicamentos con efectividad del 90 %, se clasifican con el 80 % de efectividad.

Las probabilidades de los errores de primero y segundo géneros se muestran a continuación en la figura 1, las curvas:

$N(p = 0.8; \sigma = 0.05), color\ rojo\ y\ N(p = 0.9; \sigma = 0.05\ ),\ color\ azul,$ densidades de distribución de la estadística del criterio, el eje horizontal y la recta vertical $x_1 = 0.882$. Así como las áreas de las regiones conformadas $\alpha = 0.05$ y $\beta = 0.27$.

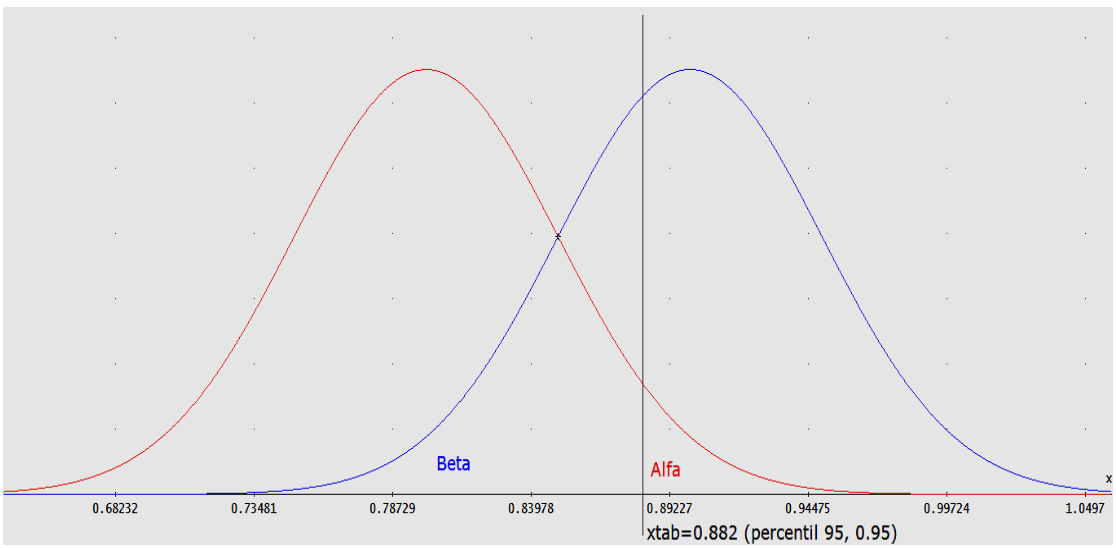


Figura 1. Modelo matemático (estadístico) está representado por las densidades de las distribuciones probabilísticas normales de la proporción (de la efectividad del medicamento para curar cierta dermatitis): N ($p = 0.8$; $\sigma = 0.05$), en color rojo y el aumento de la proporción, mediante modificaciones en la aplicación de la terapéutica: N ($p = 0.9$; $\sigma = 0.05$), color azul.

Se ha modelado el comportamiento de la variable aleatoria X_1: Proporción (p) de la efectividad de un medicamento para curar cierto tipo de dermatitis y X_2: Proporción del aumento de la efectividad del medicamento en determinadas condiciones.

Problema 3. Se considera una población conformada por el Adulto Mayor perteneciente a un Policlínico, el promedio de pulsaciones por minutos es de 80, estas se registran antes de realizar ejercicios físicos sistemáticos. Seis meses después, se seleccionan 25 adultos mayores al azar, el promedio de las pulsaciones es de 78 pulsaciones por minutos y desviación estándar de 4 pulsaciones por minutos.

1. Plantee las afirmaciones H_0 y H_1.
2. Determine la probabilidad de los errores de primer y segundo géneros (α y β) para el criterio del dominio crítico.

3. Describa el comportamiento del promedio de las pulsaciones por minutos del Adulto Mayor en la población que practican ejercicios físicos sistemáticos en el Policlínico, según las evidencias analizadas (problema propuesto para el estudio independiente).

Según los resultados, el 95 % de los medicamentos poseen una efectividad del 80%; pero el 5% de estos sobrepasan esa efectividad de manera natural. Si se aplican modificaciones en la aplicación de la terapéutica al total de los medicamentos con efectividad del 80 %, el 27 % no alcanzan el 90 % de efectividad.

Se simula el comportamiento de un lote de 10 000 unidades, según el modelo probabilístico que lo representa, lo simboliza, lo significa, y lo interpreta (Olmedo y Ariza, 2012).

La importancia de la simulación es que precisa la panorámica general del pronóstico: Resultan efectivas: 8000 unidades; no efectivas: 2000 unidades, es decir realmente curan 8000 unidades, de ellas 400 unidades sobrepasan el 80 % de efectividad. El 27 % de 8000 unidades efectivas: 2 160 unidades, las cuales no alcanzan el 90 % de efectividad, a pesar de las modificaciones en la terapéutica. Es decir: 8000 - 2160 = 5840 unidades alcanzan el 90 % de efectividad con modificaciones en la terapéutica.

Incluir el análisis de situaciones de salud para distribuciones normales (distribuciones de medias aritméticas) de forma análoga. La simulación de las situaciones se considera de gran ayuda para comprender, explicar e interpretar estas, manera tal que pronostica aproximadamente el comportamiento de la variable aleatoria.

Las alternativas para desarrollar capacidades creativas en los profesores y estudiantes, los problemas a elaborar deben apoyarse en situaciones de salud a enfrentar por el Médico General, cuyos resultados e interpretaciones se visualicen, mediante programas informáticos profesionales, los cuales se orientan como tareas docentes a desarrollar en el estudio independiente.

Referencias bibliográficas

Calero Hechavarría M, Rodríguez Corona O, Armas Pupo YR, Núñez Rojas Y. (2013). Propuesta de tareas docentes para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Metodología de la Investigación. *Correo Científico Médico*. 17 (1), 25-28

Colectivo de autores. (2004). *Informática Médica. Tomo II. Bioestadística*. Centro de Cibernética Aplicada a la Medicina. La Habana: Ciencias Médicas.

Cuba. (2016). *Perfeccionamiento del plan de estudio D de la Carrera de Medicina*. La Habana: MINSAP.

De la Horra J. (2012). *Estadística Aplicada* [Internet]. España: Díaz de Santos.

Efímov A, Korakulin P, Pospélov P, Teréschenko A, Vokólov E, Zemskov V, Zolarev, Yu. (2014). Problemas de las Matemáticas Superiores. Tomo III. Moscú: Mir.

Fardales Macías V, Diéguez Batista R, Puga García A. (2016). Una aproximación a las concepciones que prevalecen en la formación estadística del profesional médico. *MediSur.12 (1)*, 13-24

Herman A, Notzer N, Libman Z, Braunstein R, Steinberg DM. (2008). Statistical education for medical students-Concepts are what remain when the details are forgotten. *Statistics in Medicine. 27*(12), 67-72.

Infante Y, Bayés E. (2016). *Propuesta de un folleto de ejercicios de Bioestadística*. Medisan 20 (12), 2495-2500.

Koroliuk V. (2016). *Manual de la teoría de probabilidades y estadística matemática*. Moscú: Mir.

Lipkus IM, Peters E. (2009). Understanding the role of numeracy in health: proposed theoretical framework and practical insights. *Health EducBehav. 36*(6), 1065-1081.

Numa M, Martín A, Diéguez R, Sánchez A. (2014). La formación estadística universitaria orientada a la solución de problemas profesionales. *Pedagogía Universitaria 19*(1), 90-107.

Olmedo V, Ariza R. (2012). *Matemáticas en medicina: una necesidad de capacitación. Medicina Interna de México, 28*(3), 278-281.

Pérez, S. (2015*). El razonamiento hipotético deductivo en la formación del médico general.* Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico de Holguín. Cuba.

Swift L, Miles S, Price GM, Shepstone L, Leinster SJ. (2009). *Do doctors need statistics? Doctors´ use of and attitudes to probability and statistics. Stat Med. 28*(15), 1969-81.

Tavares Paes A. (2010). Teaching statistics to physicians: a five-year experience. ICOTS 8.

Zimmermann W. & Cunningham S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington: Mathematical Association of AmericaWashington.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

PRÁCTICAS DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LA ACTUALIZACIÓN CONTINUA DE PLANES DE ESTUDIO

MATHEMATICS EDUCATION TEACHERS' PRACTICE IN THE CONTINUOUS CURRICULUM UPDATING

Rita Guadalupe Angulo Villanueva, Isnardo Reducindo Ruiz, Nehemías Moreno Martínez
Universidad Autónoma de San Luis Potosí (México)
rodriguezcenobia@gmail.com, isnardo.rr@gmail.com, nehemias_moreno@live.com

Resumen
La actualización curricular continua es una concepción y una metodología para la reformulación cotidiana de programas de estudio, se propone como alternativa a la actualización periódica de planes de estudio. Esta es una práctica curricular que ha llevado a los currículos oficiales a ser letra muerta en la realidad aúlica, cada profesor actualiza cotidianamente sus programas en atención a criterios que es preciso evidenciar y sistematizar. Se comenta una experiencia piloto en esta metodología en la Licenciatura en matemática educativa de una universidad mexicana; se expone la metodología y el dispositivo que la hace posible: una base de datos en WEB 2.0

Palabras clave: actualización curricular, educación superior, matemáticas

Abstract
Continuous curriculum updating is a conception and a methodology that allows the daily renewal of the syllabus. It is proposed as an alternative to the periodic updating of the curriculum. This is a curricular practice that has led the official curriculum to become inoperative into classroom reality. Each professor daily updates the syllabuses according to some criteria that need to be evidenced and systematized. This paper reports on a pilot experience using this methodology in the Mathematics Education Degree in a Mexican university; the methodology and the technological devise that makes it possible are shown: a database in Web 2.0

Key words: curriculum updating, higher education, mathematics

Introducción

Las universidades mexicanas han sido sometidas desde los noventas a procesos de innovación, particularmente de cambio curricular. La mayoría de las reformulaciones curriculares son efectuadas por una comisión destinada para ello, en tiempos relativamente cortos y sin tener como soporte estudios previos. Dichas reformulaciones carecen del conocimiento analítico acerca de cómo el currículum explícito o plan de estudios es llevado a las aulas y modificado en ellas. Nos hemos cuestionado acerca de una actualización curricular más pertinente en cuanto a los contextos a los que responde: internacional-nacional-estatal, de las prácticas profesionales vigentes, de los avances científicos, tecnológicos y disciplinares. En el hacer cotidiano de las universidades, la realidad es que cada profesor lleva a cabo constantes modificaciones a sus programas (y por tanto al plan de estudios). A este conjunto de modificaciones puede reconocérsele como parte del currículum vivido. El problema con esas modificaciones es que no son registradas ni sistematizadas, cuestión que lleva a la pérdida de valiosos saberes que el profesor maneja cotidianamente tanto sobre los programas en sí, como sobre la afectación del proceso de enseñanza aprendizaje sobre el currículum oficial. Cuando esta situación se repite una y otra vez, semestre tras semestre genera el distanciamiento entre currículum vivido y currículum explícito y que el profesor considere que su participación en la construcción del curriculum es irrelevante. A largo plazo el currículum explícito se torna en letra muerta que –en teoría– norma la vida escolar de una universidad pero que en los hechos no es más que una ficción. A las modificaciones asistemáticas al currículum le hemos llamado actualización curricular continua (ACC). En consecuencia, el *problema* de esta investigación es la distancia entre currículum vivido y currículum explícito u oficial.

Ante esta serie de problemas nos hemos cuestionado si ¿Es factible recuperar las modificaciones continuas al currículum que se realizan en las aulas?

Tenemos como *supuesto de trabajo* que es factible llevar a cabo una actualización curricular continua mediante la formulación de una metodología *ad hoc* para recuperar el currículum vivido, dicha metodología debe auxiliarse de un dispositivo tecnológico que garantice la sistematización de los cambios curriculares. Tal metodología ya ha sido planteada y el dispositivo tecnológico diseñado (Base de datos en Web 2.0 (BDW). El *propósito* de la investigación es probar la metodología de ACC y la BDW así como difundir su utilización mediante talleres presenciales y/o virtuales a dos universidades del Estado de San Luis Potosí (UASLP y UPSLP), de la región (Zacatecas) y de dos grupos de investigación de otros países (España y Chile); en el período agosto 2018 y hasta marzo del 2019 se levantaron los datos en las cinco instituciones. El *objetivo* de este artículo es presentar los resultados de la prueba piloto de la Base de datos.

Marco teórico y referencial

Con respecto a los estudios realizados acerca de la modificación curricular continua, se tiene como referencia la noción de modificación continua de contenidos (Angulo, 2006), así como la necesidad de una metodología de modificación continua y la propuesta de una base de datos en formato ACCES que en su momento fue probada con carreras de geología de varias universidades del país (Angulo, 2006), en aquel tiempo se reconoció como principal dificultad el manejo de bases de datos mediante dicho programa y la dificultad de su recopilación. Posteriormente, Angulo (2007) establece la modificación continua como una alternativa para la actualización curricular a la vez que para la intervención curricular en el nivel universitario. A lo largo de este proceso fue posible establecer una conceptuación curricular acerca de ACC como una práctica curricular que se integra al discurso emergente acerca de los currículum universitarios (Angulo, 2017a). Se elaboraron categorías para un acercamiento al currículum de matemática educativa (2017b).

Sobre los estudios acerca del currículum en matemática educativa, existe muy poco trabajo de reflexión teórica en español en torno a la investigación sobre currículum (Angulo, 2017b) si bien hay un poco más sobre los currículum que se emplean en la formación de profesores de matemáticas (Dolores y Hernández, 2014). Valenzuela y Dolores (2012) señalan que no existen en México investigaciones sobre el currículum escolar matemático. Luis Rico (1998) señala que el currículum tiene una gran complejidad y requiere trabajarse a partir de un marco conceptual que permita la organización de los contenidos, según el autor una de las fuentes más importantes para dicha organización conceptual son la epistemología e historia de las matemáticas. Según Angulo (2017b) la mayor parte de los estudios sobre currículum para la formación de profesores en matemáticas se centran en la dimensión práctica del mismo, es decir en el proceso enseñanza aprendizaje, pero obvian una base teórica que permita no sólo diseñarlo y evaluarlo sino teorizar acerca de las relaciones del currículum matemático con los currículum de otras áreas de conocimiento. En la dimensión internacional, el panorama es distinto, Li y Lappan (2014) sostienen que cada vez más existen estudios en torno al desarrollo y análisis del currículum y presentan en su libro estudios acerca de experiencias curriculares en más de diez naciones además de análisis teóricos acerca de investigación en sí. Señalan que el currículum es un sistema, a la vez que artefacto, que no puede separarse del contexto. Schoenfeld (2014) sostiene que el cambio curricular está necesariamente inmerso en el contexto cultural y que trasladar sin más el currículum de un país a otro no es factible, enfatiza que el conocimiento de los sistemas escolares y sus currículums en otros países permite, a partir de la contrastación, la creación y mejoramiento de la currícula propia.

Desde la perspectiva crítica que sustenta este trabajo, se parte de la consideración de que el currículum es un dispositivo de poder a la vez que un discurso, mismo que ubicamos en la noción de articulación, entendida como “todas aquellas prácticas que establecen relaciones entre elementos o posiciones diferenciales al interior de un discurso” (Laclau y Mouffe, 1988, p. 177), en este caso hablamos de prácticas curriculares como la aplicación acrítica de cambios curriculares, el traslado de currículas de otros países sin mediar la reflexión y la necesaria adaptación o, incluso, la generación de modelos curriculares propios. “Llamaremos discursos curriculares a la articulación entre prácticas curriculares, articulación que puede darse en tensión o en alianzas diversas; así consideraremos al discurso curricular del Estado en tensión con los discursos emergentes en las universidades” (Angulo, 2017a).

Se considera que el currículum es una “síntesis de elementos culturales…que conforman una propuesta político-educativa pensada e impulsada por diversos grupos y sectores sociales cuyos intereses son diversos y contradictorios…” (De Alba, 1991, p. 59). Hemos llamado discursos curriculares a la articulación entre prácticas curriculares (Angulo, 2017a), articulación que puede darse en tensión o en alianzas diversas (De Alba, 1991). Dentro de estos discursos reconocemos a la adecuación continua del currículum que existe en las universidades frente a disposiciones o tendencias curriculares explícitas u oficiales (Angulo, 2017a).

Derivados de los enfoques teóricos que hemos descrito antes, definimos los siguientes principios teóricos derivados: Modificación de contenidos, Modificación de estructura curricular, Modificación de elementos curriculares y Modificación del perfil de egreso. Estos principios orientaron el levantamiento de datos Web 2.0 (BDW).

Metodología

En primer término, se construyeron las bases teóricas del proyecto comentadas apretadamente en la sección anterior. A la par se construyó la base de datos, es un sistema que pretende aplicar parte de la filosofía WEB 2.0 para imprimir dinamismo e involucrar a los principales actores (los profesores que imparten las asignaturas) en el proceso de actualización curricular. Emplea tecnologías de código libre como: Base de datos relacionales (E.F. Codd, 1970), MySQL / MariaDB, Maquetación WEB adaptiva, HTML 5, CSS3, Bootstrap, Lenguajes WEB dinámicos, PHP 7 y JScript (JQuery + JQuery-UI).

La base de datos incluye diversos módulos en en su estructura: de ingreso, de almacenamiento y selección de programas educativos en los formatos que cada institución requiera, módulo de sugerencias en cada uno de los apartados de los programas, módulo de elección de criterios en cada sugerencia, así como la posibilidad de incluir la justificación para cada sugerencia. Se muestran tres de los módulos a manera de ejemplo (ver Figuras No. 1, 2 y 3).

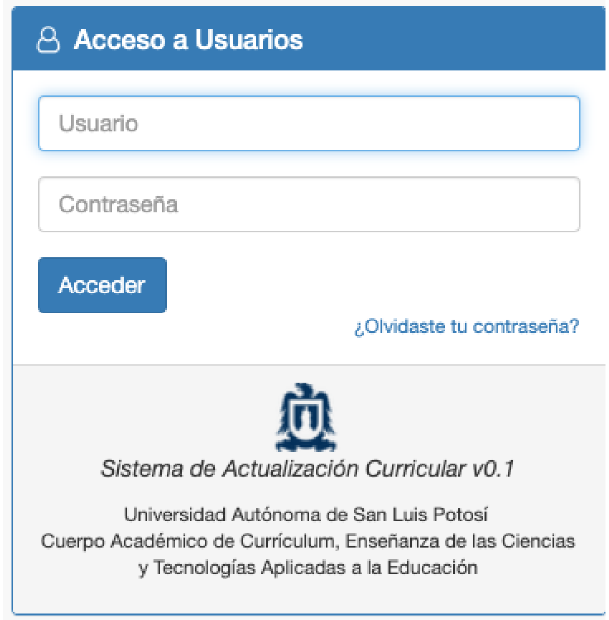


Figura 1. Módulo de ingreso al sistema para la reformulación curricular. Los autores.

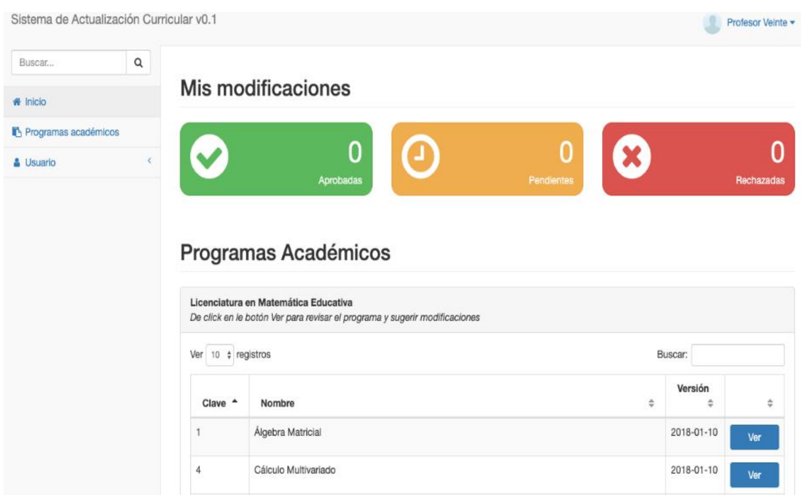


Figura 2. Módulo de selección de programa de estudio a modificar. Los autores.

Figura 3. Módulo de inserción de sugerencias de modificación a programa de estudio a modificar. Los autores.

La metodología consiste en: 1) levantamiento y registro de modificaciones sugeridas a programas de estudio a lo largo de un semestre escolar, 2) Sistematización de los cambios propuestos por los diversos profesores que imparten una o más materias del plan de estudios de una carrera universitaria, 3) Organización de grupos colegiados (comisiones curriculares, academias, autoridades, consejos académicos) para la revisión y consideración de los cambios sugeridos, 4) Establecimiento del flujo de grupos colegiados por los que debe pasar la aprobación de cambios sugeridos, 5) Establecimiento de períodos semestrales o anuales para la consideración y aprobación de cambios sugeridos, 6) Incorporación de los cambios al currículum. La metodología implica tanto la alimentación de la Base de datos Web 2.0 (BDW) con programas de las materias de planes de estudio de la carrera de Licenciatura en Matemática educativa de la UASLP (LME UASLP México) para la prueba piloto, en este caso, como la recuperación del funcionamiento de la metodología y la BDW.

Se ha alimentado la BDW con los programas de estudio (50), en esta etapa de la investigación se invitó a los profesores de la LME UASLP a participar voluntariamente, en la primera convocatoria participaron 3 profesores (Internos = I), así también profesores Externos (E) de tres instituciones (Universidad Politécnica de San Luis Potosi = UPSLP, Universidad Autónoma de Zacatecas = UAZ, Universidad de Barcelona (UB) y Universidad de los Lagos, Chile (ULCh). En este primer levantamiento se consideran los datos subidos por 7 profesores, 3 internos y 4 externos. En este documento se reporta el análisis de la información vertida a la base por estos profesores. Los datos obtenidos permitirán ajustar la base tanto en su estructura y componentes tecnológicos como en su potencialidad para obtener datos curriculares significativos para la actualización curricular continua.

Resultados o avances

En este apartado se comentar los datos recuperados en la BDW acerca de los profesores que emplearon la base, los programas de estudio que recibieron sugerencias de modificación, los criterios de modificación

empleados por los profesores, así como las justificaciones para tales cambios y los tipos de sugerencias vertidos.
Acerca de la población consultada, participaron 7 profesores de dos universidades públicas y vertieron un total de 36 registros, uno por cada modificación que sugirieron (Figura 4).

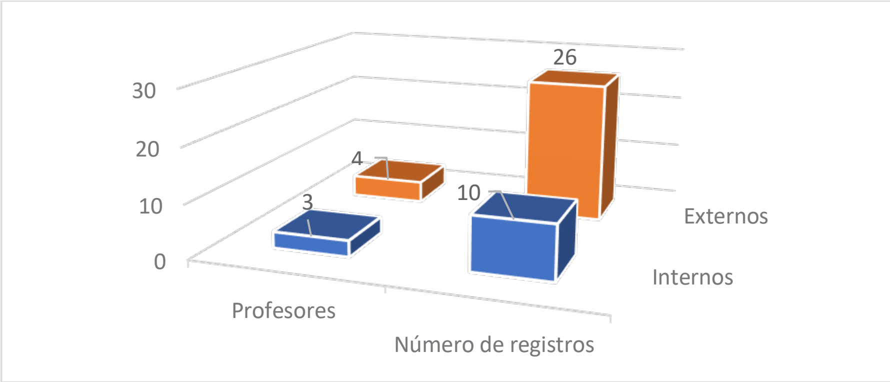


Figura 4. Profesores participantes en primera convocatoria. Los autores.

Modificaciones sugeridas

En cuanto a los *programas* que recibieron sugerencias, fueron: Reportes de investigación, Práctica docente I, Estructuras algebraicas, Matemáticas discretas, Corrientes contemporáneas de Didáctica de la matemática, Cálculo Superior, Probabilidad y estadística, Cálculo multivariado y Álgebra matricial, como lo muestra la Figura No. 5. Si se considera que estas sugerencias fueron subidas aproximadamente en dos sesiones de 1 hora en total, es decir cada profesor habrá invertido en las sugerencias a un programa no más de 15 minutos. La versatilidad de la base admite que sea utilizada en períodos cortos y tantas veces como sea necesario. Es decir, un profesor puede subir una sola observación o varias a un programa en poco tiempo, por ejemplo, al finalizar una sesión de clase, cuando tiene recientes las apreciaciones que ha hecho sobre la misma.

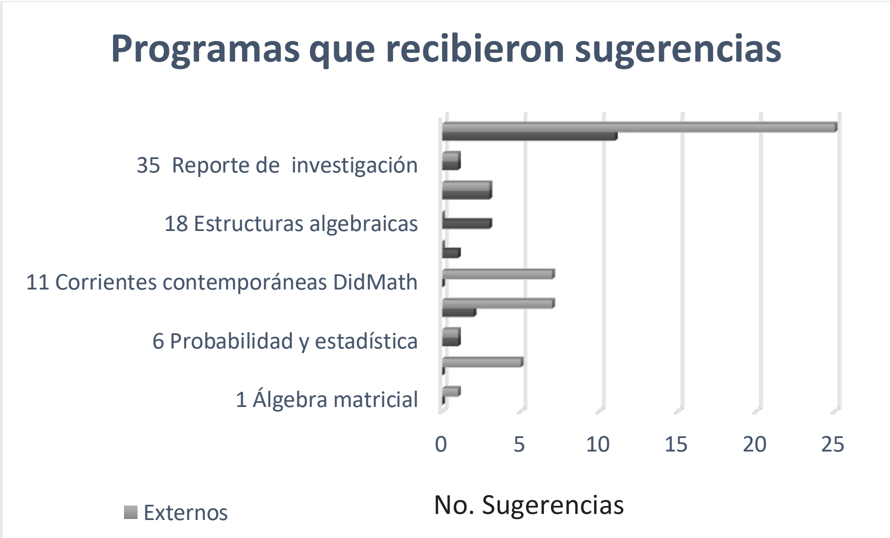


Figura 5. Programas que recibieron sugerencias. Los autores.

En otro sentido se recibieron los criterios de modificación empleados por los profesores, la base ofrece la posibilidad de elegir entre un listado o, en su defecto, incluir otro criterio. Los criterios que la base ofrece son: valoración de resultados de investigación, valoración de secuencias de enseñanza, resultados de aprendizaje, comparación con otros programas, valoración de resultados de evaluación y otros. Como se aprecia en la Figura 6.

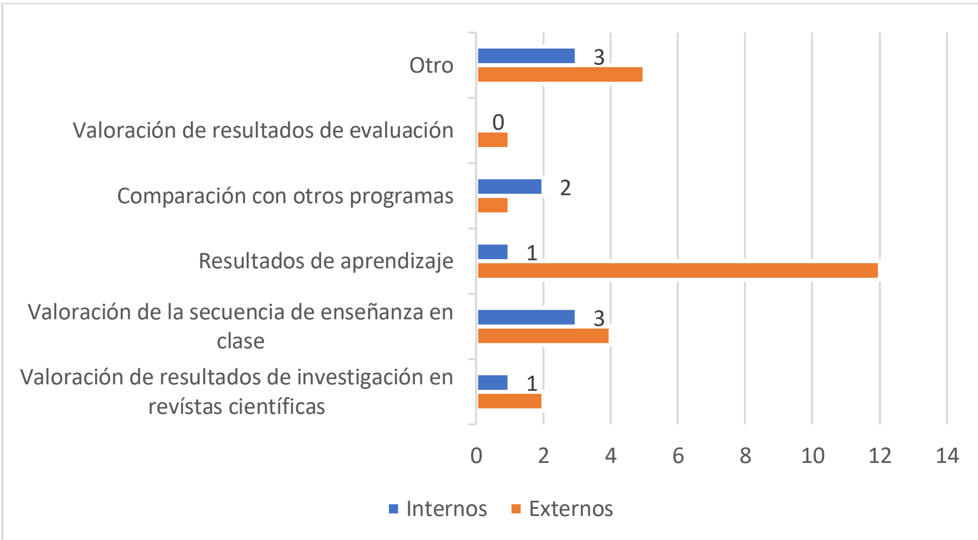


Figura 6. Criterios de modificación curricular. Los autores.

Con respecto a los aspectos del programa que recibieron sugerencias de modificación, se aprecia que los profesores consideran: los objetivos, los datos básicos del curso (horas, pre requisitos, práctica, etcétera), contenidos y métodos, nombre el curso y bibliografía. La figura 7 muestra un total de 31 sugerencias.

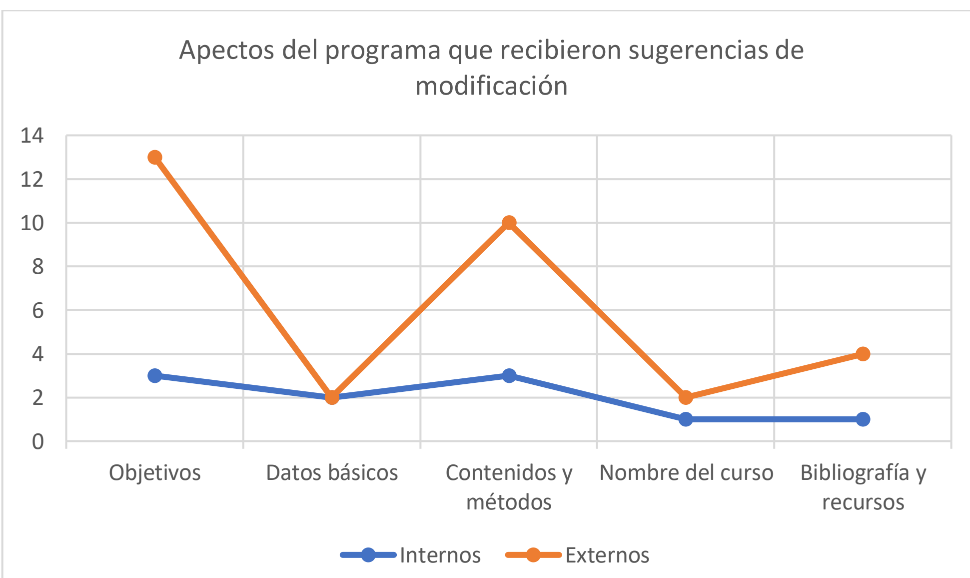


Figura 7. Aspectos del programa que recibieron sugerencias. Los autores.

JUSTIFICACIONES PARA CAMBIOS PROPUESTOS										
Justificación	Dosificación de objetivos		Eliminación de objetivo / contenido		Consideración pre requisitos		Orden secuencia contenidos		Actualización de contenidos por avance ciencia	
	Opiniones de profesores internos (I) y externos (E)									
	I	E	I	E	I	E	I	E	I	E
El objetivo general anterior estaba mal dosificado en atención a las materias posteriores		1								
Es necesario cambiar el objetivo de la unidad de fundamentos teóricos, de tal manera que se enfoque a la enseñanza de las ciencias y las matemáticas		1								
Eliminar la Unidad de Microenseñanza porque implica sólo practicar en situaciones irreales o simuladas la secuencia de una clase. Es imprescindible que los estudiantes practiquen en la realidad de escuelas de educación media y media superior y con alumnos de matemáticas.				1						
La unidad 4, involucra conocimientos de integración, lo cual se ve en la materia de Cálculo integral, así como a lo largo del curso se requieren conceptos que se trabajan en Álgebra superior.						1				
Álgebra Aunque los temas de la Unidad 6 son fundamentales en Cálculo, el amplio contenido del curso dificulta cubrir dichos temas con el cuidado adecuado.				1						
El cursos de Cálculo Superior es el primer curso en que los estudiantes se enfrentan a la tarea de realizar demostraciones matemáticas por primera vez. Al no tener claro qué es una demostración matemática y cómo realizarla, se vuele complicado que los estudiantes acompañen el curso. Las Unidades 2, 3 y 4 tienen un alto contenido de teoría de conjuntos, la cual no ha sido abordada de manera formal en los cursos anteriores de la LME.						1				
El curso de Matemáticas Discretas es un curso básico que les da a los estudiantes las herramientas básicas para el razonamiento lógico-matemático y que sirve de base para otros cursos como lo son Probabilidad y Estadística Básica (3er semestre) y Cálculo Superior (4to Semestre).						1				
El orden de las unidades se define de acuerdo a la secuencia de aprendizaje, ya que la estructura algebraica de módulos se define en base a los campos, los cuales tienen como base subyacente a los anillo. Estos últimos tienen como subestructura a un grupo.								1		
El estudio en general de las estructuras algebraicas es lo que actualmente se conoce como Álgebra Moderna, un nombre que es consensuado en la comunidad.Los conocimientos del álgebra, como en cualquier ciencia que es sujeta de investigación, se van acrecentando. Estos conocimiento se van estandarizando y convergen en nuevos conceptos/definiciones que son comunes en la comunidad. Para entender el lenguaje actual que se emplear en el área, es fundamental contar con bibliografía reciente que incorpore los nuevos conocimientos y el lenguaje moderno.										
Los conocimientos del álgebra, como en cualquier ciencia que es sujeta de investigación, se van acrecentando. Estos conocimiento se van estandarizando y convergen en nuevos conceptos/definiciones que son comunes en la comunidad. Para entender el lenguaje actual que se emplear en el área, es fundamental contar con bibliografía reciente que incorpore los nuevos conocimientos y el lenguaje moderno.										1

Figura 8. Justificaciones para cambios propuestos. Los autores.

En la Figura 8 se aprecia el nivel de profundidad que pueden guardar las justificaciones para los cambios sugeridos (Columna 1), los tipos de justificación que se incluyeron (Dosificación de los objetivos, Eliminación de objetivos o contenidos, Consideración de pre requisitos, Orden en la secuencia de contenidos y actualización de contenidos por avance de la ciencia). Se aprecia que se emitieron 7 sugerencias de modificación para materias de matemáticas (2 para álgebra, 2 para estructuras algebraica, 2 para Cálculo y una para matemáticas discretas) y sólo 3 para materias de matemática educativa (Práctica Docente I), para un total de 10. La totalidad de las sugerencias fueron hechas por profesores externos a la institución cuyo plan de estudios se analiza. Dos de las sugerencias apuntaron a la dosificación de objetivos, 2 más hacia la eliminación de objetivos o contenidos, 3 consideraciones sobre la necesidad de pre-requisitos, 1 para la secuencia de contenidos y otra más para la necesidad de actualizar contenidos.

Con los datos previos se pone en evidencia que las modificaciones asistemáticas que se hacen a programas de estudio pueden ser recogidas y sistematizadas mediante la base de datos; por otro lado puede inferirse que en este tipo de cuadros se podrán identificar los programas que con mayor frecuencia son modificados, las preferencias de enseñanza que delimitan las modificaciones y las consideraciones acerca del aprendizaje que son retomadas para modificar contenidos u otros elementos del plan de estudios.

De manera general, la mayor parte de las modificaciones sugeridas tocan a la estructura curricular, los contenidos y otros elementos curriculares. Fue evidente que falta un espacio en la base de datos para modificaciones al perfil de egreso.

Reflexiones o conclusiones

Se ha probado que la ACC es factible y acerca el currículum vivido al currículum oficial; recuperar las prácticas curriculares sistemáticamente permitirá llevar a cabo una actualización curricular más acorde con la realidad aúlica.

Las prácticas curriculares de modificación continua adecuadamente recuperadas permitirán realizar investigación sobre la reformulación del conocimiento en las distintas áreas de conocimiento.

Las modificaciones continuas a elementos curriculares permitirán ajustar el perfil de egreso (y los otros elementos y dimensiones del currículum) de acuerdo con las necesidades y características de profesores y alumnos.

La recuperación de criterios y justificaciones que se emplean en la actualización curricular permitirán estimar: la distancia entre currículum vivido y oficial; la distancia entre el saber científico que los profesores manejan y el saber disciplinario vigente.

Para la matemática educativa, la actualización curricular continúa siguiendo la metodología propuesta, significaría mantener actualizados los planes de estudio y sus programas a partir de la experiencia del profesor directamente en aula. Es decir, implicaría reconocer la experiencia, conocimiento y creatividad de los profesores para modificar su enseñanza en el aula; implicaría también, confiar en ellos como el criterio más experto en la modificación del currículum, un criterio más fiable que el de prescripciones nacionales elaboradas sobre un escritorio sin conocimiento de la especificidad contextual y aúlica.

Referencias bibliográficas

Angulo-Villanueva, R. (2006). Actualización curricular de contenidos en geología. Metodología de modificación continua por medio de una base de datos. *V Reunión Nacional de Ciencias de la Tierra*, 14 al 17 de septiembre. Puebla, México: Sociedad geológica Mexicana. Publicado en CD.

Angulo-Villanueva, R. (2007). La modificación continua de los contenidos. Una alternativa al problema metodológico del diseño curricular. Una metodología. En R. Angulo y B. Orozco (Eds), *Alternativas metodológicas de intervención curricular en educación superior* (pp. 267-298), México: Plaza y Valdés.

Angulo-Villanueva, R. (2017a). Discursos curriculares en la educación superior en México. *Investigación Cualitativa*, 2 (2), 52-67.

Angulo-Villanueva, R. (2017b). Pensar acerca del currículum matemático. Un avance a categorías analíticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

De Alba, A. (1991). *Curriculum: crisis, mito y perspectivas*. México: Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación.

Dolores, C. y Hernández, J. (2014) La formación de profesores de Matemáticas en México desde el currículum oficial. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (2014). *Matemática educativa: la formación de profesores,* pp. 51-74. Chilpancingo, Guerrero: Ediciones Díaz Santos-Universidad Autónoma de Guerrero.

Laclau, E. y Mouffe, Ch. (1988). *Hegemonía y estrategia socialista: hacia una radicalización de la democracia*. Madrid, España: Siglo XXI.

Li, Y. y Lappan, G. (2014). *Mathematics curriculum in school education.* Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

Orozco, B. (2016). El cambio curricular en la facultad de enfermería de la UASLP. Una mirada a su historia discontinua. Tesis de doctorado. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Rico, L. (1998). Complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, 1(1), 22-39.

Schoenfeld, A. (2014). Reflections on Curricular Change. In Li, Y. y Lappan, G. (2014). *Mathematics curriculum in school education,* pp. 49-78. Dordrecht Heidelberg New York London: Springer.

Valenzuela, C. y Dolores, C. (2012). El currículum oficial e impartido: contenidos y objetivos. *Números. Revista de Didáctica de las matemáticas*, 79, 47-69. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

EVALUACIÓN DE LA IDONEIDAD AFECTIVA DEL TRABAJO EN PROYECTOS ESTADÍSTICOS POR PROFESORES EN FORMACIÓN

ASSESSING THE AFFECTIVE SUITABILITY OF WORKING WITH STATISTICAL PROJECTS BY PROSPECTIVE TEACHERS

Maria M. Gea, Carmen Batanero, Assumpta Estrada
Universidad de Granada. Universidad de Lleida (España)
mmgea@ugr.es, batanero@ugr,es, aestrada@matematica.udl.cat

Resumen

El objetivo del trabajo fue evaluar la idoneidad afectiva del conocimiento didáctico-matemático en 65 estudiantes de un máster obligatorio para optar a una plaza de profesor de matemáticas en educación secundaria en España. Nos basamos en el análisis que realizan los participantes de seis indicadores de la idoneidad afectiva de un proyecto estadístico, después de haberlo desarrollado. Se extiende una jerarquía previa propuesta para valorar la calidad de la respuesta, presentando ejemplos de conocimientos de los futuros profesores relacionados con el interés de las tareas basadas en datos reales y uso de la tecnología, así como las emociones y actitudes positivas hacia la estadística.

Palabras clave: profesores, idoneidad afectiva; proyectos estadísticos

Abstract

This research was aimed at assessing the affective suitability of didactic-mathematical knowledge in 65 students of a master's degree, which is compulsory to qualify for a teaching position in secondary education in Spain. We base this study on the participants' analysis on six indicators of affective suitability in a statistical project, after having completed it. A hierarchy previously proposed to assess the quality of the response is used, presenting examples of the prospective teachers' knowledge related to the interest in tasks based on real data and the use of technology, as well as positive emotions and attitudes towards statistics.

Keywords: teachers, affective suitability, statistical projects

Introducción

En la actualidad son muchas las recomendaciones a incorporar el trabajo con proyectos dentro de la clase de estadística, para mostrar a los estudiantes la utilidad del tema en los procesos de investigación y desarrollar su razonamiento y conocimiento estadístico. Por ejemplo, en el proyecto GAISE (Franklin et al. 2007), se sugiere que estos proyectos promueven el aprendizaje de resolución de problemas y la comprensión conceptual. Rivas, Godino y Arteaga (2019), por su parte, indican su importancia en la contextualización de los contenidos estadísticos y en desarrollar unas actitudes positivas hacia la materia. También Engel (2019) recomienda esta metodología para la adquisición de la cultura estadística de los estudiantes.

La importancia de la dimensión afectiva en la enseñanza de las matemáticas ha sido resaltada, entre otros, por Gómez-Chacón (2000) o Goldin *et al.* (2016), debido a su influencia en el aprendizaje de los estudiantes. Es por ello importante que los profesores sean capaces de identificar los aspectos afectivos relacionados con la enseñanza, debido a que dichos aspectos se desarrollan a partir de las experiencias positivas o negativas en el aprendizaje del tema (Estrada, Batanero y Lancaster, 2011).

El objetivo de este trabajo fue evaluar la componente afectiva del trabajo con proyectos estadísticos en una muestra de 65 futuros profesores de educación secundaria españoles. La evaluación se lleva a cabo a partir del análisis de la valoración que los sujetos de la muestra realizan de una serie de indicadores de la idoneidad afectiva de un proyecto estadístico, después haber trabajado con dicho proyecto.

Además, se extiende una jerarquía previa definida por (2017), que permite valorar la calidad de la respuesta de los participantes al desarrollar esta tarea.

Marco teórico

Nos basamos en el modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor, desarrollado (Godino, 2009; 2013; Pino-Fan y Godino, 2015), que incluye el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico, dividiendo este último en las seis facetas siguientes:

- *Faceta epistémica,* o conocimiento especializado del contenido matemático que el profesor debe enseñar. Es decir, su conocimiento de la forma en que se debe enseñar el tema, incluyendo los problemas relacionados, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje específico del tema;
- *Faceta cognitiva,* que recoge el conocimiento que tiene el profesor del razonamiento del estudiante sobre el tema, su aprendizaje y dificultades o cómo resuelven los problemas;
- *Faceta afectiva,* conocimiento del grado de implicación (interés y/o motivación) del alumnado y de todos los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales que se relacionan con el tema o influyen en el aprendizaje;
- *Faceta mediacional,* conocimiento de uso de recursos tecnológicos y materiales apropiados para la enseñanza y aprendizaje del tema;
- *Faceta interaccional,* modelos de comunicación entre los actores del proceso de instrucción;
- *Faceta ecológica*, capacidad para valorar el grado en que el proceso de enseñanza se ajusta al proyecto educativo de la institución, los documentos curriculares y al entorno del estudiante.

Cada una de estas facetas se relaciona con la correspondiente componente de la idoneidad didáctica (Godino, 2013; Godino, Giacomone, Batanero y Font 2017), que los autores introducen para diseñar o evaluar situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Además, se define mediante una serie de indicadores (ver en la Tabla 1 los utilizados en nuestro trabajo), que Beltrán-Pellicer y Godino (2017). Dicho conjunto de indicadores, constituyen una guía que los autores definen como “una heurística que tiene en cuenta las restricciones propias del contexto y de la faceta correspondiente” (p. 95).

Según Godino et al., (2017), la valoración de la idoneidad didáctica contribuye a ampliar el conocimiento didáctico-matemático del profesor y por ello lo utilizan en sus procesos formativos (por ejemplo, en Rivas, Godino y Arteaga, 2019). Dicha teoría ha sido utilizada por otros autores para analizar sus diferentes componentes (por ejemplo, en Beltrán-Pellicer y Godino, 2017).

En este trabajo nos centramos en la idoneidad afectiva, que tiene una relación bidireccional con el aprendizaje, ya que un mejor aprendizaje refuerza la componente afectiva y esta a su vez influye en lo que los estudiantes aprenden (Gómez-Chacón, 2016). Dentro de esta faceta se puede diferenciar entre emociones, actitudes y creencias. Las emociones son los sentimientos del estudiante hacia la materia, como su agrado o desagrado, miedo o placer estético. Estas emociones son transitorias, mientras que las actitudes son respuestas más estables que orientan a la acción (Estrada *et al*., 2011) y pueden surgir en una situación de enseñanza, o referirse a los valores personales o a las expectativas de los estudiantes (Hannula, 2002). Di Martino y Zan (2015) indican que las actitudes son el puente entre creencias y emociones en relación con la visión de las matemáticas y de la relación personal con ellas.

Las creencias sobre una materia son muy variadas, inducen ciertos comportamientos y se refieren a la misma materia (por ejemplo, considerarla se fácil o difícil) o a su relación con la materia (como confianza o autoconcepto). Entre las creencias que influyen en la motivación hacia el tema Goldin et al. (2016) incluyen los intereses y preferencias, la percepción del carácter instrumental del tema, así como su relación con los objetivos cercanos o a largo plazo de los estudiantes. Todas estas creencias se refuerzan de forma positiva, para el caso de la estadística, mediante el trabajo con proyectos (McGilliwray y Pereira-Mendoza, 2011).

Nuestro trabajo se apoya también en el de Arteaga *et al.* (2017) que piden a 108 futuros profesores de educación primaria valorar la idoneidad afectiva de un proyecto estadístico, después de haber trabajado con el mismo y utilizando los componentes e indicadores propuestos por Godino (2013). Los autores asignan a cada futuro profesor una puntuación 0 a 3 en cada indicador, en función de la corrección y completitud de su respuesta. Sus resultados fueron pobres, pues menos del 50% de los participantes lograron alcanzar el nivel máximo 3 en la valoración del interés del estudio de la estadística y en sólo entre el 6 y 35% alcanza el nivel máximo en el resto de indicadores. Lo más difícil fue valorar los indicadores de las emociones, en particular los relacionados con las cualidades estéticas y de precisión de las matemáticas.

En nuestro trabajo utilizaremos la misma metodología y sistema de indicadores de estos autores, extendiendo la puntuación asignada a cada respuesta a una escala de 0 a 5. Además, al tratarse de profesores de Educación Secundaria, se utilizará un proyecto estadístico más avanzado y diferente del utilizado en la mencionada investigación.

Metodología

La investigación se desarrolló con 65 estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, que en España es obligatorio para aquellos que quieren optar a una plaza de profesor de Matemáticas en la Educación Secundaria. Todos los participantes habían cursado una o más asignaturas de estadística y el 57% tenían experiencia de enseñanza. La recolección de datos se llevó a cabo a través de un taller formativo con dos partes diferenciadas, dedicándose una sesión de dos horas de duración a cada una.

En la primera sesión. se les propuso completar un proyecto estadístico, en el que debían analizar los principales factores que afectan a la esperanza de vida al nacer, utilizando datos reales de 193 países, tomados del servidor de las Naciones Unidas (http://hdr.undp.org/es/data). Dicho proyecto estaba especialmente enfocado al estudio de la regresión y correlación, un tema en el que hay pocas investigaciones sobre los conocimientos de los profesores (Engel y Sedlmeier, 2011).

Los estudiantes recibieron un fichero Excel con los datos de 195 países y 9 variables, una de ellas la esperanza de vida al nacer y otras ocho varios indicadores (como el producto interior bruto o porcentaje de población que vive en grandes ciudades) que se trataba de relacionar con la anterior. Se eligieron las variables de modo que presentasen diferentes grados de correlación con la esperanza de vida, incluyendo correlación directa e inversa, lineal y no lineal. También se les propuso una serie de tareas, como interpretar gráficos de la distribución de la esperanza de vida, ordenar las variables por su grado de correlación con la esperanza de vida o decidir qué tipo de función podría modelizar la elación entre la esperanza de vida y cada una de las variables.

En la segunda sesión se pidió a los futuros profesores que valorasen la idoneidad afectiva del proyecto, utilizando para ello la pauta que se reproduce en la Tabla 1. Dicha pauta es una modificación de propuesta por Godino *et al.* (2013), que sugieren tres componentes y un total de seis indicadores para valorar la idoneidad afectiva. La modificación consiste en presentar los indicadores en forma de preguntas sobre el proyecto realizado que el estudiante debe responder.

Como respuesta a la pregunta I1 se espera que los futuros profesores hayan encontrado interesante el trabajo con proyectos, que es una metodología innovadora, ya que permite libertar al estudiante para trabajar a su propio ritmo y proponer sus soluciones (McGillivray y Pereira-Mendoza, 2011). En este sentido, mientras las actividades tradicionales de un libro de texto permiten desarrollar conocimientos técnicos (cómo hacer los cálculos estadísticos) los proyectos contribuyen al conocimiento estratégico (qué cálculo o gráfico estadístico se debe realizar en cada caso).

También se esperaba que los estudiantes argumenten la forma en que las tareas permiten mostrar la utilidad de las matemáticas (I2), al mostrar ejemplos de cómo se utiliza la estadística para resolver problemas de la vida real. El proyecto promueve la responsabilidad y participación del estudiante, al dejarles libertad sobre la forma de resolverlo (I3). Además en su desarrollo se fomentó la igualdad de participación de los estudiantes, sin discriminar entre los mismos (I4). Las tareas fueron asequibles para todos los participantes, pues fueron resueltas correctamente por la mayoría. A ello contribuyó el poder trabajar con Excel para facilitar los cálculos y gráficos necesarios y como consecuencia, los participantes se mostraron motivados, aumentando su autoestima (I5). Entre otras actitudes positiva se fomenta la creatividad, curiosidad, apertura de mente y perseverancia (I6).

Tabla 1. Pauta de análisis de la valoración de la idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	I1. ¿Piensas que las tareas tienen interés para los alumnos? I2. Las tareas propuestas ¿permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional? ¿por qué?
Actitudes	I3. ¿Se promueve la participación de los estudiantes en las actividades, la responsabilidad, etc.? I4. ¿Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice?
Emociones	I5. ¿Promueve el proyecto la autoestima, ayudando a evitar el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas? I6. ¿Se resaltan las cualidades estéticas de las matemáticas? ¿Qué otras actitudes o emociones positivas hacia las matemáticas permitiría desarrollar?

Cada estudiante completó por escrito un cuestionario en que los indicadores de la idoneidad afectiva se presentaron en forma de pregunta con respuesta abierta. Un análisis de contenido de las respuestas de los estudiantes (Krippendorff, 2013) permitió asignar a cada estudiante un nivel de 1 a 5, en cada uno de los seis indicadores de la idoneidad afectiva, con el siguiente criterio al que se añade el nivel 0, si no se responde:

N1. Se responde a la pregunta, aunque el participante se limita a copiar casi literalmente el indicador, sin vincularlo con el proceso didáctico analizado ni a aspectos afectivos del mismo.
N2. Se responde a la pregunta, aplicado el indicador, pero no se centra específicamente en los aspectos afectivos del proyecto desarrollado, sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente estadísticos. También consideramos en esta categoría el caso en que el futuro profesor aplica una parte del indicador correctamente y otra parte de la aplicación es incorrecta.
N3. Se aplica el indicador a contenidos afectivos relacionados con el proyecto, pero estos no son los recogidos por el indicador al que se refiere la pregunta. Por ejemplo, se pregunta por el interés del tema y se responde que el proyecto promueve la participación.
N4. Se hace una aplicación correcta del indicador, utilizando contenidos afectivos relacionados con el proyecto y el indicador, en forma consistente con la pregunta, y se razona mediante un único ejemplo.
N5. Se aplica correcta y consistentemente el indicador, utilizando contenidos afectivos relacionados con el proyecto y razonando mediante dos o más ejemplos.

Estos indicadores desarrollan los propuestos por Arteaga et al. (2017): los dos primeros son los mismos que los considerados por estos autores, quienes solo definieron hasta un nivel N3 en que consideraron cualquier tipo de respuesta relacionada con aspectos específicos del proyecto, sin diferenciar los casos en que no se tiene en cuenta los aspectos afectivos recogidos por el indicador (que ahora codificamos como N3) o si se tienen en cuenta si se proponen uno (N4) o más ejemplos (N5).

Resultados

Analizamos, en primer lugar, los ejemplos de valoraciones de los participantes en cada uno de los niveles de aplicación de los indicadores mostrados en la Tabla 2, donde se utilizan las iniciales del nombre y apellidos del participante al final de cada ejemplo.

El nivel 0 consiste simplemente en dejar la respuesta en blanco y el nivel N1 en copiar como respuesta el mismo indicador o responder si o no sin justificar, por lo que no añadimos ejemplos de estos niveles.

En el nivel N2, el futuro profesor aplica al proyecto una parte del indicador correctamente, mientras que omite otra parte, comete errores, o hace referencia a aspectos no relacionados con el proyecto. Así, al preguntarle por el interés de las tareas (I1), AMC da una respuesta general (que cualquier tarea tiene interés para el alumno), pero no comenta el interés específico de las tareas incluidas en el proyecto. CA en el indicador 2 (si las tareas permiten valorar la utilidad de las matemáticas) responde afirmativamente, indicando que la estadística se usa en los medios de comunicación, reflejando la realidad, pero no valora la utilidad concreta para este fin de las tareas del proyecto. Son igualmente muy vagas y no centradas en el proyecto las respuestas clasificadas a nivel N2 en el resto de distractores.

El Nivel N3 es utilizado sólo por un participante en el indicador I3 (¿Se promueve la participación de los estudiantes, su responsabilidad, etc.?). En este nivel, se aplica en forma correcta el descriptor, pero refiriéndose a otros aspectos emocionales desarrollados en el proyecto y no tanto a los específicos por los que se pregunta. Así, BH se centra en aspectos metodológicos de la clase, como el trabajo en grupo y otros matemáticos, como creación de gráficas o elección de la función de ajuste. Pero no hace referencia concreta a la participación o responsabilidad de los estudiantes, ni si se refuerza de este modo.

En el Nivel N4 se hace una aplicación correcta y consistente del indicador, y de los aspectos emocionales recogidos en el mismo, mediante un único ejemplo. Los futuros profesores que llegan a este nivel o al siguiente nivel N5 han comprendido la finalidad de la tarea y muestran una competencia adecuada para valorar la idoneidad afectiva del proyecto. Por tanto podemos considerar que la componente afectiva de su conocimiento sobre el trabajo con proyectos estadísticos está desarrollada. Así, en el indicador I1, ATL resalta la libertad dada en el trabajo con proyectos como medio de reforzar el interés del estudiante en el tema de la estadística. El apoyo del proyecto para mostrar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana (I2) es argumentada por AJD por el hecho de que el proyecto se centre en la esperanza de vida, un tema de interés social.

Tabla 2. Ejemplos de respuestas a diferentes niveles en cada uno de los indicadores.

	Ejemplos de respuestas
I1	N2. Cualquier tarea tiene interés para el alumno sólo depende de cómo se la planteemos y del interés que nosotros pongamos en ella (AMC). N4. Pienso que debe ser una tarea interesante para ellos porque se trabaja como un proyecto y eso les da cierta libertad (ATL) N5: Sí, porque llama la atención y es motivador trabajar con datos reales, además de que pueden situar su país de procedencia con respecto a los demás y eso es interesante. (AJD)
I2	N2. Sí, porque la estadística la utilizan los medios de comunicación con fines propios y públicos, al reflejar realidades cotidianas (CA). N4. Sí, porque están enmarcados en una situación real tal como es el análisis de la esperanza de vida (AJD). N5. Sí, porque encontrar una respuesta al problema que plantea el proyecto sólo se puede hacer si matematizamos con los datos que se nos proporciona y razonamos de forma justificada mediante las leyes lógicas de la estadística para dar una respuesta objetiva pues, de otro modo sólo tendremos una idea intuitiva y no contrastada de la solución correcta. (PJ).
I3	N2. Depende de cómo el profesor enfoque la actividad (DG). N3. Se favorece la manipulación de datos, el trabajo en grupo, la creación de gráficas, elegir la más adecuada, elegir la función que más se adapta a los puntos (BH). N4. Sí, porque cada alumno independientemente tiene que enfrentarse a las actividades (MC). N5. Sí que se promueve la participación, pero habría que controlar que trabajaran todos los miembros del grupo. La responsabilidad se puede probar con la realización de las actividades complementarias (ME)
I4	N4. Sí, porque habla en lenguaje general, no diferencia entre hombres y mujeres. (MC) N5. Este proyecto no hace referencia discriminatoria alguna. Se tratan los datos de forma objetiva y además al analizar distintos países se puede promover la interculturalidad en clase como tema transversal (PJ).
I5	N2. Es adecuado combinar tareas sencillas con tareas algo más complejas (MRA). N5. Como es un proyecto que va avanzando el alumno desde conocimientos más básicos hasta razonamientos propios. En este sentido se favorece su autoestima y puede ayudar a que se reduzca la aversión contra las matemáticas (ATL).

I6	N2. Sí, el ajuste de una nube de puntos dispersa y desordenada mediante una función muestra cómo las matemáticas pueden condensar la información y simplificarla mediante un modelo sencillo. (MAG; indicador I6). N4. Sí, porque al utilizar la hoja Excel mejora muchísimo la autoestima puesto que no es necesario hacer cálculos complejos, el mismo programa nos facilita el cuanto a cálculos (LT). N5. Sí, se resaltan las cualidades estéticas de las matemáticas. Permite establecer la media de un conjunto de datos, interpretarlos gráficamente y establecer un grado de correlación entre los datos. Los colores de los gráficos (ChC)

El fomento de participación y responsabilidad del estudiante (E3) es justificado por MC por el trabajo independiente del alumno. El hecho de no tener que realizar personalmente los cálculos a mano es resaltado por LT en el indicador I6 como medio de fomentar la autoestima al disminuir la dificultad del trabajo del estudiante.

En el Nivel N5 Se hace una aplicación correcta y consistente del indicador al proyecto mediante dos o más ejemplos que muestren en el mismo los puntos afectivos recogidos en el indicador. Encontramos respuestas de futuros profesores en este nivel, sobre todo el indicador I2. En el indicador I1 de nuevo se refieren al interés del contexto, que se puedan analizar desde una perspectiva comparativa (AJD), o la lógica de la estadística y la importancia de la matematización en el indicador I2 (PJ). En el indicador I3 ME justifica tanto la participación como la responsabilidad y en el I4 a la discriminación y la interculturalidad (PJ). Igualmente, el resto de los ejemplos de este nivel muestran la madurez de los futuros profesores para analizar los aspectos afectivos del proyecto.

En la Figura1 se presentan los porcentajes de futuros profesores que alcanzan cada nivel de valoración en cada uno de los indicadores de la idoneidad afectiva. Destacamos, en primer lugar, el alto porcentaje de participantes que alcanzan uno de los niveles 4 o 5, indicando un buen desarrollo de la componente afectiva de su conocimiento. No obstante, señalamos que hubo un porcentaje de participantes que no supieron valorar los indicadores 4 a 6 referidos los dos últimos a las emociones y el cuarto a favorecer la igualdad en la argumentación.

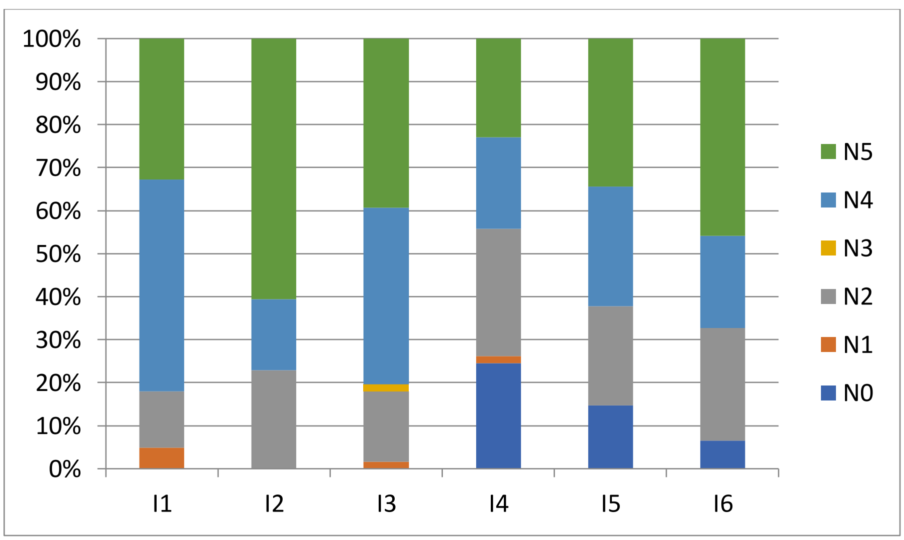


Figura 1, Porcentaje de participantes que alcanzan los diferentes niveles de valoración de la idoneidad afectiva en cada indicador.

Para resumir los resultados de la evaluación de la componente afectiva del conocimiento de estos futuros profesores en relación a un proyecto estadístico, se han calculado las puntuaciones medias obtenidas en cada uno de los indicadores, que se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3. Medias y desviaciones típicas de los niveles de valoración de los indicadores de la idoneidad afectiva

Indicador	Contenido	Media	D, Típica
I1	Interés para el alumno	3,9	1,1
I2	Utilidad de la matemática	4,1	1,2
I3	Participación de los estudiantes	4	1,2
I4	Igualdad entre estudiantes	2,6	1,9
I5	Autoestima; rechazo a la fobia	3,3	1,8
I6	Cualidades estéticas y emociones positivas	3,7	1,6
Total		3,6	1,6

En general dicha puntuación media es superior a la teórica (2,5) en la valoración de prácticamente todos los indicadores, obteniéndose una puntuación más baja en los indicadores relacionados con favorecer la igualdad y autoestima de los estudiantes, donde hubo un porcentaje de estudiantes que no dieron respuestas al no percibir con claridad estos elementos al trabajar con el proyecto. También la puntuación media total es superior teórica, pues los tres primeros apartados obtuvieron altas puntuaciones, y en general todos los resultados fueron bastante mejores que los obtenidos en Arteaga *et al.* (2017). Pero debemos recordar que en su caso se trataba de futuros profesores de educación primaria, que tienen una menor formación estadística y didáctica que los de nuestra muestra.

Conclusiones

Nuestro trabajo mostró un alto porcentaje de futuros profesores en la muestra que fueron capaces de valorar los diferentes descriptores de la idoneidad afectiva a niveles 4 y 5. Respecto a los intereses y necesidades, pudieron justificar el interés de las tareas para los estudiantes, debido al contexto del proyecto y valoraron la utilidad de la matemática para dar solución al problema presentado. Los participantes reconocieron que es importante presentar la matemática como una ciencia viva, que forma parte de nuestra cultura, y que resulta útil para interpretar la realidad. También indicaron que se debe fomentar en el estudiante una disposición abierta y positiva hacia las matemáticas, que se reflejará en la dinámica de resolución de problemas que traten contextos de relevancia social, como el propuesto en el proyecto. Igualmente hemos encontrado ejemplos de futuros profesores que han sabido valorar el interés de las tareas, del uso de datos reales y la tecnología, y del contexto; así como las ventajas de dar autonomía al alumno, y promover su responsabilidad, para fomentar actitudes y emociones positivas hacia las matemáticas en general y más concretamente hacia la estadística.

Resultó más difícil valorar algunas actitudes y emociones que podrían estar asociadas al proyecto, donde un porcentaje alto de estudiantes no llegaron a responder a alguno de los indicadores, por ejemplo, la posible contribución a la autoestima, aunque sí se alcanzaron niveles altos en la valoración de las cualidades estéticas de los gráficos utilizados.

Coincidimos con Arteaga et al. (2017) en que la formación del profesorado para enseñar estadística es un reto actual y dicha formación debe recoger los aspectos afectivos. En este sentido este trabajo confirma también la utilidad de la actividad, así como de la Guía de análisis de la idoneidad didáctica propuesta por XX(2013) para la formación de los profesores. Esta guía les resulta asequible, son capaces de argumentar su valoración de los diferentes descriptores y componentes, con lo cual, se introducen en un proceso de reflexión sobre la práctica docente, que al mismo tiempo desarrolla sus propios conocimientos. Esperamos que nuestro estudio y su metodología permita continuar la investigación sobre este tema, dentro de la formación de profesores.

Agradecimiento: Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Contreras, J.M., Cañadas, G.R. y Gea, M.M. (2017). Evaluación de la componente afectiva del conocimiento didáctico- matemático de futuros profesores sobre estadística. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. *Perspectiva Educacional, 56*(2), 92-116.

Burgess, T. A. (2011). Teacher knowledge of and for statistical investigations. In *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education* (pp. 259-270). Springer, Dordrecht.

Di Martino, P. y Zan, R. (2015). The construct of attitude in mathematics education. En B. Pepin y B. Roesken-Winter (Eds.), *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education. Exploring a mosaic of relationships and* interactions (pp. 51–72). New York: Springer.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. What is civic statistics? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-17). Granada: Grupo de Investigación de Educación Estadística. Disponible en https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/ponencias/engel.pdf.

Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds), *Teaching Statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher educatio*n (pp. 247-258). New York: Springer.

Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 173-174). New York: Springer.

Franklin, C., Kader. G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. Online: www.amstat.org/Education/gaise/.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013), Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat, 8*(1), 46-74.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Boletim de Educação Matemática,31*(57), 90-113.

Goldin, G., Hannula, M., Heyd, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middeleton, J., Pantziara, M., & Zhang, Q. (2016). *Attitudes, beliefs, motivation and identity in mathematics education. ICME-13 Topical Surveys*. New York: Springer.

Gómez-Chacón, I. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics, *Educational Studies in*

Mathematics, 43 (2), 149-168.

Gómez-Chacón, I. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. En A. Berciano et al. (Eds*.). Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Malaga: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational studies in Mathematics, 49*(1), 25-46.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: an introduction to its methodology*. London, Sage.

MacGillivray, H., & Pereira Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading, (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study* (pp. 109-120). New York: Springer

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109

Rivas, H., Godino, J. D. y Arteaga, P. (2019). Los proyectos como contextualizadores de nociones básicas de estadística y probabilidad en la formación inicial de profesores de educación primaria. *Estudios Pedagógicos, 44*(3), 309-327.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ESTUDIO DE LA COMPETENCIA PROFESIONAL DE PROFESORES DE SECUNDARIA SOBRE TAREAS MATEMATICAS ESCOLARES

STUDYING SECONDARY EDUCATION TEACHERS' PROFESSIONAL COMPETENCE ON SCHOOL MATHEMATICS TASKS

José Romilio Loría Fernández, José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad Nacional (Costa Rica). Universidad de Granada (España)
jose.loria.fernandez@una.cr, lupi@ugr.es

Resumen
Analizamos el conocimiento de profesores de matemáticas de Educación Secundaria sobre la realización de tareas en el aula para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. Para ello, identificamos y describimos los cambios en los conocimientos, capacidades y actitudes del profesorado, como parte de su competencia profesional, relacionados con el diseño de tareas, a partir de su participación en una propuesta formativa con base en la reforma curricular en matemáticas en Costa Rica. Observamos que los profesores desarrollaron capacidades para vincular habilidades, procesos y competencias, justificar esta vinculación y diseñar y seleccionar tareas que la atendiera.

Palabras clave: currículo de matemáticas, competencia matemática, diseño de tareas

Abstract
We analyse secondary school mathematics teachers' knowledge on the tasks performed in their classroom to support the development of students' mathematical competence. To accomplish this, we identify and describe changes in teachers' knowledge, abilities and attitudes related to the design of tasks, as part of their professional competence; from their involvement in a training proposal based on the mathematical curricular reform in Costa Rica. We observed that they improved their abilities to link skills, mathematical processes and competences; to justify this connection; and to design and select tasks focused on this connection.

Key words: mathematics curriculum, mathematical competence, design of tasks

Introducción

La base de la reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (MEP, 2012), constituye una reorganización de las principales dimensiones y elementos curriculares, dotándoles de una gran cohesión y profundidad. Este programa, que destaca con solidez una visión funcional de las Matemáticas, emplea la noción de competencia matemática como expectativa a largo plazo, y en su articulación se emplean nociones, supuestos y referencias clave sobre tareas de aprendizaje contextualizadas, grados de desempeño y niveles de complejidad de los procesos básicos de actuación en esta área. El sujeto cognitivo usa las herramientas que tiene a su disposición para aproximarse a las tareas, movilizando y manifestando su competencia al efectuar los correspondientes procesos cognitivos (Rico y Lupiáñez, 2008).

Niss (2006) caracteriza un modelo de profesor competente para enseñar matemática, dentro del cual destaca una faceta curricular que debe formar parte de sus conocimientos y habilidades: analizar, evaluar, relacionar e implementar programas formativos y currículos. Por su parte, Gordon et al (2009) señalan que el profesor es el actor principal en el cambio hacia un enfoque curricular basado en la noción de competencia y la implementación de este enfoque también depende, en gran medida, de la formación y la actitud de los docentes.

Sin embargo, los profesores costarricenses arrastran debilidades de su formación inicial y manifiestan la ausencia de procesos continuos de capacitación (Alfaro, Alpízar, Morales, Ramírez y Salas, 2013); particularmente en la formación en contenidos matemáticos y su didáctica. Ruiz (2015) reconoce que asumir el estilo de organización de las lecciones tratado en la reforma curricular, invoca una experticia docente que no ha sido generada hasta ahora por las instituciones formadoras. Esta situación atenta con la implementación del nuevo currículo, por lo que el desempeño profesional y la calidad de la formación docente están en el punto de mira. Morales-López (2017) destaca que la formación del profesorado es una de las líneas prioritarias de actuación presentes en la Educación Matemática en Costa Rica.

El objetivo de nuestro trabajo es identificar y describir los cambios en los conocimientos didácticos de un grupo de profesores, como parte estructural de su competencia profesional. Nos centraremos en conocimientos relacionados con el diseño de tareas que promuevan el aprendizaje escolar, al participar en una propuesta formativa basada en la reforma curricular en matemáticas en Costa Rica.

Marco teórico

Una tarea matemática escolar es “toda demanda estructurada de actuación cognitiva propuesta al estudiante, que requiere su reflexión sobre el uso de las matemáticas, y que el profesor presenta intencionalmente como un medio para el aprendizaje o como un herramienta de evaluación” (Caraballo, 2014, p. 56). Son un medio que usa el profesor para brindar a sus alumnos la oportunidad de aprender (Real, Segovia y Ruiz, 2013). De esta manera, la naturaleza del aprendizaje de los alumnos está determinada “por el tipo de tareas que se le plantean y por el modo de aplicarlas” (Sullivan, Clarke y Clarke, 2009, p. 87). Las tareas que llevan al alumno a involucrarse significativamente con las matemáticas son centrales; estás proveen el contexto intelectual para el desarrollo de su competencia matemática (Chapman, 2013; Sanni, 2012).

Esta visión de la educación matemática obliga a un planeamiento cuidadoso de las lecciones, involucrando la selección de las tareas, las secuencias de estás, los tiempos a destinar para cada paso, y la acción docente en cada momento (el profesor debe jugar un papel central en la interacción social y cognitiva en el aula). Además, su uso debe ser flexible, lo que dependerá de las condiciones y del contexto de aula, así como del nivel educativo en que se enseña.

En esta línea, Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) consideran que,

> La planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades. (p. 8)

Castro (2008) por su parte, señala que los profesores de matemáticas, ante una reforma curricular, utilizan las disposiciones de los programas de estudio como punto de partida para planear sus lecciones, pero son sus concepciones sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje quienes determinan las decisiones relacionadas con aspectos de la instrucción. En este sentido, Demonte (2013) destaca la importancia del profesor y afirma que su desarrollo profesional es el enlace entre el diseño y la implementación de una reforma curricular y constituye su éxito en el entorno escolar. Además, sostiene que desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje no se logra exclusivamente mediante el ejercicio de la práctica de enseñar; es necesario brindar a los profesores actividades de apoyo para alcanzar esa mejora.

En consecuencia, suponemos que el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas es una pieza clave en el complejo proceso de enseñar y aprender, y al hablar de este hacemos referencia al progreso del conjunto de competencias que poseen para desempeñarse de manera eficaz. Estas competencias las conforman “el agregado de conocimientos, capacidades y actitudes que los profesores ponen en juego para desempeñar las tareas propias de su práctica docente” (Caraballo, 2014, p. 64).

Las experiencias e iniciativas de desarrollo profesional deben realizarse con el objetivo de mejorar la calidad de la enseñanza de los profesores de matemáticas en ejercicio (Sowder, 2007) y permitir que los profesores reflexionen sobre su conocimiento (Climent y Carrillo, 2003). Estas actividades profesionales les proporcionan a los docentes directrices para que personalicen las orientaciones curriculares a las necesidades que perciben e identifican en sus alumnos (Caraballo, 2014). Por ejemplo, Sullivan, Clarke y Clarke (2013) aseguran que el conocimiento didáctico que posee un profesor se refleja en la manera como selecciona, elabora y usa las tareas matemáticas escolares.

Por su parte, Blömeke y Delaney (2012) reconocen que, en los últimos años, la investigación sobre la competencia profesional tanto del profesor en formación como del profesor en ejercicio ha tenido un auge sobresaliente. Esta noción se vincula, fundamentalmente, con las demandas propias de su profesión y con la importancia atribuida a su papel central para la optimización de todo el proceso educativo (Lin y Hsu, 2018). Basándonos en la estructuración propuesta por Dhörmann, Kaiser y Blömeke (2012), que propone una dimensión cognitiva y una afectivo-emocional para esta competencia profesional, y sobre todo, en el modelo de competencia profesional del modelo COACTIV (Baumert y Kunter, 2013), asumimos que la competencia profesional del profesor la establecen la cualificación de sus conocimientos disciplinares y didácticos, sus capacidades de actuación y gestión, y los procesos de metacognición y autorregulación, todos ellos modulados y condicionados mediante la experiencia de su práctica.

Esta competencia la manifiesta el profesor al precisar los significados de los contenidos matemáticos y científicos escolares, al identificar las necesidades de alfabetización de los estudiantes, al diagnosticar sus problemas de aprendizaje y al elaborar propuestas de intervención e instrucción para su abordaje y resolución. Baumert y Kunter (2013) destacan “el carácter organizador y central del conocimiento en la competencia profesional” (p. 28), y nuestra posición enfatiza aún más, la puesta en juego de tal conocimiento para dar respuesta a las demandas y actuaciones propias de la actividad docente. Según Rico, Lupiáñez y Molina (2013), un profesor de matemáticas evidencia su competencia profesional cuando aborda tareas y problemas relativos a la enseñanza de las matemáticas en contextos escolares reales.

Metodología

Nuestro trabajo forma parte de un estudio más amplio centrado en analizar el desarrollo de la competencia profesional de un grupo de profesores costarricenses en ejercicio, cuando diseñan tareas dirigidas al desarrollo de la competencia matemática de los escolares. Para lograr los propósitos descriptivos, explicativos y evaluativos del estudio aplicamos métodos propios de la investigación cualitativa (Cohen, Manion y Morrison, 2011). Describimos el desempeño del grupo de profesores en un curso-taller centrado en las nociones clave de la reforma curricular, e identificamos factores que contribuyen a explicar los cambios experimentados por los profesores durante esa experiencia en sus conocimientos, capacidades y actitudes. También analizamos el impacto de esa formación en su práctica de aula. Finalmente, toda esa información se emplea para hacer una evaluación de la calidad del programa formativo implementado (Kirkpatrick, 2006; Maher, 2012; Pérez-Juste, 2006).

El carácter cualitativo de la investigación emerge por los métodos que aplicamos para procesar y analizar los datos que nos permitieron describir los cambios producidos en los profesores; usamos fuentes variadas de información, preguntas abiertas, análisis de textos o documentos, métodos emergentes e interpretación reiterada de las aportaciones de los informantes (Creswell, 2009).

El curso *Diseño y selección de tareas pertinentes para desarrollar y evaluar la competencia matemática* fue elaborado por el equipo de investigadores. Determinamos el contenido curricular del curso y con base en los contenidos definidos, la secuencia temporal; lo que nos permitió diez sesiones de trabajo. El foco de interés del curso se mantuvo en la percepción y comprensión de los participantes, tanto del enfoque como de los métodos que debían desarrollar, a fin de promover y evaluar la competencia matemática de sus alumnos según establecen las directrices curriculares. El tema central del curso y sobre el que se enfatizaron las sesiones fueron las características de las tareas matemáticas escolares y su adecuación al modelo funcional del aprendizaje basado en competencias.

Determinados los elementos relativos al diseño, procedimos a recabar el juicio de expertos con el propósito de validar la relevancia de la formación que habíamos identificado y las decisiones tomadas respecto a los contenidos, la finalidad y demás elementos del curso-taller.
En cuanto a los participantes, nuestra muestra la constituye nueve profesores costarricenses de matemáticas de secundaria en servicio en las provincias de Alajuela, Heredia y San José; quienes se inscribieron de manera voluntaria y gratuita, motivados por el deseo manifiesto de desarrollar y fortalecer sus competencias profesionales en las temáticas tratadas en el curso.

Durante la implementación del curso recogimos información sobre su desarrollo para revaluar y revisar de manera continua las actividades propuestas y organizamos la información que eventualmente sería analizada. La recogida de información se realizó mediante la aplicación de diferentes instrumentos: cuestionario inicial, observación y registro de las presentaciones de los participantes, registro de sus aportaciones e intervenciones personales con relación a los temas y conceptos presentados, reflexiones escritas de los participantes, grabaciones de audio, trabajo final presentado por los participantes y cuestionario de evaluación final del curso. Como parte de esta fase también tuvo lugar la revisión y reformulación del diseño del curso mediante observación crítica, continua y cíclica, de los contenidos curriculares y las estrategias de enseñanza (Caraballo, 2014).

La secuenciación de los contenidos en las sesiones del curso implicó desarrollos parciales en dimensiones concretas de la competencia profesional que al finalizar la implementación denominamos momentos. Estos momentos estuvieron demarcados por la secuencia temporal de las sesiones y se determinaron a partir del progreso en los conocimientos, capacidades y actitudes del profesorado manifestado en los procesos que llevaron a cabo durante las actividades propuestas en el curso; estos cambios nos aportaban indicios de posible desarrollo profesional y se consideraron como puntos de inflexión. Particularmente nos centramos en la evolución de aspectos conceptuales relacionados con las nociones curriculares de competencia y de tarea matemática escolar y su aplicación en el diseño y selección de tareas para promover y evaluar la competencia matemática. A cada uno de estos momentos se asoció una característica específica en términos de los contenidos conceptuados, las tareas realizadas y la información recabada durante los mismos. Identificamos cinco momentos determinantes en el desarrollo del curso: momento inicial, momento 1, momento 2, momento 3 y momento final.

El momento inicial (MI) ocurrido en una sesión preliminar al inicio del curso y durante la primera sesión, permitió determinar las condiciones específicas a partir de las cuales cada participante se integró en la dinámica del curso en términos de sus conocimientos y actitudes sobre los antecedentes y el marco conceptual que encuadraba el curso. El momento 1 (M1) transcurrido durante las sesiones segunda, tercera, cuarta y quinta, facilitó la conceptualización y caracterización de tareas matemáticas escolares de acuerdo con la fundamentación teórica del currículo. El momento 2 (M2) se concretó en la sesión sexta y constituyó un balance intermedio del curso. El momento 3 (M3), que transcurrió en las sesiones sétima, octava, y la primera mitad de la novena, favoreció a que los profesores se aproximaran con mayor profundidad y recibieran información sobre el diseño y selección de tareas que evaluaran la competencia matemática. En el momento final (MF), que comenzó en la segunda mitad de la sesión novena y culminó junto con el curso en la sesión décima, los profesores pusieron en acción el conjunto de conocimientos adquiridos para diseñar una prueba para evaluar la competencia matemática y establecer sus respectivos criterios de valoración.

Posterior a la implementación del curso, aproximadamente tres meses después, recolectamos información que nos permitiera determinar el impacto del programa de formación en la práctica docente de los profesores; cómo el aprendizaje adquirido y las capacidades desarrolladas influyen en su desempeño diario. Consideramos ese tiempo como suficiente para que los profesores pudieran manifestar cambios en sus prácticas de aula. Para ello confeccionamos una plantilla de observación de prácticas de enseñanza, tomando en consideración las nociones curriculares básicas y las categorías de observación que emplean Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras (2013) en sus experimentos de enseñanza. Además, elaboramos instrumentos para valorar los planeamientos y las evaluaciones diseñadas por los profesores durante el periodo de observación; se usa como referencia para su elaboración las características óptimas que deberían tener estos documentos según las directrices curriculares.

La selección de los profesores observados obedece a su desempeño durante el curso y la actitud que mostraron a lo largo de este; escogimos cuatro docentes en cuyas intervenciones y producciones ponían de manifiesto un interés particular en mejorar sus prácticas de enseñanza. Además, se escoge una profesora que no había participado en el curso para contrastar que los cambios manifestados por los primeros, si los había, se debían en mayor parte por el diseño e implementación del programa formativo.

Del total de profesores observados dos trabajan en el mismo colegio, el cual es de carácter público. De estos dos profesores uno de ellos no había participado en el curso; se hace esta selección de forma planificada para que el contraste fuese directamente con profesores que por el tipo de colegio donde trabajan obligatoriamente debían considerar las orientaciones curriculares en sus prácticas de aula. Los otros tres profesores trabajan en colegios privados, y pueden asumir con mayor flexibilidad el currículo oficial. Cada profesor fue observado durante dos semanas, para un aproximado de cinco episodios de observación de aula por profesor; uno de los investigadores participó como observador no participante en todos los episodios y se tiene el registro de audio o de video de la mayoría de ellos.

Con respecto al análisis de información que realizamos podemos decir, en términos generales, que recorre sucesivamente cuatro etapas: recogida con la ayuda de instrumentos variados durante el trabajo de campo; organización por medio de transcripción, categorización, codificación y descripción; procesamiento a través de técnicas propias del análisis de contenido; e interpretación por medio de la identificación de patrones (Miles, Huberman y Saldaña, 2014). Con el propósito de garantizar que la información obtenida fuera consistente y considerar todos los ángulos posibles de acuerdo con nuestros objetivos, procedimos a una triangulación metodológica entre diferentes documentos: producciones escritas del curso, registro de las observaciones de aula, planeamientos y evaluaciones diseñados por los profesores.

Resultados

Organizamos la presentación de resultados de acuerdo con los momentos determinantes en el desarrollo del curso. Las fuentes de información asociadas a cada uno de estos momentos fueron analizadas para describir la naturaleza de los cambios percibidos por los profesores y si, en efecto, estos cambios pueden relacionarse con su participación en las actividades realizadas durante la experiencia de desarrollo profesional.

En el momento inicial logramos identificar los conocimientos de los profesores sobre aspectos teóricos y metodológicos del currículo costarricense a tratar en el curso. Por medio del cuestionario inicial y las primeras reflexiones escritas indagamos sobre la noción de competencia como innovación curricular, la selección de tareas y el desarrollo de la competencia matemática en los alumnos.

Cuando puntualizamos estos aspectos encontramos que los profesores reconocen la utilidad práctica de la noción de competencia como parte integral del currículo. Pero ignoran su importancia como elemento curricular. Por ejemplo, uno de los profesores señaló: *Para promover el aprendizaje de los estudiantes es suficiente con contextualizar los conceptos por medio de situaciones reales, mostrando a los estudiantes la utilidad que tiene la matemática en su vida.* Este tipo de razonamiento desmerita el papel de otros elementos del currículo, que en su articulación son fundamentales para el desarrollo de la competencia matemática escolar, como los procesos matemáticos y las habilidades.

Además, manifiestan desconocimiento de los aspectos tanto conceptuales como técnicos del diseño y selección de tareas adecuadas para desarrollar la competencia matemática. Particularmente, en las reflexiones hechas por los profesores se evidenció una concepción de tarea distinta a la que se entiende en el currículo. Para ellos una tarea correspondía a una asignación de actividades que deben ser resueltas fuera del tiempo lectivo con el propósito de reforzar los conocimientos estudiados en clase; la mayoría de las veces se considera la resolución de listas de ejercicios donde se fomente la reproducción de procedimientos aprendidos.

Asimismo, las respuestas de la encuesta inicial sugieren que los profesores seleccionan tareas y planifican sus clases a partir de aquellos aspectos que consideran importantes como las características de los alumnos y el logro de su aprendizaje, los recursos disponibles (libros de texto, planes de estudio, el tiempo) y las expectativas de aprendizaje. Comprendemos que los profesores poseen conocimiento adecuado sobre aspectos que deben priorizarse para desarrollar la competencia matemática. No obstante, el papel que le dan a las tareas para desarrollar esta competencia no es claro, lo cual aportó indicios de la necesidad de los profesores de conocer sobre el diseño, la selección y el análisis de tareas matemáticas escolares.

En el momento 1 logramos conceptualizar y caracterizar las tareas matemáticas escolares. Los profesores reflexionaron sobre los criterios que utilizan para seleccionar tareas que desarrollen la competencia matemática, y los elementos que las deben constituir, manifestando un progreso en el concepto de tarea. En las últimas sesiones de este momento, un profesor señaló que: *Las tareas deben ser demandas cognitivas estructuradas y en su diseño intervienen variables como el contenido matemático, las habilidades, los procesos matemáticos, el contexto y los niveles de complejidad.*

Estas afirmaciones están respaldadas por los resultados que obtuvimos a partir del análisis de los trabajos no presenciales asignados en este momento. Los trabajos no presenciales constituyen la fuente de información principal relativa al logro de los objetivos del curso. Estas tareas grupales informan sobre el dominio de los profesores en el diseño y la selección de tareas y del avance en su conocimiento didáctico.

El análisis de los trabajos no presenciales asociados a este momento demostró que, a medida que el curso se desarrolló, los profesores ampliaron y profundizaron sus conocimientos sobre el modelo funcional de aprendizaje matemático adoptado por el currículo de matemáticas costarricense. Además, mejoraron sus capacidades para vincular habilidades, procesos y competencias, justificar esta vinculación y, conceptualizar variables de tarea (áreas matemáticas, contextos, niveles de complejidad). En una de las reflexiones de este momento un profesor estableció que: *La competencia es algo que se desarrollará a través de los procesos a los que se enfrentan los alumnos en las tareas, estos procesos movilizan las habilidades que determinan las competencias.*

El momento 2 constituyó un balance intermedio del curso y, mediante la reflexión propuesta, los profesores deliberaron sobre la utilidad de lo aprendido hasta el momento para su práctica profesional. La utilidad que destacaron fue la comprensión del vínculo entre las nociones básicas de la reforma curricular. Un profesor explicó: *Antes de estar en el curso yo sabía que el aprendizaje se daba cuando los contenidos, las habilidades y los procesos se relacionaban al resolver un problema de la vida cotidiana pero no sabía cómo relacionar estos conceptos al proponer una tarea. Ahora comprendo que la competencia es algo que se desarrollará a través de los procesos a los que se enfrentan los alumnos en las tareas, las cuales deben ser enmarcadas en un contexto o situación real; los procesos movilizan las habilidades que determinan las competencias.*

En el momento 3 logramos conceptualizar y caracterizar tareas para evaluar la competencia matemática y aplicar las variables de tarea estudiadas en el diseño y selección de este tipo de tareas. Las reflexiones asociadas a este momento ponen de manifiesto que los profesores han adquirido conocimiento para valorar las funciones de las tareas matemáticas escolares según sus características y de acuerdo con el propósito para el cual fueron diseñadas, y para diseñar por su propia cuenta tareas pertinentes tanto para desarrollar competencias como para evaluarlas. Al finalizar este momento un profesor mencionó que: *Las tareas para promover la competencia matemática son diferentes a las tareas que evalúan competencias porque las primeras guían al estudiante a dar significado y utilidad al conocimiento matemático, la mayoría de las veces en situaciones problemáticas nuevas, mientras que las segundas se proponen para aplicar esos conocimientos en problemas similares a los trabajados en clase. En el diseño de ambas tareas las variables estudiadas juegan un papel importante.*

En los trabajos no presenciales correspondientes al momento 3 y al momento final los profesores profundizaron en la caracterización de las variables de tarea, mejoraron su comprensión de estas, su capacidad para aplicarlas en el análisis de tareas para desarrollar y evaluar la competencia matemática y su conocimiento didáctico sobre el diseño y selección de tareas adecuadas para desarrollar y evaluar esta competencia. El avance en el conocimiento didáctico de los profesores es consistente con el manifestado durante los procesos reflexivos propuestos.

El análisis que hicieron los profesores de las tareas presentadas en estos trabajos no presenciales incluye una caracterización de estas en términos de las variables estudiadas en el curso: el contenido matemático tratado, las habilidades específicas asociadas al contenido, las habilidades de carácter más general vinculadas a las habilidades específicas, el contexto en el que se ubica la tarea, los procesos matemáticos que intervienen y el nivel de complejidad de la tarea a partir de la estructura de intervención de los procesos matemáticos. Adicionalmente crearon una plantilla con criterios de corrección para valorar el desempeño de los alumnos al realizar las tareas diseñadas para evaluar la competencia matemática escolar.

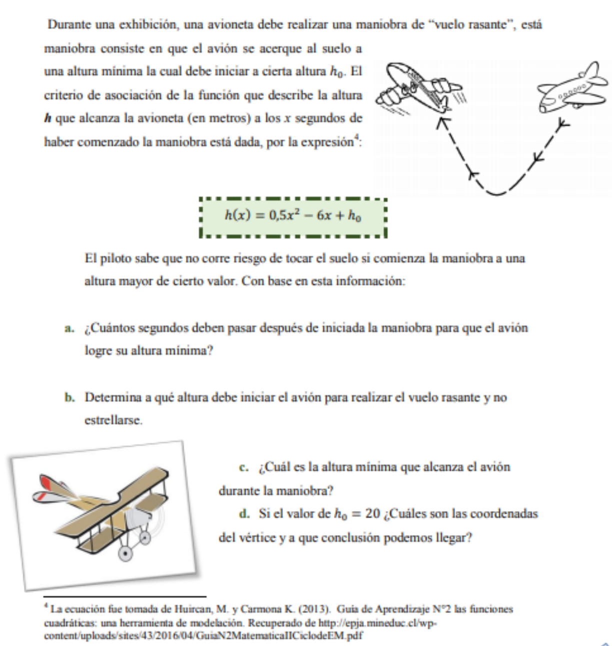
Además, en el momento final administramos el cuestionario de evaluación del curso. Los profesores expresaron satisfacción con las estrategias, aspectos técnicos, metodología y conceptualización de los contenidos tratados durante el curso. Además, manifestaron que la dinámica del curso y las herramientas adquiridas en este les permitió reflexionar sobre su labor docente y la de otros compañeros, por lo que la percepción que tenían sobre su competencia profesional mejoró; expresan sentirse más dispuestos para aplicar lo aprendido en el aula valorando así el curso como experiencia de desarrollo profesional. Para los profesores conocer y aplicar las variables de tarea en el diseño, selección y análisis de tareas fue lo más útil del curso y en donde sienten mayores cambios en sus

conocimientos didácticos. Estas afirmaciones refuerzan la elección de la dinámica del curso como plan efectivo de formación y confirman esta elección como una decisión acertada, asimismo nos dan indicios de que los profesores vieron cumplidas sus expectativas de mejora profesional.
En la Figura 1 mostramos una tarea para desarrollar la competencia matemática, diseñada y presentada por uno de los grupos en el último trabajo no presencial del curso. La tarea evidencia el progreso en los conocimientos didácticos de los profesores participantes.

Finalmente, los planeamientos, las evaluaciones escritas y los reportes de observación constituyen la fuente de información para determinar el impacto del programa de formación en la práctica docente de los profesores; cómo el aprendizaje adquirido y las capacidades desarrolladas influyen en su desempeño diario.

Los profesores que participaron en la experiencia de desarrollo profesional profundizan en el conocimiento desarrollado en el curso, y vinculan lo propuesto en la reforma curricular, conceptual y metodológicamente, con las disposiciones que dictan sus respectivos colegios para abordar la acción de aula.

Para estos profesores los procesos matemáticos son fundamentales para diseñar, seleccionar y analizar tareas que desarrollen la competencia matemática. Además de vincularlos con las habilidades que esperan movilizar, consideran el papel de intervención de los procesos en una tarea para caracterizarla en términos de su complejidad, y a partir de los criterios respectivos determinar su pertinencia en el desarrollo de la competencia matemática y en qué momento de la lección plantearla. Asimismo, plantean problemas enmarcados en un contexto para darle autenticidad y relevancia, y procuran que su resolución e interpretación implique un trabajo activo del alumno.



Durante una exhibición, una avioneta debe realizar una maniobra de "vuelo rasante", está maniobra consiste en que el avión se acerque al suelo a una altura mínima la cual debe iniciar a cierta altura h_0. El criterio de asociación de la función que describe la altura ***h*** que alcanza la avioneta (en metros) a los x segundos de haber comenzado la maniobra está dada, por la expresión[4]:

$$\boxed{h(x) = 0{,}5x^2 - 6x + h_0}$$

El piloto sabe que no corre riesgo de tocar el suelo si comienza la maniobra a una altura mayor de cierto valor. Con base en esta información:

a. ¿Cuántos segundos deben pasar después de iniciada la maniobra para que el avión logre su altura mínima?

b. Determina a qué altura debe iniciar el avión para realizar el vuelo rasante y no estrellarse.

c. ¿Cuál es la altura mínima que alcanza el avión durante la maniobra?

d. Si el valor de $h_0 = 20$ ¿Cuáles son las coordenadas del vértice y a que conclusión podemos llegar?

[4] La ecuación fue tomada de Huircan, M. y Carmona K. (2013). Guia de Aprendizaje N°2 las funciones cuadráticas: una herramienta de modelación. Recuperado de http://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIICiclodeEM.pdf

Figura 1. Tarea para desarrollar la competencia matemática

Por su parte, la profesora que no participó en el programa de formación realiza un análisis pobre de las características de las variables de tareas que selecciona para trabajar en el desarrollo de la lección; se limita a proponer solo los problemas que se sugieren en los programas de estudio, considera las habilidades como fines logrados, determina la complejidad de una tarea a partir de cómo se plantean las cuestiones y prioriza la adquisición del contenido matemático sobre el desarrollo de la competencia matemática.

Por tanto, aunque todos los profesores observados consideran las disposiciones curriculares para planificar y llevar a cabo su quehacer en el aula, el nivel de reflexión que hacen los profesores que participaron en el curso sobre los elementos a considerar para la organización de la lección es superior al análisis con el que aborda la profesora dichos aspectos. El conocimiento de la profesora sobre el diseño y selección de tareas para apoyar el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes es muy parecido al conocimiento que manifestaban los profesores al inicio del curso. Por lo tanto, el programa de formación fue determinante en la mejora de las competencias profesionales de estos profesores.

En términos generales, los profesores son conscientes del desarrollo profesional vivido, pues así lo expresaron en las reflexiones finales del curso y también lo evidenciaron durante las jornadas de seguimiento en los centros, cuando explicaban y justificaban las planificaciones realizadas y las sesiones que imparten.

Conclusiones

Las conceptuaciones desarrolladas y las actividades realizadas durante el programa formativo aportaron a los profesores participantes las explicaciones pertinentes para que comprendieran las condiciones que, como promotores de la competencia matemática, debieran cumplir. Además, brindaron a los profesores un marco de referencia común para reflexionar sobre sus propias prácticas docentes, particularmente, marcaron un camino para elaborar tareas que atendieran el desarrollo de la competencia matemática escolar. Asimismo, les permitió proyectar la pertinente aplicación de los conocimientos desarrollados y, por consiguiente, la modificación de sus prácticas actuales.

Con la descripción de los cambios en los conocimientos didácticos que evidenciaron los profesores, mediante contraste entre el estado inicial y el estado final de sus conocimientos, pusimos de manifiesto un avance en el desarrollo de una dimensión clave de su competencia profesional. El marco analítico, reflexivo y sistemático que aportamos a los profesores les permitió tanto revisar y estructurar sus conocimientos como avanzar en su desarrollo y profundización.

La evolución de los conocimientos didácticos de estos profesores se ilustra en el tránsito entre el desconocimiento sobre la noción de tarea matemática a escolar y el diseño de tareas que vinculan habilidades, procesos matemáticos y competencias, la justificación de esta vinculación, y la organización de la lección a partir de la relación directamente proporcional entre los diferentes niveles de complejidad en los problemas matemáticos y las oportunidades para realizar procesos matemáticos.

La participación activa de los profesores durante las actividades del curso, así como las interacciones entre ellos y su disposición permanente de compartir conocimientos y estrategias durante la realización del curso y posterior a este, evidencian su progreso en la capacidad para ser profesores reflexivos sobre sus prácticas de aula y las de sus colegas. La participación voluntaria de los profesores al curso como experiencia profesional que surge de haber identificado la necesidad de adquirir conocimiento sobre los temas y conceptos discutidos, y su satisfacción con los cambios manifestados a través de la experiencia formativa, hacen al curso que diseñamos e implementamos un recurso efectivo de desarrollo profesional.

Finalmente, la exploración sobre el impacto de los cambios en los conocimientos didácticos relacionados con el diseño y la selección de tareas matemáticas nos permite afirmar que la potencialidad de los cambios experimentados por los profesores participantes de la experiencia de desarrollo profesional permitirá mejorar y desarrollar la alfabetización matemática de los alumnos.

Referencias bibliográficas

Alfaro, A. L., Alpízar, M., Morales, Y., Ramírez O. y Salas, O. (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.* Número especial, Noviembre. Costa Rica. Descargado de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/12225

Baumert, J. y Kunter, M. (2013). The COACTIV Model of Teachers' Professional Competence. En M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss y M. Neubrand (Eds.), *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers* (pp.25-48). New York: Springer.

Blömeke, S. y Delaney, S. (2012). Assessment of teacher knowledge across countries: A review of the state of research. *ZDM, 44*(3), 223-247.

Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Castro, A. (2008). Planning for Mathematics Instruction: A Model of Experienced Teachers Planning Processes in the Context of a Reform Mathematics Curriculum. *The Mathematics Educator, 18*(2), 11-22.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 1-6.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional: Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias, 21*(3), 387-404.

Climent, N., Romero-Cortés, J.M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. (2013). Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula. *Relime, 16*(1), 13-36.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education.* London: Routledge.

Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Demonte, J. (2013). *High-Quality Professional Development for Teachers: Supporting Teacher Training to Improve Student Learning.* Washington, DC: Center for American Progress.

Döhrmann, M., Kaiser, G y Blömeke, S. (2012). The conceptualization of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM, 44,* 325-340.

Gordon, J., Halász, G., Krawczyk, M., Leney, T., Michel, A. Pepper, D., Putkiewicz, E. y Wisniewski, J. (2009). *Key Competences in Europe: Opening Doors for Lifelong Learns across the School Curriculum and Teacher Education*. Warsaw: Center for Social and Economic Research.

Kirkpatrick, D. (2006). *Evaluating Training Programs: The Four Levels*. San Francisco, CA: Berrte-Koehler Publishers, Inc.

