Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

VOLUMEN 33 » NÚMERO 2 » AÑO 2020 » ISSN 2448-6469

ALME 33

Coordinación editorial

Rebeca Flores
México

Editores responsables

Paola Balda Álvarez
Colombia

Mónica Marcela Parra Zapata
Colombia

Horacio Saúl Sostenes González
México

Luis Arturo Serna Martínez
México

Comité editorial

Cariño Ruiz
México

José Isaac Sánchez
México

Luis Manuel Cabrera
México

Mario Caballero
México

Milton Rosa
Brasil

Iván Esteban Pérez
Chile

Cristian Paredes
México

Angélica Moreno
México

María del Socorro García
México

Miriam Carolina Ortiz
México

Mario Dalcín
Uruguay

Rodolfo David Fallas
Costa Rica

Nora Lerman
Argentina

Adriana Engler
Argentina

Irma Daniela Viramontes
México

Juan Felipe Flores
México

José Fernandes da Silva
Brasil

Selvin Galo
Honduras

Isabel García
Chile

Diseño:
Gabriela Sánchez Téllez

ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA, Volumen 33, Número 2, agosto 2020, es una publicación semestral editada por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Av. Universidad 1900, Oxtopulco Universidad, Delegación Coyoacán, C.P. 04460, Ciudad de México, www.clame.org.mx, alme.clame@gmail.com. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2017-071712431200-203, otorgado por el Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN: 2448-6469.

ALME es una publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: Presidente: Olga Lidia Pérez (Cuba); Secretario: Hugo Parra Sandoval (Venezuela); Tesorera: Daniela Reyes Gasperini (Argentina); Vocal Norteamérica: Rebeca Flores García (México); Vocal Caribe: Juan Manzueta Concepción (República Dominicana); Vocal Centroamérica: Rodolfo David Fallas Soto (Costa Rica); Vocal Sudamérica: Marcela Parraguez González (Chile).

Comité Científico de Evaluación

ARGENTINA

Ana Rosa Corica Caponio
Cecilia Ester Elguero Dotta
Cecilia Rita Crespo Crespo
Claudia Minnaard
Elisa Silvia Oliva Díaz
Laura Sonia Oliva
Lidia Beatriz Esper Lara
Liliana Mabel Tauber
María Angélica Pérez Monges
Maria Elina Vergara Viano
María Julia Améndola
Susana Beatriz Ruiz Hagman

BRASIL

Ângela Maria Dos Santos
Giovana Pereira Sander
José Ronaldo Alves Araújo
Juliana Silva De Andrade
Maria Ivete Basniak

CHILE

Nicolás Sánchez Acevedo

COLOMBIA

Luis Fernando Plaza Gálvez
Olga Emilia Botero Hernández
Paula Andrea Rendón-Mesa
William Andrey Suárez Moya

COSTA RICA

Fabián Wilfrido Romero Fonseca

CUBA

Alejandro Martínez
Carlos Duardo Monteagudo
Frank Alain Castro Sierra
Gusbey Pérez Carrazana
Ivonne Burguet Lago
Jorge Luis Bravo Viera
María de Lourdes Bravo Estévez
María Isabel Machado Solano
Niurys Lázaro Alvarez
Ortelio Nilo Quero Méndez
Valentina Badía Albanés

ESPAÑA

Carmen López Esteban
María Belén Giacomone