Lin, F-L. y Hsu, H-Y. (2018). Using Mathematics-Pedagogy Tasks to Facilitate the Professional Growth of Pre-service Elementary Teachers. En G. J. Stylianides y K. Hino (Eds.), *Research Advances in the Mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers. An International Perspective* (pp. 3-17). Cham, Switzerland: Springer.

Maher, C. (2012). *Planning and Evaluating Human Services Programs.* Bloomington, IN: Authorhouse.

Miles, M., Huberman, A. y Saldaña, J. (2014). *Qualitative Data Analysis.* Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* Costa Rica: autor.

Morales-López, Y. (2017). Costa Rica: The Preparation of Mathematics Teachers. En Á. Ruiz (Ed.), *Mathematics Teacher Preparation in Central America, and the Caribbean. The cases of Colombia, Costa Rica, Dominic Republican and Venezuela* (pp. 39-56). Cham: Springer.

Niss, M. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. En *Praktika, 23^{o} Panellenio Synedrio Mathematikis Paideias* (pp. 39-47). Patras, Greece: Elleniki Mathematiki Etaireia.

Pérez-Juste, R. (2006). *Evaluación de programas educativos.* Madrid: La Muralla.

Real, I., Segovia, I. y Ruiz, F. (2013). Estudio de los textos para la enseñanza de las matemáticas del Padre Manjón. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en educación matemática* (pp.359-374). Granada, España: Editorial Comares.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editor.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en educación matemática.* Granada, España: Editorial Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA, 58,* 7-23.

Ruiz, A. (2015). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 10*(13), 15-33.

Sanni, R. (2012). Selection and implementation of tasks: an account of teacher's task practices. *Research Journal in Organizational Psychology and Educational Studies, 1*(2), 129-136.

Sowder, T. S. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F.K. Lester Jr (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2009). Converting mathematics tasks to learning opportunities: An important aspect of knowledge for mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal. 21*(1), 85-105.

Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with Tasks for Effective Mathematics Learning.* New York: Springer.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

MATHEMATICS TEACHERS' TRAINING IN THE ANALYSIS OF TEXTBOOKS

María Burgos, María José Castillo, Juan D. Godino
Universidad de Granada (España)
mariaburgos@ugr.es, mariajosecastilloc.24@gmail.com, jgodino@ugr.es

Resumen
En este trabajo se describe y analiza una intervención formativa con futuros profesores de matemáticas de secundaria, dirigida a desarrollar la competencia de análisis de libros de texto, aplicando algunas herramientas del Enfoque Ontosemiótico. Se considera que una lección del libro refleja el proceso de instrucción planificado por el autor para lograr el aprendizaje del contenido por parte de los estudiantes. Como guía del análisis didáctico se plantean a los futuros profesores las siguientes cuestiones: ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de instrucción planificado?, ¿cómo gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso? Este método permite obtener conocimientos didáctico-matemáticos que ayudan al profesor a tomar decisiones sobre las posibilidades y limitaciones de los libros de texto.

Palabras clave: formación de profesores, idoneidad didáctica

Abstract
In this report, we describe and analyze a training intervention with future secondary school mathematics teachers. It is aimed at developing the textbook analysis competence, by applying some tools of the Onto-semiotic Approach. It is thought that a textbook lesson reflects the instructional process planned by the author to the students learn the content. As a guide for the didactic analysis, prospective teachers are asked the following questions: What is the degree of didactic suitability of the planned instruction process? How to manage the use of the text to increase the suitability of the process? This method allows obtaining didactic-mathematical knowledge that helps the teacher to make decisions about the possibilities and limitations of the textbooks.

Key words: teacher training, didactic suitability

Introducción

El análisis de libros de texto es un tema relevante tanto para la práctica de la enseñanza como para la investigación en educación matemática. La revisión realizada por Fan, Zhu y Miao (2013) revela que se han hecho progresos importantes en las últimas décadas en la investigación sobre libros de texto de matemáticas.

Dada la influencia del libro de texto como recurso de apoyo en la enseñanza, interesa investigar además del uso que efectivamente se hace de estos en las clases, estrategias formativas que capaciten a los profesores para analizar, valorar y hacer un uso idóneo del libro.

> El libro de texto escolar es un material que presenta unas características peculiares: es un mediador del aprendizaje del estudiante, pero también se ha configurado como el material curricular de uso preferente del profesorado. Por ello el análisis del libro de texto ofrece enormes posibilidades en la formación inicial de profesionales de la educación (Braga y Belver, 2016, p. 202).

Considerando la lección de un libro de texto como un "proceso instruccional" previsto o planificado, las distintas herramientas teóricas elaboradas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) se pueden aplicar para realizar un análisis sistemático de lecciones de los libros de texto. En particular la Teoría de la Idoneidad Didáctica, un componente del EOS, puede ayudar a formular el problema del análisis didáctico de los libros de texto en términos de la caracterización de la idoneidad de las trayectorias didácticas propuestas en los mismos e identificación de los posibles cambios para mejorar los aprendizajes pretendidos. Las diferentes facetas, componentes e indicadores de idoneidad pueden servir de base para elaborar una guía de análisis de libros de texto que refleje las diversas variables para tener en cuenta.

En este trabajo se informa del diseño de una experiencia formativa con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria para desarrollar en ellos la competencia de análisis del proceso de instrucción planificado en una lección de un libro de texto sobre proporcionalidad, y la identificación de estrategias de uso que optimicen la idoneidad didáctica de potenciales formas de implementación de la lección.

Respecto a la organización del trabajo, en la sección 2 introducimos el marco teórico, problema de investigación y método. En la sección 3 describimos el diseño formativo implementado. Los resultados de la experiencia se presentan en la sección 4, donde mostramos el análisis efectuado por uno de los grupos de estudiantes, así como observaciones generales sobre las respuestas que ellos brindaron. Concluimos con las reflexiones finales en la sección 5.

Marco teórico, problema y método

La investigación sobre formación de profesores de matemáticas se plantea el problema general de identificar los conocimientos y competencias que deberían tener los profesores para optimizar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se han desarrollado diversos modelos de categorías destinadas a diseñar, experimentar y evaluar estrategias formativas para desarrollar dichos conocimientos y competencias (Chapman, 2014; English, 2008; Godino, 2009; Ponte y Chapman, 2016). En nuestro caso adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), basado en el EOS, por la amplitud de facetas, componentes e indicadores de idoneidad que propone para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje, y, por tanto, para orientar el análisis didáctico de dichos procesos. En este modelo se contempla la competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática, como parte de la competencia general de análisis e intervención didáctica que debe caracterizar la labor del profesor.

Fundamentos teóricos

Un componente del EOS es la Teoría de Idoneidad Didáctica. Dicha noción, sus componentes e indicadores, permiten el análisis y valoración sistemática de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se define como el grado en que un proceso de instrucción (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Esto supone la articulación coherente y sistémica de seis facetas o dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional. Godino (2013) identifica en cada una de estas facetas un sistema de componentes e indicadores empíricos generales, que constituyen una guía para el análisis y reflexión sistemática; así, dicho sistema aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Problema específico

El objetivo de este trabajo es describir una experiencia formativa de profesores orientada al desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica usando la trayectoria didáctica propuesta en una lección de un libro de texto de 1º de educación secundaria sobre el tema de proporcionalidad.

La lección de un libro de texto sobre un contenido matemático específico se puede considerar como planificación de un proceso de enseñanza y aprendizaje propuesto por el autor. Suponiendo que un profesor ha tomado la decisión de usar el libro de texto como recurso para apoyar su enseñanza y facilitar el aprendizaje de los estudiantes, y teniendo en cuenta el estado de los conocimientos didáctico-matemáticos del tema, se pueden plantear las siguientes cuestiones:

1) ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de estudio planificado?
Esto implica analizar los significados del contenido que se incluyen, los tipos de situaciones-problemas, las representaciones (sus conversiones y tratamientos), los conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos que se aportan y los que no. También implica identificar los conocimientos previos que se van requiriendo a lo largo del proceso, los recursos didácticos que se proponen y los modos de interacción. Estos análisis deben permitir identificar conflictos epistémicos (relativos a los significados y objetos institucionales puesto en juego en la lección), conflictos cognitivos potenciales (relacionados con los conocimientos previos requeridos) y conflictos instruccionales (modos de interacción y uso de recursos).

2) ¿Cómo se podría gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio?
Supone identificar los cambios que habría que introducir en el proceso de instrucción para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales identificados previamente.

Aspectos metodológicos

Dado que el problema de investigación es diseñar, implementar y evaluar intervenciones formativas para desarrollar en los futuros profesores de educación secundaria competencias y conocimientos didáctico-matemáticos sobre un tema específico, el enfoque metodológico sigue las fases de las investigaciones de diseño, aplicando como teoría base el EOS, como proponen Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014). Dichas fases son: estudio preliminar (en sus distintas facetas epistémico-ecológica, cognitivo-afectiva e instruccional), diseño del experimento (selección de tareas, secuenciación y análisis a priori de las mismas), implementación (observación de las interacciones entre personas y evaluación de los aprendizajes logrados), análisis retrospectivo (derivado del contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación).

En cuanto al contexto y población, la experiencia formativa se realizó en el marco del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria (especialidad de Matemáticas), durante el año lectivo 2018-2019, en España, en la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. La muestra la conforman 37 estudiantes, con un perfil académico variado (graduados en matemáticas; ingenieros de caminos; arquitectos; físicos y otras ingenierías). En este trabajo, por razones de espacio, se analizan las respuestas de un grupo de 3 estudiantes (estudio de caso).

Descripción del diseño formativo

Con la experiencia formativa se propone que los futuros profesores conozcan una metodología para analizar lecciones de libros de texto de matemáticas, la apliquen al análisis crítico y constructivo de una lección de un libro de texto y reflexionen sobre el uso de los libros de texto como recurso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello se propone realizar las siguientes actividades:

1) Lectura y discusión del artículo de Aroza, Godino y Beltrán-Pellicer (2016), titulado: Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad.

2) Análisis de una lección sobre proporcionalidad del libro Zuasti (2016) para primer curso de Educación Secundaria Obligatoria (alumnos de 12-13 años). En el conjunto de la clase se consensuará una propuesta para dividir la lección del texto seleccionado en unidades de análisis, teniendo en cuenta las distintas secciones de la lección.

3) Trabajando en equipos de 2 o 3 estudiantes responder a las siguientes consignas:

Faceta epistémica (conocimientos matemáticos pretendidos).
En cada una de las unidades de análisis (configuraciones didácticas) en que se ha descompuesto el texto:

a) Identificar los nuevos conocimientos que se introducen (tipos de situaciones problemas, representaciones, conceptos, procedimientos, proposiciones o argumentos).
b) Teniendo en cuenta los criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la proporcionalidad descritos en Aroza et al. (2016) (Anexo I) identificar si existe algún tipo de disparidad o discordancia con los conocimientos pretendidos (conflictos epistémicos).

Facetas cognitiva (conocimientos de los estudiantes) y afectiva.

c) Identificar los conocimientos previos que deben tener los estudiantes para abordar el estudio de cada unidad del texto.
d) Teniendo en cuenta los criterios de idoneidad cognitiva identificar posibles conflictos relacionados con los conocimientos previos requeridos en cada unidad del texto.
e) Identificar aspectos de la lección que tengan relación con la faceta afectiva.

Faceta instruccional (modos de interacción docente-discente y recursos).

f) Suponiendo que el autor del libro actúa como docente y el lector es el estudiante describir las características del modelo instruccional que se implementa a lo largo de la trayectoria didáctica.
g) Describir los recursos didácticos que se usan en la trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones) y estimar el tiempo requerido para su desarrollo.

Faceta ecológica (adaptación al proyecto curricular).

h) Describir el grado en que se ajusta la lección a las directrices curriculares (cómo aparecen reflejados contenidos y estándares de aprendizaje). (Anexo II)

4) Elaborar un juicio razonado sobre la idoneidad didáctica de la lección en cada una de las facetas. Se tendrá en cuenta la información obtenida en la sección anterior y los criterios de idoneidad didáctica (Anexo I).
5) ¿Cómo crees que se debe gestionar el uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de estudio? Se describirán los cambios que habría que introducir en el proceso de estudio para resolver los conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales que previamente se han identificado.

Resultados y discusión

Como resultado de la investigación se dispone de una Guía de Análisis de Libros de Texto de Matemáticas (GALT-MAT) para orientar el análisis sistemático de lecciones atendiendo a las facetas: epistémica (conocimientos matemáticos pretendidos), cognitiva (conocimientos previos que deben tener los estudiantes para abordar el estudio de cada unidad), afectiva (aspectos motivadores), instruccional (modos de interacción docente-discentes y recursos) y ecológica (adaptación al proyecto curricular). La GALT-MAT fue utilizada por los futuros profesores para emitir un juicio razonado sobre el grado de idoneidad de la lección e identificar los modos de gestión de uso del texto para incrementar la idoneidad del proceso de instrucción. Se dispone de 13 informes producidos por equipos de 2 o 3 estudiantes que realizaron la intervención formativa.

4.1. Estudio de un caso

Analizamos con detalle la respuesta elaborada por uno de los grupos (Equipo 5). La lección del libro de texto se ha considerado dividida en las 17 unidades de análisis que aparecen recogidas en la tabla 1.

Tabla 1 *Unidades de análisis de la lección del libro de texto*

Unidades de Análisis (UA)	Contenido en el libro de texto
UA1	1.1. Razón; incluyendo las secciones Observa, Ejemplo e Ideas claras.
UA2	Actividades propuestas
UA3	1.2. Proporción
UA4	Actividades propuestas
UA5	2.1. Proporcionalidad directa
UA6	Actividades propuestas
UA7	2.2. Regla de tres directa
UA8	Actividades propuestas
UA9	2.3. Porcentajes
UA10	Actividades propuestas
UA11	3. Escalas: planos y mapas
UA12	Actividades propuestas
UA13	Curiosidades. Revista
UA14	Resumen

UA15	Porcentaje con calculadora
UA16	Ejercicios y problemas
UA17	Autoevaluación

Mostramos el tipo de análisis realizado por el equipo 5 para cada una de las unidades de análisis de la lección. En la tabla 1 se muestra la correspondiente a UA3.

Tabla 1. Ejemplo de análisis realizado por el equipo 5 respecto de la unidad 3 (concepto de proporción)

	Faceta epistémica
Nuevos Conocimientos	Enfoque intuitivo y aritmético Conceptos de proporción, extremos y medios, razón de proporcionalidad. Concepto de razones semejantes. Concepto de cuadro de proporcionalidad Ejemplo 1: Situación problema de notación matemática de tabla de valores. Propiedad fundamental de las proporciones. Ejemplo 2: Argumento de comprobación Ideas claras: Argumento explicativo.
Conflictos	Significados de la proporcionalidad y sus relaciones: Se identifican y desarrollan solo los enfoques intuitivo y aritmético de la proporcionalidad y se establecen conexiones solamente entre los dos enfoques que se desarrollan. Situaciones – Problema: No hay una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, distinguiendo las situaciones que se pueden modelizar de manera lineal de las que no. No se aplica la proporcionalidad y los porcentajes en contextos no matemáticos como la física, la química, la economía, etc. Argumentos: Las tareas planteadas no fomentan la reflexión y la argumentación por parte del alumno algebraicos
	Faceta cognitiva
Conocimientos previos	Concepto de igualdad Concepto de semejanza Concepto de variable
Conflictos	Los contextos de las tareas no tienen interés para los alumnos. No se proponen tareas de proporcionalidad y porcentajes que muestran su utilidad en la vida cotidiana y profesional del alumno. Los alumnos no tienen el conocimiento previo del concepto de semejanza.
	Faceta instruccional
Modelo instruccional	No se procura que los alumnos distingan las situaciones de comparación multiplicativa de las no multiplicativas

Recursos/tiempo	Recursos prácticos: Uso de tabla de valores Tiempo:40 min
Faceta ecológica	
Directrices curriculares	Contenidos que se trabajan: Razón y proporción. […] Criterios de evaluación que se trabajan: Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales. Estándares de Aprendizaje que se trabajan: 5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

Los estudiantes identifican adecuadamente los conceptos nuevos introducidos, así como la propiedad fundamental de las proporciones. Sin embargo, no reconocen adecuadamente los argumentos en la UA3 (“de comprobación”, “explicativo”). En *Ideas claras* de esta unidad, no se argumenta, sino que se destaca la utilidad, según los autores de la razón de proporcionalidad. Tampoco hacen referencia del tipo de lenguaje o representación empleada y su grado de pertinencia. Los conflictos epistémicos que incluyen en su análisis son pertinentes, sin embargo, no se hace mención a conflictos de tipo conceptual respecto a las definiciones introducidas en esta unidad.

En la faceta instruccional los estudiantes no hacen referencia al tipo de modelo instruccional pensado en la unidad, sino que mencionan que los autores no siguen las recomendaciones en este aspecto sobre ofrecer a los alumnos oportunidades de distinguir las situaciones de comparación multiplicativa de las no multiplicativas. Por último, respecto a la faceta ecológica, consideramos que el estándar que apuntan no se ve reflejado en la UA3. En la tabla 2 incluimos el análisis de la unidad dedicada a la regla de tres directa.

Tabla 2 Ejemplo de análisis realizado por el equipo 5 de la unidad 7 (regla de tres directa)

Faceta epistémica	
Nuevos Conocimientos	Enfoque intuitivo y aritmético Método de reducción a la unidad. Ejemplo 1: Situación problema de procedimiento. Regla de tres. Ejemplo 2: Situación problema de procedimiento. Ideas Claras: Argumento explicativo
Conflictos	Significados de la proporcionalidad y sus relaciones: Se identifican y desarrollan solo los enfoques intuitivo y aritmético de la proporcionalidad y se establecen conexiones solamente entre los dos enfoques que se desarrollan. Situaciones – Problema: No se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, distinguiendo las situaciones que se pueden modelizar de manera lineal de las que no.

	No se aplica la proporcionalidad y los porcentajes en contextos no matemáticos como la física, la química, la economía, etc. Reglas: Los procedimientos algebraicos no se introducen después que se haya ganado experiencia en otros procedimientos intuitivos y aritméticos.
Faceta cognitiva	
Conocimientos previos	Concepto de variable
Conflictos	Los contextos de las tareas no tienen interés para los alumnos.
Faceta instruccional	
Modelo instruccional	No se reconoce que los métodos mecánicos de manipulación de símbolos, como los esquemas del tipo "regla de tres" para resolver problemas de proporcionalidad no son apropiados para desarrollar el razonamiento proporcional. Se introducen antes que los alumnos tengan un cierto dominio de otros métodos intuitivos y con un fundamento matemático consistente.
Recursos/tiempo	Tiempo:40 min
Faceta ecológica	
Directrices curriculares	Contenidos que se trabajan: Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa […] Criterios de evaluación que se trabajan: Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales. Estándares de Aprendizaje que se trabajan: 5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

Los estudiantes de este grupo identifican en la UA7 los métodos de reducción a la unidad y de regla de tres como nuevos conocimientos, así como "argumento explicativo" en *Ideas claras* donde se explica la forma de proceder en la regla de tres directa y el significado de reducir a la unidad. Desde el punto de vista de los conflictos epistémicos, observamos que ambos procedimientos aparecen descontextualizados, es decir, no se justifica por qué son pertinentes en situaciones de proporcionalidad y qué significado tiene el valor unitario o bien por qué se procede como se dice en la regla de tres directa. No hay ningún argumento que sustente el procedimiento y lo vincule a magnitudes directamente proporcionales.

En cuanto a la faceta afectiva, señalaron que "no hay ejercicios propuestos para hacerse en grupo, ni ejercicios que permitan reflexionar y debatir las soluciones y que puedan favorecer el diálogo, la comunicación o cualquier aspecto de tipo afectivo". Si bien la ausencia de tareas que promuevan la reflexión, el razonamiento y la argumentación por parte del alumno, forma parte de la faceta epistémica y no de la afectiva, entendemos que los futuros profesores plantean la necesidad de diálogo y comunicación sobre esas reflexiones.

Los estudiantes debían tener en cuenta el análisis previo y los criterios de idoneidad didáctica para elaborar un juicio razonado sobre la pertinencia de la lección en cada una de las facetas. En relación con la faceta epistémica los integrantes de este equipo mencionan: “encontramos diversos fallos en los contenidos y en las actividades que hacen que no sea una lección idónea”. Señalan por ejemplo que únicamente se trabajan los enfoques intuitivo y aritmético y que “algunos conceptos no se introducen correctamente pues pueden llevar a error por parte de los alumnos”. Agregan que “las explicaciones de la lección son confusas y a veces incorrectas. Por ejemplo, “los ejercicios en los que hay que completar una proporción ‘despejando’ una incógnita están fuera de contexto, el concepto de variable no se ha introducido y el ejercicio no se explica correctamente”. También resaltan que “se dedica poco tiempo a la reflexión y la contextualización de los aprendizajes”.

Respecto a la faceta cognitiva y afectiva, se hace referencia a que “se pide a los alumnos que resuelvan ejercicios para los que no tienen los conocimientos previos requeridos” y la ausencia de actividades que promuevan la reflexión por parte de los alumnos. Además, se menciona la “falta de interés para los alumnos de los contextos de las tareas.”

En el aspecto instruccional los estudiantes consideran que la lección no ofrece suficientes posibilidades para que los alumnos reflexionen, discutan y propongan problemas sobre proporcionalidad, mientras que en la faceta ecológica consideran que “la lección se adecua perfectamente a la legislación, se trabajan todos los contenidos que se pretenden con ese tema en particular, los criterios y los estándares de aprendizaje propuestos en el currículo”. En cuanto a la gestión del libro de texto, consideran que se podría “usar como guía de los contenidos que se deben enseñar y quizás el orden en que deben introducirse, pero no creemos que se deban seguir las explicaciones que trae el texto.”

Respuestas de otros estudiantes

Después de analizar las respuestas de los distintos grupos de trabajo, se observan algunas coincidencias en el análisis de la idoneidad didáctica de la lección del libro de texto. En general los estudiantes del máster consideran que la idoneidad es adecuada en los aspectos cognitivos, pero mejorable en los afectivos y epistémicos. En relación con la idoneidad epistémica o matemática, los estudiantes coinciden en que no se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas ni que fomenten la reflexión, el razonamiento y la argumentación por parte del alumno. Tampoco se consideran los distintos enfoques de la proporcionalidad ni se promueve que el alumno plantee problemas relacionados con la proporcionalidad y porcentajes.

Los conflictos epistémicos detectados son fundamentalmente aquellos que refieren a los conceptos (razón, proporción, razón de proporcionalidad, variable) y en menor medida a los procedimientos de reducción a la unidad y de regla de tres. En la faceta ecológica consideran que la lección se ajusta a las directrices curriculares si bien apuntan a que no se atiende al estándar de aprendizaje 5.2., según el cual se deben presentar situaciones sencillas en las que las magnitudes que intervienen no son directa ni inversamente proporcionales y que no aparecen actividades de identificar y reconocer relaciones de proporcionalidad.

En relación con la faceta cognitiva, la mayor parte de los grupos coinciden en que no se incluyen actividades de ampliación o refuerzo (sólo el equipo 9 considera que UA13, UA14 y UA17 son actividades de este tipo) y creen que sería necesario incluir actividades con dificultad progresiva. Consideran que las actividades responden a una complejidad estándar lo que dificulta también la evaluación. En menor medida, los grupos perciben como conflictos cognitivos, la presencia de ejercicios que tratan sobre proporcionalidad inversa sin haber sido explicada anteriormente.

En el plano afectivo, se considera que la lección no contextualiza las actividades o utiliza contextos muy parecidos de manera que el grado de implicación de los alumnos será bajo. Además, coinciden en que no promueve el trabajo en equipo.

Si bien en su mayoría los futuros profesores elaboran juicios apropiados sobre la idoneidad didáctica de la lección del libro de texto, ha sido una tarea que les ha resultado complicada, fundamentalmente para precisar los conflictos en las distintas facetas. Algunos estudiantes consideran que habría sido más sencillo realizar el análisis del libro de texto después de haber realizado las prácticas en un centro docente: “quizás esta tarea después de haber realizado las prácticas en un instituto sería mucho más sencilla y apreciaríamos cosas que ahora mismo no somos capaces. Aun así, creemos que es necesaria” (Equipo 3).

Reflexiones finales

Diversos autores sostienen que el libro de texto se convierte, de hecho, en el currículo real:

> Si bien la lógica nos debería llevar a considerarlos exclusivamente como mediadores del aprendizaje de los alumnos, entre otros muchos, la realidad es que históricamente se han configurado también como la más importante propuesta curricular que interpreta y concreta el currículum oficial para el profesorado (Braga y Belver, 2016, p. 202).

En este trabajo se muestra que el sistema de facetas, componentes e indicadores de idoneidad didáctica proporciona una guía para el análisis sistemático y reflexivo de los profesores en formación sobre las características de los libros de textos, así como para la identificación de posibles maneras de usarlos en combinación con otros recursos complementarios para optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Uno de los equipos de trabajo manifestó como valoración de la actividad:

> Esta tarea es una herramienta muy útil a la hora de discernir entre dos libros de texto al inicio de curso, teniendo siempre en cuenta las necesidades del alumnado y las obligaciones impuestas por la ley vigente. La dificultad nos ha parecido bastante alta, debido a que no estamos familiarizados con este tipo de análisis ni con los conceptos a los que se hace referencia en el artículo. Aun así, nos ha sido de gran interés como una preparación para nuestro futuro trabajo como docentes (Equipo 1).

No obstante, como sugieren algunos informes de los estudiantes, será necesario mejorar progresivamente el instrumento GALT-MAT para evitar algunas reiteraciones y fijar la atención en aspectos críticos del proceso de instrucción planificado por el autor del libro.

Reconocimientos: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y Grupo PAI, FQM 126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *AIRES, 6*(1), 1-29.

Braga, G. y Belver, J. L. (2016). El análisis de libros de texto: una estrategia metodológica en la formación de los profesionales de la educación. *Revista Complutense de Educación, 27*(1), 199-218.

Chapman, O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

English, L. D. (2008) Setting an agenda for international research in mathematics education. En, L. D. English, M. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman y D. Tirosh (Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Rducation*, 2nd Edition, (pp. 3-19). New York & London: Taylor and Francis (Routledge).

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 45*(5), 633-646.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34* (2/3), 167-200.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers‘ learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 3rd ed., (pp. 275–296). New York, NY: Routledge.

Zuasti, N (2016). *Matemáticas 1º de ESO. Magnitudes proporcionales. Porcentajes.* Madrid: Editorial Marea Verde. Recuperado de:
http://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/1ESO/1%2010%20Proporciones.pdf

Anexo I. Indicadores de idoneidad epistémica, cognitiva y afectiva

Idoneidad epistémica o matemática: Grado en que los contenidos matemáticos pretendidos en el proceso de estudio representan bien a los contenidos de referencia.

Tabla 2. *Indicadores de idoneidad epistémica para el tema de proporcionalidad, adaptados de Aroza et al. (2016)*

Componentes	Descriptores
Significados de la proporcionalidad y sus relaciones	-Se identifican y desarrollan de una manera organizada los cuatro tipos de enfoques o significados de la proporcionalidad: intuitivo, geométrico, aritmético y algebraico. -Se establecen conexiones entre los distintos tipos de enfoque de la proporcionalidad mediante problemas, representaciones gráficas, relaciones conceptuales, notaciones matemáticas, procedimientos, etc.
Situaciones-problema	-Se emplea una muestra diversa y representativa de tareas que permitan contextualizar y aplicar los contenidos de la proporcionalidad y porcentajes, distinguiendo las situaciones que se pueden modelizar de manera lineal de las que no. - Se presentan situaciones que permitan distinguir las comparaciones multiplicativas de las aditivas.

	-Se promueve que el alumno se plantee problemas relacionados con la proporcionalidad y porcentajes. -Se aplica la proporcionalidad y los porcentajes en contextos no matemáticos como la física, la química, la economía, etc.
Lenguaje matemático	-Se utilizan diferentes tipos de expresión y representación (gráfica, simbólica, tablas de valores, material manipulativo, etc.) en la resolución de tareas de proporcionalidad y porcentajes, realizando traducciones y conversiones entre los distintos tipos. - Se usan representaciones adecuadas para distinguir las relaciones multiplicativas que se establecen *dentro* de las magnitudes proporcionales y *entre* dichas magnitudes. -Se fomenta que los alumnos manejen y construyan las diferentes expresiones y representaciones de la proporcionalidad y porcentajes (gráficas, símbolos, tablas de valores, material manipulativo, etc.) a través de las tareas. -El nivel del lenguaje matemático empleado es el adecuado para los estudiantes del nivel educativo de primero de la ESO.
Reglas (definiciones, propiedades, procedimientos)	-Se presentan de manera clara los conceptos y procedimientos fundamentales de la proporcionalidad para el nivel educativo de primero de la ESO, distinguiendo, razón, tasa, proporción, porcentaje, fracción y número racional. - Se define con claridad la naturaleza multiplicativa de las comparaciones entre magnitudes proporcionales. - Los procedimientos algebraicos (ecuación proporcional) se introducen después que se haya ganado experiencia en otros procedimientos intuitivos y aritméticos. -Se proponen tareas donde los alumnos tienen que reconocer y aplicar definiciones, propiedades y procedimientos de la proporcionalidad y los porcentajes.
Argumentos	-Se plantean tareas de proporcionalidad y porcentajes que fomenten la reflexión, el razonamiento y la argumentación por parte del alumno. -Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones de los contenidos de proporcionalidad y porcentaje son adecuados para el nivel educativo de primero de la ESO.

Idoneidad cognitiva y afectiva: Grado en que los contenidos pretendidos son adecuados para los alumnos.

Tabla 4 *Indicadores de idoneidad cognitiva para el tema de proporcionalidad, adaptados de Aroza et al. (2016)*

Componentes	Descriptores
Conocimientos previos	-Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la proporcionalidad (tanto si se han estudiado anteriormente como si el profesor planifica su estudio) -Los contenidos pretendidos de proporcionalidad y porcentajes pueden ser alcanzados en sus diferentes enfoques por el alumnado, teniendo un nivel de dificultad accesible.

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	-Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo. -Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes al contenido del tema de proporcionalidad y porcentajes.
Aprendizaje	-Los diversos modos de evaluación considerados en el texto permiten al profesor ver si los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión conceptual y proposicional y la competencia argumentativa) -La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia que se pueden alcanzar en el tema
Intereses y necesidades	-Los contextos de las tareas tienen interés para los alumnos. -Se proponen tareas de proporcionalidad y porcentajes que muestran su utilidad en la vida cotidiana y profesional del alumno.

Anexo II. Proporcionalidad en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria

Tabla 5. Proporcionalidad en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria, adaptado Aroza et. al (2016)

Educación Secundaria Primer ciclo	
Contenidos	-Razón y *proporción*. Magnitudes directa e inversamente *proporcionales*. Constante de *proporcionalidad*. -Resolución de problemas en los que intervenga la *proporcionalidad* directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente *proporcionales*.
Criterios de evaluación	-Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de *proporcionalidad*, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente *proporcionales*.
Estándares de Aprendizaje	5.1. Identifica y discrimina relaciones de *proporcionalidad* numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas. 5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente *proporcionales*.

UNA MIRADA DESDE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA SOBRE LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA FÍSICO: EL CASO DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO

A LOOK FROM MATHEMATICS EDUCATION ON A PHYSICAL PROBLEM SOLVING: THE CASE OF THE PARABOLIC MOVEMENT

Nehemías Moreno Martínez, Luis Hernández Zavala
Universidad Autónoma de San Luis Potosí (México)
nehemias_moreno@live.com, ki_luis96@hotmail.com

Resumen
Se describe un avance de investigación donde se analiza el caso de una docente universitaria que lleva a cabo una práctica de resolución de un problema físico de movimiento parabólico. La práctica es reconstruida a partir de la producción de la docente al resolver el problema, luego es representada gráficamente mediante la técnica del Mapa Conceptual Híbrido y posteriormente interpretada mediante algunos elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico extendidos a la física escolar. La representación gráfica de la práctica permite advertir los objetos físico-matemáticos y sus conexiones, así como la realización de algunos procesos cognitivos. Se encontró que ciertos procesos cognitivos le permiten a la docente relacionar su conocimiento previo con el nuevo conocimiento proveniente de la descripción textual del problema, permitiendo así la emergencia de nuevo conocimiento.

Palabras clave: física, resolución de problemas, mapa conceptual hibrido, representación

Abstract
This paper describes the progress of a research aimed at analyzing the case of a university professor who carries out a practice of solving a physical problem of parabolic movement. The practice is reconstructed from the production of the teacher when solving the problem, then it is represented graphically by means of the Hybrid Conceptual Map technique, and subsequently, it is interpreted by some theoretical elements of the Onto-semiotic Approach extended to school physics. The graphic representation of the practice allows noticing the physical-mathematical objects and their connections, as well as the fulfillment of some cognitive processes. It was found that certain cognitive processes allow the teacher to relate her previous knowledge to the new knowledge that comes from the textual description of the problem, thus allowing the emergence of new knowledge.

Key words: physics, problem solving, hybrid conceptual map, representation

Introducción

En las investigaciones sobre el aprendizaje de la física mediante la resolución de problemas, desde la psicología cognitiva, se ha señalado que existe un conjunto de habilidades y procedimientos que caracterizan el comportamiento de los expertos y de los estudiantes novatos, mientras que los expertos docentes consideran la estructura profunda del problema los novatos atienden aspectos superfluos (Buteler, Gangoso, Brincones y González, 2001). Al respecto, Larkin (1983) señala que en sus *representaciones internas* los “novatos incorporan entidades explícitamente mencionadas en el problema… y los expertos añaden entidades abstractas no necesariamente contenidas en el enunciado del problema y que tienen significado solo en el contexto de la física” (Citado en Buteler, Gangoso, Brincones y González, 2001, p. 286).

En otros trabajos, apoyados en la noción de representación interna y externa, se ha analizado la producción de conocimiento físico mediante la resolución de problemas empleando la técnica de la “V” de Gowin interpretada desde la teoría del Aprendizaje Significativo (Ausubel, 1976). Según Novak y Gowin (1988), la “V” ayuda a los estudiantes y profesores a interpretar la estructura y el significado del conocimiento que se pretende alcanzar al representar externamente sobre la “V” ocho elementos que participan en la actividad matemática y físico-matemática: preguntas clave, acontecimientos, conceptos, principios, teorías, registros, transformaciones y afirmaciones, ver la figura 1(a).

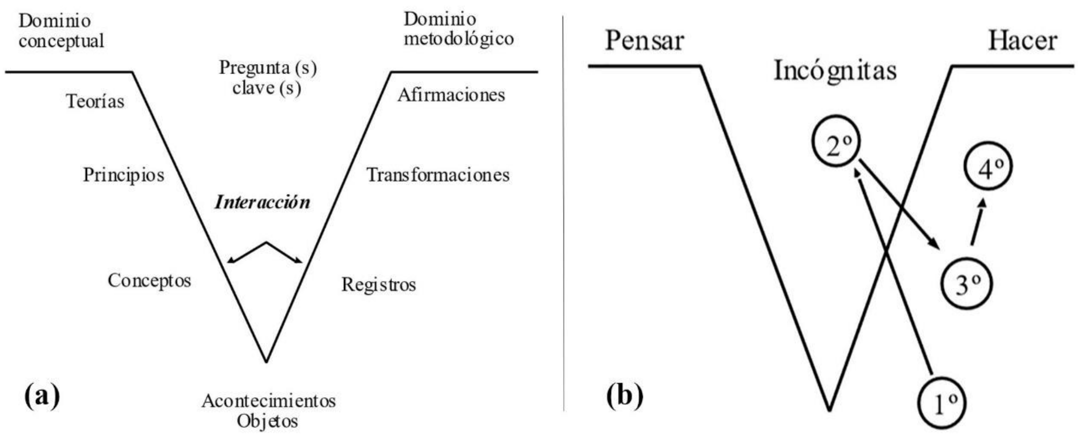


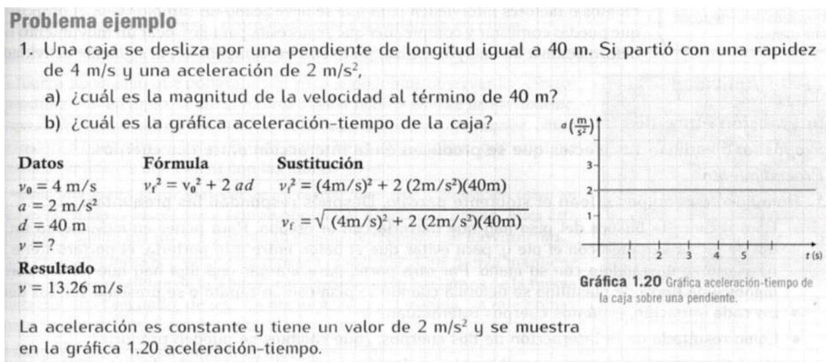
Figura 1. *(a) La V de Gowin y sus elementos, (b) operativismo ciego en la resolución de problemas.*

Empleando la “V”, Escudero y Moreira (1999) han representado esquemáticamente, mediante flechas, la ruta que siguen frecuentemente los estudiantes inexpertos cuando se enfrentan a la tarea de resolver un problema de física, para lo cual realizan el llamado operativismo ciego, figura 1(b). El esquema muestra la ruta del operativismo ciego que inicia con los datos que proporciona el problema, la sustitución de éstos en las fórmulas, las operaciones o transformaciones y la enunciación de resultados o afirmaciones, el cual, según los investigadores, refleja un escaso análisis y una deficiente significación.

Por otra parte, desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), Font, Godino y D'Amore (2007) han recalcado que el término representación interna o mental, empleado para describir la cognición de las personas, y el término representación externa, interpretado como instrumentos con los que se exteriorizan las representaciones internas, son considerados ambiguos y no operativos para la descripción de la actividad matemática. Esta ambigüedad se deja ver en el esquema de la figura 1(b), pues el esquema podría no representar de manera univoca el operativismo ciego de un estudiante inexperto, ya que el mismo esquema también podría representar la resolución del problema por parte de algún docente experto.

Por ejemplo, en el contexto de la física escolar, el libro de Gutierrez y Zarzosa (2017), empleado en algunas escuelas públicas de nivel secundaria en México en los cursos de física, presenta como ejemplo el proceso de resolución de un problema de cinemática, figura 2, que puede ser modelado mediante el esquema de la figura 1(b).

Los autores del libro presentan algunas representaciones externas mediante los símbolos v_0, a, d y v, la expresión algebraica $v_f^2 = v_0^2 + 2ad$, entre otras, figura 2, correspondientes a ciertas representaciones internas, por ejemplo, el concepto de aceleración representado de manera externa mediante una línea horizontal). Sin embargo, otras representaciones mentales importantes para la comprensión del problema tales como el concepto de aceleración debida a la gravedad, componente de la aceleración, argumentos justificativos y propiedades no tienen un duplicado externo y tampoco representan de manera clara las conexiones entre dichos elementos. De hecho, los autores llevan un operativismo ciego flagrante al señalar explícitamente "datos", "fórmula", "sustitución" y "resultado", figura 2.


Problema ejemplo

1. Una caja se desliza por una pendiente de longitud igual a 40 m. Si partió con una rapidez de 4 m/s y una aceleración de 2 m/s²,
   a) ¿cuál es la magnitud de la velocidad al término de 40 m?
   b) ¿cuál es la gráfica aceleración-tiempo de la caja?

Datos	Fórmula	Sustitución
$v_0 = 4$ m/s	$v_f^2 = v_0^2 + 2\,ad$	$v_f^2 = (4\text{m/s})^2 + 2\,(2\text{m/s}^2)(40\text{m})$
$a = 2$ m/s²		$v_f = \sqrt{(4\text{m/s})^2 + 2\,(2\text{m/s}^2)(40\text{m})}$
$d = 40$ m		
$v = ?$		

Resultado
$v = 13.26$ m/s

Gráfica 1.20 Gráfica aceleración-tiempo de la caja sobre una pendiente.

La aceleración es constante y tiene un valor de 2 m/s² y se muestra en la gráfica 1.20 aceleración-tiempo.

Figura 2. *Problema resuelto de cinemática que se presenta como ejemplo en el libro de Gutierrez y Zarzosa (2017) y que exhibe operativismo ciego.*

Con base en lo anterior, en la presente investigación se aborda el problema de la ambigüedad y la no operatividad que resulta de emplear las nociones de representación interna/externa en el análisis de la actividad físico-matemática. Para lo cual, se planteó el objetivo de extender a la física escolar la postura de una teoría de Matemática Educativa, el EOS, que sugiere cambiar el uso de la dualidad interno/externo por dos perspectivas duales, ostensivo/no-ostensivo y cognitivo/epistémico (Font, Godino y D'Amore, 2007) para describir la actividad físico-matemática.

Las dualidades ostensivo/no-ostensivo y cognitiva/epistémica son consideradas en esta investigación a través de la interpretación de la técnica del Mapa Conceptual Híbrido (MCH) desde el EOS. Mediante el objetivo anterior se pretende verificar la hipótesis de que la interpretación ontosemiótica del MCH (Moreno, 2017; Moreno, Angulo y Reducindo, 2018; Moreno, Zúñiga y Tovar, 2018; Moreno, Reducindo, Aguilar y Angulo, 2018), permite considerar al MCH como una representación ostensiva del sistema de prácticas, no ostensivo, implicado en la resolución de un problema físico-matemático ya sea por parte un experto docente, perspectiva epistémica, o por parte un estudiante inexperto, perspectiva cognitiva.

Marco teórico

Este trabajo se apoya en una interpretación de la técnica del MCH desde algunos elementos teóricos del EOS extendidos al contexto de la física escolar (Moreno, Angulo y Reducindo, 2018). A continuación, se presenta en un primer momento los elementos teóricos del EOS que fueron extendidos a la física escolar y cómo se llevó a cabo dicha extensión, luego se describe la interpretación del MCH desde los elementos extendidos del EOS y, finalmente, se describe cómo la interpretación ontosemiótica del MCH toma en cuenta las dualidades ostensivo/no-ostensivo y cognitivo/epistémico.

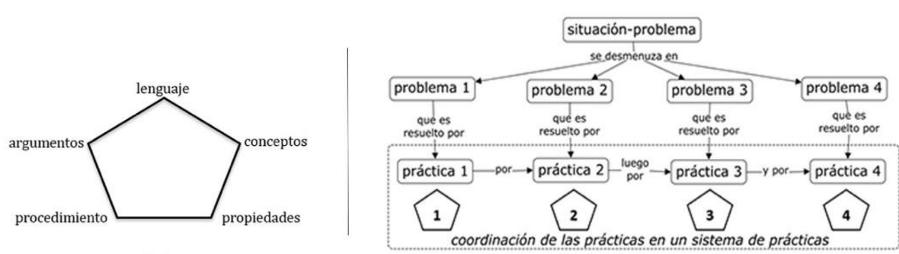
Los elementos teóricos del EOS extendidos a la física escolar fueron los constructos objeto matemático primario y función semiótica. La extensión a la física escolar se apoyó en la noción de *objeto* proveniente del Interaccionismo Simbólico, IS. Cabe señalar que ésta misma noción de objeto también fue considerada en por el EOS para desarrollar el constructo de objeto matemático primario y significado en términos de prácticas.

Según el IS, "An object is anything that can be indicated, anything that is pointed to or referred to...The nature of an object consists of the meaning that it has for the person for whom it is an object" [Un objeto es cualquier cosa que puede ser indicada, cualquier cosa que puede ser señalada o referida...La naturaleza de un objeto consiste del significado que éste tiene para la persona para quien éste es un objeto] (Blumer, 1969, p. 10-11), lo cual nos permite agregar a los objetos matemáticos señalados por el EOS una nueva tipología de objetos, los objetos físicos.

De esta manera, en el presente trabajo argumentamos que en la resolución de un problema en la física escolar, un sujeto (experto o estudiante novato) puede hacer referencia tanto a objetos físicos como a objetos físico-matemáticos. Los primeros son aquellos objetos de la física que no tienen que ver directamente con las matemáticas (por ejemplo, conceptos de naturaleza concreta a los que se hace referencia en los problemas físicos tales como pelotas, vehículos, resorte, imán, bobina, placas metálicas, etc.), mientras que los objetos físico-matemáticos pueden ser pensados como objetos que surgen a través del establecimiento de relaciones de significación o de funciones semióticas entre los objetos matemáticos primarios (aquellos señalados por el EOS) y algunos objetos físicos. Como ejemplos de objetos físico-matemáticos tenemos los conceptos de fuerza, velocidad o aceleración que pueden ser interpretados como vectores.

Con base en lo anterior, se define entonces la siguiente tipología de objetos físico-matemáticos: *situación física problematizada*, se refiere a la tarea o ejercicio de calcular la magnitud de cierta variable en situaciones como la de caída libre, movimiento parabólico, colisiones, entre otras; *lenguaje*, tales como símbolos físicos, expresiones algebraicas, gráficas, entre otras; *conceptos,* como el de velocidad, energía, aceleración o centro de masa; *propiedades*, enunciados sobre conceptos tales como el enunciado de la conservación de momento lineal acerca del momento lineal, la conservación de la energía, entre otros; *procedimiento*, se trata del tratamiento algorítmico o técnica de cálculo empleado al resolver el problema; *argumentos físico-matemáticos,* que vienen a justificar el procedimiento empleado en la resolución del problema (Moreno, Font y Angulo, 2018).

Proponemos entonces que en la resolución de una situación física problematizada, figura 3(b), el problema mayor se desmenuza en subproblemas (problemas 1, 2, 3 y 4 en la figura 3(b)) cuya resolución requiere la realización de prácticas específicas (prácticas 1, 2, 3 y 4 en la figura 3(b)) en las que se organizan y se conectan los objetos físico-matemáticos (figura 3(a) y pentágonos en la figura 3(b)) dando lugar a la emergencia de otros objetos físico-matemáticos que son empleados en la coordinación y conexión de las prácticas para configurar el llamado sistema de prácticas. El sistema de prácticas físico-matemático así realizado permite dar cuenta de los significados que se ponen en juego en la resolución de la situación física problematizada mayor.



(a) **(b)**

Figura 3. *(a) objetos físico-matemáticos y (b) esquema que representa una situación-problema que se desmenuza en cuatro subproblemas y que es resuelto mediante la coordinación de un sistema prácticas.*

Los objetos físico-matemáticos, sus conexiones y su organización mediante el sistema de prácticas pueden ser representados gráficamente mediante el MCH. En el MCH, mediante el lenguaje (palabras, símbolos, expresiones algebraicas), se representan de manera ostensiva los objetos: conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos físico-matemáticos. La unión entre los conceptos (encerrados en recuadros en el MCH) mediante "palabras enlace" permite expresar propiedades y argumentos justificativos. El objeto procedimiento se presenta a través de la componente del diagrama de flujo del MCH.

El MCH considera la dualidad personal/institucional ya que el sistema de prácticas, realizado por un experto o inexperto, puede ser representado mediante un MCH de tipo epistémico o cognitivo respectivamente. También permite considerar la dualidad ostensivo/no-ostensivo ya que permite representar de manera ostensiva (mediante el objeto lenguaje) aquellos objetos no ostensivos (conceptos, propiedades, procedimiento y argumentos) a través de la representación gráfica del sistema de prácticas que se lleva a cabo en la resolución de un problema físico-matemático.

Algunos procesos cognitivos también pueden advertirse a través del MCH. Asumimos que algunos procesos cognitivos señalados por el EOS también ocurren cuando el sujeto resuelve una situación física-problematizada. El EOS señala que en la realización de las prácticas el sujeto lleva a cabo procesos cognitivos que se pueden asociar a ciertas perspectivas de los objetos, algunos de éstos son: (i) *idealización*, permite ir de un objeto observable como podría ser un signo, expresión algebraica o gráfica (perspectiva ostensiva del objeto) a un objeto pensado; (ii) *materialización*, inverso a la idealización y permite materializar o hacer público un objeto pensado (perspectiva no-ostensiva del objeto); (iii) *visualización*, relacionada con prácticas visuales donde participan objetos lingüísticos y artefactos que ponen en juego la percepción visual tales como diagramas, esquemas, entre otros; (iv) *particularización*, un objeto general, por ejemplo, cuando la expresión general $v = v_0 + at$ (perspectiva intensiva) es empleada de manera específica como en el caso$v = 8 - 9.81t$ (perspectiva extensiva); (v) *argumentación*, permite justificar o validar los procedimientos matemáticos; (vi) *representación*, permite asignar un significante a un significado correspondiente (perspectiva de expresión); (vii) *significación*, a un significante se le atribuye un significado (perspectiva de contenido); (viii) *personalización*, el sistema de prácticas, los objetos y procesos corresponden a una persona (perspectiva cognitiva); (ix) *institucionalización*, los objetos son compartidos por expertos, dialogados y regulados en una comunidad o institución (perspectiva epistémica).

Metodología

Se llevó a cabo un estudio de caso en el que se planteó a una docente de ingeniería la resolución y explicación del problema: "Se lanza una pelota desde la ventana del piso más alto de un edificio. Se da a la pelota una velocidad inicial de 8.00 m/s a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal. La Pelota golpea el suelo 3.00 s después. Determine (a) ¿A qué distancia horizontal, a partir de la base del edificio, la pelota golpea el suelo? y (b) Encuentre la altura desde la cual se lanzó la pelota." (Serway, 2005, p. 89).

A la docente se le proporcionó una pluma electrónica, *Smartpen Live Scribe*, con la cual resolvió el problema sobre el papel mientras explicaba a detalle y en voz alta el proceso de solución. El instrumento de la pluma electrónica permitió, por un lado, la grabación de la producción oral y escrita de la docente y, por otro lado, generó un archivo electrónico llamado *pencast*, que puede ser reproducido en la computadora (similar a la reproducción de una grabación de video).

A partir del pencast se llevó a cabo la transcripción de la producción de la docente, la cual aportó elementos para la construcción del MCH. En el trabajo de Moreno, Angulo y Reducindo (2018) se plantea la reconstrucción de un

MCH a partir de un ejemplo que describe la resolución de un problema físico, en nuestro caso, empleamos la misma técnica solo que en este caso se considera la producción de la docente.

En el presente trabajo, el análisis gráfico mediante el MCH solo toma en cuenta la perspectiva dual ostesivo/no-ostensivo y la perspectiva epistémica (obtenida de la dualidad cognitiva/epistémica) del MCH, esto último es debido a que en la etapa en la que se encuentra la investigación únicamente se ha considerado la resolución del problema por parte de una experta docente, perspectiva epistémica. La perspectiva cognitiva del MCH, que es objeto de investigación actual por parte de los autores, se pretende obtener a partir de la producción de algún estudiante que se enfrente a la tarea de resolver el mismo problema físico que fue resuelto por la docente. Por último, consideramos que la comparación entre el MCH epistémico, obtenido de la producción de la docente, con el MCH de tipo cognitivo, correspondiente a la producción de algún estudiante inexperto, podría dar luz acerca de los objetos físico-matemáticos, sus conexiones y los significados puestos en juego a lo largo del proceso de resolución de la situación física problematizada.

Resultados y análisis

La transcripción de la producción oral y escrita de la docente se presenta en la figura 4. La figura muestra un conjunto numerado recuadros con texto, los cuales corresponden a la transcripción del discurso oral y los números del (1) al (11) indican la secuencia de argumentos enunciada por la docente. El texto en el centro, entre los recuadros, corresponde a la producción escrita de la docente.

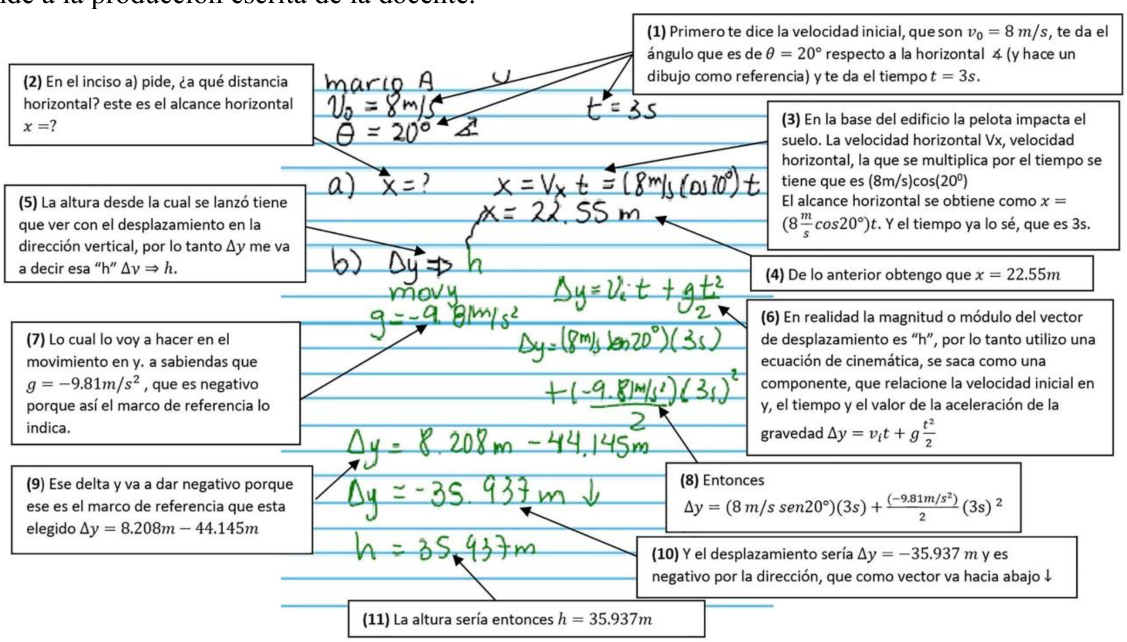


Figura 4. *Transcripción de la producción oral y escrita de la docente al resolver el problema físico planteado.*

Las flechas de la figura 4 ilustran la correspondencia entre el discurso oral de la docente y la producción escrita, por ejemplo, en (2) la docente argumenta verbalmente que "*En el inciso a), ¿a qué distancia horizontal? Este es el alcance horizontal ¿x=?*", mientras escribe simultáneamente sobre el papel el símbolo x=? (lo cual está indicado por la flecha).

A grandes rasgos, la docente lee el texto e interpreta el problema, posteriormente se fija en los datos que suministra el texto y posteriormente propone abordar el problema al descomponer el movimiento parabólico de la pelota en dos movimientos, uno horizontal y otro vertical. En el análisis del movimiento horizontal se apoya en la expresión

"$x = v_x t$" la cual le permite calcular el alcance "$x = 22.5m$" en el tiempo de "$3s$". Al abordar el movimiento vertical considera la expresión cinemática "$\Delta y = v_i t + \frac{gt^2}{2}$" del movimiento de una partícula con aceleración constante y mediante la sustitución de la componente vertical de la velocidad inicial "v_i", el valor de la aceleración debida a la gravedad "g", el tiempo "$t = 3s$" y la convención de signos relacionado con el marco de referencia empleado con eje vertical positivo hacia arriba, la docente fue capaz de calcular la altura desde la cual fue la lanzada la pelota del edificio, es decir, "$h = 35.937m$".

Como regla general para la construcción del MCH se tiene que toda la producción en la figura 4 tiene que estar presente en el MCH. El MCH correspondiente a la producción de la docente se ilustra en la figura 5, a este MCH diremos que es de tipo epistémico pues corresponde a un sistema de prácticas realizado por una experta. Así mismo, diremos que se tiene un MCH de tipo cognitivo si éste corresponde a la producción de algún estudiante inexperto.

Para facilitar la descripción del mapa se agregaron etiquetas numéricas al MCH para ubicar los objetos físico-matemáticos, sin embargo, la secuencia numérica de las etiquetas no está relacionada con el orden temporal del discurso de la docente. Por ejemplo, mediante B3 se hace referencia al objeto 3 en B "$x = 22.55m$", y por otro lado, los argumentos son representados mediante la conexión de conceptos localizados en recuadros conformando así rutas de lectura, por ejemplo, A5-A6 representa "Tiempo de $t = 3s$".

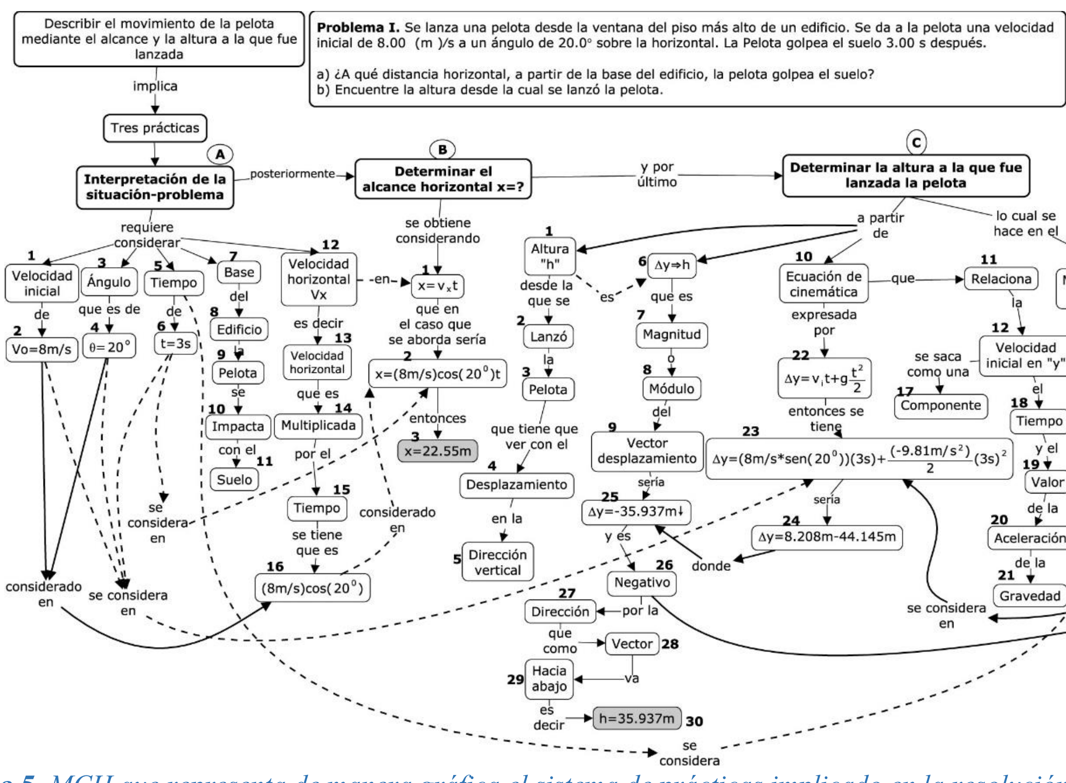


Figura 5. *MCH que representa de manera gráfica el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema de física por parte de una docente. Elaboración propia.*

Para resolver el problema la docente tuvo que realizar un sistema de tres prácticas denotadas mediante A, B y C las cuales aparecen conectadas mediante líneas segmentadas en la figura 5. La conexión entre los objetos de una misma práctica aparece mediante líneas continuas. El MCH de la figura 5 representa esquemáticamente un sistema de tres prácticas, conectadas y coordinadas, que la docente tuvo que realizar para poder resolver el problema planteado. Mediante la primera práctica A, la docente lleva a cabo una práctica interpretativa del texto que describe la situación-problema en términos de su conocimiento previo. Cuando la docente escribe sobre el papel lo que ha interpretado de la lectura también representa de manera ostensiva símbolos nuevos (que no se encuentran en el texto) que ella ha aprendido a asociar a dichos conceptos interpretados, tal es el caso de A2 (v_0), A4 (θ) y A6 (t). En este sentido, la docente establece funciones semióticas entre los conceptos que señala el texto (y que ha interpretado) con los símbolos nuevos mediante A1-A2, A3-A4 y A5-A6. Por otro lado, establece funciones semióticas o relaciones de significación entre los símbolos y los valores numéricos asociados a los conceptos mediante A2, A4 y A6.

Algunos conceptos son considerados de manera implícita durante el proceso de interpretación, por ejemplo, los conceptos de *marco de referencia* y *alcance* que forman parte del conocimiento previo de la docente. Se puede advertir la utilización del concepto de marco de referencia a través de las rutas A7-A8-A9-A10-A11 y la ruta A12-A13-A14-A15-A16, las cuales le permiten señalar una componente horizontal para la velocidad en A12, cómo calcularla mediante A16 y así poder anticipar la realización de la segunda práctica B para determinar el alcance. Las rutas anteriores reflejan la realización del *proceso de significación* al relacionar implícitamente mediante una función semiótica el conocimiento previo de marco de referencia con la componente horizontal de la velocidad obtenida mediante el *proceso de particularización* de la propiedad general de descomposición en componentes de la velocidad en un movimiento parabólico (conocimiento previo).

Potro lado, otras funciones semióticas permiten relacionar los datos de la velocidad inicial y el ángulo con la expresión *particularizada* de la velocidad horizontal, A2-A16 y A4-A16. La consideración implícita del conocimiento previo acerca del marco de referencia está acompañada de un proceso de visualización (Godino, Gonzato, Cajaraville y Fernández, 2012) que le permite a la docente ubicar al marco referencia en la base del edificio, hecho que es relevante para la ejecución de la segunda y tercera práctica. Cabe destacar que como objetos emergentes de la práctica interpretativa A se tiene a los objetos A2, A4, A6 y A16, los cuales son empleados como datos de entrada para la realización de la práctica B.

En la práctica B, el uso del marco de referencia se observa mediante la ruta B1-B2-B3, que da cuenta de la función semiótica entre el uso implícito del marco de referencia y la particularización de la propiedad de la descomposición en componentes del desplazamiento. A partir de la expresión general $x = x_0 + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$, que proviene del conocimiento previo, la docente particularizó mediante B1 al considerar $x_0 = 0$, es decir, consideró al marco de referencia situado en la base del edificio para describir el movimiento de la pelota. Mediante las conexiones entre los objetos interpretados y particularizados, A16-B2, A6-B2 y A12-B1 la docente coordina las prácticas A y B. Cabe destacar que, en ningún momento de la producción la docente hace referencia a que la aceleración horizontal es nula “$a_x = 0$”, figura 4, sin embargo, sí la toma en cuenta en la particularización en B1.

Se obtiene a B3 como objeto emergente de la realización de la práctica B, la cual constituye la solución del primer inciso del problema. Cabe señalar que dicho objeto emergente no forma parte de los datos de entrada de la tercera práctica C, sin embargo, los objetos emergentes de la primera práctica interpretativa A, A2, A4 y A6, si forman parte de los datos de entrada de la práctica C. Esto quiere decir que la realización adecuada de la primera práctica es de gran importancia para la resolución correcta del problema.

En la práctica C, el argumento C1-C2-C3 obtenido de la lectura e interpretación del texto se relaciona mediante una función semiótica con el conocimiento previo de la profesora representado mediante C4-C5 que refleja la consideración de la propiedad general de la descomposición en componentes del movimiento.

La docente particulariza su conocimiento previo sobre el movimiento vertical de la pelota al pasar de la expresión cinemática general en C10-C22 a C23. La docente asocia un significado a la expresión C22 a través de los argumentos C11-C12-C18-C19-C20-C21 y C12-C17. También establece un conjunto de funciones semióticas a través de diferentes conexiones, entre los objetos emergentes de la práctica A (A2, A4, A6) y C23, así como también entre su conocimiento previo C14 y C23. Lo anterior le permite llevar a cabo un procedimiento o tratamiento físico-matemático a lo largo de la ruta C23-C24-C25 para obtener C25.

Por otro lado, la docente considera su conocimiento previo sobre el marco de referencia, esta vez lo realiza de manera explícita mediante C15, y mediante el uso del convenio de signos. Esto le permite argumentar mediante C26-C27-C28-C29-C30 para cambiar el signo al valor del desplazamiento en C25 y posteriormente obtener como objeto emergente de la práctica C el objeto C30. Cabe señalar que el conocimiento previo de la docente acerca de la convención de signos, que atiende las características del marco de referencia elegido, también fue tomado en cuenta mediante el argumento C13-C14-C15-C16 para atribuir el signo negativo a la magnitud de la aceleración debida a la gravedad.

Otro indicio de la aplicación del conocimiento previo de la docente en la realización de la práctica C puede observarse en la ruta C6-C7-C8-C9 donde habla acerca de los conceptos de vector desplazamiento y magnitud o módulo del vector.

Con base en el análisis del MCH es posible advertir la realización de algunos procesos cognitivos que tienen un rol importante en la producción del conocimiento físico-matemático. Dichos procesos cognitivos permiten la interacción entre el nuevo conocimiento, presentado a través del texto que describe la situación-problema, y el conocimiento previo de la docente.

En la práctica A, a partir de la descripción que se realiza en el texto, la docente realiza el proceso de idealización de la situación-problema. Mediante la idealización la docente desmaterializa la pelota en una partícula que tiene un movimiento de traslación a lo largo de una trayectoria parabólica en un plano, prescindiendo del movimiento de rotación alrededor de algún eje de la pelota. Mediante la idealización también desmaterializa el edificio y el suelo, y en su lugar considera implícitamente un marco de referencia con origen situado en la base del edificio y sus ejes “x” e “y” con la misma dirección del piso y el edificio respectivamente.

La profesora también realiza el proceso de significación a través del establecimiento de una trama de funciones semióticas que se establecen entre el conocimiento nuevo que aporta el texto y el conocimiento previo de la docente. También se establecen funciones semióticas que son representadas en el MCH a través de las conexiones entre objetos físico-matemáticos de una misma práctica (líneas continuas) y mediante conexiones entre objetos de distintas prácticas (líneas segmentadas).

También realiza el proceso de particularización, la cual permite particularizar el conocimiento previo general de la docente mediante la consideración de las condiciones particulares que se describen en el texto de la situación-problema. Tal es el caso de la particularización en A12, B1 y C22, la particularización realizada en cada una de las tres prácticas condujo a la realización del procedimiento o tratamiento físico-matemático, a saber, A13-A14-A15-A16, B1-B2-B3 y C22-C23-C24-C25.

Por último, la docente también llevó a cabo el proceso de materialización a lo largo del sistema de prácticas a través del discurso oral y escrito. Mediante el discurso oral la docente materializó distintos argumentos que le permitieron justificar el procedimiento empleado en cada práctica, también materializó a través del discurso escrito mediante símbolos, asociados a conceptos pertenecientes a su conocimiento previo (A2, A4 y A6), y propiedades generales, que fueron particularizadas (B1-B2 y C22-C23).

A diferencia de la interacción entre el dominio conceptual y el dominio metodológico que se propone en la V de Gowin, figura 1(a), mediante el MCH se propone describir la actividad físico-matemático (y matemática) a través del establecimiento de una trama de conexiones, entre los objetos físico-matemáticos primarios, lograda a través de la realización de un conjunto de procesos cognitivos, a saber, la interpretación, la idealización, la significación, la particularización y la materialización. Dichos procesos son fundamentales para la producción o emergencia de nuevos objetos físico-matemáticos.

Hasta aquí se ha considerado la dualidad ostensivo/no-ostensivo y la perspectiva institucional proveniente de la dualidad institucional/personal, sin embargo, la consideración de la perspectiva personal a través del análisis gráfico del MCH ha quedado fuera del alcance del presente trabajo, de hecho, se trata de una investigación en proceso por parte de los autores.

Conclusiones

La docente llevó a cabo un sistema de tres prácticas donde organizó un conjunto de objetos físico-matemáticos al interpretar el conocimiento nuevo, proveniente del texto que describe la situación-problema, en términos de su conocimiento previo apoyado en una red de funciones semióticas y la realización de un conjunto de procesos cognitivos como el de idealización, interpretación, significación, particularización y materialización. Se trata de procesos que son esenciales para la emergencia de nuevos objetos y la construcción de conocimiento físico-matemático.

En relación con una misma tarea de resolución de un problema físico-matemático, la comparación entre un MCH de tipo epistémico, que proviene de la producción de un experto, y un MCH de tipo personal o cognitivo, que proviene de la producción de un estudiante inexperto o novato, podría dar luz acerca del fracaso de los estudiantes en la resolución de problemas de la física escolar y podría ayudar a comprender cuáles son los factores que llevan a los estudiantes a la memorización de los procedimientos y resoluciones que explican los profesores, en ausencia de una significación adecuada.

El MCH presenta de manera estática el discurso oral y escrito de la docente al resolver el problema. Por lo anterior, se puede decir que la interpretación del MCH constituye una herramienta de investigación adecuada que permite analizar la actividad físico-matemática a través del análisis gráfico que considera las conexiones que se establecen entre los objetos físico-matemáticos y algunos procesos importantes en la producción del conocimiento realizados a lo largo del sistema de prácticas.

El aporte de la Matemática Educativa, a través de la consideración de algunos elementos teóricos provenientes del EOS, al estudio de los fenómenos educativos en el contexto de la física escolar, en este caso la comprensión de una docente puesta en juego en la resolución de un problema físico de movimiento parabólico es de gran importancia y refleja el poder explicativo del EOS en otros contextos, ya en el terreno de la didáctica de la física. Las dualidades ostensivo/no-ostensivo y institucional/personal (propuestas por el EOS) cristalizadas a través de la interpretación MCH ayudan a superar el problema de la ambigüedad que aparece en el empleo de la V de Gowin al describir el fenómeno del operativismo ciego, como consecuencia de la consideración teórica de las representaciones interna y externa.

Si bien, en el presente trabajo se ha planteado el análisis de la actividad físico-matemática en la resolución de un problema físico (contexto extramatemático), es indudable que el mismo análisis MCH puede realizarse para analizar la actividad matemática en un contexto intramatemático, en cuyo caso se tendría que considerar solamente el conjunto objetos matemáticos primarios propuestos por el EOS y prescindir de la tipología de objetos físicos descrita en el apartado del marco teórico.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa*. México: Editorial Trillas.
Blumer, H. (1969). *Symbolic Interactionism, Perspective and Method*. New Jersey, U. S. A.: Prentice Hall, Inc.
Buteler, L., Gangoso, Z. Brincones, C. I. y González, M. M. (2001). La resolución de problemas en física y su representación: Un estudio en la escuela media. *Enseñanza de las Ciencias*, *19*(2), 285-295.

Escudero, C y Moreira, M. A. (1999). La V epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(1), 61-68.

Font, V., Godino, J. D., y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *27*(2), 2-14.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, M. V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1–2), 127-135.

Godino, J. D., Gonzato, M., Cajaraville, J. A., y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *30*(2), 109-130.

Moreno, N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en cálculo diferencial. *Investigación en la Escuela*, *92*, 60-75.

Moreno, N., Zúñiga, S., y Tovar, A. (2018). Una herramienta gráfica para la enseñanza de la cinemática mediante la resolución de problemas. *Latin American Journal of Physics Education*, *12*(4), 4307.

Moreno, M. N., Angulo, V. R. G. y Reducindo, R. I. (2018). Mapas conceptuales híbridos para la enseñanza de la física y la matemática en el aula. *Revista de investigación e innovación en Matemática Educativa*, *3*(1), 113-130.

Moreno, N., Reducindo, I., Aguilar, R., y Angulo, R. (2018). Enseñanza de la física mediante Fislets que incorporan Mapas Conceptuales. *Apertura*, *10*(2), 20-35.

Moreno, M. N., Font, M. V. y Angulo, V. R. G. (2018). Un estudio sobre la comprensión de las nociones físicas de la mecánica newtoniana: el caso del centro de masa. *Revista de enseñanza de la física*, *30*(2), 7-22.

Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Perales, P. F. J. (1993). La resolución de problemas: una revisión estructurada. *Enseñanza de las Ciencias*, *11*(2), 170-178.

Serway, R., y Jewett, J. (2005). *Física para Ciencias e Ingeniería (Vol. 1)*. Editorial Thomson.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

ACERCA DEL CONOCIMIENTO DE ÍNDOLE AFECTIVO DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICA

CONCERNING MATHEMATICS TEACHERS' AFFECTIVE KNOWLEDGE

Patricia Eva Bozzano, Alejandro Miguel Rosas Mendoza
Liceo "Víctor Mercante"- Universidad Nacional de La Plata (Argentina). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria (México)
pateboz@yahoo.com.ar, alerosas2000@gmail.com

Resumen
Nos hemos propuesto indagar en el profesorado de Matemática sobre las reacciones emocionales en situaciones de enseñanza y aprendizaje. En una primera exploración, los informantes fueron profesores en servicio; en una segunda ocasión, futuros profesores. Relataremos los mecanismos utilizados para la recolección de la información y su contexto, daremos razones sobre la importancia de conocer esta arista de las prácticas de clase. Luego analizaremos la información reunida desde el marco de referencia adoptado cuyo propósito es arrojar luz sobre la dimensión afectiva que subyace en la actividad de clase de Matemática impregnada de creencias, regulada por normas y metas.

Palabras clave: exploración cualitativa de emociones, profesorado

Abstract
We have intended to inquire into mathematics teachers' emotional reactions in teaching and learning situations. In a first inquiry, the participants were in-service teachers; on a second occasion, prospective teachers were involved. We will explain the procedures used for the collection of information and its context. We will give reasons about the importance of knowing this aspect of classroom practices. Then we will analyze the information gathered from the adopted reference framework whose purpose is to shed light on the affective dimension that underlies Mathematics class activity, impregnated with beliefs, and regulated by rules and goals.

Key words: qualitative inquiry of emotions, teacher staff

Introducción

El campo del dominio afectivo, nombre que recibe el área de investigación en matemática educativa centrada en los aspectos afectivos, se propone conocer y explicar la relación entre el afecto y la cognición. Inicialmente la mirada estaba posada sobre los alumnos de nivel inicial-primario y estudiantes de escuela secundaria, como también en maestros y profesores en formación, luego comenzó a generarse un interés en el profesorado en servicio.

Uno de los más grandes representantes en esta línea de investigación es Douglas McLeod, dado que, a través de sus investigaciones logró distinguir a las emociones, las actitudes y las creencias como constructos afectivos. Según Hannula y García Moreno Esteva (2017) a la conceptualización realizada por McLeod (1989) en el campo se la reconoce como *fundacional.* Tiempo después se sumó los *valores* gracias a los aportes de DeBellis y Goldin (1997).

Un importante volumen de investigadores se dedicó a encontrar las interrelaciones entre los diferentes constructos. A lo largo de diversas investigaciones en el campo, como lo reportado por Di Martino y Zan (2011), Pekrun (2006), Hannula (2002), se han encontrado puentes entre las emociones y actitudes en donde la repetición de reacciones emocionales son el origen de las actitudes. A partir de la contribución de Liljedahl (2014) conocemos la relación entre las emociones y las creencias donde las creencias juegan un papel importante en las reacciones emocionales. En todos los casos se trata de situaciones con actividades de aprendizaje de la matemática. En el año 2017 Hannula junto a García Moreno Esteva reconocen la relación entre los constructos creencias-actitudes-emociones, luego de una extensa revisión de bibliografía al respecto. Lo investigado por Gómez Chacón confirma lo postulado por Goldin (1997) y McLeod (1989) sobre las reacciones afectivas y la actividad matemática.

De igual manera, el interés en el campo afectivo puede verse reflejado en conferencias internacionales tales como: International Congress on Mathematical Education (ICME), Congress of the European Society for Research (CERME) y The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PEM) en las cuales se implementan grupos de discusión en el campo. El interés creciente sobre los aspectos afectivos y cognitivos llevó a algunos de los investigadores a conformar durante la década de los 90 el grupo Mathematical Views (MAVI). En la celebración de la conferencia número 25 de MAVI se declaró como objetivo la presentación de resultados de investigaciones en el campo del afecto en educación en matemática.

Dado el notorio interés en investigaciones en el campo afectivo, nos proponemos conocer las experiencias emocionales de los profesores de matemática en sus clases mediante una investigación del tipo cualitativa. Persiguiendo tal propósito, inicialmente se contó con la colaboración voluntaria de profesores de una escuela secundaria de Buenos Aires, Argentina. Con posterioridad y adicionalmente a la investigación, se contó con el aporte de profesores y maestros en pre-servicio que participaron de un taller diseñado a partir de las experiencias reportadas por Liljedahl (2014). En su trabajo investiga las emociones en futuros maestros en situaciones de actividad matemática, reportando a las emociones como anclaje y vinculadas con los otros constructos afectivos.

El proceso de exploración sigue en curso, sufriendo algunas reformulaciones en la instrumentación, con nueva revisión bibliográfica y ampliando el número de participantes.
Con el marco adoptado para el análisis de los datos reunidos y apoyados en la literatura en el campo, presentamos una aproximación sobre conocimiento de las emociones de los profesores.

Marco de referencia en el campo de estudio

El educador en matemática experimenta el rol de estudiante y el rol de profesor. Su propia historia como estudiante de matemática conforma su visión, su posicionamiento epistemológico y teórico como profesor, esa historia construye constantemente su complejo de *creencias*. En adhesión a lo propuesto por McLeod (1989) a partir de los hallazgos en estudiantes durante actividades de resolución de problemas, la repetición de experiencias emocionales es el origen de la *actitud* hacia la matemática.

Nos interpelamos, ¿acaso la decisión de un profesor en su clase es unilateral, sin razones? Creemos, a partir del recorrido que hemos emprendido, que toda decisión de enseñanza trae consigo algún componente afectivo. Tal y como Di Martino y Zan (2011) señalan, el sistema de creencias de una persona es el que subyace a la reacción emocional.

Entonces, ¿será que ese profesor posee alguna creencia respecto al aprendizaje? Aquí se pone de relieve que el profesional docente tiene a su cargo una responsabilidad tal que es imprescindible conocer y analizar los aspectos afectivos y su incidencia en las decisiones pedagógicas.

Centramos nuestra investigación en la pregunta: ¿cuáles son las emociones y su valoración cognitiva de los profesores de matemática en sus clases?

Creemos que conocer los mecanismos que subyace y regulan las decisiones de enseñanza y la gestión de la clase del profesor, arrojará luz sobre las necesidades del propio profesorado en servicio y más aún el que se está formando (pre-servicio), proporcionando orientaciones, recursos y asistencia dirigida hacia la búsqueda de la mejora constante del quehacer del profesor en el aula. Dado que las emociones involucran reacciones psicológicas que desvían la atención y la memoria, y activan tendencias de acción (Zan, Brown, Evans y Hannula, 2006).

Afectividad

Bajo una dimensión sociocultural en la construcción del saber matemático, los afectos son parte importante en las interacciones sociales tal y como ocurre en las aulas. Encontramos un gran número de literatura acerca de los componentes afectivos presentes en los estudiantes (Damasio 1996; Di Martino y Zan 2001; Hannula 2002; Evans 2000; Bishop 2001; citados por Zan et al., 2006).

Desde un enfoque constructivista cognitivo y a partir de revelaciones provenientes desde la neurociencia, se sugiere que la repetición de experiencias emocionales pueden ser vistas como las bases para actitudes y creencias (Zan et al., 2006). Las primeras son más intensas, pero menos estables que las últimas, en tanto que las creencias son menos intensas. En términos de McLeod (1989), este mecanismo parece regular la formación de creencias tales como la auto eficacia, la auto regulación.

En cuanto a las emociones, McLeod (1989) adopta el modelo constructivista-cognitivo en la descripción de procesos de experiencias emocionales, llegando a afirmar que la emoción experimentada puede conducir a una reducción en capacidad consciente disponible para la resolución de problemas.

A partir de aquellas investigaciones que analizan las respuestas emocionales en la educación en matemática, McLeod (1989) considera que la estructura global, el sistema de clasificación general desarrollado por la teoría de la estructura cognitiva de las emociones de Ortony, Collins y Clore (1996) resulta apropiado en el área.

En cuanto a relaciones entre creencias y emociones, dado que la teoría de la estructura cognitiva de las emociones de (Ortony et al., 1996) asume la influencia de las creencias en la activación y valoración de las emociones, los autores Di Martino y Zan (2011) sostienen lo adecuado de su utilización en el análisis en busca de puentes entre ambos constructos.

Para delimitar el marco conceptual de nuestra investigación y adhiriendo a la clasificación realizada por Mc Leod (1989), asumimos como *creencia* al juicio que realiza una persona sobre el valor de verdad o falsedad de una proposición (Molina y Martínez Sierra, 2018).

De acuerdo a la definición proveniente desde la psicología social, de Hannula (2002) adoptamos la conceptualización para *actitud,* considerándola como una tendencia psicológica que se expresa mediante la evaluación de una identidad particular con algún grado de favor o desfavor. El investigador además agrega que dicha evaluación incluye aspectos cognitivos, conductuales y afectivos (p.44).

En la literatura sobre afecto en educación en matemática, la teoría de Pekrun (2006) propone que la *emoción* es un multicomponente que coordina procesos de subsistemas psicológicos incluyendo el afectivo, el cognitivo, el motivacional, el expresivo y los procesos psicológicos periféricos (p. 316).

Puesto que, para el análisis de los datos reunidos en el trabajo de campo, nos apoyamos en la teoría de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony et al., 1996), asumimos como definición para *emoción*: reacción con valencia (valoración negativa o positiva) ante acontecimientos, agentes u objetos y la naturaleza particular de las cuales viene determinada por la manera como es interpretada la situación desencadenante (p.16).

Marco de referencia para el análisis

La teoría de la estructura cognitiva de las emociones no se propone definir emoción, sino se centra en la contribución que hace la cognición a la emoción. Los autores consideran que las emociones surgen como resultado de ciertas clases de cogniciones, que están determinadas por la estructura, contenido y organización de las representaciones cognitivas y por los procesos que operan en ellas, que en ocasiones puede ser accesible a la conciencia (Ortony et al., 1996, p.5). La teoría sostiene que las emociones surgen como resultado de la manera como las situaciones que las originan son elaboradas por la persona que las experimenta. Así, la estructura global propuesta por la teoría, clasifica a las emociones a partir de las situaciones desencadenantes de acuerdo a tres aspectos de la realidad: acontecimientos, agentes y objetos (Tabla 1). Se considera que la emoción es uno de los aspectos centrales de la experiencia humana, con posibilidad de causar rupturas en el juicio y en la acción.

Esta teoría también describe la estructura de la valoración, afirmando que la mayoría de las cosas que las personas hace tiene un motivo, por lo cual puede decirse que las personas tienen algún tipo de estructura que subyace a su conducta, llamadas: metas, normas, creencias. Las metas sustentan las valoraciones de la deseabilidad en el caso de los acontecimientos, las normas sustentan las valoraciones de la plausibilidad en el caso de los agentes (y sus acciones) y las actitudes sustentan las valoraciones de la capacidad de atraer de los objetos.

Tabla 1. *Tipos de emociones de acuerdo con la teoría de la estructura cognitiva de las emociones Ortony et al. (1996).*

Clase	*Grupo*	*Tipos (ejemplos de nombres)*
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (feliz-por)
		Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (alegre por el mal ajeno)
		Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (resentido-por)

Clase	***Grupo***	***Tipos (ejemplos de nombres)***
		Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (quejoso/apenado-por)
	Basadas en previsiones	Contento por la posibilidad/previsión de un acontecimiento deseable (esperanza)
		Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (satisfacción)
		Contento por la refutación de la posibilidad/previsión de un acontecimiento indeseable (alivio)
		Descontento por la refutación de la posibilidad/previsión de un acontecimiento deseable (decepción)
		Descontento por la posibilidad/previsión de un acontecimiento indeseable (miedo)
		Descontento por la confirmación de la posibilidad/previsión de un acontecimiento Indeseable (temores confirmados)
	Bienestar	Contento por un acontecimiento deseable (jubilo)
		Descontento por un acontecimiento indeseable (congoja)
Reacciones ante los agentes	Atribución	Aprobación de una acciónn plausible de *uno mismo* (orgullo)
		Aprobación de una acción plausible de otro (aprecio)
		Desaprobación de una acciónn censurable de *uno mismo* (autorreproche)
		Desaprobación de una acción censurable de otro (reproche)
Reacciones ante los objetos	Atracción	Agrado por un objeto atractivo (agrado)
		Desagrado por objeto repulsivo (desagrado)

Clase	*Grupo*	*Tipos (ejemplos de nombres)*
Reacciones ante los agentes y simultáneamente ante las consecuencias de los acontecimientos	Bienestar/ atribución	Aprobación de la acción plausible de otra persona (aprecio) y contento por un acontecimiento deseable (júbilo): gratitud
		Desaprobación de la acción censurable de otra persona (reproche) y disgusto por un acontecimiento indeseable (congoja): ira
		Aprobación de la acción plausible de uno mismo (orgullo) y contento por un acontecimiento deseable (júbilo): complacencia
		Desaprobación de la acción censurable de uno mismo (vergüenza) y disgustado por un acontecimiento indeseable (congoja): remordimiento

Con respecto a las variables que afectan la intensidad de las emociones, en cada clase se identifican variables locales (Tabla 2).

Tabla 2. Variables que afectan la intensidad de cada clase de emoción de acuerdo con la teoría de la estructura cognitiva de las emociones Ortony et al. (1996).

Clase	*Variable global*	*Variable local*
Acontecimientos	Deseabilidad	Previsiones: probabilidad-esfuerzo-realización, deseabilidad-afecto-merecimiento
Agentes	Plausibilidad	Atribución: fuerza de la unidad cognitiva. desviación de las expectativas
Objetos	Capacidad de atraer	Atracción: familiaridad

Aspectos metodológicos

Traemos los primeros hallazgos de una exploración realizada sobre las reacciones emocionales de profesores en servicio que se desempeñan en una Escuela Secundaria de la provincia de Buenos Aires, Argentina. En esta ocasión, el mecanismo que nos permitió reunir la información fue la transcripción y análisis de entrevistas realizadas a los participantes.

Los cinco voluntarios respondieron a preguntas diseñadas a partir de un protocolo utilizado en otras investigaciones (véase García González y Martínez Sierra, 2018). El cuestionario de preguntas abiertas y semi estructuradas condujo a los participantes a evocar recuerdos sobre situaciones con reacciones emocionales en sus clases de matemática. Para acceder a las emociones experimentadas por una persona, Ortony Collins y Clore (1996) afirman que puede tenerse en cuenta el lenguaje como una de las clases de evidencias.

En la transcripción de cada entrevista, de acuerdo a la teoría adoptada para el análisis, se identificaron el tipo de emociones de acuerdo a tres especificaciones:

- las evidencias en frases que den cuenta de las condiciones desencadenantes de la experiencia emocional con ***letra cursiva negrita***
- las palabras que expresan la experiencia emocional en *letra cursiva*
- las variables que intensifican la emoción se subrayan.

A continuación ejemplificamos:

> Es *maravilloso* cuando hay ***alumnos que proponen situaciones totalmente que nos descolocan*** y uno tiene que ponerse a pensar "Uy, caramba ¿por dónde lo está pensando?

El trabajo de investigación llevado a cabo durante los años 2014, 2015 y 2016, como parte de la Tesis para la obtención de la Maestría en Ciencias en Matemática Educativa en el Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México, se trata de una primera aproximación para conocer las reacciones emocionales de los profesores de matemática.

Ampliamos, en esta presentación, con un primer análisis bajo el mismo marco de referencia, de información similar pero reunida de estudiantes del profesorado y estudiantes de magisterio. En este caso los informantes participaron de un taller en el que debieron completar un cuestionario con valores en escala de cada respuesta, sobre sus experiencias emocionales a medida que se desarrollaban las actividades centradas en la resolución de problemas no tradicionales. El taller se llevó adelante en las segundas Jornadas de Enseñanza, Capacitación e Investigación en Ciencias Naturales y Matemática (II JECICNaMa) en Buenos Aires. Como cierre del mismo se los invitó a diseñar viñetas que dieran cuenta de emociones valoradas positiva y negativamente (Imagen 1, Imagen 2). Además, se los invitó a proveer cierta información personal y anónima, para poder trazar un contexto relativo a cuestiones biográficas, de identidad de los participantes.

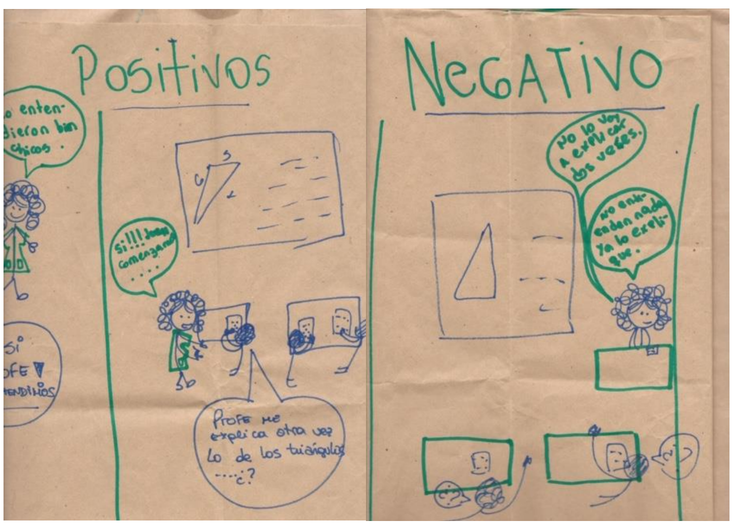


Imagen 1, Imagen 2. *Evidencias en forma pictórica de situaciones que desencadenan reacciones emocionales. Imagen generada con datos propios.*

Como inicialmente nos propusimos conocer las reacciones emocionales de los profesores de matemática, actualmente continuamos la exploración en una mayor muestra de profesores de Matemática argentinos.

Apoyándonos en hallazgos anteriores, junto a una nueva revisión de literatura, nos proponemos replicar la exploración previa al mismo tiempo de buscar la reaparición de los resultados, como también la validez y viabilidad de los mecanismos instrumentados.

Análisis de los datos reunidos

El análisis de los relatos de los profesores en las entrevistas arrojó evidencias de los momentos y situaciones en sus clases que provocan reacciones con valencia en los mismos. En el proceso de análisis se identificó la situación desencadenante tanto como acontecimientos vividos en la clase, como también las acciones de los alumnos como agentes y la propia acción. Dada la estructura global de la teoría adoptada como marco, los mecanismos para la valoración de tales reacciones con valencia son las metas en el caso de los acontecimientos, las normas en el caso de los agentes. A continuación se da una imagen de lo obtenido en el análisis (Tabla 3.)

Tabla 3. *Los momentos de la clase de matemática que desencadenan reacciones emocionales en los profesores. (Elaboración propia)*

Situación que provoca la reacción	Aspecto que lo provoca	Valoración/evidencias léxicas	Mecanismo para la valoración
Actividades frente al grupo total de alumnos	Acontecimiento	*Estoy contenta, satisfecha con la clase de hoy*	Metas: que los alumnos alcancen algún nivel de logro
Actividades frente al grupo total de alumnos	Agentes	*...uno lo ve con frustración porque a mí me gustaba resolver...y ahora veo que es una carga para ellos...*	Normas: cómo debería ser, qué debería hacer un alumno en la clase de matemática
Exploración de conocimientos previos	Acontecimiento	*...armar un trabajo en grupos...los grupos no hacen nada...me deja un sabor amargo, es una desilusión...*	Metas: que los alumnos hagan matemática juntos
Uso de tecnología	Agentes	*...en 40 minutos hicieron los gráficos....mucho más de lo que yo esperaba...*	Normas: qué debería hacer un alumno en la clase de matemática mediada con tecnología
Situaciones de formulación	Agentes	*Es maravilloso cuando hay alumnos que proponen situaciones que nos descolocan...*	Normas: cómo debería ser, qué debería hacer un alumno en la clase de matemática

Respecto a la información reunida en el taller brindado a los profesores en pre-servicio, aquella que describe reacciones emocionales realizadas en registro pictórico mediante viñetas a modo de historieta, responde a las experiencias como alumnos y como estudiantes de profesorado. El análisis preliminar correspondiente arroja reacciones ante acontecimientos: las evaluaciones; acontecimientos y agentes: la gestión de una clase por parte del profesor del curso; agentes: como resolutor de problemas. A continuación, se dan detalles sobre la situación desencadenante, la valoración, el mecanismo de valoración que subyace en cada caso que ha surgido mediante el análisis correspondiente (Tabla 4).

Tabla 4. *Descripción de reacciones emocionales relatadas por estudiantes de profesorado. (Elaboración propia)*

Situación que provoca la reacción	Aspecto	Valoración/evidencias pictográficas icónicas	Mecanismos para la valoración
Gestión de una clase	Acontecimiento-agente	Las imágenes dan cuenta de una clase ostensiva, la palabra la tiene el docente y el alumno es un actor pasivo	Metas: las situaciones de enseñanza deben generar aprendizaje en alumnos que hacen matemática. Normas: cómo debería gestionar su clase de matemática el profesor
Gestión de una clase	Acontecimiento-agente	Las imágenes dan cuenta de una clase en la que el discurso es democratizador para llevar la matemática a los alumnos, el alumno es responsable de su propio aprendizaje	Metas: las situaciones de enseñanza deben generar aprendizaje en alumnos que hacen matemática. Normas: cómo debería gestionar su clase de matemática el profesor
Evaluación	Acontecimiento	Las imágenes dan cuenta de una situación de evaluación en la que los alumnos manifiestan no saber resolver	Metas: dar evidencias de haber aprendido
Resolver un problema	Agentes	Las imágenes muestran al alumno frente a la resolución de un problema en solitario y luego de varios intentos logra con éxito resolverlo	Normas: ser capaz de enfrentar un problema matemático con éxito

Discusión de primeros resultados

De acuerdo a lo relatado por los profesores en servicio, podemos distinguir diferentes momentos en las clases de matemática en los que aparecen las reacciones emocionales. Las mismas se desencadenaron a partir de acontecimientos y/o acciones de agentes, provocando: decepción, satisfacción, sobresalto, aprecio, por nombrar algunas.

Presentamos a continuación (Tabla 5) un resumen de las reacciones emocionales reportadas por los entrevistados, como también aquellas variables que se identificaron como responsables de intensificar las reacciones emocionales (Tabla 6).

Tabla 5. *Las emociones reportadas por los profesores entrevistados. (Elaboración propia)*

Variable que afecta la intensidad: Desviación de las expectativas			
Reacción ante/ Grupo	**Tipo de emoción**	**Situación desencadenante**	**Expresiones léxicas**
Agentes Atribución	Aprecio	Interacción del alumno en una situación didáctica	Maravilloso
		Acción del alumnado ante tareas no tradicionales	Bueno, Lindo
		Acción del alumnado frente actividades mediadas con tecnología	Fantástico
		Acción del alumnado frente a la resolución de problemas	Asombro
	Reproche	Acción del alumnado ante tareas fuera del aula	Frustración

Tabla 6. *Las variables identificadas como intensificadoras de la emoción. (Elaboración propia)*

Variables que afectan la intensidad: Intensidad de la emoción de esperanza concominante. El esfuerzo empleado en tratar de alcanzar el acontecimiento. El grado en que se ha realizado el acontecimiento.			
Reacción ante/ Grupo	**Tipo de emoción**	**Situación desencadenante**	**Expresiones léxicas**
Acontecimientos	Sobresalto/ sorpresa agradable	Cumplimiento de los propósitos de enseñanza	Sabor amargo Contento
	Satisfacción	Cumplimiento de los propósitos de enseñanza	Lindo-Bueno-Fantástico
	Decepción	Cumplimiento de los propósitos de enseñanza	Tristeza-Fracaso
	Decepción Satisfacción	Clase diseñada para el trabajo en grupos, acción del alumnado.	Desilusión Bárbaro
	Decepción	Diseño de evaluación esperando éxito del alumnado.	Desilusión

De la información reunida de los profesores en pre-servicio, a partir del análisis preliminar de los registros pictóricos, se identificó situaciones de aprendizaje.
En este análisis se encontró reacciones ante acontecimientos y agentes: ira, complacencia y gratitud, congoja, aprecio, de acuerdo con la estructura global de la teoría cognitiva de las emociones adoptada.

En este punto, nos interesa señalar la utilidad de la teoría de la estructura cognitiva de las emociones (Ortony et al., 1996) al momento de identificar situaciones desencadenantes de reacciones emocionales según la clase de emoción, al mismo tiempo que facilitó la identificación de variables de intensificación. La teoría sostiene que sobre las metas se conciben las previsiones y las acciones se valoran a partir de las normas, estos elementos emergen en las prácticas docentes dando oportunidad de observarlas, evaluarlas en pos de toma de decisiones pedagógicas adecuadas.

Creemos importante proveer de enfoques y lineamientos teóricos pertinentes que puedan articularse en las prácticas docentes y en la gestión de las clases que contribuya en las decisiones de enseñanza de los profesores a partir de la reflexión en torno a la génesis de índole afectiva de las actitudes y creencias de los mismos.

En este sentido, la investigadora García González (2017, 2018) considera el conocimiento afectivo como uno de los conocimientos especializados del profesor, Molina y Martínez Sierra (2018) enfatizan la importancia de las creencias del profesor, Lake (2017) en su investigación encontró vinculación entre la gestión de la clase y la administración afectiva de los errores del profesor con la motivación en los alumnos, García González y Pascual Martín (2017) afirman haber hallado que las emociones experimentada por el profesor participante en la investigación condicionó su propia.

Apoyándonos en la revisión bibliográfica e investigaciones previas en el campo, persiguiendo la replicabilidad de la exploración iniciada para conocer las reacciones emocionales de los profesores de matemática en sus clases (veáse Bozzano, 2016), creemos que el conocimiento emocional del profesorado contribuirá a futuras exploraciones y al propio profesorado.

Conclusiones preliminares

Al momento, en nuestra exploración hallamos evidencias léxicas que dan cuenta de reacciones ante acontecimientos, agentes, acontecimientos-agentes simultáneamente. Encontramos que todo lo narrado por los profesores pude ser sometido a análisis de acuerdo a la teoría de la estructura cognitiva de las emociones. Así, en el interior de la micro-sociedad, que es la clase de matemática, las situaciones desencadenantes son evaluadas y valoradas con intensidad de acuerdo con el juicio de quien experimenta la emoción y a causa de sus previsiones.

Siguiendo esta dirección, trabajando para conocer las emociones de los profesores de Matemática, contribuimos con el campo afectivo hacia la ampliación del conocimiento al respecto con el propósito de beneficiar la actuación pedagógica del profesorado.

Referencias bibliográficas

Bozzano, P. E. (2016). *Factores afectivos y pensamiento matemático. Experiencias emocionales de profesores de matemática.* Tesis de Maestría no publicada. Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

DeBellis, V.A. y Goldin, G. (1997) The affective domain in mathematical problem solving. En E. Pehkonen (Ed.), *Proccedings of 21st PME Conference*, Vol.2 (pp.209-216). Lahti, Finland.

Di Martino, P., Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM: the international journal on mathematics education 43*(4). 471-482. Publicación previa en línea. doi: 10.1007/s11858-011-0309-6

García González, M. del S. y Martínez Sierra, G. (2018) Un estudio exploratorio sobre las emociones de profesores de matemáticas. En C. Dolores Flores, G. Martínez Sierra, M. S. García González, J. A. Juárez López, J. C. Ramírez Cruz. (Eds.), *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa* (pp. 283-294). México: Ediciones Eón y Universidad Autónoma de Guerrero.

García González, M. del S. y Pascual Martín, M. I. (2017) De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIEH 8* (15), 133-148.

García González, M. S. y Martínez Sierra, G. (2018). Conocimiento emocional y conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 31*(1) (pp. 734-740). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de https://clame.org.mx/uploads/actas/alme31_1.pdf

Gómez Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión escolar. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas.* Tesis de Doctorado no publicada. Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid. Madrid. Recuperada de https://eprints.ucm.es/2249/1/T22147.pdf

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics 49*(1)*,* 25–46. Publicación previa en línea. doi: 10.1023/A:1016048823497

Hannula, M. S. y García Moreno Esteva, E. (2017). Identifying subgroups of CERME affect research papers. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1098-1105). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

Lake, E. (2017). To err is human. The management and emotional implications of teacher error. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1122-1129). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education & ERME.

Liljedahl, P. (2014). Emotions as an orienting experience. En L. Sumpter (Ed.), *Proceeding of the MAVI 20th Conference* (pp.21-32). Falun, Sweden: Högskolan Dalarna.

McLeod, D. (1989). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). New York: MacMillan.

Molina, N. M., Martínez Sierra, G. (2018). Creencias de profesores acerca del aprendizaje de las matemáticas. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa 31*(2) (pp. 1657-1664). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado de https://clame.org.mx/uploads/actas/alme31_2.pdf

Ortony, A., Clore, G.L., y Collins, A. (1996). *La estructura cognitiva de las emociones*. México: siglo XXI.

Pekrun, R. (2006). The control-valor theory of achievement emotions: assumptions, corollaries and implications for educational research and practice. *Education Psychology Review* 15, 315-341. Publicación previa en línea. doi: 10.1007/s10648-006-9029-9

Zan, R. Brown L., Evans, F & Hannula, M. (2006). Affect in Mathematics Education: an introduction. *Educational Studies in Mathematics* 63(2006)*,* 113-121.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DIDÁCTICO-MATEMÁTICA EN PROBABILIDAD CON DOCENTES DE EDUCACIÓN INFANTIL A TRAVÉS DE LA ADAPTACIÓN Y EXPERIMENTACIÓN DE UN JUEGO

DEVELOPING DIDACTIC-MATHEMATICAL COMPETENCE IN PROBABILITY WITH CHILDHOOD EDUCATION TEACHERS THROUGH THE ADAPTATION AND EXPERIMENTATION OF A GAME

Pablo Beltrán-Pellicer, Maria Ricart, Assumpta Estrada
Universidad de Zaragoza. Universidad de Lleida. Universidad de Lleida (España)
pbeltran@unizar.es, maria.ricart@matematica.udl.cat, aestrada@matematica.udl.cat

Resumen
Presentamos los resultados obtenidos en el seno de una investigación orientada al desarrollo de la competencia didáctico-matemática en probabilidad con docentes de educación infantil. La tarea que se propone es el diseño de un juego en el que se han de tomar decisiones empleando un razonamiento probabilístico informal. Los resultados, en particular la diversidad de objetos matemáticos puestos en juego y los errores conceptuales manifestados por las participantes, señalan la riqueza de este tipo de tareas y la necesidad de potenciar el desarrollo de esta competencia tanto en futuros docentes como en los programas de formación permanente. Además, este tipo de actividades se revela como una oportunidad para el aprendizaje de conocimientos específicos.

Palabras clave: invención de problemas, juegos de probabilidad, formación de profesores

Abstract
We present the results obtained in a research aimed at the development of didactic-mathematical competence in probability in teachers of early childhood education. The task proposed consists of the design of a game in which decisions must be made by using informal probabilistic reasoning. The results, in particular the diversity of mathematics objects used, and the conceptual errors shown by the participants, indicate the richness of this type of tasks and the need to promote the development of this competence both in prospective teachers and in continuing education programs. In addition, this type of activity proved to be an opportunity for learning specific knowledge.

Key words: problem posing, probability games, teacher training

Introducción

Hay un consenso en la comunidad de investigadores en educación matemática en que la resolución de problemas debería ser el eje sobre el que articular la enseñanza y el aprendizaje (English & Gainsburg, 2016). Sin embargo, no está claro qué significa abordar la resolución de problemas ni tampoco hay un acuerdo en cómo debería ser tal propuesta curricular. Una forma de trabajar la resolución de problemas es la invención, generación de problemas o *problem posing* (Singer, Ellerton, & Cai, 2015). En ese sentido, dentro de la formación del profesorado, se ha utilizado el diseño o adaptación de juegos como actividad introductoria a la invención de problemas (Milinković, 2015). En este trabajo se presentan los resultados de una experiencia realizada en un curso de posgrado para maestros de infantil y primaria, orientada al desarrollo de la competencia de análisis didáctico-matemático sobre probabilidad.

Marco teórico

El estudio se enmarca en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero, & Font, 2007), donde ha surgido el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM de aquí en adelante), un modelo de categorías para describir, en detalle, tanto el conocimiento didáctico-matemático (Pino-Fan y Godino, 2015) como las competencias profesionales del docente de matemáticas (Breda, Pino-Fan, & Font, 2017; Font, 2018; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017). En concreto, esta investigación se centra en estudiar un tipo de tarea específicamente diseñada para desarrollar la competencia general de diseño e intervención didáctica y, particularmente, la subcompetencia en análisis ontosemiótico en un contexto de probabilidad.

La competencia didáctico-matemática conocida como competencia general de diseño e intervención didáctica en el modelo del CCDM está compuesta por cinco subcompetencias, siendo una de ellas la subcompetencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, que es en la que se centra este trabajo. Esta consiste en el reconocimiento, por parte del profesor, de los objetos matemáticos (situaciones-problema, conceptos, elementos lingüísticos, procedimientos, proposiciones y argumentos) emergentes e intervinientes en una práctica matemática, además de sus significados (Godino et al., 2017). Dicha subcompetencia es la que capacita al docente para comprender los aprendizajes de sus alumnos, así como evaluar su nivel de competencia matemática e, incluso, gestionar la institucionalización del conocimiento.

Metodología

Se trata de un estudio de caso que sigue una metodología cualitativa e interpretativa (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014). Las participantes con las que se lleva a cabo la experiencia son nueve maestras sin experiencia docente, cuatro en Educación Infantil y cinco en Educación Primaria, que cursan un máster de formación especializada para maestros. En el curso de posgrado donde se contextualiza esta experiencia se abordaron algunos juegos de probabilidad y actividades para desarrollar específicamente la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas. La observación participante es la técnica de recogida de datos, junto con el análisis de las producciones de las estudiantes, las cuales consisten en el trabajo que desarrollaron en dicho curso y que se describe a continuación.

Se propuso a las participantes realizar un proyecto basado en la adaptación o diseño de un juego para trabajar contenidos de probabilidad. Se exigía elaborar un prototipo y una propuesta para llevar el juego al aula, así como efectuar un análisis ontosemiótico de los objetos matemáticos involucrados y una valoración a priori de la idoneidad didáctica. En este trabajo se presenta el análisis detallado de la adaptación del juego conocido en ocasiones como "la carrera de caballos". Este juego lo realizó una de las parejas de Educación Infantil. En él, los participantes eligen entre seis o doce fichas, dependiendo de si se lanza uno o dos dados, e intentan predecir el ganador. Por turnos, se lanzan los dados y se avanza la ficha cuyo número coincide con la cara en cuestión o con la suma (si se juega con dos dados). El objetivo didáctico en el juego con un dado es proporcionar una experiencia sobre sucesos simples y equiprobables, puesto que todos tienen probabilidad 1/6. Sin embargo, con el juego de dos dados se considera la suma, que es un suceso compuesto, ocasionando que cada resultado tenga una probabilidad diferente.

El trabajo realizado por cada equipo de estudiantes se corresponde a un proceso de ingeniería didáctica orientada al diseño (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa, & Wilhelmi, 2014). La primera fase de la ingeniería, el análisis preliminar, es la elección del juego de manera consensuada por el profesor-investigador. Una vez definidos los objetivos de aprendizaje que se pretenden conseguir con la adaptación del juego, las participantes elaboran un prototipo y realizan un análisis ontosemiótico de objetos y significados, a priori, del juego, siendo esto la segunda fase. Después, experimentan con el prototipo y con la actividad de aula asociada (proyecto estadístico sobre las partidas). Finalmente, llevan a cabo un análisis ontosemiótico a posteriori, después de una sesión en la que se probaron los juegos de todas las participantes, con el objetivo de validarlos y recoger propuestas de mejora.

Análisis de resultados

La variación del juego más destacable que propusieron las estudiantes consistió en emplear una ruleta en lugar de los dados para determinar la ficha que avanza, siendo un coche en su caso. Así pues, se va haciendo girar la ruleta y se mueve el coche en cuyo color se para la ruleta. Esta está pensada para ser reconfigurable según avanza el juego mediante un sistema adhesivo (Figura 1). La ruleta, que es un material clásico en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, proporciona una experiencia diferente a la de los dados, puesto que se trata de sucesos simples ("rojo", "verde", etc.) pero no necesariamente equiprobables. De esta manera, para escoger el coche (ficha) con mayor probabilidad de victoria hay que elegir el color de la ruleta cuyo sector presenta mayor área. En cualquier caso, como veremos, el instrumento generador de eventos aleatorios cambia dependiendo del número de jugadores.

Figura 1. *Juego ¡Voy a ser el más rápido!*

En las instrucciones del juego, las estudiantes distinguen el modo de jugar dependiendo de si se trata de dos, tres o cuatro jugadores. Para dos jugadores, se utiliza una moneda como instrumento generador de sucesos aleatorios y, de esta forma, se hace avanzar el coche de cada jugador dependiendo si sale una opción u otra. Observemos que aquí el juego ofrece la misma probabilidad de éxito para ambos jugadores. Sin embargo, se introduce un elemento que puede hacer variar las opciones para cada jugador. Cuando se llega a la quinta casilla, se toma la primera tarjeta del mazo de preguntas, que exige la puesta en juego de lenguaje sobre probabilidad a nivel informal y, en caso de no dar con la respuesta correcta, el jugador pierde un turno. Los textos de las tarjetas son:

- ¡Has tenido suerte! Puedes volver a tirar.
- ¿Es posible que al lanzar la moneda salga cara?
- ¿Es posible que al lanzar la moneda salga cruz?
- ¿Es posible o imposible que salga una opción diferente a cara o cruz?
- ¿Es posible o imposible que salga cara dos veces consecutivas?
- ¿Es imposible que salga tres veces seguidas cruz?
- ¿Es posible o imposible que salga cruz dos veces consecutivas?
- ¿Es imposible que salga tres veces seguidas cara?

En el caso de tres jugadores, el instrumento que genera los sucesos aleatorios pasa a ser un dado, y cada jugador ha de elegir dos números (de un dado cúbico de seis caras). Al igual que para la modalidad de dos jugadores, la probabilidad de ganar es la misma, inicialmente, para cada jugador. Las preguntas que aparecen en las tarjetas de la quinta casilla son:

- ¡Has tenido suerte! Puedes volver a tirar.
- ¿Es posible que salga el número 4?
- ¿Es imposible que salga el número 1?
- ¿Es posible o imposible que salga el número 0?
- ¿Es posible que al lanzar el dado dos veces salga el número 3?
- ¿Es posible o imposible que salga el número 9?
- ¿Es imposible que al lanzar el dado dos veces salga el número 2?
- ¿Es posible o imposible que al lanzar el dado salga el número 1 tres veces consecutivas?

La ruleta es el instrumento que va a introducir el azar en las partidas a cuatro jugadores, cobrando importancia la elección inicial del color del coche. Para ello, los jugadores han de analizar la ruleta y razonar sobre el color más probable. Aunque no se aprecia en la Figura 1, la ruleta está formada por sectores circulares que se pueden poner y quitar gracias a un sistema de velcros. Las preguntas que aparecen en las tarjetas de la quinta casilla son:

- ¡Has tenido suerte! Puedes cambiar la ruleta
- ¿Es posible o imposible que salga el color azul en la ruleta?
- ¿Qué color tiene mayor probabilidad de salir?
- ¿Es posible que gane el coche de color naranja?
- ¿Es posible o imposible que salga en la ruleta el color rosa?
- ¿Es seguro que va a ganar el coche que va primero?
- ¿Es posible que gane el coche de color verde?
- ¿Es coche tiene menos posibilidad de salir?

En la descripción del juego se observan imprecisiones o confusiones, que ponen de manifiesto algunas carencias en el conocimiento matemático especializado. Esto se traduce en una baja competencia de análisis. Por ejemplo, al señalar que el juego no es equiprobable hacen referencia al “tanto por ciento” en lugar de emplear expresiones como “probabilidad de cada resultado” o “probabilidad de cada suceso simple”:

> En esta versión, el juego no es equiprobable ya que varía el tanto por ciento que tiene cada suceso.

Así mismo, en el trabajo, las estudiantes realizan un análisis sobre cómo influye la probabilidad en el juego, distinguiendo los diferentes casos en función del número de jugadores. De esta manera, en la Figura 2 se representan los diagramas de sectores que muestran las probabilidades de cada suceso en los casos de dos y tres jugadores (moneda y dado).

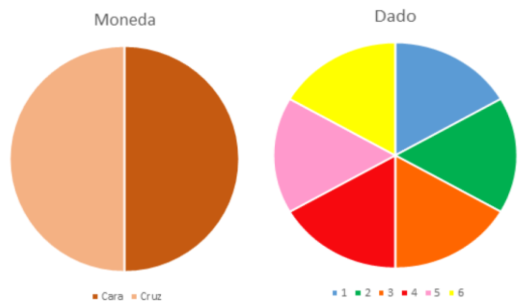


Figura 2. *Diagrama de sectores con los resultados posibles para uno y dos jugadores (moneda y dado).*

Las estudiantes complementan estos diagramas con el cálculo de la probabilidad para cada uno de los sucesos a partir de la regla de Laplace. Si bien utilizan fracciones en la explicación, se encuentran más cómodas utilizando porcentajes para la probabilidad (Tabla 1).

Tabla 1. *Análisis de probabilidad para el caso de dos jugadores.*

	Probabilidad (%)	Explicación
Cara	50%	Hay 50%, 0.50 o ½ de probabilidad de ganar Hay la misma probabilidad de ganar en los dos casos
Cruz	50%	

Más interesante resulta el análisis para el caso de cuatro jugadores, donde el análisis con diagramas de sectores es un reflejo de las diferentes configuraciones de la ruleta (Figura 3).

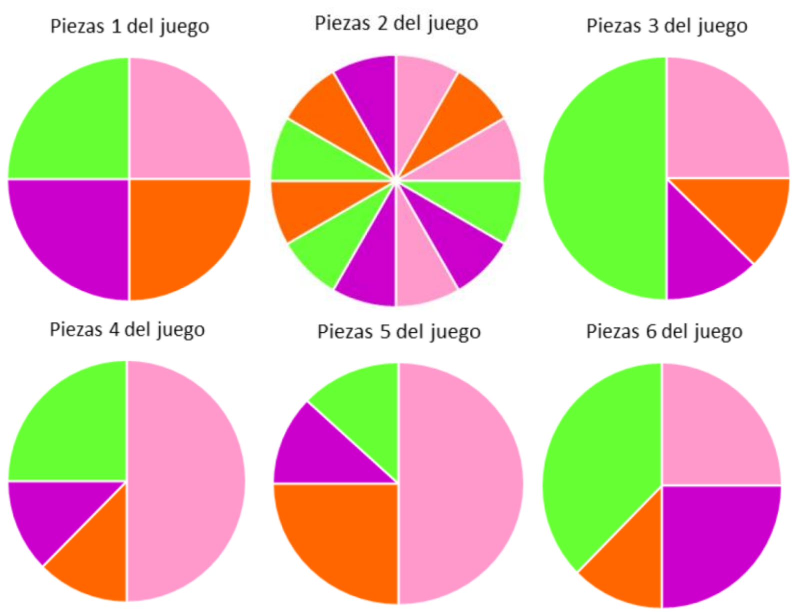


Figura 3. *Juego ¡Voy a ser el más rápido!*

Para cada una de las configuraciones, las estudiantes proporcionan una tabla similar a la Tabla 1, donde calculan la probabilidad de cada suceso. Resulta interesante observar que las explicaciones son pertinentes cuando se trata de sucesos equiprobables, como en el dado, pero no cuando no son equiprobables. Esto puede deberse a una errata o a una dificultad a la hora de manejar la representación fraccionaria de la probabilidad, pero no disponemos de más datos para profundizar en ello. Así, para las piezas 1 del juego, se expresan así:

> En todos los casos hay un 8.33%, 0.833 o 3/12 de que salga uno de los cuatro colores.
> Los 4 colores tienen la misma posibilidad de salir ganador

En cambio, para las piezas 4 del juego, escriben lo siguiente (Tabla 2), donde las explicaciones no aportan el argumento que conduce al cálculo de la probabilidad, además de haber una errata en la representación fraccionaria del naranja y del lila:

Tabla 2. *Análisis de probabilidad para el conjunto de piezas 4 (cuatro jugadores).*

	Probabilidad (%)	**Explicación**
Rosa	50%	Hay 50%, 0.50 o 4/8 de posibilidades de que salga ganador
Naranja	12.5%	Hay 12’5%, 0.125 o 4/8 de posibilidades de que salga ganador
Lila	12.5%	Hay 12’5%, 0.125 o 4/8 de posibilidades de que salga ganador
Verde	25%	Hay 25%, 0.25 o 2/8 de posibilidades de que salga ganador

Una vez descrito el juego y realizados los cálculos de las probabilidades, las estudiantes proceden a realizar un análisis ontosemiótico para identificar los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas que se ponen en marcha. Comienzan distinguiendo tres situaciones-problema. En primer lugar, la que se articula en torno a la pregunta “¿cuál será el coche ganador?”, que no es sino la cuestión que motiva el juego en sí. Resulta interesante que las participantes identifiquen una segunda situación al momento en que a uno de los jugadores le aparece la tarjeta que le permite cambiar las piezas de la ruleta (“Has tenido suerte, ¡puedes cambiar las piezas de la ruleta!”). Aunque cabría la posibilidad de abordar esta pregunta dentro de la situación global que supone el juego, la acción de reconfigurar la ruleta es distinta de la de elegir un coche. Los objetos matemáticos que emergen de los sistemas de prácticas son distintos en cada caso. Así, reconfigurar la ruleta implica evaluar diferentes opciones, mientras que la elección del coche solamente conlleva analizar un escenario. La tercera de las situaciones está relacionada con el proyecto estadístico que se lleva a cabo como tarea de clase y que consiste en la elaboración de pictogramas que recogen la frecuencia de cada color en cada partida. Entonces, surge la pregunta: “¿cómo interpreto el pictograma si no he visto la partida de juego?”.

Después de identificar las situaciones-problema, el análisis de las estudiantes prosigue con el resto de los objetos primarios. Como registros lingüísticos, distinguen el uso del verbal, simbólico y gráfico, confundiendo el gráfico con el simbólico, puesto que asimilan el gráfico con la “grafía” de los números, en lugar de con el pictograma. Así, señalan:

> Lenguaje gráfico: En el momento de interpretar los datos del pictograma, los discentes realizarán el conteo de coches y escribirán la grafía del número total de veces que ha salido (frecuencia absoluta).

Los conceptos-definición, son un tipo de enunciado en forma de regla que se distingue de las proposiciones porque estas últimas son falsables. Suelen coincidir con los “conceptos” que marca el currículo y que luego aparecen en los libros de texto como definiciones. En el desarrollo del juego, no aparece de forma explícita ningún concepto-definición, pero implícitamente se hace referencia a varios, entre los que las estudiantes encuentran los siguientes: experimento aleatorio, suceso elemental, espacio muestral, suceso seguro, suceso imposible, sucesos equiprobables, probabilidad, predecir, moda, estadística descriptiva, muestra, valor, datos, frecuencia absoluta y pictograma.

Dado que en el juego no aparecen estos conceptos-definición de manera explícita, pero sí pueden enunciarse parcialmente algunos de ellos durante la institucionalización, las participantes señalan elementos lingüísticos relacionados con ellos. Esta clasificación denota cierta confusión, al igual que en el trabajo sobre el juego del *Tabú* o de las palabras prohibidas (Beltrán-Pellicer, Ricart y Estrada, 2019), para identificar los objetos primarios del EOS. Ocurre que la consideración como conceptos-definición de expresiones como "datos" o "predecir", no responde a una necesidad operativa.

Entre las proposiciones y propiedades identificadas por las participantes (Tabla 3) se pone de manifiesto, otra vez, esta dificultad con los conceptos, ya que la frecuencia absoluta aparece como proposición, pero se trata de un concepto-definición. La confusión puede deberse a que las tres primeras proposiciones que enuncian son fruto de hacer una acción física durante el juego (tirar dados, monedas o girar una ruleta). De esta manera, las estudiantes asocian el concepto de frecuencia a la acción de avanzar el coche, otra acción física que se da en el juego. Por lo tanto, parece que enuncian como proposición todo aquello que es resultado de hacer una acción física con las piezas del juego. Además, el significado en la situación que describen para la frecuencia absoluta es realmente el procedimiento necesario para calcularla. En cuanto al resto de proposiciones, se aprecia que están bien redactadas como enunciados falsables, y solamente señalamos la necesidad de haber precisado un poco más su significado. De esta manera, para la probabilidad de los colores de cada ruleta se podría haber expresado lo mismo en términos de área y de sectores circulares.

Tabla 3. *Proposiciones y propiedades identificadas por las participantes.*

Proposiciones y propiedades	Significado en la situación
Hay la misma probabilidad de que al lanzar la moneda salga cara o cruz.	Cuando un niño/a lance la moneda (cara o cruz) solo tendrá la posibilidad de obtener uno de los dos resultados. Tanto una opción como la otra tiene la misma probabilidad de salir (50%, 0.5 o ½).
Hay la misma probabilidad de que al lanzar un dado al aire salga un número del 1 al 6.	Al lanzar un dado es seguro que saldrá un número del 1 al 6 (ambos incluido). Por el contrario, es imposible que salga cualquier número inferior o superior a los mencionados. Cabe decir que, si el dado no está sesgado, hay la misma probabilidad de salir un número que otro (16,6%), por la cual cosa, es un juego equiprobable.
Al girar la ruleta, tiene mayor probabilidad de salir el color que ocupa más espacio del todo.	El color que ocupa más espacio es el que tiene mayor probabilidad de salir porque ocupa "x" del todo, mientras que los otros colores ocupan una porción inferior.
La frecuencia absoluta es el número de veces que cada coche ha avanzado una casilla	En el pictograma, los discentes deberán hacer el recuento de coches que han salido, y anotar, posteriormente, su correspondiente grafía. De este modo, en el pictograma podremos encontrar la frecuencia absoluta de cada uno de los datos

Los procedimientos que identifican las participantes se recogen en la Tabla 4. En esta ocasión, al contrario que en el trabajo anterior (Beltrán-Pellicer et al., 2019), están bastante bien clasificados como tales, puesto que todos ellos son, efectivamente, procedimientos de cálculo o recuento. Sin embargo, hay imprecisiones a la hora de describirlos. El procedimiento denotado como "suma" se relaciona con unas acciones de conteo en la situación. Por ello, habría resultado más correcto denotar este procedimiento como "situación de recuento". No obstante, no está claro, puesto que sí recogen el procedimiento de recuento en la Tabla 4.

Tabla 4. *Procedimientos identificados por las participantes.*

Procedimientos	Significado en la situación
Suma	Cuando los niños/as creen el pictograma, cada vez que su coche avanza una casilla, este/a añadirá un nuevo coche en el pictograma. Después, contarán todos los coches y añadirán el número total de coches. Por lo tanto, se utiliza la suma en el sentido de añadir.
Técnica de recuento recitando la secuencia numérica y señalando la grafía de cada símbolo (correspondencia uno a uno)	Para interpretar el pictograma, los discentes contarán el número de veces que ha salido un determinado color de coche, señalando a su vez cada coche del pictograma. Es decir, si el coche de color verde ha avanzado 10 casillas, en el pictograma habrá 10 coches de color verde, y por lo tanto, los discentes harán el recuento recitando la secuencia numérica y a su vez, señalando cada uno de los coches.

En cuanto a los argumentos (Tabla 5) se observa un fenómeno similar al encontrado en el trabajo sobre el juego *Tabú* (Beltrán-Pellicer, et al., 2019), apreciándose una dificultad a la hora de explicitarlos o encontrarlos. Así, el argumento 1 sobre la moda está redactado como un enunciado justificativo, pero es erróneo, puesto que la moda no tiene por qué ser el color del coche ganador. Por otro lado, escriben el argumento 2 con estructura de proposición, cuando podrían haber escrito "el coche verde es imposible que avance porque su color no está en la ruleta". El argumento 3 es correcto, mientras que el argumento 4 es circular y, además, en la explicación en la situación se aprecia una confusión en torno a la idea de equiprobabilidad, identificándola con el caso de dos sucesos elementales. Esto es algo que aparece, como hemos visto, bien reflejado en la proposición relativa al caso del dado.

Tabla 5. *Argumentos identificados por las participantes.*

Argumentos	Significado en la situación
1. La moda siempre será el color del coche ganador porque es el suceso que más se repite.	Cuando los discentes interpreten los datos del pictograma realizado por ellos/as mismos, podrán observar la frecuencia absoluta de cada color. Así mismo, se darán cuenta que el coche ganador es el que tiene el número más alto, y por lo tanto, el que más se repite.
2. Un color que no aparece en el espacio muestral es imposible que salga al lanzar la ruleta.	El espacio muestral es el conjunto de cada uno de los sucesos elementales, por la cual cosa, un niño/a deberá predecir que los colores que no aparecen en la ruleta será imposible que avancen casillas, y a consecuencia, que ganen la carrera.
3. Al lanzar el dado es seguro que salga un número de 1 al 6 porque el dado tiene 6 caras con dichos números.	Los sucesos elementales son cada uno de los resultados de un experimento. Por la cual cosa, al lanzar un dado es seguro que va a salir un número del 1 al 6, siendo imposible, salir un número inferior o superior estos.
4. Hay la misma probabilidad de sacar cara que cruz porque el juego es binario y equiprobable	Los juegos equiprobables son aquellos que tienen la misma probabilidad de salir un suceso que otro (50%, 0,5 o ½). Además, los juegos binarios son aquellos que únicamente tienen dos sucesos elementales. Centrándonos en estas características, lanzar la moneda al aire, es un juego equiprobable, porque tienen la misma probabilidad de salir cara que cruz. Cabe decir, que los jugadores no podrán predecir quién va a ser el ganador, porque es un juego justo.

Conclusiones

La propuesta, como experiencia formativa, se ha revelado adecuada, dado que ha permitido desarrollar la competencia de análisis y de diseño didáctico de las participantes al poner de manifiesto una gran diversidad de objetos matemáticos, de significados y errores conceptuales que de otra manera son difíciles de detectar en los estudiantes. El análisis efectuado revela que este tipo de tareas requiere establecer muchas conexiones entre objetos. Por otro lado, el diseño y el análisis del juego en cuestión se enmarcarían en un primer ciclo de una ingeniería didáctica más amplia. Este proceso podría continuar con la implementación en un aula de Educación Infantil, lo que exigiría una modificación del análisis a priori y proporcionaría nuevos resultados para el análisis a posteriori.

El juego elegido por las participantes es un clásico en la enseñanza de la probabilidad y la estadística, al permitir una primera aproximación intuitiva a la idea de probabilidad como frecuencia relativa. El elaborar pictogramas, además, permite no solo conectar probabilidad con registros estadísticos, sino relacionar lenguaje gráfico, verbal y simbólico. Respecto a la situación de los pictogramas, las afirmaciones de las participantes denotan que no comprenden bien la idea de inferencia estadística, manejando de forma poco adecuada los conceptos de muestra o de suceso posible. Además, esa interpretación aislada del pictograma podría relacionarse con que no alcanzan el nivel de síntesis global de lectura de gráficos (nivel 3) (Arteaga, Batanero, Díaz & Contreras, 2009).

Los resultados obtenidos nos invitan a continuar la línea de trabajo. Como experiencia formativa, el diseño o adaptación de estos juegos ha movilizado el conocimiento matemático especializado de las estudiantes (Pino-Fan & Godino, 2015), así como de la competencia de análisis ontosemiótico (Godino et al., 2017). En el análisis realizado por las estudiantes, se han detectado dificultades similares a las encontradas en la propuesta sobre el *Tabú* (Beltrán-Pellicer, et al., 2019); es decir, han tenido dificultades a la hora de aplicar la herramienta de análisis de objetos primarios del EOS, tanto en el sentido del reconocimiento como en explicar el significado del objeto. Esto es algo que puede ser debido a que necesiten más actividades en su formación para desarrollar la competencia asociada.

Resaltamos que, en este caso, los procedimientos han sido mejor categorizados y descritos por las estudiantes que en la adaptación del *Tabú*, donde se confundían con los procesos, posiblemente debido a que el carácter del *Tabú* es completamente discursivo. Los procedimientos, en este caso, han sido bien detectados dada su naturaleza: técnicas de cálculo que las estudiantes tienen bien interiorizadas. Esto puede deberse a que, tradicionalmente, en los procesos de enseñanza y aprendizaje se ha dado mucho peso a los algoritmos y a trabajar de forma mecánica. Por otro lado, no identifican los conceptos, lo que indica que falta reflexión e interiorización de estos. Los utilizan de forma implícita y se aproximan a ellos a partir de otros objetos, pero no son capaces de llegar a formular una definición adecuada de estos.

Agradecimientos: Esta investigación se ha desarrollado dentro del proyecto EDU2016-74848-P (FEDER, AEI) y dentro del grupo S36_17D - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo). Igualmente, queremos agradecer la participación a las estudiantes del máster de Formación Avanzada del Profesorado de Educación Infantil y Primaria (UdL) del curso 2017/18.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Díaz, C., & Contreras, J. M. (2009). El lenguaje de los gráficos estadísticos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18*, 93-104.

Beltrán-Pellicer, P., Ricart, M., & Estrada, A. (2019). Una experiencia sobre el diseño de juegos como recurso para desarrollar la competencia didáctico-matemática en probabilidad con docentes de infantil y primaria. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.) *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-10). Granada: Universidad de Granada.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13*(6), 1893-1918.

English, L. D., & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En L. D. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313-335). New York, NY: Routledge.

Font, V. (2018). Competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. Un modelo basado en el enfoque ontosemiótico. *ALME, 31*, 749-756.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., & Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández, & A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 275-284). Málaga: SEIEM.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 34*(2/3), 167-200.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *34*(2/3), 167–200.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ª ed.). México: McGrawHill.

Milinković J. (2015). Conceptualizing problem posing via transformation. En F. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.): *Mathematical Problem posing. Research in mathematics education*. New York, NY: Springer.

Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 1*, 87-109.

Singer, F. M., Ellerton, N. F., & Cai, J. (2015). *Mathematical problem posing*. New York, NY: Springer.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

REFLEXIÓN DIDÁCTICO-MATEMÁTICA DE PROFESORES EN FORMACIÓN INICIAL A TRAVÉS DEL DISEÑO DE TAREAS MATEMÁTICAS

DIDACTIC-MATHEMATICAL REFLECTION OF TEACHERS IN INITIAL TRAINING THROUGH MATHEMATICAL TASK DESING

Karina Jaquelin Herrera García, María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora (México)
jaquelin_herrera@hotmail.es, tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen
Este trabajo tiene como objetivo mostrar el diseño y el análisis de una actividad didáctica que promueve el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores de secundaria de matemáticas sobre el tema variación lineal. Esta actividad es parte de una propuesta formativa implementada con un grupo de profesores en formación inicial de educación secundaria en México. Se utilizó una metodología de investigación basada en el diseño adaptada al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), que es el marco teórico que fundamenta el diseño y el análisis de las tareas planteadas en la actividad didáctica. Los resultados revelan la necesidad de plantear este tipo de tareas y de su importancia para favorecer conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores.

Palabras clave: conocimientos didáctico-matemáticos, futuros profesores

Abstract
This paper is aimed at showing the design and analysis of a didactic activity that fosters the improvement of didactic-mathematical knowledge about linear variation in prospective secondary school mathematics teachers. The activity we discuss is part of a formative proposal implemented with a small group of mathematics secondary school teachers in their initial training in Mexico. We followed a design-based research methodology adapted to the Onto-Semiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction (OSA), which is the theoretical framework that supports the design and analysis of the tasks raised in the didactic activity. The results reveal the need and importance to design this kind of tasks in order to improve the didactic-mathematical knowledge in prospective mathematics teachers.

Key words: didactic-mathematical knowledge, prospective teachers

Introducción

En México, los Planes y Programas de Estudio propuestos en el nivel de educación secundaria retoman la acción de los docentes como un factor clave, considerando que es en ellos en quienes recae la responsabilidad de generar ambientes propicios para el aprendizaje, plantear situaciones didácticas, buscar estrategias diversas para despertar el interés de los alumnos, e involucrarlos en actividades que les permitan avanzar en el desarrollo de sus competencias. Se plantea en esos documentos que es necesario reforzar capacidades, conocimientos y competencias profesionales de los docentes que ingresarán al servicio profesional docente, puesto que se considera importante para los fines educativos planteados y para promover una enseñanza de calidad a los estudiantes. Por otro lado, los profesores de matemáticas y en particular los profesores en formación han sido uno de los focos de interés de la investigación en educación matemática, que se interesa por estudiar los conocimientos y competencias que estos necesitan desarrollar para resolver con éxito las tareas planteadas en su quehacer profesional. Investigadores como Shulman (1987), Grossman (1990) y Ball (2000), resaltan el papel central de los conocimientos del profesor para lograr una enseñanza de calidad. En este sentido es que estos autores han propuesto categorías y componentes del conocimiento que debe tener un profesor necesarios para la enseñanza. En consecuencia, es que resulta necesario de implementar experiencias que permitan el crecimiento y el desarrollo de conocimientos y competencias del futuro profesor de matemáticas.

En este trabajo se presenta un fragmento de una propuesta formativa dirigida a profesores de matemáticas de secundaria en formación inicial, la cual se fundamenta en herramientas teóricas del EOS y el modelo CDM. El objetivo de esta propuesta es desarrollar conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016) sobre variación lineal de los futuros profesores, debido a que este es un tema central en el currículo de secundaria y transversal a los demás niveles educativos (primaria, secundaria, bachillerato e incluso en licenciatura). Para ello, se diseñó, implementó y valoró una secuencia de actividades didácticas. En este escrito, se presenta el análisis a priori de una de las actividades didácticas que conforman la secuencia, utilizando la herramienta configuración de objetos matemáticos primarios y, se discuten los resultados obtenidos del análisis de datos emanados de su implementación con un grupo de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en México.

La propuesta formativa se enmarca en el tipo de metodologías de investigación de diseño (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa, y Wilhelmi, 2014), en la cual se identifican cuatro fases: el análisis preliminar sobre el tópico de estudio, el diseño de actividades, implementación y análisis retrospectivo. Este artículo tiene la finalidad de mostrar las posibilidades ofrecidas por el marco teórico EOS, para realizar un diseño de actividad didáctica que promueve conocimientos propios del estudio de la variación lineal, y, por otra parte, mostrar que el análisis de los resultados de la implementación revela la necesidad de implementar este tipo de actividades y de su importancia para favorecer conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores.

El artículo está organizado de la siguiente forma: En la segunda sección se describe de manera breve el marco teórico utilizado, la tercera sección está destinada a describir la metodología empleada, en la cuarta parte se presenta el análisis de los datos emanados de la implementación y la discusión de los resultados obtenidos y por último se muestran las conclusiones obtenidas.

Marco teórico

En el EOS, el significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas matemáticas (operativas o discursivas) que una persona realiza, o que son realizadas al seno de una institución, para resolver un tipo de situaciones-problema en las que dicho objeto interviene (Pino-Fan, Font y Godino, 2014, pp. 44-45). En la realización de estas prácticas intervienen y emergen diferentes tipos de entidades que en el EOS se consideran también objetos matemáticos (primarios): *procedimientos, conceptos/definiciones, lenguajes, argumentos, proposiciones/propiedades y situaciones problema*, los cuales están relacionados entre sí, formando redes de objetos o *configuraciones* que pueden ser socio-epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas, si son redes de objetos personales (Godino, Font, Wilhelmi, y Lurduy, 2011).

Las nociones de *sistemas de prácticas y configuración de objetos matemáticos primarios* permiten identificar el sistema de prácticas propuestos por el currículo mexicano para el estudio de un objeto matemático, en este caso la *variación lineal*, así como también permiten crear un diseño considerando los aspectos epistémicos del objeto matemático que se quieren promover en él. Estas nociones permiten responder preguntas que son centrales al realizar un diseño didáctico, como: ¿cuál es el significado de la noción de variación lineal en la escuela secundaria? el EOS propone como respuesta (Godino, Batanero & Font, 2007): "el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problema en las cuales se requiere"(p.5) determinar la relación entre magnitudes que varían de manera conjunta y directamente proporcional.

La variación lineal es un tema que posee diversos significados. Una vez que se han determinado los distintos significados de la variación lineal propuestos por investigaciones y el currículo mexicano (*significado institucional de referencia*), es necesario determinar el *significado institucional pretendido por el diseño.* Este considera tipos de significados de la variación lineal mediante el establecimiento de *configuraciones de objetos matemáticos primarios* (conocimiento epistémico). Se considera, además tipos de situaciones-problemas enfocadas a desarrollar la faceta cognitiva de los profesores a través de tareas, propuestas por Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016). Posteriormente, se plantea la pregunta: '¿qué tipos de conocimientos didáctico-matemáticos se pueden desarrollar a través de este diseño didáctico?'. Esta pregunta se responde con el análisis prospectivo (a través de la puesta en marcha del diseño), mismo que se realiza a partir del *Modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos* de un profesor de matemáticas, específicamente los propuestos por Pino-Fan y Godino (2015), considerando el conocimiento especializado de la dimensión matemática (faceta epistémica) y el conocimiento sobre aspectos cognitivos de los estudiantes (faceta cognitiva).

Metodología

El presente proyecto de intervención didáctica se enmarca en un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo (Hernández Sampieri, Fernández-Collado y Baptista Lucio, 2010), ya que se pretende profundizar y ampliar sobre el conocimiento de futuros profesores de educación secundaria sobre el tema de variación lineal, y obtener así una riqueza interpretativa sobre el fenómeno estudiado.

Para el logro del presente proyecto, se plantea una metodología de investigación basada en el diseño didáctico (Kelly, Lesh y Baek, 2008) adaptada a las herramientas teóricas del EOS por Godino et al. (2014), en la cual se distinguen cuatro etapas fundamentales que caracterizan una propuesta formativa o ciclo de enseñanza: el estudio preliminar, diseño de actividades, implementación del diseño y análisis a posteriori de todo el ciclo.

Etapa 1. Estudio preliminar: En esta primera etapa se realiza una revisión documental orientada a una búsqueda sistemática de fuentes documentales sobre la variación lineal en educación secundaria. Se realiza el análisis de un libro de texto propuesto a profesores de secundaria y el documento Aprendizajes Clave propuesto por el Nuevo Modelo Educativo (2017), se consideró, por otro lado, los significados parciales del objeto matemático función propuestos por Parra (2015) y los significados pragmáticos de proporcionalidad, propuestos por Godino, Beltrán, Burgos y Giacomone (2017). En términos del EOS, este primer análisis de documentos implica la determinación del *significado institucional de referencia* del tópico de estudio. Por otro lado, a partir de los datos que se obtienen de esta primera revisión de documentos, se seleccionó el significado de variación lineal que se moviliza en el diseño de la secuencia didáctica, afrontando así la determinación del *significado institucional pretendido* por el diseño de las actividades del tópico de estudio.

Etapa 2. Diseño de las actividades: esta segunda etapa se orienta al diseño de la totalidad de actividades didácticas que integran la secuencia que materializa la propuesta formativa. Para el diseño de las actividades se requiere elaborar situaciones problema y diseñar recursos tecnológicos (applets de GeoGebra) adaptados para promover el conocimiento didáctico-matemático pretendido del tópico variación lineal. Para el diseño efectivo se tienen en cuenta distintos aspectos: *ecológicos*, *epistémicos*, *cognitivos-afectivos,* y aspectos *instruccionales.* Posteriormente, se realizó una prueba piloto dirigido a profesores con experiencia inicial en aula, esto permitió realizar mejoras al diseño de las actividades.

Etapa 3. Implementación del diseño: La puesta en escena de las actividades con los futuros profesores contempló algunas acciones, como, por ejemplo: información sobre los participantes, instrumentos para recopilar información, como videograbaciones, hojas de trabajo, grabación de audios, etc.

Etapa 4. Análisis a posteriori de la implementación: La cuarta etapa consistió en *Analizar las reflexiones didáctico-matemáticas que realizan los futuros profesores* para ello se utilizó el *Modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos* (Pino-Fan y Godino, 2015) del profesor, utilizando las consignas propuestas en las facetas epistémica y cognitiva.

Actividad didáctica: Llenado de recipientes cilíndricos

En este proyecto se ha diseñado una secuencia didáctica conformada por cinco actividades, las cuales tienen la estructura siguiente: 1) resolución de tareas matemáticas sobre variación lineal, 2) Análisis de objetos matemáticos primarios presentes en las tareas realizadas y 3) Análisis de respuestas hipotéticas de estudiantes de secundaria a tareas matemáticas. Para cada actividad se utilizó uno o varios applets creados con la aplicación de GeoGebra. En la primera actividad se destaca el estudio de situaciones del tipo $y = mx + b$. En la segunda actividad se incorpora el estudio de la comparación de situaciones que correspondientes a variación lineal y también correspondientes a variación no lineal. La tercera actividad se centra en el estudio de situaciones del tipo $y = kx$, y es la actividad que discutiremos en este escrito en la sección siguiente. La cuarta actividad se centra en el estudio de la pendiente y la constante de proporcionalidad negativa, mientras que la última se centra en el estudio de la variación inversamente proporcional.

La actividad tres está diseñada para desarrollarse en dos momentos: en el primer momento, el trabajo se orienta a la resolución de problemas matemáticos propios del estudio de la variación lineal, y en segundo momento, se muestra a los futuros profesores un applet diseñado en GeoGebra para que posteriormente, en equipos de trabajo, diseñen una situación-problema a partir del uso del applet y del llenado de una tabla, donde consideren aspectos como: conceptos, lenguajes, propiedades-proposiciones, procedimientos y tipos de argumentos que quieren desarrollar con estudiantes de secundaria.

Se espera que en el primer momento de esta actividad los futuros profesores identifiquen magnitudes que varían de manera lineal a través de procedimientos o lenguajes trabajados en las actividades uno y dos. Otro de los aspectos importantes, es que distingan que la constante de proporcionalidad se encuentra tanto en las magnitudes variables como en sus incrementos y, por último, que trabajen en la distinción de representaciones graficas lineales que pasan o no, por el origen de las coordenadas gráficas (0,0) y (0, b). El objetivo del segundo momento es que los futuros profesores creen situaciones-problemas considerando aspectos cognitivos de estudiantes de secundaria y aspectos epistémicos relacionados con la resolución de problemas planteados en un primer momento en el diseño de la actividad didáctica.

En este apartado se describe una situación-problema (llenado de recipientes cilíndricos) para enriquecer en el conocimiento común y el conocimiento especializado del contenido, en este caso sobre las nociones del estudio de la variación lineal. En la figura 1, se muestra la situación-problema propuesta.

Actividad 3

Llenado de recipientes cilíndricos

En equipo de tres personas realicen lo que se les indica:

I. En el siguiente enlace podrás observar cómo se llena de líquido un recipiente cilíndrico. En equipo observen el applet que se muestra y contesten lo que se les solicita: https://ggbm.at/zkhhh6fg

a) ¿Qué magnitudes están cambiando y cuáles permanecen constantes? Escribe todas las que observes y especifica si cambian o no.
b) Elige dos magnitudes que consideres que varían de manera lineal una con otra y escríbelas a continuación.
c) Realiza en el siguiente espacio procedimientos que demuestren que las magnitudes que consideraste varían de manera lineal.

Figura 1. *Situación-problema propuesta en el diseño*

Las tareas de resolución matemática de los futuros profesores se discuten a partir de la comparación de ideas grupalmente, provocadas por las preguntas del inciso a, b y c, momento en el que los profesores tienen que describir y explicar las respuestas ante sus compañeros.

La actividad está destinada a realizarse en equipos de trabajo de tres estudiantes. La tarea uno de la actividad 3, tiene el objetivo de que intervengan conceptos donde se expliciten las magnitudes variables y constantes que intervienen en la situación. Se espera que los futuros profesores distingan qué magnitudes cambian e identifiquen cuáles se mantienen constantes.

La tarea del inciso c, pretende que intervengan lenguajes como tablas de variación, gráficas cartesianas, lenguaje algebraico del tipo $Y = Kx$, y procedimientos tales como cálculo de la constante de proporcionalidad.

La siguiente parte del diseño está destinada a la reflexión didáctica (Figura 2), y tiene dos objetivos. El primero de ellos es que los estudiantes deben relacionar los contenidos matemáticos del Programa de Estudios 2011 y el Nuevo Modelo Educativo 2017, con los que han trabajado en los diseños, uno, dos y tres del tema variación lineal. De esta forma, se pretende que realicen conexiones intradisciplinares, relacionando el tema del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de esta.

En el desarrollo de la tarea dos, se pide que los profesores creen una situación-problema que podrían plantear a sus estudiantes utilizando el siguiente applet: https://ggbm.at/zkhhh6fg

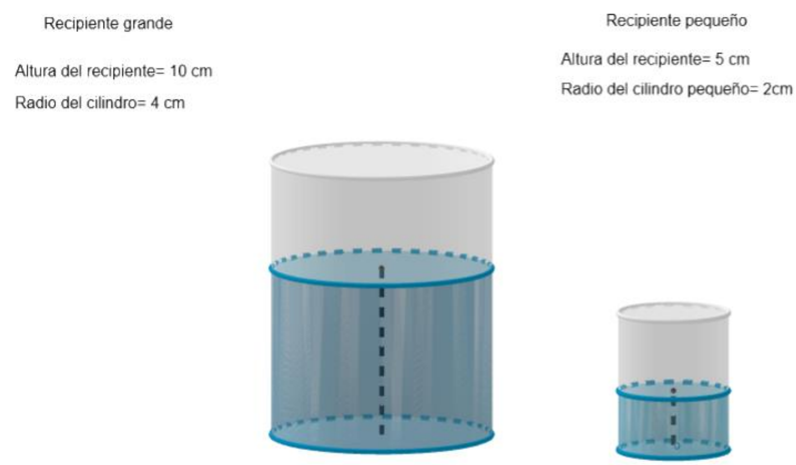


Figura 2. *Applet: Llenado de líquido de recipientes cilíndricos*

Esta tarea tiene el objetivo de que los futuros profesores creen o diseñen otras tareas relacionadas con la dada y pueda gestionar los tipos de objetos matemáticos que quiere promover en sus estudiantes de secundaria utilizando recursos materiales como el uso de la tecnología, específicamente utilizando el applet de GeoGebra que se les presenta. Posteriormente se realizará una discusión grupal en donde los estudiantes para profesor tengan que discutir, sobre los tipos de situaciones-problemas que diseñaron en equipos de trabajo.

Para crear la situación-problema, se les presenta a los futuros maestros una tabla donde tienen que escribir los tipos de objetos matemáticos que promoverán con el diseño.

V. REFLEXIÓN DIDÁCTICA

Realiza en equipo la siguiente actividad:

1. En las hojas que se te proporcionan del Programa de Estudios 2011 y el Nuevo Modelo Educativo (2017), subraya o encierra los contenidos matemáticos del currículo de secundaria que se relacionan con el tema de variación lineal.
2. **En equipo** crea una situación problema que podrías plantear a tus estudiantes con el uso del último applet y explica qué elementos matemáticos relacionados con la variación lineal promoverías. Escribe únicamente aquellos que se desarrollarán con la situación problema.

Situación-problema:
Conceptos matemáticos:
Tipos de representaciones (tabular, gráfica o/y algebraica):
Procedimientos o técnicas que desarrollarán los estudiantes:
Propiedades matemáticas que promoverías:
¿Qué argumentos esperas que logren dar tus estudiantes?
Modos de trabajo: Individual, en equipo o grupal:
Recursos que serán utilizados: Inicio, desarrollo o cierre y ¿con qué objetivo?

Figura 3. *Diseño de la situación-problema destinada a la reflexión didáctico-matemática*

La realización de la tarea de reflexión didáctica tiene el objetivo de desarrollar la faceta epistémica y cognitiva del conocimiento especializado del contenido que van dirigidos a la generación de tareas para la enseñanza y que los futuros profesores reconozcan objetos matemáticos primarios para la creación de esas tareas.

Interpretación de los resultados en términos didáctico-matemáticos

Faceta epistémica

Se realizó una interpretación de los resultados obtenidos en la implementación de la actividad didáctica, utilizando el Modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (Pino-Fan, Font y Godino, 2014) pues nos da la posibilidad de interpretar los conocimientos didáctico-matemáticos de la faceta epistémica, desarrollados por los futuros profesores y, por otro lado, los conocimientos del contenido en relación con los estudiantes (faceta cognitiva).

Para dar cuenta del análisis de las respuestas, a continuación, se describe algunas prácticas didácticas significativas que fueron surgiendo en la implementación y han permitido interpretarlas desde el modelo teórico propuesto. Se utilizó algunos ejemplos prototípicos de respuesta de los estudiantes para ilustrar tales conocimientos:

Se plantea en este diseño como primer objetivo reconocer magnitudes variables que intervienen en la situación-problema planteada. Los estudiantes mostraron reconocer pares de magnitudes que varían de manera lineal, ejemplos de tipos de magnitudes que identificaron fueron: altura-volumen y tiempo-volumen. Posteriormente para justificar sus respuestas mostraron el uso de distintos lenguajes (similar a los de una tabla de variación), lenguaje numérico, y el uso de distintos procedimientos, como el cálculo de incrementos de las magnitudes variables, el cálculo de la constante de proporcionalidad tanto en las magnitudes variables como en sus incrementos (Figura 3). Un ejemplo es el siguiente:

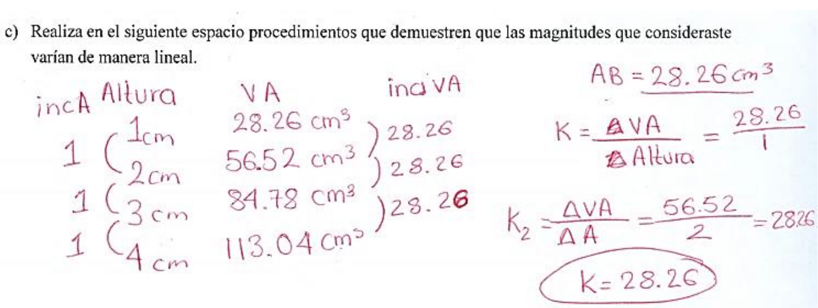


Figura 3. *Respuesta del estudiante 5 (E5).*

Se muestra en la respuesta de E5 que utiliza distintos procedimientos que le permiten identificar que estas magnitudes varían de manera lineal, identificando a su vez, un aspecto nuevo que no se había trabajado en los diseños anteriores a esta actividad: este aspecto nuevo es que existe proporcionalidad en las magnitudes como en sus incrementos. Por el contenido de un fragmento de vídeo, se puede inferir que E5 enriquece su conocimiento matemático al hacer visible que no reconocía antes este tipo de propiedad-proposición:

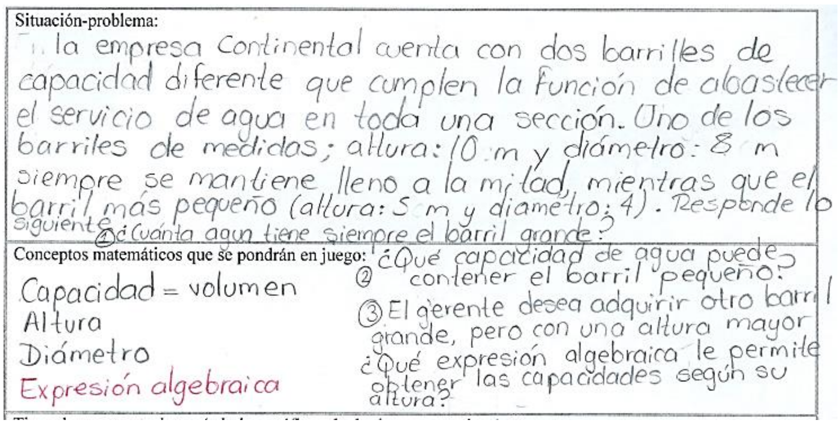
> E5: -*Voy a calcular los incrementos para ver si la constante está entre las magnitudes o entre sus incrementos.*
> E5: - *Estoy entrando en una crisis existencial. La constante está en las magnitudes, pero también en sus incrementos (…).*

Posteriormente, se realiza una discusión grupal donde E5 expone su respuesta con sus demás compañeros. Aspecto importante para resaltar esta nueva relación promovida en el diseño.

Faceta cognitiva

Se propuso a los futuros profesores crear una situación-problema que podrían plantear a sus estudiantes con el uso del applet: llenado de dos recipientes cilíndricos y que expliquen qué elementos matemáticos de la variación lineal promoverían. Se les pidió que escribieran únicamente aquellos elementos que consideran desarrollarán con la situación problema planteada. Se les presentó para organizar la información una tabla que incluye diferentes elementos que habrá que considerar para crear la situación problema.

Se observa la situación-problema (Figura 4) creada por un equipo de tres futuros profesores. En ella diseñan el contexto de una empresa que tiene la función de abastecer servicio de agua en toda una sección. Las tareas que proponen promueven el uso de *procedimientos como el cálculo del volumen y la creación de una expresión algebraica que permita calcular el volumen según su altura*. Se puede identificar que la situación-problema planteada no promueve el estudio de una situación dinámica, las tareas propuestas indican que no realizan el uso del applet que se les propone puesto que no dan indicaciones de hacer uso de él.


Situación-problema:
la empresa Continental cuenta con dos barrilles de capacidad diferente que cumplen la función de abastecer el servicio de agua en toda una sección. Uno de los barriles de medidas; altura: 10 m y diámetro: 8 m siempre se mantiene lleno a la mitad, mientras que el barril más pequeño (altura: 5 m y diametro: 4). Responde lo siguiente ① ¿Cuánta agua tiene siempre el barril grande? ② ¿Qué capacidad de agua puede contener el barril pequeño? ③ El gerente desea adquirir otro barril grande, pero con una altura mayor ¿Qué expresión algebraica le permite obtener las capacidades según su altura?

Conceptos matemáticos que se pondrán en juego:
Capacidad = volumen
Altura
Diámetro
Expresión algebraica

Figura 4. *Respuesta de Estudiante 5*

La situación-problema planteada por otro equipo de trabajo es la siguiente respuesta (Figura 5) en ella se observa que los estudiantes proponen tareas como: *realizar tablas, gráficas y expresiones algebraicas que represente el llenado de cada uno de los recipientes.* Estas tareas suelen ser promovidas en el diseño de las actividades anteriores a esta. Podemos ver que plantean tareas que involucran distintos tipos de representaciones (tabular, gráfico y algebraico), sin embargo, no adaptan el uso de los applets a una situación-problema. Esto nos indica que las situaciones-problemas propuestas (Figura 4 y 5) no describen situaciones-problemas dinámicas, en ellas no se promueve el estudio de la relación entre magnitudes variables.

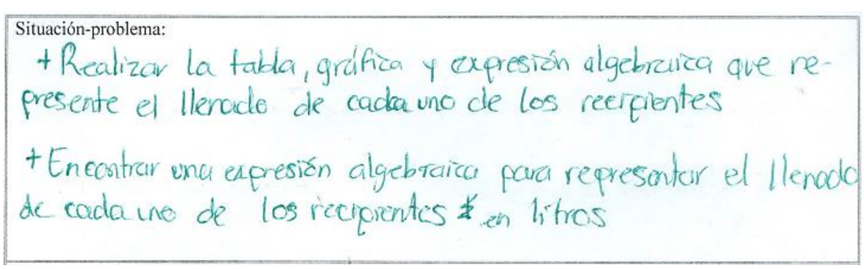

Situación-problema:
+ Realizar la tabla, gráfica y expresión algebraica que represente el llenado de cada uno de los recipientes
+ Encontrar una expresión algebraica para representar el llenado de cada uno de los recipientes en litros

Figura 5. *Respuesta Estudiante 1*

Posteriormente se discute la siguiente situación-problema (Figura 6) frente a los compañeros del grupo, durante la discusión de la situación problema diseñada, se observa en sus respuestas que los estudiantes están pensando en una situación de variación lineal, pero que, en la redacción de sus situaciones-problemas no lo hacen explícito.

El equipo de trabajo propuso que con la situación-problema planteada (Figura 6) los estudiantes pueden trabajar con la representación tabular, gráfica y algebraica, sin embargo, se observa en la redacción de la situación-problema, que sólo piden realizar el cálculo del volumen de los dos recipientes. Con las preguntas realizadas, ellos comentaron que esperaban que al dar respuesta a las preguntas que plantean, los estudiantes realizaran ese tipo de procedimientos o representaciones.

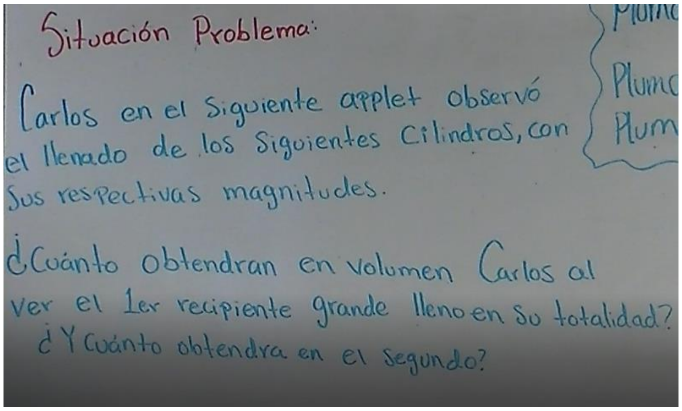


Figura 6. *Respuesta planteada por un equipo de futuros profesores en el pizarrón*

La pregunta que se les planteó a los compañeros del grupo fue:

> Instructor (I): *¿Ustedes consideran que puedan emerger distintas representaciones a partir de la situación-problema propuesta por sus compañeros?*
> E1: *No, yo como alumno sólo utilizaría los datos de los recipientes, sólo sustituiría los datos en la fórmula para calcular el volumen de los cilindros. No necesito calcular una expresión algebraica, ni hacer gráfica, ni tabla para obtener esa respuesta.*
> I: *¿Ustedes qué harían?*
> E1: *Tendría que plantear esas preguntas al final, después de que hayan analizado lo que se ve en el applet, y después les pediría la gráfica, la expresión algebraica, la tabla y, posteriormente les preguntaría eso. Esto podrían responderlo a partir de la tabla, ahí podrían observar cuándo se llenó. De otra forma, sólo utilizarían la formula del volumen.*

Se puede observar en el fragmento anterior que los estudiantes están proponiendo tipos de tareas que pueden plantearles a sus estudiantes para promover que se involucren en la solución de la situación-problema propuesta, relacionando, asimismo, algunas características del estudio de la variación lineal, ejemplo de esas tareas son: el estudio de los incrementos de las magnitudes involucradas.

Conclusiones

En la resolución de las tareas matemáticas los futuros profesores hacen uso de procedimientos enfocados al estudio de las magnitudes variables y de relaciones de proporcionalidad. Es decir, hacen uso de distintos lenguajes como tabular y numérico, también utilizan procedimientos como el cálculo de incrementos entre magnitudes variables y el cálculo de la constante de proporcionalidad. Sin embargo, cuando se analiza la faceta epistémica y cognitiva, se resalta que los futuros profesores crean diseños de situaciones-problemas de variación lineal, sin utilizar como tal, el uso del applet llenado de dos recipientes cilíndricos, así como también, que el diseño de la situación-problema que proponen, no utiliza características propias del estudio de la variación, pues si bien, no se crean situaciones-problemas dinámicas y tampoco se centran en el estudio de las magnitudes variables, suelen plantear tareas como el uso de tablas de variación, creación de una expresión algebraica y representación gráfica cartesiana, esto quiere decir que los futuros profesores tienden a crear situaciones-problemas donde se estudia a las magnitudes variables como algo estático, tal y como suelen promoverse en libros de texto propuestos a los profesores, más que en enfocarse a promover el estudio de magnitudes variables y sus relaciones de proporcionalidad.

El uso del Modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (MCDM) del profesor, suele ser una herramienta que aporta información sobre qué tipos de conocimientos tienen los futuros profesores y sobre qué elementos habría que considerar para promover ciertos conocimientos en algún diseño de instrucción matemática.

El tipo de tareas propuestas permiten promover de alguna manera que los futuros profesores tomen conciencia sobre los tipos de objetos matemáticos que pueden promover del tema variación lineal, así como también generar cambios a los diseños de situaciones-problemas que promuevan a partir de la reflexión sobre estos tipos de conocimientos matemáticos que quieren promover con sus estudiantes de secundaria.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education, 51, 241-247.

Giacomone, B. (2018). Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico. (Tesis publicada). Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 39(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39* (1), 37- 42

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (pp. 288-297). Málaga: SEIEM

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* ISBN: 978-84-617-9047-0. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational Studies in Mathematics, 77(2), 247-265.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques, 34 (2/3), 167-200.

Grossman, P. (1990). The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education. New York and London: Teachers College Press.

Hernández S., Fernández C. y Baptista L. (2010). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008). Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching., New York, NY: Routledge.

Secretaría de Educación y cultura (2017) Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Ciudad de México. SEP.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard Educational Review 57(1), 1-22.

Parra Y., (2015). Significados pretendidos por el currículo chileno sobre la noción de función. (Tesis publicada). Universidad de Santiago, Chile.

Pino-Fan, L., Font, V. y Godino J. D. (2014). Matemática Educativa: La formación de profesores: El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: Pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. (pp. 137-151). México, DF: Ediciones DDS y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015) Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), pp. 141-142

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

UMA MATEMÁTICA PROBLEMATIZADA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

A PROBLEMATIZED MATHEMATICS FOR THE TEACHING OF LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS IN THE INITIAL TEACHER TRAINING

Maria Auxiliadora Vilela Paiva, Nelson Victor Lousada Cade, Victor Giraldo
Instituto Federal do Espírito Santo- Ifes, (Brasil) Secretaria Estadual de Educação do espírito Santo-SEDU (Brasil), Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ (Brasil)
vilelapaiva@gmail.com, nvlcade@gmail.com, victor.giraldo@gmail.com

Resumo
Este artigo aborda a teoria de Davis e seus colaboradores sobre o Estudo do Conceito, uma estrutura de formação continuada que foca na construção de um saber para o ensino e contribui para o desenvolvimento profissional do professor. Adaptamos essa teoria à formação inicial de professores, enfatizando a matemática problematizada que emerge nas discussões e reflexões coletivas, com foco na compreensão do conceito. A pesquisa foi desenvolvida em uma Licenciatura em Matemática a partir de atividades de resolução de problemas. O objetivo da pesquisa era identificar formas de construção do conceito de Equações Diofantinas Lineares (EDL) para o ensino, visando articular o saber científico e o escolar, com foco no compartilhamento das experiências anteriores desses alunos no Ensino Médio e como alunos de Licenciatura. Saberes para o ensino emergiram no processo de formação e a valorização de uma cultura matemática própria de futuros docentes.

Palavras chave: formação inicial, saberes docentes, equações diofantinas lineares, estudo do conceito

Abstract
This article approaches the theory of Davis and his colleagues on the study of concept, a structure of continuing education that focuses on the construction of knowledge for teaching and contributes to the professional development of the teacher. We adapted this theory to the initial teacher training emphasizing the problematized mathematics that emerges in collective discussions and reflections, focusing on the understanding of the concept. The research was done in a Mathematics Degree, from problem-solving activities. The objective of the research was to identify ways of constructing the concept of Linear Diophantine Equations (LDE) for teaching, aiming to articulate scientific and school knowledge, with a focus on sharing the previous experiences of these students at high school and as undergraduate students. Knowledge for teaching emerged in the training process and the assessment of a mathematical culture typical of prospective teachers.

Key words: initial formation, teacher knowledge, linear Diophantine equations, concept study

Introdução

Nos últimos 30 anos, a preocupação sobre o que o professor precisa saber e a relação que ele estabelece com esse saber tornou-se presente em algumas teorias e pesquisas (Shulman 1986; Charlot, 2005; Ball, Thames, M. H.; Phelps, G. 2008; Tardif, 1991), as quais se direcionam para a formação do professor na perspectiva de que o professor possui saberes próprios de sua profissão.

Estudos como os de Moreira, Ferreira, (2013), Nóvoa (2009), Giraldo, Rangel, Menezes e Quintaneiro (2017) têm mostrado que há um distanciamento entre os modelos usuais de cursos de formação inicial de professores e a prática profissional desses futuros docentes na educação básica, o que contribui para a formação de um professor que articula pouco ou nada os saberes tão necessários para o ensino. “Assim, consideramos que a formação do professor é uma cultura específica, um processo pelo qual o indivíduo-professor se torna portador e gerador de significado” (Paiva, 2018, p.11, tradução nossa).

Nesse sentido, a formação matemática específica, trabalhada na licenciatura, deve estar articulada com a ensinada na escola básica, em uma perspectiva que permita ao licenciando construir saberes e, assim, adquirir uma compreensão dos conceitos envolvidos, compreensão esta necessária à sua formação profissional.

Esses saberes, que vão além do domínio do conteúdo específico de Matemática, apontam para um saber próprio para o ensino e, de acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), envolvem o conhecimento especializado do conteúdo. Desse modo, o licenciando aprende um conteúdo matemático para ensinar Matemática. Esses pesquisadores baseiam-se na concepção de Shulman (1986) referente ao conhecimento pedagógico do conteúdo que relaciona o conhecimento específico de um conteúdo com o conhecimento pedagógico necessário para ensiná-lo.

No sentido de minimizar esse distanciamento da formação com a prática profissional, o pesquisador canadense Brent Davis e seus colaboradores (2006) propõem utilizar a metodologia de estudo do conceito (em Inglês, concept study) para a formação continuada de professores, direcionada para a compreensão conceitual com vistas ao ensino. Enfatizam o papel das discussões coletivas, em que discentes questionam e (re) constroem os próprios saberes da Matemática para o ensino (Davis & Renert, 2012, 2014). Em nosso trabalho, Concept Study será traduzido como Investigação do Conceito, como sugerido por Giraldo (2017) ao retratar essa teoria de formação.

Ao iniciarmos a pesquisa em uma Licenciatura visando o saber matemático para o ensino, voltamos nosso foco para as Equações Diofantinas Lineares (EDL), tema de especial interesse por ser um conteúdo matemático, relacionado à Álgebra, presente na Educação Básica, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Além disso, é um conteúdo matemático que permite ao aluno refletir importantes conceitos, como o de máximo divisor comum (mdc) entre dois números, de divisibilidade, de múltiplos e divisores e de conjuntos numéricos, entre outros.

O tema EDL, segundo Zehursen, Rakes e Meece (1999), é tratado no trabalho mais conhecido de Diofante, Arithmetica, que originalmente continha 13 livros, mas apenas seis se preservaram, consistindo em uma coleção de resolução de problemas de aplicação de Álgebra. Ainda segundo eles, muitos problemas tratados no livro Arithmetica estão relacionados ao que atualmente denomina-se Equações Diofantinas. No estudo de uma EDL surgem três perguntas principais: A EDL tem solução? Se sim, essas soluções são finitas ou infinitas? Quais são essas soluções?

Na concepção da Matemática científica, uma EDL é uma equação do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros dados e as soluções x e y procuradas, também pertencem ao conjunto Z. A seguinte proposição permeia este estudo: Uma EDL: $ax + by = c$ tem solução se, e somente se, d divide c, onde $d = mdc (a, b)$.

Hoje, são chamadas Equações Diofantinas todas as equações polinomiais (não importa o número de incógnitas) com coeficientes inteiros. Hygino (1991, p. 119) aponta que as EDL são,

> Todas as equações polinomiais (com qualquer número de incógnitas), com coeficientes inteiros, sempre que se trata de procurar suas possíveis soluções também entre os inteiros. Isso embora Diofanto só tenha estudado algumas dessas equações, em casos particulares, e embora o universo que tenha usado para resolução de seus problemas fosse o conjunto dos números racionais positivos.

Por acreditar na importância desse assunto ao longo da educação básica, o objetivo da pesquisa foi refletir como o licenciando em Matemática constrói uma Matemática para o ensino do conteúdo de EDL, baseado na estrutura de Investigação do Conceito.

A Matemática para o ensino e a investigação do conceito

Davis e Simmt (2006) e Davis e Renert (2009, 2012, 2014) propõem uma abordagem investigativa sustentada em reflexões coletivas de professores. Essa abordagem investigativa é denominada por eles como Estudo do Conceito (EC) (Davis & Simmt, 2006, Davis & Renert, 2009, 2012, 2014) e suscita uma Matemática para o ensino.

Segundo Davis e Renert (2014), a Matemática para o ensino é uma forma de se relacionar com o conhecimento de Matemática que propicia ao professor um saber sobre o que ensinar e, a partir daí, estruturar situações de aprendizagem. Adaptamos esse modelo de formação para a formação inicial por acreditarmos que o licenciando pode também produzir uma Matemática para ensinar ao refletir sobre as maneiras de tornar os conteúdos científicos elementares aos alunos. Assumimos a Matemática para o Ensino como a compreensão conceitual específica construída pelo licenciando ao refletir acerca da tarefa de ensinar.

Para nós, na formação inicial, no momento em que os licenciandos articulam o currículo da graduação com a perspectiva da prática em sala de aula, eles trabalham uma Matemática culturalmente situada e são capazes de descontruir a hierarquia estabelecida entre a Matemática científica e a escolar, bem como entendem que esses saberes não estão dissociados, mas articulados no sentido de uma compreensão conceitual. Nesse sentido, eles se veem como agentes de construção de uma Matemática para o ensino ao articularem a Matemática considerada científica com aquela considerada elementar. Essa articulação acontece, sobretudo, por meio de uma Matemática problematizada, que é "uma concepção da(s) matemática(s) a partir de várias práticas sociais, que põe em evidência as diversas condições culturais e políticas que determinam seus processos de produção" (Giraldo, Rangel, Menezes & Quintaneiro, 2017, p.9). Defendemos que essa problematização deve ocorrer também na licenciatura, pois o licenciando aprende para ensinar e, ao aprender um conceito matemático por meio da problematização ele passa a compreender esse conceito em sua gênese.

Para nós, a Matemática trabalhada de forma problematizada na formação inicial não enfraquece o entendimento e a profundidade do conteúdo, pelo contrário, trabalhar dessa forma mostra aos futuros professores que os saberes matemáticos não são produzidos de modo linear, mas são frutos de processos culturais e históricos. Ao pensar especialmente na formação inicial do professor, desmitificar a visão da Matemática naturalizada que estabelece a Matemática como um conjunto de conhecimentos que sempre foi e sempre será da forma como é conhecido hoje possibilitará repensar o ensino dessa disciplina na escola básica. Nessa perspectiva, o aluno será protagonista de seu aprendizado e não mais aquele sujeito que aceita passivamente o que lhe é transmitido sobre determinado conteúdo. É imprescindível mostrar a oposição que existe entre a Matemática apresentada de forma naturalizada, como um conjunto de saberes que sempre existiu, daquela na perspectiva de uma Matemática problematizada, que contempla seus múltiplos processos de produção ao mobilizar saberes próprios do contexto escolar.

Davis e Simmt (2006) apontam que a forma naturalizada da Matemática se sustenta exclusivamente em categorias estáveis do conhecimento, enquanto a exposição problematizada é construída por meio da articulação entre categorias estáveis e dinâmicas. Observamos que tanto a formação inicial de professores quanto a prática profissional de professores em sala de aula são dominadas muitas vezes pela visão naturalizada da Matemática, indicando uma relação direta com os muitos problemas derivados do entendimento de conceitos matemáticos. Assim, enfatizamos o trabalho por meio da Investigação do Conceito para o aprendizado de conceitos na formação inicial.

Para os autores da Investigação do Conceito, essa abordagem de investigação deve ser vista como uma estrutura de formação em que professores interagem (re) construindo e refletindo sobre entendimentos relacionados a um determinado conceito matemático, a partir de uma questão problematizadora inicial que direciona as discussões, e tem como objetivo o ensino. Os autores sugerem identificar as ênfases que surgiram nas discussões coletivas, as quais podem ser utilizadas como instrumento de produção de dados para pesquisas sobre conhecimentos de Matemática para o ensino.

Nesse modelo existem quatro ênfases principais: realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vinculações); blends (misturas) (Davis & Renert, 2012, 2014). Como neste artigo trazemos um recorte de nosso trabalho e fazemos uma aproximação com a teoria da Investigação do Conceito, iremos focar apenas na ênfase das realizações que podem ser descritas de diversas formas, por exemplo, por meio de definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos, entre outros, e utilizados pelo professor para comunicar um determinado conceito matemático (Davis, 2012, Davis & Renert, 2014). Essas realizações não são entendidas como certas ou erradas, porém se originam de um entendimento sobre como se aprende e se ensina determinado conceito e das experiências vivenciadas pelos sujeitos ao se relacionarem com esse saber.

Davis (2012) aponta também que na investigação do conceito em nível individual, os entendimentos de conceitos matemáticos e as concepções de Matemática são emergentes, e o conhecimento individual e coletivo não pode ser dicotomizado. Para ele, os professores, individualmente, raramente conseguem identificar mais do que um punhado de interpretações de um determinado conceito quando apresentados a uma pergunta direta, por exemplo, "O que é multiplicação?". Assim, afirma que esses professores ao situarem o conceito matemático com base em suas experiências de ensino são capazes de produzir listas ricas de imagens e analogias.

Assim, ao considerar as especificidades da Matemática para o Ensino, pretendemos com este trabalho refletir como o licenciando, futuro professor, constrói uma Matemática para ensinar o conteúdo EDL.

Uma proposta de construção coletiva de conceitos

Para produzirmos, organizarmos e analisarmos os dados, desenvolvemos nossa pesquisa seguindo algumas características da Investigação do Conceito (IC).

Na IC, o papel do pesquisador consiste em "Estruturar tarefas significativas e apropriadas para os participantes de modo a criar ambientes que permitam a interação e troca de ideias" (Davis & Simmt, 2006, p. 300, tradução nossa). Nesse sentido, conduzimos os encontros estruturando e propondo tarefas sobre o tema de EDL, como: resolução de problemas; elaboração de problemas pelos participantes, demonstrações formais e uso de tecnologia para construção do gráfico de uma EDL.

Em nossa pesquisa valorizamos as ideias e a argumentação dos licenciandos no processo de resolução dos problemas selecionados, criando, dessa maneira, um ambiente de construção coletiva de conceitos, com o intuito de proporcionar a construção de saberes relacionados ao estudo das EDL para o ensino por meio da Matemática problematizada.

Os dados foram produzidos em uma instituição pública de ensino, em um total de cinco encontros, em uma turma do quinto período de Licenciatura em Matemática, com a presença de 19 alunos, na disciplina Teoria dos Números. A organização dos encontros e os objetivos da pesquisa encontram-se descritos na tabela a seguir.

Tabela 1 – *Organização e Objetivo dos Encontros*

Dias	Organização dos Encontros	Objetivo da Pesquisa
Dia 1 – 13/06/2017	Individual: Os licenciandos resolveram um teste com problemas de EDL individualmente. Grupo: Os licenciandos resolveram problemas de EDL em grupo e discutiram no coletivo suas estratégias e soluções.	Levantar conhecimentos prévios dos licenciandos ao resolverem situações-problema relacionadas à EDL por meio do teste individual. Levantar conhecimentos prévios dos licenciandos ao resolverem situações-problema relacionadas à EDL trabalhando em grupos.
Dia 2 – 20/06/2017	Grupo/coletivo Resolução de problemas diversos pelos licenciandos e discussões no coletivo.	Observar as estratégias utilizadas pelos licenciandos ao discutirem situações-problema em grupo e como as socializam com toda a classe.
Dia 3 – 23/06/2017	Grupo/coletivo Alunos propõem problemas e os apresentam e validam no coletivo.	Analisar os saberes mobilizados pelos licenciandos ao proporem problemas que recaiam em uma EDL.
Dia 4 – 27/06/2017	Momento de discussão coletiva baseada na produção dos alunos e na exposição da teoria formalizada.	Verificar como os alunos interligam os saberes já construídos com os Teoremas de EDL ao participarem das discussões durante a exposição pelos pesquisadores.
Dia 5 – 04/07/2017	Duplas/coletivo Utilização do Geogebra no estudo de EDL.	Observar a mobilização dos saberes dos alunos ao utilizarem o software Geogebra para construção de gráficos de EDLs.

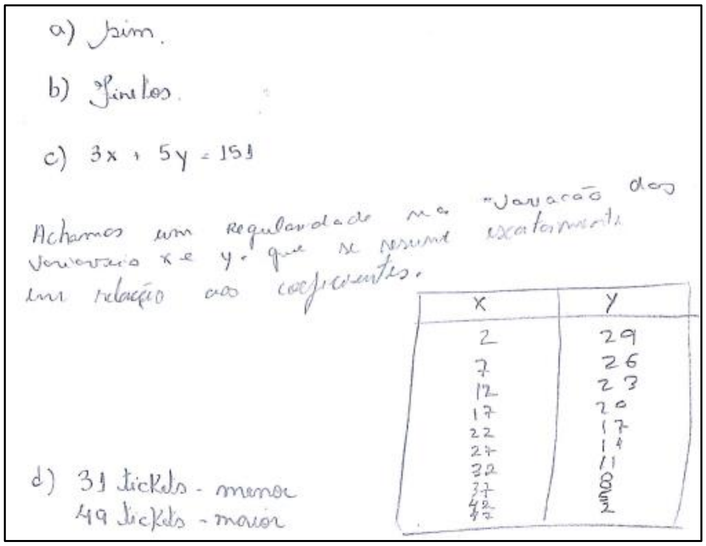
Fonte – *Organizado pelo pesquisador, 2017.*

Pela grande quantidade de dados produzidos em nossa pesquisa ao longo dos encontros, optamos neste artigo, em analisar as soluções da situação-problema estimuladora do primeiro encontro, apresentadas por um dos grupos de alunos. Nesse encontro, para que emergisse o conceito de EDL, iniciamos o trabalho em pequenos grupos por meio de resolução de problema. A seguir será apresentado o problema proposto à turma e a solução do grupo autointitulado “O Infinito”.

Quadro 1 - *Problema proposto no primeiro encontro*

Um consumidor deseja pagar uma compra de supermercado, no valor de R$ 151,00, com tickets de 3 e 5 reais. Pergunta-se: A equação tem solução? Se tem solução, o número de soluções é finito ou infinito? Se tem solução, quais são essas soluções? Qual é o menor número de tickets que pode ser usado? E o maior? (SILVA, Valdir Vilmar Da. Números Construção e Propriedades. 1ª Edição. Goiânia: UFG, ano 2003).

Figura 1: *Resolução do Problema do encontro 1 – Grupo "Infinito"*



a) Sim.

b) Finitos.

c) $3x + 5y = 151$

Achamos um Regularidade na "variação das variáveis x e y" que se resume exatamente em relação aos coeficientes.

x	y
2	29
7	26
12	23
17	20
22	17
27	14
32	11
37	8
42	5
47	2

d) 31 tickets - menor
49 tickets - maior

Fonte *– Dados da pesquisa, 2017.*

A estratégia escolhida pelo grupo apontava, a princípio, que o problema seria resolvido por meio de uma equação, já que a representação algébrica do problema foi a expressão $3x + 5y = 151$. Porém, ao apresentar o par ordenado (x, y), que torna a sentença verdadeira, percebemos que chegaram à solução por tentativa e erro. Esse modo de apresentar a solução do problema confirma o que apontam (Davis, 2012, Davis & Renert, 2014), ao afirmarem que as realizações são diversas e que são formas de comunicar um determinado conceito matemático.

O grupo, ao representar a equação na busca das soluções que resolveriam o problema, destaca: "Achamos uma regularidade na variação das variáveis x e y que se resume exatamente em relação aos coeficientes". Essa frase apresentada pelo grupo, juntamente com a tabela mostrada na Figura 1, mostrou que emergiu, por meio das discussões coletivas, uma Matemática científica, pois aqueles alunos ao trabalharem juntos identificaram uma solução geral para a equação via parametrização da equação da reta, por meio dos coeficientes da equação $3x + 5y = 151$. Essa parametrização fica evidente por meio da tabela ao somarem às soluções particulares da coluna X o valor do coeficiente $b = 5$ e diminuírem às soluções particulares da coluna Y o valor do coeficiente $a = 3$. Essa constatação feita pelo grupo conduziu à solução geral de uma EDL como apresenta Hygino (1991, p. 119) "Seja (x_0, y_0) uma particular solução da equação diofantina $ax + by = c$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então, essa equação admite infinitas soluções e o conjunto dessas soluções é: $S = \{(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t) \mid t \in Z\}$ onde $d = mdc\ (a,b)$".

No caso do problema em questão, com o mdc $(3, 5) = 1$, foi possível constatar que $x = x_0 + 5t$ e $y = y_0 - 3t$, como evidenciado na tabela apresentada pelo grupo. Além disso, o grupo, ao ordenar as soluções particulares dessa EDL em uma tabela, apresentou um modo de articular o saber científico com o saber escolar, tornando o conteúdo compreensível aos demais colegas que estavam na sala. Essa solução mostrou que o saber do conteúdo estava sendo construído, pois os conceitos de EDL eram refletidos e discutidos de acordo com a necessidade de resolver a situação proposta. Shulman (1986) refere-se aos conhecimentos específicos da disciplina ministrada pelo professor como conhecimento do conteúdo, que englobam a compreensão e a organização de fatos, os conceitos e os procedimentos relacionados à área específica.

Podemos afirmar, também, que o grupo *O Infinito* apresentou indícios de uma construção do saber pedagógico do conteúdo proposto por Shulman (1986), pelo modo como apresentou a solução do problema coletivamente e explicou a forma encontrada para relacionar os coeficientes no sentido de determinar valores para x e de y, e facilitar o entendimento pelos colegas. Acerca do saber pedagógico do conteúdo, Shulman (1986) afirma que esse saber é o que incorpora os conteúdos mais importantes a serem estudados, englobando as representações mais úteis, as analogias mais eficazes, as ilustrações, bem como exemplos e demonstrações. E também que é o único saber produzido pelo professor em sua prática e, em nosso caso, pelos licenciandos ao proporem formas de resolver e explicar suas estratégias de solução que conduziram a uma articulação de saberes.

A forma de esses alunos apresentarem a solução do problema e as discussões coletivas nos mostraram que a construção do saber pedagógico do conteúdo começa na licenciatura e nessa esfera também é possível criar articulações entre o saber científico e o escolar no sentido da construção de conceitos. Ao observarmos que o grupo foi capaz de conjecturar uma importante relação entre os coeficientes de uma EDL, entendemos que é preciso proporcionar mais momentos como esse nas disciplinas de conteúdo específico da licenciatura, já que isso aponta que a Matemática apresentada dessa forma não é uma superficialização da Matemática acadêmica, pelo contrário, possibilitou a esses alunos compreender esse conceito em sua gênese. Sobre esse aspecto, Giraldo (2018, p. 41) contribui ao afirmar que:

> De fato, na base de muitos obstáculos de ensino e de aprendizagem de matemática podem se encontrar vínculos entre concepções sobre a própria natureza da matemática e formas naturalizadas de exposição da disciplina, que se alimentam mutuamente, são tacitamente estabelecidas e amplamente disseminadas, tanto no ensino básico como no universitário.

Após essa solução, retomamos em um encontro posterior, as discussões e as demonstrações da solução geral de uma EDL. Essas discussões coletivas propiciam ao futuro professor refletir sobre conceitos matemáticos ao mesmo tempo que ele constrói uma Matemática com vistas ao ensino.

Além disso, o trabalho coletivo assumiu um papel de destaque tanto na riqueza de detalhes quanto no entendimento dos conceitos de EDL, por meio dos trabalhos colaborativos. Esse aspecto da coletividade se justifica, visto que os saberes individuais, quando compartilhados se entrelaçam, e produzem novos saberes que contribuirão não somente para que o indivíduo (re) construa seus conceitos, mas todo o grupo participante. Outros exemplos ocorreram ao longo da pesquisa, em que as discussões coletivas contribuíram para construir uma Matemática para o ensino, porém o limite de páginas neste artigo restringe discuti-las.

No final desse trabalho foram feitas algumas perguntas à turma, entre elas: *"O que foi bom?",* e eles deveriam enviar a resposta por e-mail. A seguir apresentamos duas das respostas obtidas.

> Gostei da forma como foi desenvolvida a pesquisa. Atividades trabalhadas em grupo nos possibilitaram enxergar as resoluções e desafios de estudar equações diofantinas de uma forma única e diferente. Foram enriquecedores os debates em sala de aula, tanto durante as discussões em grupo quanto depois nos momentos em que discutíamos com a turma o que havíamos pensado e feito. Acredito que é um trabalho válido a ser realizado outras vezes. (Licenciando Y, 04/07/2017)
> A dinâmica em grupo e a introdução do conteúdo usando a resolução de problemas antes de demonstrar os teoremas. (Licenciando X, 04/07/2017)

Podemos afirmar pelas respostas desses licenciandos a relevância de trabalhar via resolução de problemas, o que nos permite inferir que o trabalho em grupo e no coletivo foram primordiais, tanto na riqueza de detalhes como no entendimento dos conceitos de EDL emergentes ao longo dos encontros.

Considerações finais

Com este artigo intentamos apresentar que é possível construir uma Matemática para o ensino ao mesmo tempo em que se forma um professor, e um dos caminhos para isso é a Investigação do Conceito, valorizando a colaboração na resolução e na comunicação coletiva de soluções para problemas de EDL. Nesse sentido, na formação inicial, processos nos quais os licenciandos possam vivenciar e refletir acerca das situações que permeiam a escola e a prática docente favorecem e estimulam o desenvolvimento da identidade profissional, ao (re) construirem seus saberes.

Além disso, os futuros docentes, ao resolverem, conjecturarem e pensarem coletivamente sobre as situações-problema que foram propostas tiveram oportunidade de entender que essa Matemática estabelecida hoje, muitas vezes ensinada basicamente por meio de demonstrações e teoremas, pode também ser produzida por eles com epistemologia própria. Isso, certamente, trará implicações positivas no futuro, quando forem ensinar na escola básica, ao terem consciência daquilo que precisa ser trabalhado para desenvolver determinado conceito.

Confirmamos que nosso trabalho desenvolvido com base em uma concepção da Matemática problematizada fez sentido, uma vez que o conteúdo de EDL trabalhado em sua maioria com base quase exclusivamente em demonstrações e teoremas foi, em nossa pesquisa, proposto de modo inverso, colocando o futuro docente como protagonista de sua aprendizagem.

Salientamos que a formação inicial docente não supre todas as necessidades e especificidades relacionadas à teoria e à prática que será construída com a experiência de sala de aula. Porém, iniciar na formação inicial as discussões numa linha de uma Matemática para o ensino evita a dupla descontinuidade que Klein (1908) apontou ao dizer que a Matemática universitária tem pouca relação com a Matemática escolar e vice-versa. Além disso, as reflexões feitas em um trabalho nessa linha possibilitaram que esses futuros professores fizessem articulações necessárias entre a Matemática científica e a escolar, de forma a construir uma Matemática para o ensino.

Como verificado na pesquisa, o trabalho em grupo e no coletivo foi importante e relevante pela riqueza de ideias e experiências vividas que surgiram quando os professores situavam determinado conceito matemático no contexto de suas experiências como alunos, o que resultou na (re) construção do próprio conceito. O aspecto da coletividade justifica-se, pois os saberes individuais, quando compartilhados, se entrelaçam e produzem novos saberes, permitindo que o indivíduo e o grupo participante (re) construam seus conceitos.

Ressaltamos, também, que na formação inicial os licenciandos também trazem de sua formação anterior experiências ou projetam formas de ensinar com a perspectiva de serem professores, o que resulta em construção de conceitos. Assim, também geram “metáforas, analogias e imagens” (Davis, 2012) ao trabalharem resoluções de situações-problema utilizando conceitos aprendidos em suas experiências como alunos, de forma a reformular esses conceitos e caminhar na construção dos conceitos de EDL para o ensino.

Referências

Ball, D. L.; Thames, M. H.; Phelps, G. (2008). *Content Knowledge For Teaching: What makes it Special?* Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Charlot, B. (2005). Relação com o saber, formação dos professores e globalização: questões para a educação hoje. Porto Alegre, Artmed.

Davis, B. e Simmt, E. (2006). *Mathematics-for-teaching*: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. Educational Studies in Mathematics, 61(3), 293-319, March.

Davis, B. e Renert, M. (2009). *Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation for the Learning of Mathematics*, 29(3), 37-43.

______________________. (2012). *Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge*. Educational Studies in Mathematics, 82(2), 245- 265, Feb.

______________________. (2014). *The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics*. New York: Routledge.

Davis, B. (2012). Subtlety and complexity of mathematics teachers' disciplinary knowledge. In: International Congress on Mathematical Education, 12, Seoul, Korea. Anais. Seoul, Korea: ICME.

Domingues, H. H. (1991). *Fundamentos de Aritmética.* São Paulo. Atual.

Giraldo, V., Rangel, L., Menezes, F. e Quintaneiro, W. (2017). *(Re) construindo saberes para o ensino a partir da prática:* investigação de conceito e outras ideias. Anais do VI SHIAM.

Giraldo, V. (2018). *Formação de professores de matemática: para uma abordagem problematizada.* Revista Ciência e Cultura, 70(1), 37-42, jan./mar.

Lins, R., C. e Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas, SP. Papirus.

Moreira, P.C.e Ferreira, A.C. (2013). *O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática*. Boletim de Educação Matemática, 27(47), 985-1005.

Nóvoa, A. (2009). Professores: Imagens do futuro presente. Lisboa: Educa.

Paiva, M. A. V. (2018). Proeja's Classroom as a Teacher Training Space. RIPEM, 8(2), 60-71.

Resende, M. R. (2007). *Re-significando a disciplina Teoria dos Números formação do professor de Matemática na licenciatura*. Tese (Doutorado em Educ. Matemática) PUC/SP.

Shulman, L. S. (1986). *Those who understand knowledge growth in teaching.* Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Silva, V. V. Da. (2003). *Números Construção e Propriedades.* Goiânia, Brasil: UFG.

Zerhursen, A.; Rakes, C. & Meece, S. (1999). *Diophantine Equations*. Disponível e <http://math.as.uky.edu>/~carl/ma330/projects/diophanfin.html>. Acesso em: 10/06/2018.

Tardif, M.; Lessard, C.; Lahaye, L. (1991). *Esboço de uma problemática do saber docente*. Teoria & Educação, 1(4), 215-253.

CONOCIMIENTO DE LAS CARACTERÍSTICAS DE APRENDIZAJE PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD EN BACHILLERATO: UN ESTUDIO DE CASO

KNOWLEDGE OF LEARNING CHARACTERISTICS FOR PROBABILITY TEACHING AT SENIOR HIGH SCHOOL: A CASE STUDY

José Miguel León Banguero; Leticia Sosa Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
josemigleon@gmail.com, lsosa@uaz.edu.mx

Resumen
En este reporte de investigación se presentan los avances de un proyecto de titulación el cual busca indagar el estado actual de conocimiento didáctico asociado a las características de aprendizaje sobre la probabilidad que evidencian profesores de bachillerato en Zacatecas. Se realiza una indagación en investigaciones que evalúan los conocimientos para la enseñanza de la probabilidad e investigaciones sobre las dificultades para el aprendizaje de la probabilidad, a partir de ello, utilizando el marco teórico del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemática (MTSK), se propone una prueba de conocimientos didácticos, asociados a la enseñanza de la probabilidad simple y compuesta.

Palabras clave: formación de profesores en probabilidad, estudio de caso, conocimiento profesores

Abstract
This research reports the progress of a degree project which is aimed at inquiring into the current state of didactic knowledge associated with learning characteristics on probability that senior high school teachers demonstrate in Zacatecas. A search is carried out in investigations that evaluate the knowledge for probability teaching, and in investigations about difficulties for probability learning; hence, by using the theoretical framework of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), we propose a didactic knowledge test, associated with the teaching of simple and compound probability.

Key words: teacher training in probability, case study, knowledge, teachers

Introducción

En los últimos años, el aprendizaje de la probabilidad ha cobrado un papel importante y necesario en la formación de futuros ciudadanos, debido a que este les permite desenvolverse y tomar decisiones adecuadas ante fenómenos de azar e incertidumbre (Batanero y Serrano, 2007). Dicha importancia ha impulsado la inclusión de los contenidos de probabilidad en currículos de matemáticas en diversos países como: España, México, Estados Unidos, Chile, Canadá, etc. (Batanero, 2015). Sin embargo, dicha inclusión ha generado diversos interrogantes con respecto a su enseñanza, aprendizaje, integración en el curricular, entre otras, las cuales requieren -necesariamente- de una atención para propiciar el desarrollo del pensamiento y razonamiento probabilístico en todos los niveles educativos (Vásquez & Alsina, 2015).

Actualmente, uno de los interrogantes que surge en la investigación de la disciplina de la Matemática Educativa es acerca de los conocimientos que deben de poseer un profesor de matemáticas para llevar a cabo un proceso de enseñanza. Sin embargo, las respuestas a dichas cuestiones no son de forma inmediata, conlleva al investigador a realizar un análisis profundo de los conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza, los cuales juegan un papel fundamental en la formación inicial y continua del profesor. Desde esta perspectiva, surge esta investigación, debido a las limitadas investigaciones que se centran en comprender y analizar los conocimientos matemáticos y didácticos que debe de poseer un profesor de matemáticas para la enseñanza de contenidos de probabilidad (Mohamed, 2012).

Los principales aspectos que ha permitido centrar la mirada de diversos investigadores y grupos de investigación especializados en Matemática Educativa (ME) y Formación de Profesores (FP) para la enseñanza de la probabilidad son los diversos cambios curriculares en matemáticas, en los cuales se ha incluido de manera paulatina desde el año 1990 contenidos matemáticos relacionados con la probabilidad (Vásquez y Alsina, 2015). A raíz de la inclusión de dichos contenidos surge la necesidad de considerar los conocimientos matemáticos y didácticos y matemáticas que requiere un profesor de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad.

En los últimos diez años, son numerosas las consideraciones en consignadas en “handbooks” y revistas especializadas en Matemática Educativa, las cuales manifiestan que resulta importante y significativo para la enseñanza de conceptos de probabilidad establecer elementos para la enseñanza de estos contenidos en diversos niveles educativos (Ortíz et al., 2006; Ortiz, Batanero y Contreras, 2011). Por esta razón, resulta relevante para el estado actual del conocimiento profesional para la enseñanza de la probabilidad realizar investigación que esté dirigida a caracterizar y establecer elementos de su conocimiento (Guerrero, 2015).

En complemento a lo anterior, a continuación, presentamos algunos antecedentes que permiten dilucidar el estado actual de conocimiento profesional de profesores de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad, los cuales permiten platear el problema de investigación el cual queremos abordar en esta comunicación.

Con respecto a los conocimientos matemáticos, Mohamed (2012) señala por medio de un test para medir el nivel de conocimiento de profesores en activo sobre probabilidad simple y condicional, que su conocimiento matemático es muy limitado. Esto se debe a que en sus resultados encuentra que sus participantes poseen dificultades para resolver problemas elementales que involucran conceptos de probabilidad como: espacio muestral, independencia y dependencia de eventos, tipos de eventos, etc. Resultados semejantes se han encontrado en otras investigaciones como: Gómez (2014), Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) y Contreras (2011), en donde documentan que el conocimiento matemático de los profesores en matemáticas en formación y en ejercicio, de distintos niveles, es muy limitado. En ese sentido, concluyen que esto se debe a que los profesores en formación y en activo presentan errores, sesgos y dificultades debido a su bajo su razonamiento probabilístico.

En lo referente al conocimiento didáctico del contenido para la enseñanza de la probabilidad, Gómez (2015) afirma que este dominio de conocimientos es deficiente en profesores en activo, esto lo afirma con base en evaluaciones de conocimientos y entrevistas semiestructuradas, en donde los resultados muestran que los participantes presentan dificultades para reconocer elementos de enseñanza, aprendizaje y currículo. En lo específico a nuestro tema de interés que es el conocimiento de los estudiantes con respecto a la interacción con el contenido matemático, Batanero et al. (2015) y Mohamed (2012) que los profesores en formación y en activo poseen problemas para reconocer los distintos tipos de razonamientos de los estudiantes, así como los errores, dificultades y sesgos presentes en las respuestas de los estudiantes. Dicho así, consideramos que resulta relevante y significativo para el estado del arte en lo referente a la enseñanza de la probabilidad, hacer un reconocimiento del estado actual de conocimiento profesional para las características de aprendizaje de los estudiantes en profesores en activo.

Así mismo, otro aspecto importante a considerar en los antecedentes son las diversas investigaciones acerca de los modelos teóricos y metodológicos que permiten estudiar el conocimiento que evidencian profesores de matemáticas. En ese sentido, son diversas las propuestas que permiten estudiar y modelar los conocimientos del profesor, un ejemplo de ello es el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), propuesto por el grupo SIDM coordinado por el Dr. Carrillo de la Universidad de Huelva, España. Este modelo permite modelar el conocimiento matemático del profesor y analizarlo desde distintos escenarios sobre su práctica, esto a través de la delimitación de dominios y subdominios de conocimiento profesional. El modelo MTSK se abordará de manera más detallada en la siguiente sección.

A raíz de la delimitación de los antecedentes con respecto a los conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza de la probabilidad y los modelos de conocimiento profesional, resulta relevante plantear la pregunta que rige esta investigación:

¿Qué conocimiento sobre las características de aprendizaje de la probabilidad poseen profesores en activo de bachillerato en Zacatecas?

Con el fin de abordar dicha pregunta de investigación, se plantea el objetivo de investigación, el cual es identificar el estado actual de conocimiento de las características de aprendizaje de los estudiantes que evidencian tres profesores en activo de Zacatecas, México. Es importante resaltar que esta investigación toma como referencia el modelo de conocimiento profesoral MTSK, el cual, a través de uno de sus subdominios, permite la identificación de elementos que se encuentren en el subdominio relacionado con las características de aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, se reconoce, a partir de resultados de otras investigaciones que implementan este modelo, la posibilidad de aparición de elementos pertenecientes a otros subdominios de conocimientos considerados en el MTSK.

Marco teórico

MTSK es modelo que se centra en comprender el conocimiento específico que posee un profesor de matemáticas para realizar su labor, desde un punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje (Escudero, D., Carrillo, J & Flores-Medrano, 2015). En ese sentido, este modelo propone, desde la idea del conocimiento especializado, una perspectiva profunda y estructurada de la práctica profesoral en el aula, debido a que toma en consideración las concepciones y creencias del profesor con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Rojas et al., 2015)

Como hemos mencionado anteriormente, el modelo MTSK ha sido desarrollado por el grupo SIDM coordinado por el Dr. Carrillo, en el año 2013. Sin embargo, este modelo no se origina desde cero, surge a partir de modificaciones y precisiones del modelo MKT (Ball, Thames y Phelps, 2008). En ese sentido, el modelo MTSK propone solventar problemas en la delimitación del subdominio del Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento del Horizonte Matemático a partir de una nueva propuesta de organización (Montes et al., 2013). Esta nueva organización considera dos dominios de conocimiento: (1) Conocimiento Matemático (MK) y (2) Conocimiento

Didáctico del Contenido (PCK), a su vez propone tres nuevos subdominios de conocimientos para cada dominio respectivamente: Conocimiento de los Temas (KoT), Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y Conocimiento de la Enseñanza (KMT), Conocimiento de las Características de Aprendizaje de los Estudiantes (KFLM), Conocimiento de los Estándares (KMLS).

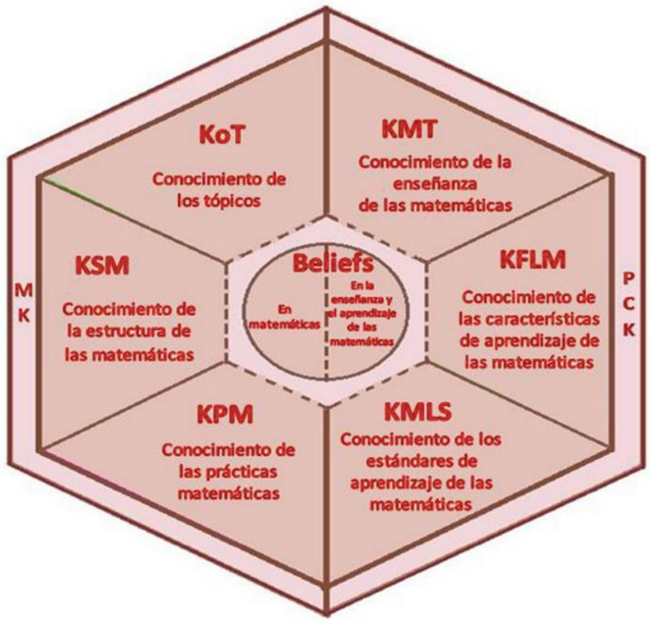


Figura 1. *Tomado de Sosa et al. (2015)*

A continuación, de manera breve y sucinta, resumimos los dominios y subdominios considerados en el MTSK, los cuales son de gran importancia para el desarrollo de esta investigación, puesto que permiten visualizar, desde una perspectiva específica, en los instrumentos de recogida de información considerados para esta investigación, elementos del conocimiento del profesor para la enseñanza de la probabilidad.

1. Conocimiento Matemático (MK): Este dominio de conocimiento se toma en cuenta como uno de los factores fundamentales en la formación del profesor, puesto que considera los conocimientos sobre la materia (probabilidad), conceptos, relaciones, problemas, procedimientos, estructuras, etc., los cuales se ponen en juego durante el proceso de enseñanza (Rojas et al., 2015). Cabe resaltar que el MK reconoce únicamente los aspectos de conocimiento teórico de las matemáticas y no elementos de la didáctica. En la propuesta de organización del MTSK se consideran tres subdominios de conocimientos:

    a. Conocimiento de los Temas (KoT): Este subdominio de conocimientos considera los conocimientos que posee un profesor con respecto a los contenidos a enseñar. En este sentido el KoT abarca conocimientos sobre los distintos significados, representaciones, historia, fenomenología, propiedades, caracterizaciones, etc., los cuales son importantes para conocer los contenidos matemático y sus significados de manera fundamentada y con mayor profundidad, para este subdominio en particular se consideran cinco subcategorías: fenomenologías, propiedades y fundamentos, definiciones, registros de representación, procedimientos (Flores-Medrano, Escudero, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014).

    b. Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): Este subdominio comprende los conocimientos que tiene el profesor sobre los distintos modos de proceder, relaciones y correspondencias existentes entre los conceptos y objetos matemáticos. En este sentido, el KPM considera los conocimientos del profesor sobre hacer, descubrir y crear matemática, desde una perspectiva que integra la lógica proposicional, modos de proceder y sintaxis propia de las matemáticas (Flores-Medrano, Escudero, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014). Para este subdominio en particular se consideran dos tipos de prácticas, las cuales permiten diferenciar el conocimiento: prácticas ligadas a la matemática general y prácticas ligadas a una temática en matemáticas.

c. Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): Este subdominio considera que el conocimiento del profesor posee una perspectiva conjuntista y global de la enseñanza de la matemática. En ese sentido, el KSM contempla todas aquellas conexiones intraconceptuales que hay entre los conceptos y temporales que hay en un mismo concepto (Montes, Aguilar, Carrillo & Muñoz-Catalán, 2013). Es decir, permite que el profesor establezca relaciones entre los conocimientos previos y posteriores con respecto a diferentes cursos y niveles educativos. Para este subdominio en particular se consideran cuatro categorías de conexiones matemáticas, las cuales son: complejización, simplificación, transversales y auxiliares.

2. Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK): En dominio de conocimiento se resalta la importancia de que el profesor conozca, en gran medida, los contenidos a enseñar, los contenidos a aprender y los estándares de aprendizaje que pretende lograr con sus estudiantes (Montes, Aguilar, Carrillo & Muñoz-Catalán, 2013). Para llevar a cabo lo anterior, el PCK toma en consideración aspectos del conocimiento profesional del profesor relacionados con la didáctica específica del contenido, es decir, retoma consideraciones curriculares, formas de enseñanza y aprendizaje, conocimientos a partir de la indagación bibliográfica, etc. (Rojas et al., 2015). Es importante mencionar que el PCK reconoce únicamente relacionados con la didáctica del contenido y no elementos del conocimiento matemático. En la propuesta de organización del MTSK se consideran tres subdominios de conocimientos:

a. Conocimiento de la Enseñanza de la Matemática (KMT): Este subdominio abarca los conocimientos en donde el contenido matemático condiciona la enseñanza. En ese sentido, este subdominio le provee al profesor sobre las herramientas metodológicas y teóricas para la enseñanza del contenido (Montes, Aguilar, Carrillo & Muñoz-Catalán, 2013). En ese sentido, el KMT comprende aquellas características propias del contenido matemático y sus recursos para su enseñanza, tales como: libros de texto, tipos de tareas, ejemplos, representaciones, etc. Este subdominio de conocimiento considera dos categorías:conocimiento de las formas de enseñanza y conocimiento de los recursos y materiales asociados al contenido a enseñar.

b. Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): Este subdominio de conocimiento considera el conocimiento del profesor acerca de las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se desarrollan en determinados niveles o momentos educativos y que están estipulados en documentos oficiales de la secretaría de educación a cargo (Montes, Aguilar, Carrillo & Muñoz-Catalán, 2013). En ese sentido, el KMLS le permite al profesor reconocer elementos como: estándares, aprendizajes esperados, competencias, orientaciones de enseñanza, materiales curriculares, etc. Este subdominio de conocimiento considera tres categorías: contenidos matemáticos que se requieren enseñar, conocimiento del nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado y secuenciación de temas.

c. Conocimiento de las Características de Aprendizaje (KFLM): Este subdominio abarca los conocimientos que tiene el profesor de las matemáticas con respecto a las características de aprendizaje inherentes al contenido matemático que aborde (Sosa, Flores-Medrano y Carrillo, 2015). Es importante mencionar que este subdominio toma en consideración al contenido matemático como objeto de aprendizaje y no el estudiante, como regularmente sucede. En ese sentido el KFLM permite a los profesores identificar y anticipar aspectos como: formas de razonamiento, dificultades, errores, sesgos al momento de la interacción del estudiante con el contenido matemático. Así mismo, considera aspectos motivacionales que permiten al profesor sacar el máximo provecho a los contenidos y propiciar su aprendizaje en los estudiantes (Rojas et al., 2015). Para este subdominio en particular se consideran cuatro categorías: formas de aprendizaje, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas.

Metodología

Para esta investigación, la metodología que se pretende utilizar es un estudio de caso, en el cual se pretende analizar, por medio de una evaluación de conocimientos didácticos, los conocimientos de las características de aprendizaje de tres profesores en activo de Nivel Bachillerato en Zacatecas, México.

Los casos que consideramos son representativos para la población sobre la cual queremos abordar son aquellos profesores que han enseñado contenidos de probabilidad en el quinto semestre del nivel de Bachillerato en Zacatecas, México. Además, el participante debe de tener mínimo tres años de experiencia profesional frente a grupo.

Para el diseño del instrumento de investigación se toma como referencia situaciones problema que han sido validadas por expertos en investigaciones como Batanero et al. (2015), Guerrero (2015), Vásquez (2014) y Mohamed (2012). De igual forma, antes de la aplicación, se procedió a hacer una prueba piloto con tres estudiantes de la Maestría en Matemática Educativa, en la cual arrojó que era necesario hacer modificaciones de contenido a la situación y a la pregunta 2 y 3 del cuestionario.

Con respecto a la técnica con que se va a recoger la información, se diseñó una evaluación de conocimientos sobre probabilidad. Esta prueba tiene como objetivo analizar los conocimientos de los profesores sobre las características de aprendizaje con respecto a la probabilidad, específicamente se quiere reconocer las competencias de los profesores para identificar sesgos, dificultades y obstáculos, presentes en las respuestas de estudiantes hipotéticos. Cabe mencionar que el diseño del instrumento toma en consideración los dominios, subdominios y categorías de conocimiento planteadas en el modelo teórico-metodológico del MTSK.

La prueba está compuesta por dos partes: La primera busca reconocer aspectos inherentes a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas como lo son la resolución de la situación y el reconocimiento de los conceptos y objetos que están en juego en la situación. En un segundo momento, la prueba pretende medir los conocimientos con respecto a la interacción del estudiante con el contenido matemático y los distintos tipos de razonamiento, esto a través del planteamiento de las respuestas de cuatro estudiantes hipotéticos. Cabe mencionar que dichas respuestas se realizan a partir de los resultados de investigaciones como Guerrero (2015), Vásquez (2015) y Mohamed (2012); en esta segunda parte se busca que los participantes clasifiquen las respuestas como correctas e incorrectas y brinden una justificación sobre el por qué de cada una de estas.

A continuación, presentamos la situación diseñada para esta investigación:

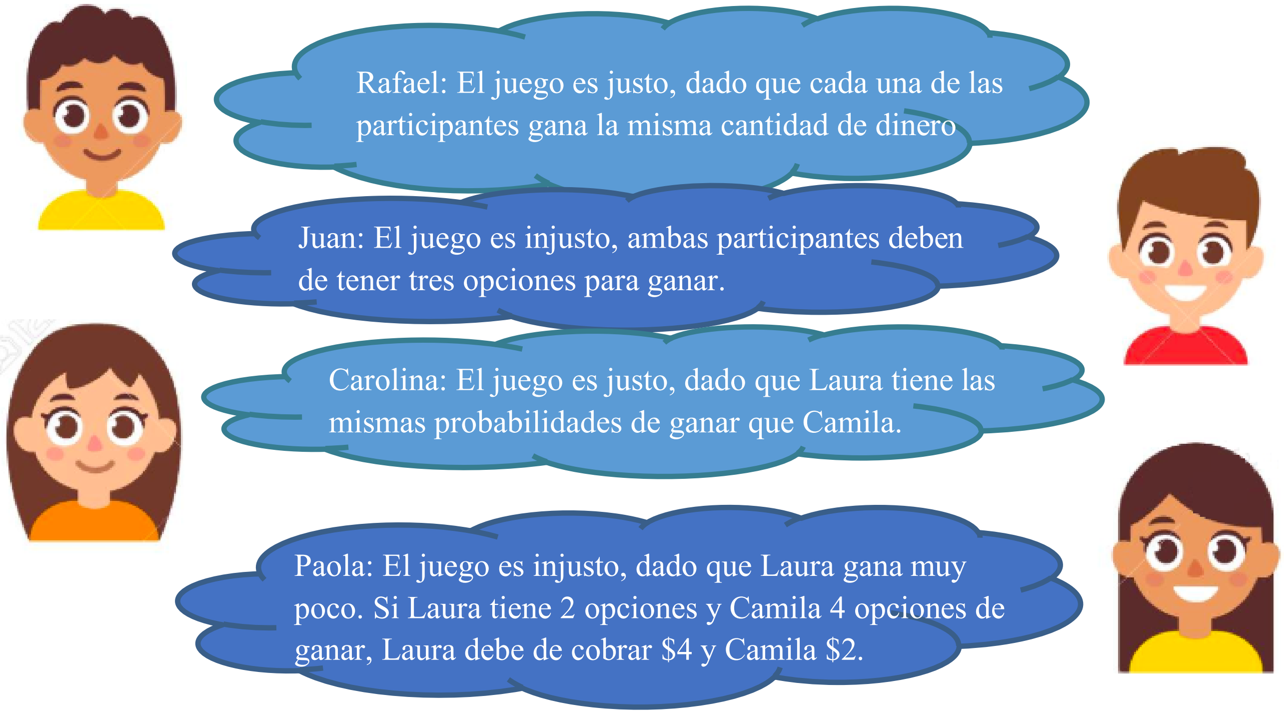
La profesora Susana les propone a sus estudiantes la siguiente situación:

Laura y Camila inventan un juego de azar con las siguientes condiciones:

1. Se lanzan dos dados y calculan la diferencia de puntos entre el mayor y el menor;
2. Si el resultado de la diferencia es 0 o 2, entonces Laura le cobra a Camila \$2.
3. Si el resultado de la diferencia es 1, 3, 4 o 5 es Camila es quien le cobra a Laura \$2.

¿El juego inventado por Laura y Camila es justo? Si considera que no es así, proponga una modificación al juego para que lo sea.

Algunos alumnos de la profesora Susana proporcionan las siguientes respuestas:



A partir de la situación anterior, responda:

1. Resuelva el problema planteado por la profesora Susana.
2. ¿Cuál o cuáles de los estudiantes responde correctamente? ¿Por qué?
3. ¿Cuáles contenidos matemáticos considera usted que son necesarios para resolver el problema?
4. Describa las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas de los estudiantes, que los han llevado a responder erróneamente.

Resultados

En los resultados de esta investigación, reconocemos a partir de la aplicación del instrumento de investigación, diversos elementos del conocimiento del profesor para la enseñanza de la probabilidad que permiten establecer aspectos importantes a considerar. A continuación, se presentan, a partir de los subdominios del modelo MTSK, los resultados que consideramos más relevantes y significativos:

Con respecto al Conocimiento Matemático (MK), con la primera pregunta se busca establecer el nivel de conocimientos para resolver la situación planteada. En ese sentido, se puede afirmar que todos los participantes resolvieron la situación correctamente, proporcionando correctamente las probabilidades de ganancia para Laura y Camila, y comparándolas entre sí (Ilustración 1).

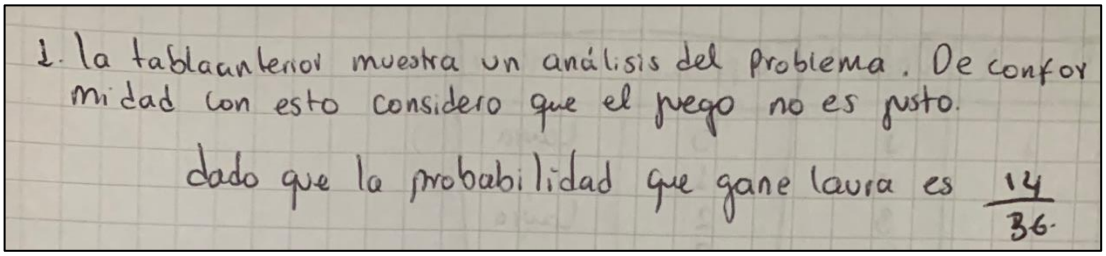

1. la tablaanterior muestra un análisis del Problema. De conformidad con esto considero que el juego no es justo.
dado que la probabilidad que gane laura es $\frac{14}{36}$.

Ilustración I

De igual forma, a partir de la identificación de todos los casos asociados a la situación, cada uno de los participantes plantea una modificación correcta al juego inventado por Laura y Camila (Ilustración 2). Sin embargo, se puede identificar en las respuestas recolectadas que todos proponen la modificación del juego a partir del ajuste de las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los eventos aleatorios y no desde la modificación de las ganancias o premios.

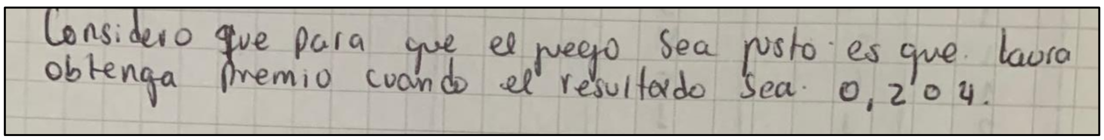

Considero que para que el juego sea justo es que laura obtenga Premio cuando el resultado sea 0, 2 o 4.

Ilustración 2

Con respecto a los conocimientos matemáticos para la selección de la respuesta correcta, lo cual se abordaba en la segunda pregunta, consideramos que los participantes evidenciaron diversas dificultades en sus respuestas. Uno de los participantes considera que para que el juego sea justo ambos jugadores deben de tener el mismo número de opciones de ganar, es decir, el participante afirma que para que un juego sea equitativo este debe de ser simétrico en cuanto al número de opciones y premio obtenido (Ilustración 3). En ese sentido, consideramos que el participante posee dificultades al comprender la definición de juego equitativo.

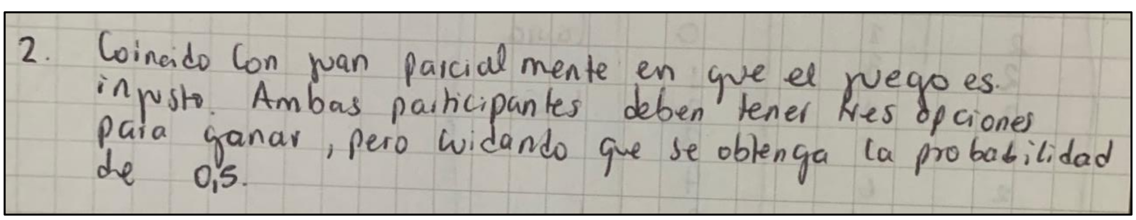
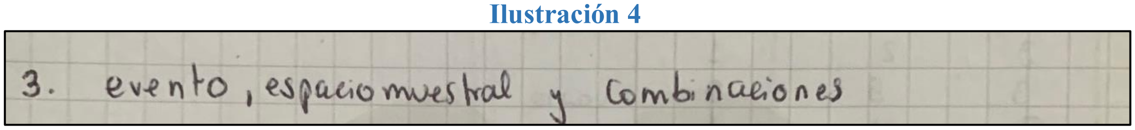

2. Coincido con juan parcialmente en que el juego es injusto. Ambas participantes deben tener tres opciones para ganar, pero cuidando que se obtenga la probabilidad de 0,5.

Ilustración 3

En la pregunta 3, la cual busca comprender los conocimientos sobre los conceptos y propiedades puestas en juego para el desarrollo de la situación. Los participantes mencionan algunos de los conceptos aplicados (Ilustración 4). Sin embargo, en las respuestas proporcionadas se puede identificar dos factores relevantes: (1) no se hace mención alguna de conceptos como independencia de eventos, aleatoriedad, permutación, equiprobabilidad y simetría de objetos. (2) En la respuesta de uno de los participantes se puede identificar que hay una confusión en la definición de permutación y combinación, puesto que en si se quiere analizar el conjunto de los posibles eventos al lanzar dos dados y hacer la diferencia entre el primero y el segundo, el orden en que caen los dados es relevante, por ende, es el concepto de permutación el que se aborda y no combinación.

Ilustración 4


3. evento, espacio muestral y Combinaciones

Con respecto a la pregunta 4, en la cual se cuestionaba de manera más profunda el conocimiento de los estudiantes con respecto a las dificultades, errores y obstáculos con respecto a la probabilidad., se puede afirmar que el conocimiento de los participantes fue muy limitado, esto se debe a que poseen dificultades significativas en el reconocimiento de las problemáticas en sus respuestas. Estas afirmaciones se realizan con base a las diversas respuestas proporcionadas por los participantes, como ejemplo podemos ver que el Participante 1 (Ilustración 5) afirma únicamente que, para tratar didácticamente las respuestas erróneas de los estudiantes hipotéticos, basta únicamente con mencionar el espacio muestral asociado a la situación. Sin embargo, afirmamos que dicho concepto, si bien es necesario, no es suficiente, esto se debe a que hay otros conceptos y propiedades sobre las cuales se podría abordar como lo son independencia de eventos, combinación, definición de probabilidad, juego justo, equiprobabilidad, etc.

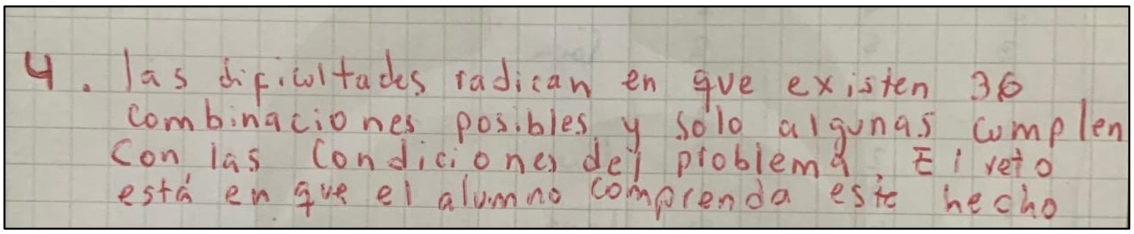


Ilustración 5

En general, los resultados del análisis de la evaluación de conocimiento permiten mostrar algunos de los errores y dificultades más recurrentes presentes en el conocimiento matemático y didáctico de la enseñanza de la probabilidad. En ese sentido, mencionamos de manera explícita nuestra preocupación sobre aquellos elementos del conocimiento didáctico que están ausentes en los participantes. Estos resultados guardan relación a los encontrados en Mohamed (2012), Vásquez (2015), Guerrero (2015) y Batanero et al. (2015), quienes afirman que hay deficiencias en el conocimiento matemático y didáctico de la probabilidad en profesores en formación y en activo de bachillerato.

Conclusiones

La indagación bibliográfica y el diseño, aplicación y análisis del instrumento para medir los conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza de la probabilidad en bachillerato, ha permitido reconocer la importancia significativa que tiene la indagación de elementos importantes para el conocimiento profesional. El análisis cualitativo de las respuestas de los participantes permite afirmar que su estado actual de conocimiento es muy limitado, con respecto a los conocimientos didácticos asociado a la enseñanza de la probabilidad y las características de aprendizaje de los estudiantes, lo cual se complementa con lo encontrado por Batanero et al. (2015).

En un primer momento, la indagación del conocimiento matemático (MK) en las respuestas de los participantes arrojó que este conocimiento es limitado. Esto se debe a que, si bien poseen los conocimientos para la resolución de la situación planteada, existen dificultades para reconocer aspectos relacionados con procedimientos, conceptos o definiciones en juego y relaciones con otros conceptos de probabilidad. En ese sentido, consideramos de suma importancia abordar este aspecto a partir del campo de la formación de profesores.

En un segundo momento, la indagación del conocimiento didáctico (PCK) en las respuestas de los participantes arrojó que su nivel de conocimientos es insuficiente. Esta afirmación se realiza a partir de las limitadas respuestas que proporcionaron los participantes en las preguntas que se pretendía evaluar este dominio de conocimientos. En ese sentido, consideramos fundamental que se aborde este tipo de contenidos en cursos de desarrollo profesional para profesores en activo y en formación, dado que existen dificultades significativas en: el reconocimiento de errores, dificultades y sesgos presentes en las respuestas hipotéticas de los estudiantes y dificultades para reconocer las formas de interacción que tienen los estudiantes con el contenido matemático.

Implicaciones

Consideramos que esta investigación pone en manifiesto la necesidad de abordar cuestiones relacionadas con el conocimiento para la enseñanza de la probabilidad en Bachillerato. En ese sentido, las reflexiones aquí consignadas constituyen un insumo importante para analizar el conocimiento actual de profesores de matemáticas en el nivel de Bachillerato. Consideramos también que, con la delimitación de algunos elementos matemáticos y didácticos para la enseñanza de la probabilidad, estos pueden ser de utilidad para la formación de profesores a través de cursos de desarrollo profesional.

Referencias bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special?. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-40.

Batanero, C., Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO*, 44, 7-16.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. Praxis Educativa, 10(1).

Batanero, C. (2015). Investigación en didáctica de la probabilidad. En Fernández, Ceneida; Molina, Marta; Planas, Núria (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIX (pp. 69-72). Alicante, España: Universidad de Alicante.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Escudero, D., Carrillo, J. y Flores-Medrano, E. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10(1), 53-77.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). ¿Cómo se relaciona el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemá- ticas con su entendimiento sobre los Espacios de Trabajo Matemático? En I. Gómez-Chacón, J. Escribano, A. Kuzniak y P.R. Richard (Eds.). *Proceedings Fourth ETM Symposium* (pp. 473-485). Madrid, España.

Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para enseñar la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.

Guerrero, H. (2015). Evaluación de Conocimientos sobre Esperanza Matemática y juegos equitativos en alumnos de Bachillerato (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre Probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada, España.

Montes, M., Contreras, L.C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII.* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. (2013). *MTSK: From Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures.* Manuscript submitted for publication (CERME 8).

Rojas, N. (2015). *Caracterización del Conocimiento Especializado del profesor de matemáticos: un estudio de casos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. Enseñanza de las Ciencias, 33(2), 173-189.

Ortiz, J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L., y Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En P. Bolea, M.J. González y M Moreno (Eds,), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca: SEIEM.

Ortiz, J., Batanero, C., Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *RELIME*, *15* (1), 63-91.

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo*. Tesis doctoral. Universidad de Girona, España.

Vásquez, C. y Alsina (2015), A. Una aproximación ontosemiótica al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad. En: J.M. Contreras, et al. (eds.). Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Actas. Granada: Universidad de Granada, 2017.

CUALIDADES DE FORMADORES/AS DE FORMADORES/AS QUE DEJAN HUELLAS EN FUTUROS/AS PROFESORES/AS EN MATEMÁTICA

QUALITIES OF TRAINERS' TRAINERS WHO LEAVE THEIR MEMORIES ON PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS

Natalia Sgreccia, Mariela Cirelli, María Beatriz Vital
Universidad Nacional de Rosario (Argentina)
sgreccia@fceia.unr.edu.ar, cirelli@fceia.unr.edu.ar, vital@fceia.unr.edu.ar

Resumen
Se pretende poner en valor aquellas prácticas memorables vividas durante la formación de grado por estudiantes del último año del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. El objetivo es recuperarlas para poder trabajarlas reflexivamente durante la formación de los/as futuros/as profesores/as. Mediante una investigación cualitativa, se ejecutaron dos fases: a) cuestionario abierto aplicado a los/as futuros/as profesores/as en el que reconocen a dos formadores/as que les resultaron significativos/as en la carrera; b) historia de vida de uno de los docentes destacado en a). Finalmente se subraya que los modelos docentes interiorizados impactan fuertemente en la vida profesional.

Palabras clave: formación docente, biografía escolar

Abstract
This paper is intended to show the value those memorable experiences during training years had for students of the senior year of the Mathematics Teacher Training degree at the National University of Rosario. It is aimed at reviving those memories in order to make use of them reflectively during the training of the future teachers. We conducted a two- phased qualitative research: a) open questions to prospective teachers, in which they were asked to name two professors who impacted positively on their studies; b) life story of one of the teachers with good results in phase a). Finally, the paper highlights that internalized teaching models have a powerful effect on subsequent professional life.

Key words: teacher training, school life story

Introducción

Este reporte se enmarca en el Proyecto de Investigación "El trayecto de la Práctica Profesional docente en el Profesorado en Matemática. El caso de la UNR" (1ING576, 2018-2021) que, en términos generales, pretende analizar los dispositivos de formación en el trayecto de la Práctica Profesional Docente en la carrera Profesorado en Matemática (PM) y, en particular, cómo impacta la biografía escolar en la configuración del conocimiento matemático-didáctico de los/as futuros/as profesores/as en Matemática.

Hasta el momento el equipo de investigación ha indagado a los/as estudiantes del PM acerca de experiencias escolares previas al trayecto de formación docente (cualidades de profesores/as de secundario recordados como "buenos").

En la primera publicación del equipo sobre este tema (Sgreccia y Cirelli, 2015) se sistematizaron más de 3000 cualidades de "buenos/as docentes" del nivel medio que estudiantes ingresantes al PM habían escrito de manera concisa el primer día de clase en una actividad que se viene realizando desde el año 2002. Esta sistematización consistió en un agrupamiento según dimensiones de análisis predeterminadas con registro de modalidades emergentes según la interpretación semántica de las expresiones de los/as alumnos/as.

Este trabajo propició, a su vez, otros estudios que fueron progresivamente enfocando su atención hacia asuntos peculiares de análisis. En Sgreccia, Cirelli y Vital (2016) se llevó a cabo un grupo enfocado con egresadas recientes del PM en torno a las cualidades de "buenos/as docentes" que habían mencionado al ingresar a la carrera. Le volvieron a otorgar sentido y también las vincularon con rasgos que ven/proyectan en sí mismas en tanto profesionales noveles de la Educación Matemática. En particular, con el objeto de analizar la ponderación de ciertos rasgos en los/as "buenos/as" profesores/as en Matemática, en Sgreccia, Cirelli y Vital (2019) se compararon las cualidades de los/as profesores/as de esta disciplina con respecto a los de cualquier otra. Los estudios fueron sucesivamente reforzando la hipótesis sobre la importancia de ciertos/as docentes para despertar intereses, como por ejemplo aspirar a ser profesor/a en Matemática.

De allí que en este reporte se haya procurado empezar a interpelar al aula de formación del PM: qué prácticas docentes son especialmente ponderadas por estudiantes universitarios/as que están transitando su formación inicial para ser profesores/as en Matemática. De este modo, la intención de este trabajo es complementar el análisis, también desde la perspectiva de los/as estudiantes, pero en esta oportunidad considerando docentes del PM que hayan sido significativos/as en su formación.

Encuadre teórico

El Proyecto 1ING576 asume como marco de referencia de encuadre para estudiar el conocimiento que pone en juego un/a profesor/a en Matemática cuando se desempeña como tal, al denominado *conocimiento matemático para la enseñanza* (*MKT*) del grupo Michigan (Ball, Thames y Phelps, 2008). Este tipo de conocimiento está conformado tanto por lo *disciplinar de la materia* (contenido común, horizonte matemático, especializado del contenido) como por lo *didáctico del contenido* (estudiantes, enseñanza, currículum) y sus búsquedas giran en torno a qué sería esperable en un/a profesor/a en Matemática para sostener la enseñanza de esta disciplina.

En este marco se entiende a la *biografía escolar* como el conjunto de experiencias vividas en una institución educativa por una persona, en calidad de alumno/a (Alliaud, 2004). Son estas experiencias escolares las que imprimen huellas e influyen de manera inefable en las prácticas de quienes luego adoptan la enseñanza como profesión, de allí la relevancia de la biografía escolar como dispositivo pedagógico para la formación de docentes.

> En nuestras experiencias escolares, además de aprender los contenidos curriculares, interiorizamos otros saberes referidos a pautas de comportamiento, a cómo se aprende, cómo se estudia, cómo se enseña. O sea que como producto de nuestra historia de alumnos, nos hemos apropiado de teorías, creencias, supuestos y valores sobre el conocimiento profesional docente (Caporossi, 2012, p.113).

En particular, en cuanto a la línea de trabajo relativa a la incidencia de docentes especialmente recordados/as como buenos/as en la biografía escolar de los/as futuros/as profesores/as en Matemática, se consideran los hallazgos de Bain (2007) como base para la interpretación de las numerosas y variadas características que confluyen. Al intentar responder "¿qué hacen los/as mejores profesores/as…?", reconoció cinco ejes cruciales, que aquí se consideran como dimensiones de análisis:

- *¿Qué motiva a sus alumnos/as?* Persigue que sus estudiantes estén interesados y que les importe conocer lo que se les está intentando enseñar. Un/a profesor/a que motiva a sus alumnos/as es capaz de generar inquietudes genuinas sobre el tema que están tratando y de establecer vinculaciones con cuestiones más generales. Un/a docente así hace de la intriga, la preocupación y la duda motores que movilizan la curiosidad y el deseo de conocer.
- *¿Cómo prepara las clases?* Atiende a una serie considerable de tareas a la hora de preparar sus clases. Entre ellas se encuentran la de definir las cuestiones más importantes a tratar con el curso y la de elaborar las preguntas con las que esta se podría abordar, teniendo en cuenta los conocimientos previos de los/as estudiantes y sus expectativas acerca de la asignatura.
- *¿Cómo gestiona sus clases?* Crea un entorno crítico natural para el aprendizaje, convoca y sostiene a los/as alumnos/as en la tarea, comienza con los/as estudiantes en lugar de con la disciplina, ayuda a aprender a aprender y atrae a sus alumnos/as al razonamiento disciplinar.
- *¿Cómo trata a sus alumnos/as?* Hace de la confianza el eje principal en la relación docente-estudiantes. Confía plenamente en que sus alumnos/as desean aprender, asume que pueden hacerlo y se los hace saber. En este clima los/as estudiantes se animan a participar, se sienten seguros/as y vencen el miedo de cometer errores.
- *¿Cómo evalúa?* Al considerarla como una herramienta para favorecer los aprendizajes, le concede a la evaluación un lugar central en el proceso de animar y ayudar a los/as estudiantes a aprender.

Metodología

El estudio tiene un enfoque cualitativo, es de tipo empírico y transversal, toma como caso al PM y fue llevado a cabo en dos fases:

- *Cuestionario abierto* presencial individual, aplicado a los/as 14 estudiantes del PM (E1 a E14) que estaban cursando el último año de la carrera en 2019. Consistió en nombrar a dos docentes del PM que hayan sido significativos/as en su formación argumentando en qué sentido lo son. Lo hicieron por escrito, de forma anónima, en 20 minutos aproximadamente.
- *Historia de vida* con uno de los docentes más nombrados. En un encuentro presencial distendido el docente fue recorriendo, a su vez, su propia biografía escolar y su devenir como matemático-profesor. La sesión duró una hora, se tomó registro de audio y, una vez avanzada la primera mitad de la misma, se compartieron con él las cualidades mencionadas por los/as estudiantes en la fase anterior.

Para ambos casos, la técnica de procesamiento de la información fue la de análisis de contenido (Ander-Egg, 2003), atendiendo a los objetivos específicos del estudio y el marco teórico adoptado. Se asociaron las expresiones espontáneas de los/as participantes con modalidades que el equipo de investigación ha venido delimitando en los estudios previos mencionados en la Introducción de este trabajo.

Resultados

En la *Primera fase* de la investigación se reconocieron a nueve docentes (D1 a D9), de los/as cuales siete pertenecen a materias disciplinares con un total de 19 alusiones, uno a Práctica Docente en Matemática y uno correspondiente a la Formación General. Detallados a continuación siguiendo el esquema:
Docente - Alusiones - Materias Plan de Estudios (Res. 217/02 CS)

D1 - 6 - Geometría I
D2 - 6 - Ecuaciones Diferenciales y Modelos Continuos / Funciones Reales
D3 - 2 - Cálculo III / Probabilidad y Estadística
D4 - 2 - Modelos y Optimización
D5 - 1 - Geometría II / Geometría III
D6 - 1 - Cálculo I
D7 - 1 - Álgebra Lineal
D8 - 8 - Práctica de la Enseñanza II / Práctica de la Enseñanza III
D9 - 1 - Historia socio-política del Sistema Educativo Argentino

Las cualidades por las que fueron elegidos/as estos/as profesores/as (121 en total) se distribuyeron de acuerdo a las dimensiones de análisis en las que el equipo se ha estado basando (Bain, 2007).

Tabla 1. *Distribución de las respuestas según las dimensiones de análisis y modalidades emergentes*

Dimensiones	*Modalidades*
1. ¿Qué motiva a sus alumnos/as? (12)	(3) Incentiva a investigar. (2) Motiva a continuar los estudios, Dedicado/a a la carrera, Comprometido/a con la materia. (1) Hace la materia interesante, Promueve el gusto por la materia, Da confianza.
2. ¿Cómo prepara las clases? (37)	(4) Organizado/a, Prolijo/a. (3) Ordenado/a, Responsable. (2) Sabe la materia, Preocupado/a en que sus alumnos/as aprendan, Tiene la clase bien preparada previamente / Planifica sus clases. (1) Preocupado/a, Preocupado/a por sus clases, Autoexigente, Dedicado/a, Explica dando ejemplos, Desarrolla métodos constructivos, Desarrolla clases no tradicionales, Enseña la asignatura de manera diferente, Utiliza material concreto, Promueve una perspectiva histórica y epistemológica de la materia, Preocupado/a en que sus alumnos/as entiendan, Promueve la reflexión, Preocupado/a en que sus alumnos/as sepan expresarse, Promueve conocer el porqué de las cosas, Prepara buen material de estudio / Apuntes precisos y de fácil lectura, Propone trabajos prácticos accesibles, Propone trabajos en taller.
3. ¿Cómo gestiona sus clases? (38)	(6) Explica bien, Claro. (4) Contesta todas las dudas. (3) Explica muchas veces si es necesario / Sin prejuicios, Desarrolla clases participativas. (2) Enseña a los/as alumnos/as a expresarse, Hace pasar al pizarrón, Enseña más allá de la disciplina. (1) Paciente, Explica de diversas maneras, Explica el porqué de cada cosa, Desarrolla clases dinámicas, Claro/a en el pizarrón, Desarrolla clases llevaderas, Enseña a razonar, Abierto/a al debate, Seguro/a, Trabaja bien.
4. ¿Cómo trata a sus alumnos/as? (27)	(4) Cercano/a al alumno. (3) Buena / Excelente persona, Predispuesto/a. (2) Amable, Comprensivo/a, Preocupado/a por cada alumno/a, Interesado/a por los/as alumnos/as, Tiene buen trato.

	(1) Atento/a, Crea vínculos con el/la estudiante, Empatía, Atento/a a sus alumnos/as, Apoya a los/as alumnos/as, Divertido/a / Analogías divertidas, Gracioso/a.
5. ¿Cómo evalúa? (7)	(2) Exigente, Evalúa siendo coherente con lo que enseña. (1) Exigente que despierta curiosidad en el/la alumno/a, Efectúa seguimiento de sus alumnos, Propone exámenes accesibles.

Se destaca que entre las cualidades sobresalientes referenciadas por los/as estudiantes se encuentran: explica bien, claro/a, contesta dudas, cercano/a a los/as alumnos/as, organizado/a, prolijo/a, incentiva a estudiar, ordenado/a, explica muchas veces si es necesario, desarrolla clases participativas, buena persona.

A continuación, se hace una breve recorrida a través de las dimensiones de análisis halladas por Bain (2007), ilustrándolas con algunas citas extraídas de las encuestas, con la intención de rescatar en voz de los/as propios/as estudiantes aquellos aspectos que fueron destacando de sus docentes reconocidos/as.

Con respecto a la *dimensión 1: ¿qué motiva a sus alumnos/as?*, se observa que los/as futuros/as profesores recuerdan a los/as docentes que habilitan a sus estudiantes desde la confianza, haciéndolos/as protagonistas de su propio proceso de aprendizaje.

> *Hacía interesante todos los temas* (E4-D7).
> *Enseñar no solo contenido. Ayudar a que los alumnos sigan investigando fuera de la clase* (E3-D2).
> *Empecé a preguntarme el porqué de cada cosa, sin dar nada por obvio y es algo que hago en todas las materias* (E1-D3).
> *Busca que estos no se queden solo con lo que él transmite* (E10-D3).
> *Por su dedicación a la carrera me inspiró mucho a continuar con mis estudios* (E14-D2, E14-D8).
> *Yo creo que aprendí algo más valioso que la disciplina misma que buscaban enseñar, y eso influyó mucho y me marcó aún más* (E14-D2, E14-D8).

Estos/as docentes tienen expectativas superadoras acerca de sus estudiantes, no pierden sus esperanzas en ellos/as. Fomentan que sus alumnos/as valoren su trabajo y logren disfrutar de su educación.

> *Con ganas de que el otro aprenda* (E13-D4).

En la *dimensión 2: ¿cómo prepara las clases?*, destacan a docentes que efectivamente preparan sus clases, que piensan cómo van a invitar a sus alumnos/as a aprender juntos/as y cómo van a generar las situaciones adecuadas para que sean capaces de razonar y producir respuestas.

> *Me gustaba que planificaba sus clases* (E8-D1).
> *Todos participábamos* (E7-D2).
> *Me marcó su responsabilidad y coherencia entre lo que exige a los alumnos y se exige a ella como docente* (E2-D8).
> *Docente muy ordenado y claro. Sus apuntes eran precisos y de fácil lectura* (E10-D1).
> *Hacía guías prolijas ahorrándome tiempo... Respondía todas las preguntas* (E4-D1).

Para ello, estos/a docentes especialmente recordados/as averiguan la forma en que sus estudiantes aprenden y cuáles son sus modelos mentales.

> *Siempre daba ejemplos de todo y hasta a veces iniciaba un tema a través de un problema* (E1-D3).
> *Forma de enseñar a través de métodos constructivos* (E3-D8).
> *Da una perspectiva histórica y epistemológica a la matemática* (E6-D5).

> *A sus clases, a veces, llevaba material concreto. Si bien no era la materia que más me gustaba, con lo mencionado arriba hizo que terminara gustándome* (E1-D1).

Entre las cualidades expresadas que pueden asociarse a la *dimensión 3: ¿cómo gestiona sus clases?*, remarcan que el/la profesor/a tiene buena oratoria, se expresa mediante un lenguaje cálido, sabe dar explicaciones y le da lugar al/a la alumno/a.

> *En particular porque en sus clases incentiva a la participación en clase y hacía mucho hincapié en que nos animemos a estar en el pizarrón para ir perdiendo el miedo a la exposición* (E14-D2).
> *En conocimiento de la materia. Ser claro al desarrollarlo, al no comprender, explicarlo nuevamente sin prejuicios* (E9-D1).
> *Claridad y coherencia en cuanto al dictado y contenidos* (E5-D8).
> *Por su empatía, apoyo a los alumnos en todo momento, seguimiento, clases distintas y dinámicas* (E11-D8).

En la *dimensión 4: ¿cómo trata a sus alumnos/as?*, destacan que el/la profesor/a se manifiesta abierto/a y humilde, y muestra entusiasmo por la enseñanza, así como seguridad ante los retos que se le presentan.

> *Tiene buenos modos para dirigirse a los alumnos. Uno como alumno puede acercarse y expresarse* (E12-D2).
> *Predisposición para que realmente entiendas los ejercicios, atenta a las dudas individuales y obtuve la confianza para preguntarle sin "miedo" a lo que piense de la pregunta* (E9-D6).
> *Analogías divertidas… Usaba la retórica* (E4-D7).
> *También su manera de ser, comprensiva y buena persona* (E13-D2).
> *Siempre se interesó por los alumnos, que estos comprendan y estén bien físicamente (proponía recreos cuando nos veía cansados)* (E10-D1).

Cuestiones de la *dimensión 5: ¿cómo evalúa?*, especialmente ponderadas, dan cuenta de formas de evaluación que se realizan de manera continua y comprende tanto a los/as alumnos/as como al propio proceso de enseñanza. Un/a docente que sabe evaluar explica claramente cuáles son los criterios que se implementan en la evaluación y se guía por un diseño de objetivos de aprendizaje. Estos/as, por su parte, son invitados/as también a autoevaluar su propio proceso de aprendizaje.

> *Exámenes y prácticas accesibles* (E4-D1).
> *En particular por la predisposición y la exigencia que impuso en la materia que lograba despertar mi curiosidad y en querer superarme en cada clase* (E14-D8).

A partir de las manifestaciones de los/as estudiantes avanzados/as del PM, que hacen evidente la trascendencia que cada una de las cinco dimensiones identificadas por Bain (2007) tiene para la formación, resultó conveniente dialogar en detalle con uno de los/as profesores/as más aludido (D1, de Geometría I, primer año). En primer término, se procuró recorrer su propia biografía escolar para luego compartir con él las cualidades especialmente ponderadas por sus ex alumnos del PM.

De este modo en la *Segunda fase* del estudio se llevó a cabo una entrevista abierta con el profesor. En su relato se observa la importancia de la biografía escolar en los tres niveles educativos (primario, secundario, superior) y cómo el contacto con la disciplina se produce a través de sus docentes. Reconoce que fue crucial una profesora en Matemática que tuvo en la secundaria, así como sus maestras de primaria de las cuales aprendió geometría, área a la que se dedica actualmente como investigador.

> *Decidí estudiar Matemática por una docente de Matemática de la secundaria, siempre me gustó, siempre, es más tuve muy buenas maestras incluso en la escuela primaria maestras que se jubilaron poco tiempo después que yo terminé la primaria, que toda la vida habían dado Matemática realmente eran muy buena [..] tengo recuerdos de haber hecho el ingreso acá y toda la geometría que vimos en el ingreso incluso en el ingreso de la escuela secundaria, en la escuela primaria lo recontra trabajábamos. Problemas de área, de volumen todo lo que tiene que ver con medidas [...] la Matemática más práctica se veía bien en la primaria sobre todo geometría* (D1).

La motivación de una docente de secundaria, así como algunos hechos fortuitos encontrados al comenzar el nivel universitario, fueron fundamentales para su vocación.

> *En secundaria tuve de primero a quinto salvo un año una profesora que para mi era excelente [...] Matemática era la única materia científica que me gustaba porque siempre me gustó muchísimo más las humanísticas […] la profe de Matemática era buenísima, me motivó siempre, para participar en olimpíadas, no sé siempre me sentí muy motivado por ella* (D1).

Destaca, además, algunas características especiales que recuerda de su docente como el respeto y la autoridad que imponía, sin llegar a ser autoritaria, y la atención a las diferencias observadas entre los/as alumnos/as del curso que evidencia un alto grado de conocimiento de los/as mismos/as.

> *Todos la querían, era una profesora muy respetada, que sabía manejar muy bien el grupo, tenía mucha autoridad sin ser autoritaria que me parece una cuestión fundamental transmitir [...] Tenía una ventaja, tenía claro qué iba a hacer cada uno, a quién le iba a servir y a quién no cada cosa y tenía ciertas contemplaciones, hacía diferencia entre los alumnos, sino en las exigencias a los ritmos de cada uno* (D1).

Alude a ciertas decisiones metodológicas y didácticas que evidencian rasgos de un/a docente de experiencia y que son importantes en el aprendizaje del oficio docente para un/a futuro/a profesor/a.

> *Ella daba la clase para todo el mundo. Recuerdo la prueba de función cuadrática cuarto año, libro de AZ que también me encantaban, y nadie había entendido función cuadrática entonces fue un desastre el resultado, hizo un me a culpa [...] hizo una revaloración del criterio de corrección, no para aprobarlos a todos, pero sí por ejemplo si eran cinco ejercicios dijo corrijo sobre los cuatro mejores* (D1).

Menciona cómo las experiencias en aula transitadas se transforman en recursos pedagógicos.

> *Como una anécdota puntual el primer día de clase de primer año, nosotros dábamos el libro de Santillana de 1 […] en el libro ese al final había una parte que se llamaba Olimpíadas en Matemática, no eran problemas de olimpíadas sino problemas para pensar algunas cosas, la primera unidad era de geometría y la primera clase de Matemática la profesora viene y nos tira ese problema, "tres ciudades que querían instalar una antena y había que encontrar un lugar donde instalarla para que esté a la misma distancia de cada una" [...] cuando yo empecé a dar geometría tuve que dar puntos notables del triángulo, para introducir el tema me acordé de eso y les di el mismo problema para que piensen. Me quedó como muy grabado ese momento* (D1).

El docente entrevistado también refiere a detalles de su trayectoria universitaria y señala:

> *A mí en la facultad me gustó todo no recuerdo una materia que no me haya gustado [...] la disfruté mucho y la verdad que tuve muy buenos docentes* (D1).

Así como su decisión definitiva en la elección de la carrera se debió, en parte, a cuestiones ajenas a la disciplina y relacionadas con el funcionamiento de las distintas facultades, la dedicación de los/as docentes que encontró durante su carrera también evidenció diferencias con aquellos/as de otras carreras donde la relación docente-estudiante es más despersonalizada debido al exceso de matrícula.

> *Me llamó muchísimo la atención con el contraste con otros compañeros en otras facultades [...] está bien que acá siempre fuimos pocos pero la dedicación de los docentes del departamento [de Matemática] a la docencia, que creo que uno la va aprendiendo y por eso cuando uno es docente tiene la misma vocación [...] Con grupos de 150 alumnos por más que prepares la clase todo lo que quieras nunca pero no los vas a poder llegar a conocer nunca [...] el anonimato de los alumnos es terrible* (D1).

Se advierte un especial detenimiento en lo relativo al conocimiento de la Matemática no solo para sí mismo sino para compartir con otros/as (compañeros/as en un principio, alumnos/as luego), activándose una amalgama entre su conocimiento del contenido y de los/as estudiantes (Ball et al, 2008). En particular, este tipo de conocimiento le permite al/a la docente anticipar qué pueden probablemente pensar o encontrar confuso sus alumnos/as sobre determinada explicación.

> *Yo quería ser docente ya desde la escuela secundaria, siempre me gustó la docencia, me encargaba de explicarle a todos mis compañeros todas las materias [...] Uno aprende mucho más transmitiendo que estudiando solo, si sabe escuchar al otro [...] Siempre me resultó muy fácil creo entender cuáles eran los puntos de dificultad que yo tenía y cuáles eran los puntos de dificultad que podían llegar a tener cualquiera que estuviese estudiando algo, siempre que estudiaba hacía resúmenes marcando "hay que prestar atención acá" y "acá", todo el mundo estudiaba de esos resúmenes* (D1).

Justamente el conocimiento del contenido se entrelaza con el conocimiento acerca de cómo los/as alumnos/as piensan, saben, o aprenden tal contenido particular. En este dominio del *MKT* se incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del/de la alumno/a y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático.

> *Creo que siempre fui consciente que estudiaba para poder transmitir lo que estaba estudiando, y la docencia es eso: transmitir a alguien y tratar de entender dónde puede estar el otro no entendiendo, que no siempre funciona porque cada uno entiende según sus mecanismos* (D1).

Siempre tuvo como premisa ubicarse en el lugar de otros/as, entendiendo que el desafío para los/as docentes especialistas en la disciplina es no perder la perspectiva con respecto a los conocimientos previos "reales" de sus alumnos/as. Además, el/la profesor/a reflexiona sobre el rol del/de la docente comprometido/a, no solo con la matemática sino también con la protección de un derecho como es el de la Educación Superior (CRES, 2018).

> *También respetar al otro y las realidades del otro, y entender que no tiene por qué saber cosas que nunca nadie le enseñó, eso también es complejo [...] La Universidad Pública forma parte de un sistema educativo nacional y no es responsabilidad del estudiante no haber aprendido en la secundaria, si no se lo dieron, porque sino el ingreso "no es irrestricto", "no es igualitario", eso es uno de los grandes desafíos que nos quedan* (D1).

Cuando se le muestran al entrevistado las argumentaciones de los/as estudiantes que lo habían destacado como un formador significativo para ellos/as, el docente se reconoce en las cualidades diciendo que es lo que intenta transmitir, que pone mucho empeño en eso, acorde con que la enseñanza de la Matemática no es una acción espontánea (de Guzmán, 2007). Con una actitud crítica de su accionar se atreve a poner en tensión algunas cuestiones elogiadas por los/as estudiantes.

> *¡Le gustan los apuntes! Lo que no sé si es positivo o no (risas) [...] Pongo mucho en escribir los apuntes de manera que llega un momento que me parece que hasta la clase resulta innecesaria, porque puse todo en el apunte, sé que a los chicos les gusta, pero tampoco sé si es tan positivo porque adormece un poco la capacidad que tienen de tener que investigar un poco solos, trato siempre de darles algo extra [...] por ahí en primer año es más difícil* (D1).

Destaca la importancia de mirar a los/as estudiantes, de tratar siempre de comprender en qué proceso está cada uno/a y dar clase para todos/as, diferenciando las propuestas. Argumenta que el alumno/a "brillante" no necesita al docente tradicional, pero siempre puede aprender algo nuevo y eso hay que proponérselo.

> *Trato de transmitir claramente ciertos conceptos básicos, detenerme a explicar todo y de prestar atención un poco a las caras, eso te dice mucho, a mirar qué les está pasando, qué no están entendiendo* (D1).

Reconoce que hace hincapié en errores comunes y frecuentes, tratando de hacer preguntas que los provoquen y posibiliten profundizar en ellos desde la acción. Cuando se equivocan les dice que ese era el objetivo de la pregunta, que resulta saludable equivocarse mientras se está aprendiendo, para que nadie se sienta frustrado/a. Destaca la importancia de compartir con los/as estudiantes la planificación, los objetivos y los tiempos sugeridos para la misma, con el fin de hacerlos/as protagonistas de sus aprendizajes. También sugiere herramientas de metacognición, como pueden ser las autoevaluaciones periódicas, para que afiancen los contenidos esenciales.

> *Hay algo fundamental en la planificación que no sé si queda del todo claro, que es: ¿cuáles son los objetivos de lo que vos estás enseñando?, que uno lo tiene que tener claro pero los alumnos también [...] Habría que tener un dispositivo de autoevaluación constante que al final de cada unidad te diga qué tendrías que haber aprendido [...], cuando vienen a rendir les remarco, puede ser que no te salga un ejercicio puede ser que no te salga una demostración pero bajo ningún aspecto una definición, las definiciones están y hay que estudiarlas, si no te gusta esta definición dame una alternativa y justificala* (D1).

Aclara que, por lo general, para los/as alumnos/as de primer año todos los/as profesores/as son reconocidos/as por su conocimiento. En particular, él suele explicar todo nuevamente, aunque no se lo pidan, porque hay conceptos que tienen una teoría fundamental que los están avalando y eso hace que muchas veces se dificulte su entendimiento, acorde con un dominio en el horizonte matemático por parte del/de la profesor/a (Ball et al, 2008).

> *El concepto de función de longitud, por ejemplo, todo el mundo sabe medir y todos entienden cómo se mide pero toda la teoría que hay, la teoría de números reales que está soportando ese concepto, me gusta explicarlo lo retomo la clase siguiente y obviamente si preguntan lo vuelvo a explicar* (D1).

Cuando se le pregunta si cree que el gusto por la disciplina se desarrolla antes de la afinidad por el/la profesor/a, similar a los cuestionamientos de Jackson (1999), responde recordando que en la escuela secundaria todo lo que más le gustaba tenía que ver con el/la docente que dictaba la materia.

> *En la edad escolar el contacto que vos tenés con la disciplina es la escuela y en la escuela el docente que te toca [...] en el momento que te están enseñando algo y te están despertando el interés y la curiosidad por primera vez por algo, el que te lo transmite es fundamental* (D1).

El entrevistado hace referencia que muchas veces el/la docente con su trato descalificador deja marcas de por vida, que van más allá del gusto por la disciplina.

> *Si fuiste a estudiar algo, te trataron mal y te hicieron sentir que vos no servías para eso, probablemente ya lo entendiste, salvo que vos puedas sacar al docente de la posición de autoridad que tiene de por sí [...] Si el que sabe te dice que vos no servis, vos lo aceptas sobre todo cuando sos chico [...] el docente es*

> *fundamental para la transmisión, sobre todo en la secundaria, en la universidad podés tener otras herramientas para estudiar solo o con tus amigos* (D1).

Con relación al nivel universitario recuerda la importancia y dedicación de sus formadores/as en el ciclo básico de la carrera. Si bien no tuvo formación pedagógica, ha aprendido de observar a sus docentes y a sus alumnos/as. Sigue formándose continuamente siendo crítico de su accionar, poniendo en valor la carrera docente. Destaca a la docencia como una actividad social placentera que lo completa en lo personal.

> *Tengo recuerdos, Cálculo I, con S (la docente), el primer día de clases nos pregunta ¿todos saben lo que es un número real? Sí respondimos todos. Ah bueno, dijo ¿qué es un número real?... Eso de cuestionarte cosas que sabías, y las volví a usar esas estrategias. Pregunto ¿qué es una recta?, y no te lo saben definir [...] No sé pero tengo un montón de cosas que no sé por qué que me quedaron grabadas, actividades puntuales de docentes que me gustaron y uno las repite* (D1).

Reconoce que preparó la materia especialmente para el Profesorado, lo que le implicó romper muchos prejuicios -como la utilización del material concreto en el aula universitaria-, y que siempre les destaca a sus alumnos/as, teniendo presente su futura profesión, qué contenidos son importantes trabajar en el nivel secundario.

Conclusiones

En la primera fase de la investigación los/as estudiantes del PM reconocieron a nueve docentes que fueron significativos/as en su formación, siete pertenecientes a materias disciplinares, uno a Práctica Docente en Matemática y uno correspondiente a la Formación General. Para analizar las razones por las cuales los/as alumnos/as participantes mencionaron a dichos docentes se utilizaron las cinco dimensiones elaboradas por Bain (2007). Entre los motivos sobresalen ¨incentiva a investigar¨ (*dimensión 1: ¿Qué motiva a sus alumnos/as?)*, ¨organizado/a, prolijo/a¨ (*¿Cómo prepara las clases?)*, ¨explica bien, claro/a¨ (*¿Cómo gestiona sus clases?)*, ¨cercano/a al/a la alumno/a¨ (*¿Cómo trata a sus alumnos/as?)*, ¨exigente, evalúa siendo coherente con lo que enseña¨ (*¿Cómo evalúa?).*

Como estudiantes avanzados/as, los/as participantes ponderaron especialmente aspectos correspondientes a las dimensiones *¿Cómo gestiona sus clases?* y *¿Cómo prepara las clases?* Sin dudas estos/as alumnos/as de cuarto año del PM destacaron la importancia de lo que transcurre en el "momento de la clase", pero sin perder de vista todo el trabajo previo y posterior que le demanda al/a la docente ese "momento mágico", que es la clase, como una posibilidad de encuentro que transforma en un sentido de enseñanza poderosa (Maggio, 2012). Estos/as alumnos/as se encuentran ya en condiciones de interpelar las prácticas de sus formadores/as a través de los fundamentos de la Educación Matemática que están conociendo.

Además, se aprecia que, entre las cualidades citadas, los/as futuros/as profesores/as valoran aspectos correspondientes a la relación de confianza y cercanía generada en el ámbito de la clase que habilita a la pregunta facilitadora de la enseñanza, en tanto forma básica de enseñar que amerita revisitarse (Sanjurjo, 2003).

Ponerse en el lugar de otros/as, anticiparse a sus dificultades matemáticas, idear materiales de estudio sustanciados epistemológicamente, exigir y exigirse en correlación, ser coherentes entre el enfoque de enseñanza y el de evaluación, confiar en las capacidades de los/as estudiantes… son algunos de los indicadores fuertemente señalados que dan cuenta, en primera instancia, de la formación sólida de quien, a su vez, se desempeña como formador/a de formadores/as.

Se enfatiza en la segunda fase la importancia del accionar de los/as docentes, independientemente del nivel educativo, que sigue influyendo en la vida de sus alumnos/as transcurrido el tiempo. Más aún, siendo profesionales, se vuelve a los recuerdos y se lo transforma muchas veces en recurso para las decisiones en el aula.

Se destaca que el conocerse como docente, teniendo una mirada crítica sobre la tarea cotidiana, posibilita el trabajo sobre los aspectos a mejorar en el propio accionar como profesor/a en Matemática.

La docencia, como toda profesión, se aprende y que los/as alumnos/as lo vivencien a través de sus formadores/as en las aulas del PM es una enseñanza de alto impacto. Todo/a profesor/a, antes de serlo, ha transitado experiencias de aprendizaje y formación desde el nivel primario de escolaridad hasta el universitario que conforman una biografía con gran peso en su desempeño profesional (Alliaud, 2003). Además, como señalaran Ball et al (2008), la mayoría de la gente estaría de acuerdo en que un entendimiento del contenido disciplinar específico es importante para la enseñanza de la Matemática. Sin embargo, lo que constituye el entendimiento del contenido para hacerlo accesible a otros/as, tarea específica del/de la profesor/a en Matemática, resulta un asunto de indagación en la agenda actual (Ball, 2017). Un encuentro auspicioso puede darse entre investigadores/as, docentes y estudiantes, como se ha propiciado en este estudio.

Referencias bibliográficas

Alliaud, A. (2003). *La biografía escolar en el desempeño profesional de los docentes noveles. Tesis de Doctorado en Ciencias de la Educación*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Alliaud, A. (2004). La experiencia escolar de maestros inexpertos. Biografías, trayectorias y práctica profesional. *Revista Iberoamericana de Educación*, *34*(1), 1-11.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Bain, K (2007). *Qué hacen los mejores profesores universitarios*. Valencia: Universitat de València.

Ball, D. (2017). Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. En G. Kaiser (Ed.). *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp.11-34). Hamburgo: Springer.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Caporossi, A. (2012). La narrativa como dispositivo para la construcción del conocimiento profesional de las prácticas docentes. En L. Sanjurjo (Coord). *Los dispositivos para la formación en las prácticas profesionales* (pp.107-149). Rosario: Homos Sapiens.

CRES (2018). *Declaración. III Conferencia Regional de Educación Superior para América Latina y el Caribe*. Córdoba: UNESCO.

Guzmán, M. de (2007). Enseñanza de las Ciencias y de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación,* (43), 19-58.

Jackson, P, (1999). Donde trato de revelar las marcas de una enseñanza. Reflexiones sobre la sensación de estar en deuda con un antiguo maestro. En *Enseñanzas implícitas* (pp.21-43). Buenos Aires: Amorrortu.

Maggio, M. (2012). *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad*. Buenos Aires: Paidós.

Sanjurjo, L. (2003). Volver a pensar la clase. Primera parte. En L Sanjurjo y X. Rodríguez. *Volver a pensar la clase. Las formas básicas de enseñar* (pp.13-140). Rosario: Homo Sapiens.

Sgreccia, N. y Cirelli, M. (2015). Cualidades de docentes memorables destacadas por aspirantes a profesor en Matemática. *Profesorado: Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *19*(2), 333-349.

Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M.B. (2016). ¿Qué cualidades de aquellos buenos docentes reconozco en mí? Un estudio con egresadas del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. *Revista de Educación*, *7*(9), 297-315.

Sgreccia, N., Cirelli, M. y Vital, M.B. (2019). Cualidades de profesores en matemática recordados como buenos por futuros profesores en matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, *10*(27), 172-193.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

SIGNIFICADOS ATRIBUIDOS A LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS POR FUTUROS PROFESORES: EL CONTEXTO DE BRASIL, CHILE Y ECUADOR

MEANINGS ATTRIBUTED TO MATHEMATICS TEACHING BY PROSPECTIVE TEACHERS: THE CONTEXT OF BRAZIL, CHILE AND ECUADOR

Adriana Breda, Maria José Seckel, José Fernandes da Silva
Universitat de Barcelona (España), Universidad Católica del Maule (Chile), Instituto Federal de Minas Gerais (Brasil)
adriana.breda@gmail.com, mjseckel@gmail.com, jose.fernandes@ifmg.edu.br

Resumen
Este artículo tiene como objetivo presentar lo que cuarenta y nueve futuros profesores de matemáticas, pertenecientes a universidades de tres países distintos (Brasil, Chile y Ecuador) entienden por Didáctica de las Matemáticas y a qué demandas debe responder dicha disciplina. El análisis cualitativo indica que, de los 34 futuros profesores que contestaron al cuestionario, veintiocho de ellos consideran que la didáctica de las matemáticas es una disciplina técnica que consiste en aportar estrategias, recursos y procedimientos para la enseñanza de las matemáticas; tres la consideran como arte de enseñar, y apenas tres la consideran como una disciplina científica que se preocupa en estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que responde a la demanda de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: didáctica de las matemáticas; formación de profesores; universidades de latinoamérica

Abstract
This article aims to present what forty-nine prospective mathematics teachers, belonging to universities from three different countries (Brazil, Chile and Ecuador) understand by Mathematics Didactics and to what demands that discipline must respond. The qualitative analysis indicates that twenty-eight of the thirty-four prospective teachers, who answered the questionnaire, consider that mathematics teaching is a technical discipline that consists in providing strategies, resources and procedures for mathematics teaching; three consider it as an art to teach; and only three consider it as a scientific discipline that is concerned with the study of the mathematics teaching and learning processes and that responds to the demand to improve the teaching and learning processes.

Key words: mathematics didactics; teacher training, latin-american universities

Introducción

En los programas de formación de profesores de matemáticas, entre otros aspectos, se hace necesario promover con los futuros profesores una discusión acerca de lo que es la Didáctica de las Matemáticas (DM), a qué se dedica esta área del conocimiento y a qué cuestiones debe/debería responder. La relevancia de este tipo de discusión es que fomenta en el futuro profesor el reconocimiento de la didáctica de las matemáticas como un área disciplinar, generando en él una visión más amplia acerca del tema.

Algunos trabajos han abordado esta temática centrándose en la comprensión de las concepciones sobre DM en formadores de futuros profesores y el desarrollo de competencias o habilidades didáctico-matemáticas en futuros profesores (Oliveira y Fiorentini, 2018; Nortes y Nortes, 2011). Otros han centrado su interés en el significado otorgado a la DM desde las experiencias de enseñanza experimentadas por docentes del aula escolar (Zumaeta, Fuster y Ocaña, 2018). También hay investigadores que se han preocupado por estudiar como la DM se constituye como un campo de investigación. Algunas de las conclusiones a las que han llegado estos trabajos es que la Didáctica de Las Matemáticas se constituye en medio de estrategias de poder, opera de diferentes modos y no está subordinada a otras disciplinas (Fernandes, 2014).

Estos estudios han destacado la importancia de los resultados generados por la DM para reorientar los procesos formativos del profesorado. Esto con el objetivo de desarrollar habilidades que permitan problematizar el aula matemática y dar respuesta a los problemas para que, de esta manera, se consiga entender y valorar los propósitos de la Didáctica de las Matemáticas.

Dada la importancia de este tema, el trabajo que se presenta pretende analizar lo que cuarenta y nueve futuros profesores de matemáticas, pertenecientes a universidades de tres países distintos (Brasil, Chile y Ecuador) entienden por Didáctica de las Matemáticas y, según ellos, a cuáles demandas dicha disciplina debe responder.

Marco teórico

Desde su comienzo (Steiner,1985; Brousseau, 1989), la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas fue modelada por el campo de la investigación educativa, lo cual cambio el enfoque inicial de especulaciones filosóficas – la enseñanza de las matemáticas es un arte de enseñar – por un enfoque de tipo científico, caracterizándose por una indagación metódica sobre los procesos utilizados por los profesores para ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades y conocimientos matemáticos (Kilpatrick, 1998). En particular, la evolución de la DM, como resultado de su relación directa con los cambios en la investigación acerca del conocimiento matemático, la ha llevado a intentar caracterizarse como una disciplina científica (Gascón, 1998; Gascón y Nicolás, 2017).

Los autores que afirman que la Didáctica de la Matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte (Steiner, 1985, p.11).

Los que, pensando que es posible la existencia de la Didáctica como ciencia, reducen la complejidad de sus problemas seleccionando sólo un aspecto parcial de los mismos (por ejemplo, el análisis del contenido a enseñar, la construcción del currículo, mejora de los métodos de enseñanza, desarrollo de destrezas en el alumno, interacción en el aula, ...) al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la Didáctica. (Steiner, 1985, p.11).

El carácter científico, de acuerdo a lo que plantea Brousseau (1989), se clasifica en: a) la concepción pluridisciplinar aplicada – sirve para instruir las enseñanzas necesarias para la formación profesional de los profesores y como campo de investigación llevado a cabo sobre la enseñanza tomando en cuenta las disciplinas científicas como la psicología, pedagogía, sociología, semiótica, etc. -; b) la concepción autónoma – fundamental de la propia disciplina, la cual considera que los saberes importados de disciplinas como la psicología, sociología, etc. no permiten por sí mismos, sin modificaciones e independientemente los unos de los otros, explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: por el contrario, es necesario crear programas de investigación propios del área de la DM que tengan en cuentan la especificidad del conocimiento matemático.

Las concepciones presentadas conllevan a entender la DM como disciplina científica o técnica, dotada de aspectos metodológicos, que sirven para explicar y/o describir como se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sin hacer alusión a aspectos prescriptivos y/o valorativos.

Por otro lado, Schoenfeld (2000) a principio del siglo XXI, al proponer su cuestionamiento con relación a la naturaleza de la investigación en la didáctica de las matemáticas, argumenta que esta tiene básicamente dos propósitos principales, uno puro y otro aplicado. Para este autor, el puro se relaciona, sobre todo, con comprender la naturaleza del pensamiento matemático, su enseñanza y aprendizaje; mientras que el propósito aplicado se relaciona, sobre todo, con usar esa comprensión para mejorar la instrucción matemática.

Godino (2006; 2010) corrobora la idea de Schoenfeld (2000) y defiende que la DM es una disciplina científica que se constituye de tres grandes campos. El primero es *La tecnología didáctica*, que se propone desarrollar materiales y recursos usando los conocimientos científicos disponibles. Esa misma idea fue discutida por Brousseau (1989), lo cual apunta que la DM es un conjunto de técnicas de enseñanza que incluye el estudio, producción y mantenimiento de los objetivos de la enseñanza, de los criterios de evaluación, del diseño curricular, de los materiales adoptados para utilización, entre otros. Otro campo es *la investigación científica*, que trata de comprender el funcionamiento de la enseñanza de las matemáticas en su conjunto. El último campo es *la acción práctica y reflexiva sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Para este autor, estos tres campos tienen como enfoque el funcionamiento de los sistemas didácticos y tienen una finalidad última: la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Con esa misma finalidad, Lesh y Sriramn (2010), consideran la DM como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la revista *For the Learning of Mathematics* recientemente se han publicado varios artículos (Bartolini, 2018; Davis, 2018; Gascón y Nicolás, 2017; Godino, Batanero y Font, 2019; Oktaç, Trigueros y Romo, 2019) que reflexionan sobre la siguiente pregunta: ¿Hasta qué punto, en qué forma y en qué condiciones, la didáctica puede (o incluso debe) proponer juicios valorativos y normativos que proporcionen criterios sobre cómo organizar y gestionar los procesos de estudio? (Gascón y Nicolás, 2017, p. 26).

Godino, Batanero y Font (2019), al contestar el cuestionamiento propuesto por Gascón y Nicolás (2017), consideran que la DM tiene un carácter científico y tecnológico manifestando así, una concepción amplia de la DM como disciplina científica, pues esta considera que debe abordar cuestiones teóricas del propio conocimiento matemático (sus características ontológicas, epistemológicas, semióticas), cuestiones descriptivas, explicativas y predictivas (relaciones de las cuestiones teóricas del conocimiento matemático con los procesos de enseñanza y aprendizaje), propias del conocimiento científico. Según estos autores, la Didáctica como área de conocimiento científico sería "el campo de investigación llevada a cabo sobre la enseñanza, en el cuadro de disciplinas científicas clásicas", como son: la psicología, la semiótica, sociología, lingüística, epistemología, lógica, neurofisiología, pedagogía, pediatría, psicoanálisis, etc. Sin embargo, los mismos autores también consideran cuestiones prescriptivas y valorativas, propias del conocimiento tecnológico, es decir, se trata de intervenir en los procesos de enseñanza y aprendizaje para hacerlos lo más efectivo posibles. Con relación a ese aspecto, se entiende que la descripción, explicación y predicción son los fines de la actividad científica; mientras que la prescripción y valoración son los principales objetivos correspondientes a la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos (Godino, Batanero y Font, 2019).

Las ideas presentadas en este apartado son útiles como herramientas para clasificar las distintas maneras de entender a la DM. La primera es comprender la DM como un arte de enseñar, la cual no contempla ningún aspecto científico de la disciplina; la segunda es entender la DM como disciplina científica que se basa en métodos y teorías que nos ayudan a describir y explicar cómo se genera el conocimiento matemático y cómo se desarrollan los procesos de enseñanza y aprendizaje del mismo, y la tercera es comprender la DM como una ciencia orientada a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es decir, considerar su aspecto tecnológico que tiene en cuenta características prescriptivas y valorativas.

Metodología

Con el objetivo de analizar lo que cuarenta y nueve futuros profesores de matemáticas, pertenecientes a universidades de tres países distintos (Brasil, Chile y Ecuador), entienden por Didáctica de las Matemáticas y sus propósitos, se ha realizado un estudio de paradigma interpretativo utilizado una metodología de investigación de naturaleza cualitativa, que, de acuerdo con Ludke y André (1986), se basa en la comprensión e interpretación de los datos. A su vez, el estudio sigue un diseño de estudio de caso múltiple (Stake, 2005) que busca comprender la perspectiva de futuros profesores (de distintas nacionalidades de Latinoamérica) sobre la temática de interés. En lo que sigue, explicamos el contexto de la investigación, el instrumento de recolección de los datos y el proceso de análisis de los mismos.

Contexto de la investigación

El estudio fue realizado con cuarenta y nueve estudiantes (futuros profesores) que cursan la carrera de Pedagogía General Básica con Mención, en Chile y Ecuador, y Licenciatura en Matemática en Brasil, de los cuales, 34 han contestado al interrogante clave de esta investigación. Los estudiantes de la carrera de Pedagogía General Básica con Mención pertenecen a una universidad subvencionada chilena y a una universidad pública ecuatoriana. Por su parte, los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Matemática pertenecen a una universidad pública brasileña. Además, es importante destacar que los programas formativos de los tres casos estudiados consideran una formación didáctico-disciplinar.

Los veinticuatro futuros profesores de la universidad pública ecuatoriana, ubicada en la región de Azogues en el sur de Ecuador, estaban cursando el quinto semestre (aproximadamente en la mitad del curso) de la carrera Pedagogía General Básica – que presenta un total de nueve semestres y medio -. En esta carrera, la elección a la mención en una disciplina específica (matemáticas o lengua) se encuentra disponible a partir del séptimo semestre del curso. En ese sentido, los participantes estaban cursando, por la primera vez, una asignatura introductoria de didáctica de las matemáticas denominada *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas I* que tenía como objetivo que los estudiantes logren conocer, analizar y diseñar estrategias y recursos en el área de las matemáticas. Es importante subrayar que, hasta el quinto semestre, los estudiantes no habían cursado ninguna asignatura específica de matemáticas, ni de didáctica de las matemáticas, pero si asignaturas de pedagogía y prácticas pre-profesionales desde el primer semestre del curso.

Los diecisiete futuros profesores de la universidad pública brasileña, ubicada en la región de Minas Gerais en el sudeste de Brasil, ya habían cursado cerca del 50% de la carrera de Licenciatura en Matemáticas – que presenta un total de ocho semestres -. Los estudiantes ya habían cursado las disciplinas de Prácticas Pedagógicas en la Enseñanza de las Matemáticas, Didáctica General, Enseñanza de Medidas y Geometría, Enseñanza de Estadística y Matemática Financiera, Recursos Computacionales, Laboratorio de Enseñanza de las Matemáticas I y Práctica Supervisada I, además de las asignaturas específicas de las matemáticas (geometría, álgebra y cálculo). De los diecisiete participantes de esta investigación, quince estaban participando de un proyecto de iniciación a la docencia promovido por el *Programa de Bolsas de Iniciação à Docencia* (PIBID).

El grupo de ocho futuros profesores de la universidad subvencionada (de derecho público y privado) chilena, ubicada en la región del Maule en el centro-sur de Chile, estaban cursando el séptimo semestre del plan de estudio de la carrera de Pedagogía General Básica con Mención en Matemáticas – que presenta un total de diez semestres -. Hasta el séptimo semestre, los participantes del estudio ya habían cursado cinco asignaturas de matemática, cada una con enfoque didáctico. Cabe destacar que el plan de formación de estos participantes contempla prácticas en centros escolares a partir del cuarto semestre con un carácter de dificultad progresivo.

Recolección de los datos

Los datos fueron recolectados a través de un cuestionario con dos preguntas abiertas dirigidas a los futuros profesores participantes. Dicho instrumento buscó información sobre dos tópicos: 1) qué es la Didáctica de las Matemáticas y 2) a qué responde la Didáctica de la Matemática.

Análisis de los datos

Para analizar el discurso de los futuros profesores se tomaron en cuenta categorías de tipo deductivas, para las unidades de análisis presentes en el primer tópico (presentadas en el apartado de Didáctica de las Matemáticas: arte de enseñar, disciplina científica y/o disciplina tecnológica), e inductivas, para las que emergen en el segundo tópico de interés.

Resultados

De los cuarenta y nueve profesores entrevistados, 34 han contestado la pregunta acerca de qué significado le atribuyen a la DM. De los 34 hemos observado que veintiocho de ellos entienden la DM como una disciplina tecnológica, es decir, como un conjunto de técnicas, procedimientos y recursos que sirven para mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal como se evidencia en las siguientes unidades de análisis:

La didáctica de la matemática son estrategias utilizadas para explicar y enseñar la matemática de una forma diferente a la usual. (Alumno 5, Chile)

La didáctica de las matemáticas, son los métodos en los cuales los profesores desarrollan las actitudes, habilidades y conocimientos de los estudiantes para la enseñanza y aprendizaje de ellos (Alumno 4, Chile).

Seria um conjunto de ações, aplicados pelos professores em sala de aula, instruindo os alunos quanto aos conceitos matemáticos. [Es um conjunto de acciones, aplicados por los profesores en el aula, que sirve para instruir a los alumnos cuanto a los conocimientos matemáticos (Alumno 17, Brasil)

Acredito que Didática da Matemática, seja a forma como podemos instruir o outro ao conhecimento matemático já existente. [Creo que la DM es la forma de cómo podemos hacer la instrucción del conocimiento matemático existente para una otra persona] (Alumno 16, Brasil).

Yo entiendo que didáctica de las matemáticas hace referencia a cómo y con que se puede mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y los estudiantes pueden entender con mayor facilidad los contenidos. También entiendo que se trata de estrategias que se puede aplicar dentro del aula que respondan a la necesidad de los estudiantes (Alumno 1, Ecuador).

La forma o la manera de enseñar y transmitir las matemáticas. Las matemáticas deben ser explicadas de una manera clara y sencilla (Alumno 3, Ecuador).

Tres la entienden como un arte de enseñar, no considerando el aspecto científico o bien tecnológico de la disciplina:

A maneira individual que cada professor possui em ensinar certo conteúdo. [La manera individual en la cual cada profesor posee al enseñar determinado contenido] (Alumno 5, Brasil).

La didáctica se relaciona a la forma en la cual se puede impartir, enseñar matemática, es decir, como nosotros los estudiantes enseñamos temas relacionados con la matemática. Didáctica es un arte y en las matemáticas es un arte de llegar a los alumnos de una forma comprensible. (Alumno 5, Ecuador).

Por su parte, tres futuros profesores la entienden como una disciplina científica que se preocupa, además de las técnicas, procedimientos y recursos, de estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

A Didática Matemática é um conjunto de ensino-aprendizagem com a pedagogia e psicologia. Entende-se pela teoria e prática onde leva o aluno a pensar, criar e construir. [La DM es un conjunto de enseñanza y aprendizaje en conjunto con la pedagogía y la psicología. Es entendida como la relación entre teoría y práctica en la cual conlleva al estudiante a pensar, crear y construir] (Alumno 1, Brasil).
La didáctica de las matemáticas se refiere al estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ciencias matemáticas. (Alumno 6, Ecuador)
Es una disciplina que trata de explicar situaciones como la resolución de problemas en matemáticas. (Alumno 5, Chile).

Los resultados obtenidos en este primer tópico, permiten observar que las respuestas son muy similares en los tres países que han participado de la investigación. Es decir, de los diecisiete participantes de la universidad brasileña, catorce asumen que la DM es una disciplina de carácter técnico, dos la consideran un arte de enseñar y uno la considera una disciplina científica. Por otro lado, de los veinticuatro participantes de la universidad de Ecuador solo nueve han contestado a esta pregunta, en la cual, siete consideran la DM como disciplina técnica, uno la considera un arte de enseñar y uno la considera una disciplina científica. Por último, de los ocho estudiantes de la universidad chilena, siete consideran la DM una disciplina técnica y uno la considera una disciplina científica. En suma, la mayor parte de los futuros profesores asumen en su discurso el carácter tecnológico de la DM, es decir, comprenden la DM como una ciencia orientada para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Por otra parte, el análisis a las respuestas obtenidas ante la pregunta ¿a qué responde la Didáctica de la Matemática? Se observa que los futuros profesores consideran que la DM, por ser considerada una disciplina de carácter tecnológico (respuestas inferidas en la pregunta número uno), busca la mejora en tres ámbitos: 1) la enseñanza, 2) el aprendizaje y 3) actitudes hacia las matemáticas. De esta manera, se observa que dieciséis futuros profesores tienden a pensar que la DM debe responder a mejorar los procesos de enseñanza, tal como evidencia en las unidades de análisis que se presentan a continuación:

Responde sobre as diversas maneiras de ensinar. Metodologias de ensino. [Contesta las diversas formas de enseñanza. Metodologías de enseñanza] (Alumno 1, Brasil).
As questões relacionadas à forma de ensinar-se matemática. [A cuestiones relacionadas a la forma de enseñar las matemáticas] (Alumno 12, Brasil).
A la mejora de la enseñanza de los contenidos y apropiación de los mismos por parte de los estudiantes (Alumno 23, Ecuador).
Facilitar el trabajo del docente de cuerdo a los contenidos de las asignaturas (Alumno 1, Ecuador).
A cuáles son las adecuadas metodologías que se deben emplear para enseñar de una manera eficiente, articulada y dinámica las matemáticas. (Alumno 2, Chile).
Responde a cuestiones de tipo pedagógica y educativa (Alumno 6, Chile).

Asimismo, se observa que once futuros profesores consideran que la DM responde a la mejora del proceso de aprendizaje, lo que se evidencia en las siguientes unidades de análisis:

Ela tem de responder e sanar dúvidas dos alunos. E fazer com que as aprendizagens dos mesmos sejam efetivas. [Ella debe contestar las dudas de los estudiantes. Y hacer con que los aprendizajes sean efectivos]. (Alumno 3, Brasil).
Responde questões relacionadas as dificuldades no processo de aprendizagem. [Contesta a las cuestiones relacionadas a las dificultades en el proceso de aprendizaje] (Alumno 13, Brasil).
Responde a las necesidades educativas que se presentan dentro del aula de clase con la finalidad de ayudar al estudiante a comprender los contenidos (Alumno 1, Ecuador).
A la necesidad que tienen los estudiantes de aprender las matemáticas (Alumno 3, Ecuador).
Las concepciones erróneas de los estudiantes en la asignatura de matemáticas. (Alumno 5, Chile).

Finalmente, se observa que ocho futuros profesores consideran que la DM responde a mejorar las actitudes hacia las matemáticas, lo que se evidencia a continuación:

Questões lúdicas. [Cuestiones lúdicas] (Alumno 2, Brasil).
A la necesidad de que la matemática sea aprendida e interiorizada por los estudiantes, como un medio de aprendizaje práctico, útil para el diario vivir, apartándose de la obligatoriedad y el mal gusto por las matemáticas (Alumno 2, Ecuador).
A los problemas que en aula surgen y a su vez se abre espacio pues los estudiantes no toman las matemáticas como una materia de su agrado siempre lo ven como algo difícil por lo tanto la didáctica puede colaborar a tener una mejor aceptación de la matemática en si mediante la elaboración de estrategias llamativas (Alumno 5, Ecuador).
Más que nada a crear una motivación en el estudiante, y que este visualice que la matemática si se encuentra en la vida cotidiana, que esta asignatura se articula con las demás y que no es aburrida si se enseña de formas menos tradicionales (Alumno 8, Chile).
A la utilización verídica de las matemáticas en la vida cotidiana, dándole una explicación lógica para la función de ellas (Alumno 4, Chile).

Dicho esto, se puede observar que en el segundo tópico las respuestas también son similares entre los países, pues las respuestas se concentran en las categorías de “enseñanza” y “aprendizaje”. Sin embargo, en la categoría de “actitudes hacia las matemáticas” tiende a relacionarse las unidades de análisis provenientes de futuros profesores de Chile y Ecuador. De esta manera, de los diecisiete participantes de Brasil solo trece han contestado a esa pregunta, ocho manifiestan que la DM responde a cuestiones del ámbito de la enseñanza, cuatro a cuestiones del ámbito del aprendizaje y uno al ámbito de las actitudes hacia las matemáticas.

De los veinticuatro estudiantes de la universidad ecuatoriana, nueve han contestado a la pregunta, y de estos nueve, uno considera que la DM responde a cuestiones sobre la enseñanza, tres consideran que la DM responde a cuestiones relacionadas a la mejora de los aprendizajes, un estudiante considera que la DM implica tanto a cuestiones de la enseñanza como del aprendizaje, dos a cuestiones sobre las actitudes hacia las matemáticas, uno sobre la enseñanza y las actitudes hacia las matemáticas y uno sobre la enseñanza, aprendizaje y actitudes hacia las matemáticas. Por su parte, de los ocho participantes de Chile, se observa que tres consideran que responde a cuestiones sobre la enseñanza, uno sobre el aprendizaje, tres sobre las actitudes hacia las matemáticas y uno sobre la enseñanza y aprendizaje.

Esos resultados nos llevan a inferir que, independientemente del país y de las características de los cursos de formación, los significados que los futuros profesores de matemáticas atribuyen a la DM son similares, es decir, en los tres países, la mayoría considera que la DM es una disciplina tecnológica que tiene como rol la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pocos futuros profesores consideran la DM como una disciplina científica, con herramientas teóricas y metodológicas que sirven para describir y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Consideraciones

Los significados sobre la DM presentes en el discurso de los futuros profesores de los tres países consultados son muy similares. Los resultados obtenidos llevan a reflexionar acerca de algunas de las falencias que tenemos en los programas de formación inicial de profesores, por ejemplo, la falta de claridad que presentan los futuros profesores sobre las herramientas necesaria para analizar y valorar las prácticas matemáticas escolares. Discutir la problemática de la DM, lo que esta pretende y a qué cuestiones debe responder puede ser un primer paso para trabajar en el desarrollo de los conocimientos y competencias que se consideren útiles para que el futuro profesor de matemática pueda ejercer la actividad profesional.

En esta línea, el presente estudio muestra la importancia de considerar, en la formación inicial de profesores carácter científico y tecnológico de la didáctica de la matemática (Godino, Batanero y Font, 2019; Nortes y Nortes, 2011; Oliveira y Fiorentini, 2018; Zumaeta, Fuster y Ocaña, 2018), para problematizar su quehacer profesional y dar respuestas fundamentadas para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Asimismo, es posible considerar una ampliación de los datos explorados a través de entrevistas dirigidas a los formadores de los futuros profesores participantes, lo que permitiría contrastar los resultados y analizar si existe relaciones entre ambos discursos.

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias bibiliográficas

Bartolini, M. G. (2018). Answer to Gascón & Nicolás. *For the Learning of Mathematics*, *38* (3), 50-53.

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. *Etudes en Didactique des Mathématiques. Article occasionnel n. 2.* IREM de Bordeau.

Davis, B. (2018). What sort of science is didactics? *For the Learning of Mathematics, 38* (3), 44-49.

Fernandes, F. S. (2014). A quinta história: composições da educação matemática como área de pesquisa. Tese de doutorado não publicada, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18(1)*, 7-33.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Can didactics say how to teach? The beginning of a dialogue between the anthropological theory of the didactic and other approaches. *For the Learning of Mathematics*, *37* (3), 26-30.

Godino, J. D. (2006). Presente y futuro de la investigación en didáctica de las matemáticas. In *XXIX Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd)* (pp. 1-18). Minas Gerais: Caxambu.

Godino, J. D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en: https://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/ perspectiva_ddm.pdf. Acceso en 25 de marzo de 2019.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Kilpatrick, J. (1998). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. In J. Kilpatrick, P. Gómez, L. Rico. *Educación Matemática: errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación, historia* (pp. 1-18). Bogotá: Universidad de los Andes.

Lesh, R., y Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman y L. English (eds), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers.* (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.

Ludke, M., & André, M. E. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Nortes, A. y Nortes, Rosa. (2011). La función de la didáctica de las matemáticas en la formación del profesorado. *EDETANIA, 40*, 51-66.

Oktaç, A., Trigueros, M. & Romo, A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. *For the Learning of Mathematics. 39* (1), 30-34.

Oliveira, A.T. y Fiorentini, D. (2018). O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. *Revista Brasileira de Educação,* 23, e230020. Epub 05 de abril de 2018. https://dx.doi.org/10.1590/s1413-24782018230020

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS*, *47*(6), 641-649.

Stake, R. E. (2005) *Investigación con estudio de casos*. España, Madrid: Morata.

Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, *5*(2), 11-17

Zumaeta, S., Fuster, D., & Ocaña Y. (2018). Pedagogical Affection in Didactics of Mathematics- Amazonas Region from the Phenomenology Perspective. *Propósitos y Representaciones*, *6*(1), 409-462.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

CONOCIMIENTOS DE LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA PUESTOS EN JUEGO EN TAREAS ASOCIADAS A LAS REPRESENTACIONES DE LA FUNCIÓN LINEAL

SECONDARY EDUCATION TEACHERS' KNOWLEDGE INVOLVED IN TASKS ASSOCIATED WITH REPRESENTATIONS OF THE LINEAR FUNCTION

Norma Rubio, Cintya Gonzales, Magaly Campos
Pontificia Universidad Católica del Perú (Perú)
nrubio@pucp.edu.pe, cintya.gonzales@pucp.pe, mecamposm@pucp.pe

Resumen
Diversas investigaciones muestran que la forma en la cual un profesor comprende el significado de un objeto matemático determina, en parte, el tipo de tareas que selecciona y las representaciones que utiliza al enseñar. En este estudio se presentan algunos resultados de los conocimientos sobre las representaciones de la función lineal que una muestra de profesores de educación secundaria moviliza al resolver una de las tareas propuestas en una prueba diagnóstico. Se trata de un estudio cualitativo, en el cual se aplica el primer nivel de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y cuyos resultados muestran que los profesores priorizan las representaciones algebraicas sobre otras.

Palabras clave: representaciones, función lineal, conocimientos didáctico-matemáticos, profesores

Abstract
Several researches show that the way in which a teacher understands the meaning of a mathematical object determines, in part, the type of tasks they select and the representations they use when teaching. This study presents some results of the knowledge about the representations of the linear function that a sample of secondary education teachers mobilize when solving one of the tasks proposed in a diagnostic test. It is a qualitative study, in which the first level of didactic analysis proposed by the Onto-semiotic Approach (OSA) is applied and whose results show that teachers prioritize algebraic representations over others.

Key words: representations, linear function, didactic-mathematical knowledge, teachers

Introducción

En este artículo se muestran los primeros resultados de un proyecto que continúa en ejecución, los cuales han sido muy importantes en su etapa inicial. Este proyecto tiene como foco el estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos de colectivos de profesores de secundaria pertenecientes a algunas regiones del Perú sobre las funciones afín y lineal para su enseñanza. Se considera en este estudio lo que la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) propone acerca de establecer "conexiones matemáticas" a través del uso de múltiples representaciones externas u ostensivas que servirán a los alumnos como "lentes" a través de los cuales interpreten los problemas y sus soluciones. Las funciones son ejemplos del dominio de las matemáticas en el que pueden ser usadas diferentes representaciones (gráficas, algebraicas, numéricas, etc.). De acuerdo con Matteson (2006), aprender matemáticas es como aprender una lengua extranjera y las representaciones ostensivas son los elementos clave para que los estudiantes tengan experticia para expresar y comprender los objetos matemáticos con precisión, correctamente y poder aplicarlos.
Además, es clara la importancia de los conocimientos didáctico-matemáticos que un profesor de matemática debe tener para alcanzar los desempeños de sus estudiantes, si se toma en cuenta lo que el Currículo Nacional del Ministerio de Educación del Perú establece sobre algunos de los desempeños de los estudiantes que cursan el primer y segundo año de educación secundaria en relación con la función lineal:

> Interrelaciona representaciones gráficas, tabulares y algebraicas para expresar el comportamiento de la función lineal y sus elementos: intercepto con los ejes, pendiente, dominio y rango, para interpretar y resolver un problema según su contexto. Establece la relación de correspondencia entre la razón de cambio de una función lineal y la constante de proporcionalidad para resolver un problema según su contexto. (Minedu, 2017, p.255)

Por otro lado, los estudios de Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990), Even (1998), Ellis (2007), De Bock,Van Dooren y Verschaffel (2012) sobre las dificultades que manifiestan tener tanto los profesores como los estudiantes en relación con las funciones lineales son diversas: dificultades relacionadas con sus representaciones, la tendencia a asumir las funciones lineales en las situaciones en las cuales no lo son o producir un patrón lineal al elaborar una gráfica por el origen, cuando se trata de una función afín; así como la importancia del estudio de las funciones en la formación de docentes para contribuir a la competencia matemático-epistemológica formulada por Font (2011). Dicha problemática motivó plantearse la siguiente pregunta: ¿Qué representaciones emplean los profesores cuando resuelven tareas matemáticas sobre la función lineal? La finalidad de este trabajo es identificar los conocimientos didáctico-matemáticos relacionados con las diversas representaciones de la función lineal que profesores de educación secundaria movilizan al resolver una de las tareas propuestas en una prueba diagnóstico. Se analizan las respuestas de 75 profesores de educación secundaria pertenecientes a diversas regiones del Perú.

En este trabajo, en primer lugar, se describen algunos aspectos del enfoque Ontosemiótico (EOS), considerado como marco teórico en el cual se sustenta la investigación. Luego, se describe el método, considerando el contexto en el cual se desarrolla la investigación y algunas características de los participantes, los instrumentos de recolección y herramientas para el análisis de los datos. Finalmente, se incluyen algunos resultados del trabajo y reflexiones finales.

Marco teórico

Para llevar a cabo esta investigación, se ha considerado al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y su modelo para categorizar el conocimiento didáctico-matemático (CDM), como lo muestra Godino (2009). Para la elaboración de la prueba diagnóstico, se toma en cuenta los aspectos más relevantes de la faceta epistémica del CDM de acuerdo a Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018), aplicados a las representaciones de la función lineal. Además, se toma en consideración las conversiones entre representaciones de estas funciones, de acuerdo a Font (2011): numérica (tabla), algebraica (regla de correspondencia), gráfica (rectas) y verbal. También, se toma en cuenta el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM) del profesor de matemáticas propuesto por Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) y para el análisis de las respuestas de los profesores a los ítems, se considera el primer nivel de análisis didáctico propuesto por el EOS.

Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) señalan que en el EOS se entiende al CDM como aquel conocimiento más profundo de la matemática y su enseñanza, el cual es diferente al que adquieren los estudiantes, y que le sirve para diseñar, gestionar, implementar y evaluar los procesos de instrucción matemática. El modelo CDM incluye las facetas epistémica, cognitiva, afectiva, instruccional, mediacional y ecológica.

La faceta epistémica, la cual se toma en cuenta en la elaboración de la prueba diagnóstica, referente a la función lineal y a la función afín, se refiere al conocimiento de la diversidad de significados institucionales (conjuntista, analítico, gráfico, tabular o numérico) de estas funciones; además, del reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Así, por ejemplo, el significado parcial tabular hace ostensible los aspectos numéricos y cuantitativos, mientras que el gráfico se conecta con procesos como la visualización, relacionándose con la geometría y en el cual intervienen objetos como plano coordenado, puntos, rectas, etc. Mientras que el significado parcial analítico está relacionado con los símbolos y se relaciona principalmente con el álgebra, como las reglas de correspondencia de las funciones. Además, la faceta epistémica se refiere al uso o aplicación de diversas representaciones, argumentos, estrategias de resolución. Las otras facetas no serán discutidas en este documento.

En relación con el análisis didáctico, en el EOS, se considera como "un estudio sistemático de los factores que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje de un contenido curricular o de aspectos parciales de los mismos". Godino (2009) considera en el EOS cuatro niveles a considerar en este análisis didáctico:

1. Prácticas matemáticas y didácticas en las que se toman en cuenta y se describen las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y de los estudiantes.
2. Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos). A través de las cuales se describen de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la ejecución de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
3. Normas y metanormas. En este nivel se describen el conjunto de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
4. Idoneidad. Es el nivel en el que se identifican de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

En este trabajo se aplican los dos primeros niveles de análisis didáctico. Por otro lado, cabe señalar que bajo el marco de esta investigación, se considera la siguiente postura matemática del objeto función lineal para la elaboración de las configuraciones epistémicas y cognitivas.
Una función $f: R \to R$ se llama *afín* cuando existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Un caso particular de las funciones afines son las *funciones lineales*, $f(x) = ax$. Por tanto, las que no son lineales serán denominadas funciones afines no lineales. Siendo la función lineal la que modeliza la relación de proporcionalidad directa.

Método

En este artículo se muestran los primeros resultados, los cuales han sido muy importantes en la etapa inicial de un proyecto que continúa en ejecución, el cual tiene como foco el estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos de colectivos de profesores de secundaria de algunas regiones del Perú sobre las funciones afín y lineal para su enseñanza. En el proyecto participan 75 profesores de secundaria, de los cuales 12 son de la especialidad de Físico-Matemática, 62 son de la especialidad de Matemática y 1 profesor es ingeniero. Además, 33 profesores cuentan con más de 10 años de experiencia docente pero menos de 20 años. Siguiendo la misma línea, cabe resaltar que hay un grupo considerable de 30 profesores que manifiestan contar con más de 20 años de experiencia docente. Asimismo, 40 de ellos dictan actualmente primer año de secundaria. Con respecto a su formación, 34 de ellos cuentan con alguna maestría ya sea en gestión o administración educativa, docencia universitaria o didáctica en enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, es preciso señalar que 12 profesores, no tienen ningún estudio adicional al de profesor de educación secundaria.

A continuación, se muestra en tabla 1 el resumen de la información anterior:

Tabla 3. *Resumen de la información de los profesores participantes*

Especialidad	Cantidad de profesores	Experiencia	Cantidad de profesores	Grado de instrucción	Cantidad de profesores
Físico-Matemática	12	0 – 3 años	3	Licenciatura	12
Matemática	62	3 – 5 años	3	Magíster	34
Ingeniero	1	5 – 10 años	6	Doctor	1
TOTAL	75	10 – 20 años	33	Otros	28
		Más de 20 años	30	TOTAL	75

En la primera etapa de este proyecto, los participantes fueron enfrentados a una prueba diagnóstica la cual consistía de siete ítems, cada uno de los cuales tenía como objetivo el que los profesores manifestaran sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre funciones lineales/afines y las distintas representaciones (algebraica, tabular o numérica, gráfica, verbal) que utilizan al resolver una tarea. Las otras tres etapas de este proyecto siguen en ejecución (fortalecimiento de los conocimientos de los profesores, acompañamiento en el diseño e implementación de clases e identificación de los criterios que de manera empírica consideran los profesores al diseñar, implementar y evaluar su proceso de instrucción).

En este trabajo se presenta un reporte del análisis de las respuestas a una de las tareas de la prueba diagnóstica, ítem 2, la cual fue aplicada a 75 profesores en ejercicio (34 de Comas, 10 de Puno y 31 de Huacho). La duración de la prueba fue de 1 hora y 45 minutos. Las respuestas dadas por escrito se recogieron apenas el profesor finalizaba la prueba. En relación con el análisis, este se sustentó en el primer nivel de análisis propuesto por el EOS de las prácticas, objetos y procesos matemáticos, el cual permitió identificar aspectos importantes del conocimiento didáctico-matemático de la faceta epistémica de esta muestra de profesores de educación secundaria sobre las diversas representaciones de la función lineal y de la función afín. La tarea analizada en este reporte, ítem 2, consta de dos preguntas. La primera de ellas muestra las representaciones tabulares parciales de tres funciones reales de variable real f, g y h y se les pide a los profesores que analicen el valor de verdad de cuatro proposiciones sobre funciones relacionadas con su crecimiento y si son lineales.

A continuación, se muestra, en la figura 1, la tarea formulada a los profesores.

ÍTEM 2

A continuación se muestran representaciones tabulares parciales de las funciones reales de variable real f, g y h.

De f:

x	20	60	100
$f(x)$	5	15	4

De g:

x	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$
$g(x)$	3	9	15

De h:

x	3	5	7
$h(x)$	-9	-15	-21

1) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justifique por qué eligió o no, cada una de las alternativas propuestas.
   A) f puede ser una función creciente.
   B) g puede ser una función lineal.
   C) h puede ser una función lineal.
   D) f puede ser una función lineal.

Figura 4 *Pregunta 1 del ítem 2 de la prueba diagnóstica*

Se esperaba que los profesores respondiesen que no necesariamente las funciones dadas son lineales y que f no es creciente.

En la segunda pregunta de esta misma tarea, se les propone a los profesores participantes del proyecto, considerando los datos de las tablas dadas, que propongan una pregunta distinta u otra alternativa a la formulada en 1. En la figura 2, se presenta la pregunta.

2) Considerando las representaciones tabulares parciales dadas para las funciones f, g y h, proponga una pregunta distinta u otra alternativa a la formulada en 1.

Figura 5 *Pregunta 2 del ítem 2 de la prueba diagnóstica*

Se esperaba que los profesores respondieran formulando una pregunta relacionada a un contexto extramatemático; es decir, una situación problema, ya que ellos están familiarizados con este tipo de tareas, que es lo que requiere la institución en el currículo.

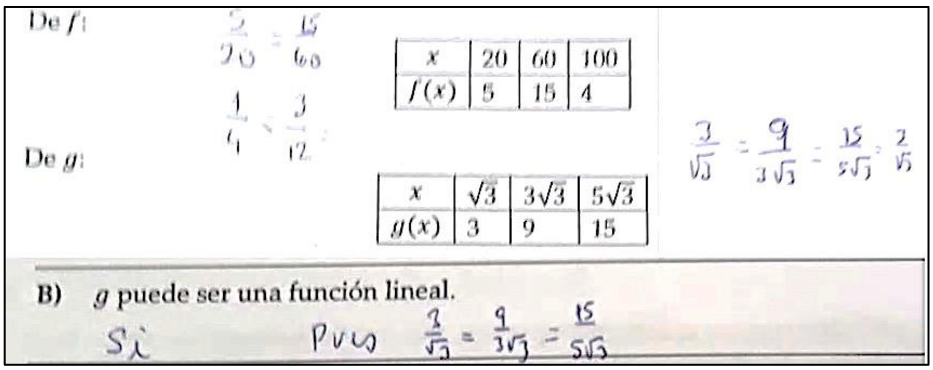
Análisis de las respuestas

Para el análisis de las respuestas dadas por los 75 profesores participantes, se aplica el primer nivel del análisis didáctico propuesto por el EOS. Para ello, se elaboran las configuraciones epistémicas CE (institucionales) de acuerdo a los significados parciales: (numérico o tabular, gráfico y algebraico) para la identificación de los objetos primarios que intervienen y emergen en la solución de la tarea propuesta de la función lineal. Las configuraciones cognitivas CC (personales), que en términos del EOS son dependientes de las configuraciones epistémicas, al haber estado el sujeto en relación con el objeto matemático en algún proceso de instrucción, fueron comparadas con estas CE; además en su justificación se esperaba que utilizaran alguna otra representación.

A continuación, se muestran las CC elaboradas, las cuales permitieron caracterizar las respuestas de los profesores en relación con la pregunta 1 de la tarea propuesta.

Configuración cognitiva CC1

Determinación de una constante de proporcionalidad, cuando el profesor verifica la linealidad a través del cálculo de y/x, al observar que esta se conserva para todos los pares de la tabla, entonces afirma que g es lineal, como se muestra en la figura 3.



De f: $\frac{5}{20} = \frac{15}{60}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

x	20	60	100
$f(x)$	5	15	4

De g:

x	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$
$g(x)$	3	9	15

$\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

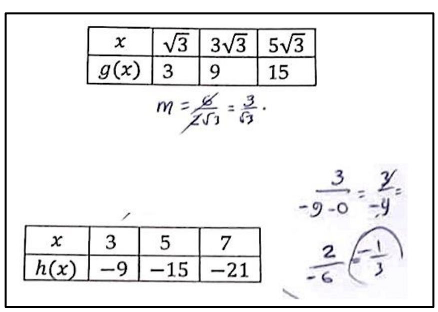
B) g puede ser una función lineal.

Si Pues $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}}$

Figura 6 *Respuesta del profesor P1*

Configuración cognitiva CC2

Determinación de una razón de cambio constante, en este caso el profesor calcula el cociente de diferencia de ordenadas entre diferencia de abscisas. Se puede pensar que en esta configuración se tiene una concepción clara de la razón de cambio de una función lineal, al formular la hipótesis de que una función es lineal si su razón de cambio es constante, como se muestra en la figura 4. Sin embargo, la razón de cambio de una función afín no lineal $f(x) = ax + b$ con $b \neq 0$ también es constante.



x	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$
$g(x)$	3	9	15

$m = \frac{\cancel{6}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$.

$\frac{3}{-9-0} = \frac{y}{-9}$

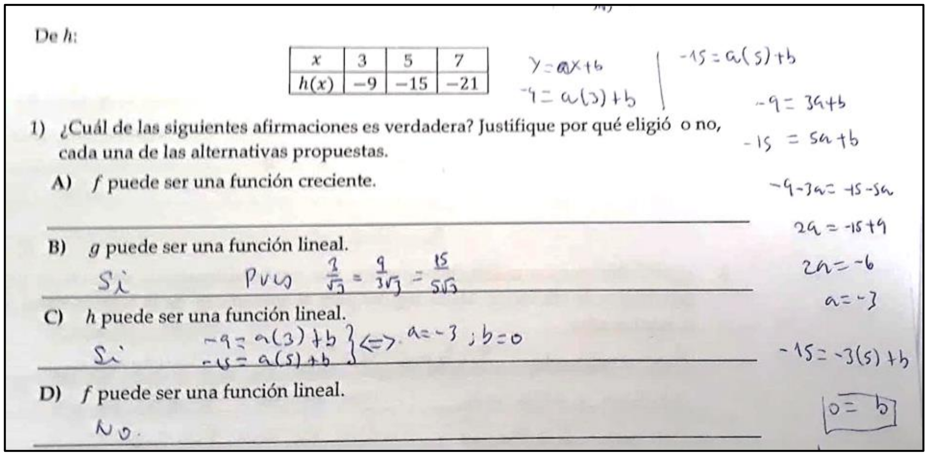
x	3	5	7
$h(x)$	-9	-15	-21

$\frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

Figura 7 *Respuesta del profesor P2*

Configuración cognitiva CC3

Determinación de una regla de correspondencia para validar que una función es lineal en esta configuración presuponiendo que el conjunto de puntos satisface la regla de una función afín y poniendo énfasis en lo algebraico. Para ello, el profesor halla los coeficientes a y b del modelo, regla de correspondencia, fórmula o ecuación $y = ax + b$, reemplaza dos pares de valores de la tabla, estableciendo así un sistema de ecuaciones, como se muestra en la figura 5.


De h:

x	3	5	7
$h(x)$	-9	-15	-21

$y = ax + b$
$-9 = a(3) + b$
$-15 = a(5) + b$
$-9 = 3a + b$
$-15 = 5a + b$
$-9 - 3a = -15 - 5a$
$2a = -15 + 9$
$2a = -6$
$a = -3$
$-15 = -3(5) + b$
$\boxed{0 = b}$

1) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? Justifique por qué eligió o no, cada una de las alternativas propuestas.

A) f puede ser una función creciente.

B) g puede ser una función lineal.
Si Pues $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{15}{5\sqrt{3}}$

C) h puede ser una función lineal.
Si $\left.\begin{array}{l} -9 = a(3) + b \\ -15 = a(5) + b \end{array}\right\} \Leftrightarrow a = -3 \; ; b = 0$

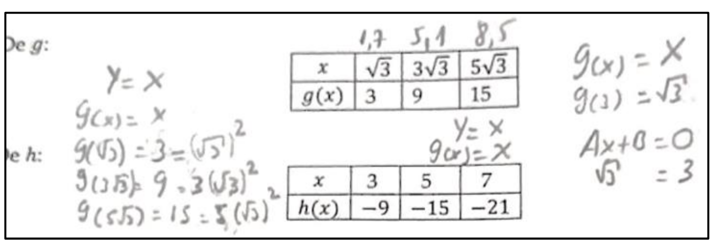
D) f puede ser una función lineal.
No.

Figura 8 *Respuesta del profesor P3*

En este caso se observa que no se verifica que el tercer punto cumpla la regla, solo afirma que es lineal ya que $b = 0$. Coincidimos con Birgin (2012) en que esta configuración no ayuda a dar un significado de razón de cambio al coeficiente "a".

Configuración cognitiva CC4

Determinación de alguna regularidad en las imágenes, cuando el profesor recurre a la multiplicación por un determinado factor, o la elevación al cuadrado. Se infiere de su procedimiento que intenta encontrar un patrón; sin embargo, no lo logra.


De g:

x	$\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$
$g(x)$	3	9	15

1,7 5,1 8,5

$y = x$
$g(x) = x$
$g(\sqrt{3}) = 3 = (\sqrt{3})^2$
$g(3\sqrt{3}) = 9 = 3(\sqrt{3})^2$
$g(5\sqrt{3}) = 15 = 5(\sqrt{3})^2$

$y = x$
$g(x) = x$

$g(x) = x$
$g(3) = \sqrt{3}$
$Ax + B = 0$
$\sqrt{3} = 3$

De h:

x	3	5	7
$h(x)$	-9	-15	-21

Figura 9 *Respuesta del profesor P4*

De acuerdo con Ellis (2007), esta configuración muestra una influencia de razonamiento deductivo para llegar a la generalización.

Configuración cognitiva CC5

Validación a través del trazo de una gráfica, uniendo los puntos dados de una función mediante un trazo continuo. En la figura 7, se observa que el profesor ubica los puntos y se percata que están alineados, por lo que traza una recta que pasa por estos y concluye que esos puntos pertenecen a la gráfica de una función lineal. Por lo general, como lo muestra la investigación de Leinhardt et al. (1990), se tiende a adoptar el fenómeno de continuidad y de linealidad.

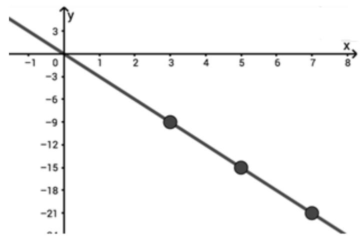


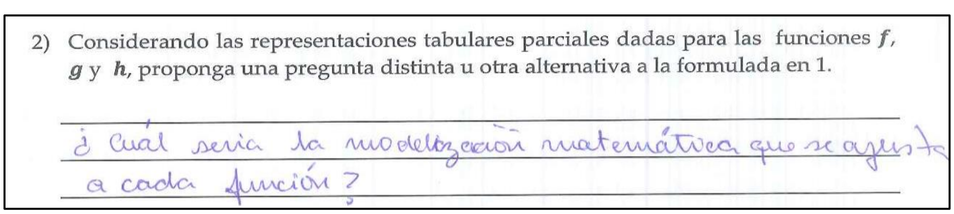
Figura 10 *Respuesta del profesor P5*

De los 75 profesores que participaron en la prueba diagnóstica contestaron al ítem 60 profesores y, como se observa, una gran mayoría se basa en las reglas de correspondencia para justificar que una función es lineal. Solo dos profesores hacen uso de la proporción. Además, 19 profesores afirman que gráficamente las tres coordenadas dadas corresponden a tres puntos colineales, sin considerar el caso de que haya otros puntos que no pertenezcan a la recta que grafican, ya que no se afirma que es una función lineal. En la tabla 2, se presenta la cantidad de profesores cuyas respuestas corresponden a una de las CC mostradas anteriormente.

Tabla 4. *Características de las respuestas de los profesores*

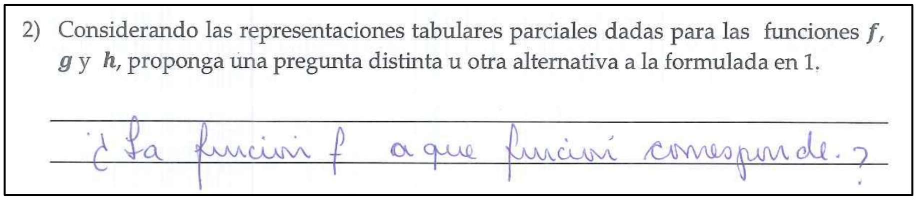
Caracterización de las respuestas	*Cantidad de profesores*
1. Determina una constante de proporcionalidad que no corresponde precisamente a la razón de cambio constante.	8
2. Verifica la linealidad a través de una razón de cambio.	4
3. Determinan la regla de correspondencia $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (\sqrt{\boldsymbol{3}})\,\boldsymbol{x}$ en la cual los tres puntos verifican la expresión.	27
4. Relaciona que por cada $\boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{3}}$, que se incrementa en $\boldsymbol{x}$, el valor de $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ aumenta 6 unidades.	2
5. Afirma que gráficamente las tres coordenadas dadas corresponderían a tres puntos colineales en una representación gráfica o afirman que pasa por el origen de coordenadas.	19

En el caso de la pregunta 2, ningún profesor propuso una situación problema. La mayoría cambia los valores de las tablas o elabora preguntas que requieren para su solución la regla de correspondencia. Siguiendo la misma línea, varios profesores consideran que las representaciones de las funciones lineales se relacionan con su regla de correspondencia o modelizaciones. En las figuras 8 y 9 se muestran las respuestas que dieron algunos profesores.


2) Considerando las representaciones tabulares parciales dadas para las funciones $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ y $\boldsymbol{h}$, proponga una pregunta distinta u otra alternativa a la formulada en 1.

¿Cuál sería la modelización matemática que se ajusta a cada función?

Figura 11 *Respuesta del profesor P6*


2) Considerando las representaciones tabulares parciales dadas para las funciones f, g y h, proponga una pregunta distinta u otra alternativa a la formulada en 1.

¿La función f a que función corresponde.?

Figura 9 *Respuesta del profesor P7*

Resultados

Con respecto a la pregunta 1 del ítem 2, los conocimientos de los profesores puestos en juego en esta tarea son variados. Así, según el análisis realizado, se puede afirmar que la mayoría de los profesores tiene un conocimiento común, porque resuelve la tarea; aunque algunos de los profesores cometen errores, como el afirmar que dados tres puntos de una gráfica al unirlos resulte una recta, sin conocer la regla de correspondencia. También, muestran tener cierto conocimiento especializado (faceta epistémica, propuesta por el EOS) ya que además los profesores tratan de justificar sus respuestas empleando diferentes representaciones ostensivas, mostrando de esta manera los significados parciales (numérico, algebraico, gráfico, etc.) que conocen de la función lineal. Sin embargo, las justificaciones dadas por los profesores a la primera pregunta no correspondieron a la respuesta esperada; una de estas fue, por ejemplo, f puede ser creciente en un intervalo limitado.

Con respecto a las demás preguntas, las respuestas que se obtuvieron coincidieron con los supuestos hipotéticos H1, H2, H3, H4 y H5 que nos planteamos. H1: La estructura de la pregunta puede hacer que el profesor centre su atención en que haga cumplir los datos de la representación tabular y obviar el fin de esta. H2: Los puntos podían pertenecer a una función por tramos; sin embargo, también estaba la hipótesis de que la idea global de función intervendría en el problema, para deducir que esta era una función continua con el mismo comportamiento en todo su dominio y por tanto pasa por el origen. H3: Uso de la constante de proporcionalidad y H4: Cálculo de la razón de cambio para verificar la linealidad. H5: Los profesores iban a privilegiar la representación algebraica y usarían los puntos de la tabla como parte de un modelo funcional $f(x) = mx$. Este último supuesto hipotético fue finalmente corroborado.

Se pudo constatar, con la pregunta 2, que a pesar de que en las disposiciones del Minedu está que los profesores trabajen con situaciones problemas, no es fácil la creación de estas.
Concordamos con Burgos et al. (2018) cuando afirman que los profesores en formación no son comúnmente precisos con la noción de proposición, la cual a veces es interpretada por ellos como premisa o argumento en lugar de un enunciado sobre conceptos que requiere de justificación o de una prueba. En nuestro caso, también observamos lo mismo con profesores en servicio, ya que no se cuestionan la verdad de la afirmación y solo trabajan en aspectos procedimentales y de manera algorítmica, lo cual no fortalece el significado de función lineal.

Reflexiones finales

Este estudio es importante pues se ha podido identificar las diferentes concepciones que tienen los profesores en servicio que participan en este proyecto respecto al concepto de función, en particular al de función lineal. La mayoría de estos profesores puso mayor énfasis tanto en la manipulación de la representación algebraica, como en la representación gráfica para justificar sus argumentos, como se observa en las soluciones que proporcionan al momento de desarrollar las tareas. Por ello, es importante poner énfasis en las otras representaciones para comprender la noción de función lineal, tanto desde un punto de vista local y global. Asimismo, se observa que los profesores de este estudio muestran limitadas argumentaciones y deficiencias en las propuestas de preguntas que formulan, lo que también debe ser desarrollado.

Por otro lado, con base en los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, se ha continuado con la segunda etapa del proyecto, para que así puedan ser capacitados de una manera más certera al implementar los talleres. Así, por ejemplo, se ha podido trabajar con las diferentes representaciones de la función lineal y no solo con la representación algebraica; los profesores tomaron conciencia que, dada una tabla de valores de una función, esto no garantiza que esta sea lineal; que no solo se debe aplicar la regla de correspondencia, sino que también se puede hacer uso de proporciones, cuando corresponda. En diversas oportunidades se recurre, en educación primaria, a la construcción de tablas para la organización de situaciones cotidianas en las que interviene la proporcionalidad; sin embargo, este tipo de representación no es tomado en cuenta en educación secundaria, lo que podría servir para una introducción y que fue planteado en los talleres.

El ítem 2 ha permitido observar que los profesores emplean diversos ostensivos, pero sin necesidad de conocer el objeto matemático que está siendo representado. Por otro lado, se detecta conocimientos parciales de los profesores y su falta de práctica para generar situaciones de contexto extra-matemático.

Por lo tanto, se considera que, hacer explícito los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemática respecto de funciones lineales constituye un aporte de interés para la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas, ya que puede proporcionar herramientas para el diseño e implementación de procesos formativos para este profesorado a fin de brindarle nuevas herramientas que enriquezcan su labor profesional para facilitar el aprendizaje de sus alumnos y alcanzar los estándares exigidos en las programaciones curriculares, respecto a este contenido en particular.

Agradecimiento: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación DGI-PUCP 216-2018-3-0051

Referencias bibliográficas

Birgin, Osman. (2012). Investigation of eighth-grade students' understanding of the slope of the linear function. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(42a), 139-162.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. Giacomone, B., Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* e182013.

De Bock, D., Van Dooren, Wim., & Verschaffel, L.(2012). Students' understanding of linear and non-linear functions: Two studies on the mediating role of external representations. *HUB Research papers economics & management*, *40*, 1-33.

Ellis, A. (2007). Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationship. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 194-229.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behavoir, 17,* 105-121.

Font, V. (2011). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 56*, 86-94.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. UNIÓN: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31.

Godino, J.D., Batanero, C., Font, V., y Giacomone, B., y (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp.285-294). Málaga:SEIEM.

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research, Washington*, *60*, 1 - 64.

Matteson, S.M. (2006). Mathematical literacy and standardized mathematical assessments. *Reading Psychology, 27,* 205-233.

Ministerio de Educación del Perú. (2017). *Programa Curricular de Educación Secundaria*. Lima.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

VOL33, NÚMERO 1, AÑO 2020

¿QUÉ SIGNIFICADO ATRIBUYEN A LA MEDIA ARITMÉTICA PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EJERCICIO?

WHAT MEANING DO MATHEMATICS IN-SERVICE TEACHERS ATTRIBUTE TO THE ARITHMETIC MEAN?

Eulalia Calle, Adriana Breda, Vicenç Font
Universidad de Cuenca (Ecuador), Universitat de Barcelona (España)
eulalia.calle@ucuenca.edu.ec, adriana.breda@gmail.com, vfont@ub.edu

Resumen
Este trabajo tiene como objetivo identificar qué significado atribuyen a la media aritmética profesores de matemáticas en ejercicio. Para ello, se analizaron las respuestas de 95 docentes a una tarea que consistía en relacionar los distintos significados de este objeto matemático con una lista de problemas propuestos. Se concluye que la mayoría de los docentes no logran relacionar de forma correcta el significado de la media con el enunciado del problema correspondiente y, los que logran relacionar, justifican dicha relación de forma incorrecta.

Palabras clave: formación de profesores; media aritmética; enfoque ontosemiótico

Abstract
This work is aimed at identifying the meaning that mathematics in-service teachers give to arithmetic mean. So, we analyzed the answers of 95 teachers to a task that consisted in relating the different meanings of this mathematical object with a list of proposed problems. It is concluded that most of the teachers fail to correctly relate the meaning of the mean with the statement of the corresponding problem and, those who manage to relate, justify this relationship incorrectly.

Key words: teacher training; arithmetic mean; onto-semiotic approach

Introducción

En la actualidad se han propuestos diferentes modelos de categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Uno de dichos modelos, es el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2019; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Godino y Font, 2018). En particular, en el marco de este modelo, se considera que, para que un alumno pueda ser competente en la aplicación de las nociones matemáticas, es necesario que en el proceso de instrucción se le enseñe una muestra representativa de los diferentes significados de estas nociones. En consecuencia, se considera necesario que los profesores de matemáticas tengan en cuenta la complejidad del objeto matemático que se pretende enseñar (entendida ésta como pluralidad de significados) en el diseño, implementación, valoración y rediseño de procesos de instrucción.

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, distintas investigaciones hacen énfasis en la importancia de abordar la complejidad del objeto matemático en la formación de profesores. Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018), por ejemplo, cuando trabajan en el reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria, focalizan la atención, en la faceta epistémica del modelo CCDM, dando importancia al conocimiento de la pluralidad de los significados de los objetos matemáticos en diferentes contextos, llegando a determinar incluso que los docentes en su intento de lograr un nivel de algebrización, sacrifican la significación del enunciado del problema. Otro estudio relacionado con la igualdad de los números reales (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007), plantea la necesidad de establecer los distintos significados asociados a los objetos matemáticos en diferentes momentos, enfatizando que ninguna definición, puede ser privilegiada. Por último, en una reflexión sobre la articulación de la complejidad matemática de la media aritmética, Rondero y Font (2015), usan la configuración epistémica (representaciones, definiciones, propiedades, problemas, etc.) como una herramienta importante para describir la complejidad de esta noción, además, profundizan en los mecanismos de articulación de dicha complejidad.

Siguiendo esta línea de investigación, el presente trabajo propone como objetivo estudiar si los profesores de matemáticas en ejercicio (estudiantes de un máster profesional para formación de profesores) pueden identificar el significado del objeto matemático media aritmética que permite resolver un determinado problema, para lo cual plantea la siguiente pregunta: ¿Pueden relacionar los profesores de matemáticas en ejercicio los diferentes significados parciales de la media aritmética con diversas tipologías de problemas?

Marco teórico

En el marco teórico explicamos, de manera breve, el modelo CCDM del EOS, detallamos el componente *Representatividad* de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar del criterio de idoneidad epistémica y explicamos la complejidad del objeto matemático media aritmética presentada por Rondero y Font (2015), que es el tema central de este artículo.

El modelo CCDM y la Idoneidad Didáctica

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción matemática (EOS) es un sistema teórico inclusivo en la Educación Matemática que articula diversas categorías de conocimientos y competencias (CCDM), de los profesores de matemáticas consideradas necesarias para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2019). Este modelo teórico hace hincapié en el análisis de idoneidad didáctica, como una competencia para la reflexión global sobre la práctica docente, su valoración y mejora progresiva (Giacomone, Godino y Beltrán, 2018); por lo tanto, responde a qué criterios seguir en el diseño de secuencias de tareas, cómo desarrollar y evaluar la competencia matemática de los alumnos y qué cambios hacer para conseguir metas de aprendizaje superiores. Esta noción se descompone en los siguientes criterios parciales de idoneidad didáctica (Font, Planas y Godino, 2010):

- *Idoneidad epistémica*: se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. Las tareas o situaciones-problemas son un componente fundamental en esta dimensión, y deben involucrar diversos objetos y procesos matemáticos.
- *Idoneidad ecológica*: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.
- *Idoneidad cognitiva*: grado en que los significados pretendidos e implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados.
- *Idoneidad afectiva*: grado de implicación (intereses, emociones, actitudes y creencias) del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad interaccional*: grado en que las configuraciones didácticas y el discurso en la clase permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra, resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional*: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En Breda y Lima (2016) y Breda, Pino-Fan y Font (2017) se aporta un sistema de componentes e indicadores que sirve de guía de análisis y valoración de la idoneidad didáctica, que está pensado para un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa.

La idoneidad epistémica y la complejidad de los objetos matemáticos

Tanto los componentes como los indicadores de los criterios de idoneidad didáctica se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias, los principios y los resultados de la investigación en el área de Didáctica de las Matemáticas. En particular, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta un principio fundamental del EOS que, con los matices propios de cada enfoque, es (o puede ser) asumido por otros enfoques teóricos del área. Nos referimos al principio que se puede formular de la siguiente manera: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad (Font, Godino y Gallardo, 2013; Rondero y Font, 2015). De este principio se deriva un componente (representatividad) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta, dentro de lo posible, dicha complejidad en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas (Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013).

El componente *Representatividad de la complejidad de los objetos matemáticos* (entendida como pluralidad de significados parciales), se refiere al grado de representatividad e interconexión de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia (Godino, Giacomone y Beltrán-Pelliecer, 2018). Cada uno de estos significados permite resolver tipos de problemas diferentes, por lo cual, si se quiere enseñar una muestra representativa de significados parciales es necesario presentar una muestra variad de problemas (Font, Breda y Seckel, 2017).

La siguiente tabla (Font, Breda y Seckel, 2017), explica detalladamente, los indicadores del componente *Representatividad* del criterio de idoneidad epistémica.

Tabla 1 - *El componente de Representatividad y sus indicadores.*

Componente de la Idoneidad Epistémica	Indicadores
Representatividad	• Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar • Los significados parciales definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad contemplada en el currículo de la noción matemática que se quiere enseñar. • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla una muestra representativa de problemas? • Para uno o varios significados parciales seleccionados para su implementación, ¿se contempla el uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos?

Fuente: *Font, Breda y Seckel (2017).*

Investigaciones sobre la complejidad de diferentes objetos matemáticos

Se han realizado diferentes investigaciones para profundizar en la complejidad de diferentes objetos matemáticos: números naturales (Godino, Font, Wilhelmi y Arrieche, 2009), media aritmética (Rondero y Font, 2015), medida (Alpízar-Vargas y Morales-López, 2019), límite (Contreras, García y Font, 2012), optimización (Balcaza, Contreras y Font, 2017), Teorema de Tales (Font, Breda y Seckel, 2017), derivada y antiderivada, así como la comprensión que tienen los estudiantes de dicha complejidad (Pino-Fan, Godino y Font, 2011; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda, 2018; Pino-Fan, Godino y Font, 2018), inecuación (Monje, Seckel y Breda, 2018).

Para el objeto matemático *derivada*, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones de objetos primarios : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite. En Pino, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículo de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones de objetos primarios activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de dicho nivel).

La caracterización de la complejidad de la derivada realizada en Pino-Fan, Godino y Font (2011) facilita tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la derivada. En Pino-Fan, Godino y Font y (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de futuros profesores sobre la derivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la derivada caracterizados en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

En Gordillo y Pino-Fan (2016) la complejidad de la antiderivada se caracteriza mediante cuatro configuraciones de objetos primarios relacionadas con cuatro problemas fundamentales: a) el problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) el problema de la relación fluxiones - fluentes; c) el problema sobre la relación de los diferenciales y las sumatorias; y d) el problema de la identificación de funciones elementales. La caracterización de dicha complejidad permite tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio sobre la antiderivada. En Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018) y en Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios y Breda (2018) se diseñó un cuestionario para determinar la comprensión de los estudiantes universitarios sobre la antiderivada en el que se incluyeron tareas que activan los diversos significados parciales de la antiderivada caracterizados en Gordillo y Pino (2016).

Monje, Seckel y Breda (2018), por medio de un análisis comparativo entre la complejidad del objeto matemático inecuación con el currículo nacional y los textos escolares otorgados por el Ministerio de Educación de Chile, concluyeron que el tratamiento que se le otorga al objeto matemático en estudio (inecuaciones) no considera todos los componentes necesarios para la enseñanza de la inecuación a partir de su complejidad, en particular, se observó que tanto el currículo como los textos escolares dejan fuera, en particular, las inecuaciones cuadráticas y las inecuaciones con valor absoluto.

En estas investigaciones se llegó a la conclusión de que los profesores debían tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñaban para conseguir una enseñanza más eficaz, lo cual llevó a los autores de este artículo a interesase por la manera de incorporar la problemática de la complejidad de los objetos matemáticos en la formación de profesores.

La complejidad del objeto matemático media aritmética

Rondero y Font (2015) profundizan sobre los mecanismos de articulación de la complejidad asociada al objeto matemático media aritmética. Para ello, describen dicha complejidad en términos de diferentes significados: suma de todos los valores dividida por el número de valores; estimación de una medida de una magnitud; valor representativo de un conjunto de datos; operador que asocia a un conjunto de datos un único valor; promedio de promedios y media ponderada. Enseñando una muestra representativa de estos significados, podemos decir que el maestro estaría trabajando, a través de la resolución de problemas, la representatividad del objeto matemático media aritmética y permitiendo que el estudiante articule o conecte los diferentes significados. En esta investigación hemos utilizado tres significados distintos: La media como valor representativo de un conjunto de datos; La media como la estimación de una medida; La media como valor que compensa los excesos con los defectos.

Metodología

En ese apartado, presentamos el contexto del estudio (participantes de la investigación, tipo de máster), explicamos el tipo de tarea que se les propuso y, aclaramos como se han analizado las respuestas de los docentes.

Contexto del estudio

Han participado de esta investigación, 95 profesores que ejercen la docencia de matemáticas en instituciones educativas públicas y privadas en diferentes provincias y ciudades de Ecuador, en particular, profesores que trabajan en los niveles de Educación General Básica Superior (EGBS) y Bachillerato General Unificado (BGU). La mayor parte de los profesores acreditan formación inicial en Licenciatura en Matemáticas, pero, algunos presentan formación inicial en Educación General Básica, Sociología u otras áreas del conocimiento.   Además de ejercer la actividad de docencia en matemáticas, los profesores estaban realizando un máster profesional de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Dicho máster tiene como enfoque la formación continua y profesionalización docente. Dado su aspecto profesional, el máster se constituye de un curso de dos años, divididos en tres bloques: a) el bloque general (15 créditos ECTS) que incluye asignaturas de la psicología, sociología, orientación y sistema educativo ecuatoriano; b) el bloque específico (21 créditos ECTS) que contempla las asignaturas de la disciplina (matemática) y su didáctica y; c) el bloque de *prácticum* y trabajo de fin de máster (TFM) (24 créditos ECTS) que se orienta al ejercicio de articulación entre la teoría y la práctica.

Una de las asignaturas del currículo de este máster, titulada *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica*, impartida en el último semestre del curso, tenía como principal objetivo presentar propuestas de innovación y herramientas de valoración de la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que permitan al profesor la mejora de su propia práctica. Además, la asignatura pretendía hacer una iniciación a la investigación en Didáctica de las Matemáticas y a la difusión de sus resultados.

Al final de la asignatura *Innovación e Investigación sobre la Propia Práctica* se realizó una evaluación para verificar los aprendizajes logrados por los profesores. Una de las tareas de evaluación consistía en identificar la comprensión que tienen los profesores acerca de los distintos significados de la media aritmética, haciéndoles relacionar el tipo de significado con distintos tipos de problemas planteados.

Tarea planteada a los profesores

La tarea, basada en Batanero (2000), trataba de que los profesores relacionasen los significados parciales de la media aritmética: 1) la media como valor representativo de un conjunto de datos; 2) la media como la estimación de una medida; y 3) valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) con los siguientes problemas:

Problema A: Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Cree que el entrenamiento es efectivo?
Altura alcanzada en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

Problema C: Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

La tarea correcta que responde a esta identificación significado-problema, es:

- La media como valor representativo de un conjunto de datos, se corresponde con el problema B; (1- B)
- La media como la estimación de una medida, se corresponde con el problema C; (2- C)
- La media como valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.) se corresponde con el problema A. (3 - A)

Análisis de los datos

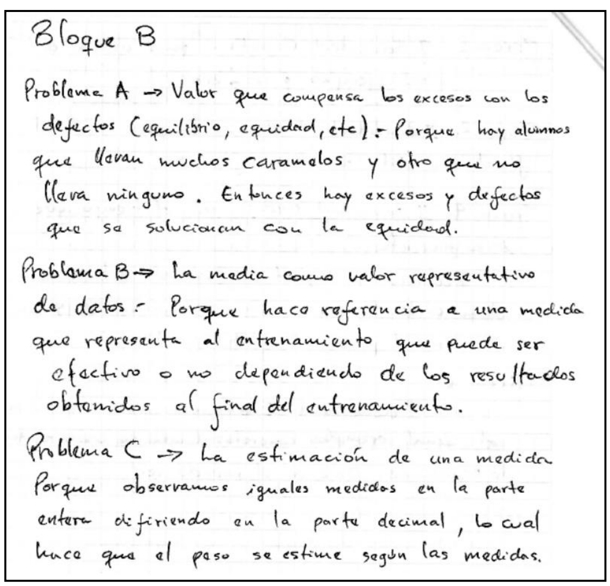
Para analizar cualitativamente las respuestas de los profesores, primero se estudió la correspondencia (o no) entre los tres significados parciales de la media aritmética contemplados en el diseño de la tarea y el problema, donde este significado es necesario para su resolución. Luego, se analizó la respuesta que los profesores daban para relacionar los distintos significados (La media como valor representativo de un conjunto de datos; La media como la estimación de una medida; La media como valor que compensa los excesos con los defectos) con los problemas propuestos.

Resultados

Al analizar las respuestas de los 95 profesores participantes, se concluye que un número importante (56) al relacionar los tres significados con los problemas propuestos, lo hacen de forma confusa y errónea. Por otra parte, el 21 de los participantes, dan una respuesta correcta, pero su justificación no es válida (Figura 1); mientras que 18, señalan las respuestas correctas, sin ningún tipo de justificación.

En la Figura 1, aunque el profesor hace la relación tipo de significado parcial con la tarea correspondiente de forma correcta, su justificación es confusa y poco clara. Por ejemplo, al justificar que el problema C se relaciona con el significado de la media como estimación de una medida, su justificativa para tal respuesta focaliza en que los valores, aunque sean iguales en la parte entera, se diferencian en la parte decimal, considerando a esta parte, como base para la estimación del peso real del objeto. Ese tipo de justificación, no tiene claridad ni rigurosidad desde el punto de vista matemático.

Entre los errores más frecuentes que presentan los profesores está lo de relacionar el problema B con el significado de media como estimación de una medida. En ese caso, es plausible suponer que solamente por tener muchos datos de una determinada situación, los profesores ya creen que el problema se refiere a una estimación de una medida (Figura 2):


Bloque B

Problema A → Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc): Porque hay alumnos que llevan muchos caramelos y otro que no lleva ninguno. Entonces hay excesos y defectos que se solucionan con la equidad.

Problema B → La media como valor representativo de datos: Porque hace referencia a una medida que representa al entrenamiento que puede ser efectivo o no dependiendo de los resultados obtenidos al final del entrenamiento.

Problema C → La estimación de una medida Porque observamos iguales medidas en la parte entera difiriendo en la parte decimal, lo cual hace que el peso se estime según las medidas.

Figura 1. *Respuesta correcta de uno de los profesores.* Fuente: los autores.

3) Media Aritmética: A continuación tienes diferentes significados de la media aritmética y diferentes problemas. Asocia cada significado con el problema que pone en juego este significado para su resolución

Significados:

- La media como valor representativo de un conjunto de datos
- La media como la estimación de una medida
- Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad, etc.)

Problemas:

Problema A. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

A = 5
M = 8
J = 6
C = 1
D = 0

La suma total = 20/5
Media = 4

Se asocia con la media como valor representativo de un conjunto de datos.

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Crees que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzad en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana	
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115	/ 105,1
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117	/ 120,4

Se asocia con la medida como la estimación de una medida

Problema C. Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

Se asocia con la media como estimación de una medida

Figura 2. *Respuesta incorrecta de uno de los profesores.* *Fuente: los autores.*

También cometieron errores al relacionar el significado de la media como un valor representativo de un conjunto de datos, con el problema que trataba de la media como estimación de una medida, conforme la Figura 3.

Problema A. Unos niños llevan a clase caramelos. Andrés lleva 5, María 8, José 6, Carmen 1 y Daniel no lleva ninguno. ¿Cómo repartir los caramelos de forma equitativa?

2. La media como la estimación de una medida.

Problema B: Los siguientes valores se obtuvieron al medir la altura (cm.) alcanzada al saltar por un grupo de alumnos antes y después del entrenamiento. ¿Crees que el entrenamiento es efectivo?

Altura alcanzad en cm.

Alumnos	Ana	Bea	Carol	Diana	Elena	Fanny	Laia	Hilda	Inés	Juana
Antes del entrenamiento	115	112	107	119	115	138	126	105	104	115
Después del entrenamiento	128	115	106	128	122	145	132	109	102	117

3. Valor que compensa los excesos con los defectos (equilibrio, equidad)

Problema C. Ocho alumnos de la misma clase miden el peso de un objeto pequeño usando el mismo instrumento, obteniendo los siguientes valores en gramos: 6,2; 6,0; 6,0; 6,3; 6,1; 6,23; 6,15; 6,2. ¿Cuál sería la mejor estimación del peso real del objeto?

1. La media como un valor representativo de un conjunto de datos

Figura 3. *Respuesta incorrecta de uno de los profesores.* *Fuente: los autores.*

Este tipo de resultado nos lleva a inferir que el conocimiento que tienen los profesores en ejercicio sobre la media aritmética, no les permite identificar el tipo de significado que es necesario poner en juego para la resolución de un problema (donde la noción de media aritmética es necesaria para su resolución).

Consideraciones finales

Una vez que se han revisado y analizado las respuestas que los 95 profesores dan a la relación entre significado y problema del objeto matemático media aritmética, se puede inferir que más de la mitad de éstos no tienen claro cuáles son los significados de la media aritmética, lo que dificulta significativamente, aplicarlos en la resolución de problemas. Este resultado, evidencia la necesidad de trabajar, con los profesores, una muestra representativa de los diferentes significados del objeto matemático que se quiere enseñar. Se trata de un resultado coherente con lo que se propone en Rondero y Font (2015) cuando abordan la complejidad de la media aritmética y sus mecanismos de articulación, o Burgos, et al (2018), cuando hace referencia a la importancia de la pluralidad de los significados de la proporcionalidad.

El abordaje del componente *Representatividad* de la idoneidad epistémica, es elemento importante para una formación docente direccionada a formar profesores en conocimientos y competencias didáctico matemáticas, pues el profesor, al conocer una muestra representativa de significados de un determinado objeto matemático, puede trabajar con una muestra representativa de problemas, generando así, una mejor idoneidad epistémica; facilitando que los alumnos construyan una red de significados parciales, conectados entre sí, que les permita desarrollar la competencia matemática que les posibilita resolver diferentes tipos de problemas (en los que es necesario poner en funcionamiento alguno de los significados parciales del objeto matemático que se está enseñando) .

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias

Alpízar-Vargas, M. & Morales-López, Y. (2019). Teaching the Topic of Money in Mathematics Classes in Primary School. *Acta Scientiae, 21*(5), 102-127. doi: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5262

Balcaza, T., Contreras, A., y Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato, *Bolema*, *31*(59), 1061-1081.

Breda, A., y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 5(1), 74-10. Doi: 10.4471/redimat.2016.1955

Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13, 1893-1918. Doi: 10.12973/eurasia.2017.01207a

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *25*, 41-58.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., y Godino, J. D. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa, 44,* 1-22.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Bolema*, *26*(42B), 667-690.

Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *10*(2), 1-23. Doi: 10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Arrieche, M. (2009) ¿Alguien sabe qué es el número? *Unión*, *19*, 34-46.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Giacomone, B., Godino, J. D., y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44,* e172011.

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema*, *30*(55), 535-558.

Gordillo, Pino-Fan, Font y Ponce (2018). Algunas tareas para evaluar la comprensión sobre el objeto matemático antiderivada. *Academia y virtualidad, 11*(2).

Monje, Y., Seckel, M. J., Breda, A. (2018). Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos, *Bolema, 32*(61), 480-502.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D., y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123 – 150.

Pino-Fan, L. R., Font, V., Gordillo, W., Larios, V., y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(6), 1091-1113. Doi: 10.1007/s10763-017-9826-2

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Rondero, C., y Font, V. (2015). Articulación de la complejidad matemática de la media aritmética. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 29-49.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D., y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 27*(1), 77 - 120.

PRÁCTICAS DE SABER, UNA CONFIGURACIÓN TOPOLÓGICA SINGULAR DE CONTRATRANSFERENCIA

PRACTICAL KNOWLEDGE, A SINGULAR TOPOLOGICAL CONFIGURATION OF COUNTERTRANSFER

Norma Beatriz Di Franco, Williams Noel Uribe, Nora Claudia Ferreyra
Universidad Nacional de La Pampa (Argentina)
difranconb@gmail.com, william_uribe@hotmail.com, ferreyranc@gmail.com

Resumen
La investigación focaliza en las relaciones con el saber en las prácticas del profesorado, estudio que se realiza en la Universidad Nacional de La Pampa. El análisis se inscribe en la investigación cualitativa, en el análisis de casos, y toma como dispositivos las residencias, en una muestra intencional del corpus empírico. Se consideran cuatro relaciones con el saber: construcción-descubrimiento, innovación-reproducción, exterioridad-interioridad e inmovilidad-desplazamiento. El análisis permite concluir que las lógicas identificadas como propias de estudiantes no son las relaciones que se proponen cuando actúan bajo el rol de profesores. Ante bien, en el trabajo realizado por el docente y en el lugar que pone a los alumnos en esa tarea, se puede analizar su propia relación con el saber, la puesta en escena de sus propias mediaciones.

Palabras clave: residencias docentes, prácticas, relaciones con el saber

Abstract
The research focuses on understanding the relationships with knowledge in the practices of teachers, a study that takes place at the University of La Pampa. The analysis is inscribed in qualitative research, in the analysis of cases, and takes residences as devices, in an intentional sample of the empirical corpus. Four relations with knowledge are considered: construction-discovery, innovation-reproduction, externality-interiority and immobility-displacement. The analysis allows to conclude that the reasoning identified as their own in the student´s role is not the relationship with knowledge that they propose while acting as teachers, or never came to be established as their own, appropriate relations.

Key words: pre-service teachers practices, practices, relations with knowledge

Introducción. Prácticas de profesorado, prácticas de saber

Las formas en que los estudiantes de profesorado se relacionan con el saber permiten traducir modalidades con que desarrollan sus prácticas y los dispositivos residenciales de prácticas profesionales se transforman en un ámbito de emergencia privilegiado para el análisis de las relaciones que se construyen con el saber. Nos preguntamos: ¿qué relaciones con el saber otorgan sentido a las prácticas de residencias?, ¿qué aspectos del saber privilegian los estudiantes?, ¿qué tipos de conexiones se llegan a elaborar?, ¿son las mismas que proponen a sus los en las secuencias de aula? En nuestro contexto local, la Universidad Nacional de La Pampa -espacio de este estudio-, es la única institución formadora de profesores en matemática en la provincia.

Así, las relaciones con el saber en las prácticas de formación del Profesorado en Matemática se constituyen en el objeto de este estudio, que tiene las implicaciones y los alcances propios de integrar a la investigación las únicas fuentes experienciales que se forman en la región.

Marco teórico

Recuperamos la necesidad expresada por el director de la Universidad Pedagógica de Buenos Aires, Adrián Cannellotto (2013), de construir 'otra relación con el saber' en la formación de profesorado. Siguiendo el análisis acerca de la formación docente de Sanjurjo (2009), "los trayectos que son más asistemáticos y acríticos, la biografía escolar y la socialización profesional, son de alto impacto en relación con los trayectos sistemáticos y formales de formación inicial y continua" (p. 12).

Para el estudio, las referencias fundamentales se realizan desde el categorial teórico de la escuela de Bernard Charlot (2008a), quien confiere una ponderación particular al sintagma “relación con el saber” (rapport au savoir -RAS-) y señala que reviste un interés especial cuando la formación profesional es la de los profesores, "los cuales deberán producir efectos de saber en sus alumnos” (Charlot, 2008b, p. 94). Consideramos conceptualizaciones de diferentes momentos de desarrollo de la noción de “relación con el saber” (Vercellino, 2015) y, desde la especificidad de la disciplina “los problemas generados por la relación de los profesores con las matemáticas en el centro del cuestionamiento profesional” (Bosch y Gascón, 2009, p. 98). Consideramos así una lógica de formación profesional de las prácticas, por definición contextualizadas y direccionadas; prácticas de saber; prácticas en las que las relaciones con el saber constituyen el elemento diferenciador. En ese marco, las residencias constituyen prácticas intensivas de efectos formativos de alto interés (Mastache, 2010); y la relación formativa se configura diferente de otras relaciones y profesiones por la necesaria referencia al saber como "analizador por excelencia de la estructura de formación" (Mastache, 2011, p.1).

Interesa particularmente a este análisis el trabajo de Claudine Blanchard Laville (2004), integrante del equipo de estudio del Saber y la Relación con el Saber junto a Yacky Beillerot y Nicole Mosconi de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Paris X. La investigadora, cuya formación de base es en Matemática, realiza su trabajo desde perspectivas psicoanalíticas, en el campo del análisis clínico, focalizando en la relación del enseñante con el saber que enseña para comprender la dinámica transferencial de la clase: los núcleos duros que se evidencian en la persistencia en el no entendimiento, el investimento que hacen los alumnos del profesor como poseedor del saber, el deseo de enseñar, el deseo de aprender, la manipulación de los fenómenos de autoridad. En sus elaboraciones señala que la relación con el conocimiento de un sujeto es un proceso de producción de saber para pensar y para actuar. "Un proceso que pone en juego a un sujeto que desea, en dimensiones conscientes e inconscientes, con sus inhibiciones y sus momentos creadores" (Blanchard Laville, 2004, p. 24). Para la comprensión de tales procesos no se puede acceder en forma directa, necesitamos hacer un desvío metodológico, estudiarlo desde sus manifestaciones. Por eso es necesario que el sujeto actualice las relaciones que establece en situaciones concretas de desempeño profesional. La investigadora recupera estudios realizados con médicos, en los que se involucraba a los profesionales en relación con sus pacientes para comprender cómo utilizan su personalidad, sus conocimientos científicos y sus convicciones en la relación. Tales procesos, de contratransferencia, no se los considera de persona a persona sino de médico a paciente, en una situación profesional. Blanchard Laville propone hacer análisis contratransferenciales a partir de lo enunciado por el docente, del discurso pronunciado, de sus producciones, para poder reflexionar acerca de los modos en que el docente se ubica con respecto a esos enunciados de saber y en qué lugar pone a los alumnos.

De regreso a esta presentación, en una primera parte de nuestro estudio -Relaciones con el saber en las prácticas (Proyecto de investigación Res 480/15 FCH Instituto de Ciencias de la Educación para la Investigación Interdisciplinaria UNLPam, 2015-2018)- postulamos las RAS como analizadores privilegiados y de carácter diferenciador de las prácticas docentes. Comenzamos con un trabajo en casos grupales, con producciones de estudiantes universitarios residentes, y configuramos cuatro relaciones con el saber: construcción/descubrimiento -dimensión de aristas epistemológicas caracterizada como *constructibilidad*-, identificada desde prácticas que instituyen una génesis del saber escolar; interioridad/exterioridad -dimensión psicológica que se mueve en un eje de *apropiación –resemantización*-, identificada desde prácticas que promueven relaciones significativas con el conocimiento; inmovilidad/desplazamiento -dimensión didáctica-, identificada por la *provisionalidad y el movimiento* en las interacciones y en las mediaciones mismas del saber, sus cambios y circulaciones, con los sujetos y en las redes de relaciones en tanto conocimiento objetivado; e innovación/reproducción -dimensión curricular- , identificada por la *intersticialidad* y sus posibilidades de percolar en la trama de prescripciones desde el lugar y las posiciones de las relaciones inéditas/particulares/innovadoras.

Enfocados en configurar un esquema categorial que pueda integrarse al entramado de saberes de la formación de profesorado, la definición de las cuatro RAS nos ha permitido identificar relaciones místicas, de reconocimiento contemplativo de un poder externo indiscutible (en el marco de las relaciones de descubrimiento); relaciones dogmáticas, legalistas, por las cuales se puede operar con el saber pero no se transgrede (relaciones de reproducción); relaciones racionalistas, aquellas que las guía la razón pero son ingenuas (relación de exterioridad y de reproducción) o relaciones abiertas y de apertura, creativas, desestructuradas, de autonomía frente a nuevos saberes, alerta a las participaciones de las/os estudiantes (vinculadas a la innovación, a los desplazamientos y a la interioridad).

En esta configuración de mediaciones, *buenas prácticas* quedarían definidas por unas relaciones con el saber siempre provisionales, en movimiento y, en principio contingentes, pero con la fuerza de lo instituyente –dimensión didáctica–; que tienen en la construcción y en la producción una posibilidad de elaboración del saber escolar –dimensión epistemológica–; que generan y aprovechan espacios decisionales a los modos de intersticios entre las prescripciones –dimensión curricular–; y que pueden movilizar una apropiación que no descuide las lógicas de la disciplina –dimensión psicológica–.

Metodología. Configuración complementaria de casos colectivos e individuales

La metodología utilizada se inscribe en la investigación cualitativa interpretativa, en el estudio de casos. Las unidades de análisis quedan constituidas por cada una de las producciones seleccionadas de 16 residentes, como EP -estudiantes de profesorado- y como FP -futuros profesores-.

Se configuran, complementariamente, dos instancias:

La primera parte constituida por cuatro casos -colectivos e instrumentales-, los estudiantes considerados como EP, y a partir de cuatro RAS: construcción-descubrimiento, innovación-reproducción, exterioridad-interioridad e inmovilidad-desplazamiento del saber.

En la segunda parte se configuran tres casos -instrumentales e individuales-, a partir de las producciones de estudiantes en tanto FP, trabajos todos implementados en aulas de educación secundaria, y tomando cada residente como referente de un modo de relación con el saber descripto en base a indicadores surgidos de la primera instancia.

Análisis. Relaciones con el saber, en el rol de estudiantes y en el lugar de profesores

La primera parte del estudio, con las lentes de las cuatro RAS, nos permite señalar algunas conclusiones que marcan diferencias sustanciales en prácticas desarrolladas en un tiempo sincrónico, el de las experiencias como EP y el de las actuaciones como FP.

Desde el rol de estudiantes, los residentes desarrollan procesos de construcción, identifican intencionalidades docentes vinculadas a establecer relaciones y a involucrar a los alumnos con las conceptualizaciones. Establecen disquisiciones y se cuestionan acerca de cómo se construye en términos de aproximaciones a una definición, cómo va relacionando quien construye con su definición, cómo inciden las interpretaciones de otros, cómo se tienen en cuenta conceptualizaciones que están siempre relacionadas aun cuando nadie las haya propuesto explícitamente, qué casos elegir y cuáles resultan más significativos. Valoran positivamente esas experiencias, y al analizarlas, se van configurando las claves para poder llevar adelante esos procesos. Proponen a las innovaciones como producciones para resignificar necesidades detectadas, estrategias para resolver problemas de la práctica, valoran su carácter colectivo y de transformación.

Al asumir el rol de productores, resulta muy tenue la fuerza de las posibilidades tanto de inventar conceptos (proponer alguno que no esté reconocido desde la disciplina) como la de recuperar otros conceptos que la preparación universitaria tiene incluidos en el currículum de formación. En las propuestas que ofrecen como significativas están presentes ataduras a un orden, una formalidad, precisión y rigor, que se transforman en condicionamientos y, en sus ejemplos, no garantizan comprensión. Las propuestas giran alrededor de la aplicación de fórmulas, la aceptación de clasificaciones sin discusión, actividades de baja necesidad reflexiva; no hay salidas particulares a problemas prácticos y todas vienen de la mano de tener conocimientos ya sabidos.

El trabajo en las cuatro dimensiones relacionales generó la necesidad de definir los indicadores que emergían recurrentemente en nuestras interpretaciones: el docente, los alumnos, el saber y la propuesta. Y entonces, el diseño complementario de tres casos de estudiantes, desde aquellas mismas dimensiones y a través de estos últimos indicadores explicitados. El foco se pone en las producciones de los residentes en el rol de profesor, que diseña su propuesta de enseñanza y la implementa completamente en aula.

La cursada de la asignatura Prácticas Educativas es de régimen anual, y con una modalidad de trabajo simultáneo en aulas de la universidad entre estudiantes compañeros en la formación de profesorado y la participación en aulas de secundario en procesos prolongados de ayudantías y residencias, como práctica profesional docente; toda la primera mitad del año en aulas del Ciclo Básico y el segundo semestre en el Ciclo Orientado de la Educación Secundaria Obligatoria.

El caso de Mailén

Tema 2

Evaluación de Matemática

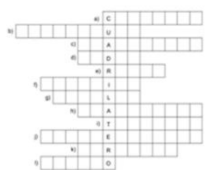
1) Resuelve las siguientes situaciones problemáticas planteando la cuenta y dibujando las rectas numéricas.
   a) Miguel gasta $55 por mes en packs de internet. Si no compra packs de internet durante 5 meses, ¿cuánto dinero habrá ahorrado?
   b) El tío de Marcos le regala por semana $25, ¿cuánto dinero tendrá Marcos al cabo de 7 meses?

2) Responde Verdadero (V) o Falso (F) y justifica la respuesta con un ejemplo:
   a) La multiplicación de números enteros no cumple la propiedad asociativa.
   b) El elemento neutro para la multiplicación de números enteros es el 1.
   c) La multiplicación de números enteros cumple la propiedad distributiva solo a izquierda.
   d) El elemento absorbente para la división de números enteros es el 0 y se cumple solo a izquierda.
   e) La división de números enteros cumple la propiedad conmutativa.

3) Realiza los siguientes cálculos aplicando la propiedad distributiva:
   a) (-64 + 24 + 16) : (-8) =
   b) (13 - 3 - 8) . (+5) =
   c) (-12 - 30 + 20 + 18) : (+2) =
   d) (-9) . (7 + 8 - 4 - 3) =

4) Teniendo en cuenta las descripciones que se mencionan a continuación, completa el acróstico:

a) Paralelogramo que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.
b) Paralelogramo que tiene cuatro ángulos iguales y dos pares de lados iguales.
c) Segmentos que unen dos vértices no consecutivos de un cuadrilátero.
d) Cada uno de los segmentos que limitan un cuadrilátero.
e) Paralelogramos que tiene los cuatro lados iguales no perpendiculares.
f) Paralelogramo que tiene los lados opuestos iguales y los ángulos opuestos iguales y no perpendiculares.
g) Porción del plano limitada por dos semirrectas con origen en un mismo punto.
h) Cuadrilátero sin lados opuestos paralelos.
i) Cuadrilátero con un par de lados opuestos paralelos.
j) Cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos e iguales.
k) Puntos extremos de cada lado del cuadrilátero.
l) Cantidad de lados de un cuadrilátero.



5) Realicen entre todos una síntesis con respecto a las propiedades de los cuadriláteros y escríbanlas en un afiche.

2) Realiza los siguientes cálculos:

a) (+4).(-3).(-1) =
b) (+5).(-2).(-11) =
c) (-5).(-7).(-13) =
d) (+8).(+2).(+4) =
e) (+3).(-6).(+9) =
f) (+150):(-15) =
g) (-120):(-60) =
h) (-180):(+3) =
i) (+70):(+35) =
j) (-45):(+15) =

3) Completa con los números enteros correspondientes:
a) (+9). ____ = (-36)
b) (-7). ____ = (+21)
c) (+42): ____ = (-7)
d) (-8): ____ = (+1)
e) ____ : (-9) = (+6)
f) ____ . (-8) = (-40)
g) ____ . (+10) = (-100)
h) (-30) . ____ = (+30)
i) ____ : (-6) = (+5)
j) (-75) : ____ = (+5)

4) Resuelve aplicando la propiedad distributiva:
a) (+3) . (+2 + 6 -5) =
b) (+5) . (+3 – 7 +6) =
c) (-36 + 12 - 6) : (-6) =
d) (+8) . (-4 – 8 + 2) =
e) (-9-4) . (-4) =
f) (-16 + 8 – 4) : (+4) =
g) (-30 + 15 + 5) : (-5) =
h) (-15 + 6 – 4) . (-2) =
i) (-64 + 24 – 32) : (+8) =
j) (+99 – 18 – 54) : (-9) =

Figura 1. *La Propuesta de Mailén*

El primer tema de enseñanza asignado a Mailén se inicia en el campo multiplicativo de los números enteros, para trabajar la -tan mencionada en el secundario- regla de los signos.
Desde la cátedra se expresa que la planificación es en proceso y la gradualidad en esos procesos es una relación más que se juega entre estudiante y docente. Hay mucho para reflexionar en términos de posibilidades y condicionantes, ritmos, tiempos, inclusión de particularidades, umbrales de exhaustividad. Los archivos guardados quedan como custodios silenciosos de muchos procesos. Según las fechas de los registros guardados, puede advertirse que ha demandado nueve intercambios o entregas y modificaciones. Con la intención de seguir reflexionando acerca de los procesos, tomamos los borradores de la misma estudiante para la residencia del segundo cuatrimestre, con el tema de clasificación de cuadriláteros y cinco instancias de presentación y replanteo de borradores de propuesta de aula.

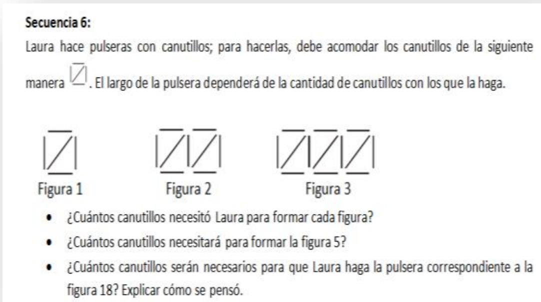
Las fechas de entrega de partes de la planificación se han producido en todos los casos, a partir de la demanda de la cátedra de revisar cuestiones, no porque se hubiera planteado como un plan abierto de los que van reorientándose en función de los desplazamientos del saber. La propuesta se mantuvo siempre rígida, desagregada hasta en sus menores detalles, para ser aplicada siguiendo el orden de la secuencia prevista (inmovilidad). Los saberes de la vida cotidiana se plantearon de manera tan forzada que traducen una clausura cognitiva más, dejando en el lugar de la no posibilidad de construcción o apropiación por parte de los alumnos (exterioridad, no construcción). La apelación a las palabras tópicos que reemplazan la comprensión -'hacia adelante', 'sentido contrario a la cueva', 'retroceder el tiempo'- constituyen todos refuerzos para garantizar el acceso a la respuesta correcta, la que el docente espera (exterioridad). En la actividad siguiente a la inicial, ya no hay más situaciones para la vida cotidiana ni relaciones o análisis de propiedades que provoquen asignación de sentidos y significados; la propuesta continúa con ejercicios, muchos, para que repitiendo se aprenda.

La ejercitación, como práctica en que más confianza se ha depositado pensando en el aprendizaje, queda ratificada en la expresión de la residente cuando señala: 'es necesario ejercitar lo suficiente hasta dominar el conocimiento' (exterioridad y reproducción). Las garantías de aprendizaje depositadas en la aplicación sin reflexiones de instrucciones dadas para cumplir (exterioridad) restringen toda participación del alumno y todo conflicto con las tareas repetidas rutinariamente (reproducción). Las indicaciones permiten vigilar que si alguien sale del esquema previsto pueda volver al control absoluto. Hay intensos esfuerzos en controlar y conservar el orden que en el esquema inicial que se presentó y que es el que debería seguirse para aprender (inmovilidad). Cuando la comprensión no es la esencia, el lenguaje cargado de paréntesis y signos parece garantizar el conocimiento (descubrimiento, el rigor matemático o su apariencia es el único soporte del concepto). Podríamos enunciar una paradoja de la previsión: el esfuerzo para que los residentes, en sus planificaciones, desarrollen procesos de anticipación acerca de las conceptualizaciones a enseñar, puede ponernos en el juego del límite entre una previsión que permita acompañar y potenciar los aprendizajes y un detalle tecnocrático, exhaustivo, de pretensión de control que refuerce la confianza en únicas secuencias, lineales, homogéneas, donde la participación de los alumnos sea postergada o desaprobada si no responde a esas únicas lógicas posibles esperadas. Así, la creatividad y las propuestas abiertas quedan muy resignadas, alejadas de la posibilidad de construir comprensión, a lo sumo garantizan cierta eficiencia en el seguimiento de los caminos indicados.

El saber es presentado por el docente, terminado e inmóvil. Un lenguaje cargado de signos parece garantizar el conocimiento (inmovilidad, descubrimiento, el rigor matemático o su traducción como lenguaje técnico es el único soporte del concepto).

El docente: La apelación a las palabras/tópicos/indicios que reemplazan la comprensión constituye un refuerzo para garantizar el acceso a la respuesta correcta (exterioridad).
El alumno: No hay construcción; sí participación restringida a las tareas repetidas rutinariamente, eficiencia en el seguimiento de las pistas y los pasos (reproducción).
La propuesta es rígida, inmóvil, desagregada hasta en sus menores detalles, para ser aplicada siguiendo el orden de la secuencia prevista (inmovilidad).

El caso de Andrea

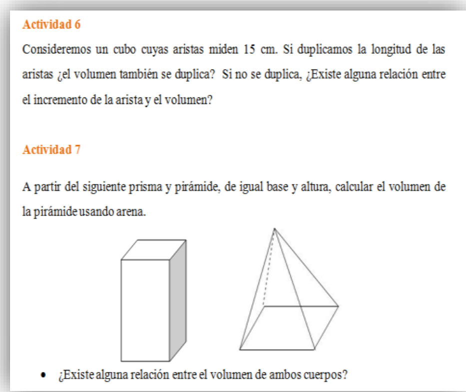


Secuencia 6:

Laura hace pulseras con canutillos; para hacerlas, debe acomodar los canutillos de la siguiente manera . El largo de la pulsera dependerá de la cantidad de canutillos con los que la haga.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

- ¿Cuántos canutillos necesitó Laura para formar cada figura?
- ¿Cuántos canutillos necesitará para formar la figura 5?
- ¿Cuántos canutillos serán necesarios para que Laura haga la pulsera correspondiente a la figura 18? Explicar cómo se pensó.



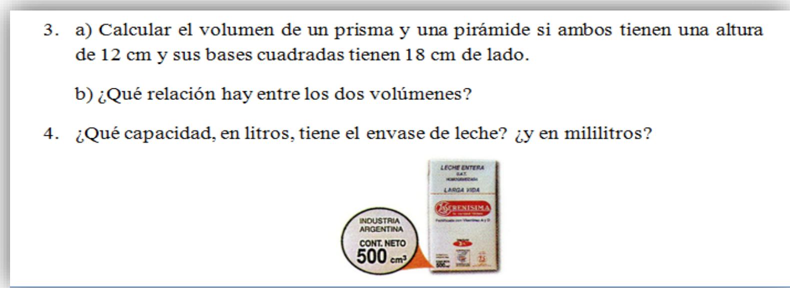
Actividad 6

Consideremos un cubo cuyas aristas miden 15 cm. Si duplicamos la longitud de las aristas ¿el volumen también se duplica? Si no se duplica, ¿Existe alguna relación entre el incremento de la arista y el volumen?

Actividad 7

A partir del siguiente prisma y pirámide, de igual base y altura, calcular el volumen de la pirámide usando arena.

- ¿Existe alguna relación entre el volumen de ambos cuerpos?



3. a) Calcular el volumen de un prisma y una pirámide si ambos tienen una altura de 12 cm y sus bases cuadradas tienen 18 cm de lado.

   b) ¿Qué relación hay entre los dos volúmenes?

4. ¿Qué capacidad, en litros, tiene el envase de leche? ¿y en mililitros?

Figura 2. *La Propuesta de Andrea*

A Andrea le tocó trabajar primero en las relaciones de perímetros, áreas y volúmenes y las correspondientes unidades de medida en el marco del Sistema métrico Legal de Argentina y, en la segunda parte, en las articulaciones entre lo aritmético y lo algebraico y la iniciación en las expresiones algebraicas y las ecuaciones.

Se advierte con Andrea que se promueven diferentes relaciones de los alumnos con las conceptualizaciones y, en coincidencia con el caso de Mailén, que las relaciones que cada residente va proponiendo desde el inicio, se mantienen en las experiencias de un tema como en las del otro.

Analizar las propuestas de Andrea hace pensar, en todo el recorrido, en una planificación correcta: organizada, completa, prolija y formal. Incluye los fundamentos, la descripción del curso y tema, los objetivos, las consideraciones acerca de las ideas previas, los registros de las carpetas, una descripción de los materiales necesarios para cada experiencia, algunas referencias a la institución, posibles respuestas de los alumnos, organización de los grupos en la dinámica de cada actividad. En fin, se presenta como un ejemplo de buen plan implementado y documentado. Las situaciones problemáticas están totalmente cuidadas, en los momentos que se utilizan, en cada enunciado, en cada apartado y en lo que se pretende lograr. Posicionada en todo momento en que los alumnos trabajen, establezcan relaciones, dimensionen, puedan advertir diferenciaciones entre conceptos, construyan equivalencias, en fin, que se logren experiencias significativas, desde redes semánticas, y en las lógicas de la disciplina (avance sobre la interiorización y la construcción). Las institucionalizaciones son formales, no incorporan expresiones de los alumnos y quedan expresadas aludiendo a recordar fórmulas (regreso a la reproducción). Las asociaciones significativas que se establecen están siempre originadas desde los ejemplos de la profesora (exterioridad). Se puede advertir la preocupación de cuidar la enseñanza y de cuidar el aprendizaje con una propuesta que parece caracterizar prácticas de anticipación antes que de control. Y, aunque aparecen muchas señales de buenas prácticas, no se alcanzan a generar los espacios para la participación desde lo particular o desde las posibilidades más creativas de los alumnos.

El saber es cuidado, detallado, académico, y externo (construcción desde la exterioridad). El docente apela a situaciones que movilizan a resolver, a construir significado, aunque no desde propuestas particulares de los alumnos. Son significados dados por la profesora, contenidos como las prescripciones dictan (construcción, reproducción y exterioridad).

El alumno participa en procesos de elaboración y reflexión, participación restringida, situaciones problemáticas de únicas resoluciones, eficiencia en el seguimiento de los pasos para ir construyendo (tensión entre construcción y reproducción, interioridad restringida).

La propuesta constituye una situación inicial para construir, aunque luego se torna más rutinaria. Las situaciones son muy cuidadas para ir acompañando buenas elaboraciones. No se presentan problemas abiertos, que habiliten soluciones o estrategias particularizadas. Las evaluaciones son individuales, escritas, al final (tensión entre construcción y reproducción).

El caso de Leo

Leo: Y los que buscaban alguno que estuviera en la tabla y después se manejaban, para arriba o para abajo. La mayoría con el 76...

E: Ah! ¿no con el 80?

Leo: No, con el 76 o con el que sea antes

E: Aparecía más el 76 que el 80

Leo: Yo también pensaba que aparecería más que el 80 pero...como que con el 80 les quedaba la sensación de que no podían controlar si les faltaba alguno de contar.

E: De alguna manera el 76 les daba más seguridad.

Leo: Sí. Entonces después las preguntas mías eran: ¿será el 77 múltiplo?, ¿cómo hago para no escribir todos los de la tabla anteriores? o, lo más fuerte, ¿cómo hago para no hacer la división? No quiero empezar del 4, ¿de cuál puedo empezar? Del 40, por ejemplo, pero falta bastante para llegar al 76.

Figura 3. *La Propuesta de Leo*

La propuesta de Leo desde la primera lectura permitía dejar ver un tratamiento de las situaciones mayoritariamente en contextos intramatemáticos, en un curso con estudiantes de primer año -niños de 12 años-, de conceptualizaciones relacionadas a la teoría de números focalizadas en la divisibilidad.

El residente se para con autonomía en las decisiones de la propuesta, desde las actividades iniciales -no desconocidas en las bibliografías que circulan en nuestros entornos, simplemente no habituales en el comienzo con múltiplos y divisores- pasando por las argumentaciones, nuevas construcciones de criterios de divisibilidad y hasta llegar al juego de la oca del resto -de elaboración propia- que resulta el recurso para seguir reflexionando y para tener una evaluación (autonomía docente para la propuesta). Cada decisión abre un juego de posibilidades a los alumnos. Leo -ahora profesor- está atento a las respuestas de los chicos y va terminando de definir la propuesta a partir de eso (movilidad, desplazamiento).

La propuesta no es lineal; no formula un único orden de complejidad creciente y una organización unidireccional prefijada de los conceptos. En los diferentes días de clase se va priorizando la complejidad en la que se hace foco y, a medida que se va tejiendo la trama, con diferentes intensidades, se va institucionalizando (construcción). La preocupación del residente se manifiesta depositada en los movimientos a partir de las respuestas de los chicos. Sin dejar de lado sus propósitos, la problematización, los argumentos, las lógicas de los/as estudiantes son la brújula, y el plan se desarrolla a sabiendas de la movilidad. El saber científico y el saber escolar tienen configuraciones epistemológicas diferentes. Las cuestiones lógicamente equivalentes no resultan cognitivamente equivalentes (los múltiplos de, o los divisibles por) (resignificación-innovación). Incorpora problemas a partir de las necesidades que se van conformando en el grupo, se mantiene permeable a las respuestas que se van elaborando, no demanda que todos/as lleguen a las mismas construcciones. Se trata de una concepción de aprendizaje que incluye todos los movimientos que se puedan registrar en el juego de aproximaciones cada vez más cercanas al saber disciplinar. Negocia, pone en suspenso la formalidad, mientras se construyen las aproximaciones. Entiende que el juego debe tener preparado un contexto de producción, que los sentidos están en la reflexión que se puede provocar y que la evaluación se puede hacer a partir de elaboraciones particulares con ese recurso (construcción e innovación). Una concepción de problemas orienta la práctica: aquella por la cual un problema lo es si conflictúa cognitivamente, si problematiza ideas o concepciones instaladas e internalizadas, si desequilibra para generar nuevas necesidades. La opción está claramente en intentar la construcción conceptual. La institucionalización que no descuida desde el rol docente y que no exige en lenguaje formalizado, incluye las precisiones y las necesidades que surgieron en ese grupo, fraccionada desde una intencionalidad educativa clara y no resignada (construcción-innovación). La secuencia de preguntas, pensada en las intervenciones docentes, en muchos tramos se iba generando en el proceso, lo cual no significa que fuera improvisada (innovación).

El saber circula, en elaboración, a partir de necesidades. Un saber escolar que se distingue del saber científico, pero no lo descuida (desplazamiento).
El docente: Autonomía manifiesta en las decisiones, búsqueda constante de nuevas relaciones, relaciones inéditas. Se apropia de lugares docentes mientras las/os alumnas/os construyen significados (interioridad e innovación).

El alumno trabaja en la producción, participa en el grupo desde construcciones particulares (construcción, interioridad y desplazamiento).

La propuesta apuesta a la producción todo el tiempo: de exploraciones, argumentaciones, conjeturas. Se invita a la elaboración de relaciones creativas (innovación).

A modo de conclusiones

El estudio permite advertir diferencias sustanciales entre las vinculaciones con el saber como estudiantes y como futuros docentes, aunque se trate de manifestaciones en un tiempo sincrónico. Como alumnos en formación, resuelven problemas abiertos, reconocen la importancia de los aportes particulares, describen con fuerza las virtualidades de la construcción conceptual. En las prácticas de aula mayoritariamente no lo proponen. En el rol de profesores resuelven con evaluaciones de pruebas objetivas, encapsulamientos curriculares, aplicación de fórmulas sin sentido, mecánicas de pistas y pasos, aceptación de clasificaciones sin discusión.

Por otra parte, el trabajo de análisis de casos de la segunda parte de este estudio permite ratificar los cuatro indicadores y la descripción de diferentes registros cromáticos al interior de cada indicador. Ese era el objetivo de esta segunda parte del estudio, caracterizar los indicadores que permitieran configurar la descripción de cada una de las cuatro dimensiones relacionales.

Ahora bien, no se pudo dejar de advertir la fuerza con que cada residente termina significando un referente de particulares relaciones con el saber, que se registran con recurrencia en las diferentes actuaciones de la primera y segunda residencia. Entonces regresamos a la necesaria referencia de Blanchard Laville y el análisis de los procesos de contratransferencia. La investigadora plantea una hipótesis por la cual “en el vínculo que el docente establecerá con los alumnos para relacionarlos con el saber revelará su propia relación con el saber que enseña” (Blanchard Laville, 2004, p. 81), a la vez que se fragua una especie de firma profesional “que es precisamente la manera en la que él se relaciona con el saber y el lugar, o los lugares en los que pone al alumno, y esta organización topológica singular pertenece sólo al docente" (p. 62).

Entonces nuestras conclusiones provisionales del análisis de la primera etapa, en que las lógicas con el saber como estudiantes no son las relaciones que se proponen cuando actúan bajo el rol de profesores, vienen a reforzar que son marcas del juego de mediaciones que promueve el docente de la formación en esa cátedra. Luego, lo que los residentes proponen para el aula, diferente, revelaría sus propias relaciones.

Por otra parte, de la segunda parte del estudio, las lógicas identificadas en las distintas experiencias y momentos, desarrolladas por un mismo residente en el rol de profesor, permiten describir esas firmas profesionales singulares que se sostienen en diferentes prácticas y señalarían rasgos de sus particulares relaciones con el saber.

Entonces, en un análisis como en el otro, en el trabajo realizado por el docente y en el lugar que pone a los alumnos en esa tarea, se puede analizar su propia relación con el saber, la puesta en escena de sus propias mediaciones. Esto tiene muchas implicaciones en la formación de profesorado, en el juego de anticipaciones y en las actuaciones mismas de las prácticas profesionales, a la hora de analizar esas atmósferas transferenciales que se generan. Como expresa Nuria Planas (2011), las distancias entre lo que se piensa que se hace y lo que se piensa que se debería hacer; y agregaríamos, entre lo que se piensa que se debería enseñar, lo que se piensa que se enseña y lo que se enseña y se aprende, siguen aportándonos señales que resulta indispensable reconocer.

Referencias bibliográficas

Blanchard Laville, C. (2004). *Saber y relación pedagógica.* Buenos Aires: UBA y Ediciones Novedades Educativas.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 89- 113). *Santander: SEIEM.*

Cannellotto, A. (2013). *Otra relación con el saber: reflexiones sobre un hacer posible*. Buenos Aires: UNIPE.

Charlot, B. (2008a). *La relación con el saber. Elementos para una teoría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Charlot, B. (2008b). *La relación con el saber, formación de maestros y profesores, educación y globalización*. Montevideo: Trilce.

Mastache, A. (2010). Efectos formativos de la modalidad residencial e intensiva. *Praxis Educativa 14 (XIV)*, 76-84.

Mastache, A. (2011). Efectos formativos de la modalidad residencial e intensiva. Segunda parte. *Praxis Educativa 15 (XV)*, 118-126.

Planas, N. (2011) Buenas Prácticas en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J.M. Goñi, (Coord), *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas* (pp. 57-160), Barcelona: GRAÓ.

Sanjurjo, L. (2009). *Los Dispositivos para la formación en las prácticas profesionales.* Rosario: Homo Sapiens.

Vercellino, S. (2015). Revisión bibliográfica sobre la 'relación con el saber'. Desplazamientos teóricos y posibilidades para el análisis psicopedagógico de los aprendizajes escolares. *Revista Electrónica Educare,* 19 (2), 53-82.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

PROPUESTA TECNO-PEDAGÓGICA MATEMÁTICA CON VOLDI Y SU EXPLORACIÓN EN EL SEGUNDO GRADO DE LA ESCUELA PRIMARIA

MATHEMATICAL PEDAGOGIC PROPOSAL WITH VOLDI TECHNOLOGY AND ITS IMPLEMENTATION IN THE SECOND GRADE OF PRIMARY SCHOOL

Jesus David Leiro Pacheco, Luis Alberto Peña Rosario, Oliver Texta Mongoy
Universidad Hipócrates. Acapulco, Guerrero (México)
david_leiro-p@hotmail.com, alberto-l2011@hotmail.com, matematico22@hotmail.com

Resumen

Esta propuesta tiene como objetivo coadyuvar en la educación básica (concretamente en el segundo grado de educación primaria) por medio de la aplicación tecnológica en el área del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática y en específico de la geometría. Dotando de esta manera al docente de una herramienta que posibilite el fortalecimiento de un entorno educativo didáctico y lúdico. Lo anterior, debido a lo evidenciado en diferentes fuentes que hacen referencia al bajo desempeño de México en el campo de la matemática.
El presente trabajo se desarrolló bajo una metodología cualitativa, puesto que se buscó interpretar las reacciones de los implicados en la exploración de la propuesta dentro de un entorno educativo, mostrando con ello que la tecnología y la matemática puede fusionarse en beneficio del aprendizaje de los alumnos de primaria.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, geometría, propuesta, tecnología

Abstract

This proposal aims to contribute to basic education (specifically in the second grade of primary education) by using technology in the mathematics teaching-learning process, specifically in geometry. Thus, the teacher is provided with a tool that enables the strengthening of a didactic and playful educational environment. This proposal emerged due to what has been evidenced in different sources that refer to the poor performance in the field of mathematics in Mexico. The present work was developed by using a qualitative methodology, since it sought to interpret the reactions of those engaged in the implementation of the proposal within an educational environment, thereby, showing that technology and mathematics can be merged for the benefit of primary school students' learning.

Key words: teaching, learning, geometry, proposal, didactic, technology

Introducción

De acuerdo con los Resultados Clave de PISA (2015), el desempeño que México ha obtenido en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la matemática se encuentra en los niveles 0 y 1 de los 6 niveles de desempeño que este organismo establece para el estudio de esta área del conocimiento. De igual modo, otros referentes reafirman esta situación, tal es el caso del INEE con los resultados de la prueba PLANEA (2018) a nivel nacional define que el 59% de los estudiantes de educación básica poseen un dominio insuficiente en este campo de estudio.

La educación básica es una de las etapas fundamentales dentro de la educación de los alumnos, tal y como se resalta en el documento oficial Aprendizajes Clave para la Educación Integral (ACEI-SEP, 2017) que es la denominación para el nuevo Plan y Programas de Estudio para Educación Básica en México, cuyo contenido resalta que, a lo largo de los primeros dos grados de la educación primaria, los estudiantes afrontan el reto crucial de aprender a leer y a escribir, así como también de dar los primeros pasos en el mundo de la matemática escolar. Su aprendizaje les permite la capacidad de razonar y resolver problemas provenientes de su acontecer inmediato de modo sencillo.

De igual modo, se establece que, para su estudio, las matemáticas se organizan en tres ejes temáticos. Uno de ellos denominado forma, espacio y medida (estudio de la geometría escolar) tiene una relación sustancial en el desarrollo del pensamiento de los alumnos, su estudio permite a ellos no solamente conocer los cuerpos geométricos y la resolución de problemas en ese rubro; sino que logra también, el desarrollo de su capacidad lógica y de razonamiento, dos de las cualidades más importantes para la vida futura de los mismos (Rizo, 1989).

En el Nuevo Modelo Educativo (NME, 2017), se explicita que es necesaria la creación de ambientes propicios para el aprendizaje a través de diversos métodos, técnicas y formas de enseñanza, una de ellas es el uso de la tecnología tal como resalta el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2015), al indicar que es significativo que los alumnos y docentes tengan acceso regular a herramientas tecnológicas dentro del campo educativo matemático, como vías del fortalecimiento del mismo. Cada uno de los aspectos mencionados han permitido identificar el surgimiento y la necesidad de coadyuvar a la solución del siguiente *problema de investigación:*

Existe una carencia sustancial del uso alternativo de herramientas tecnológicas aplicadas en el segundo grado de educación primaria que propicien el surgimiento de nuevos métodos y técnicas de enseñanza aprendizaje y que permitan al alumno inmiscuirse favorablemente y de forma agradable en el mundo de las matemáticas, lo cual incide desfavorablemente y en gran medida, en el bajo nivel educativo de México, en esta área de estudio. Por tales motivos la investigación gira entorno a:

¿Cómo elaborar y llevar a escena la propuesta tecno-pedagógica matemática con Voldi diseñada bajo la concepción de un enfoque dinámico, para el segundo grado de la escuela primaria?

Por tal, el objeto de estudio de esta investigación se centra en la aplicación de nuevas herramientas tecnológicas que posibiliten el reforzamiento del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática escolar. Por ello, se pretende: “Elaborar y llevar a escena la propuesta tecno-pedagógica matemática con Voldi, diseñada bajo la concepción de un enfoque dinámico, para el segundo año de la escuela primaria”.

Tecnología educativa como fundamento teórico de la propuesta

La propuesta se inscribe a los fundamentos teóricos de la Tecnología Educativa (TE) cuya evolución e implicancia en el ámbito de la enseñanza, se remonta en la década de 1950, en Estados Unidos tal como lo describen Angulo, Vales, Acosta y García (2015:22) que resaltan su origen durante el surgimiento y estudio del problema de las diferencias individuales en el aprendizaje, lo que conllevó a indagar la posibilidad de desarrollar dispositivos de auto-enseñanza en el entrenamiento militar.

No obstante, De Pablos (2009) citado por Angulo et al. (2015:22) hace hincapié que los primeros antecedentes que se tienen de la TE se encuentran durante las tres primeras décadas del siglo XX, por medio del surgimiento de dispositivo audiovisuales, como, por ejemplo, aplicaciones del cine sonoro con una finalidad instructiva, que repercutieron en el desarrollo del aprendizaje audiovisual creándose para esta finalidad medios educativos.

Lujan y Salas (2009:3) resaltan que uno de los máximos represente e investigadores de la TE fue B. F. Skinner quien planteó en 1954 la posibilidad de la "tecnificación de la enseñanza" por medio del uso de máquinas. De igual manera se identifica a Skinner como un psicólogo experimental con un amplio recorrido en investigación sobre el aprendizaje, siendo uno de los principales difusores del enfoque conductista en el aula. Causante del impulso en el interés por los dispositivos de enseñar, y cuyas aportaciones robustecieron significativamente el campo de la TE, a través de la construcción de máquinas para la enseñanza y el desarrollo de elementos teóricos metodológicos, que originaron el nacimiento de la enseñanza programada (Angulo et al., 2015:23).

El estudio realizado entre 1990 y 1995 por la Software Publishers Association, que resume lo abarcado en diversos materiales de investigación sobre los usos variados de la tecnología en la educación, representa tal como lo describe De Pablos-Posn (2003:7) un argumento sustancial sobre las posibles aplicaciones de la TE en el campo educativo, dicho autor resalta los siguientes resultados obtenidos del análisis elaborado:

1. La TE, representa un efecto positivo e importante en el rendimiento del alumno, en todas las áreas, desde el preescolar hasta la educación superior, así como también en estudiantes con necesidades especiales.

    - En este sentido esta propuesta a través del uso de sus características tecnológicas facilita un aprendizaje y enseñanza dinámica pretendiendo con ello acrecentar los conocimientos de los estudiantes en la matemática escolar y especialmente en la geometría.

2. La TE posee repercusiones positivas en la actitud, motivación y autoconfianza de los escolares, en relación con el aprendizaje.

    - Asumiendo lo anterior, este trabajo hace énfasis en motivar al alumno a inmiscuirse en el campo de la matemática de forma agradable, procurando reducir la matemafobia (Gómez, 1998) del aula de clases, aunado a la encomienda de los autores de esta investigación de facilitar el cumplimiento del principio No.5 del NME (2017:88): "Dar un fuerte peso a la motivación intrínseca del estudiante".

3. El impacto de la TE depende de ciertos factores como: Población estudiantil específica, diseño del software y cooperación del profesor.

    - Tomando en cuenta el resultado anterior, la propuesta delimita su concepción y desarrollo para su exploración en el segundo grado de educación primaria; proporciona un programa integral (Aprendiendo con Voldi) desarrollado bajo estándares de la ingeniería de software para su correcto funcionamiento y con una temática infantil, geométrica e intuitiva; la herramienta tecnológica elaborada a través de esta investigación es un material de apoyo para el docente y un acompañante que permitirá a este, aplicar la tecnología como un medio facilitador de la enseñanza aprendizaje de la matemática.

La TE se ha ido desarrollando bajo diversas guías y conceptualizaciones a lo largo de los años, desde intereses político-militares, pasando por la psicología del aprendizaje, el enfoque sistemático y el desarrollo de los medios de comunicación, lo cual ha permitido identificar algunas líneas o enfoques de investigación, dentro de los cuales se resalta el enfoque de los medios, que representa básicamente el uso de diversos medios tecnológicos en la educación (Lujan y Salas, 2009:7). Y tal como lo explicitan Bartolomé y Sancho (1993:40) al hacer un análisis en artículos, libros e informes de investigación relacionadas con la TE, el uso de los medios es posiblemente lo más resaltante dentro de esta. Los autores citados con anterioridad resaltan tres perspectivas o elementos de estudio dentro de este enfoque:

- Hardware: equipos aplicados en la educación, los materiales físicos.
- Software: aplicaciones de los medios, es decir los programas.
- Coursware: diseños, formas, modos didácticos de los medios tecnológicos, es decir las técnicas de aplicación. En palabras de Bartolomé y Sancho (1993:46) "…el modo en cómo el medio es utilizado".

La investigación asume el enfoque de los medios para su desarrollo y concepción, a través de los aspectos tecnológicos que la conforman (hardware y software: robot Voldi) y de igual manera se ocupa de las formas en cómo debe ser utilizada y ejecutada la propuesta (operatividad y sistema de actividades). En lo que respecta a las definiciones acerca la TE, diversos autores la han conceptualizado de formas variadas con el transcurrir de los años.

Algunos de estos conceptos se describen a continuación, por orden cronológico, obtenidos a partir de autores citados por Luján y Salas (2009) y Angulo et al. (2015).

En relación con las descripciones sobre TE, de autores citados por Luján y Salas (2009) se resaltan a: Skinner (1960), quien define el origen de la TE como la enseñanza programada, la cual consiste en un método de instrucción empleado a través de máquinas, computadoras o cualquier recurso didáctico que logre que el estudiante aprenda a su propio ritmo; en palabras de Castañeda (1978) "…es un objeto, un recurso instruccional que proporciona al alumno una experiencia indirecta de la realidad, y que implica tanto la organización didáctica del mensaje que se desea comunicar como el equipo técnico necesario para materializar este mensaje"; la UNESCO (1986) se refiere a la TE como el uso de todo sistema, material o herramienta que permita reforzar la enseñanza aprendizaje, a través de recursos técnicos.

De autores citados por Angulo et al. (2015) se remarcan las siguientes concepciones: Salas (2002) señaliza que la TE es una herramienta para enseñar que se puede aplicar en la educación de forma didáctica; para Escamilla (2003) la TE es concebida como los medios tecnológicos tangibles y no tangibles que pueden ser usados en la educación; Cabrero (2003) plantea la TE como el diseño, utilización y evaluación de las tecnologías implementadas para actividades educativas.

Aunado a lo anterior, Luján y Salas (2009:26) exponen que el concepto de TE incluye teorías de aprendizaje, enfoque sistemático y el desarrollo de medios tecnológicos aplicados en el ámbito educativo. Asimismo, Area (2009:20) explicita que la TE debe reconceptualizarse como aquel espacio pedagógico cuyo objeto de estudio son los materiales y medios tecnológicos que permitan el conocimiento de diversos contextos en cualquier sector con fines educativos.

Este trabajo investigativo asume que la TE además de centrar su objeto de estudio en materiales tecnológicos educativos también aborda las formas en cómo se utilizan estas herramientas para estimular la enseñanza aprendizaje en cualquier ámbito de la educación. Con relación a ello, la propuesta utiliza como un aspecto relevante la motivación en el alumno con la finalidad de acrecentar el interés en este, por aprender matemáticas.

En la actualidad se pueden identificar 6 líneas de trabajo de la TE (Area, 2009:22). La propuesta se inscribe dentro de la línea de trabajo: *Desarrollo de Materiales Didácticos y Software Educativo*, a través de la cual se sustenta la concepción del sistema de actividades y cada una de las características tecnológicas utilizadas para la conformación del robot Voldi, que se describe más adelante.

Metodología/desarrollo

Uno de los aspectos más preponderantes que conforma este trabajo es el diseño curricular de las actividades propuestas para su realización con el robot educativo Voldi en el segundo grado de primaria. Las cuales están elaboradas a partir de lo especificado por la Secretaria de Educación Pública, en cuanto a las orientaciones didácticas que se deben cumplir dentro del eje temático figuras y cuerpos geométricos, donde se establece que estas deberán desarrollarse propiciando que los estudiantes identifiquen el número de lados de las figuras, si son rectos o curvos y el número de vértices (ACEI-SEP, 2017:247).

Otra de las situaciones mencionadas es la correspondiente al vocabulario geométrico a utilizar, si bien es cierto es fundamental y debe aparecer de forma tenue en las consignas geométricas propuestas, no es un objetivo que los alumnos memoricen los nombres de las figuras, sino el de poner en práctica sus saberes para la resolución de cada actividad (ídem).

Además de lo anterior, para la creación del material didáctico se tomó en cuenta los contenidos establecidos en el Libro de Texto de Matemáticas para el Segundo Grado de Primaria elaborado por la Secretaria de Educación Pública (LTMSG-SEP, 2018), cuya estructura temática se organiza a través de tres bloques de estudio, donde la presencia del eje temático forma, espacio y medida; y de su temática figuras y cuerpos geométricos, se dispone en dos apartados dentro de cada bloque, abarcándose situaciones para abordar el análisis de figuras geométricas y otras con la finalidad que los estudiantes se inicien en la exploración de cuerpos geométricos (prismas).

Básicamente las actividades geométricas definidas en LTMSG-SEP (2018) tienen como objetivo identificar, describir y construir figuras, así como también algunas configuraciones geométricas. La mayor parte de la geometría recae en temáticas que abordan situaciones sobre figuras de dos dimensiones (4 temas de estudio, incluyendo mosaicos), abarcándose solo dos comprendidos introductorios de prismas, dispuestos en los bloques I (cuerpos geométricos) y II (más cuerpos geométricos). Contexto por el cual, la propuesta para el desarrollo del sistema de actividades se alinea a los contenidos acerca de figuras geométricas.

Además de lo ya mencionado, para el diseño de las encomiendas propuestas se consideraron algunos criterios fundamentales:

- Se han ideado y clasificado tres tipos de encomiendas con base a lo estipulado en las orientaciones didácticas del Plan y Programa de Estudio de Segundo Grado de Educación Primaria, las primeras de estas de: identificar figuras, las segundas de descripción y las últimas de construir.
- Su concepción se realizó partiendo del echo que los estudiantes del grado especificado se inician en la exploración y análisis de las figuras geométricas (ACEI-SEP, 2017:247), por lo que deberían situarse dentro del nivel 1 de razonamiento del modelo Van Hiele, denominado como reconocimiento o descripción, que indica que los alumnos perciben los objetos en su totalidad y como unidades; describen las figuras por su aspecto físico y pueden clasificarlos en base a semejanzas o diferencias físicas generales entre ellas, es decir son capaces de identificar un cuadrado de forma visual pero no son capaces de saber cuestiones más profundas de este (López y García, 2008:69).
- Siguiendo la recomendación sobre el uso de tangram y rompecabezas geométricos, las actividades propuestas utilizan el material didáctico proporcionado en LTMSG-SEP (2018) para su solución, permitiendo con esto acrecentar las habilidades visuales en el estudiante sobre las figuras geométricas, esto último en relación con el hecho de que la geometría es una disciplina eminentemente visual (López y García, 2008:48).
- Para el planteamiento de las encomiendas para identificar y describir figuras, se acataron las especificaciones plasmadas en las orientaciones didácticas sobre las formas de abordar a estas; haciendo uso del juego, es decir a modo de adivinanzas (LTMSG-SEP,2018:248), lo cual coincide con lo explicitado

por López y García (2018:55) quienes además señalan que lo anterior contribuye a desarrollar las habilidades de comunicación en el alumno, lo que les permite la capacidad de interpretar, entender y comunicar información geométrica.

- El diseño de cada actividad se inscribió a las características tecnológicas utilizadas, tales como el reconocimiento de voz y las notas de voz del robot educativo. Recalcando que cada encomienda funciona como diálogos de este.

Las actividades diseñadas del tipo identificar y describir, tiene por objetivo que los escolares indaguen y aprendan las características comunes de las figuras geométricas, con la exploración de aquellas que tengan algún lado curvo o solo estén conformadas por trazos rectos, lo que les permite agruparlas según estas características.

Asimismo, les ayudará a potenciar su razonamiento en base a como se clasifican estas por el número de sus lados. En lo que respecta al tipo de actividad sobre la construcción de figuras, podrán vivenciar de forma práctica y exploratoria la conformación de alguna de estas, al unir, por ejemplo, triángulos y rectángulos para elaborar un hexágono o trapecio. Situación que les proporcionará la capacidad de acrecentar sus habilidades lógicas y deductivas.

En la tabla 1 se muestra de forma detallada los objetivos y aprendizajes de cada encomienda diseñada en base a la estructura general del sistema de actividades antes descrito.

Tabla 1. *Objetivos de las actividades geométricas propuestas (Elaboración propia).*

Actividad	Objetivo
No.1	Explorar y conocer algunas características del cuadrado.
No.2	Agrupar y clasificar las figuras según el tipo de lados que las conforman (rectos o curvos).
No.3	Explorar, conocer e identificar las figuras por el número de lados que poseen.
No.4	Iniciar la construcción y exploración de figuras a partir de la unión entre otras.
No.5	Desarrollar las habilidades del trazo de figuras con instrumentos geométricos e identificar las figuras creadas.
No.6	Comprender la comunicación geométrica dada por Voldi, discriminando figuras que no cumplan con características establecidas.

Con la finalidad de complementar los elementos educativos matemáticos descritos y generar un ambiente dinámico e interactivo para la enseñanza aprendizaje de este campo en el nivel referido, se seleccionaron diversos elementos tecnológicos, entre ellos el hardware de la propuesta conformado por dispositivos programables, como lo son: dos placas arduino, dos matrices leds 8x8 (ojos de Voldi), dos servomotores SG90(cuello articulado inteligente del robot), una cámara web para captar los rostros y un mando a distancia infrarrojo.

Tomando en cuenta la definición utilizada por Salido (2009) que de acuerdo con la Asociación Americana de Robótica (RIA, por sus siglas en inglés), un robot es un manipulador reprogramable, multifuncional, previsto de un control automático que puede estar fijo en un sitio o moverse, y que está diseñado para mover piezas, herramientas o dispositivos especiales, lo cual le permite realizar diversas tareas o acciones.

Considerando como referencia lo anterior, es que se concibe a Voldi como un robot educativo para el trabajo en el campo formativo del pensamiento matemático, dentro del eje temático forma, espacio y medida, y en específico, en el tema figuras geométricas (ver imagen No.1), dotado de la capacidad de captar y seguir los rostros de los escolares. En lo que respecta al software de la propuesta, se conforma por una aplicación integral diseñada bajo el enfoque de la geometría.

La aplicación requiere de la implementación de una base de datos construida que permite almacenar las diversas actividades geométricas que serán realizadas por los alumnos del primer ciclo de la educación primaria. Además, otra de las características de funcionamiento con la que cuenta la propuesta, es el reconocimiento de voz como aspecto relevante con el que cuenta Voldi para operar y un mando a distancia para controlar a este y al software. Logrando con esto conformar integralmente el programa geométrico interactivo (ver imagen No.2).

Con lo anterior, se asume el objeto de estudio de la teoría abordada por este trabajo (Tecnología Educativa) en relación con la forma en cómo se utilizan los elementos educativos en fusión con características tecnológicas para la estimulación y reforzamiento del aprendizaje en aula de clases (en este caso para abordar temas de la geometría).

Imagen No. 2. *Robot educativo Voldi (Imagen de captura propia).*

Imagen No. 1. *Software "Aprendiendo con Voldi" (Imagen de captura propia).*

Se pretende que Voldi con base a las bondades tecnológicas y al sistema de actividades diseñado, opere de la siguiente forma:

1. El alumno se sitúa al frente de él para iniciar la interacción, de esta manera Voldi podrá detectar su rostro, y dar seguimiento a éste, con base en los movimientos que realice el alumno.
2. En seguida, todo el sistema de la herramienta tecno-pedagógica permite a Voldi utilizar el reconocimiento de voz con la finalidad de emprender el sistema de actividades diseñadas, las cuales se pueden manipular a través de los comandos de voz ofrecidos por el propio software, tanto para el profesor como para el alumno. En el caso del primero: (1) Voldi actividades: (2) Voldi pregunta; (3) Voldi recursos; (4) Voldi ayuda. Y para el caso de los alumnos se cuenta con tres opciones para interactuar con las encomiendas definidas, en las cuales, una y solamente una, será la respuesta correcta: (1) Voldi opción uno; (2) Voldi opción dos; (3) Voldi opción tres.

Análisis de resultados

Para la exploración de la herramienta tecno-pedagógica se planeó una puesta en escena con la finalidad de evaluar el diseño y operatividad de esta en un entorno real educativo, que permitiera la capacidad de someter a una prueba profunda todas las funcionalidades con las que cuenta la propuesta, desde la estructura de cada actividad geométrica, los contenidos de las mismas; y el accionar de cada característica tecnológica con la que cuenta el sistema. Dicha situación se conformó de cuatro momentos importantes, mismos que se detallan a continuación:

La muestra de estudio para la ejecución de la puesta en escena se obtuvo con el grupo de segundo de grado del turno vespertino de la Escuela Primaria Federal "Revolución Social", ubicada en la colonia 20 de noviembre de Acapulco, Guerrero, México. Conformado por 10 alumnos en su totalidad. Sin embargo, durante la exploración de esta estuvieron presentes 9 de ellos. Así también, se contó con la asistencia del directo de la institución, así como con la profesora del grupo respectivo.

El primer momento, consistió en la explicación detallada a la docente sobre los objetivos y pretensiones de la propuesta dentro del aula de clases. Resaltándose de igual manera los contenidos educativos de las actividades geométricas y las formas concebidas para abordar cada una de estas a través del software desarrollado. Asimismo, se expuso ante ella la dinámica respecto al seguimiento de rostros del robot Voldi y las diversas maneras de operar el sistema, desde los comandos de voz, el manejo a través del mouse hasta la utilidad del mando a distancia.

El segundo momento tuvo como objetivo conocer a los estudiantes y generar un ambiente de confianza e interacción que permitiera ejecutar la prueba piloto bajo un entorno adecuado. Lo anterior, a través de una charla introductoria donde se explicaron situaciones referentes a la matemática, el uso de la tecnología, los robots educativos, las formas en cómo se interactúa con Voldi, todo desde una perspectiva lúdica para su fácil comprensión. Contando siempre con la ayuda y disposición de la profesora de grupo. Asimismo, se hicieron todos los preparativos necesarios antes de la exploración de la herramienta, se organizaron los equipos de trabajo para la realización de las actividades diseñadas, con la finalidad de promover un ambiente colaborativo e inclusivo entre ellos.

El tercer momento consistió en la ejecución de la prueba piloto. Iniciándose con la presentación de Voldi a los alumnos por medio de diálogos de bienvenida. Seguido, se inició la ejecución del sistema de actividades por parte del robot, abordándose por su nivel de profundidad de menor a mayor. Donde los escolares vivenciaron el ambiente generado por la propuesta a través de la interacción directa con el robot y todas sus funcionalidades, como el seguimiento de rostros cuando ellos se aproximaban o entraban a su rango o radio longitudinal de visión. Así también, cuando era hora de responder algunos de los ejercicios mediante el mando a distancia o por medio de los comandos de voz, y la comunicación con Voldi al dedicarles un mensaje de ánimo por el trabajo realizado (ver imagen No.3).

Imagen No. 3. *Exploración de la propuesta: prueba piloto (Imagen de captura propia).*

El cuarto momento que culminó con la puesta en escena, consistió en la aplicación de instrumentos elaborados para la recolección de datos cualitativos relacionados con la experiencia vivenciada en el aula de clases, para después obtener por medio del análisis de estos, los diversos posicionamientos sobre el estatus de aceptación de la propuesta por parte de los estudiantes y docentes implicados. Para ello se decidió utilizar una encuesta debido a que proporciona la capacidad de obtener de forma viable determinados datos a través de cada ítem definido (Gómez, 2012:58).

A continuación, se resalta el análisis derivado de las respuestas emitidas por los actores involucrados en la experiencia:

1. Tanto la profesora como el director se mostraron *absolutamente de acuerdo* (rango máximo de valoración según la escala Likert concebida en el instrumento) sobre que, el diseño curricular del sistema de actividades establecido en la propuesta se circunscribe en los contenidos temáticos del libro de texto de matemáticas de segundo grado.
2. Ambos se posicionaron *absolutamente de acuerdo* en relación con que las encomiendas elaboradas coadyuvan a retroalimentar los conocimientos que los escolares ya poseen sobre la geometría.
3. En cuanto a los enunciados e instrucciones de las actividades, ambos se mostraron *absolutamente de acuerdo* respecto a que sí son adecuadas y de fácil comprensión para los estudiantes.
4. Respecto a su sentir sobre si por medio de la realización de las actividades, los escolares refuerzan sus habilidades de razonamiento y al mismo tiempo les permite poner en práctica aquellos conocimientos que ya poseen. Se mantuvieron *absolutamente de acuerdo.*
5. Sobre la aceptación del software “Aprendiendo con Voldi”, ambos se mostraron *absolutamente de acuerdo* con relación a que el funcionamiento de este es rápido y fácil de operar.
6. De igual manera, estuvieron *absolutamente de acuerdo* en que los comandos de voz definidos en la gramática del software que permiten interactuar con Voldi son adecuados en el sentido de ser fáciles de manejar de acuerdo a su nivel educativo.
7. Una de las partes fundamentales durante el desarrollo de Aprendiendo con Voldi, fue la concepción de la interfaz, es decir; la definición de los paneles de operatividad, los colores y la temática geométrica establecida en su estructura. En este sentido ambos, se mostraron *absolutamente de acuerdo* en que el diseño concebido para el programa es adecuado y genera la atención de los estudiantes.
8. En lo que respecta a la forma en cómo se accede al sistema de actividades en el software, tanto la profesora como el director se posicionaron *absolutamente de acuerdo* en que se da sin mayores complicaciones y de forma intuitiva.
9. Al momento de evaluar si la claridad y fuerza de la voz de Voldi eran adecuadas, la docente se mostró *moderadamente de acuerdo*. En lo que respecta al directivo, se mostró *absolutamente de acuerdo* ante dicha situación. Es importante hacer mención que el nivel de volumen se vio afectado por el ruido externo al aula, ya que no se contó con un espacio cerrado para la puesta en escena, lo cual da luz, para prever en las próximas ejecuciones de Voldi con otras muestras escolares.
10. Al evaluar si a través de los diálogos de Voldi se generaba en el estudiante motivación y deseo de emprender el desarrollo de cada actividad. Ambos estuvieron *absolutamente de acuerdo* sobre este contexto.
11. Respecto a si el ambiente generado por la propuesta facilita una enseñanza aprendizaje lúdica y dinámica, la profesora se mostró *absolutamente de acuerdo* ante dicha situación. Por su parte el director de la primaria recomendó hacer referencia al aprendizaje para la valoración de este ítem.
12. De igual manera ambos, consideraron que si tuvieran la oportunidad ejecutarían la propuesta como herramienta de apoyo en clase. En correspondencia con esto, la docente expuso en palabras propias: *“Es una herramienta para fomentar el aprendizaje y a la vez se divierten los alumnos, y los motiva a querer aprender más”*.

Con la finalidad de valorar el grado de aceptación de parte de los alumnos hacía la propuesta, se optó por aplicar una entrevista semiestructurada, seleccionando estocásticamente a 5 alumnos como muestra para este fin. Para efectos de representar los datos obtenidos de cada uno de ellos, se hace uso de las letras A, B, C, D y E para hacer referencia a ellos:

1. *¿Te gustaron las actividades que el robot Voldi hizo contigo?*
   Los 5 alumnos coincidieron en su respuesta para esta interrogante al responder *“si”*. Lo cual indica la aceptación de los escolares sobre el diseño de las actividades geométricas diseñadas. Complementadas lúdica y dinámicamente por las características tecnológicas de la propuesta.

2. *¿Cómo describirías al robot Voldi: divertido, aburrido, motivante, bonito o feo?*
   A: *"divertido"*; B: *"divertido"*; C: *"divertido"*; D: *"divertido"*; E: "*divertido"*. Los cinco estudiantes coincidieron en la respuesta dada a esta pregunta. Situación que proporciona datos positivos sobre la aceptación del diseño del robot educativo, lo que refleja la correcta selección de los elementos tecnológicos que lo conforman.

3. *¿Crees que fue muy divertido o muy aburrido hacer las actividades con Voldi?*
   La respuesta obtenida de parte de los 5 estudiantes fue similar, al indicar que fue: *"muy divertido"*. Dicho resultado fomenta una valoración positiva respecto a la ayuda que proporciona la propuesta dentro del aula de clases para promover una enseñanza aprendizaje dinámica y atrayente, que incida directamente en facilitar el desvanecimiento de la matemafobia, definido por Gómez (1998) como un mal que origina pensamientos negativos en los escolares sobre las matemáticas.

4. *¿Te gustaría que Voldi regresará a tu salón para seguir aprendiendo geometría?*
   En lo que respecta a esta pregunta, los 5 escolares coincidieron en que *"si"* regresara. Contexto que valida la aceptación de la propuesta, lo que expresa una evidencia más respecto a las ventajas que proporciona la tecnología cuando se aplica de forma propositiva en la educación matemática. Y lo positivo que resulta el diseñar actividades con contenidos interactivos y dinámicos, simulando juegos o adivinanzas para estos niveles educativos.

5. ¿Por qué?
   A:*" Porque juega mucho con nosotros y es muy divertido"*; B: *"Porque me gustó"*; C:*" Porque me gustó mucho"*; D*:" Para jugar de nuevo"*; E: *"Porque es divertido y las actividades son divertidas"*. Los resultados obtenidos a través de esta interrogante evidencian la experiencia aceptable que la propuesta dejó en el sentir de los estudiantes de segundo grado. Lo que sin duda aclara, que la tecnología y las matemáticas pueden fusionarse para coadyuvar en beneficio del proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes.

En síntesis, los resultados arrojados por la exploración de la propuesta dentro del aula de clase permiten validar el diseño tecno-pedagógico de la herramienta, por parte de alumnos y docentes implicados.

Conclusiones

Los datos referentes establecen la realidad de la educación matemática en México, la cual requiere de un cambio sustancial y esfuerzos depositados para la creación de métodos, técnicas y formas de enseñanza dentro de las aulas escolares. Especialmente, en áreas tan relevantes como es la geometría, que, sin duda, ha demostrado ser sustancial para el desarrollo del razonamiento y pensamiento lógico en los seres humanos desde los primeros niveles de la educación escolar, etapa en la cual, se adquieren las primeras habilidades cognitivas.

En suma, una alternativa viable y capaz de generar ambientes propicios en las instituciones educativas para la enseñanza aprendizaje de la matemática, es la tecnología, que se debe aplicar teniendo en cuenta los contenidos temáticos que se abordarán y las formas en cómo se pretende interactuar con los estudiantes. La adecuada conjunción entre elementos tecnológicos y pedagógicos acrecentarán en mayor medida la facilidad de desvanecer y mitigar la matemafobia, así como el rechazo hacia esta área del conocimiento en las aulas de clases.

Referencias bibliográficas

ACEI-SEP (2017). *Secretaria de Educación Pública. Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Educación Primaria. 2°. Plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación 2017*. México: SEP.

Angulo, J., Vales, J., Acosta, C. y García, R. (2015). *Aportes y reflexiones sobre la educación mediada por tecnología.* México: Tabook Servicios Editoriales e Integrales.

Area, M. (2009). *Introducción a la Tecnología Educativa*. España: Universidad de la Laguna.

Bartolomé, A. y Sancho, J. (1993). Sobre el estado de la cuestión de la investigación en Tecnología Educativa. En *Jornadas Universitarias de Tecnología Educativa*, *1,* 31-63.

De Pablos-Pons. (2003). La tecnología educativa hoy no es como ayer: nuevos enfoques, nuevas miradas. En *Tecnología y Comunicación Educativas*, *año 17* (37), 5-23.

Gómez, B. (2012). *Metodología de la Investigación*. México: Red Tercer Milenio.

Gómez, P. (1998). *Profesor: no entiendo. Reflexiones alrededor de una experiencia en docencia de las matemáticas.* Colombia: Una empresa docente.

INEE (2018). *Planea Resultados Nacionales 2018*. México: INEE.

López, O., y García, S. (2008). *La enseñanza de la Geometría. Instituto Nacional de Evaluación de la Educación.* México: INEE.

Luján, M., y Salas, F. (2009). Enfoques teóricos y definiciones de la tecnología educativa en el siglo XX. En *Actualidades Investigativas en Educación, 9* (2), 1-29.

National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *Strategic Use of Technology in Teaching and Learning Mathematics*. EUA: NCTM

NME (2017). *Secretaria de Educación Pública. Nuevo Modelo Educativo para la Educación Obligatoria 2017*. México: SEP.

PISA (2015). *PISA Resultados Clave*. Francia: OCDE. Consultado el 17 de agosto de 2018, en sitio web, OCDE: https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus-ESP.pdf.

Rizo, C. (1989). *Algunos puntos de vista sobre la enseñanza de la geometría en la escuela de Educación General de Cuba*. Cuba: Ministerio de Educación de Cuba.

Salido, J. (2009). *Cibernética Aplicada Robots Educativos*. México: Alfaomega.

Secretaria de Educación Pública (2018). *Libro de texto. Matemáticas segundo grado. Educación primaria.* México: SEP.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS DEL VALOR ABSOLUTO

EPISTEMOLOGICAL AND DIDACTIC OBSTACLES OF ABSOLUTE VALUE

Sahara Doria Rodríguez, Francisco Ugarte Guerra
Instituto de investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú (IREM-PUCP)
sahara.doria@edu.pe, fugarte@pucp.edu.pe

Resumen
En este artículo presentamos los resultados del análisis preliminar de una investigación cuyo objetivo es diseñar una *situación problema* para la enseñanza del valor absoluto, tomando como marco teórico la teoría de situaciones didácticas. La metodología está basada en la ingeniería didáctica, en este trabajo detallamos el análisis realizado en la dimensión epistémica y cognitiva. En la dimensión epistémica, se analiza el origen intramatemático del valor absoluto, así como la evolución de las concepciones asociadas, mientras que en la dimensión cognitiva se describen los obstáculos epistemológicos y didácticos, asociados a esta noción. Establecer los obstáculos asociados a esta noción son claves para el diseño de la *situación problema*.

Palabras clave: valor absoluto, obstáculos didácticos y epistemológicos

Abstract
This article reports on the results of the preliminary analysis of an investigation aimed at designing a problem situation for the teaching of absolute value, taking the theory of didactic situations as theoretical framework. The methodology is based on the didactic engineering. The analysis of the epistemic and cognitive dimension is given in details. The epistemic dimension analyzes the intra-mathematical origin of the absolute value, as well as the evolution of the associated conceptions, while in the cognitive dimension the epistemological and didactic obstacles associated with this notion are described. Establishing the obstacles associated with this notion is essential to the design of the problem situation.

Key words: absolute value, didactic and epistemic obstacles

Introducción

La importancia de la enseñanza del valor absoluto en la escuela básica regular está asociada a su papel en la construcción y comprensión de conceptos matemáticos más complejos como, por ejemplo, el de límite de una función. Entre las investigaciones que describen las dificultades que tienen los estudiantes en relación al valor absoluto están las de Chiarugi, Fracazina y Furinghetti, (1990) quienes luego de realizar un análisis longitudinal con estudiantes de primer, cuarto año de secundaria y primer año universitario concluyeron que los estudiantes tienen dificultades para identificar el dominio de la función valor absoluto y su imagen correspondiente, y que esas dificultades no se superan con el grado de instrucción, también señalan que definir al valor absoluto de un número como el valor numérico positivo genera errores en los estudiantes, lo que se evidencia al resolver tareas que involucran ecuaciones con valor absoluto. Por otro lado, Gagatsis y Thomaidis (1995); realizaron una investigación donde describen el origen matemático del valor absoluto y también muestran el desarrollo conceptual de esta noción a lo largo del tiempo.

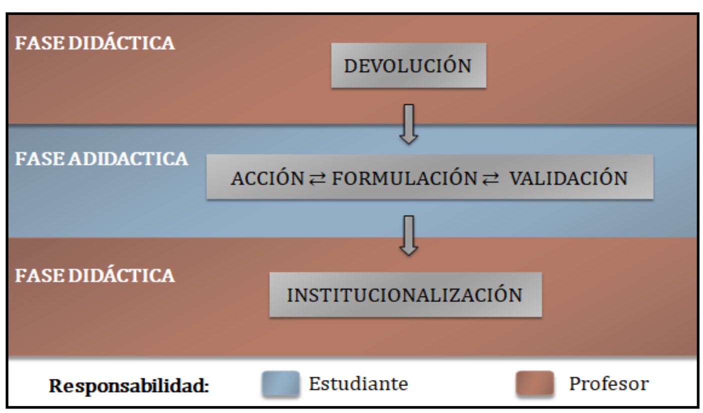
Desde la Teoría Ontosemiótica de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS), Wilhelmi, Godino, y Lacasta (2007); realizaron el análisis de la eficacia didáctica de las técnicas asociadas a los distintos significados del valor absoluto, entre los significados analizados están el aritmético, métrico, vectorial, función máximo y función por partes, estos investigadores concluyeron que estos significados no son equivalentes desde el punto de vista epistémico debido a que su uso no involucra los mismos objetos matemáticos y por ende el empleo de estos distintos significados afectará las prácticas operatorias y discursivas del estudiante en la resolución de problemas. Por otro lado, Gagatsis y Panaoura (2014) estudiaron la relación causa-efecto que hay entre el concepto que tienen los estudiantes acerca del valor absoluto de un número y su rendimiento al resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto, los resultados muestran que los estudiantes tienden a aplicar procedimientos algorítmicos para resolver ecuaciones que claramente no tienen solución, procedimientos que evidencian obstáculos epistemológicos relacionados al valor absoluto.

A continuación, presentamos los resultados del análisis preliminar que realizamos como una etapa previa al diseño de la situación didáctica, guiados por los resultados de las investigaciones ya citadas, enfatizamos en la dimensión epistémica, cognitiva y didáctica, que luego servirá de insumo para el diseño de una situación problema para la enseñanza del valor absoluto.

Marco teórico

El marco teoría de referencia en esta investigación es la teoría de situaciones didácticas Brousseau (2007), que sustenta que todo conocimiento matemático tiene al menos una situación fundamental que permite su construcción a través de situaciones didácticas diseñadas de manera que un conjunto de variables didácticas actué sobre las acciones y estrategias que realizará el estudiante de forma autónoma.

Figura 1. *Teoría de situaciones didácticas*



Fuente: *Propio*

La figura 1 explica el supuesto principal de la teoría de situaciones didácticas, en referencia a que es el estudiante quien a partir de la "devolución" hecha por el profesor, se vuelve responsable de su propio aprendizaje, siendo el profesor, quien al final del proceso, retoma esa responsabilidad para hacer la institucionalización de los saberes construidos. La devolución es el proceso mediante el cual el profesor "devuelve" la responsabilidad de un problema al alumno, de manera que el alumno entre nuevamente a la fase adidáctica.

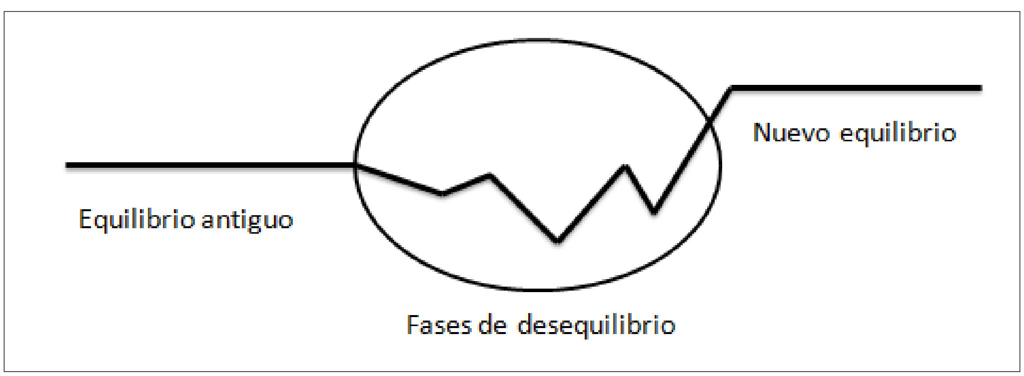
Brousseau (1983) considera que los conocimientos construidos por los estudiantes son locales y pueden eventualmente convertirse en fuente de errores o dificultar la adquisición de un nuevo aprendizaje. De acuerdo con Almouloud (2007), uno de los factores que más influencia en el proceso de aprendizaje de los estudiantes es el tratamiento del error, esto debido a que el error puede ser evidencia de que el estudiante tiene un insuficiente conocimiento de un concepto matemático o que éste no está completamente construido. Por lo tanto, Almouloud (2007) sostiene que el profesor debe realizar un proceso de "eludir" que no busca corregir la raíz del error sino mostrar al estudiante la "manera correcta" enfatizando la construcción del conocimiento, este proceso es importante, para que el error no sea grabado en la mente del estudiante tornándose persistente.

¿Qué es un obstáculo?

Brousseau (1983) define un obstáculo como un conocimiento que en un determinado ámbito de aplicación es válido y cierto, pero que en un ámbito más amplio se torna falso o inadaptable. Un obstáculo se manifiesta a través de errores los cuales reflejan una concepción coherente pero no correcta.

Al respecto Almouloud (2007) señala la importancia de una interacción constante del estudiante con situaciones problemáticas que le permitan actualizar los ya existentes, esto está muy relacionado a la noción de desequilibrio. La figura 2 ejemplifica esta visión, en la cual los conocimientos que están es un estado de equilibrio deben pasar por fases transitorias, en las cuales los conocimientos anteriores no funcionan bien y resultarán ineficaces en la resolución del problema propuesto, la superación de ese momento de desequilibrio pasa a un nuevo estado de equilibrio, lo que significa que hubo una reorganización de los conocimientos en que nuevas conocimientos se han incorporado al saber antiguo.

Figura 2. *Fases de Desequilibrio*



Fuente: *Almouloud (2007, p.130)*

Brousseau (1983) clasifica los obstáculos de acuerdo a su origen de la siguiente manera:

- Obstáculo ontogénico. Son aquellos que se originan por las limitaciones propias del sujeto en algún momento de su desarrollo, y que por lo general son de naturaleza neurofisiológica.

- Obstáculo didáctico. Son los que se originan por las por la elección de enseñanza de un determinado conocimiento por parte de un proyecto o institución educativa y son provocados por una transposición didáctica que el profesor difícilmente puede renegociar en el cuadro estricto de la clase.
- Obstáculo epistemológico. Son los que se originan por el mismo conocimiento, y están relacionados a su desarrollo histórico. Almouloud (2007) señala que los obstáculos epistemológicos son inherentes al saber y pueden ser identificados en las dificultades que los matemáticos encontrarán en la historia para la comprensión y utilización de ciertos conceptos.

Método de investigación

La metodología que sigue este trabajo de investigación sigue principios de la ingeniería didáctica. De acuerdo con Artigue (1996) la ingeniería didáctica es una metodología de investigación que se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en el aula, es decir en la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Se diferencia de otros métodos de investigación que realizan experimentos en el aula en que su proceso de validación es interno fundamentado en la confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori.

Los objetivos de una investigación de ingeniería didáctica son diversos, uno de los principales mencionados por Artigue (1995) es que la ingeniería didáctica es un instrumento que permite visualizar los procesos de aprendizaje de un concepto determinado, en particular, la elaboración de génesis artificial para un concepto dado.

Este análisis consta de 4 etapas: Análisis preliminar, Concepción y Análisis a Priori; Experimentación, Análisis a posteriori y Validación. Artigue (1996) señala que el análisis preliminar consiste en el estudio en tres dimensiones: Epistémica, Didáctico y Cognitivo. La dimensión epistémica hace referencia a un análisis epistemológico asociado a las características del saber en juego. La dimensión cognitiva hace referencia a un análisis o estudio de las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza, sus concepciones, dificultades y obstáculos asociados al concepto que se abordará y la dimensión didáctica hace referencia a las características de funcionamiento del sistema de enseñanza. A continuación, presentamos los resultados del análisis de estas tres dimensiones.

Resultados

En la *dimensión epistémica* recogemos parte de los resultados obtenidos por Gagatsis y Thomaides (1995), ellos muestran el desarrollo conceptual del valor absoluto y sus propiedades a lo largo de la historia. Estos investigadores, realizaron un estudio histórico distinguiendo *cuatro etapas* principales:

En la *primera etapa* se muestra el origen del valor absoluto, surgió por la necesidad de advertir el realizar una operación que pudiera dar como resultado un número negativo. En esta etapa se muestra el origen del valor absoluto. Vieté en 1591 en su obra *In Arten Analyticem Isagoge* introdujo una notación especial denominada "*unsichere minus*" (incierto menos) representado con el símbolo "=" para expresar la substracción de dos magnitudes no conocidas. Por ejemplo, al no saber cuál magnitud es mayor, expresaba la diferencia entre A^2 y B como $A^2 = B$ ó $B = A^2$, esto con la finalidad de evitar una operación que en ese tiempo era imposible, ya que aún no se habían definido a los números negativos.

En la *segunda etapa* el desarrollo conceptual del valor absoluto está muy vinculado al origen de los números negativos. Los números negativos aparecen a inicios del siglo XVII como una ampliación de los números positivos, conocidos en ese tiempo como objetos nuevos "imaginarios", los cuales se diferencian de los positivos por la agregación de signos. Wallis, en 1673 es uno de los primeros que intenta dar una interpretación geométrica a los números negativos, tomando como ejemplo a una persona que se mueve a lo largo de una recta, de manera que +3 significa tres yardas adelante *y*-3 significa 3 yardas para atrás, todo esto en la misma línea, es decir para Wallis, el "número sin signo" funciona como distancia del origen (el punto observado como el inicio del movimiento). La interpretación del valor absoluto como "el número sin signo" o como la "distancia de cero" predominó hasta inicios del siglo XIX. Sin embargo, a inicios del siglo XVIII, Leibniz hizo una distinción del término valor absoluto con la palabra "mol", define tal término al estudiar el simbolismo algebraico para la sustracción como lo hizo Vieté en 1591:

> "Pero $a - b$ representa la diferencia entre a y b, cuando a es mayor, y $b - a$, cuando b es mayor"; y a este mol se le puede denominar $a - b$, cuando se parte de la base que el valor absoluto de por ejemplo +2 y -2 es lo mismo, o sea +2. Aplicado análogamente: si se describe a - b como c, entonces el mol c o el valor absoluto de c es +2, lo que presenta un valor determinado, independientemente de si c es positivo o negativo; es decir, c es igual a +2 o -2. Dos cantidades diferentes con el mismo valor absoluto tienen siempre el mismo cuadrado". (Cajori, 1928-1929, tomo. 1, p. 223 – 224 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8).

En la cita mencionada en el párrafo anterior se tiene una referencia más clara del término valor absoluto donde se utiliza la palabra "moles", que fue traducido por Cajori como valor absoluto. En la segunda mitad del siglo XVIII, se empieza a hacer referencia al uso sistemático de este término en relación con los problemas que exigían un tratamiento de las inecuaciones. Una de estas referencias se encuentra en una conferencia de Lagrange sobre la solución de la ecuación diofántica $A = u^2 - Bt^2$, donde establece que, si esta ecuación es resoluble, entonces el coeficiente A es un divisor de un número de la forma $a^2 - B$, donde a es un número natural menor a $A/2$. Con respecto a esta demostración, Lagrange menciona lo siguiente:

> "Por lo demás, hay que resaltar, para evitar todo error, que cuando decimos que a debe ser menor a $A/2$, entendemos que a y A son tomados positivamente, aunque puedan ser por cierto positivos o negativos; de modo que solo se debe tomar en cuenta, en esta comparación de los números a y A, su valor absoluto." (Lagrange, 1768, p. 390 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.8)

En la segunda etapa la frase "haciendo abstracción del signo" hace referencia a la noción de valor absoluto, y se convierte en una herramienta importante en el desarrollo la teoría de números y en la solución de inecuaciones.

En la *tercera etapa* el valor absoluto, aparece por primera vez como un concepto independiente en el año 1821 en el trabajo de Cauchy denominado "*Curs d' analyse*". Cauchy define al valor absoluto como el valor numérico de una cantidad:

> "…llamaremos valor numérico de una cantidad al número base, que hace que cantidades iguales que tienen el mismo signo tengan el mismo valor numérico y que cantidades opuestas que están afectados con signos contrarios, tengan el mismo valor numérico." (Cauchy, 1821, p. 18 citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

Este término de valor absoluto, que es definido para una cantidad real, será utilizado por Cauchy más adelante en el área de números complejos. Cauchy demuestra que $\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\cdots}}{\sqrt{n}}$ es la expresión del valor medio para los valores numéricos de n cantidades a, a', a''

Sobre el denominador de la fracción, escribe lo siguiente:

> "Esta expresión que sobrepasa el mayor de los valores numéricos se le puede llamar el módulo del sistema de cantidades a , a', a'',…El módulo del sistema de dos cantidades a y b será el módulo de la expresión imaginaria $a+b\sqrt{-1}$, sea como fuere, las expresiones reales de la forma $\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\cdots}$ tienen propiedades notables (Cauchy, 1821, citado por Gagatsis y Thomaidis, 1995, p.13).

En relación con estos problemas y para lograr una representación de la relación de inecuación, Cauchy utilizó por primera vez una abreviación para el término de los valores numéricos, en el cual él escribe:

$$val.num.(a+a'+a''+\cdots) < \sqrt{n}\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\cdots}$$

Además de $\sqrt{a^2}$, Cauchy usa una variedad de expresiones para hacer referencia al valor absoluto de una cantidad a lo largo del documento "*Curs d' analyse*", a veces incluso el tradicional "haciendo abstracción de signos". En el capítulo III con el título "sobre la resolución numérica de ecuaciones" se utiliza sistemáticamente el término de los valores numéricos de una cantidad y la abreviación "val.num" en todas las inecuaciones que tengan que ver con los valores de raíces y la solución aproximada de ecuaciones polinómicas. Sin embargo, la novedad fundamental que Cauchy introdujo, con relación al valor absoluto, está en el uso de este término en definiciones y teoremas de convergencia y continuidad.

Un ejemplo, es la prueba de fracciones sobre la convergencia absoluta de una recta numérica donde Cauchy utiliza implícitamente la desigualdad triangular.

$$|u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}| < |u_0|+|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_{n-1}|$$

Durante la tercera etapa el valor absoluto carece de una notación única para representarlo, por lo que no se formalizan sus propiedades.

Finalmente, en la *cuarta etapa*, el valor absoluto es visto como un instrumento de desarrollo del análisis complejo. El símbolo actual de valor absoluto (| |), fue introducido por Weierstrass en 1841, en su trabajo de la desigualdad de Cauchy, con la finalidad de expresar el modulo de una variable compleja y ciertos conceptos topológicos, pero este simbolismo no fue aceptado en la comunidad matemática sino hasta finales del siglo XIX. La formalización de sus propiedades y su definición formal como "función por partes" desempeñó un rol importante en el siglo XX en estudios de distancia en espacios métricos y estimación en la teoría de los cuerpos.

Este desarrollo conceptual histórico explica la complejidad del concepto valor absoluto, su origen matemático relacionado a la necesidad de comprender los números negativos, algunas de las nociones del valor absoluto que se han descrito están relacionadas a obstáculos epistemológicos que se describirán más adelante.

En la *dimensión didáctica* se ha realizado la revisión de la propuesta curricular del ministerio de educación para la enseñanza del valor absoluto en la educación secundaria, incluyendo una revisión de los textos y cuadernos de trabajo que utilizan los estudiantes, con la finalidad de identificar los conceptos de valor absoluto y los tipos de preguntas que resuelven los estudiantes en relación a esta noción.

Respecto a la forma en la que es enseñado el valor absoluto, se observa que en el Texto Escolar Matemática 2, correspondiente al segundo grado de secundaria el valor absoluto se introduce dentro del capítulo de números racionales y se define de la siguiente manera:

> "El valor absoluto de un número racional es la distancia a cero de este número. Si el número racional es positivo, su valor absoluto es igual al número, pero si es negativo, entonces su valor absoluto es igual al opuesto aditivo de él" (Ministerio de Educación, 2016a, p.20).

La primera parte de esta definición introduce al valor absoluto en el contexto métrico, sin embargo, la segunda parte de esta define al valor absoluto desde el contexto aritmético. Por otro lado, los ejercicios propuestos también se presentan en un contexto aritmético, tal como se muestra en la Figura 3. Estos ejercicios están asociados a la noción de que el valor absoluto de un número es el número sin signo, convirtiéndose finalmente en una regla aprendida "el valor absoluto de un número es el número sin signo"

Figura 31. *Preguntas de reforzamiento del valor absoluto en Cuaderno de Trabajo Matemática 2*

5. Describo usando la matemática

- Completa.
  - El valor absoluto de un número siempre es ______
  - El valor ______ de un número es igual en un número positivo y en un número negativo.
  - El valor absoluto del opuesto de un número positivo es un número ______.

6. Expongo lo encontrado

- Luego de haber jugado escribe la definición de:
  - Valor absoluto: ______
  - Se lo simboliza: ______
  - Escribe el valor absoluto de los siguientes números racionales:

a. $\left|\frac{2}{3}\right| =$ e. $\left|-\frac{7}{4}\right| =$

b. $\left|-\frac{2}{3}\right| =$ f. $\left|\frac{7}{4}\right| =$

c. $\left|\frac{5}{4}\right| =$ g. $\left|-\frac{15}{7}\right| =$

d. $\left|-\frac{5}{4}\right| =$ h. $\left|\frac{15}{7}\right| =$

Fuente: *Ministerio de Educación (2016b, p.18)*

También, se realiza una actividad para que el alumno reflexione acerca de algunas propiedades acerca del valor absoluto como se observa en la Figura 4, sin embargo los ejercicios de la pregunta 6 pueden inducir al estudiante a responder verdadero a la primera afirmación que se muestra en la Figura 4, siendo esto un ejemplo de un error del tipo epistemológico reportado por Gagatsis y Panaoura (2014), los estudiantes por tanto entenderán que |-*a*/*b*| es *a/b,* atribuyendo el signo negativo como el signo de la variable.

Figura 2. *Preguntas de reforzamiento del valor absoluto en el Cuaderno de Trabajo Matemática 2.*

Reflexiona y escribe verdadero (v) o falso (f) con respecto a las siguientes afirmaciones.

• El valor absoluto de un número racional |a/b| es a/b y, el valor absoluto de un número racional |-a/b| es a/b.	
• En la recta numérica, la distancia del valor absoluto de los números racionales |a/b| y |–a/b| al origen es la misma.	
• En la recta numérica, cuando la distancia al origen entre dos números racionales de igual medida pero con diferente signo es igual, ¿existe una simetría?	

Fuente: *Ministerio de Educación (2016b, p.19)*

Luego en el libro Texto Escolar Matemática 3 (Ministerio de Educación, 2016c), que corresponde a tercer grado de secundaria, se vuelve a trabajar con valor absoluto, dentro del capítulo de números racionales y se define de la siguiente manera “El valor absoluto de un número racional en la recta numérica es la distancia del número al origen”, la definición que se maneja en este nivel está dada en un contexto únicamente métrico, sin embargo luego adicionan “Si el número racional es mayor o igual a cero, su valor absoluto es el mismo número, si el número racional es menor que cero, su valor absoluto es el mismo número, pero con signo opuesto” (Ministerio de Educación, 2016c, p.20). Con esta adición, se define al valor absoluto desde el contexto aritmético.

Además, en el libro Texto Escolar Matemática 3, se presentan las propiedades del valor absoluto (Figura 5). Sin embargo, no se observa actividades en la que los alumnos reflexionen acerca del porqué de estas propiedades o ejemplos que expliquen cómo se deducen. Además, no se explica el significado de los operadores “$\vee$” e “$\wedge$” en el uso de las propiedades. Chiarugi, Fracazina y Furinghetti (1990), señalaron que una de las dificultades en la comprensión del valor absoluto, es la falta de interpretación de los operadores lógicos $\vee$ e $\wedge$, que por lo general pasa desapercibido para los estudiantes, y eso conlleva a los estudiantes a errores en la resolución de problemas con valor absoluto.

Figura 5. *Propiedades del valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3*

Propiedades del valor absoluto

- $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$
- $|a| = |-a|$
- Si $|a| = b$, entonces: $\begin{cases} b \geq 0 \wedge \\ (a = b \vee a = -b) \end{cases}$
- Si $|a| = |b|$, entonces: $a = b \vee a = -b$
- Si $|a| \leq b$, entonces: $b \geq 0 \wedge -b \leq a \leq b$
- Si $|a| \geq b$, entonces: $a \geq b \vee a \leq -b$

Fuente: *Ministerio de Educación (2016c, p.22)*

Por otro lado, los ejercicios que se muestran como ejemplos, consisten en ecuaciones del tipo $|x+a|=b$ e inecuaciones del tipo $|x+a|\leq b$, las soluciones que se proponen son en base a la aplicación de algunas propiedades del valor absoluto. En la siguiente figura, se ve un ejemplo de valor absoluto en ecuaciones.

Figura 6. *Ecuación con valor absoluto en el libro Texto Escolar Matemática 3*

CÓMO HACER

Calcula el valor de x si $|x + 3| = 6$.

- Aplicamos la propiedad: $|a| = b \rightarrow b \geq 0 \wedge a = b \vee a = -b$

$|x + 3| = 6 \rightarrow x + 3 = 6 \vee x + 3 = -6 \rightarrow x = 3 \vee x = -9$

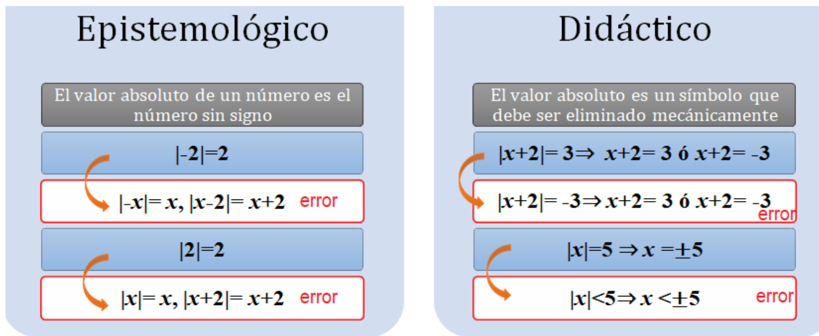
C.S. = $\{-9; 3\}$

Fuente: *Ministerio de Educación (2016c, p.22)*

Al estudiar la *dimensión cognitiva,* se investigó acerca de los obstáculos asociados a la noción de valor absoluto. El primer obstáculo está relacionado a la interpretar la noción de valor absoluto de un número como "el número sin signo", obstáculo que se evidencia cuando los estudiantes responden que $|x|$ es x o también que $|-x|$ es x, errores reportados por Wilhelmi et al. (2007). Al respecto Chiaguri, et al. (1990), menciona que la imagen conceptual del valor absoluto de un número como el "número sin signo" es tan fuerte que los alumnos rechazan la idea de que $-x$ pueden ser el resultado de un valor absoluto.

Wilhelmi et al. (2007), sostienen que la enseñanza del valor absoluto centrada en un contexto aritmético, como regla de quitar el signo menos, se ha instaurado como parte del contrato didáctico, lo que da como resultado, que cuando los estudiantes se enfrentan a ecuaciones o inecuaciones con valor absoluto, actúen de manera mecánica. Este error se presenta comúnmente en preguntas con "ecuaciones imposibles". Por ejemplo $||x\text{-}5|\text{-}12|=\text{-}5$, en ellas la mayoría de estudiantes resuelve mecánicamente la ecuación sin verificar la solución, también se observa al trabajar con inecuaciones, por ejemplo al resolver la inecuación $|x|<5$ los estudiantes responden $x<5$ o $x<-5$, estos errores son reportados por Gagatsis y Panaoura (2014). La figura 7 resume los obstáculos epistemológicos y didácticos del valor absoluto y los errores que se generan en otros ámbitos de aplicación se muestran en los recuadros en rojo

Figura 7. *Obstáculos epistemológicos y didácticos del valor absoluto*



Fuente: *Propio*

Conclusiones

El análisis preliminar realizado, en relación con el diseño de una *situación problema* para la enseñanza del valor absoluto, nos permite concluir:

Dado que el valor absoluto surgió dentro de la misma matemática, con la finalidad de evitar una operación aditiva que diera como resultado un número negativo, establece que la situación problema debe partir de un contexto intramatemático donde se requiera evitar el uso de número negativos, por ejemplo, al trabajar con el concepto de distancia.

La relación entre los resultados de la dimensión cognitiva y didáctica nos permite concluir que partir de un contexto métrico lleva en la práctica a usar la definición aritmética del valor absoluto, el mismo que está asociado a un obstáculo, por lo tanto, debemos partir de un contexto diferente, por ejemplo, el funcional.

En base a los hallazgos la situación problema que se va a diseñar abordará al valor absoluto desde el contexto funcional y se establecerá como una de las variables didácticas al argumento de la función, es decir se trabajará con el valor absoluto de números enteros, variables y variable con parámetros de forma gradual, esto con la finalidad de enfrentar a los estudiantes a situaciones donde las nociones relacionadas a los obstáculos didácticos y epistemológicos relacionados al contexto aritmético sean confrontadas provocando fases de desequilibrio.

Referencias bibliográficas

Almouloud, S. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba. Editora UFPR.

Artigue, M. (1996). Ingeniería Didáctica. En: Brun, J. (Ed.), *Didática das Matemáticas* (pp.35-111). Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gomez, P. (Ed.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* (pp.33-59). Grupo Editorial Iberoamerica: México

Chiarugi, I., Fracazina, G. & Furinghetti, F. (1990). Learning difficulties behind the notion of absolute value. *Proceeding Fourteenth PME Conference*, *3*(28), 231-238. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED411137.pdf

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des mathématiques*, *7*(2). 165-198. Traducción de Hernandez y Villalva.

Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas, [Traducción de Dilma Fregona]. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Gagatsis, A. & Panaoruma, A. (2014). A multidimensional approach to explore the understanding of the notion of absolute value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(2), 159-173.

Gagatsis, A. & Thomaidis J. (1995). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs absoluter Betrag. *Journal fur Mathematik Didaktik,16*(1-2), 3-46.

Perú, Ministerio de Educación (2016a). *Matemática 1. Secundaria.* Texto Escolar. Editorial Norma: Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016b). *Matemática 2 Secundaria*. Cuaderno de Trabajo. Editorial Norma: Lima.

Perú, Ministerio de Educación (2016c). *Matemática 3 Secundaria.* Texto Escolar. Editorial Norma: Lima.

Wilhelmi, M., Godino, J. & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions the case of the absolute value. *Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(2), 73-90. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/didactic_effectiveness.pdf

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

EXPERIENCIA DE EVALUACIÓN CON GEOGEBRA EN UN CURSO DE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA PARA INGENIERÍA

EVALUATING WITH GEOGEBRA; AN EXPERIENCE IN A COURSE OF ALGEBRA AND GEOMETRY FOR ENGINEERING

Diana Pozas, Marlene Alves Dias
Universidad Nacional del Comahue (Argentina), Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
dianapozas@hotmail.com, maralvesdias@gmail.com

Resumen
Nuestro propósito es comunicar diversas actividades con Geogebra llevadas a cabo durante el dictado de la asignatura Álgebra y Geometría I, para las carreras de Ingeniería de una universidad argentina. En este reporte focalizaremos en la instancia de evaluación, durante la cual los estudiantes disponen de dicho software. Esta modalidad de evaluación permitió reducir el énfasis en los aspectos meramente operacionales del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales; permitió evaluar tipos de tareas que no suelen incluirse en los exámenes tradicionales y fue valorada positivamente por los estudiantes. La experiencia en general abarcó el estudio de los temas: sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes. El uso de Geogebra posibilitó un trabajo tanto de carácter exploratorio como de validación, donde destacamos muy especialmente las tareas planteadas para utilizar simultáneamente la vista algebraica y la vista gráfica 3D.

Palabras clave: álgebra lineal, geogebra, evaluación, ingeniería

Abstract
This paper reports on various activities with GeoGebra carried out while teaching the subject Algebra and Geometry I, for the engineering degrees in an Argentine university. We focus on the evaluation, during which students use GeoGebra software. This evaluation mode allowed reducing the emphasis on the merely operational aspects of algebra and focusing the students' work on conceptual tasks; it allowed evaluating types of tasks that are not usually included in traditional exams and it was positively valued by students. The experience in general covered the study of the topics: systems of linear equations, matrices and determinants. The use of GeoGebra made possible both, an exploratory and validation work, where we especially highlight the tasks proposed to simultaneously use the algebraic view and the 3D graphic view.

Key words: linear algebra, GeoGebra, evaluation, engineering

Introducción

Este reporte se enmarca en un trabajo de investigación en curso, relacionado con las dificultades que enfrentan los profesores y estudiantes universitarios cuando inician el proceso de estudio del Álgebra Lineal. Para los estudiantes dichas dificultades son de índole tanto conceptual como motivacional (Carlson, 2004) y se relacionan con lo que en la literatura se conoce como el *obstáculo del formalismo* (Dorier, Sierpinska, 2001). Diversas investigaciones ponen de manifiesto la necesidad de llevar a cabo estudios que vayan más allá de la identificación de las dificultades de los estudiantes. Una de las apuestas en este sentido es la integración de las TIC en todos los niveles educativos, particularmente, el universitario.

Quienes participamos en la formación de ingenieros nos encontramos ante el reto de actualizarnos y actualizar nuestros métodos de enseñanza, para aprovechar las oportunidades que nos ofrece la tecnología actual, en beneficio de nuestra tarea y de la profesión misma de la ingeniería.

Por otro lado, asumimos que la población de estudiantes de primer año que acceden en la actualidad a nuestras aulas utiliza mayoritariamente las tecnologías digitales como herramientas de aprendizaje y las valoran positivamente como tales. Esto nos conduce a reconocer la importancia de ofrecerles materiales de estudio con este soporte para poder aprovechar los conocimientos previos de nuestros estudiantes en relación con estos nuevos modos de acercarse al conocimiento. En este sentido, a fin de delinear un conjunto de tareas mediadas con Geogebra que posibilite a los estudiantes la articulación de nociones básicas de Álgebra Lineal, se re-diseñaron algunos prácticos de Álgebra y Geometría I, asignatura que se dicta para todas las carreras de ingeniería en la Universidad del Comahue, Patagonia Argentina. La incorporación del software en las clases prácticas de la asignatura implicó cambios en la forma de evaluar. Nuestro propósito en esta oportunidad es describir y analizar esta experiencia.

A continuación, presentamos brevemente el referencial teórico que sustenta nuestro análisis.

Referencial teórico

Adoptamos como marco referencial la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999, 2004, 2007) en donde se considera la matemática como producto de la actividad humana y relativa a los contextos sociales y culturales donde se desarrolla.

Dado que en el proceso de estudio de una praxeología matemática existen diferentes tipos de tareas y para cada uno hay una técnica, Chevallard (1994) se pregunta: ¿cuáles son los ingredientes que componen una técnica y en qué consiste la "puesta en obra" de una técnica? Para responder a esta cuestión, establece una distinción fundamental entre dos tipos de objetos: *los objetos ostensivos y los objetos no ostensivos*.

Los objetos ostensivos tienen una materialidad que puede percibirse a través de los sentidos: escrituras, sonidos, gestos, y por este hecho pueden ser manipulados. Los no-ostensivos son aquellos a los que se les atribuye una cierta existencia, pero no pueden verse ni mostrarse por sí mismos (ideas, conceptos, nociones), su existencia es institucional. La actividad matemática es, como toda actividad humana, actividad material. El enfoque antropológico atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica (los signos), una valencia instrumental ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Los no ostensivos no pueden existir sin los ostensivos, y recíprocamente (Chevallard, 1994).

Para comprender mejor en el contexto de esta experiencia de qué manera el uso de Geogebra puede auxiliar a los estudiantes en el proceso de estudio del Álgebra Lineal, utilizaremos las nociones de *cuadro* y *cambio de cuadro*, según Douady (1992).

Douady define que un cuadro está constituido por: objetos de una rama de las matemáticas, las relaciones entre dichos objetos, sus diversas formulaciones y las imágenes mentales posiblemente asociadas a esos objetos y a esas relaciones. Estos elementos juegan un rol esencial como herramientas dentro del funcionamiento del cuadro. Además, esta definición permite transponer el trabajo del matemático al dominio de la didáctica por medio de la noción "cambio de cuadro", esto es, obtener diferentes formulaciones de un problema que permiten la puesta en marcha de herramientas y técnicas, que no es posible realizar dentro de la primera formulación.

Para esta investigación consideramos cuatro cuadros: sistemas de ecuaciones lineales (en adelante, SEL), matrices, determinantes y geometría afín euclidiana. Podemos caracterizar cada uno de ellos en función de los ostensivos y no-ostensivos intervinientes, las definiciones y los teoremas enunciados, como así también la formulación de distintos tipos de tareas y las técnicas asociadas. En esta oportunidad, sólo describiremos muy brevemente el cuadro de los SEL, donde el ostensivo más utilizado en la introducción teórica es el que se muestra en la siguiente figura:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Figura 1: *ostensivo para SEL de m ecuaciones y n incógnitas*

La técnica más usual para resolver cualquier SEL es el método de Gauss, el cual requiere trabajar con la matriz aumentada del sistema. En este cuadro, la noción de matriz se emplea como notación (valencia semiótica) que facilita la escritura de cada paso del método de Gauss (valencia instrumental). El discurso tecnológico que justifica éste u otro método de resolución hace referencia a las nociones de sistemas equivalentes y de operaciones elementales. El siguiente ejemplo ilustra el método de Gauss-Jordan:

EJEMPLO 7 **Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas** Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Figura 2: *Ostensivos matrices de sistemas equivalentes. Fuente: Grossman (1991), p. 17*

Éste es un caso típico de un tipo de tarea cuya técnica de resolución requiere de cambios de cuadro. En la figura 2 podemos observar que la tarea está enunciada en el cuadro de los SEL, el ostensivo matriz ampliada de un sistema permite el cambio al cuadro de las matrices y la resolución del sistema en este cuadro. Finalmente, se retoma el cuadro de los SEL para expresar el conjunto solución.

Para nuestra investigación es relevante considerar los ostensivos que en este cuadro se utilizan para expresar el conjunto solución de los SEL con infinitas soluciones, los cuales son en definitiva los que se estudian en Álgebra Lineal. Nos referimos concretamente a la notación paramétrica para expresar la solución general de dichos sistemas, y a la técnica para obtenerla. A modo de ejemplo, en la figura 3 podemos observar los ostensivos utilizados para expresar el conjunto solución de un SEL compatible indeterminado:

- Para $a = 0$, $[S]$ es compatible indeterminado, pues es equivalente al sistema

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=1\\ 3y-z&=6\\ 0&=0\\ 0&=0 \end{aligned}\right\}, \text{ que tiene las soluciones: } \begin{cases} z=\lambda \text{ cualquiera}\\ y=2+\lambda/3\\ x=-3-5\lambda/3 \end{cases}$$

Figura 3: *Ostensivo solución general de un SEL. Fuente: Burgos(1992), p. 18*

En síntesis, para analizar las praxeologías en torno a la noción de SEL son necesarios al menos cuatro cuadros, cada uno con sus características específicas. Considerar un número más reducido de cuadros no permite tener en cuenta la existencia de entornos conceptuales y técnicas similares, que en un curso introductorio de Álgebra Lineal, están lejos de integrarse en un mundo unificado y completamente articulado (Dias, 1998). Cabe aclarar que dos cuadros diferentes pueden tener los mismos objetos matemáticos pero diferentes imágenes mentales asociados a ellos, como también la problemática que generan.

Contexto de la experiencia y metodología

Álgebra y Geometría I es una asignatura de primer año que cursan todos los estudiantes que ingresan a carreras de ingeniería en la Universidad Nacional del Comahue, Patagonia Argentina. Los contenidos mínimos a desarrollar son: Números reales. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$. Ecuaciones de la recta en el plano. Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones de rectas y planos en el espacio. Cónicas. Tiene una duración cuatrimestral, con 8 horas semanales distribuidas en clases teóricas y clases prácticas. Para obtener la acreditación de este curso los estudiantes deben aprobar dos exámenes parciales y un examen final.

Hemos observado que, a pesar de comenzar el curso con temas como lógica proposicional y teoría de conjuntos, la falta de preparación de los estudiantes y el uso del formalismo característico de la asignatura, hacen dificultoso el aprendizaje de los sucesivos contenidos de álgebra presentes en el programa. Se decidió entonces modificar algunos prácticos incorporando un número considerable de tareas para resolver con ayuda de Geogebra. Consideramos que de esta manera se podría enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales, o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos de la materia.

Cabe destacar que el diseño de los prácticos no implicó un cambio demasiado abrupto en los tipos de tareas desarrolladas en años anteriores. Los nuevos prácticos respetan, en esencia, la secuencia original. Tienen tareas para realizar exclusivamente con lápiz y papel, y otras para usar además Geogebra. En este último caso fueron señaladas con el logo . Las tareas de cálculo básico para realizar en lápiz y papel se incluyen en los prácticos sin modificaciones respecto del material de años anteriores, pero en menor cantidad, entendiendo que esta práctica también es importante. Especialmente la multiplicación de matrices y la resolución de sistemas por el método de Gauss con o sin parámetros. No obstante, casi siempre se puede pensar en pequeñas modificaciones a una tarea determinada para insertar el uso del software en la resolución de esta. En este sentido, se intentó colocar la mayor cantidad de tareas posibles para usar Geogebra, de modo que el estudiante no tuvo que encender el equipo sólo para realizar una actividad puntual y aislada.

Por ejemplo, para resolver la siguiente tarea (Figura 4) se sugiere a los estudiantes que comiencen a trabajar con lápiz y papel, focalizando en las propiedades de las operaciones con matrices. Una vez que “despejaron” la matriz X pueden utilizar Geogebra para calcular las inversas y para verificar el resultado. Utilizamos frecuentemente el ostensivo A.X.B = C porque es la notación más económica para resolver ecuaciones matriciales.

Determinar, si existe, la matriz X que verifique la ecuación matricial A.X.B = C siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 10 & 3 & 14 \\ 6 & -15 & 2 \end{pmatrix}$$

Figura 4: *ejemplo de tarea del práctico – ecuaciones matriciales*

A continuación, se muestra otro ejemplo (Figura 5) donde se combinan técnicas de lápiz y papel con Geogebra.

a) Resolver cada SEL y escribir el conjunto solución en forma paramétrica. ¿Qué se puede decir de ambos SEL?

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6x_1 + 3x_3 = -2 \\ -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

b) Interpretar geométricamente.

Figura 5: *ejemplo de tarea del práctico – SEL equivalentes*

La resolución de esta tarea requiere de la articulación de cuadros. En efecto, para hallar el conjunto solución el estudiante trabaja en el cuadro de los SEL y en el cuadro de las matrices manipulando ostensivos adecuados tal como se muestra en la Figura 2.

En cambio, la interpretación geométrica de los SEL con 3 incógnitas requiere conocimientos acerca de objetos geométricos en el espacio. En este tipo de tarea, el uso del software es fundamental. Ayuda al estudiante tanto a visualizar SEL equivalentes, como SEL compatibles indeterminados. La Figura 6 muestra las posiciones de todos los planos. Además, en la vista algebraica, se observa la forma paramétrica del conjunto solución obtenida con el comando *Interseca*.

También vemos en estos ejemplos una vez más, que es labor del docente enseñar a sus estudiantes que tales dispositivos son una ayuda valiosa en manos del usuario que comprende el enunciado del problema que debe resolver y las estrategias para lograrlo.

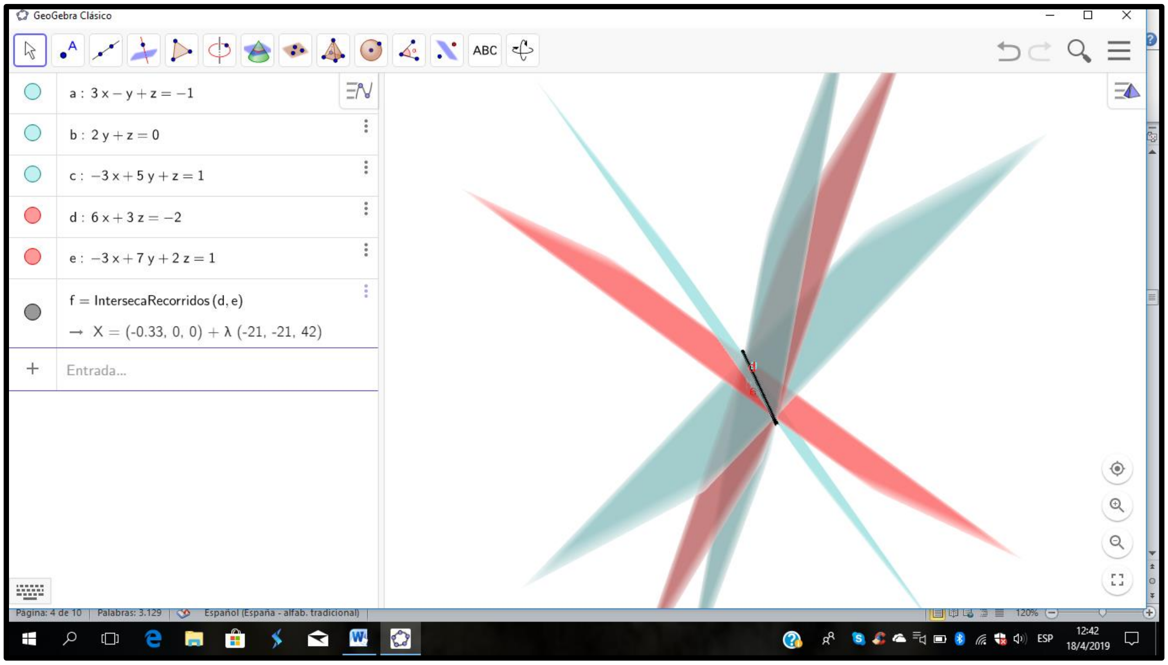


Figura 6: *interpretación geométrica de SEL equivalentes*

En general, y como se puede observar en los ejemplos anteriores, no se le dice al estudiante lo que tiene que hacer exactamente con el software, sino que se lo deja frente a la totalidad de los recursos disponibles en Geogebra, por lo cual debe decidir por sí mismo, o con sus pares, cuándo y cómo utilizarlo. Por otro lado, esta modalidad ayudó a que el estudiante practique para los exámenes presenciales, donde se podía usar la computadora.

La noción de *topos*, introducida por Chevallard y Grenier (1997) es adecuada para el análisis de procesos de estudio que proponen nuevas formas de trabajo tanto para el profesor como para el alumno, a partir del significado de la palabra latina *topos*, que significa lugar. Estos autores consideran que el topos del profesor y del alumno corresponden al momento y el lugar en el que cada uno de ellos juega, con cierta autonomía, su papel en el proceso de enseñanza y de aprendizaje. En este sentido, con la reformulación de los prácticos y otra modalidad de evaluación, se intentó cambiar el topos del estudiante para que gradualmente abandonen su dependencia con los profesores. Por otro lado, corresponde un cambio importante en el topos del profesor, ya que debe proponer tareas más abiertas y orientar al estudiante en la búsqueda de respuestas.

Análisis de resultados

Se presentaron a rendir el examen parcial 15 estudiantes, los cuales serán mencionados oportunamente como E1, E2, … El tiempo destinado para el examen fue el mismo que se utiliza habitualmente, esto es, 3 horas. Como mencionamos en el párrafo anterior, el examen fue presencial, cada estudiante podía utilizar su computadora personal en la resolución de las tareas planteadas, y al finalizar el tiempo estipulado, debía entregar dichas resoluciones por escrito.

A continuación, en la Figura 7, presentamos los enunciados de los tipos de tareas propuestos.

2º parcial Algebra y Geometria I

Nota: use Geogebra cuando lo considere necesario

1. Una matriz A_{nxn} se dice nilpotente de orden k si $A^k = O$ (matriz nula) para algún $k \geq 1$.

   a) Verificar que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente e indicar el menor valor de k tal que $A^k = O$

   b) Demostrar: si A_{nxn} es nilpotente de orden k entonces $\det A = 0$

   c) Sea A_{4x4} nilpotente de orden 3. Calcular $det[2(Id + A + A^2)(Id - A)]$

2. Hallar una matriz X_{3x3} tal que $2X - A = BX$ donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y

   $$B = \begin{pmatrix} 7 & -10 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Proponer un SEL de 2x3, con coeficientes reales, cuya solución general sea:

   $$S = \{(x; y; z) = (-3; 5; 1) + \lambda(-3; 2; 2) \quad \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4. Resolver el siguiente SEL por el método de Gauss. Decir si es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Interpretar geométricamente:

   $$\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -x - y + 5z = 8 \\ -6x - 3y + 12z = 5 \end{cases}$$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & k \\ -1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Si $A^{-1}.\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallar k y A^{-1}.

Figura 7: *enunciados del examen de Álgebra y Geometría I*

Para el análisis de las producciones de los estudiantes en relación con el uso (o no uso) de Geogebra, explicitaremos algunos de los tipos de tareas que se evaluaron.

T_1 *: Aplicar una definición a un caso particular o verificar una definición*

Aplicar la definición de matriz nilpotente implica multiplicar una matriz dada por sí misma hasta obtener, si es posible, la matriz nula. En este caso, la matriz A es nilpotente de orden 3. Se observaron muchos casos donde los estudiantes no resolvieron esta tarea. Además, seguramente era la primera vez que leían la definición de matriz nilpotente. Se observó lo mismo en el examen recuperatorio, donde se planteó la definición de matriz ortogonal. Podemos considerar que los estudiantes presentan dificultades para aplicar una definición en el dominio del álgebra, una habilidad poco trabajada en la escuela secundaria. El papel de Geogebra en este tipo de tarea es complementario. Algunos estudiantes lo usaron para calcular las potencias de la matriz A.

T_2 *: Resolver ecuaciones matriciales*

La resolución más económica de esta tarea requiere conocimientos sobre las propiedades de las operaciones con matrices, sobre todo, la propiedad distributiva. La mayoría de los estudiantes optaron por la técnica de "despejar" la matriz X, concluyendo que la matriz pedida es $X = (2Id - B)^{-1}.A$
Hasta aquí se pretendía que llegara el trabajo con lápiz y papel, pero curiosamente, muchos continuaron la tarea sin utilizar Geogebra, cometiendo errores de cálculo o consumiendo tiempo innecesariamente.

T_3 : Proponer un SEL a partir de un conjunto solución dado en forma paramétrica

Cuando el conjunto solución dado representa una recta en el espacio, la técnica consiste en hallar dos planos cualesquiera cuya intersección sea dicha recta. Una técnica posible, o resolución esperable, consiste en manipular las ecuaciones paramétricas de la recta dada en el enunciado, llegando, por ejemplo, al siguiente SEL de 2x3:
$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ 2x + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$
Con Geogebra es posible verificar los resultados obtenidos, como se puede observar en la siguiente figura:

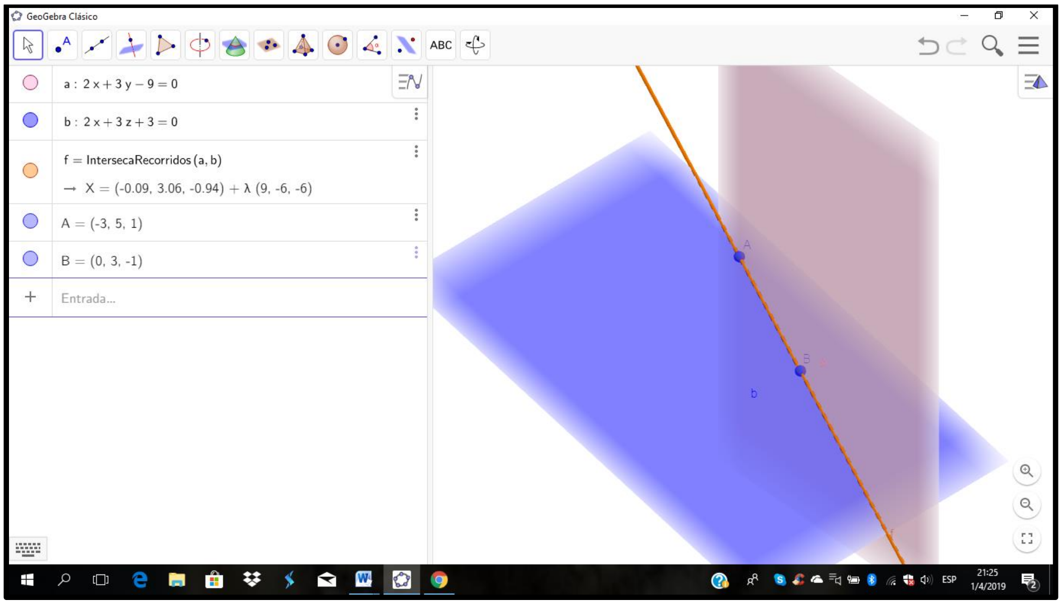


Figura 8: *representación geométrica del SEL de 2x3 y el conjunto solución*

Claramente, la respuesta a este tipo de tarea no es única y la técnica de resolución tampoco. Otra técnica posible emerge de los conocimientos que el estudiante tenga sobre rectas y planos en el espacio. En este sentido, algunos estudiantes abordaron la tarea utilizando ostensivos y elementos tecnológicos (ecuación paramétrica de la recta, vector director, vector normal, producto escalar) del cuadro de la geometría afín euclidiana.

En síntesis, este tipo de tarea podría considerarse la tarea inversa de resolver un SEL, requiere de la articulación de cuadros y la respuesta no es única. Para los estudiantes, tal "inversión" y "no unicidad de la respuesta" representan generalmente un mayor desafío.

T_4 : Interpretar geométricamente la solución de un SEL

Esta tarea, con ayuda de Geogebra, no presentó dificultad alguna. En general, las resoluciones fueron correctamente justificadas como se observa en el siguiente examen.

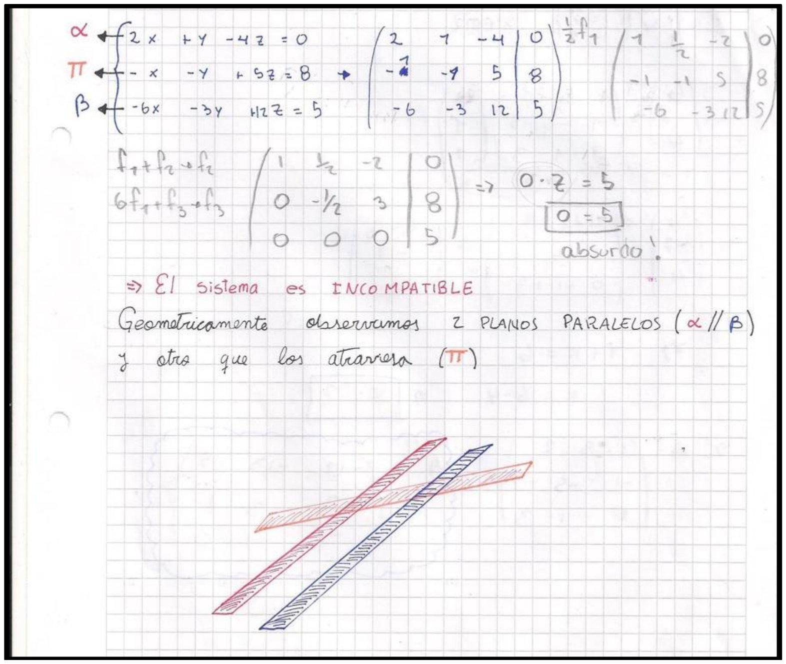


Figura 9: *Respuesta de E8. Fuente: datos de las autoras.*

Asimismo, se observó que el cambio de cuadro ayuda al estudiante a comprender mejor la razón por la cual distintos SEL incompatibles tienen distintas interpretaciones geométricas. En este caso, la imagen que se obtiene graficando con Geogebra es la siguiente:

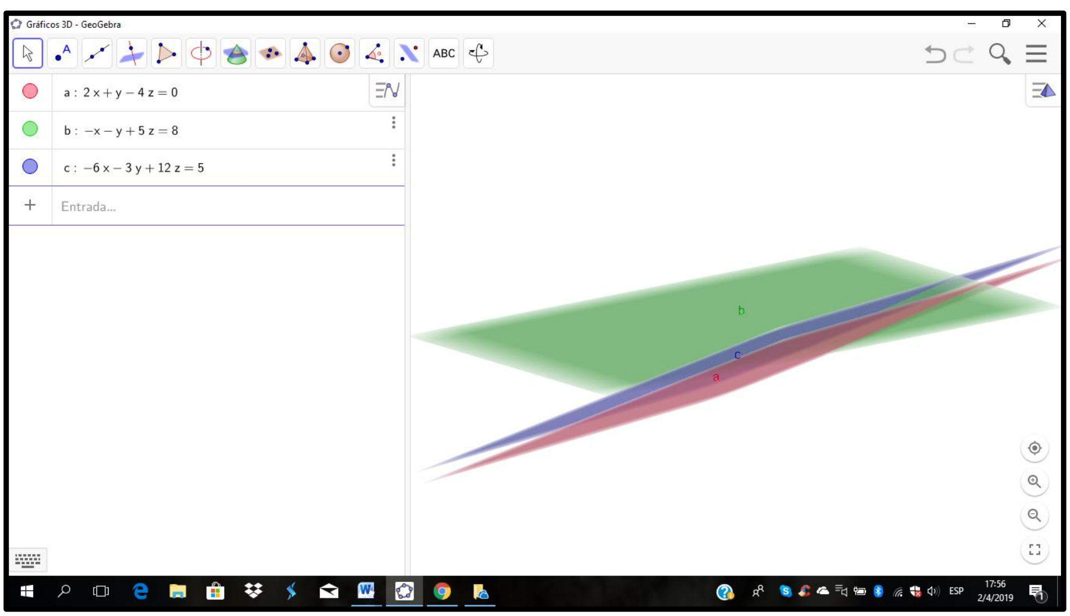


Figura 10: *representación geométrica de un SEL de 3x3 incompatible*

T_5 *: Operar con matrices inversibles, con matrices de distinto orden y con matrices con algún elemento desconocido.*

En la resolución de este tipo de tarea se observó que la mayor dificultad estuvo en la comprensión del enunciado, el cual involucra distintos ostensivos desconocidos: la letra k y la matriz A^{-1}.

Los estudiantes que intentan hallar la matriz inversa antes de calcular el valor de la incógnita k, abandonan la tarea ya que los cálculos se vuelven muy engorrosos. La matriz A^{-1} no se puede calcular con Geogebra porque en la hoja de cálculo no es posible crear la matriz A. En definitiva, se trata de una cuestión tecnológica, en el sentido de la TAD, que consiste en elegir el algoritmo más adecuado o económico para realizar la tarea.

Los estudiantes que, como primer paso hallaron el valor de la incógnita k, utilizaron Geogebra para hallar A^{-1}. La siguiente figura muestra la técnica empleada:

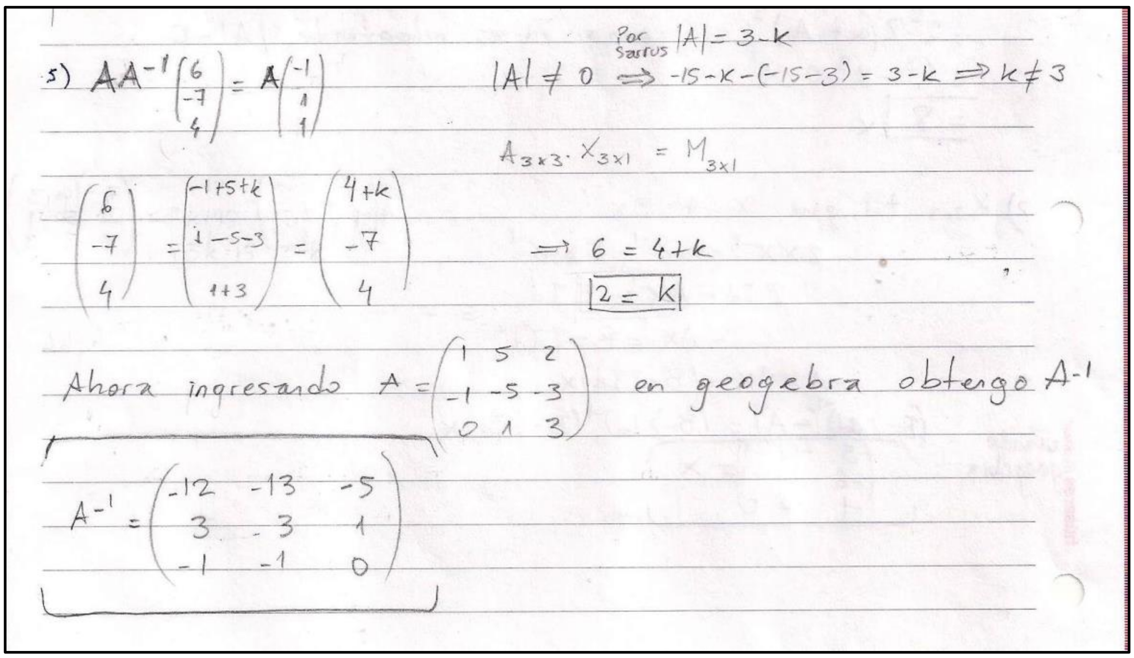


Figura 11: *Respuesta de E1. Fuente datos de las autoras.*

En consonancia con los enunciados de los prácticos de la materia, las consignas de los exámenes no indicaban en qué momento exacto debía usarse Geogebra, sino que se dejaba la decisión a cargo del estudiante. Ante esta situación algunos estudiantes tendían a resolver todo el examen sin Geogebra, ya que disponían de técnicas para hacerlo. Sin embargo, en estos casos se observaron que algunas tareas quedaron incompletas o sin resolver por falta de tiempo.

Conclusiones

Destacamos que la toma de exámenes con computadora en cursos de álgebra universitarios no es una práctica común. Los estudiantes se responsabilizaron por traer individualmente la computadora a la hora de rendir el parcial (o recuperatorio). El uso del software permitió evaluar tipos de tareas que no suelen incluirse en los exámenes tradicionales, como por ejemplo, la interpretación geométrica de SEL incompatibles. En este sentido, confirmamos que los gráficos en 3D complementan y ayudan a comprender mejor lo que se está haciendo algebraicamente, lo cual es muy valorado por los estudiantes en una situación de examen.

Si bien algunos estudiantes no desarrollaron los prácticos con la profundidad esperada, la experiencia en general resultó beneficiosa desde el punto de vista del proceso de estudio de los temas SEL, matrices y determinantes, ya que posibilitó tanto un trabajo de carácter exploratorio, como de validación. Destacamos muy especialmente las tareas planteadas para utilizar simultáneamente la vista algebraica y 3D que ofrece Geogebra, cuyo estudio favoreció la articulación de cuadros.

La implementación de tareas de lápiz y papel con el complemento de Geogebra permitió reducir el énfasis en los aspectos manipulativos del álgebra y enfocar el trabajo de los estudiantes en tareas conceptuales, o bien promover tanto aspectos conceptuales como técnicos del Álgebra Lineal. En mayor o menor medida, los estudiantes incorporaron esta herramienta tecnológica al estudio de los SEL, matriz y determinante. Asimismo, valoraron positivamente la toma de exámenes con computadora.

El uso del software permitió un tratamiento adecuado del error y ayudó a cambiar el topos del estudiante para que gradualmente abandonen su dependencia con los profesores. Este cambio en el topos de los estudiantes implicó cambios importantes en el topos del profesor, ya que fue esencial proponer tareas más abiertas, orientar al estudiante en la búsqueda de respuestas y evaluar de manera coherente con el trabajo realizado en clase.

El análisis de los resultados permite afirmar que las tareas propuestas son posibles de desarrollar con autonomía por parte de los estudiantes, quienes se preocuparon por aprender el software, aunque la gran mayoría ya lo conocía de la escuela secundaria. Lo que tuvieron que aprender fue a usar la vista 3D. En varias oportunidades preguntaron qué es exactamente lo que se iba a evaluar con la computadora. Manifestaron cierto grado de resistencia a las tareas donde no era evidente para qué usar el software. Esta actitud fue cambiando a lo largo del proceso de estudio.

Por último, consideramos importante mencionar las restricciones que condicionaron el desarrollo de esta propuesta en la institución. Por tratarse de una investigación realizada con un grupo de estudiantes de primer año fue preciso atenerse a la cronogénesis (Chevallard, 1997) establecida por el plan de estudios, siendo hechas pequeñas alteraciones a fin de no des-caracterizar el curso. Las actividades diseñadas (prácticos y evaluaciones) siguieron la propuesta institucional y están fundamentadas en las organizaciones matemáticas indicadas en el plan de estudios. Lo que ayudó al cambio fue la introducción del software, que exige una nueva forma de trabajo con los estudiantes. Esto demuestra que los cambios necesarios para la aplicación de TICs en cursos ya establecidos requieren mucha negociación y una reflexión por parte del investigador, que necesita estar atento a las condiciones y restricciones que pueden bloquear la investigación.

Referencias bibliográficas

Burgos J. (1992) Álgebra lineal. McGraw-Hill: México.

Carlson, D. (2004). The Teaching and Learning of Tertiary Algebra. En K. Stacey, H. Chick, M. Kendal, B. Barton, & J. Silva (Eds.) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Vol. 8, pp. 293–309). Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Yves (1997). La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado. AIQUE: Buenos Aires.

Chevallard, Y. y Grenier, D. (1997) Le topos de l'éleve. En Actes de la IX école d'été de didactique des mathématiques de Houlgate. Francia: Houlgate.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-124.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266,

Chevallard, Y. (2004) Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, Recuperado el 20 de marzo de 2019 de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45

Chevallard, Y. (2007) La problématique anthropologique en didactique, d'hier à demain. Recuperado el 20 de marzo de 2019 de: http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/Comunicaciones.htm

Dias, M. (1998) Les problèmes d'articulation entre points de vue cartésien et paramétrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. Tesis doctoral. Université de Paris 7.

Dorier, J. y Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, A. Schoenfeld, J. y Silva (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 255-273), Springer Netherlands.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM 6, 132-158.

Grossman S. (1991). *Álgebra lineal*. 5ta edición. McGraw-Hill. México DF.

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

PERCEPCIONES HACIA EL USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN ESTUDIANTES NORMALISTAS

PERCEPTIONS OF THE USE OF TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING IN ELEMENTARY STUDENT-TEACHERS

Stephanie Ibarra Cruz, Jaime Rodríguez Gómez
Universidad de Montemorelos (México)
stephanie.ibarra.cruz@gmail.com, jar@um.edu.mx

Resumen
El estudio forma parte del diagnóstico de una investigación titulada: "Uso de la tecnología para fomentar el álgebra temprana", en el que se busca conocer las percepciones de estudiantes normalistas de la Licenciatura en Educación Primaria. La metodología utilizada fue cuantitativa descriptiva. Se muestran los resultados obtenidos a en la medición, por medio de una escala Likert, de las actitudes de 129 estudiantes normalistas hacia la enseñanza de las matemáticas apoyadas con el uso de la tecnología. Los resultados evidencian una gran oportunidad de desarrollar actividades que ayuden a los estudiantes para incorporar la tecnología, ya que por un lado hay apertura hacia su uso, pero a la vez se perciben inquietudes que limitan su certidumbre respecto a los beneficios que brinda.

Palabras clave: percepciones, actitudes, uso de tecnología, matemáticas.

Abstract
The study is part of the diagnosis of a research entitled: "Use of technology to promote early algebra"which seeks to know the perceptions of school-student-teachers of the elementary education degree. A quantitative descriptive methodology was used. It shows the results obtained in the measurement, by means of a Likert scale, of 129 school-student-teachers' attitudes towards technology-based mathematics teaching. The results evidence a great opportunity to develop activities that help students to use technology, since, on the one hand, there is an opening towards its use, but, there are also concerns that limit students' certainty regarding the benefits it provides.

Key words: perceptions, attitudes, use of technology, mathematics

Introducción

Este documento forma parte del proyecto de investigación titulado; “Efecto de una intervención con tecnología en las actitudes hacia su uso y el aprendizaje de álgebra temprana”, considerando tanto estudiantes del tercer ciclo de educación primaria (niños entre los 10 y 12 años de edad), como estudiantes normalistas del último año de la Licenciatura en Educación Primaria. El estudio se divide en etapas para su realización, siendo estas el diagnóstico de las variables involucradas, la planeación y diseño de las actividades, su implementación y el análisis y divulgación de los resultados obtenidos.

Para Kieran, Pang, Schifter y Fong Ng (2016), existen cada vez más investigaciones que muestran evidencia empírica acerca de cómo el desarrollo del pensamiento algebraico temprano evoluciona hacia pensamientos más sofisticados y resaltan que existe una gran oportunidad en el uso de la tecnología para desarrollarlo. Hacen ver que aun siendo escasas las investigaciones en esta área, se observan evidencias de que la tecnología favorece el razonamiento algebraico de una manera más profunda.

Es por eso que el primer objetivo propuesto fue el de elaborar un diagnóstico sobre las percepciones de estudiantes normalistas hacia el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. El estudio se realizó en dos Escuelas Normales, ubicadas en Montemorelos, Nuevo León, México; con los estudiantes del último año de la Licenciatura en Educación Primaria, en el curso 2018-9. El interés de indagar sobre las percepciones de los estudiantes normalistas surge de la importancia que tiene la formación inicial que están recibiendo como futuros docentes, ya que en dicha formación se crean ideas y concepciones sobre la enseñanza que, una vez ingresados al mundo laboral, serán plasmadas en el aula de clases.

Marco referencial

En la actualidad, la tecnología es un elemento que se encuentra presente en la vida cotidiana de casi cualquier persona, modificando no solo aspectos de recreación e interacción social, sino que también afecta la dinámica que se desempeña dentro de la educación, ya que esta no puede permanecer aislada de los cambios que surgen en la sociedad. De esta forma, la tecnología en la educación ha ido adquiriendo un papel importante en investigaciones y nuevas metodologías de enseñanza que la incorporan, con la finalidad de utilizarla adecuadamente para lograr un aprendizaje significativo en los alumnos.

Para que la tecnología pueda ser adoptada dentro del aula de clases como herramienta transversal en las distintas áreas del conocimiento y sea aprovechada de la mejor manera para el aprendizaje de los estudiantes, el papel del docente juega un papel muy importante; ya que no depende solo de las capacidades o competencias que posea, sino que, a través de sus percepciones y actitudes hacia ella, impactará la manera, ya sea positiva o negativa, en que se integrará (Álvarez et al., 2011;Valdés-Cuervo, Arreola-Olivarría, Angulo-Armenta, Carlos-Martínez y García-López, 2011)

Tejedor Tejedor, García-Valcárcel Muñoz-Repiso y Prada San Segundo (2009) mencionan que dentro de los factores que dificultan la integración de la tecnología por parte de los maestros se encuentran los siguientes: (a) la resistencia a cambiar su práctica e ideas; (b) la deficiencia en la formación inicial en cuanto al uso de la tecnología; (c) la autoestima y la frustración; y (d) la percepción de la tecnología como sustituto del maestro en un fututo.

Dada la situación anterior se han realizado distintas investigaciones sobre las actitudes y la forma de percibir el uso de la tecnología por parte de los docentes de distintos grados escolares, como las elaboradas por Álvarez et al. (2011), Peinado, Bolívar y Briceño (2011), Sáez López (2011) y Valdés-Cuervo, Arreola-Olivarría, Angulo-Armenta, Carlos-Martínez y García-López (2011), obteniendo resultados que vale la pena considerar para la integración de la tecnología en el ámbito escolar, por ejemplo, los elementos que se consideran importantes para incorporarla, ya sean beneficios para el aprendizaje o en la agilización de procesos administrativos, y las barreras o limitaciones que se perciben como impedimento para su uso en el ámbito educativo.

En dichas investigaciones se han encontrado resultados similares entre sí, donde permanece constante la actitud positiva por parte de los maestros para introducir la tecnología dentro de sus clases y estar conscientes de la importancia que tiene su actuación para lograr incorporarla adecuadamente, es decir, que cumpla con su propósito de fomentar el aprendizaje en los estudiantes Sin embargo, a pesar de la actitud positiva, la tecnología no se utiliza de la manera eficiente, esto debido al desconocimiento de los docentes sobre metodologías o estrategias para implementarla en sus prácticas educativas, lo que resalta aspectos como la importancia de una formación profesional en el uso de la tecnología, el seguimiento y actualización de los docentes, la importancia de contar con diversidad de recursos en los centros escolares y la inversión, por parte de los docentes, de su tiempo y esfuerzo (Álvarez et al., 2011; Peinado, Bolívar y Briceño, 2011; Sáez López, 2011; Valdés-Cuervo, Arreola-Olivarría, Angulo-Armenta, Carlos-Martínez y García-López, 2011).

La tecnología está comenzando a integrarse en las distintas áreas del conocimiento y la asignatura de matemáticas no es la excepción. Según Pierce y Ball (2009) y Olivier-Rodríguez y Díaz-López (2016), las herramientas tecnológicas que pueden ayudar en la enseñanza de las matemáticas son cada vez más diversas y accesibles. Sin embargo, sigue prevaleciendo una concepción tradicional por parte de los maestros a enseñar matemáticas únicamente a lápiz y papel, lo que limita a los estudiantes en la visualización y comprensión de dicha asignatura, como la manipulación de objetos matemáticos a través de la geometría dinámica. Estas concepciones se pueden generar en los docentes desde su formación profesional, ya que, si se les educa con una metodología tradicional, lo más probable es que en sus prácticas pedagógicas mantengan dicho estilo y difícilmente optarán por alternativas que enriquecen la enseñanza y el aprendizaje de los alumnos, como lo es la tecnología.

Con respecto a la actitud hacia el uso de la tecnología en la asignatura de matemáticas, los docentes manifiestan una actitud positiva (Pierce y Ball, 2009; Wachira y Keengwe, 2011), siendo un 86% de los maestros entrevistados por Fernández Martín, Hinojo Lucena y Aznar Díaz (2002), quienes opinaron que la tecnología es aplicable en la asignatura de matemáticas , sin embargo, a pesar de la disposición manifestada, los autores concluyeron que son pocos los docentes observados que realmente la utilizan de manera cotidiana al impartir sus clases. De igual forma los docentes consideran que su uso motiva a los alumnos a participar en la clase (Bennison y Goos, 2010), aún y cuando encuentran barreras para incorporarla, por ejemplo, el costo para adquirir herramientas tecnológicas que genera inequidad dentro del grupo; así mismo, la falta de tecnología y conocimiento pedagógico para su uso, por lo que resaltan la importancia de abordar las actitudes, las percepciones y la capacitación en el uso de la tecnología desde la formación profesional de los futuros maestros (Pierce y Ball, 2009; Wachira y Keengwe, 2011).Los maestros debieran percibir la transversalidad y la interacción de la tecnología con las matemáticas y su enseñanza (Niess, 2005).

Dada la situación anterior, es importante conocer, de manera particular, las actitudes y las percepciones que poseen los futuros docentes ante el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, ya que en las investigaciones antes mencionadas la población estudiada se conforma de maestros que se encuentran en servicio. Por lo que al analizar a los docentes en formación (normalistas), permite tomar decisiones para cambiar, de ser necesario, la formación inicial que se está impartiendo a nivel licenciatura; de tal manera que egresen con una mentalidad distinta, abiertos al uso de metodologías y herramientas variadas que mejoren la calidad educativa.

La percepción que posee una persona va más allá de ideas u opiniones que se puedan tener de un tema en específico, implica extraer y seleccionar información del mundo exterior que conduce a actuar de manera más racional y coherente para la toma de decisiones y emitir juicios, afectando otras actividades psicológicas como el aprendizaje y la memoria (Gestalt, citado en Oviedo, 2004). Por lo que, en el presente estudio, se consideró el término percepción como las preconcepciones o ideas de los estudiantes normalistas que condicionan la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, incluyendo el componente afectivo (actitudes).

Para medir las percepciones existen diversas teorías, por lo que en este estudio se seleccionó la Teoría del Comportamiento Planificado (TPB, por sus siglas en inglés) utilizado por Pierce y Ball (2009) en la elaboración de su instrumento, la cual se centra en los factores (percepciones y actitudes) que pueden facilitar o presentar barreras en la intención de una persona de cambiar sus ideas y acciones, en este caso, sobre el uso de la tecnología en matemáticas. Ajzen (citado en Pierce y Ball, 2009) menciona que esta teoría presenta tres dimensiones que determinan el cambio, los cuales son; las actitudes hacia el objeto en cuestión (AC), el factor social denominado norma subjetiva (NS) y el grado de control del comportamiento (CC) percibido por los sujetos. Estas dimensiones se describen a continuación.

El primer componente de una percepción, según la TPB, son las actitudes, siendo este concepto difícil de definir debido a su complejidad. Gómez-Chacón (2010) utiliza una definición multidimensional del término actitud, ya que, a su vez, dentro de la actitud se encuentran inmersos otros componentes, como el emocional, las creencias y el comportamiento, por lo que para la autora la actitud, específicamente hacia la matemática se define como la articulación de las emociones positivas y negativas, las creencias y la forma de actuar de las personas hacia las matemáticas (Hart, 1989).

Dada la definición anterior, las actitudes hacia el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, se pueden considerar como la disposición emocional, ya sea favorable o no, por parte de los estudiantes normalistas en la incorporación de la tecnología. De igual forma, estas actitudes pueden relacionarse con el efecto que perciben en su práctica educativa (Pierce y Ball, 2009), ya sea en la motivación y aprendizaje de sus alumnos o en la facilidad para impartir sus clases.

Por otro lado, se encuentra el factor social de las normas subjetivas. Este hace referencia a la influencia de la cultura de enseñanza matemática dentro del plantel educativo, ya que la opinión de otros agentes que se encuentran involucrados en el acto educativo puede influir en la decisión de los maestros de incorporar o no la tecnología dentro de sus clases. Entre los agentes que ejercen influencia en la toma de decisiones se encuentran otros maestros, del mismo o distinto grado, el personal administrativo (directivo y supervisores) y los padres de familia. Todos estos agentes interactúan e intercambian ideas sobre la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes, con la finalidad de mejorarlos. En México, estos intercambios se dan especialmente en las juntas de Consejo Técnico Escolar, el cual “es el órgano colegiado de mayor decisión técnico pedagógica de cada escuela de Educación Básica, encargado de tomar y ejecutar decisiones enfocadas a alcanzar el máximo logro de los aprendizajes de todos los alumnos de la misma” (SEP, 2017, p.1). En estos momentos de diálogo, el directivo y los docentes intercambian experiencias y estrategias que pueden ser de utilidad para el aprendizaje de los estudiantes, por lo que, si se promueve dentro de estos espacios el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y se le da seguimiento, es más probable que un maestro esté dispuesto a incorporarla.

Por último, se encuentra el factor de control del comportamiento, el cual hace referencia a las limitaciones que, de manera personal, el maestro puede percibir en el uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas (Pierce y Ball, 2009). De igual forma Wachira y Keengwe (2011), mencionan que las limitaciones o barreras que pueden percibir los maestros, se clasifican de dos maneras, las externas e internas. Dentro de las barreras externas se encuentran aspectos como: (a) la disponibilidad de la tecnología, ya que, si no se cuenta con los recursos necesarios, difícilmente un maestro la incorporará; (b) la fiabilidad de la tecnología, aspecto relacionado a las fallas técnicas que se pueden generar; y (c) el apoyo tecnológico y liderazgo tecnológico, referente al mantenimiento que requieren las computadoras y la necesidad de una persona especializada en hacerlo y que sea capaz de brindar asesoría técnica. Por otro lado, las barreras o limitaciones internas se conforman de los siguientes aspectos: (a) la falta de tiempo, el cual es fundamental para planear las actividades o aprender a utilizar de manera adecuada la tecnología; (b) falta de conocimiento, problema generado desde la formación inicial de docentes, donde es de gran importancia la enseñanza de estrategias y metodologías para incorporar la tecnología de manera transversal en las distintas disciplinas; y (c) la ansiedad y confianza que posean los maestros como usuarios de la tecnología, sintiéndose capaces o no de solucionar cualquier problema que se les presente con el uso de la tecnología.

Según Pierce y Ball (2009), los tres factores o dimensiones antes mencionados, se pueden agrupar en dos categorías más globales, las cuales son las barreras y los facilitadores o habilitadores, donde las barreras son todos aquellos elementos que impiden la incorporación de la tecnología y, por otro lado, los facilitadores son todas aquellas oportunidades que permiten su utilización.

Metodología

El estudio se implementó bajo un enfoque cuantitativo descriptivo transversal. Para la recolección de los datos se utilizó una adaptación al español del cuestionario "Mathematics with Technology Perceptions Survey (MTPS)" elaborado por Pierce y Ball (2009), el cual fue diseñado para maestros en servicio, sin embargo, para esta investigación diagnóstica se adaptó, tanto en idioma como en la reacción de algunos ítems para ser administrado a estudiantes normalistas. El cuestionario está integrado por 12 ítems valorados con una escala Likert que va de completo desacuerdo (1) hasta completamente de acuerdo (5). Los ítems se encuentran agrupados según dos clasificaciones. La primera consta de tres factores, los cuales son actitudes (AC), normas subjetivas (NS) y control de comportamiento (CC). La segunda clasificación se divide en dos factores, facilitador (F) y barrera (B). Este se aplicó a todos los estudiantes de las dos escuelas normales de Montemorelos, Nuevo León, México, que se encontraban en el último año de la Licenciatura en Educación Primaria y realizando sus prácticas profesionales en escuelas primarias, con la finalidad de diagnosticar las percepciones hacia el uso de la tecnología que poseían y determinar de esa modo la pertinencia de iniciar una intervención con los dichos estudiantes.

Resultados

El instrumento se aplicó a 129 estudiantes del último año de la Licenciatura en Educación primaria de dos escuelas Normales de la ciudad de Montemorelos, Nuevo León, de los cuales 96 fueron mujeres (74%) y 33 hombres (26%). Dichos estudiantes se encuentran realizando sus prácticas profesionales durante el ciclo escolar 2018-2019 en distintas escuelas primarias de la localidad, así como en distintos grados.

En un primer momento se realizaron los análisis de confiabilidad y validez del instrumento. En cuanto a la confiabilidad se obtuvo un coeficiente alfa de Cronbach de 0.737, lo cual es aceptable. Por otro lado, en la validez para las dimensiones AC (cinco ítems), CC (cuatro ítems) y NS (tres ítems), se obtuvo un valor KMO de .775 con esfericidad significativa ($p = .000$) y una varianza explicada del 53.5%. Por otro lado, se realizó el análisis considerando la extracción de dos dimensiones (F y B), obteniendo un valor KMO de .775 con esfericidad significativa ($p =.000$) y una varianza explicada del 44.7%. Únicamente en el primer caso aparecieron dos ítems con cargas factoriales menores a .3, en sus factores respectivos.

Respecto al comportamiento de las variables, en la Tabla 1, se muestran los descriptivos para cada dimensión y la percepción en general (Total). En todos los casos se han recodificado los ítems negativos de tal forma que las medias mayores indican una mejor percepción del uso de la tecnología en el aula de matemáticas. La dimensión que presenta una mejor percepción es la de actitud hacia la tecnología (AT) con un nivel del 70% de la escala, lo que hace notar que presentan una actitud favorable con tendencia a indecisión y están mayormente de acuerdo con el uso de la tecnología para la enseñanza de las matemáticas.

Tabla 1 - *Descripción de las variables*

Dimensión	M	DE	Asimetría	Curtosis
Actitud hacia la tecnología (AT)	3.78	0.713	-1.070	1.977
Control del comportamiento (CC)	3.58	0.746	-0.701	0.860
Normas subjetivas (NS)	3.33	0.565	-0.195	0.169
Facilitadores (F)	3.68	0.629	-1.082	2.337
Barreras (B)	3.53	0.671	-0.603	.780
Percepción general	3.60	0.508	-0.675	1.297

Por otro lado, en la dimensión de control del comportamiento se observa una percepción del 64.5%, lo cual indica que los estudiantes normalistas no consideran muy importante la presencia de condicionantes externos que limiten la incorporación de la tecnología en sus clases, concordando con la dimensión de barreras (B) con un 63.2%, ambas dimensiones con los ítems recodificados. En el caso de la dimensión de normas subjetivas (NS), relacionada con la percepción que poseen los estudiantes normalistas sobre las opiniones de agentes como directivos, maestros y padres de familia, se observa que poseen una percepción un poco favorable tendiente a neutral con un 58% de la escala, siendo la dimensión con menor puntuación.

En la dimensión de facilitadores, analizada como un todo, se puede observar con una percepción favorable del 67% de la escala, lo que hace ver que los estudiantes normalistas observan en su ambiente más aspectos positivos que les ayuden en la incorporación de la tecnología. Por último, la percepción general que se obtuvo fue del 65% de la escala, lo que muestra que los estudiantes se encuentran generalmente de acuerdo con la incorporación de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas.

En la Tabla 2 se muestran los ítems con las respuestas originales (sin recodificar) con sus valores descriptivos de tendencia media y de dispersión. En ellos se puede observar que en la dimensión de Actitud hacia la tecnología (AT), los estudiantes se encuentran de acuerdo con que la tecnología ayuda a hacer más agradables las matemáticas para los estudiantes, así como la mejora de la motivación, el involucramiento con problemas del mundo real y en obtener una comprensión más profunda de las matemáticas. Sin embargo, poseen una posición neutral con respecto al aprendizaje de las matemáticas de lápiz y papel (a mano), donde se esperaba que hubiese cierto desacuerdo.

Por otro lado, en la dimensión CC, se observa que los normalistas adoptan una posición neutral ante el costo que implica para los estudiantes el adquirir tecnología, pero se encuentran en desacuerdo o no consideran como limitantes para el uso de la tecnología, cuestiones como los inconvenientes que pueden generar en su uso como imprevistos, el tiempo para completar los contenidos escolares y el tiempo personal que consume aprender a utilizarla, lo cual es favorable para la actitud.

Tabla 2 – *Descriptivos para los ítems según sus dimensiones.*

Dimensiones		Ítems	M	DE
Actitud hacia la Tecnología	F	Usar tecnología hace a las matemáticas más agradables para los estudiantes	4.19	.936
	F	Si uso más tecnología, mis estudiantes estarán más motivados para trabajar en matemáticas.	3.96	1.026

	F	La tecnología puede ser utilizada para permitir que mis alumnos se involucren con más problemas del mundo real	3.88	.984
	F	La tecnología puede ser utilizada para ayudar a los estudiantes a obtener una comprensión más profunda de las matemáticas de lo que es posible cuando se hacen a mano	3.72	.960
	B	Los estudiantes no entienden matemáticas al menos que las hagan a mano	2.85	1.146
Control del comportamiento	B	La tecnología es muy costosa para que mis alumnos tengan acceso a ella	2.66	1.209
	B	Si hay problemas inesperados causados por la tecnología, sería muy difícil para mí solucionarlo	2.36	1.088
	B	Aprender a usar nueva tecnología para mis clases de matemáticas consumirá mucho de mi tiempo personal	2.35	.981
	B	Si utilizo más tecnología no tendré tiempo de completar los contenidos del programa	2.30	.932
Normas Subjetivas	F	El director o supervisor espera que utilice la tecnología en las clases de matemáticas	3.31	.950
	F	Los padres de mis estudiantes piensan que se debería usar más tecnología en las clases de matemáticas.	3.01	.655
	B	Los maestros titulares piensan que cuando mis alumnos usan tecnología en matemáticas ellos solo están “presionando botones” y realmente no están aprendiendo matemáticas.	2.32	1.061

Por último, en la dimensión NS es donde se presenta la mayor neutralidad por parte de los normalistas, ya que no adoptan una postura negativa o positiva ante las opiniones de los directivos o padres de familia, es decir, al parecer no conocen la opinión de los directivos y padres de familia hacia el uso de la tecnología, debido al poco contacto o relación que mantienen con los mismos, al no ser los responsables del grupo. Y, por otro lado, consideran que los maestros titulares están de acuerdo con la incorporación de la tecnología para aprender matemáticas.

Al considerar los tres factores de la percepción se observa que las correlaciones entre ellas tienden a ser débiles por explicar menos del 10% de la varianza, pero significativas. De hecho, la relación más fuerte se da entre las actitudes hacia la tecnología y las normas subjetivas ($r = .359$, $p = .000$), pero solo se explica el 13% de la varianza entre ellos. Es decir, si se perciben opiniones favorables de los docentes, padres y directivos, es más probable que los estudiantes manifiesten también una actitud favorable.

Por otro lado, se pudo ver que la relación entre las barreras y los facilitadores es relativamente débil ($r = .221$, $p = .000$). En este caso resulta positivo por la recodificación que se hizo en el cálculo del puntaje de barreras. Sin embargo, aun así, se pude decir que la percepción favorable de la tecnología como un facilitador hacer ver una percepción más baja de las barreras.

Discusión y conclusiones

Respecto a la actitud en general, los resultados son bastante similares a los encontrados por Bennison y Goos (2010), quienes también exploraron la actitud en maestros de secundaria en Australia. Ellos encontraron que aproximadamente el 63.9% de los maestros están de acuerdo con los beneficios del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, mientras que, con los estudiantes considerados en esta investigación, el 61% también estuvieron de acuerdo, esto sugiere que, al menos en actitud, los estudiantes normalistas tienen actitudes similares a los docentes australianos. Cabría la necesidad de investigar más con respecto a los factores que están influyendo en ese nivel de actitud.

Además, como se pudo observar a lo largo del estudio y, concordando con lo investigado por distintos autores (Álvarez et al., 2011; Fernández Martín, Hinojo Lucena y Aznar Díaz, 2002; Peinado, Bolívar y Briceño, 2011; Pierce y Ball, 2009; Sáez López, 2011; Valdés-Cuervo, Arreola-Olivarría, Angulo-Armenta, Carlos-Martínez y García-López, 2011; Wachira y Keengwe, 2011), los docentes, en este caso estudiantes normalistas, poseen una buena actitud o disposición para incorporar la tecnología en la educación, y específicamente también en la asignatura de las matemáticas; especialmente en aspectos como la motivación que genera en los estudiantes, el hacer más agradable las matemáticas por medio de la tecnología y que puede ser utilizada para ilustrar cosas que son difíciles de representar sin la tecnología.

Al obtener un nivel del 70% de la escala, que si bien, se encuentra dentro del rango de aceptación, queda una brecha dada por las barreras percibidas. Tomando en cuenta las barreras descritas por Wachira y Keengwe (2011), los participantes consideraron como poco importante el tiempo extra que se requiere para planificar las actividades; sin embargo, la barrera que prevalece, siendo más comúnmente percibida por la muestra, corresponde a la falta de conocimiento, observado en la neutralidad al comparar el uso de la tecnología con el uso de lápiz y papel en la enseñanza de las matemáticas. Este problema se puede atender desde la formación inicial de los docentes al proporcionar herramientas y estrategias variadas que contribuyan al aprendizaje de los estudiantes, así como el clarificar las diferencias entre ellas y los distintos resultados que se pueden obtener al utilizarlas.

Coincidiendo con las ideas de Pierce y Ball (2009), estos resultados diagnósticos proveen una gran oportunidad para desarrollar las próximas actividades planteadas en la investigación general, que les ayuden a incorporar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, específicamente para el fomento del álgebra temprana, ya que por un lado hay apertura hacia su uso, pero a la vez se perciben inquietudes que limitan su certidumbre respecto a los beneficios que brinda, principalmente al compararla con el uso de papel y lápiz.

Al haber concluido el diagnóstico de las percepciones de los estudiantes normalistas, los siguientes pasos en el proyecto de investigación serán; realizar un diagnóstico sobre los conceptos algebraicos que poseen los normalistas, para posteriormente planear la intervención que se llevará a cabo. Por último, se valorarán los beneficios percibidos de la intervención tanto en el uso de la tecnología como en la introducción del álgebra temprana, así como observar si existe un cambio en las percepciones y actitudes manifestadas en este estudio.

Referencias bibliográficas

Álvarez, S., Cuéllar, C., López, B., Adrada, C., Anguiano, R., Bueno, A., Comas, I. y Gómez, S. (2011). Actitudes de los profesores ante la integración de las TIC en la práctica docente: estudio de un grupo de la Universidad de Valladolid. *Edutec: Revista Electrónica De Tecnología Educativa*, *35*, a160. https://doi.org/10.21556/edutec.2011.35.416

Bennison, A. y Goos, M. (2010). Learning to Teach Mathematics with Technology: A Survey of Professional Development Needs, Experiences and Impacts. *Mathematics Education Research Journal, 22*(1), 35-56.

Fernández Martín, F. D., Hinojo Lucena, F. J. y Aznar Díaz, I. (2002). Las actitudes de los docentes hacia la formación en Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) aplicadas a la educación. *Contextos Educativos, 5*, 253-270.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(2), 227-244.

Hart, L. (1989). Describing the Affective Domain: Saying What We Mean. En McLeod, D. B. y Adams, V. M. (eds.). *Affect and Mathematical Problem Solving*, pp. 37-45. Springer-Verlag.

Kieran, C., Pang, J. P., Schifter, D. y Fong Ng, S. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. ICME-13 Topical Surveys.

Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education, 21*(5). 509-523. doi: 10.1016/j.tate.2005.03.006

Olivier-Rodríguez, O. Z. y Díaz-López, J. R. (2016). El uso de las Tecnologías en la enseñanza aprendizaje de la matemática en la Universidad Experimental de las Fuerzas Armadas, Núcleo Sucre. *Santiago, 139*, 42-53.

Oviedo, G. L. (2004). La definición del concepto de percepción en psicología con base en la teoría Gestalt. *Revista de Estudios Sociales, 18*,89-96.

Peinado, S., Bolívar, J. M. y Briceño, L. A. (2011). Actitud hacia el uso de la computadora en docentes de educación secundaria. *CONHISREMI: Revista Universitaria Arbitrada de Investigación y Diálogo Académico, 7*(1), 86-105.

Pierce, R. y Ball, L. (2009). Perceptions that may affect teachers' intention to use technology in secondary mathematics classes. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 299–317. doi:10.1007/s10649-008-9177-6

Sáez López, J. M. (2010). Actitudes de los docentes respecto a las TIC, a partir del desarrollo de una práctica reflexiva. *Escuela Abierta, 13*, 37-54.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Lineamientos para la organización y funcionamiento de los Consejos Técnicos Escolares de educación básica*. México: SEP.

Tejedor Tejedor, F. J., García-Valcárcel Muñoz-Repiso, A. y Prada San Segundo, S. (2009). Medida de actitudes del profesorado universitario hacia la integración de las TIC. A scale for the measurement of University teachers' attitudes towards the integration of ICT. *Comunicar*: *Revista Científica de Educomunicación, 17*(33), 115–124. doi:10.3916/c33-2009-03-002

Valdés-Cuervo, A. A., Arreola-Olivarría, C. G., Angulo-Armenta, J., Carlos-Martínez, E. A. y García-López, R. I. (2011). Actitudes de docentes de educación básica hacia las TIC. *magis: Revista Internacional de Investigación en Educación, 3*(6), 379-392.

Wachira, P. y Keengwe, J. (2011). Technology Integration Barriers: Urban School Mathematics Teachers Perspectives. Journal of Science Education and Technology, 20(1), 17-25. doi:10.1007/s10956-010-9230-y

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

USO DE OBJETOS VIRTUAIS DE APRENDIZAGEM VISANDO A COMPREENSÃO E A REPRESENTAÇÃO DE ELEMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

USE OF VIRTUAL LEARNING OBJECTS FOR THE UNDERSTANDING AND REPRESENTATION OF ANALYTICAL GEOMETRY ELEMENTS

Solange Maria Guarda, Vitor José Petry
Universidade do Oeste de Santa Catarina (Brasil). Universidade Federal da Fronteira Sul (Brasil)
sola_g7@hotmail.com, vitor.petry@uffs.edu.br

Resumo
Nesta pesquisa foram usados objetos virtuais de aprendizagem - OVA desenvolvidos no software GeoGebra para o ensino de conteúdos relacionados à geometria analítica, sendo analisadas diferentes representações apresentadas por alunos, com o objetivo de identificar evidências da compreensão e aprendizagem de conceitos abordados. O trabalho se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, sendo a análise dos dados, textual discursiva. Embora a maioria dos alunos tenha conseguido transitar entre as diferentes formas de representação, algumas dificuldades foram observadas, indicando a necessidades de complementação de estudos através de sistematizações e principalmente do desenvolvimento de habilidades da representação descritiva dos elementos estudados.

Palabras chave: representações semióticas, geometria, OVA

Abstract
In this research virtual learning objects developed in GeoGebra software were used for the teaching of contents related to analytical geometry, analyzing different representations presented by students, with the objective of identifying evidence of the understanding and learning of the addressed concepts. The work is characterized as a qualitative research, with a textual discursive analysis of data. Although most of the students managed to go along the different forms of representation, some difficulties were observed, indicating the need to complement studies through systematizations and mainly through the development of skills of descriptive representation of the studied elements.

Key words: remiotic representations, geometry, virtual learning objects (OVA)

Introdução

Considerando as dificuldades relativas a conhecimentos da Matemática apresentados por alunos do Ensino Médio e ingressantes nos cursos superiores, inclusive nas áreas consideradas de exatas, algumas universidades, como é o caso da universidade campo desta pesquisa, oferecem disciplinas para a retomada de alguns conteúdos na tentativa de desenvolver em seus alunos habilidades de raciocínio lógico, de argumentação e de representação de conceitos e propriedades abordadas. Dessa forma, nesta pesquisa são analisadas, com base na teoria de Duval (2003, 2012), representações apresentadas por dezessete alunos da primeira fase de um curso de Arquitetura e Urbanismo na abordagem de conceitos de geometria analítica com o objetivo de identificar evidências da compreensão e aprendizagem de conceitos abordados.

Na perspectiva de um professor mediador dos processos de aprendizagem, cabe a ele a busca por métodos e estratégias que auxiliem o aluno na compreensão e representação dos objetos de estudo, visando torná-los mais significativos. Para Pozo (2002, p. 145), "[...] a possibilidade que um professor tem de mover seus alunos para a aprendizagem depende em grande parte de como ele mesmo enfrenta sua tarefa de ensinar". O uso de ferramentas tecnológicas pode auxiliar nesta tarefa, permitindo a interação entre as diferentes formas de representações semióticas dos conceitos trabalhados, contribuindo na elaboração do pensamento cognitivo do aluno.

Nesta perspectiva, foram desenvolvidas e aplicadas atividades utilizando objetos virtuais de aprendizagem – OVA, ou simplesmente objetos de aprendizagem, conforme definição usada por alguns autores citados neste trabalho, para o ensino de conteúdos relacionados à geometria analítica, envolvendo os tópicos: propriedades e área do paralelogramo e do triângulo gerado por dois vetores linearmente independentes (LI).

Marco teórico

Para Duval (2003, 2009), as diferentes maneiras de representação de conteúdo (matemático ou não), são denominadas representações semióticas, que devem transformar o funcionamento cognitivo do indivíduo para que haja uma apreensão conceitual, de raciocínio ou compreensão de enunciados. Ainda, na percepção do autor, o uso dos sistemas semióticos é essencial para a compreensão do aluno e a importância das representações perpassa o domínio da Matemática e de sua aprendizagem. O caráter intencional das representações conscientes é fundamental, do ponto de vista cognitivo, pois permite tomar consciência do papel essencial da significação na determinação dos objetos e é através dessa significação, que se faz a apreensão do conceito de um objeto. Em particular, para a aprendizagem de diversos objetos matemáticos, é fundamental, o reconhecimento e a representação dos sistemas de numeração, notações simbólicas para os objetos, estruturas algébricas, lógica de operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos, além de outras. Segundo a teoria de Duval (2003, 2012), é fundamental o desenvolvimento de habilidades para utilizar e transitar por pelo menos dois registros de representação do objeto em estudo para considerá-lo aprendido. Considera-se, portanto, que existem diferentes formas de representação de um mesmo elemento matemático, no entanto, é necessário que haja similaridade no pensamento cognitivo do aluno a fim de que ocorra, de fato, uma apropriação do conceito matemático relacionado aos objetos apresentados, seja ele geométrico, gráfico ou algébrico.

> Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento (Duval, 2012, p. 269).

É importante que o professor, como agente no processo de ensino e aprendizagem, tenha ciência como isso ocorre na formação cognitiva do aluno para conseguir fazer as intervenções apropriadas em função da fase de desenvolvimento em que o aluno se encontra, além de propor e aplicar metodologias, desenvolver estratégias, adotar ferramentas que o despertem ao processo de aprendizagem e consequente desenvolvimento intelectual.

Considerando as constantes evoluções nas dinâmicas da sociedade, com a incorporação frequente de novas tecnologias é fundamental que a escola também esteja em constante transformação. Pensar e modificar as práticas pedagógicas considerando o desenvolvimento intelectual, o desempenho do aluno e as transformações sociais deve ser um processo constante na prática docente, levando o professor a propor métodos e estratégias eficazes para que o aluno construa seus conhecimentos a partir dos conteúdos dispostos no currículo escolar e das atividades propostas.

A utilização de tecnologias para o ensino vai muito além do simples uso de equipamentos eletrônicos. Em se tratando da disciplina de Matemática, é possível usar calculadoras online, softwares, além de diversas outras tecnologias digitais que possibilitam representar expressões algébricas e formas geométricas, e até mesmo, o uso da programação computacional. Segundo Baldin (2008), há uma inovação metodológica oportunizada pelo uso de tecnologias no ensino dessa disciplina, porém, "pesquisas indicam principalmente a necessidade de olhar para a preparação dos professores que irão utilizar os novos recursos na sala de aula" (Baldin, 2008, p. 8). Sendo assim, para que o uso de tecnologias seja uma ferramenta eficaz no processo de ensino e aprendizagem, o professor precisa estar preparado, conhecer suas ferramentas e a forma de utilizá-las. Ainda, segundo Baldin, "[...] o uso de tecnologias traz a possibilidade de executar atividades de laboratórios com problemas contextualizados de Matemática, introduzindo técnicas de modelagem, análise crítica de resultados mediados por tecnologias, habilidades de resolução de problemas, criando cenários favoráveis para atividades de Ensino Integrado." (Baldin, 2008, p. 8).

De acordo com Audino e Nascimento (2010, p. 133), "... qualquer material digital que possa ser reutilizado para dar suporte ao ensino é considerado um objeto de aprendizagem".

Uma das formas de utilizar a tecnologia digital em sala de aula se dá pela construção e a interação com OVA, cuja utilização como instrumento de aprendizagem já vem sendo discutida desde a década de 1990, apesar de não haver uma definição única entre pesquisadores e defensores da forma específica de utilização desse material. As abordagens feitas sobre o tema são ecléticas, no entanto, fica evidente que os OVA são considerados importantes no processo de ensino e aprendizagem pela capacidade de simular e animar fenômenos e pela facilidade de proporcionar diferentes representações de objetos, no caso do ensino de Matemática.

Ao ensinar ou aprender Matemática, utiliza-se diferentes símbolos e formas para representar estruturas conceituais e o uso de OVA é uma tentativa de realizar a interação entre as formas de representação semióticas dessas estruturas ou objetos de estudos. Vale destacar que o simples uso de OVA ou outras formas tecnológicas, não garante por si só a aprendizagem. Segundo Kummer (2018), muitas vezes, o aluno tem dificuldade em fazer a passagem da representação por símbolos para a forma conceitual. De acordo com este autor, o mesmo ocorre na relação com os objetos de aprendizagem, onde frequentemente o aluno consegue interagir e propor soluções para o problema em tela, porém apresenta dificuldades para expressar os conceitos relacionados a esse problema. Por isso, na medida que estas dificuldades vão surgindo, é necessário realizar uma sistematização dos elementos, apresentando-os de forma conceitual, permitindo que o aluno acompanhe racionalmente a passagem da forma de representação do objeto do estudo.

Metodologia

O trabalho se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, sendo a análise dos dados textual discursiva, descrita por Moraes e Galiazzi (2007). Desenvolver e utilizar ferramentas que contribuam para a compreensão de conceitos e argumentações de forma significativa ao aluno foi o propósito da aplicação das atividades apresentadas neste trabalho. A partir das atividades desenvolvidas, buscou-se identificar as principais formas de representação semiótica apresentadas pelos alunos ao interagirem com os OVA e como conseguiram transitar entre diferentes formas de representação dos objetos matemáticos estudados.

O registro das atividades e a coleta de dados para a análise se deu por meio de diário de bordo com relatos e apontamentos feitos pela professora da turma (coautora desta pesquisa), de relatórios das atividades realizadas e dos materiais desenvolvidos pelos alunos. Para esta pesquisa foram desenvolvidos e disponibilizados de forma online, três objetos virtuais de aprendizagem. Os objetos foram desenvolvidos usando o software GeoGebra e consistem em atividades interativas, disponibilizadas aos alunos durante a aplicação do projeto com a finalidade de construção dos conceitos relacionados aos tópicos abordados.

Cada OVA foi projetado com finalidade específica, sendo que o primeiro (OVA1), apresentado na figura 1, teve como propósito levar os alunos a observarem dois vetores LI no plano, a geração do paralelogramo a partir desses vetores e como consequência a identificação de algumas propriedades do paralelogramo. O objetivo a ser alcançado na interação com o segundo objeto (OVA2), apresentado na figura 2, foi de identificar os lados do paralelogramo como os segmentos, cujos comprimentos são as normas dos vetores, identificar a altura relativa à base e como consequência, chegar às relações que fornecem a área do paralelogramo gerado por dois vetores LI. O propósito do terceiro (OVA3), apresentado na figura 3, foi de identificar a diagonal do paralelogramo (diferença entre os dois vetores) e determinar a área do triângulo gerado. Em cada um dos objetos foi inserida uma caixa de diálogo de forma a permitir a exibição de instruções para facilitar a interação dos alunos com o objeto e permitir-lhes compreender os conceitos matemáticos usados para a obtenção do valor dos elementos calculados no referido objeto. Na figura 1 é apresentado um print do OVA1, enquanto os objetos OVA2 e OVA3 são apresentados nas figuras 2 e 3, respectivamente.

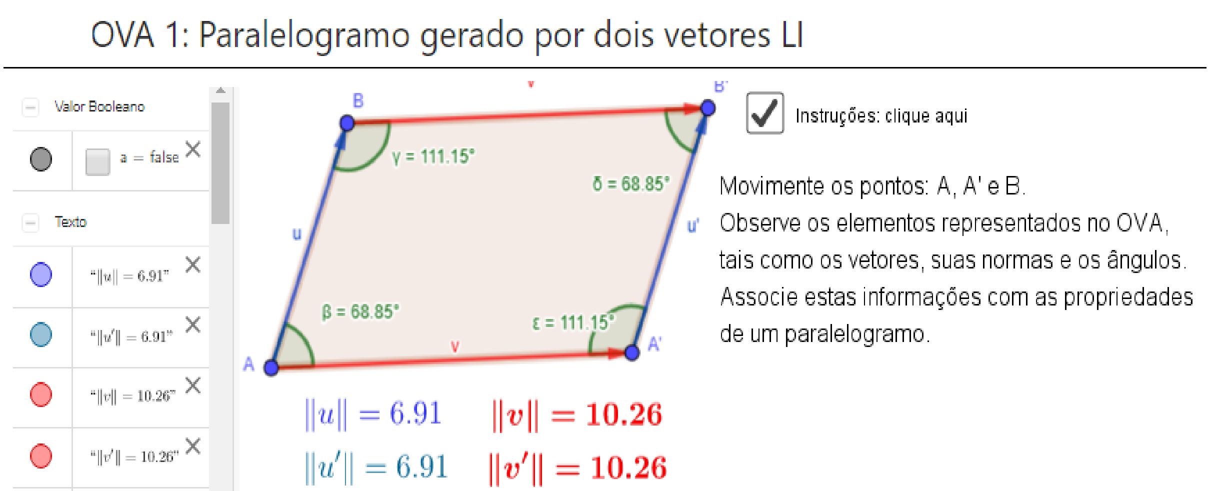


Figura 1: *Tela de apresentação do OVA1. Fonte: Autores.*

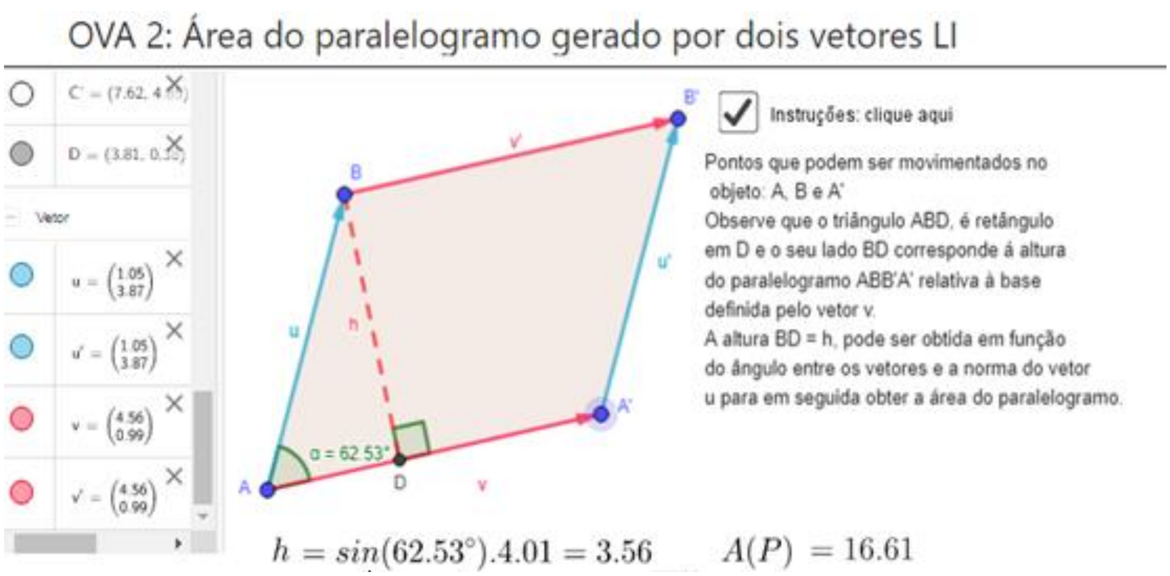


Figura 2: *Tela de apresentação do OVA2. Fonte: Autores*

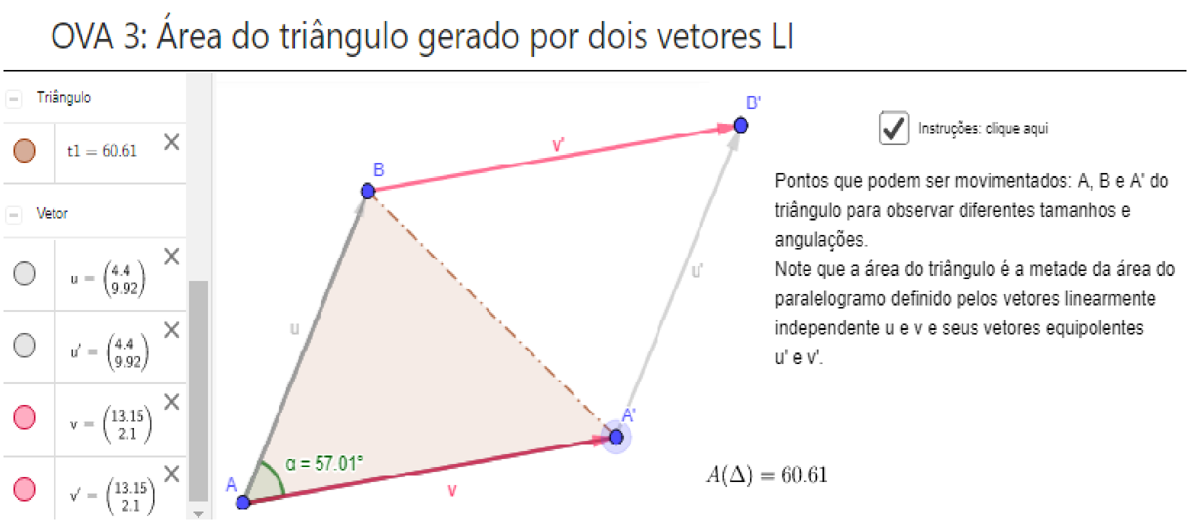


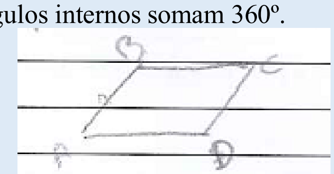
Figura 3: *Tela de apresentação do OVA3. Fonte: Autores*

A aplicação se deu em uma turma com dezessete alunos da primeira fase de um curso de Arquitetura e Urbanismo noturno, em um encontro com quatro períodos, correspondendo cada período a uma aula de cinquenta minutos. Inicialmente foi explicada a dinâmica da proposta e na sequência os alunos foram convidados a interagir com os OVA. Durante esta interação, foram propostas atividades aos alunos em que estes foram instigados a fazer as representações dos objetos de estudo, seguido de um momento de socialização de suas observações e da formalização conjunta de alguns conceitos, corroborando com Demo (1996, p. 125) quando destaca a importância de "[...] socializar conhecimento relevante para uma plateia [...] que tem a oportunidade de ouvir a mensagem construída". Para finalizar, foram propostos alguns exercícios visando verificar e aprofundar a aprendizagem dos conceitos trabalhados, permitindo novas representações.

Resultados e análise

Ao interagirem com os OVA, foi solicitado para que os alunos descrevessem sua percepção em relação às propriedades do paralelogramo, a determinação de sua altura e área, bem como a área do triângulo, ambos, gerados por dois vetores LI. Nesta atividade tiveram a oportunidade de fazer representações em linguagem textual, em linguagem algébrica e representações geométricas dos objetos. A percepção dos alunos relativa às propriedades do paralelogramo a partir da interação com o primeiro OVA são descritas no quadro 1. Para apresentar as respostas de cada aluno, buscando preservar sua identidade, estes foram identificados pela letra "A" seguida de um número, atribuído aleatoriamente a cada aluno de 1 a 17. Dessa forma, A1 representa o aluno 1 e assim, sucessivamente.

Quadro 1 – *Percepção dos alunos relativa às propriedades do paralelogramo a partir da interação com OVA 1.*

Questão: Quais as propriedades do paralelogramo você identifica no OVA 1?			
Aluno	Resposta	Aluno	Resposta
A1	Lados paralelos, ângulos opostos pelo vértice consecutivos	A10	O paralelogramo possui dois pares de lados paralelos, portanto são vetores equipolentes, e que não importa, o "movimento" que se faça, os lados permanecem paralelos e os ângulos internos opostos pelo vértice sempre serão congruentes.
A2	Lados paralelos, equipolentes, mesma norma, mesmo sentido, ângulos internos soma 360º.	A11	O paralelogramo possui 2 pares de lados paralelos, portanto, são vetores equipotentes, e que não importa o movimento que se faça os lados permanecem paralelos e os ângulos internos opostos são congruentes e ângulos consecutivos suplementares.
A3	Os lados são paralelos e equipolentes. Os ângulos são congruentes do seu ângulo oposto.	A12	Ângulos e lados opostos são iguais.
A4	Lados equipolentes, ângulos alternos internos, lei do seno para a altura.	A13	Possui lados e ângulos opostos congruentes, lados opostos paralelos, ângulos consecutivos formam 180º.
A5	Mesma norma, mesmo sentido lados paralelos. Os ângulos opostos são congruentes.	A14	Lados e ângulos opostos congruentes.
A6	Lados paralelos, ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Ângulos internos somam 360º. 	A15	Que são vetores paralelos, que os ângulos são congruentes, que indiferente como o paralelo muda eles ficam com os ângulos internos congruentes.
A7	Lados (vetores) opostos são paralelos e ângulos opostos são congruentes.	A16	Os ângulos opostos são congruentes, os vetores são paralelos.

A8	Observando o paralelogramo tem-se que ele possui dois pares de lados paralelos que são vetores equipolentes e que não importa o “movimento” que se faça os lados permanecem paralelos e ângulos internos opostos sempre são congruentes.	A17	Que são vetores paralelos, que os ângulos são congruentes, que indiferente como o paralelo muda eles ficam com os ângulos internos congruentes.
A9	Lados equipolentes, ângulos alternos internos iguais, lei do seno para a altura.		

Ao analisar as respostas dos alunos à questão apresentada no momento da interação com este OVA verificou-se que a maioria conseguiu identificar duas das propriedades do paralelogramo: que os lados paralelos possuem a mesma medida, ou seja, a norma dos vetores u e u’ e dos vetores v e v’ são respectivamente iguais (A2, A3, A4, A5, A6, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A16); e que os ângulos opostos são congruentes, (A3, A5, A6, A7, A8, A10, A11, A12, A13, A14 e A16). Apenas dois alunos citaram o fato de os ângulos consecutivos serem suplementares (A11 e A13).

Os alunos A15 e A17 apontaram o fato de que, independentemente de como o paralelogramo é movimentado, os ângulos permanecem congruentes, não observando, porém, que essa propriedade é válida somente para os ângulos opostos. O aluno A2 descreveu que a soma dos ângulos internos é 360º. O aluno A8 descreveu os lados paralelos como vetores equipolentes e que, independentemente da posição do paralelogramo, essa propriedade permanecia e os ângulos opostos “pelo vértice” eram congruentes, mesma descrição realizada pelo aluno A10. Com base na análise realizada, percebe-se, que, embora estes últimos alunos tenham feito a observação correta na interação com o OVA, houve uma confusão de linguagem, ao falar “opostos pelo vértice”. Chama atenção ainda a similaridade entre as duas respostas, sugerindo uma análise conjunta nesta atividade.

Observa-se ainda que alguns alunos apresentaram dificuldades em expressar suas conclusões fazendo confusão de linguagem e/ou apresentando respostas desconexas e incompletas com relação às situações observadas. Por exemplo os alunos A1 e A4 fazem descrições confusas e desconexas, o que sugere uma dificuldade de estabelecer as transformações de representação sugeridas por Duval (2003, 2009, 2012). Já no caso dos alunos A2, A3, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16 e A17, há um indicativo da habilidade de transitar da representação geométrica para a representação em linguagem escrita, sugerindo-se a compreensão dos conceitos abordados, de acordo com Duval (2003, 2009, 2012).

Com o propósito de determinar a área do paralelogramo, sugeriu-se que os alunos observassem o OVA 2, que tem representada a altura e o ângulo formado entre os dois vetores u e v, geradores do paralelogramo. Eles deveriam apontar a forma de determinar a altura do paralelogramo para, posteriormente, determinar sua área, na tentativa de transitar entre a representação geométrica disponível no OVA para uma linguagem textual ou algébrica. No terceiro OVA, com a introdução do segmento (A'B) (diagonal do paralelogramo), os alunos foram instigados a determinar a forma de calcular a área do triângulo, ao concluírem que esse segmento dividiu o paralelogramo ABB'A' em dois triângulos congruentes ΔABA' e ΔBB'A'.
Ao analisar as respostas verificou-se que apesar de algumas imprecisões de notação, a maioria dos alunos conseguiu identificar a altura do paralelogramo como sendo o produto do seno do ângulo entre os vetores geradores do paralelogramo e a norma de do vetor u. Os alunos A2, A7, A9, A12, A13, A14, A15 e A16, conseguiram fazer a representação algébrica de forma correta, porém não apresentaram a solução em forma textual.

Os alunos A3, A5 e A6 também apresentaram apenas a forma algébrica, mas com imprecisões na notação, embora suas respostas sugiram que tenham compreendido a correta relação entre os elementos envolvidos. Já os alunos A4 e A17 expressaram a altura do paralelogramo como sendo o produto do seno do ângulo entre os vetores geradores do paralelogramo e a norma do vetor v. Embora no material coletado não seja possível identificar sua linha de raciocínio, esta representação pode ser considerada correta quando o vetor u for tomado como base do paralelogramo, mas isto difere da representação geométrica disponível no OVA, o que reforça a hipótese de se ter havido uma confusão no momento da escrita. Apenas dois alunos (A8 e A10) fizeram a correta representação em duas formas distintas (linguagem textual escrita e linguagem algébrica), enquanto o aluno A11 optou apenas pela representação textual.

Novamente o aluno A1 mostrou dificuldades para fazer qualquer tipo de representação, apresentando resposta confusa e desconectada com a proposta. Na figura 4 são apresentadas as representações dos alunos A12, A4 e A1, respectivamente, que exemplificam esta análise.
Quanto à representação algébrica da área do paralelogramo e do triângulo, os alunos A7, A8, A9, A10, A11, A12 A13, A14, A15, A16 e A17 conseguiram expressar estas a partir do produto da norma do vetor que está na base do paralelogramo pela altura obtida no exercício anterior, de forma a expressar a área do paralelogramo como o produto das normas dos dois vetores pelo seno do ângulo formado por estes, e a área do triângulo como a metade dessa área, sugerindo que estes conseguiram transitar corretamente entre as representações geométrica e algébrica. O aluno A2 conseguiu representar corretamente a área do paralelogramo, porém não mostrou a representação da área do triângulo, enquanto A4 representou a área do paralelogramo como indicado acima, porém para a área do triângulo optou em representá-la como a metade do módulo do determinante cujas linhas são as coordenadas dos respectivos vetores geradores. Esta forma de representação também foi observada nas respostas do aluno A6 para a área das duas figuras geométricas em análise.

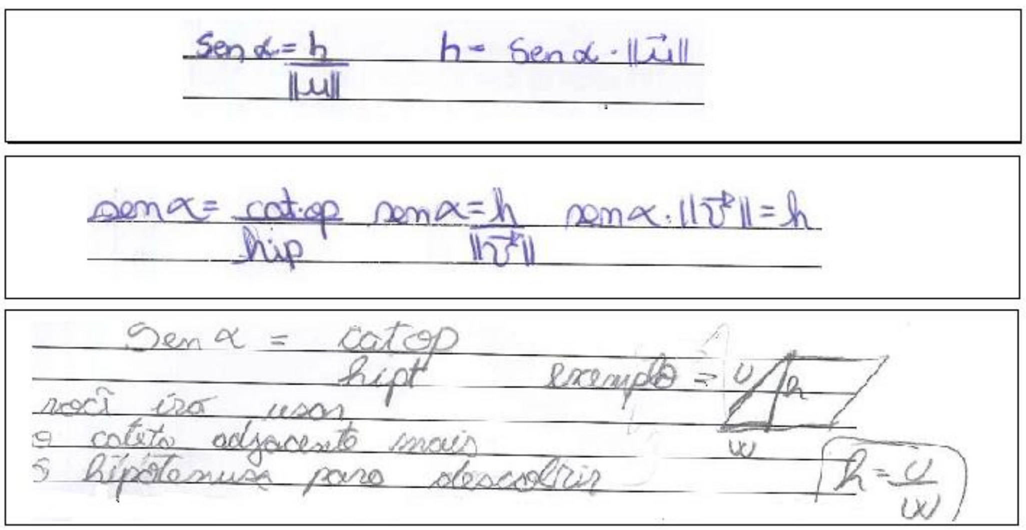


Figura 4: *Representações feitas pelos alunos A12, A4 e A1, respectivamente, relativas as suas percepções sobre a obtenção da altura do paralelogramo.*

Houve ainda quem optasse pelas duas representações, como por exemplo, o aluno A7. A segunda forma de representação não decorre imediatamente da representação geométrica proposta nos OVA, porém ela é apresentada no material didático usado pelos alunos durante a disciplina, o que leva a concluir que os alunos que optaram por ela, fizeram consulta ao referido material. Essa hipótese é reforçada pelo fato de não explicitarem em seu uso o significado dos elementos da matriz e sim, apenas apresentarem a fórmula para calcular a área. Após o desenvolvimento destas atividades, no momento da socialização e formalização, esta representação também foi formalizada. Os alunos A3 e A5 apresentaram representações confusas e incorretas para a área do paralelogramo e não apresentaram representação da área do triângulo, sugerindo dificuldades na compreensão dos conteúdos propostos. Já o aluno A1, que na atividade anterior não havia conseguido a expressão correta para representar a altura, apresentou a expressão correta para o cálculo da área, sugerindo também uma consulta ao material ou a algum colega, visto que no conjunto das atividades não conseguiu fazer a construção consistente de suas representações. Na figura 5 são apresentadas as representações algébricas dos alunos A14 e A7, respectivamente.

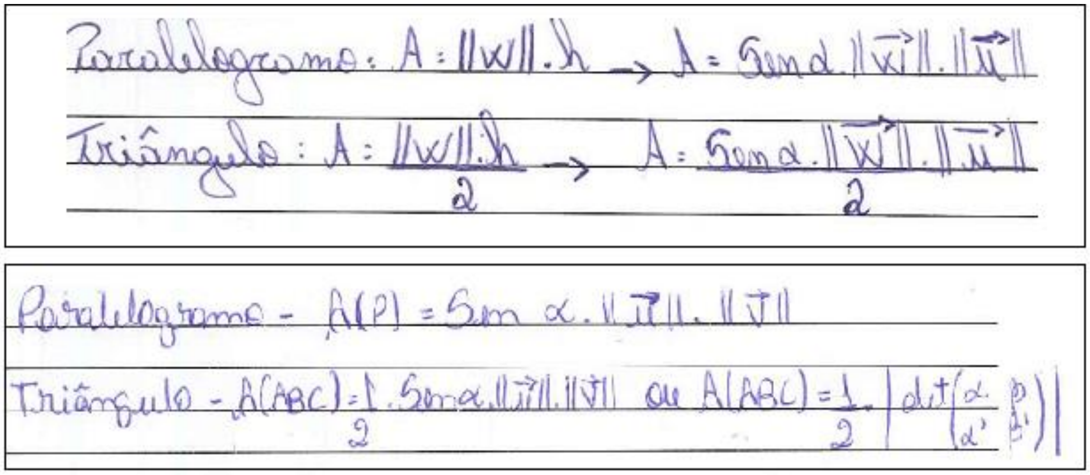


Figura 5: *Representações feitas pelos alunos A14 e A7, respectivamente, relativas as suas percepções sobre o cálculo da área do paralelogramo e do triângulo.*

Após a interação com os OVA, a socialização e formalização dos conceitos com a turma, foram propostas atividades para verificar e reforçar a compreensão dos tópicos abordados. Uma das atividades consistia em determinar a área do paralelogramo, considerando conhecidas as coordenadas de três dos seus vértices: $A(2,2)$, $B(6,4)$ e $C(12,2)$. Foi sugerido aos alunos a resolução usando as duas formas abordadas anteriormente. A maioria dos alunos conseguiu resolver a questão usando a interpretação geométrica e a fórmula usando o determinante, conforme exemplificado na solução do aluno A13, mostrada na figura 6.

Observou-se que os alunos recorreram ao OVA, digitando as coordenadas dos vértices para visualizar geometricamente o problema, aproveitando também o valor do ângulo formado pelos vetores geradores fornecido no OVA. Tem-se então um indicativo de que o OVA auxiliou na compreensão do problema e que os alunos mencionados conseguiram transitar com bastante clareza entre as formas de representação do problema proposto, chegando à solução correta sem maiores problemas. Alguns, porém, optaram simplesmente em substituir as coordenadas dos vetores na fórmula para calcular o determinante, argumentando que isso era mais fácil e que chegava ao mesmo resultado. De fato, como foi mencionado durante a formalização, o valor da área de uma figura geométrica é único, independente da forma como ele é calculado, porém a proposta do exercício era de verificar a compreensão das representações feitas anteriormente. Por fim, o fato de optarem apenas pela solução mais rápida não significa necessariamente que estes alunos não tenham compreendido a construção ou que não tenham condições de transitar entre as diferentes formas de representação, embora que em alguns casos esta dificuldade havia sido verificada nas atividades anteriores.

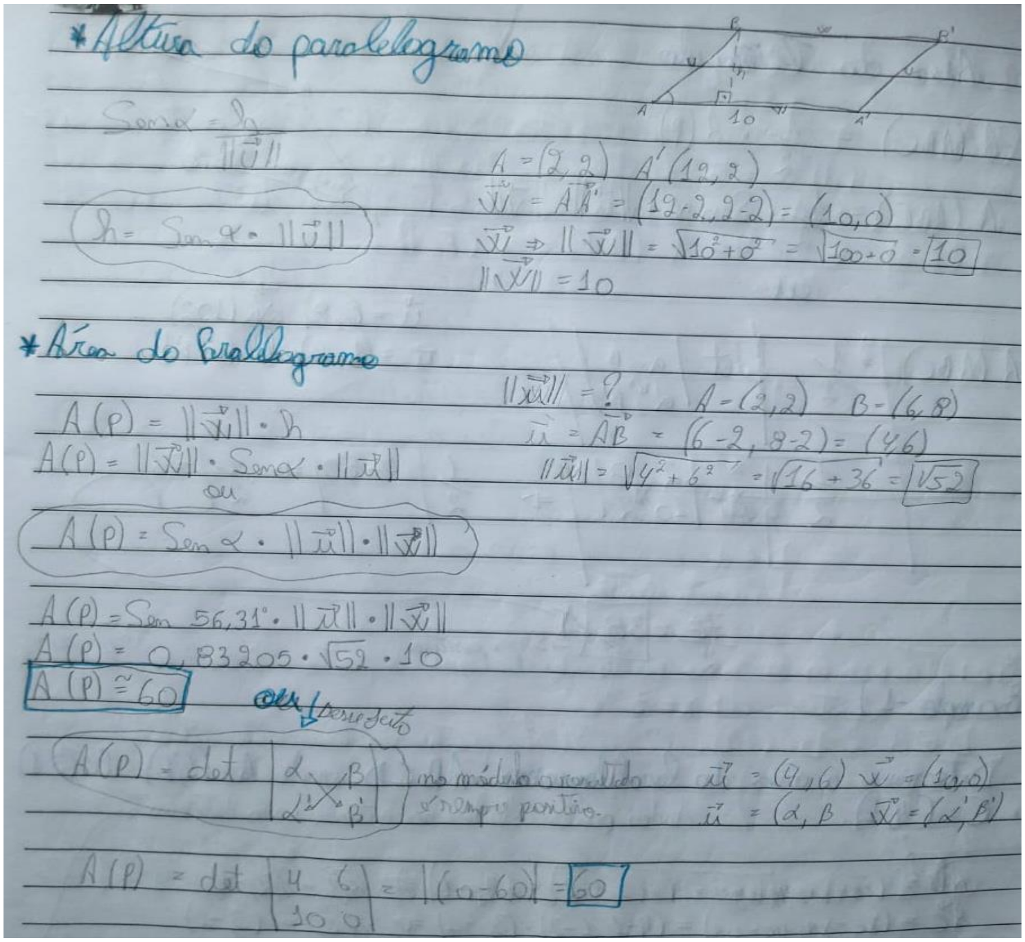


Figura 6: *Resolução da atividade pelo aluno A13.*

Considerando a análise feita, pode-se observar que a maioria dos alunos (A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, A16) conseguiu transitar de forma satisfatória entre pelo menos duas formas de representação dos objetos de estudo em todas as atividades desenvolvidas durante a interação com os OVA, dando uma indicação da compreensão dos conceitos estudados com o uso dos objetos. Estes também não apresentaram dificuldades na resolução dos exercícios, mostrando habilidades de resolução usando a interpretação geométrica em cada caso. Outros alunos (A2, A6 e A17) apresentaram dificuldades em algumas situações, porém em outras conseguiram fazer representações consistentes, embora tenham nos exercícios finais, optado mais pela aplicação direta da fórmula do que pela representação e interpretação geométrica dos problemas. Já os alunos A1, A3, A4 e A5 foram os que apresentaram as maiores dificuldades em relacionar diferentes formas de representação dos objetos matemáticos e mesmo após a formalização, preferiram na maioria das vezes, apenas encontrar o resultado do problema, sem se preocupar com a representação e interpretação da situação geométrica.

Apesar de algumas dificuldades apresentadas, na avaliação dos alunos os OVA foram importantes para a visualização geométrica dos problemas abordados, em especial, pela possibilidade de interação e de manipulação dos dados, o que permitiu seu uso no momento da resolução dos exercícios, auxiliando na representação geométrica e na compreensão dos problemas propostos. A importância da manipulação dos OVA fica explícita no depoimento do aluno A14, quando afirma que "...eles auxiliaram na compreensão, pois representam o formato real e ainda apresentam mais possibilidades ao variar suas medidas".

Considerações finais

Esta pesquisa teve como objetivo, identificar evidências da compreensão e aprendizagem de conceitos abordados a partir do desenvolvimento e disponibilização OVA aos alunos durante aulas de geometria analítica. Ao analisar os dados coletados, foi possível observar que embora alguns alunos mostrassem algumas dificuldades em expressar suas conclusões fazendo confusão de linguagem e/ou apresentando respostas desconexas e incompletas com relação às situações observadas, a maioria mostrou indicativos de habilidades de transitar da representação geométrica para a representação em linguagem escrita na interação com o OVA1 e da representação geométrica para a representação algébrica nos OVA2 e OVA3, sugerindo a compreensão (mesmo que parcial em alguns casos) dos conceitos abordados. No segundo e terceiro objetos, a maioria optou em não fazer as representações na forma textual, onde em geral, apresentam maiores dificuldades. Embora admita-se a possibilidade de essas dificuldades não se restringirem apenas a representação de objetos matemáticos, ela seguramente influencia na aprendizagem dos alunos. Por fim, considera-se que os OVA constituem-se como elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, contribuindo na motivação e interação dos alunos, permitindo uma visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados, necessitando, porém, uma complementação através de sistematizações e principalmente no desenvolvimento de habilidades da representação descritiva desses objetos. Somente com o desenvolvimento dessas atividades será possível estabelecer as conversões e a “possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação”, permitindo a mobilização simultânea de mais de uma forma de representação, conforme sugerido por Duval (2003).

Agradecimento: A pesquisa teve apoio financeiro da FAPESC por meio do projeto de pesquisa com termo de outorga 2018TR1514 referente ao Edital nº 03/2018.

Referências bibliográficas

Audino, D. F. e Nascimento, R. S. (2010). Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. *Revista Contemporânea de Educação*, 10(5), 128-148.

Baldin, Yuriko Y. (2008). Uso de tecnologia como ferramenta didática no ensino integrado. In: Carvalho, Luiz M. et al. *História e tecnologia no ensino da matemática*, Vol. 2. (pp. 1-24), Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna,

Demo, P. (1996). *Educação e qualidade*. 3. ed. Campinas, SP: Papirus.

Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. (pp.11-33), Campinas, SP: Papirus.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Trad. Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosane Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Moretti, M. D. *Revista Eletrônica de Educação Matemática* 7(2), 266-297. doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Moraes, R., Galiazzi, M. C. (2007) *Análise textual discursiva*. Ijuí: Unijuí.

Pozo, J. I. (2002). *Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.

Kummer, T. (2018). Ações e operações de visualização, raciocínio e representação no processo de construções geométricas. In: Scheffer, N. F. Comachio, E. Cenci, D. (org). *Tecnologias da informação e comunicação na educação matemática: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representação*. (pp. 47-61), Curitiba: CRV.

INTERACCIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DOCENTE

MATHEMATICAL INTERACTION IN INITIAL TEACHING TRAINING

Gloria del Carmen Mungarro Robles, Francisco Javier Parra Bermúdez
Universidad de Sonora (México)
munrob05@hotmail.com, francisco.parra@fisica.uson.mx

Resumen
El propósito de esta investigación es comprender las interacciones didácticas de comprensión lectora de textos matemáticos que se desarrollan mediadas con tecnologías digitales en una institución de formación inicial docente. Los fundamentos teóricos que la sustentan son las propuestas de las Nuevas Pedagogías para el Aprendizaje Profundo y el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. Se desarrolló como parte de un proyecto bajo un diseño con tendencia etnográfica y ofrece como resultados preliminares la generación de las categorías analíticas que emergen de la teoría y del trabajo de campo desarrollado. Se destaca la pertinencia de realizar estudios en profundidad que develen los sentidos que los participantes otorgan a sus acciones al intentar la comprensión de textos matemáticos, a fin de promover mejoras a tal interacción.

Palabras clave: interacción didáctica, comprensión lectora, tecnologías

Abstract
The purpose of this research is to understand the didactic interactions of reading comprehension of mathematical texts that are developed with digital technologies in an institution of initial teacher training. The proposals of the New Pedagogies for Deep Learning and the Ontosemiótico Approach of the Cognition and Mathematical Instruction are the theoretical foundations that support this research. It was developed as part of a project under a design with ethnographic tendency and shows as preliminary results the analytical categories that emerge from the theory and from the developed fieldwork. It highlights the relevance of conducting in-depth studies that reveal the meanings that participants give to their actions when trying to understand mathematical texts, in order to promote improvement to such interaction.

Key words: didactic interaction, reading comprehension, technologies

Introducción

La educación formal que se ofrece en la escuela, funda sus orígenes en una tradición pedagógica histórica. En todos los estadíos, existe un elemento común que implica una relación sociopedagógica: la interacción entre quien posee un saber y el que busca aprenderlo. En ese sentido, la interacción didáctica se constituye en la relación profesor-estudiante, en la cual la unidad vinculante es el contenido educativo y donde median –o pueden mediar– los dispositivos o recursos didácticos.

La realidad contextual actual –tanto social, educativa como laboral- señala que la comprensión lectora (CL) es una habilidad cognitiva necesaria para la construcción del conocimiento. Se considera que esta habilidad se gesta y desarrolla en los primeros años escolares; empero, recientes estudios indican que constituye una habilidad que debe ser favorecida en todos los niveles educativos y desde las distintas disciplinas escolares. En efecto, la comprensión lectora de textos matemáticos (CLtM) representa la posibilidad de acceder al significado de los textos de la disciplina para aprender contenidos matemáticos específicos. Hoy, en las instituciones de educación superior, las tecnologías digitales (TD) son vistas como uno de los soportes textuales por excelencia y propician su aprovechamiento en las interacciones didácticas que en ellas se desarrollan.

En este documento, inicialmente se presentan las nociones fundamentales del estudio –interacción didáctica, comprensión lectora de textos matemáticos y tecnologías digitales–. También, se ofrecen antecedentes teórico-investigativos que dan cuenta de algunos aspectos que inciden en la situación problema. Del mismo modo, se describe la problemática de estudio, las interacciones didácticas de CLtM y su mediación con TD en la formación inicial docente (FID) que, como fenómeno multifactorial, se vislumbra desde la perspectiva sociocultural de la didáctica y se expresa el propósito general del estudio.

En el segundo apartado, se bosqueja la perspectiva teórica que subyace al estudio; es decir, las fuentes teóricas de las cuales emergen los tópicos de investigación y que se constituyen en referentes fundamentales para el análisis durante todo el estudio. Así, las aproximaciones teóricas consideradas pertinentes para esta investigación, surgen del ámbito de la innovación y la didáctica. Por ello, se recuperan las nociones propuestas por Fullan y Langworthy (2014) respecto a las Nuevas Pedagogías para el Aprendizaje Profundo (NPAP) juntamente con el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) de Godino (2011) y colaboradores. También se plantea la habilidad de la CL enmarcada en el contexto de la disciplina matemática y de la mediación tecnológica (Castells, 1997), influida por los factores que intervienen en un espacio didáctico donde se busca favorecer en los estudiantes una comprensión textual eficaz.

Los aspectos metodológicos se exponen en el tercer apartado, señalando las directrices bajo las cuales se orientó el estudio. Este presenta, basado en el propósito general y en los fundamentos teóricos, el enfoque investigativo que lo guía, el tipo de diseño seleccionado, además de las técnicas e instrumentos de recolección de datos. Asimismo, describe la población y la muestra que participaron en el estudio, así como el método de análisis de los datos y presentación de algunos resultados.

Debido a que el presente artículo constituye un reporte parcial de una investigación más amplia que se encuentra en curso, no se ofrecen resultados contundentes, sino algunas derivaciones preliminares del levantamiento de datos que a la fecha se tienen. Por lo señalado, tampoco las conclusiones son definitivas, pues más que tales, son reflexiones que han permitido avanzar en el análisis a profundidad de la problemática de estudio.

El problema de estudio

La necesidad de favorecer espacios de aprendizaje escolar cada vez más adecuados para los sujetos que se atienden, llevan a considerar el análisis del tipo de relaciones didácticas que se aplican en las aulas. Es este interés el que llevó a gestar un estudio que busca comprender cómo se desarrollan las interacciones didácticas donde se atiende la habilidad de la comprensión lectora enmarcada en el contexto de la disciplina matemática y de la mediación tecnológica. Lo anterior implica advertir que operan e intervienen múltiples factores en el espacio didáctico del aula escolar, los cuales pueden favorecer o no en los estudiantes el logro del aprendizaje, en este caso los contenidos matemáticos mediante la comprensión textual. El enfoque con que se atiende a estas nociones es sociocultural, pues enfatiza las relaciones que se establecen en el contexto en que se da el hecho educativo, así como desde los aspectos disciplinares que la propia Matemática Educativa señala. Justamente, las nociones teóricas básicas del estudio son interacción didáctica, comprensión lectora de textos matemáticos y tecnología digital. Tales conceptos, en este estudio, se entienden de la forma siguiente:

La acción educativa escolar se constituye por acciones de relación entre los agentes, que se establecen con el fin de provocar el aprendizaje de contenidos específicos. Así, la interacción didáctica se refiere a las relaciones educativas entre profesor y estudiantes y a la interacción en el contexto del aula, enfatizado por el enfoque sociocultural del hecho educativo (Vygotsky, 1978) y situado en la dimensión cognitiva del aprendizaje y la enseñanza (Coll y Sánchez, 2008). En consecuencia, todo acto que no favorezca este fin es un acto interaccional, pero no didáctico.

La comprensión lectora de textos matemáticos es la habilidad para construir significados de los contenidos expresos en los textos matemáticos; la CL se gesta en la participación activa de los sujetos con el texto, donde además influyen los conocimientos previos respecto al contenido textual, la actitud y estado anímico y el medio cultural en que se produce (Cassany, 2006). Constituye una habilidad cognitiva esencial de los estudiantes para realizar el trabajo disciplinar, pero también para el aprendizaje autónomo (Österholm, 2006b).

Por su parte, las tecnologías digitales se entienden en el rol específico del empleo de los dispositivos tecnológicos: en el dar sentido a las actividades constructivas de nuevos saberes y a su uso en la participación interactiva con otros agentes. Así, el valor de las TD reside en el reconocimiento del vínculo entre estas y las formas en que son utilizadas en las interacciones didácticas; es decir, si son empleadas en y para producir aprendizajes profundos en los estudiantes, y no solamente como recurso informativo (Palmas, 2018).

Algunos estudios sobre la CL y el uso de las TIC o TD en nivel superior señalan la destacada importancia de las tecnologías en los procesos formativos (Cantillo et al., 2014; Méndez, Espinal, Arbeláez, Gómez y Serna, 2014); otros matizan la pertinencia de atender didácticamente la CL (Cuadro, Balbi y Luis, 2017; Felipe y Barrios, 2017), mientras que otros sugieren apoyar los procesos lectores con herramientas tecnológicas (Andrade, 2007; Chartier, 2012) así como desarrollar planes de estudio pertinentes para el uso de la tecnología en el aula (Castellanos, Sánchez y Calderero, 2017).

Österholm (2006a) desarrolló un estudio para caracterizar la CLtM, tratando de identificar si el texto matemático puede impactar la CL o si el proceso de comprensión está más influenciado por cómo se exhibe el mismo. Concluye que los procesos lectores de textos matemáticos con símbolos requieren un tipo de proceso comprensivo diferente, por lo que los estudiantes requieren habilidades lectoras específicas. En el caso específico de la CLtM en la FID, Sandoval, Frit, Maldonado y Rodríguez (2010) en un estudio desarrollado con estudiantes de dos instituciones formadoras de docentes chilenas, asumen la existencia de una correspondencia entre la CL y las habilidades matemáticas. Los autores sostienen que a mayor resultado en la esfera de la CL serán mejores los resultados en la resolución de problemas matemáticos y concluyen que las debilidades detectadas deben ser rectificadas en la FID.

En los estudios consultados, se señala la necesidad de atender didácticamente los procesos de CL de los estudiantes de nivel superior; incluso, algunos recomiendan que los docentes orienten las actividades de lectura, con estrategias didácticas que favorezcan la acción comprensiva y los procesos lectores estudiantiles en su formación profesional. También se identifica a las tecnologías digitales como una herramienta significativa que puede contribuir en el aprendizaje del estudiantado. Empero se indica que ello no se gesta de forma automática y uniforme en los estudiantes, por lo que deben ser asumidas como apoyos didácticos y promover intervenciones didácticas diferentes, donde su empleo sea útil para la CL, en general, y para la CLtM, en particular.

Las investigaciones revisadas mantienen enfoques esencialmente cuantitativos, cuyos resultados obtienen inventarios de los niveles de CL y uso de tecnologías; otras, aún con enfoque investigativo mixto, dejan de percibir a profundidad la experiencia de los sujetos en las prácticas de CL mediadas por TIC. Tal parece que el énfasis se ha traducido en recuperar aspectos cuantitativos como medir niveles de CL, la valoración de habilidades digitales, al tipo de uso tecnológico, entre otros. Empero, no se ha explorado lo que sucede específicamente en el aula, cómo suceden las acciones didácticas y cómo se gesta la interacción entre docente y estudiantes, unido a los contenidos y textos matemáticos, además del aspecto mediacional que en ellas pueden asumir las TD. Asimismo, no se identifican estudios de esta temática en el contexto de las instituciones de FID mexicanas.

El contexto escolar e institucional donde se desarrolla la formación del profesorado para la educación básica en México está en la formación inicial docente, la cual es normada por directrices y currículos nacionales. Se favorece en escuelas normales y universidades pedagógicas –generalmente públicas– (Arnaut, 2004; Ducoing, 2013). En años recientes, se han impulsado reformas a los planes de estudio que la FID atiende. Con la reforma curricular del 2012 y el reajuste a los planes curriculares en 2018, se enfatiza el conocimiento matemático y el empleo de las tecnologías que debe tener el docente en formación. Así, el estudiante normalista no solo debe saber enseñar matemáticas, sino contar con los saberes matemáticos que su nivel profesional le demanda. La atención de los cursos de esta área disciplinar, en una escuela normal de Sonora en México, son desarrollados por profesores especialistas. Sin embargo, se ha observado -como percepción preliminar- que los estudiantes de la FID presentan dificultades para la comprensión textual de los distintos cursos curriculares, especialmente los de la disciplina matemática.

En general, se señala a las matemáticas como un área académica en la que el desempeño estudiantil es débil y una de las que muestran altos índices de reprobación escolar. En el caso de los estudiantes de FID de la escuela normal referida, el índice de reprobación en matemáticas representa el mayor de todos los cursos normalistas y son los cursos de esta área donde se tienen los promedios de acreditación más bajos (ByCENES, 2018). Esa situación académica comúnmente se atribuye al alumnado, pero se analiza muy poco en relación a otros factores que pueden estar interviniendo en ella. En ese sentido, la interacción didáctica constituye (metafóricamente) una “caja negra” que debe abrirse para identificar los aspectos que puedan estar incidiendo en la CLtM y, en consecuencia, en el aprendizaje de los contenidos matemáticos de los estudiantes normalistas. Conforme a lo expresado, el planteamiento del problema de estudio se resume en la siguiente cuestión: ¿Cómo se desarrollan, en el contexto de la FID, las interacciones didácticas de la CLtM mediadas con tecnologías digitales?

Algunos aspectos teóricos

La escuela no puede mantenerse impermeable a las condiciones contextuales cambiantes. Las instituciones educativas en el devenir histórico asumen transformaciones que intentan promover la mejora de los procesos que desarrollan. Lo anterior no significa adoptar propuestas pedagógicas exitosas operadas en otros contextos, sino adaptarse a las circunstancias existentes donde serán implementadas, así como generar opciones factibles y viables para perfeccionar las interacciones didácticas.

En ese tenor, las interacciones didácticas constituyen acciones de enseñanza y de aprendizaje en relación dialógica, que no se limitan a la sola manifestación de saberes por unos u otros, sino en el proceso reflexivo y consciente del aprendizaje. Por ello, intentar comprender la interacción áulica, es decir, la relación entre docentes y estudiantes, requiere de la observación y el análisis de las actividades –acciones observables o no- que en una secuencia didáctica se realizan. La eficacia de la interacción didáctica en el aula se puede equiparar en el mayor grado de vinculación que puede lograr la actividad realizada respecto de las unidades teóricas que la sostienen (curriculares, disciplinares, didácticas, pedagógicas, institucionales, etc.) -como actividad productiva-, pero además permitiendo la reflexión con el aprendiz -como actividad constructiva- (Gutiérrez, Calderón, Barreiro, Moscato y Pereyra, 2015).

El enfoque de la didáctica actual está centrado en el sujeto que aprende, en sus procesos y en cómo favorecerlos, por lo cual resulta conveniente analizarlos desde las NPAP de Fullan y Langworthy (2014) y del EOS de Godino (2011). Tales propuestas teóricas sirven como marcos de referencia que permiten identificar la situación real que las interacciones didácticas presentan en el fomento de la CLtM cuando es mediada por TD en la FID.

Así pues, la orientación general del tema hacia el objeto de estudio particular se aborda desde la propuesta de innovación educativa de Fullan y Langworthy (2014), respecto a las NPAP. Estas se entienden "como un nuevo modelo de asociaciones para el aprendizaje entre estudiantes y docentes cuya finalidad es alcanzar los objetivos del aprendizaje en profundidad y que se ve facilitado por el acceso digital generalizado" (Fullan y Langworthy, 2014, p. 2). Desde las NPAP se acentúan las nuevas asociaciones para el aprendizaje (nuevas formas de aprender de los estudiantes de hoy), las tareas de aprendizaje en profundidad (el tipo de actividades que los docentes sugieren al estudiante para apoyar sus procesos de aprendizaje mediante las interacciones didácticas) y las herramientas y recursos digitales (como dispositivos para transformar las prácticas de aprendizaje) que -al integrarse- favorecen el aprendizaje profundo.

Conjuntamente a las NPAP, se atiende al EOS de la Cognición e Instrucción Matemática en su dimensión de la Idoneidad Didáctica (Godino, 2011). En este estudio se toma la orientación del EOS, porque constituye una posibilidad integral para el análisis de las interacciones didácticas y del alcance del uso mediado de las TD en la CLtM de los estudiantes. Se plantea el entendimiento del proceso didáctico en general, de las interacciones que en él ocurren y de la consideración de los múltiples factores que influyen en él. Efectivamente, Godino afirma que la enseñanza y el aprendizaje se encuadran en un conjunto de facetas interactuantes entre sí: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional, mismas que deben observarse, diseñarse, implementarse y valorarse mediante cuestionarios, entrevistas y observaciones, si lo buscado es proponer mejoras a la misma.

Para el caso específico de este estudio, el énfasis analítico recayó en dos de las facetas de la idoneidad didáctica propuestas por Godino (2011): la interaccional y la mediacional; se eligieron estas, debido a que es el aula el espacio en el cual ocurren las interacciones didácticas y donde convergen los sujetos en relación grupal y comunicativa, accionando sobre los contenidos de aprendizaje y con los instrumentos que median la construcción de nuevos significados y conocimientos más profundos. En consecuencia, permiten comprender cómo se ejecutan las interacciones en un aula matemática, tanto las acciones didácticas de los docentes y de aprendizaje del estudiantado frente al contenido textual a comprender, así como los recursos o tecnologías digitales que se emplean para lograrlo.

Desde la perspectiva de las disciplinas matemáticas, la enseñanza de las matemáticas no se justifica por el interés específico que las matemáticas tienen como ciencia, sino por la utilidad social de los aprendizajes promovidos desde esta disciplina (Goñi, 2008; Llinares, 2000). Para Llinares, la enseñanza de las matemáticas no se puede apreciar ajena al currículum y a la institución en la que se desarrolla, pues esta se sitúa en contextos escolares y sociales específicos. Goñi, por su parte, señala que la enseñanza matemática debe constituirse como un acto comunicativo, y no solo instructivo, donde se sitúen en interacción intenciones, significados y sentimientos de quienes en él intervienen.

Por ello, ha de entenderse que las acciones didácticas en el aula, deben generar la "matematización" (Godino y Llinares, 2000), en donde se priorice la participación de los sujetos en la construcción de significados, donde se aprovechen los recursos didácticos y los medios digitales, y donde los estudiantes interaccionen construyendo comprensiones, significados y conocimientos matemáticos. En ese sentido, "la clase de matemáticas" constituye una microsociedad, donde las interacciones de aprendizaje influyen y transforman las estructuras cognitivas de los participantes (Blanco, 2011). Es el aula escolar un sistema y espacio donde se desarrollan las interacciones entre los sujetos (Font y Ramos, 2005) que intentan suscitar el aprendizaje. Las interacciones entre profesor y estudiantes, responden a un tipo determinado de relación dialógica que promueve la asimilación de contenidos disciplinares específicos. Las interacciones situadas en el aula de matemáticas, revelan o se ajustan a ciertas normas (D'Amore, Font y Godino, 2007) de acción didáctica y de relación social que resulta pertinente conocer, analizar y comprender.

Aspectos metodológicos

El estudio buscó analizar las interacciones didácticas de comprensión lectora de textos matemáticos que se desarrollan mediadas con tecnologías digitales en una institución de formación inicial docente. Se desarrolló bajo un diseño cualitativo con pretensión etnográfica (Taylor y Bogdan, 1986). Asimismo, el analizar las interacciones didácticas que se despliegan al interior de las aulas matemáticas de la FID, se situó concretamente en la modalidad microetnográfica, la cual involucra el reconocimiento de las individualidades para comprender las actuaciones de los grupos. De igual forma, este estudio se trató de ubicar dentro de la etnomatemática, vertiente investigativa propia de la disciplina matemática. Si bien los estudios iniciales de D'Ambrosio (Blanco, 2008), al aplicar la Etnomatemática fueron trabajados en comunidades indígenas para identificar cómo hacen uso de las matemáticas en la vida cotidiana, los nuevos estudios etnomatemáticos -como el de Fuentes (2013) y Núñez (2015)- se orientan al análisis de las interacciones matemáticas en las aulas escolares.

Los participantes en el estudio fueron dos grupos de estudiantes de la Licenciatura en Educación Primaria y 2 docentes de una escuela normal, de la ciudad de Hermosillo, Sonora, México. Para el caso específico de este reporte parcial, solo se atiende a los datos emanados de uno solo de los grupos. El Grupo A cursa el segundo semestre; está integrado por 24 mujeres y un estudiante varón y son coordinados en el curso “Aritmética. Números decimales y fracciones” (correspondiente al Plan de Estudios 2018) por un docente Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas, con más de 40 años de experiencia docente.

Este estudio contó con un diseño de investigación en dos fases: la primera fue la observación de las interacciones didácticas aplicada en las sesiones de clase de cursos de la disciplina Matemática. Durante la aplicación de la técnica de observación participante se llevó registro episódico de las interacciones didácticas en las sesiones de clase, así como grabación de audio de las mismas. La intención fue conocer aspectos de la propia interacción didáctica asociados a la idoneidad interaccional y la mediacional. Las observaciones en el espacio de interacción didáctica iniciaron en el mes de febrero de 2019; para ello, se calendarizó la observación áulica durante el semestre, considerando una observación semanal a cada grupo.

En la segunda fase se aplicó la técnica de entrevista a profundidad a docentes del área matemática y grupo focal con estudiantes, para conocer los significados que los participantes otorgan a la interacción didáctica de la CLtM mediada por TD. En ese sentido, para la aplicación de la técnica de entrevista a profundidad se diseñó un guion de entrevista no estructurada para docentes. Por su parte, para la ejecución del grupo focal con estudiantes, se elaboró una guía de tópicos para grupo de enfoque. Esta técnica se desarrolló con seis estudiantes del grupo de observación que voluntariamente aceptaron participar. El muestreo fue teóricamente definido (Gall, Gall y Borg, 2007), tomando como criterios de selección los referidos por el tipo de relaciones dadas en las interacciones didácticas observadas, considerando para ello los casos extremos.

Tanto la entrevista al docente como el grupo focal se aplicaron en las instalaciones de la institución FID; el audio de ambas sesiones se grabó y se efectuó la respectiva transcripción a texto electrónico. El análisis de los datos cualitativos se realizó en forma iterativa, triangulando la información obtenida de la aplicación de cada una de las técnicas de recolección de datos y la teoría base; de este se generaron categorías analíticas, tomando como base el modelo de análisis del dato cualitativo por etapas, de Taylor y Bogdan (1986).

Algunos resultados

El trabajo con los datos cualitativos que emergieron tanto de la observación participante en aula matemática, como de la entrevista a profundidad al docente y el grupo focal con los estudiantes, consideró su triangulación con las fuentes teóricas básicas. De forma inductiva e inicial, se llegó a la definición de dos categorías analíticas: 1) Interacción Didáctica, con las subcategorías a) interacción docente-discente, b) interacción entre discentes y c) trabajo autónomo del discente; 2) Mediación Didáctica, con las subcategorías a) recursos y materiales didácticos empleados, b) condiciones didácticas áulicas y c) tiempos didácticos.

La primera categoría, *Interacción didáctica*, se refiere a la relación dialógica en que sucede la acción didáctica; el análisis versó respecto de las interacciones entre el docente y el grupo en general de estudiantes y cuando se ofreció atención individualizada; también las interacciones entre los propios estudiantes, cuando el trabajo fue colaborativo o en pequeños grupos y las acciones que en lo individual realizaron los estudiantes al intentar resolver un ejercicio o la propia comprensión de los contenidos matemáticos expresados en los textos. Por su parte, *Mediación Didáctica*, como segunda categoría, refiere a la disponibilidad y grado de adecuación de los recursos materiales, espaciales y temporales pertinentes para el desarrollo eficaz de la interacción didáctica. Así, el análisis consideró: los materiales físicos o tecnológicos sugeridos o aplicados durante la interacción didáctica y el tipo de empleo de los mismos; las condiciones didácticas áulicas y los tiempos didácticos, en cuanto a su empleo y aprovechamiento, además del horario en la jornada escolar.

El espacio de clases en el que ocurre la interacción didáctica del Grupo A es un laboratorio de matemáticas, que cuenta con equipos de cómputo personales para cada estudiante y para el docente, ambos dotados de materiales digitalizados (libros de texto matemáticos en PDF) y con acceso a la red de internet; hay pizarrón tradicional además de uno interactivo. Asimismo, se cuenta con calculadoras científicas disponibles para el uso de los estudiantes, además de materiales bibliográficos físicos. Las sesiones de interacción didáctica se desarrollan en un lapso de 100 minutos.

Por su parte, *el clima en que ocurre la interacción didáctica del Grupo A en el laboratorio de matemáticas es agradable, de confianza. Se propicia el diálogo tanto del docente hacia los estudiantes, como de los estudiantes con el docente y de los propios estudiantes entre sí* (Notas de observación participante, Sesión 1). El ambiente de confianza que impera entre los participantes, docente y estudiantes, puede favorecer el diálogo para profundizar en las nociones teóricas y textuales que se atienden y propiciar la adquisición de aprendizajes profundos. Empero, este en la visión de los estudiantes solo usa para plantear dudas y retroalimentar algunas nociones abordadas; incluso, en ocasiones no se aprovecha adecuadamente. Así lo señala una estudiante en el grupo focal:

Estudiante 3: *Disculpen que lo comente de esta manera, pero… Sí, dentro de todo lo positivo que tienen las clases, considero que hay algunas cosas negativas, como: al tener nosotros dudas vamos creando en el maestro un diálogo, ¿verdad? Entonces, éste suele salirse del contexto matemático… Nos solemos ir por otras rutas que no son exactamente matemáticas y terminamos hablando de temas que realmente no tenían que ver o de cómo era el plan de matemáticas, pero del año… (ríe). Solemos desviarnos mucho. O sea, tenemos mucho diálogo, pero también nos desviamos bastante, lo que considero un poco, pues, inapropiado.*

Asimismo, se ha encontrado la coexistencia de dos culturas en la interacción didáctica matemática de la FID: una que tiene que ver con lo institucional y la otra que es la propia de los estudiantes. Por un lado, la institucional, obedece al aspecto administrativo y curricular de las instituciones normalistas, ya que se cuenta con los espacios específicos y se ofrecen los recursos tecnológicos accesibles para el estudiantado, pero bajo un estricto mecanismo de control de su empleo para la atención de los contenidos curriculares. El docente entrevistado afirma:

Docente: *Tenemos el cañón, con sonido para todo el salón. Tenemos una computadora por alumno, que funciona, hasta ahorita -no son de la última generación, pero funcionan para los muchachos-. Tienen ellos, en su momento,* *una calculadora muy completa –científica y grafica y hace estadísticas, cuestiones de química; hasta cartas pueden escribir ahí, inclusive hasta se pueden conectar a internet–. No los dejo libres yo, porque se pueden meter al Facebook y todo eso. Entonces, les tenemos ciertos controles. […] Les digo que existe, y claro la escuela tiene su control también. Como les digo: Así como a ustedes, a mí también me ven mi trabajo, no es porque me vean, simplemente es porque no es el lugar para hacerlo*.

En ese mismo orden de ideas, el uso de la tecnología en las aulas matemáticas cumple solo función de “soporte”, de sustitución de recursos, para la proyección de materiales de trabajo (textos digitalizados y presentaciones en PowerPoint), con las cuales no se promueven actividades ni tareas que favorecen su uso en la transformación del aprendizaje ni la adquisición de aprendizajes profundos de los contenidos matemáticos. Así se evidencia en los comentarios del docente:

Docente: *El alumno, verás cómo investiga con ellas. Hay muchachos, por ejemplo, no la usamos, cómo te dijera, no la usamos… Bueno sí se usa al principio el PowerPoint, porque tengo ahí la planeación, ¿no? […] Pero de ahí en fuera, yo en lo personal, yo no uso el PowerPoint, yo lo prendo y empezamos a escribir y usamos el pizarrón electrónico*.

Los estudiantes en el grupo focal, respecto a los usos de la tecnología en el aula, señalan:
Estudiante 1: *El maestro de nosotros utiliza pues, utiliza el pizarrón…*
Moderadora: *¿Interactivo?*
Estudiante 1: *Ajá... Y el proyector también lo utiliza mucho.*
Moderadora: *Pero para proyectarles ¿qué?, ¿qué les proyecta?*
Estudiante 1: *Pues… en ocasiones sólo lo pone para que nosotros ahí, pues, resolvamos los problemas, pues, con todos los marcadores y todo eso…*
Estudiante 2: *Eso fue más al principio, ¿no?*
Estudiante 1: *Ajá.*
Estudiante 2: *Últimamente ha sido: pasar al pizarrón, poner un problema y así.*
Estudiante 1: *Sí, la tecnología que hemos estado utilizando son las calculadoras, ahorita.*
Estudiante 3: *Dentro de lo que comentaba mi compañero […], pues sí, trabajamos con un pizarrón inteligente, pero normalmente este era para teoría, más que nada: para ver el libro de Aprendizajes clave, el libro para el maestro, el plan de estudios… todo, todo, todo eso. Entonces considero que sí lo utilizábamos muy bien, ya que al mismo tiempo nosotros tenerlo en cada computadora y tenerlo en el pizarrón interactivo, el maestro nos iba guiando, de “Miren, en esta parte, aquí, el niño dice que tiene que aprender esto y esto en cierto grado, esto y esto en otro”. Y nos ayudó mucho con la teoría, básicamente.*

Por otro lado, la cultura de los estudiantes, constituye una nueva generación que tienen imbuida la acción y empleo de las tecnologías en todos los ámbitos, no solo el académico; ello propicia que sean diestros en su uso y aplicación para atender las actividades propuestas en las sesiones de clase. Tal característica generacional es valorada por el docente:

Docente: *Yo les digo, hay que hacer esto y lo otro y no batallas. Es raro cuando tienes que asesorar a alguien del uso del equipo de cómputo y todo eso; ahí no batallamos nada y es una gran ventaja. Al contrario, como uno: nosotros nacimos desfasados de eso, algunas cosas hemos venido adquiriendo con ellos.*

En la visión de los estudiantes, las matemáticas son una ciencia exacta, cuyos contenidos son de difícil comprensión y aprendizaje; indican que frecuentemente recurren a la tecnología como una herramienta que les permite “comprender” las matemáticas. Ellos señalan como principales recursos la investigación en internet y el apoyo de los videos tutoriales. Así lo expresa un estudiante en el grupo focal:

Estudiante 1: *Pues yo cuando no comprendo algo que dice el maestro o algo así por el estilo, yo lo que hago es investigar por mi propia cuenta.*

Moderadora: *¿En dónde investigas?*
Estudiante 1: *Pues ya sea en internet o le pregunto a algún maestro o a algún otro maestro de Matemáticas o algo por el estilo, y ya pues yo investigo por mi propia cuenta algo que no haya comprendido para poder comprenderlo, poder entenderlo y hacerlo, pues, –hasta cierto punto– mío ese conocimiento. […]Por ejemplo, hace no mucho vi un video de, era del teorema de Pitágoras.*

Incluso son conscientes de que, en los procesos de aprendizaje que tienen que promover en sus prácticas docentes, deben ocupar las tecnologías, por lo cual valoran la exploración en clase de plataformas que les permitan "virtualizar" el aprendizaje. Una estudiante lo señala de la forma siguiente:

Estudiante 2: *Por ejemplo, eso siento que está muy bien, porque, pues, actualmente es a lo que vamos, a la tecnología. Entonces si a los niños, […], se les empieza a dejar tareas por plataformas y cosas así, siento que, o sea, estás combinando técnicamente dos mundos: matemáticas y la tecnología y aparte juegos. Entonces se me hace muy bien que también nos enseñen a nosotros enseñar a través de las tecnologías.*

Los estudiantes asumen que por el solo hecho de utilizar las tecnologías se promueven aprendizajes. Con ello se denota que no existe claridad en su uso didáctico, cuyo propósito debe ser la promoción del aprendizaje y la ejecución de tareas de aprendizaje en profundidad que lleven a construir nuevos saberes y significados, apoyados por los dispositivos tecnológicos a su alcance.

Conclusiones

La interacción didáctica constituye un espacio de comunicación en el que se debe promover el aprendizaje escolar. El reconocimiento de las características de esas interacciones permite reconocer que los resultados de aprendizaje estudiantil se asocian a ellas. Las interacciones didácticas que se desarrollan en las aulas matemáticas de la formación inicial docente, si bien pretenden favorecer el aprendizaje matemático de los estudiantes aprovechando los recursos tecnológicos, estos usualmente no son empleados ni de forma eficiente ni eficaz. Aunque el ambiente y clima de confianza que impera entre los sujetos actuantes puede propiciar el diálogo para generar aprendizajes más profundos, y no solo para plantear dudas y retroalimentar las nociones abordadas, en ocasiones no se aprovechan adecuadamente.

La cultura institucional y las características generacionales permean el tipo de interacción didáctica que se despliega en las aulas matemáticas de la formación inicial docente. El control institucional de los recursos tecnológicos y la exigencia de su uso, generan poco aprovechamiento de la tecnología por el estudiantado en general. Por lo que se ha observado, la acción docente no favorece la propuesta de tareas de aprendizaje donde los estudiantes requieran hacer uso de la tecnología para aprender, sino solo como soportes informativos; su uso es meramente en sustitución y no se orienta hacia la transformación cognitiva. Los estudiantes, al no comprender los contenidos matemáticos abordados en las sesiones de clase, utilizan la tecnología como auxiliar o en suplencia, para subsanar la carencia de comprensión y del aprendizaje matemático no logrado en la interacción didáctica.

Por lo anterior, es necesario considerar en qué medida el modelo didáctico de la formación inicial docente se ha implementado utilitariamente, sin considerar las características generacionales de los estudiantes que atiende. Resulta pertinente realizar este tipo de estudios que permitan reconocer en profundidad lo que sucede en las interacciones didácticas, sobre todo, cuando lo que se quiere es promover nuevas formas interactivas que transformen la enseñanza y el aprendizaje matemáticos. Asimismo, explorar los sentidos que los participantes otorgan a sus acciones al intentar la comprensión de textos matemáticos, permite descubrir acciones didácticas que los llevan a aprovechar la interacción didáctica y los dispositivos a su alcance para gestar aprendizajes profundos.

Referencias bibliográficas

Andrade, M. (2007). La lectura en los universitarios. Un caso específico: Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca. *Revista Tabula Rasa*, (7), 231-249. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/tara/n7/n7a11.pdf

Arnaut, A. (2004). El sistema de formación de maestros en México. Continuidad, reforma y cambio (cuadernos de discusión, Vol. 17). México: SEP.

Benemérita y Centenaria Escuela Normal del Estado de Sonora (2018). Control escolar. Consulta de evaluaciones parciales y finales del segundo semestre. Semestre 2018-1. Ciclo escolar 2017-2018.

Blanco, H. (2008). Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio. Revista latinoamericana de Etnomatemática, Vol. 1(1), febrero, 2008.

Blanco, H. (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*, vol. 23, núm. 59, enero-abril, 2011, pp. 59-66. Recuperado de www.etnomatematica.org/publica/articulos/Publicacion_mayo_2011.pdf

Cantillo, M., De Castro, A., Carbonó, V., Guerra, D., Robles, H., Díaz, D. y Rodríguez, R. (2014). Comprensión lectora y TIC en la universidad. *Apertura*, 6(1), 46-59. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=68831999005

Cassany, D. (2006). *Tras las líneas. Sobre la lectura contemporánea*. Barcelona: Anagrama.

Castellanos, A., Sánchez, C. y Calderero J. (2017). Nuevos modelos tecnopedagógicos. Competencia digital de los alumnos universitarios. *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* 19(1), 1-9. Recuperado de http://redie.uabc.mx/redie/article/view/1148

Castells, M. (1997). La era de la información. Economía, sociedad y cultura. Vol.1. La sociedad red. Madrid: Alianza.

Chartier, A. (2012). La lectura y la escritura escolares ante el desafío de las nuevas tecnologías. En Goldin, D., Kriscautzky, M. y Perelman, F. (Coords.), *Las TIC en la escuela, nuevas herramientas para viejos y nuevos problemas* (pp. 157-182). España: Océano.

Coll, C. y Sánchez, E. (2008). Presentación. El análisis de la interacción alumno-profesor: líneas de investigación. En *Revista de Educación*, 346. Mayo-agosto 2008, pp. 15-32. Recuperado de http://www.revistaeducacion.mec.es/re346/re346.pdf

Cuadro, A., Balbi, A. y Luis, A. (2017). Acceso léxico y lectura de textos en estudiantes universitarios. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19*(4), 1-8. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.4.1282

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, 28(2), 49-77.

Ducoing, P. (2013). Los otros y la formación de profesores. En Ducoing, P. (Coord.) *La escuela normal: una mirada desde el otro.* (pp. 7-22) México: UNAM.

Felipe, A. y Barrios, E. (2017). Evaluación de la competencia lectora de futuros docentes. *Investigaciones Sobre Lectura, 7*, 7-21.

Font, V. y Ramos, A. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cabio institucional. *Revista de Educación*, 338, 309-305.

Fuentes, C. (2013). Etnomatemática y escuela: algunos lineamientos para su integración. Revista Científica, ISSN 0124 2253. Octubre de 2013, Ed. Especial. Bogotá, D.C.

Fullan, M. y Langworthy, M. (2014). *Una rica veta. Cómo las Nuevas Pedagogías logran el Aprendizaje en Profundidad.* London: Pearson.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2007). *Educational Research. An introduction* (8va ed.). United States of America: Pearson

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (CIAEM-IACME). Recife, Brasil, 2011. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12(1), 70-92.

Goñi, J. (2008). *3^2-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. Barcelona: Graó.

Gutiérrez, A., Calderón, L., Barreiro, A., Moscato, P. y Pereyra, A. (2015). La actividad profesional docente: estrategias, diagnósticos y conceptualizaciones En Pereyra, A. et. al. (2015). *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* 1ª ed. Gonnet: UNIPE: Editorial Universitaria.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J. P. da Ponte y L. Serrazina (coord.) (2000), *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia,* pp. 109-132. Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educaçao: Lisboa, Portugal. Recuperado de https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/857/1/Llinares-%20comprendiendo%20la%20practica%20del%20profesor.pdf

Méndez, J., Espinal, C., Arbeláez, D., Gómez, J. y Serna, C. (2014). La lectura crítica en la educación superior: un estado de la cuestión. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 4-18. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/461/983

Núñez, M. (2015). Etnomatemática aplicada a estudiantes del tercer grado de primaria de dos instituciones educativas públicas de Lima, al iniciar y finalizar el año 2013. *Revista Eduser*, Vol.2 Nº 1, 2015.

Österholm, M. (2006a). Characterizing reading comprehension of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, (63), 3, 325-346. Recuperado de http://dx.doi.org/10.1007/s10649-005-9016-y

Österholm, M. (2006b). Läsförståelse och matematik –behöver man lära sig läsa matematik? Föreläsning Gs Gy Vux Högsk Lärutb. *Lectura y matemáticas - ¿qué se necesita para aprender a leer las matemáticas?* Conferencia Gs Gy Vux Högsk Lärutb. Recuperado de https://www.academia.edu/2392855/Läsförståelse_och_matematik_-_behöver_man_lära_sig_läsa_matematik

Palmas, S. (2018). La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 109-132. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n74/0120-3916-rcde-74-00109.pdf

Sandoval, P., Frit, M., Maldonado, A. y Rodríguez, F. (2010). Evaluación de habilidades en matemática y comprensión lectora en estudiantes que ingresan a pedagogía en educación básica: un estudio comparativo en dos universidades del Consejo de Rectores. *Educar em Revista*, Curitiba, Brasil, n. especial 2, p. 73-102, 2010. Editora UFPR. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/er/nspe2/05.pdf

Taylor, S. y Bogdan, R. (1986). *Introducción a los Métodos cualitativos de Investigación. La búsqueda de significados.* Argentina: Paidós.

Vygotsky, L. (1978). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid: Paidós.

PROPOSTAS METODOLÓGICAS PARA O TRABALHO INTERDISCIPLINAR ENTRE A MATEMÁTICA E A FÍSICA: POTENCIALIDADES E CONTRIBUIÇÕES

METHODOLOGICAL PROPOSALS FOR INTERDISCIPLINARY WORK BETWEEN MATHEMATICS AND PHYSICS: POTENTIALITIES AND CONTRIBUTIONS

Robson Kleemann; Vitor José Petry
E. E. E. B. Gov. Irineu Bornhausen (Brasil). Universidade Federal da Fronteira Sul (Brasil)
robson.kleemann@hotmail.com, vitor.petry@uffs.edu.br

Resumo
Nesta pesquisa foram elaboradas três propostas metodológicas com o desenvolvimento de objetos virtuais de aprendizagem - OVA, visando o ensino de Matemática a partir de situações-problema abordadas, com maior especificidade, na disciplina de Física, tendo como ferramenta de apoio o *software* GeoGebra. O trabalho tem como objetivo, investigar as potencialidades e possíveis contribuições da aplicação dessas propostas em aulas de Matemática e Física no Ensino Médio, para a aprendizagem dos conceitos teóricos abordados e sua relação com o mundo real. Caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa em que se desenvolve um estudo de possibilidades em um exercício de imaginação pedagógica. Identificaram-se evidências de que o uso dos OVA constituem-se como importantes elementos auxiliares no processo de aprendizagem, contribuindo principalmente na motivação e interação dos alunos, não dispensando, porém, sistematizações e a formalização dos conceitos neles abordados.

Palavras chave: imaginação pedagógica; Interdisciplinaridade; OVA; GeoGebra

Abstract
This research presents three methodological proposals designed with the development of virtual learning objects (VLO) focused on Mathematics teaching based on problem situations, specifically, in Physics discipline, using the GeoGebra software. The work aims to investigate the potentialities and possible contributions of implementing these proposals in high school Mathematics and Physics classrooms, to the learning of the tackled theoretical concepts and their relationship with the real world. It is characterized as a qualitative research in which a study of possibilities is developed in a pedagogical imagination exercise. It was evidenced that the use of VLO constitute important auxiliary elements in the learning process, contributing mainly to the students' motivation and interaction; without providing, however, systematizations and formalizations of the concepts addressed in them.

Key words: Pedagogical imagination; interdisciplinary; VLO; GeoGebra.

Introdução

A possibilidade de desenvolver atividades provenientes de situações práticas através da resolução de problemas de outras áreas de conhecimento, usando conceitos abordados na disciplina de Matemática, tem-se mostrado uma alternativa para superar desafios e dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem. A inserção dessas atividades no planejamento das aulas, permite uma aproximação dos conceitos matemáticos com situações-problema reais, instigando no aluno o desenvolvimento e a capacidade de pesquisa, resgatando a teoria matemática para resolver e/ou explicar determinado fenômeno envolvido no problema. Algumas opções metodológicas para o ensino da Matemática e áreas afins, são apontadas por diversos autores, como o trabalho interdisciplinar, sugerido por Tomaz e David (2013) ou o uso de recursos tecnológicos apontado por Moran, Masetto e Behrens (2012).

Nesta pesquisa, foram elaboradas três propostas metodológicas visando o ensino de Matemática a partir de situações-problema abordadas com maior especificidade na disciplina de Física. Constitui-se como problema principal dessa pesquisa, investigar as potencialidades e possíveis contribuições da aplicação das propostas metodológicas em aulas de Matemática e Física do Ensino Médio. Assim, tem-se como objetivo, identificar potencialidades e possibilidades de contribuição das propostas baseadas nem relações interdisciplinares. Para tanto, desenvolve-se um exercício de "imaginação pedagógica", conforme sugerido por Skovsmose (2015).

Exploram-se nas propostas metodológicas, possíveis relações a serem estabelecidas entre alguns conteúdos específicos das disciplinas presentes no currículo escolar do Ensino Médio, propondo um resgate dos principais conceitos matemáticos possíveis de serem explorados junto às situações-problema utilizadas para o ensino da Física, na tentativa de justificar os fenômenos envolvidos. Como ferramenta complementar e suporte tecnológico para o desenvolvimento das propostas foi usado o *software* livre GeoGebra, visando a confecção de objetos virtuais de aprendizagem - OVA (ou objetos virtuais, conforme definição usada por alguns autores citados ao longo do texto) e possibilitando a manipulação de dados, permitindo uma visão mais abrangente do assunto a ser explorado.

Marco teórico

Neste trabalho discutem-se potencialidades e possibilidades ao trabalhar conteúdos da Matemática com problemas geralmente abordados na disciplina de Física, relacionando conceitos científicos inerentes a ambas. Essa relação interdisciplinar é importante para a aprendizagem do aluno de forma a desenvolver a percepção de que muitos problemas do seu cotidiano são resolvidos a partir da aplicação de conceitos abordados por diferentes áreas do conhecimento. Para desenvolver essa compreensão nos alunos é considera-se importante que propostas metodológicas sejam elaboradas e repensadas constantemente, reformulando e adequando as já existentes, ou desenvolvendo novos materiais e objetos a serem utilizados no ambiente escolar. De acordo com Tomaz e David (2013), o desenvolvimento dessas propostas deve considerar a importância da contextualização ao partir de uma situação-problema do cotidiano, recorrer a conceitos específicos de determinada(s) disciplina(s) na busca por diferentes hipóteses na explicação do fenômeno associado.

Acredita-se que a aprendizagem ocorre, de modo mais eficiente, a partir do momento em que o aluno consegue justificar suas hipóteses e até mesmo questionar proposições apresentadas, obtendo conclusões acerca dos problemas em tela, com base em conhecimentos constituídos em diferentes disciplinas de seu currículo escolar, superando a fragmentação dos conceitos isolados nas disciplinas, o que corrobora com a afirmação dos autores:

> [...] Essas propostas pretendem mudar o isolamento e a fragmentação dos conteúdos, ressaltando que o conhecimento disciplinar por si só não favorece a compreensão de forma global e abrangente de situações da realidade vividas pelo aluno, elegendo dois princípios básicos para o ensino de Matemática: o da contextualização e o da interdisciplinaridade. (Tomaz e David, 2013, p. 14).

Ainda, de acordo com Tomaz e David (2013), apesar da importância de o ensino da Matemática estar articulado com as várias práticas e necessidades sociais, nem todo o conhecimento deve necessariamente ser aprendido a partir das situações da realidade do aluno. Eles propõem que as contextualizações devam ocorrer também a partir da relação com outras áreas do conhecimento, especialmente abordando problemas inerentes a essas áreas, usando os conceitos e conhecimentos da Matemática na abordagem de tais problemas. Nessa concepção, consideram a interdisciplinaridade como um processo de "transferência de aprendizagem", que se torna mais eficiente e autônoma, a partir do momento em que os alunos desenvolvem a capacidade de "transferir" seus conhecimentos de matérias distintas ao buscar justificativas para fenômenos de uma matéria específica. Destacam ainda a importância da participação do professor como mediador neste processo e coparticipante na "transferência de aprendizagem". Discutir conceitos matemáticos a partir de problemas explorados ou explicados na Física é um exemplo de trabalho interdisciplinar, de acordo com a proposição de Tomaz e David. É importante observar que trabalhar de forma interdisciplinar "[...] não consiste no aprender um pouco de tudo, mas no enfrentar o problema (explicativo, previsível, interpretativo) com toda a competência do especialista que domina o problema, suas dificuldades, as explicações e previsões dos outros competentes." (Yared, 2008, p. 162). A autora defende ainda que o trabalho interdisciplinar favorece um ambiente de colaboração e de "divisão do trabalho" entre os agentes de diferentes áreas ou disciplinas e sugere um conjunto de ações entre disciplinas abertas sempre a novas relações que se vai descobrindo. Entende-se dessa forma, a interdisciplinaridade como "toda interação existente dentre duas ou mais disciplinas no âmbito do conhecimento, dos métodos e da aprendizagem delas." (Yared, 2008, p. 162).

Fazenda (2011) também destaca o caráter integrador do trabalho interdisciplinar, além de sugerir que estabelecer relações interdisciplinares corresponde a trabalhar com situações-problema que sejam do interesse do aluno e que também são investigadas em outras disciplinas, permitindo ao aluno uma interligação dos conceitos. Dessa forma, o desenvolvimento de atividades interdisciplinares pautado no uso de métodos diferenciados de ensino, visa proporcionar o enriquecimento do processo de ensino-aprendizagem e uma visão mais abrangente por parte do aluno, a partir do resgate e do cruzamento de conceitos comuns a todas as disciplinas que atuam de modo complementar.

Por outro lado, o uso das mídias tecnológicas para o desenvolvimento de metodologias de ensino e a inserção dos recursos tecnológicos (como os OVA, por exemplo) na aplicação e planejamento da atividade docente pode impulsionar a aprendizagem dos conteúdos curriculares e fortalecer a prática pedagógica do professor. Nesse sentido, é importante que o professor tenha condições de usar e desenvolver OVA a partir de *software* disponíveis, a fim de proporcionar maior compreensão dos conceitos abordados em suas aulas, permitindo melhor visualização, seja geométrica ou algébrica, dos objetos de estudo.

Entende-se que um trabalho interdisciplinar, juntamente com o desenvolvimento e manipulação de OVA, facilite a compreensão dos conceitos e teorias envolvidos na resolução dos problemas abordados de modo a favorecer uma aprendizagem significativa. De acordo com Jahn, *et al.* (2014, p. 19) o uso da tecnologia digital deve servir essencialmente para "[...] abrir o leque de possibilidades para o fazer e o pensar matemático, buscando reconhecer e valorizar os conhecimentos e diferentes formas de expressão dos estudantes, a fim de estabelecer um permanente diálogo com a prática educativa". Assim, "[...] o uso da tecnologia está além do 'fazer melhor', 'fazer mais rápido', trata-se de um 'fazer diferente'" (Rolkouski, 2011, p. 102). Moran, Masetto e Behrens (2012) sugerem o uso da tecnologia como um meio de mediação pedagógica, porém alertam que "ensinar com novas mídias será uma revolução se mudarmos simultaneamente os paradigmas convencionais do ensino que mantém distantes professores e alunos." (Moran, Masetto e Behrens, 2012, p. 63).

Uma das formas de usar as tecnologias em sala de aula é através do desenvolvimento e/ou a interação com OVA, cuja utilização como instrumento de aprendizagem já vem sendo discutida desde a década de 1990, por serem considerados importantes aliados no processo de ensino e aprendizagem devido sua capacidade de simular e animar fenômenos e pela facilidade de proporcionar diferentes representações de objetos, especialmente geométricos, no caso do ensino de Matemática. Segundo Audino e Nascimento (2010, p. 133), "[...] qualquer material digital que possa ser reutilizado para dar suporte ao ensino é considerado um objeto de aprendizagem". Já para Hay e Knaack (2007), objetos virtuais de aprendizagem são todas as ferramentas interativas que apoiam o aprendizado de conceitos específicos, incrementando, ampliando ou orientando o processo cognitivo dos aprendizes. Sua principal função é auxiliar no estímulo ao desenvolvimento de capacidades, como, por exemplo, imaginação e criatividade.

Ao desenvolver novas propostas metodológicas para o ensino de Matemática, tem-se a possibilidade de fazer um exercício de "imaginação pedagógica", conforme sugerido por Skovsmose (2015). Segundo o autor, este é um processo importante "para sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis" (p. 76), considerando ainda que essa imaginação é "parte integrante da pesquisa educacional que não permanece no paradigma descritivo, pois ela é fundamental a pesquisa de possibilidades educacionais" (p. 76).

Skovsmose (2015) defende que a imaginação pedagógica necessita de combustível e de recursos para ocorrer, sendo importante na busca de alternativas para o processo de ensino e aprendizagem constituindo-se em uma "pesquisa de possibilidades" através de um "raciocínio exploratório" como o relacionamento entre diferentes situações, sejam atuais, experimentais, arranjadas ou imaginárias em todas as suas multiplicidades. Seu objetivo é o de "desenvolver uma compreensão mais profunda da situação imaginada [...] é por meio desse processo que a situação imaginada se torna fundamentada" (Skovsmose, 2015, p. 79). Assim, sugere estudar situações imaginadas com base nos recursos gerados na situação arranjada, transformando a imaginação em alternativas mais acessíveis e estabelecendo novas possibilidades ou formas de abordagem dos conteúdos a serem trabalhados com os alunos. Desta forma, entende-se que este tipo de pesquisa é possível a partir da avaliação das potencialidades que as propostas metodológicas podem proporcionar para o ensino de Matemática e Física de forma interdisciplinar, permitindo imaginar além do que eventualmente ocorreria em um estudo de caso, por exemplo.

A imaginação pedagógica desenvolvida neste trabalho foi subsidiada pela percepção de alguns professores que atuam no Ensino Médio em pelo menos uma das duas disciplinas, sendo a coleta desses dados realizada a partir da aplicação de um questionário *online* com questões abertas e fechadas juntamente com a apresentação das propostas.

Metodologia

Neste trabalho se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, sendo os dados submetidos a análise textual discursiva, conforme proposto por Moraes e Galiazzi (2007). Desenvolve-se uma pesquisa de possibilidades em um exercício de imaginação pedagógica, a partir da elaboração de propostas metodológicas, visando um trabalho interdisciplinar para a resolução de problemas reais geralmente relacionados à disciplina de Física. Exploram-se nas propostas metodológicas, possíveis relações a serem estabelecidas entre conteúdos específicos das disciplinas presentes no currículo escolar do Ensino Médio, propondo um resgate dos principais conceitos matemáticos possíveis de serem explorados junto às situações-problema, na tentativa de justificar os fenômenos envolvidos. Como ferramenta complementar e suporte tecnológico para o desenvolvimento das propostas foi usado o *software* livre GeoGebra, visando a confecção de OVA com possibilidade de interação e manipulação, permitindo uma visão mais abrangente do assunto a ser explorado.

As propostas metodológicas foram desenvolvidas considerando como problema inicial três conteúdos abordados na disciplina de Física: 1 - espelhos esféricos e a caracterização das imagens a partir da posição do objeto em relação ao espelho; 2 – ondas e sinais de satélites; 3 - Leis de Kepler e o lugar geométrico da trajetória descrita pelos planetas em torno do Sol.

Buscando a contribuição de professores que atuam no Ensino Médio nas referidas disciplinas, foi elaborado um questionário onde inicialmente estes foram convidados a elencar os conteúdos, conceitos e/ou abordagens relacionados as disciplinas de Matemática e/ou Física que considerassem que possam ser trabalhados e explorados em sala de aula relativo a cada um dos problemas propostos. Após esse exercício inicial foi apresentada uma proposta metodológica elaborada para cada um dos problemas sugeridos.

Foram disponibilizados vídeos com a apresentação dos OVA, os *links* de acesso e instruções para interação com cada um dos objetos. Nessa apresentação também foram definidos os problemas da Física relativos a cada um dos conteúdos propostos. No final do questionário também foram convidados a trazer suas percepções sobre as possibilidades de trabalhar de forma interdisciplinar e de usar OVA em suas atividades docentes. O objetivo do questionário não foi o de ter um panorama da percepção dos professores com a finalidade de fazer generalizações, mas somente de considerar as contribuições desses no exercício de imaginação pedagógica, não havendo a preocupação nesse trabalho com o tamanho da amostra de respondentes.

Resultados e análise

Nesta seção são apresentados os resultados da elaboração das três propostas metodológicas com o respectivo exercício de imaginação pedagógica com a participação de seis professores, sendo cinco professores de Matemática, enquanto quatro atuam ou já atuaram como professores de Física. Para cada uma das propostas são elencadas inicialmente as possibilidades sugeridas pelos professores a partir da proposição do tema. Na sequência são apresentados ao leitor alguns aspectos das propostas e dos OVA, seguidos das percepções adicionais dos professores após a interação com o material, analisando as possiblidades ou potencialidades de abordagens com o material proposto, considerando também, além da opinião dos professores, a percepção dos autores dessa pesquisa.

Na proposição do primeiro problema - espelhos esféricos e a caracterização das imagens a partir da posição do objeto em relação ao espelho - em sua abordagem inicial os professores elencaram alguns tópicos e conteúdos a serem trabalhados, relacionados ao problema proposto. Optou-se em apresentar os tópicos com as expressões usadas pelos professores, e, no caso dos tópicos sugeridos com a mesma abrangência por mais de um professor, esse é apresentado uma única vez. Assim, nesta abordagem foi apontada a possibilidade de trabalhar com geometria, retas paralelas, retas transversais, conceito de esfera, secções de uma esfera, raio de esfera, foco, vértices, ângulos, paralelismo, vetores, reflexão, projeção, imagens, óptica, explorar conceitos de côncavo e convexo. Houve também um professor que afirmou ser possível discutir com os alunos aspectos relacionados ao funcionamento dos projetores, espelhos bucais utilizados pelos dentistas, retrovisores de carros, espelhos de segurança encontrados em lojas, corredores de supermercados, etc. Observa-se nessa análise algumas respostas com abrangência bastante ampla, como no caso de quem sugeriu trabalhar geometria, sem especificar quais tópicos de geometria possam ser explorados. Observa-se também uma preocupação com a contextualização.

Para esta primeira proposta foram desenvolvidos e disponibilizados aos professores, quatro OVA. Além dos objetos, foi disponibilizado um vídeo de apresentação do tema, dos objetos e algumas instruções para possibilitar melhor interação. Inicialmente considera-se que um espelho esférico consiste em parte da superfície esférica (superfície da calota esférica) cujo centro de curvatura coincide com o centro C da esfera que deu origem ao espelho, o vértice V é um ponto pertencente à esfera de forma que o objeto a ser observado fique sobre o eixo $CV,$ sendo o foco o ponto médio de CV. A distância focal, equivale à metade da medida do raio da esfera, e, por definição, é positiva nos espelhos côncavos e negativa nos espelhos convexos. Para a compreensão do processo de formação de imagens, nos materiais didáticos de Física para o Ensino Médio, dentre eles, Artuso e Wrublewski (2013), são apresentadas quatro propriedades, das quais duas são verificadas geometricamente e as outras são aproximações do ponto de vista matemático.

O primeiro OVA tem como principal finalidade a compreensão dessas propriedades, desconsiderando-se os erros gerados pelas aproximações mencionadas. Ao interagir com o objeto é possível escolher a propriedade a ser observada e "animar" o controle deslizante para visualizar vários raios diferentes incidindo de acordo com a propriedade escolhida, conforme mostrado na figura 1. No OVA também é possível acionar uma caixa de diálogo com instruções para melhor interagir com o objeto. No segundo OVA é possível observar a formação de imagens de acordo com a posição do objeto em frente ao espelho que pode variar quando é ativada a animação de controles deslizantes. Além da posição, é possível também comparar o tamanho da imagem formada com o tamanho do objeto e os casos em que não ocorre a formação da imagem.

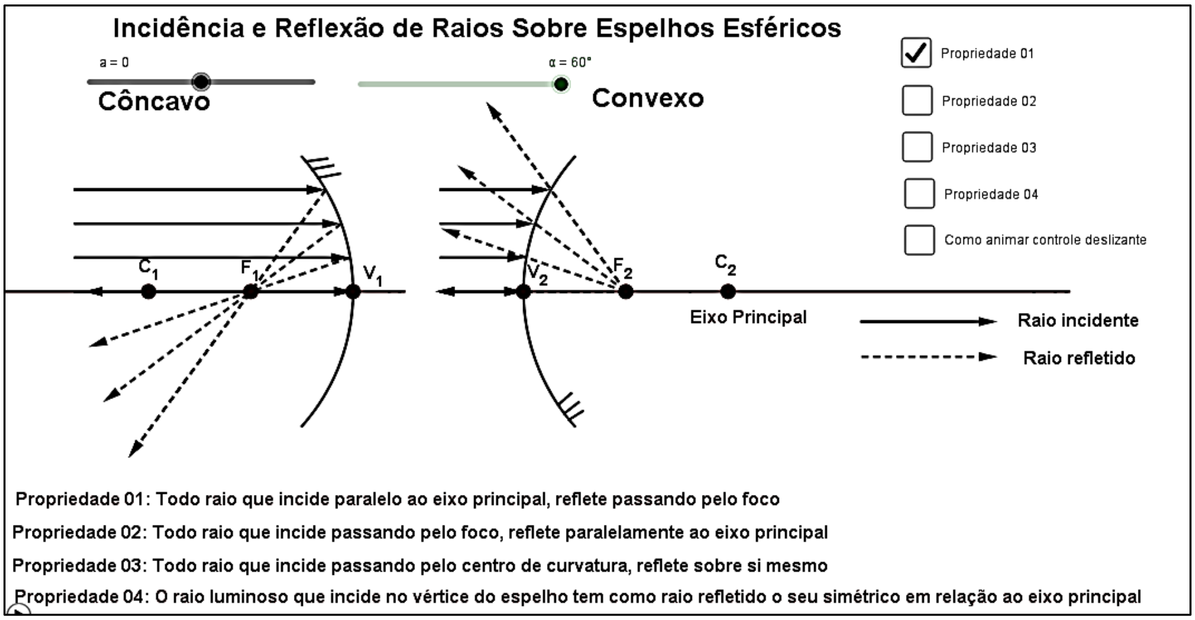


Figura 1. *OVA que mostra as propriedades de incidência e reflexão de raios sobre o espelho esférico.*

De acordo com Artuso e Wrublewski (2013), para a caracterização das imagens, considera-se os seguintes procedimentos: (i) traçar ao menos dois raios distintos que partem de um mesmo ponto do objeto (usualmente utiliza-se os extremos dos objetos) e chegam ao espelho (raios incidentes); (ii) para cada raio incidente, determinar o respectivo raio refletido; (iii) no ponto de encontro dos raios refletidos (se existir) haverá a formação da imagem para o respectivo ponto em relação ao objeto. No caso dos raios refletidos serem paralelos, não haverá a formação de imagem. Também nesse objeto é possível exibir o ângulo de abertura do espelho.

Os outros dois OVA foram desenvolvidos com a finalidade de observar os erros gerados por dois tipos de aproximações sugeridos em todos os materiais didáticos de Física para o Ensino Médio que foram analisados. Nesses materiais, considera-se para fins de verificação da posição da imagem em função da posição do objeto a superfície do espelho plana, facilitando dessa forma a análise de cada situação usando congruência de triângulos, porém isso é claramente uma aproximação do ponto de vista matemático, visto que é impossível a obtenção de superfície plana em uma calota esférica. Em se tratando de uma aproximação da realidade, considera-se importante que o professor tenha a percepção e a possibilidade de estimar o erro gerado por cada simplificação feita, e este é o objetivo do terceiro OVA.

No quarto OVA visualizado na figura 2, é possível verificar o valor numérico do erro gerado pelas simplificações adotadas ao enunciar as propriedades 01 e 02 mostradas na figura 1. Novamente, ao animar os controles deslizantes, diferentes situações podem ser simuladas. Vale ressaltar que não é objetivo da atividade, criticar o conteúdo do material didático usado no Ensino Médio, mas sim, dar suporte ao professor para que ele tenha a possibilidade de analisar e compreender os erros gerados por cada uma das simplificações adotadas.

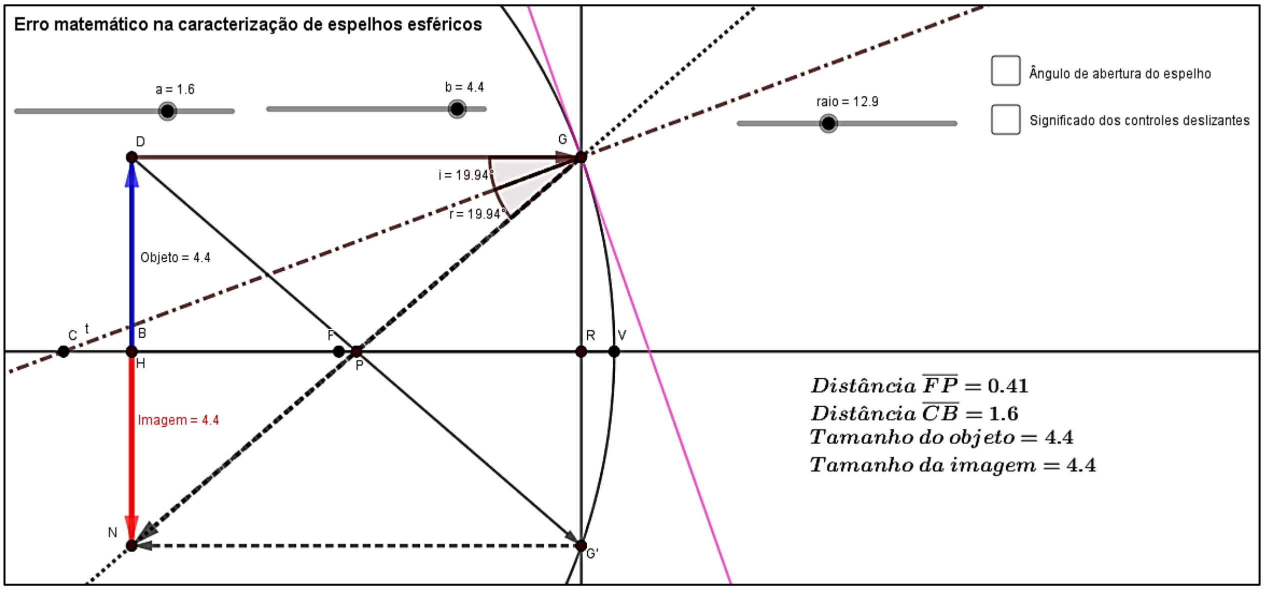


Figura 2. *OVA que mostra o erro gerado pelas simplificações adotadas em materiais didáticos*

Após a interação com o material, os professores que participaram da pesquisa foram convidados a elencar mais algumas possibilidades de abordagem relativas a esse problema, além das já apontadas anteriormente. As principais possibilidades apontadas se referem a seção determinada por um plano em uma esfera, distância entre dois pontos, diagonais, incidência e reflexão de raios, congruências (ângulos, segmentos e triângulos), projeção ortogonal, retas tangentes, propriedade da ortogonalidade entre o raio e a reta tangente a uma circunferência, semelhanças de triângulos, razões trigonométricas e erros provocados pelas simplificações nos modelos físicos associados à espelhos esféricos, raios e feixes de luz, caracterização e propriedades dos raios de incidência e reflexão e caracterização das imagens de acordo com o posicionamento do objeto em frente ao espelho.

Observa-se após a interação com o material algumas respostas com indicativo de conteúdos mais específico e direcionado. Acredita-se que os OVA tenham contribuído neste direcionamento, visto que vários elementos propostos pelos professores podem ser visualizados nos objetos, o que de fato é uma das finalidades do uso de OVA, principalmente com os alunos durante as aulas, seja de Matemática ou de Física. Observa-se também a compreensão dos professores da interrelação entre conteúdos propostos para as duas disciplinas.

Além das possibilidades propostas pelos professores nesse primeiro exercício de imaginação pedagógica, vale destacar ainda o cálculo do erro de aproximação na obtenção do tamanho e posição da imagem em função da posição e tamanho do objeto a ser refletido pelo espelho, usando o princípio da incidência e reflexão de raios luminosos em relação à reta tangente à circunferência no ponto de incidência, propriedades do triângulo isósceles, semelhança de triângulos, a lei dos cossenos, alguns cálculos algébricos (e mais alguns aspectos já mencionados pelos professores). Este cálculo sugere por exemplo que o objeto e a imagem tem tamanhos iguais, quando a posição do objeto está em uma posição B, cuja distância até o centro C é dada por $BC = r\left(\frac{1-cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$, onde r é o raio da esfera e θ é o ângulo de abertura do espelho. Isso justifica a necessidade das condições de convergência de Gauss apresentadas nos materiais didáticos de Física, pois à medida que o ângulo aumenta, essa distância também aumenta significativamente, enquanto nos materiais didáticos se afirma que essa situação ocorre para objetos posicionados no centro.

Na abordagem inicial da segunda proposta - ondas e sinais de satélites – os professores apontaram a possibilidade de trabalhar com funções, construção de parábolas e explorar foco, vértices e outros elementos, gráficos de uma função, trajetórias, geometria, explorar conceitos de côncavo e convexo, vetores, ângulos, funções trigonométricas (período, amplitude, frequência, domínio e imagem), ciclo trigonométrico, razões trigonométricas, conceito e propriedades das ondas eletromagnéticas, satélites de comunicação, televisão, estudos meteorológicos, sensoriamento remoto e cônicas.

São sugeridas algumas possibilidades que não haviam sido consideradas pelos autores no momento da elaboração das propostas e dos OVA, o que reforça a importância do exercício da imaginação pedagógica proposto por Skovsmose (2015), bem como do envolvimento de professores que atuam no Ensino Médio nesse exercício. Para essa proposta metodológica também foram desenvolvidos quatro OVA, sendo que o primeiro teve como finalidade compreender a formação de um paraboloide (a antena parabólica é um exemplo de paraboloide) a partir da rotação de uma parábola em torno do seu eixo de simetria, conforme ilustrado na figura 3. É possível visualizar também através desse objeto que cada uma das infinitas parábolas corresponde a uma seção do paraboloide determinada por um plano que passa pelo seu eixo, sendo, portanto, o foco, o mesmo para cada uma dessas parábolas. Além disso é perceptível, através do OVA, que raios que incidem paralelamente ao eixo do paraboloide são refletivos para o foco e que a verificação das propriedades do paraboloide necessárias para compreender o funcionamento da antena parabólica podem ser obtidas pela análise da parábola no plano.

No segundo e no terceiro OVA elaborados para essa proposta é possível identificar o foco e a reta diretriz da parábola, sendo essas, paralela ao eixo das abcissas e ao eixo das ordenadas, respectivamente. Na interação com esses objetos podem ser alteradas as posições da reta diretriz, do foco (com deslocamentos horizontais e verticais) e o ponto sobre a parábola em que incide o sinal do satélite. São representados também a reta tangente à parábola no ponto, permitindo visualizar a inclinação dessa reta tangente em relação ao eixo coordenado e a equação da parábola correspondente a cada situação, permitindo melhor compreensão das características e propriedades das parábolas.

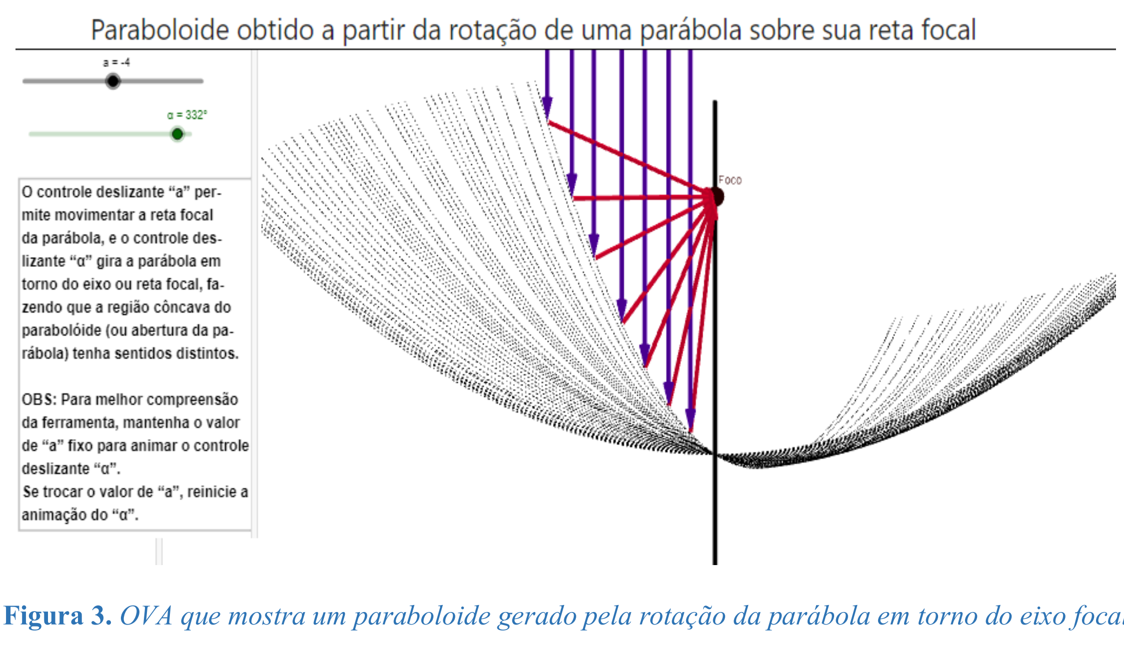


Figura 3. *OVA que mostra um paraboloide gerado pela rotação da parábola em torno do eixo focal*

Já o quarto OVA tem como finalidade permitir a visualização dos raios incidentes e refletidos sobre um ponto qualquer da parábola, considerando-se raios refletidos paralelamente ao eixo de simetria, uma vez que a distância da antena até o satélite é muito grande o que minimiza o erro causado por essa simplificação. Aplica-se também nesse caso o princípio da incidência e reflexão de raios em relação à reta tangente à parábola no ponto de incidência.

Novamente após a interação com o material, os professores elencaram mais algumas possibilidades de abordagem relativas a este problema, destacando-se as potencialidades do trabalho de conceitos relacionados à perpendicularidade, mediana, mediatriz, retas tangentes, incidência e reflexão de raios, distância de dois pontos, coeficiente angular, equação de reta, equação da parábola, triângulo isósceles, semelhança de triângulos, determinação da inclinação da reta tangente à parábola, rotação da parábola para formação de paraboloide, importância do foco para a captação da imagem em uma antena, conceitos e propriedades das ondas eletromagnéticas e introdução ao cálculo. Observa-se nessa atividade um importante exercício de imaginação pedagógica em que os professores conseguiram elencar diversos conceitos a serem abordados em ambas as disciplinas, permitindo, portanto, relações interdisciplinares na abordagem do problema proposto.

Embora tenha sido mencionado de forma implícita em alguns apontamentos apresentados, ressalta-se a possibilidade de mostrar geométrica e algebricamente que todo o raio que incide paralelamente ao eixo do paraboloide é refletido para o seu foco, o que determina a posição em que deve ser colocado o receptor dos sinais emitidos pelos satélites para se ter a sintonização apropriada da imagem e dos áudios. Essa situação pode ser visualizada em um OVA e sua demonstração é feita usando, dentre outros conceitos, o princípio dos ângulos de incidência e reflexão, as propriedades da mediana, altura e bissetriz do triângulo isósceles, coeficiente angular da reta tangente, relação entre coeficientes angulares de retas perpendiculares e alguns cálculos algébricos.

Quanto à introdução ao cálculo, sugerida por um dos professores observa-se a ideia intuitiva de limite presente na consideração de um feixe de raios paralelos ao eixo do paraboloide e da possibilidade de obtenção do coeficiente angular da reta tangente pelo cálculo da derivada da função quadrática no ponto de tangência, embora isso também possa ser feito apenas com conteúdos discutidos no Ensino Médio, através da definição de retas tangentes e da diferença dos valores de uma das coordenadas entre os pontos da parábola e da reta tangente que interceptam uma reta qualquer paralela ao eixo da parábola.

Na abordagem da terceira proposta - Leis de Kepler e o lugar geométrico da trajetória descrita pelos planetas em torno do Sol – os professores apontaram a possibilidade de trabalhar com geometria analítica (elipses e seus elementos), cônicas, distâncias, força gravitacional, movimentos, trajetórias, explorar modelos geocêntrico e heliocêntrico, funções e círculo. Foram elaborados e disponibilizados três OVA para essa proposta metodológica, sendo dois com a finalidade de obter a construção de elipses, permitindo-se na interação, alterações nos focos, na excentricidade, além de translações horizontais e verticais. Em cada caso, são exibidos no objeto os principais elementos, dando destaque à definição da elipse. Também é feita a interface entre a representação geométrica e algébrica. No vídeo de apresentação da proposta metodológica faz-se uma exposição das leis de Kepler que são abordadas no terceiro OVA, onde é construída uma elipse, representando a trajetória da Terra, tendo o Sol como um dos focos (primeira lei). Para sua construção, são consideradas as distâncias aproximadas disponíveis na literatura.

Destaca-se nesse objeto também a segunda lei de Kepler, conhecida como lei das áreas, segundo a qual a área descrita pelo raio vetor de um planeta (linha imaginária que liga o Sol ao planeta) é diretamente proporcional ao tempo gasto para descrevê-la, conforme ilustrado na figura 4. A implementação dessa ideia foi desenvolvida no OVA de forma que a velocidade linear do planeta Terra na trajetória elíptica (considerando o movimento de translação) varia de acordo com sua posição, atingindo velocidade máxima (quando ocorre o fenômeno periélio) no ponto mais próximo do foco que está no centro do Sol e atinge o valor mínimo (no fenômeno afélio) quando a distância do Sol até a Terra é máxima.

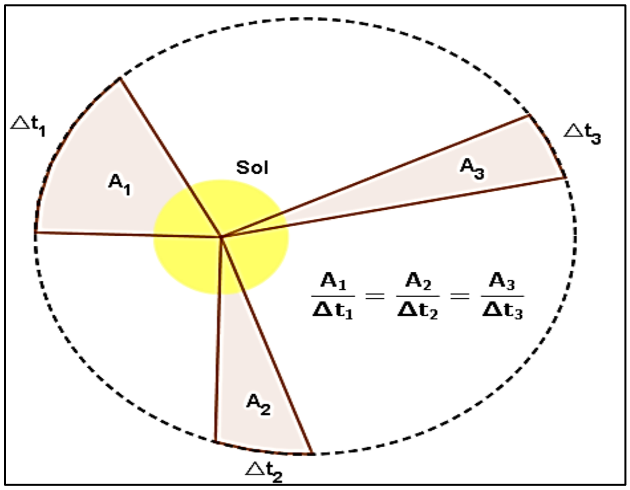


Figura 4. *Representação gráfica da segunda lei de Kepler*

Após a interação com a terceira proposta metodológica os professores apontaram como possibilidades trabalhar conceitos relativos à geometria analítica: distância entre dois pontos, comprimento de segmentos, vetores, características e equação da elipse, rotação e translação de objetos em torno de um ponto. Além dessas possibilidades, aponta-se ainda a potencialidade do material para abordagens relativas aos fenômenos periélio, afélio, as estações do ano em cada um dos hemisférios, relações entre velocidade linear e velocidade angular, razões e proporções, grandezas inversamente proporcionais e análise de áreas.

A partir do exercício de imaginação pedagógica desenvolvido junto aos seis professores que responderam ao questionário, pode-se observar a potencialidade de abordar diversos conteúdos e conceitos relacionados às disciplinas de Matemática e de Física, usando as propostas metodológicas desenvolvidas. Identificou-se nos apontamentos destes, a possibilidade de trabalhar de forma interdisciplinar com a contextualização a partir de situações-problema que sejam do interesse do aluno e que também são investigadas em diferentes disciplinas, de modo a permitir ao educando uma interligação dos conceitos, conforme destacado por Fazenda (2011).

O uso de OVA, com a possibilidade de interação, é recomendado pelos professores, devido seu potencial de visualização e animação das situações em estudo, possibilitando melhor compreensão dos conceitos abordados, servindo de estímulo para a aprendizagem, conforme defendem Hay e Knaack (2007). Em uma avaliação geral do uso dos OVA disponibilizados, os professores apontam alguns potenciais, além das abordagens dos conteúdos já citadas, como a "motivação do processo de ensino-aprendizagem, de estimular o pensamento indutivo, estimular o pensamento dedutivo, estimular a construção de hipóteses, simulações de situações reais" (Professor 1). Outro professor aponta que "permite uma visão mais abrangente acerca dos problemas contextualizados; facilita a manipulação dos dados; possibilita melhor interpretação e estudo a partir da análise de gráficos" (Professor 2).

De acordo com um terceiro professor, o material apresentado traz a possibilidade de "contextualização, visualização, exemplificação e principalmente, interatividade em qualquer lugar, não precisa de um laboratório ou um lugar específico para aprender" (Professor 3). Ainda houve quem afirmasse que "é uma forma mais atrativa para o aluno que está acostumado com aulas de quadro branco e *slides* estáticos" (Professor 4). A importância do uso de OVA também é apontada pelo Professor 5, quando afirma que "a ideia de simular situações e comprovar resultados diante do que está sendo trabalhado, mostra que objetos de aprendizagem são uns dos caminhos a serem desenvolvidos."

No que se refere a possibilidade de usar o material em suas aulas, os professores mostraram disposição em usar o material. Alguns afirmam que utilizam com frequência recursos tecnológicos em suas aulas e que a disponibilização desse tipo de material facilita o trabalho, visto que sua elaboração, em geral demanda bastante tempo. Por fim, houve clara manifestação dos participantes da pesquisa de que a interação com os objetos e a apresentação das propostas através dos vídeos despertou neles a percepção de novas possibilidades de atuação como professores, seja na perspectiva do desenvolvimento de relações interdisciplinares através da exploração de situações-problema demandados por outras disciplinas, seja pelo uso dos OVA em suas atividades docentes. Isso corrobora com Skovsmose quando afirma que o processo de imaginação pedagógica é importante "para sugerir que práticas educativas alternativas são possíveis" (Skovsmose, 2015, p. 76).

Considerações finais

Um dos grandes desafios existentes na inserção de práticas de ensino diferenciadas, como a interdisciplinaridade, é que estas demandam do professor um preparo maior, pois, além dos conceitos específicos de sua área de formação, ele passa a investigar assuntos de outras áreas que possuem ligação com os conceitos abordados em sua disciplina. O uso dos recursos tecnológicos em sala de aula frequentemente fica prejudicado pela demanda de tempo do professor para preparar atividades ou OVA que favoreçam a aprendizagem. Daí a importância de disponibilizar e promover um exercício de imaginação pedagógica com professores a fim de explorar junto a estes as potencialidades dos materiais desenvolvidos.
Pelas percepções observadas, acredita-se que, a partir da contextualização e dos direcionamentos apresentados nas propostas metodológicas, em especial, pela manipulação dos OVA, professores, juntamente com seus alunos tenham a capacidade de compreender e justificar os fenômenos abordados, utilizando-se de conceitos pertinentes, numa relação interdisciplinar. Os autores desse trabalho defendem que OVA constituem-se como importantes elementos auxiliares no processo de aprendizagem de conteúdos da Matemática, contribuindo principalmente na motivação e interação dos alunos, especialmente pela possibilidade de visualização gráfica/geométrica dos objetos estudados, necessitando, porém, uma complementação através de sistematizações e da formalização dos conceitos neles abordados.

Agradecimento: A pesquisa teve apoio financeiro da FAPESC por meio do projeto de pesquisa com termo de outorga 2018TR1514 referente ao Edital nº 03/2018.

Referências bibliográficas

Artuso, A. R.; Wrublewski, M. (2013). Física. v. 01. Curitiba: Positivo.
Audino, D. F. e Nascimento, R. S. (2010). Objetos de aprendizagem – diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. *Revista Contemporânea de Educação*, 10(5), 128-148.
Fazenda, I. (2011). *Práticas Interdisciplinares na Escola*. 12ª ed. São Paulo: Cortez.
Hay, R. H.; Knaack, L. (2007). Evaluating the learning in learning objects. *Open Learning: The Journal of Open and Distance Education*, 22(1), 5-28.
Jahn, A. P. et al. (2014). *Formação de professores do ensino médio: Pacto Nacional pelo Fortalecimento do Ensino Médio*, etapa II – caderno V: Matemática. Curitiba: UFPR.
Moraes, R., Galiazzi, M. C. (2007) *Análise textual discursiva*. Ijuí: Unijuí.
Moran, J. M., Masetto, M. T., Behrens, M. A. (2012*). Novas tecnologias e mediações pedagógicas*. Campinas, SP. Papirus.
Rolkouski, E. (2011). *Tecnologias no Ensino de Matemática*. Curitiba: Ibpex.
Skovsmose, O. (2015). Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D´Ambrosio, B.S. e Lopes, C.E. (orgs.). *Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática* (pp. 63-90). Campinas, SP: Mercado de Letras.

Tomaz, V. S.; David, M. M. M. S. (2013). *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula.* 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Yared. I. (2008). ¿O que é interdisciplinaridade? In: Fazenda, I (Org). *¿O que é Interdisciplinaridade?* (pp. 161-166). São Paulo: Cortez.

CONHECIMENTO TECNOLÓGICO NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CURSO EM EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA

TECHNOLOGICAL KNOWLEDGE IN THE TRAINING OF MATHEMATICS TEACHERS IN A DISTANCE LEARNING PROGRAM

Auriluci de Carvalho Figueiredo, Elizabeth Magalhães de Oliveira, Marco Antonio Di Pinto
Universidade Metropolitana de Santos
(Brasil)
aurilucy@uol.com.br; elizabeth.oliveira@unimes.br; marco.antonio@unimes.br

Resumo
Este artigo relata parte de uma investigação sobre saberes relativos ao uso de *softwares* matemáticos na formação docente em um curso de licenciatura em matemática em ambiente virtual de aprendizagem. Descreve um estudo de caso focalizando o modo como as atividades propostas nesse ambiente podem auxiliar a articular o conhecimento do conteúdo específico ao conhecimento tecnológico. A análise entrelaçou dados acerca do conhecimento desses alunos sobre o conteúdo específico para sua futura área de atuação, sobre o conteúdo pedagógico que pode entrar em cena no momento de sua prática e sobre o conhecimento tecnológico em determinado contexto de ensino.

Palavras-chave: tecnologias, formação de professores, educação a distância

Abstract
This article reports part of an investigation on knowledge relating to the use of mathematical software in teacher training in a mathematics teaching degree program delivered in a virtual learning environment. It describes a case study focusing on how the activities proposed in this environment can help to connect knowledge of specific content with technological knowledge. The analysis interwove data on the knowledge held by these students on the specific content for their future professional practice, on the pedagogical content that can be recruited at the time of this practice, and on technological knowledge within a particular context of teaching.

Keywords: technologies, teacher training, distance learning

Introdução

Este artigo, que integra um estudo amplo desenvolvido em grupo de pesquisa que investiga saberes sobre o uso de tecnologias mobilizados na formação docente de professores de matemática em ambiente virtual de aprendizagem (AVA), focaliza aspectos do uso de tecnologia na formação, ministrada na modalidade a distância, de professores de matemática para a educação básica. Investigaram-se saberes relativos ao uso de *softwares* matemáticos nessa formação docente e o modo como as atividades propostas em AVA podem auxiliar a articular o conhecimento do conteúdo específico ao conhecimento tecnológico.

No Brasil, as Diretrizes Curriculares do Ensino da Matemática (Brasil, 2002) preconizam a familiarização do licenciando, ao longo do curso, com tecnologias que contribuam para o ensino de matemática. Tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1998) como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) destacam que, entre as tecnologias que o professor pode utilizar como auxílio no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação básica, os *softwares*, por sua capacidade de instigarem o pensamento, a reflexão e a criação de situações, destacam-se por promover a autonomia de aprendizagem dos estudantes.

Embora o uso das tecnologias já seja indicado em documentos oficiais há algum tempo, pesquisadores como Bairral (2010) e Stinghen (2016) apontam, quanto ao uso de tecnologias no ensino de matemática na educação básica, a falta de preparo dos professores para lidar com elas em suas práticas. Motta (2017) relata que muitos cursos de formação de professores não proporcionam oportunidades para que os alunos estabeleçam relação entre as disciplinas tecnológicas e as que envolvem conteúdos específicos, e que para tanto as instituições de ensino devem investir no desenvolvimento dos saberes docentes para o uso de tecnologias digitais por meio de um saber curricular que conecte, já desde a formação inicial (licenciatura), a tecnologia com a prática educativa.

Cibotto e Oliveira (2017) advogam que as tecnologias sejam utilizadas ao longo da licenciatura, a fim de que com essa prática constante as ferramentas computacionais tornem-se parte integrante do dia a dia dos futuros professores. Em 2016, 135.236 alunos estavam matriculados em licenciatura no Brasil na modalidade a distância, em instituições que majoritariamente apontaram como maior necessidade, nesse meio de formação, a de inovação em abordagens pedagógicas (Associação Brasileira de Educação a Distância, 2017). Moran (2008, p. 170) argumenta que "as tecnologias são pontes que abrem a sala de aula para o mundo, que representam e mediam o nosso conhecimento do mundo. São diferentes formas de representação da realidade".

Este artigo visa investigar, dentre atividades propostas a alunos de um curso de licenciatura em matemática ministrado a distância, aquelas cuja solução pode mobilizar simultaneamente o uso de um *software* e o conhecimento específico matemático, de maneira a integrar conhecimentos matemáticos e didáticos para a formação docente. Nossas questões de pesquisa, diante do uso de *softwares* em AVA na formação docente são: Como desenvolver atividades que favoreçam aos alunos articularem o conhecimento do conteúdo ao conhecimento tecnológico? Como essas atividades que envolvem tecnologia com o uso de *softwares* ocorrem em ambiente virtual? Como podemos contribuir com a utilização de *softwares* para a formação de estudantes como futuros professores?

Marco teórico

Sobre educação a distância e suas possibilidades para promover diversas formas de ensinar e aprender – eixo no qual nos apoiamos – valemo-nos de estudos de Vaz (2009), Belloni (2006), Assis (2008), Bassani e Behar (2009), Bairral (2010), Moran (2012) e Kenski (2012). Para fazer uso de tecnologia no ensino de conteúdos que mobilizem conhecimento matemático, o professor deve conhecer *softwares* e seu manuseio, tendo em vista promover o processo de aprendizagem do aluno.

Nosso marco teórico nos remete a analisar nossos dados à luz da teoria Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) de Mishra e Koehler (2006), que ampliou as categorias de Shulman (1987) sobre os conhecimentos do professor.

Shulman (1987) identifica no conhecimento do professor três categorias: conhecimento do conteúdo a ser ensinado, conhecimento do conteúdo pedagógico e conhecimento curricular. Frisa ser importante no contexto do ensino a relação entre o conhecimento do conteúdo e a prática do professor – aspecto que envolve dilemas na articulação entre prática e teoria. O conhecimento do conteúdo (*content knowledge*: CK), segundo Mishra e Koehler (2006) é o conhecimento sobre o assunto a ser ensinado.

Quanto ao conhecimento pedagógico, Mishra e Koehler (2006, p. 1026-1027) definem-no como "conhecimento sobre os processos, práticas e métodos de ensino e aprendizagem e como se envolvem, entre outras coisas, em geral propósitos educacionais, valores e objetivos". No âmbito da teoria TPACK, denomina-se conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo (*technological pedagogical content knowledge*: TPCK) àquele que se encontra na intersecção entre o conhecimento do professor acerca do conteúdo específico de sua área de atuação, o conhecimento pedagógico que pode entrar em cena no momento de sua prática e o conhecimento referente à tecnologia em determinado contexto de ensino (Figura 1).

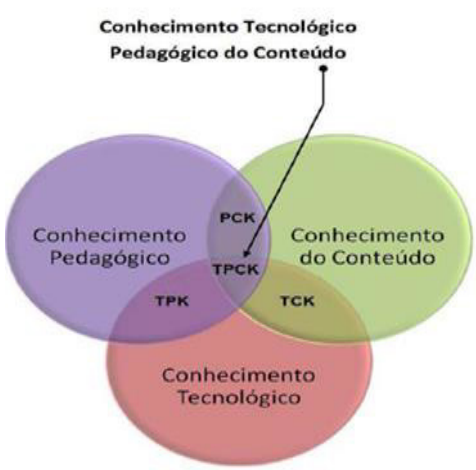


Figura 1. *Conhecimento tecnológico pedagógico do conteúdo.*
Fonte: Adaptado de Mishra e Koehler (2006, p. 1025).

O conhecimento tecnológico (*technological knowledge*: TK), por sua vez, envolve as habilidades necessárias para operar determinadas tecnologias, que incluem ferramentas como *softwares* e o conhecimento sobre como instalar e remover esses programas, criar e arquivar documentos, ler os tutorais e saber manipular comandos – em nosso caso, em atividades em que se utilizam *softwares* matemáticos. Segundo Mishra e Koehler (2006, p. 1029), "TPCK é a base do bom ensino com tecnologia e requer uma compreensão da representação dos conceitos que utilizam tecnologias; técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneira construtiva para ensinar o conteúdo". Nossas análises levam em consideração o modo como os estudantes de uma licenciatura de matemática articulam seus conhecimentos sobre tecnologias digitais com os conteúdos específicos da área e com as habilidades didáticas implícitas.

Caminhos e cenários

Um levantamento bibliográfico nos suscitou reflexões sobre a formação dos docentes quanto ao uso de tecnologias, iluminando caminhos para que professores de licenciatura em matemática propusessem atividades em AVA a seus alunos. As respostas dos licenciandos a essas atividades, a partir das observações realizadas neste estudo de caso, permitiram uma análise qualitativa de como o uso de *softwares* pode colaborar para a formação desses futuros docentes. Faremos um estudo de caso – modalidade que visa conhecer uma entidade bem definida em um sistema educativo (Ponte, 2006) – consistindo em um recorte de algumas das atividades em que alunos matriculados em 2017 e 2018 em um curso de licenciatura em matemática na modalidade a distância em uma universidade paulista utilizaram tecnologia nas disciplinas 'Cálculo diferencial e integral II e III' e 'Aplicativos de informática'.

Na plataforma Moodle, utilizada nesse modelo de educação a distância, as comunicações entre professor e aluno ou entre tutor virtual e aluno processam-se a distância no AVA, na forma de fóruns, mensagens no ambiente Moodle e *e-mails*. A comunicação presencial somente ocorre nos polos de ensino, quando são realizadas as avaliações presenciais ou para esclarecimento de dúvidas pontuais sobre o processo de atuação no AVA.

Na instituição em que transcorreu a pesquisa, o curso de licenciatura em matemática é integralizado em três anos. As disciplinas 'Cálculo diferencial e integral II e III' são oferecidas no 4.º e no 5.º semestre respectivamente; 'Aplicativos de informática' é ministrada somente no 6.º semestre. As atividades realizadas em AVA nessas disciplinas buscaram associar pesquisas relatadas em artigos científicos da área de educação matemática que versam sobre conteúdos relativos a estas disciplinas, bem como estabelecer relações entre esses conteúdos e conceitos matemáticos que são trabalhados na educação básica. As atividades focalizadas no presente artigo, consideradas de grande relevância para a formação do professor nessa área, são avaliativas e ocorreram em dois momentos durante o semestre, em cada uma das disciplinas.

Antes de iniciar as atividades, os alunos já haviam tido contato, em aulas-texto e videoaulas, com conhecimentos de cálculo. Na disciplina 'Aplicativos de informática' os alunos somente têm contato com formas de tratar a tecnologia e também com alguns *softwares*. As dúvidas podiam ser abordadas com professores e tutores em trocas de mensagens individuais e *e-mails* ou em fórum virtual com outros alunos. Nosso intuito foi discutir o ensino e aprendizagem de cálculo e de aplicativos de informática com o uso de tecnologia nessa modalidade de ensino, por meio de atividades que mobilizam o uso de *softwares* e podem auxiliar a integrar os conhecimentos para a formação docente.

Os estudantes foram instruídos a realizar as atividades e enviá-las na forma de arquivo. Embora as atividades fossem individuais, os alunos podiam conversar coletivamente com os colegas e com os professores e tutores para elucidarem dúvidas e fazerem observações que considerassem relevantes para a realização das atividades, através de uma ferramenta chamada Fórum. Esta ferramenta permite discussão, elemento importante no processo educativo a distância, por proporcionar um espaço permanente de interação-ação-reflexão e de transformação (Vaz, 2009; Figueiredo, 2018), além de constituir recurso didático que incentiva aprofundamento nos tópicos abordados e permite registrar experiências.

Análise dos resultados

Mostraremos agora as atividades propostas que mobilizam o uso de tecnologia por meio de *softwares* e faremos algumas considerações sobre como transcorreram essas atividades em ambiente virtual. A primeira atividade que descreveremos (Figura 2) foi aplicada no segundo semestre de 2017. Nem todos os alunos participaram do fórum; dos 71 alunos dessa sala, somente 31 o fizeram: 20 somente uma vez; oito participaram duas vezes. Somente três estabelecerem diálogos com os colegas.

Levantamos a hipótese de que a não participação de alguns alunos se devesse ao fato de que nessa instituição esses fóruns não eram avaliativos, havendo, portanto, alunos que se mobilizam somente pelo conhecimento que a participação poderia lhes proporcionar. Para Bassani e Behar (2009), o valor de uma proposição em AVA está relacionado ao efeito produzido no grupo. De fato, embora a participação dos alunos que investigamos tenha sido pequena, mostraram reflexão sobre o tema. Assis (2008) reforça que o impacto da qualidade das postagens pode promover a aprendizagem coletiva.

> Olá alunos,
> Neste fórum vamos iniciar nossa discussão que servirá de base para a realização da nossa atividade. Para tal, peço que leiam o artigo *A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência,*
> disponível no link a seguir: Link do artigo: Clique aqui!
> Comente o relato de experiência que consta no artigo supracitado.
> Como o uso de softwares matemáticos - a exemplo do GeoGebra, como trabalhado no artigo - podem contribuir na elaboração e desenvolvimento de atividades destinadas à compreensão dos significados dos objetos matemáticos? Dê sugestões do uso destas ferramentas como recursos didáticos.

Figura 2. *Atividade aplicada na disciplina 'Cálculo II'.*
Fonte: Ambiente virtual de aprendizagem.

O artigo de Santos, Mota, Brito e Ferreira (2012), selecionado para suscitar discussão no fórum, versa sobre o estabelecimento de articulação entre a pesquisa em didática do cálculo e a ministração dessa disciplina no primeiro ano do curso universitário. Os autores elaboraram uma atividade envolvendo utilização de GeoGebra, aplicada no laboratório de informática a estudantes presenciais que não haviam tido contato com esse *software* e foram ali orientados sobre seu uso. As ações propostas para esses estudantes envolviam visualização de funções no gráfico e áreas a serem demarcadas, com o intuito de facilitar o cálculo de áreas com o uso de integrais.

Santos *et al*. (2012) trabalharam com professor e alunos no mesmo espaço físico. Para a modalidade a distância, o artigo serviu de fomento para a emersão de dúvidas e para se discutirem procedimentos para uso do *software*. Ao lerem e tentarem interpretar os problemas propostos pelos pesquisadores e a maneira como o *software* foi utilizado, nossos alunos tiveram a oportunidade de cogitar como poderiam realizar uma atividade daquela natureza. Isso os estimulou a, no fórum, fazer perguntas sobre o uso desse *software*, das quais resultaram reflexões como a deste participante:

> *[...] é possível constatar que a tecnologia contribui para sedimentar os conceitos, o recurso leva a pensar, que o mesmo exemplo do uso da integral definida poderia ter ocorrido através da aplicação de um problema que aborda também os conhecimentos da física, mostrando e dando sentido ao tema através de uma aplicação.* (Aluno A)

Este aluno estabelece relação entre o conceito de área de integral e o uso do *software*, percebendo possibilidades de relação com outras áreas, o que pode ser classificado como um TCK (Figura 1), pois o aluno vislumbra uma interseção entre o conhecimento do conteúdo com o conhecimento tecnológico.

Artigos desse tipo proporcionam um elo para que estudantes na modalidade a distância familiarizem-se com atividades que utilizam *softwares*. Tal elo se materializa em dois momentos: na discussão sobre o artigo no fórum e na subsequente participação em uma atividade que deve ser realizada individualmente e entregue na forma de arquivo enviado na sala virtual.

A próxima atividade que descreveremos (Figura 3) foi vivenciada por estudantes de 'Cálculo diferencial e integral III' no primeiro semestre de 2018.

Leia o artigo:
"UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE WINPLOT NO ENSINO DE FUNÇÕES CUJA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA É UM PARABOLÓIDE CIRCULAR"
Disponível no endereço: http://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/18065_7675.pdf
1) Quais os benefícios indicados no texto, referentes ao uso do Winplot no processo de ensino - aprendizagem?
2) De que forma a autora desenvolveu a sua pesquisa, que recursos utilizou, e a que conclusão chegou?
3) "Como atividade foi solicitado aos alunos que construíssem o gráfico das funções propostas,
$f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$, $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3$, usando o Winplot.
Foram dadas as orientações referentes aos comandos, conforme a seguinte sequência:
Abra o Winplot. Use a opção: Janela →3D. Clicar em Equação → Explícita.
a) Resolva você também essa atividade e indique a sua conclusão no que se refere à posição dos paraboloides. (Lembre: x^2 = x^2)
b) Represente graficamente as funções: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$, $f(x,y) = 1$ ou $z = 1$, $z = 2$, e $z = 3$.
Como se chamam as curvas de intersecção do paraboloide com os planos dados?
c) Escolha um exercício de ensino fundamental ou médio, em que possa utilizar o Winplot na sua resolução. Resolva-o através de cálculos numéricos e através do Winplot. Explique a resolução mostrando as telas com os gráficos e valores.
d) Neste primeiro contato com a construção de gráficos de funções de duas variáveis com este tipo de software, relate a sua experiência, indicando as dificuldades encontradas, e/ou as facilidades que ele lhe proporcionou no entendimento da matéria.

Figura 3. *Atividade aplicada na disciplina 'Cálculo diferencial e integral III'.*
Fonte: Ambiente virtual de aprendizagem.

A Tabela 1 quantifica a participação dos alunos no AVA.

Tabela 1. *Participação dos alunos na atividade.*

Completaram toda a atividade	Participaram somente das questões sobre a leitura do texto	Não associaram a atividade a conteúdos da educação básica	Não participaram da atividade	Total de alunos
85	3	25	4	128

Fonte: *Dados da pesquisa.*

Na maioria, os alunos que realizaram a atividade conseguiram baixar o *software* e articulá-lo com o que o texto descreve para seu uso: a ferramenta Winplot e a representação das funções. No entanto, diversas vezes os alunos informaram aos professores da sala, por meio de mensagens enviadas na plataforma Moodle, que não haviam conseguido baixar o *software* nem aprender seus comandos básicos, informados tanto no artigo como no tutorial do programa.

Durante a leitura do texto, muitos alunos mostraram desconhecer o uso dessa tecnologia, o que, segundo Kenski (2012), é comum tanto entre professores em formação quanto nos que já atuam na educação básica. Relata também que mesmo os que conseguem manipular recursos tecnológicos não conseguem articulá-los para obter melhor uso pedagógico da tecnologia – uma de nossas hipóteses sobre alunos que não conseguiram associar o *software* com conteúdos da educação básica. Tal suposição nos remete ao que Mishra e Koehler (2006) expressam sobre o conhecimento pedagógico da tecnologia (TPK): deve fazer parte do papel do professor compreender quais são as tecnologias mais adequadas ao ensino de cada assunto e quais conteúdos são propícios a serem ensinados com tais tecnologias.

Alguns dos alunos que realizaram a atividade mostraram compreender essa articulação entre teoria e prática alcançada com uso de *softwares*, como exemplificam estas falas:

> *Concluí que a algumas maneiras de escrever as equações e a alguns aspectos da geometria com software Winplot favorece esta articulação e ajuda também a visualizar a resposta através de equações e o que vemos na representação do gráfico neste software. A matemática parece que fica mais fácil.* (Aluno B)

> *O benefício é a interação, ao modificar os valores de* a, b *ou* c*, nos coeficientes da função do 2.º grau, por exemplo, o software redesenha a figura e o aluno consegue verificar qual o impacto dessas mudanças de forma imediata. Finalmente, é possível fazer o acompanhamento personalizado, o software corrige os exercícios e oferece condições para que o aluno possa sanar suas dificuldades, é de extrema importância a utilização e o manuseio dessa ferramenta em sala de aula*. (Aluno C)

Dos gráficos produzidos com a ferramenta Winplot, destacamos o do estudante D. Ao responder a questão "Como se chamam as curvas de intersecção do paraboloide com os planos dados?", esse estudante identificou que o gráfico da intersecção das funções de duas variáveis é mais bem representado por meio do *software* GeoGebra e não de Winplot. Apresentando ambas as formas de representação gráfica obtidas com tais *softwares*, esse estudante evidenciou dispor de certo conhecimento pedagógico da tecnologia (TPK), que, segundo Mishra e Koehler (2006), exige compreensão dos potenciais benéficos e das limitações de tecnologias específicas e de como estas podem ser utilizadas em determinados tipos de atividade de aprendizagem.

A próxima atividade que descreveremos (Figura 4) foi aplicada a estudantes da disciplina 'Aplicativos de informática' no primeiro semestre de 2018, envolvendo uso de GeoGebra.

Para participar da nossa ATD1 devemos responder os itens "a; b; c" abaixo.
No item *a*: Ler o Artigo: A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO TABLET PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES. Disponível em: https://www.metodista.br/revistas/revistas-izabela/index.php/fdc/article/viewFile/1098/pdf
Fazer um texto que contemple os seguintes itens: Qual o tema do artigo, que conteúdos matemáticos são trabalhados. Qual a forma de ensino aprendizagem proposta. Para que nível de ensino é possível aplicar as atividades propostas. Que ferramentas são utilizadas pelos autores. Qual o objetivo deste artigo e qual as conclusões do autor. Coloque a sua impressão sobre o texto. Destaque o que o texto colabora para a sua formação.
No item *b*:
Baixe o software GEOGEBRA no seu computador. Disponível em: https://www.geogebra.org/download?lang=pt
Depois de instalado no seu computador, construa os gráficos das seguintes funções polinomiais do 1º grau definidas nos reais:
I) $y = x$ II) $y = 2x$ III) $y = 3x$ … Continue até $y = 10x$.
O que está acontecendo com estas retas?
Quais as características destas retas?
Quando estas retas vão passar para o segundo quadrante? O que deve acontecer com a equação para que isso ocorra?
Faça um print da tela e coloque em uma folha de Word para anexar na resposta da atividade.
No item *c*:
Pesquisem situações nas suas diversas áreas de conhecimento, Matemática, Física ou Química a utilização da função do primeiro grau para representar algum fenômeno.

Figura 4. *Atividade aplicada na disciplina 'Aplicativos da informática'.*
Fonte: *Ambiente virtual de aprendizagem.*

No artigo indicado para leitura com essa atividade, Goodwin (2017) propõe uma experiência em sala de aula envolvendo o ensino do conteúdo 'funções' a alunos do 9.º ano, utilizando o *software* GeoGebra em *tablet*. A interface gráfica e algébrica assim proposta permite aos estudantes transitar entre esses registros, possibilitando-lhes articular gráficos, escritas algébricas e tabelas com objetos do conhecimento da matemática.

Essa atividade coloca os estudantes de licenciatura frente a uma situação que mobiliza conhecimentos do conteúdo sobre inclinação de retas, gráficos de funções afins, bem como conhecimentos tecnológicos sobre uso de *software* e o conhecimento pedagógico que a leitura do artigo pode proporcionar. Os resultados dessa atividade no ambiente virtual podem nos permitir identificar alguns desses conhecimentos.

A Tabela 2 quantifica a participação dos alunos no AVA.

Tabela 2. *Participação dos alunos na atividade.*

Realizaram a atividade abordando os três itens, atingindo o objetivo da atividade	Realizaram a atividade abordando os três itens, porém não completamente, atingindo o objetivo de algum dos itens da atividade	Deixaram de completar alguns dos itens	Não realizaram a atividade	Total de alunos
27	33	8	15	84

Fonte: *Dados da pesquisa.*

O item *b* dessa atividade foi o de menor participação, observando-se maior dificuldade dos alunos em utilizar o *software* e interpretar os gráficos obtidos com GeoGebra. Tais dificuldades incluíram identificar qual das versões disponíveis do *software* deveria ser usada, como utilizar os comandos para construir os gráficos e como construir as retas solicitadas em um mesmo plano cartesiano de modo a identificar e poder analisar as características das retas nos gráficos. Também houve ausência de respostas às questões "Quando estas retas vão passar para o segundo quadrante?" e "O que deve acontecer com a equação para que isso ocorra?", como se eles não reconhecessem que somente com coeficientes angulares negativos isso poderia acontecer.

A maioria desses alunos mostra falta de conhecimento tecnológico (TK) (Mishra & Koehler, 2006), constatação que nos levou a pesquisar novos recursos para que em próximas atividades tais dificuldades sejam minimizadas para esses alunos. No entanto, também se pôde constatar que esses alunos mostraram não dispor de conhecimento específico, ao não conseguirem identificar diferenças entre representações das retas com os sinais dos coeficientes angulares, ou que talvez não estejam habituados a questões que requeiram reflexão sobre o comportamento de retas. Cogitamos que se o tópico fosse tratado em ambiente presencial tais dificuldades teriam sido mais facilmente diagnosticadas.

Considerações finais

Com o objetivo de investigar saberes relativos ao uso de *softwares* matemáticos na formação docente na modalidade a distância e o modo como as atividades propostas em AVA podem auxiliar a articular o conhecimento do conteúdo específico ao conhecimento tecnológico, analisamos as respostas de alunos de licenciatura veiculadas nesse ambiente e observamos que, ao se envolverem com essas atividades, estes expressaram reflexões sobre a utilização de *softwares* e sobre como tal uso pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática em alunos da educação básica. Constatamos também que as leituras de artigos como parte das atividades parecem ser o elemento que fez eclodir nos participantes tais reflexões.

Quanto ao conhecimento do professor sobre o uso de tecnologia, em termos da teoria TPACK, esses alunos de licenciatura vislumbraram, no contato com as atividades, possibilidades de mudar a natureza da aprendizagem de conceitos que o aprendiz, de outro modo, teria maior dificuldade em alcançar. Dentre as conclusões, destacamos as dificuldades desses estudantes no uso de *softwares*, cuja manipulação envolve conhecimento tecnológico. Evidenciou-se a necessidade de maior uso destes para que tal obstáculo seja superado. Essa constatação levou à inserção em todos os semestres, em pelo menos um dos componentes curriculares, de atividades envolvendo o uso de *software*, com o intuito de que o conhecimento tecnológico deixe de ser empecilho para que o futuro professor de matemática o utilize em suas práticas em sala de aula. A disciplina ‘Aplicativos de informática’, ministrada no último semestre do curso, não dá conta, sozinha, de fazer com que o aluno se aproprie de conhecimentos necessários para o uso de tecnologias em sua prática docente.

Nossas questões iniciais ainda estão em parte abertas a possíveis respostas. Novas tentativas estão sendo testadas para elucidar como se dá o processo de ensino-aprendizagem nessa modalidade de ensino no que tange ao uso de *softwares* e como aperfeiçoar esse processo. Esperamos que este estudo motive reflexões sobre possíveis atividades que mobilizem simultaneamente conhecimentos do conteúdo, didáticos e tecnológicos, bem como promovam novos caminhos que apontem possibilidades de ações formativas no que diz respeito ao ensino-aprendizagem para as licenciaturas em matemática ministradas na modalidade a distância. É nosso desejo que essa busca de novos caminhos possa também pautar-se pelo que Moran (2012, p. 119) destaca sobre o aprendizado nessa modalidade de ensino: “a liberdade de acesso, a adaptação ao ritmo de cada um, a combinação de aprendizagem individual com a grupal e a possibilidade de aprendermos juntos, mesmo a distância”.

Referências

Assis, C. F. C (2008). Diálogos didáticos matemáticos em fóruns de discussão online. In *Anais do V Congresso Brasileiro de Ensino Superior a Distância (ESUD)*, Gramado, Brasil.

Associação Brasileira de Educação a Distância. (2017). *Censo EAD Brasil 2016: relatório analítico da aprendizagem a distância no Brasil*. Curitiba: Intersaberes.

Bairral, M. A. (2010) (Org.). *Tecnologias informáticas, sala de aula e aprendizagens matemáticas*. Rio de Janeiro: UFRRJ. v. 3.

Bassani, P. S., & Behar, P. A. (2009). Avaliação da aprendizagem em ambientes virtuais. In P. A. Behar (Org.), *Modelos pedagógicos em educação a distância* (pp. 93-113). Porto Alegre: Artmed.

Belloni, M. L. (2006). *Educação a distância*. 4 ed. Campinas: Autores Associados.

Brasil. (1998) Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC.

Brasil. (2002). Ministério da Educação. *Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, bacharelado e licenciatura*. Parecer CES/CNE 1.302/2001, homologação publicada no DOU em 5 de março de 2002.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC.

Cibotto, R. A. G., & Oliveira, R. M. M. A. (2017). TPACK: conhecimento tecnológico e pedagógico do conteúdo: uma revisão teórica. *Imagens da Educação*, *7*(2), 11-23. doi:10.4025/imagenseduc.v7i2.34615

Figueiredo, A. C. (2018). Ensino de estatística: discussão sobre sequências didáticas aplicadas por estudantes de licenciatura em pedagogia em ambiente virtual. In *Anais do VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Foz do Iguaçu: SIPEM.

Goodwin, F. C. (2017). A utilização do software Geogebra no tablet para estudo das funções. *Formação Docente*, *9*(3).

http://www.ijello.org/Volume10/IJELLOv10p033-052Khechine0876.pdf

Kenski, V. M. (2012) *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. 8 ed. Campinas: Papirus.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. doi:10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x.

Moran, J. M. (2008). *Desafios na comunicação pessoal: gerenciamento integrado da comunicação pessoal, social e tecnológica*. 3 ed. São Paulo: Paulinas.

Moran, J. M. (2012). *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá.* 5 ed. Campinas: Papirus.

Motta, M. S. (2017). Formação inicial do professor de matemática no contexto das tecnologias digitais. *Contexto & Educação*, *32*(102).

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132. Versão revista e atualizada de um artigo anterior: Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Santos, E. C. S., Mota, J. F., Brito, A. B., & Ferreira, R. D. (2012) A utilização do GeoGebra no processo de ensino e aprendizagem da integral: uma articulação entre a pesquisa e a docência. *Revista do Instituto Geogebra Internacional de São Paulo*, *1*(1).

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23. doi:10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Stinghen, R. S. (2016). Tecnologias na educação: dificuldades encontradas para utilizá-la no ambiente escolar. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Vaz, M. F. R. (2009). Os padrões internacionais para a construção de material educativo on-line. In Litto, F. M., & Formiga, M. M. M. (Orgs.). *Educação a distância*: o estado da arte (pp. 386-394). São Paulo: Pearson Education do Brasil.

VOL 33, NÚMERO 1, AÑO 2020

EL GEOGEBRA COMO RECURSO DIDACTICO PARA LA COMPRENSION DE LAS FORMAS INDETERMINADAS DEL LÍMITE

GEOGEBRA AS A DIDACTIC RESOURCE FOR UNDERSTANDING THE INDETERMINATE FORMS OF LIMIT

Lissette Rodríguez, Jorge Luis Bravo, Andel Pérez, Neisy Caridad Rodríguez
Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez" (Cuba)
lrrivero@uniss.edu.cu, jlbravo@uniss.edu.cu, apgonzalez@uniss.edu.cu, ncrodriguez@uniss.edu.cu

Resumen
Este estudio propone el tratamiento de las formas indeterminadas del límite a partir de la utilización del GeoGebra con fines heurísticos y de experimentación, en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería Industrial. La experiencia, aplicable al resto de las carreras de ingeniería, ofrece una solución a las dificultades en el aprendizaje de esta temática. Problemas con el tratamiento de las formas indeterminadas del límite fueron visibles en los resultados de la prueba de diagnóstico y de la encuesta aplicada a los estudiantes; sumado a ello los libros de texto a utilizar sólo centran la atención en el cálculo y no en la comprensión de su significado. Después de aplicada la propuesta mejoraron los resultados docentes y la disposición de los estudiantes a resolver tareas relacionadas con el cálculo de límites. El resultado de la presente investigación pertenece al grupo de trabajo "Relación Universidad-Sociedad" del proyecto "La informatización de los procesos universitarios" adscripto a la Universidad de Sancti Spíritus "José Martí Pérez".

Palabras clave: formas indeterminadas del límite, GeoGebra, heurística

Abstract
This study proposes the treatment of the indeterminate forms of limit by using GeoGebra with heuristic and experimentation objectives in the subject Mathematics I of the Industrial Engineering degree. The experience, which can be applied to other engineering degrees, gives solution to the difficulties in learning this topic. The results of the diagnostic test and the survey applied to the students have shown problems with the treatment of the indeterminate forms of limit; besides, the textbooks to be used focus only on the calculation of limit, not on the understanding of its meaning. After having applied the proposal, the students' academic results as well as their motivation to solve tasks related to the calculation of limits improved. The result of this research belongs to the work group "University-Society Relationship" of the project "Computerization of university processes" that belongs to University of Sancti Spíritus "José Martí Pérez."

Key words: indeterminate forms of limit, GeoGebra, heuristics

Introducción

Múltiples factores dificultan la obtención de resultados destacados en la educación científica, entre ellos el poco interés hacia estas disciplinas (Ruiz, 2008), motivado a nuestro juicio por la escasa comprensión de sus complejidades. Dentro de las mimas la *Matemática* es de las que menos entusiasma a los estudiantes al ser tildada de abstracta y este rechazo produce un efecto negativo al afectar a su vez el buen desarrollo de su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Precisamente de ese carácter complejo, entre otras cuestiones, se ocupa el *pensamiento matemático avanzado* (en lo adelante PMA), descrito por primera vez por Dreyfus (1990, 1991) y Tall (1991). Los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de problemas que involucran conceptos matemáticos propios de la etapa avanzada, son procesos como el de representación, translación, abstracción, entre otros.

No hay una frontera exacta entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, autores reconocidos en la materia lo ubican dependiendo de la introducción de los conceptos de límite, derivada e integral y otros relacionados con las matemáticas superiores. Las mismas, en algunos sistemas educativos, se introducen desde la Secundaria Básica, en otros desde el bachillerato y en todos forman parte del currículo de carreras universitarias relacionadas con las ciencias básicas, técnicas y gran parte de las humanísticas.

El Análisis Matemático es una disciplina relacionada directamente con los procesos infinitos, en ella el límite es su principal concepto y en el proceso de enseñanza-aprendizaje del mismo los conflictos en la comprensión se hacen presentes desde su definición.

En la literatura se describen dificultades en la comprensión del concepto de límite que van desde la relación entre infinito potencial con el infinito actual, hasta dificultades propias de su proceso de enseñanza-aprendizaje, recogidas en clásicos de la literatura científica como Cornu (1981, 1994); Sierpinska (1985, 1987); Tall y Schwarzenberger (1978), entre otros.

Dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje lograr una adecuada comprensión de las *"formas indeterminadas del límite"* (FIL en lo adelante) contribuye al alcance de niveles superiores de desempeño relacionados con su cálculo y es el resultado final que se pretende al aplicar la propuesta. Se tiene referencia de investigaciones relacionadas con la comprensión de los límites desde posiciones algebraicas o con el uso de tablas (Espíritu y Navarro, 2015) y otras relacionadas con las FIL que se limitan a caracterizar los problemas de comprensión relacionados con éstos (Cortés y Londoño, 2015); todas ellas difieren del presente trabajo, pero constituyen un referente importante para el mismo.

Por otra parte, en virtud de una enseñanza acorde a nuestros tiempos, es necesario el uso de los *asistentes matemáticos* en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática; están presentes en todos los niveles y especialmente en la didáctica relacionada con el PMA.

De la Torre y Martín (2000), Fernández (2000), Estrada (2005), Herrera (2010), Debárbora (2012) y Del Pino (2013) reportan el uso de asistentes en la didáctica relacionada con el PMA, algunos específicamente en el estudio de los límites. Las aplicaciones fundamentales de los asistentes matemáticos al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática son: formando parte de procesos heurísticos, como herramientas de comprobación de resultados y asistentes en la resolución de problemas de gran complejidad de cálculo; destacando que en esta última categoría se consideran ya imprescindibles como es en el caso de los procesamientos estadísticos.

El uso de *GeoGebra* como recurso heurístico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las FIL se sustenta en la representación gráfica de funciones y las operaciones (aritméticas y exponenciales) que entre éstas generan las llamadas formas indeterminadas. Graficar funciones en la mayoría de los casos ocupa tiempo, espacio y complejiza el proceso de análisis relacionado con funciones en algunos casos, no siendo así con el uso de asistentes matemáticos.

GeoGebra produce inmediatez en las representaciones gráficas, al mismo tiempo que se pueden realizar operaciones entre las representaciones algebraicas de dichas funciones; existen versiones de este asistente para sistema operativo Androide (por lo que es portable en dispositivos móviles) y esas ventajas son utilizadas por la propuesta. Además, se sustenta en dos vertientes del uso de asistentes matemáticos: su uso como recurso heurístico (fundamental en esta investigación) y como herramienta para la comprobación de resultados.

Marco teórico

Hay interés en la comunidad de matemáticos y educadores matemáticos, en el análisis de la forma de pensar en las personas que se dedican profesionalmente a las mismas, se investiga en cómo entienden las personas un contenido matemático específico, caracterizan los procesos de comprensión de conceptos y otros procesos asociados. "Freudenthal, Poincaré, Hadamard, han hecho estudios de tipo introspectivos al analizar su propia actividad personal como matemáticos o Polya a través de estudiar la producción de sus alumnos. De otra forma, también se reconoce el aporte de Piaget" (Garbin, 2015, p.2).

Alrededor de 1986 se forma un grupo de estudio sobre *PMA* cuyas primeras publicaciones salen a la luz años después (Tall, 1991). Logra relacionarse en ese entonces el término de PMA con los aprendizajes relacionados al pensamiento axiomático basado en definiciones y demostraciones, que se inicia en la etapa de la secundaria básica. No obstante, el rigor de la enseñanza relacionada con ese pensamiento axiomático en esta etapa y en la preuniversitaria es todavía bajo y se reconocen en la actualidad ambas como parte del Pensamiento Matemático Elemental; asumiendo como etapa avanzada la que se enmarca directamente con la universidad (Azcárate y Camacho, 2003). No obstante, la frontera entre ambos tipos de pensamiento no es rígida y depende de los sistemas de enseñanza y de la profundidad de los programas de estudio.

El PMA difiere del Elemental en que:

- Se enseña una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
- Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
- Se enseñan conceptos que históricamente evolucionaron muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige el aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
- Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige la comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y meta matemático.
- Se evalúa a los estudiantes en tiempo cortos y se reducen las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante. (Garbin, 2015, p. 4)

El aprendizaje de conceptos y la adquisición de competencias matemáticas relacionadas con la disciplina de *Análisis Matemático* están en su mayoría relacionadas con el PMA. Autores como Tall y Cornu sitúan el trabajo con el concepto de límite dentro del PMA por ser fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración; además por estar involucrado con el pensamiento axiomático y requerir de niveles de abstracción en su aprendizaje (Tall (1992) y Cornu (1991) citados ambos por Penagos, Mariño y Virginia, 2017).

Existen varias aproximaciones para vencer los obstáculos que tradicionalmente genera la enseñanza de los límites, Sierpinska (1987) intentó diseñar situaciones didácticas que ayudara a los estudiantes a vencer obstáculos de aprendizaje relacionados con éstos y sugiere que para que un obstáculo sea eliminado, es necesario crear un conflicto al interior del alumno (es decir, un conflicto cognitivo).

Por su parte Cornu (1994) en forma similar señala que es muy importante que el estudiante esté consciente de la complejidad de la noción de límite y de las dificultades que se pueden presentar más que proporcionarle una exposición clara del concepto. Una posible razón de esto es que los autores no han logrado generar una discusión rica en torno a las ideas intuitivas de los estudiantes y en consecuencia una gran mayoría de ellos se limitan a un acercamiento algebraico carente de significado (Blázquez y Ortega, 2000; Hitt y Páez, 2003).

No obstante, coincidiendo con algunos especialistas del tema, el estudio de los límites debe situarse en uno u otro tipo de pensamiento en dependencia al trabajo que se realice con él ((Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005) citados por Penagos, Mariño y Virginia, 2017). Si solamente se realiza el cálculo de límites que no presenten formas indeterminadas es suficiente un pensamiento matemático elemental y de ahí el criterio de los autores de esta investigación enmarcar el tratamiento de las *FIL* dentro del PMA.

En la enseñanza del cálculo de límites se comienza por introducir los conceptos de infinito, punto de acumulación y de infinito como punto de acumulación; los primeros cálculos que realizan los estudiantes son, por lo general, en funciones continuas que sólo se resuelven a partir de una sustitución algebraica y asumen (porque se les ha mostrado y demostrado desde el punto de vista algebraico y gráfico) que toda relación $\frac{expresión\ constante}{expresión \to 0} = \infty$ y que toda relación $\frac{expresión\ constante}{expresión \to \infty} = 0$, todo ello con los consabidos convenios matemáticos e interpretando “ $\to$ ” como la expresión “tiende a”.

En ese proceso de cálculo de límites se pueden formar las llamadas FIL, hay siete tipos distintos de ellas y el estudiante debe ser capaz de identificarlas y resolverlas. Para un límite indeterminado cualquier resultado se puede esperar: $+\infty$, $-\infty$ ó a ($a \in R$). Hay métodos directos para solucionarlas ($\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$), mientras que otras ($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0) recurren a la tan famosa estrategia de los matemáticos de “reducirlo al caso anterior” y solucionarlo así.

La idea de “indeterminado” radica precisamente que una expresión no tendrá siempre el mismo resultado y esto, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, rompe con un pensamiento muy arraigado en los estudiantes. Además de la dificultad anterior los estudiantes poseen creencias precedentes al cálculo de límites (algunas de ellas erróneas), en lo relacionado con el cálculo de expresiones que involucran operaciones aritméticas y exponenciales, ello les hace dudar que el resultado no sea único. En la enseñanza de los límites se ha experimentado en los últimos años el uso de *asistentes matemáticos* con diferentes propósitos didácticos (Fernández, 2000; Mira, 2016).

Investigaciones en didáctica del Análisis Matemático, relacionadas con el PMA, demuestran la importancia del uso de los medios de cómputo en el aprendizaje de esta disciplina y proyectos de prestigiosas universidades encaminan sus esfuerzos en este sentido (Azcárate, Camacho y Sierra, 1999). Por su parte Hegedus y Kaput (2004) conciben la tecnología como una infraestructura representacional que amplía las potencialidades del pensamiento humano.
Para Estrada (2005), un rasgo importante de las representaciones de los objetos matemáticos en un ambiente dinámico es poder operar con ellos y ver al mismo tiempo el efecto de estas acciones sobre dichas representaciones. De acuerdo con Herrera, el debate sobre el papel de las tecnologías ya no se centra en si debemos usarlas o no, sino en cómo emplearlas inteligentemente para que nuestros estudiantes aprendan mejor Matemática. (Herrera (2010) citado por Amaya, de Armas y Sgreccia (2011)).

En las clases de Matemática, según los contenidos a impartir y su profundidad, las características del alumnado y el soporte técnico del que se disponga, se pueden utilizar asistentes matemáticos en diferentes tipos de tareas. Existe una amplia gama de software dedicados a esta ciencia que se pueden clasificar según propósito (generales o específicos) según el tipo de procesamiento que realizan (Fig. 1) y la forma de adquisición los dividen en libres (GeoGebra, Maxima, R, GraphCalc, etc.) y no libres (Mathematica, Maple, MatLab, MathCAD, etc.) (Wikiversity, 2014) (Wikipedia, 2019).

Figura 1. *Tipos de software matemáticos según procesamiento matemático (Wikipedia, 2019).*

Software Matemáticos según procesamiento de la información

Software Matemáticos según procesamiento de la información
Calculadoras
Sistemas Algebraicos Computacionales (CAS)
Sistemas Estadísticos Computacional (SEC)
Sistemas de Geometría Dinámica (SGD)
Sistemas de Optimización
Sistemas de Calculo Numérico (SCN)
Demostradores de Teoremas

En la presente investigación se ha utilizado el asistente *GeoGebra* un software de propósito general, porque posee varios tipos de procesamientos, que incluye: calculadora, CAS (del inglés Computer Algebra System), procesamiento estadístico y geométrico, además de ser un software libre. GeoGebra tiene potencialidades de realizar operaciones en la vista geométrica y algebraica al unísono, esto lo convierte en un medio de enseñanza por excelencia para el trabajo heurístico que dependa de ambos sistemas de representaciones.

Varias definiciones de heurística recoge la literatura, según Müller (citado por Crespo (2007)) la heurística incluye la elaboración de principios y estrategias que facilitan la búsqueda de vías de solución para problemas, la comprobación de hipótesis, propiedades, en tareas de carácter no algorítmico sea de manera teórica o práctica. Es por ello que con la aplicación de la propuesta GeoGebra va a permitir, a través de las tareas elaboradas, la apropiación por parte del alumno del concepto de indeterminación relacionado con las FIL.

Según Crespo (2007) los medios heurísticos "… la computadora, con la revolución que impregna a todos los procesos donde se inserta, redimensiona estos medios convirtiéndose en un eficiente apoyo a alumnos y profesores".

Metodología

En el aula de primer año (modalidad Curso Encuentro) de la carrera Ingeniería Industrial (Plan D), Facultad de Ciencias Técnicas y Empresariales de la Universidad "José Martí Pérez" de Sancti Spíritus; se detectaron dificultades en el aprendizaje de los límites en general y particularmente las FIL. No comprenden el significado de "indeterminación" y tienen tendencia a operar algebraicamente según las propiedades de los límites. Es por ello que se trazó una estrategia de trabajo con GeoGebra para utilizar la representación dinámica de funciones y las operaciones algebraicas y exponenciales que entre ellas conducen a indeterminaciones para lograr mayores niveles de comprensión y por ende desempeño de los estudiantes en el tema.

El curso está estructurado en encuentros semanales de 4 horas clase (48 horas clase en total) y por lo ajustado del tiempo se utilizó el espacio de consultas (tiempo de docencia extra convenido con el estudiante) para aplicar los instrumentos y parte de la propuesta.

Después de una *primera evaluación* (paso 1 del experimento) relacionada con el tema, salen a la luz las dificultades con las FIL en cuanto a su comprensión y cálculo. Se aplica entonces una *encuesta* totalmente anónima y voluntaria (paso 2 del experimento) para conocer:

a) ¿Puede explicar con sus palabras por qué ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0) son "indeterminadas"?
b) Si alguna de ellas a usted le parece que podría tener un valor único expréselo y explique su respuesta.
c) ¿Le resulta atractivo el cálculo de límites? Explique por favor.

Posteriormente se realizan *ejercicios utilizando GeoGebra como recurso heurístico* (paso 3 del experimento), apoyados en dispositivos móviles (teléfonos, tabletas y computadoras portátiles) de los estudiantes con presencia y guía del profesor; de manera que el estudiante pueda "descubrir" por qué se denominan FIL e interiorice la necesidad de hacer operaciones que eliminen esas formas antes de pasar al cálculo algebraico.

Los estudiantes estaban familiarizados con el uso de GeoGebra desde el primer tema del curso relacionado con el trabajo con funciones y conocían todos los comandos a utilizar en el ejercicio excepto el comando Límite[<Función>, <Valor Numérico>] el cual fue explicado.

Ejercicio 1.1: ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener de la FIL $0 \cdot \infty$?
a) Realiza la representación en GeoGebra de las funciones f_1, f_2, f_3 y g (Fig. 2); utilizando las vistas Algebraica y Gráfica. Se orienta en ese momento que f_2 sea $\frac{n}{x}$ declarando n como deslizador y posicionándolo en 1 hasta que se indique su uso en próximo ejercicio.
b) Hagamos un debate del comportamiento de cada una de ellas cuando $x \to \infty$. Utilice los conocimientos de cálculo de límites y compruebe utilizando los resultados de la Vista Gráfica. Deberá quedar por escrito el límite de cada una (f_1, f_2, f_3 y g) cuando $x \to \infty$.
c) Introduzca las funciones k_1, k_2 y k_3 como resultado de los productos de funciones $f_1 \cdot g$, $f_2 \cdot g$ y $f_2 \cdot f_3$ respectivamente.
d) Verifique, utilizando los resultados de b, que las funciones anteriores corresponden a la FIL $0 \cdot \infty$.
e) Introduzca los comandos Límite[k_1,∞], Límite[k_2,∞] y Límite[k_3,∞]; y observe los resultados. Responda ¿todas tienen el mismo valor del límite?
f) Oculte la representación en la Vista Gráfica de las funciones iniciales f_1, f_2, f_3 y g, active la representación en la misma vista de k_1, k_2 y k_3 para comprobar en éstas últimas que su comportamiento cuando $x \to \infty$ coincide con el valor de los límites calculados en el inciso anterior (Fig. 3).
g) Calcule en su libreta los límites del inciso e, aplicando las estrategias para eliminar las indeterminaciones estudiadas en clases anteriores.

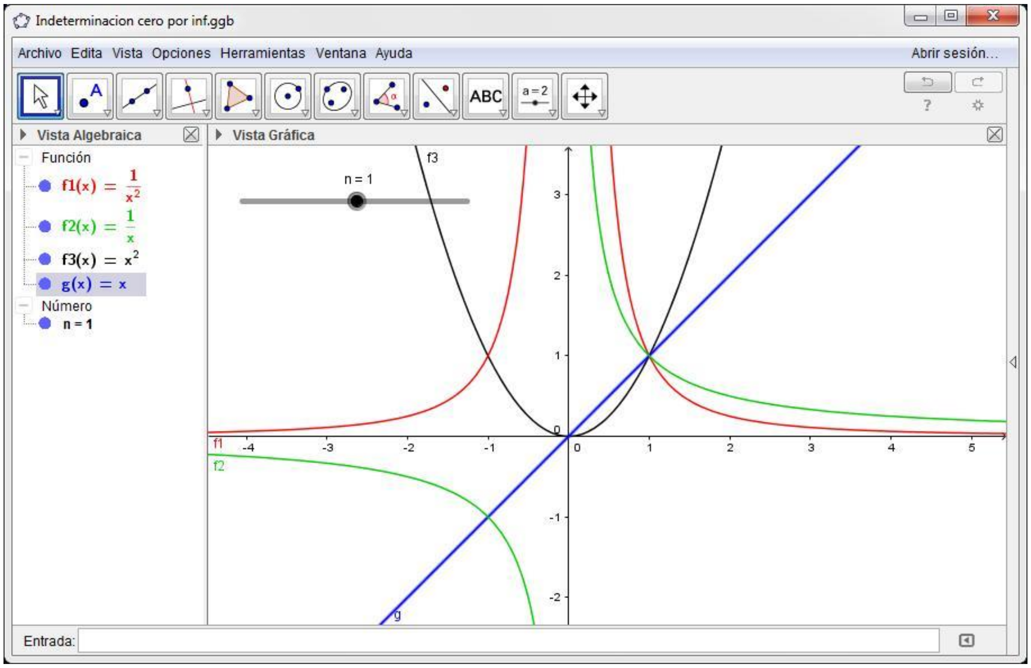


Figura 2. *Vista de GeoGebra correspondiente al análisis de las funciones simples (f_1, f_2, f_3 y g) y su comportamiento cuando $x \to \infty$, Ejercicio 1.1 a) b).*

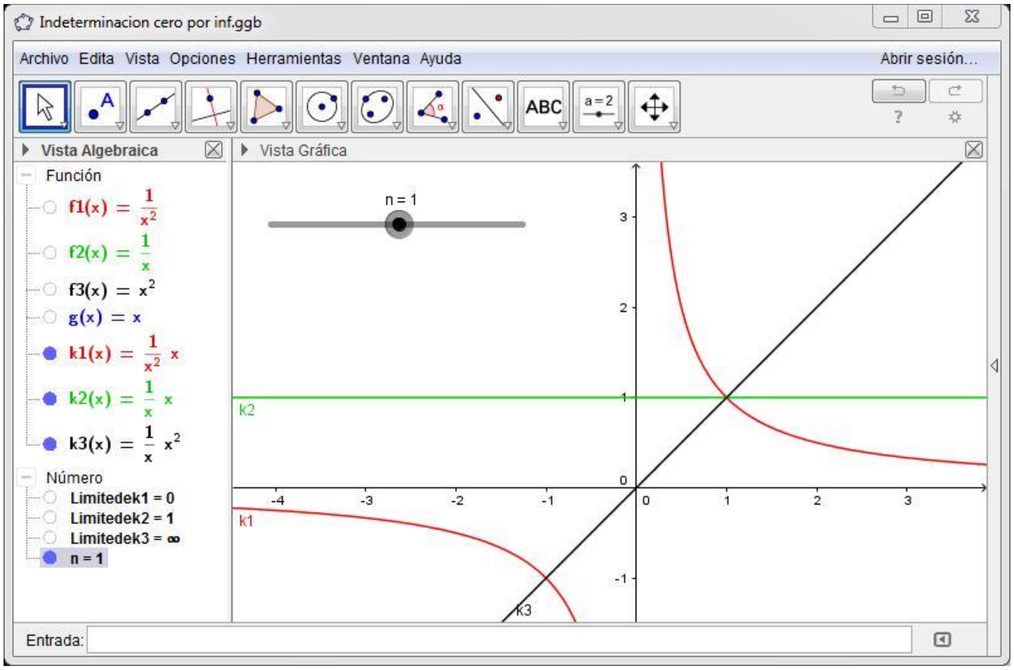


Figura 3. *Vista de GeoGebra correspondiente al análisis de las funciones compuestas (k_1, k_2 y k_3) y su comportamiento cuando $x \to \infty$, comparándolos además con el resultado del comando Límite (Limitedek1, Limitedek2 y Limitedek3), Ejercicio 1.1 c) al f).*

Ejercicio 1.2: ¿Qué ocurre en los límites anteriores para otros valores de n? Realice conjeturas para un debate colectivo utilizando el deslizador.

En respuesta al ejercicio 1.2 el estudiante llega a la concluir la influencia de n en el resultado de los límites y reafirma el concepto de indeterminación. Otras formas indeterminadas son abordadas en seis ejercicios con el mismo estilo, algunos dejando la libertad a los estudiantes de proponer las funciones que conformaran la FIL, algunos cuando $x \to \infty$ y otros cuando tiende a un punto en el cual ocurra la forma indeterminada, Fig. 4.

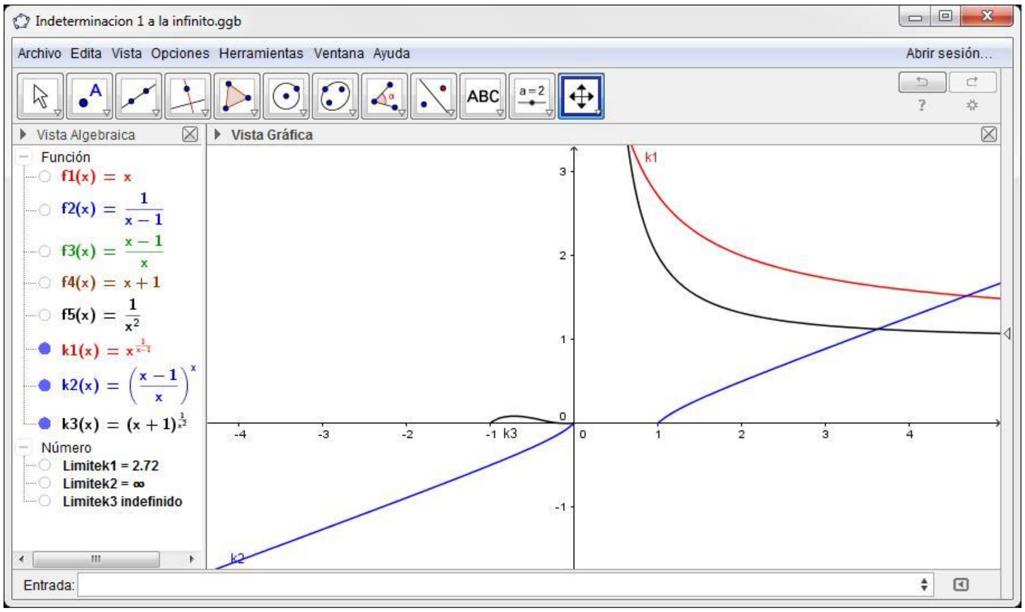


Figura 4. *Similar proceder heurístico para la forma indeterminada* 1^{∞}*. Calculando el límite de* k_1 *cuando* $x \to 1$*, el límite de* k_2 *cuando* $x \to \infty$ *y el límite de* k_3 *cuando* $x \to 0$.

Después de esa actividad se orientan para el *trabajo independiente* (paso 4 del experimento) de los estudiantes tareas de cálculo de límites indeterminados que serían revisadas tanto en su desarrollo a lápiz y papel como su comprobación en GeoGebra, siguiendo el modelo de ejercicio utilizado en el momento anterior. Una muestra de ello es el siguiente:

Ejercicio I: Forme indeterminaciones y calcule. Sean las funciones elementales:

$$f1(x) = x$$
$$f2(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$$
$$g1(x) = 1 - 2x$$
$$g2(x) = \sqrt{1-x}$$
$$h1(x) = \frac{1}{x^4}$$
$$h2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$h3(x) = \frac{1}{x}$$

a) Identifique las indeterminaciones que se forman cuando $x \to 0$ en los casos:
$\frac{f1}{f2}, \frac{f2}{f1}, f1^{f2}, f2^{f1}, h3^{f1}, h3^{f2}, h3 \cdot f1, f2 \cdot h3, g1^{h3}, g2^{h3}, h1 - h2, h2 - h3$

b) Realice en su cuaderno el cálculo de límites correspondientes a las combinaciones del inciso anterior.

c) Represente, utilizando GeoGebra, cada una de las funciones elementales. Construya algunas de las formas indeterminadas anteriores y compruebe el cálculo realizado en el inciso anterior.

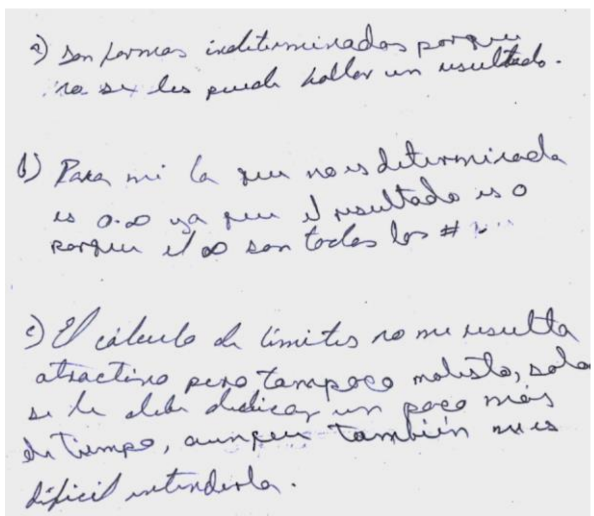
d) Proponga otras combinaciones de funciones que conduzcan a FIL.

Por último, se aplicó una *evaluación* (paso 5 del experimento) con los mismos objetivos y niveles de dificultad que la primera prueba pedagógica con el objetivo de comparar los resultados del aprendizaje, aplicar técnicas de estadística descriptiva y concluir el experimento.

Resultados

Para la investigación se trabajó con una muestra de 16 estudiantes de los 22 que están matriculados en el primer año de Ingeniería Industrial ya mencionado, que fueron los que estuvieron presentes en todos los momentos de la misma: pre-test, encuesta, ejercicios de carácter heurístico con GeoGebra, ejercicios independientes a lápiz y papel utilizando GeoGebra para su comprobación y post-test.

Relacionado con la *encuesta* se comprobó que en la forma que se presentan las indeterminaciones hace pensar a los estudiantes, en algunos casos (56,25% del total), que tienen un resultado definido con sólo aplicar erróneas creencias epistemológicas relacionadas con las operaciones aritméticas y algebraicas. Analizando el inciso b de la encuesta, las más frecuentes expresadas por los estudiantes son: "cero multiplicado por cualquier cantidad es cero" (correspondiente a $0 \cdot \infty$, con 4 estudiantes) (Fig. 5), "la resta de dos elementos iguales es cero" (correspondiente a $\infty - \infty$, con 3 estudiantes) y "multiplicar infinitamente 1 es igual a 1" (correspondiente a 1^{∞}, con 2 estudiantes).


a) Son formas indeterminadas porque no se les puede hallar un resultado.

b) Para mi la que no es determinada es $0 \cdot \infty$ ya que el resultado es 0 porque el ∞ son todos los #'s

c) El cálculo de límites no me resulta atractivo pero tampoco molesto, solo se le debe dedicar un poco más de tiempo, aunque también me es difícil entenderlo.

Figura 5. *Muestra de la respuesta dada por un estudiante a la encuesta.*

En la actividad que se realiza en el aula utilizando *como medio de enseñanza* el GeoGebra se observó una buena participación de los estudiantes, aportaron ideas y mejoraron incluso dificultades relacionadas con el cálculo de límites anteriores a la introducción de las formas indeterminadas.

En las actividades de *trabajo independiente* se constató mediante la evaluación sistemática y observación al desempeño de los estudiantes que un 56,25% (9 estudiantes) realizó el trabajo independiente con lápiz y papel y un 25% (4 estudiantes) estuvieron en disposición de mostrar sus operaciones con GeoGebra.

En la prueba pedagógica aplicada anterior a la propuesta se logra un 18,75% de aprobados (3 estudiantes) y después efectuados los dos momentos de trabajo con las FIL usando GeoGebra los estudiantes mejoraron sus resultados en el cálculo de límites en general y en el cálculo de límites indeterminados demostrado al obtenerse un 43,75% (7 estudiantes) de aprobados en la prueba pedagógica final (Fig. 6).

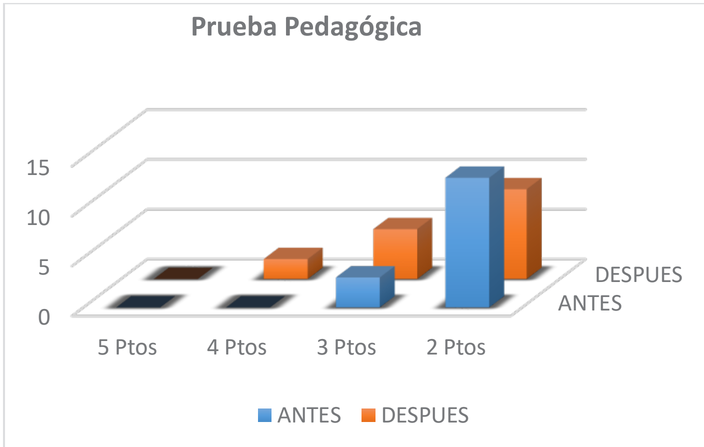


Figura 6. *Gráfico de frecuencia absoluta de aprobados en el pre-test (antes) y post-test (después) aplicado a la muestra de 16 estudiantes.*

Conclusiones

En el Análisis Matemático el concepto de límite es básico en la construcción de otros conceptos, son varias las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y mayores aún las relacionadas a los procesos presentes en el Pensamiento Matemático Avanzado. En la bibliografía especializada es amplio el reporte de dificultades relacionadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de los límites.

El uso de representaciones en el aprendizaje de conceptos matemáticos es útil y reporta resultados inmediatos en la comprensión de los mismos. La aplicación de los asistentes matemáticos al proceso de enseñanza-aprendizaje es fundamental en el trabajo con las representaciones por su inmediatez y diferentes usos didácticos que sustentan.

El asistente matemático GeoGebra se utiliza en la propuesta como medio de enseñanza en el proceso heurístico que ayuda a la comprensión de las formas indeterminadas del límite y como herramienta de comprobación en ejercicios de cálculo de límites donde dichas formas pueden estar presentes.

La comparación de los resultados docentes, de pruebas pedagógicas realizadas antes y después de aplicada la propuesta, constata una mejora en la comprensión de las formas indeterminadas del límite y en el cálculo de límites en general.

Referencias bibliográficas

Amaya de Armas, T. y Sgreccia, N. (2011). Creencias sobre la matemática y su relación con las prácticas de enseñas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana Matemática Educativa 24,* 1160-1168. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Azcárate Giménez, C., Camacho Machín, M. y Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las Matemáticas: Investigación en didáctica del Análisis. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III SEIEM* (pp. 283-293). Valladolid: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Azcárate Giménez, C. y Camacho Machín, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana X(2)*, 135-149.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000): El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 189-209), México: Grupo Editorial Iberoamérica. S.A. de C.V.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limité: modelés spontanés et modelés propres. *Proceedings PME-V,* 322-326.

Cornu, B. (1994). Limits. En D. Tal1 (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-167), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Cortés Garcés, F. A. y Londoño Cano, R. A. (2015). Una propuesta didáctica para la noción de indeterminación. En A. Ruiz (Ed.), *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática CIAEM* (pp. 1-10). Chiapas, México: CIAEM.

Crespo, E. (2007). Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática asistida por computadora. Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Superior Pedagógico "Félix Varela Morales". Cuba.

De la Torre Cuesta, C. y Martín Jiménez, L. (2000). *Utilización de asistentes matemáticos en la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado el 17 de Marzo de 2019 de: https://www.researchgate.net/publication/26428267_Utilizacion_de_asistentes_matematicos_en_la_ensenanza_de_las_matematicas

Debárbora, N. N. (2012). *El uso de GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de las funciones de proporcionalidad.* Tesis de maestría, UNSAM. Argentina.

Del-Pino, J. (2013). El uso de GeoGebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 243-250). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 113-134), Cambridge: University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21), Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Espíritu Montiel, V. I. y Navarro Sandoval, C. (2015). Límites indeterminados mediante el uso de tablas de valores y gráficos. *Revista Números 88(Marzo),* 31-53.

Estrada, J. (2005). *Diseño de situaciones dinámicas en un ambiente computacional como un escenario para el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo*. Recuperado el 17 de Marzo de 2019 de: http://polya.dme.umich.mx/eventos/MemoriaXIII.pdf

Fernández Casuso, M. B. (2000). Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema funciones con el uso de un asistente matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2)*, 171-187.

Garbin, S. (2015). Investigar en pensamiento matemático avanzado. En J. Ortiz y M. Iglesias (Eds.), *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 137-153), Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo. Recuperado de: http://riuc.bc.uc.edu.ve/handle/123456789/2749

Hegedus, S. y Kaput, J. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 3* (pp. 129-136). Bergen, Norway: Bergen University College.

Herrera, M. (2010). Introducción al Capítulo 5: Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 23,* 1149-1151. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Hitt, F. y Páez, R. (2003). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. Recuperado el 23 de Diciembre de 2018 de: https://www.researchgate.net/publication/268176026

Mira López, M. (2016). *Desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función. Características de trayectorias hipotéticas de aprendizaje.* Tesis de Doctorado, Universidad de Alicante. España.

Penagos, M., Mariño, L. F. y Virginia Hernández, R. (2017). Pensamiento Matemático elemental y avanzado como actividad humana en permanente evolución. *Revista Perspectivas 2(1)*, 105-116.

Ruíz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación 3(47)*, 1-8.

Sierpinska, A. (1985). Epistemological obstacles relative to the limit concept. *Recherches en didactique des mathématiques (1),* 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics 18*, 371-397.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21) Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Tal1, D. y Schwarzenberger, R. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching (82)*, 44-49.

Wikiversity (4 Abril 2014). *Mathematics software.* Wikiversity: School of Mathematics. Recuperado el 8 de Enero de 2019 de https://en.wikiversity.org/wiki/Mathematics_software

Wikipedia (27 Abril 2019). *Software Matemático.* Wikipedia: Fundación Wikimedia, Inc. Recuperado el 19 de Julio de 2019 de https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Software_matemático&oldid=115557637

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al

campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.

- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma “ciega” por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (https://clame.org.mx/actas.html) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:
  1. Análisis del discurso matemático escolar
  2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
  3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
  4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
  5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido expuesto durante RELME 33. Es por ello que se solicita **enviar el certificado de la ponencia escaneado**, una vez que ya ha sido presentado para ingresar el escrito al proceso de evaluación por pares.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.

4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.
10. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.
- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.

- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba "...". Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa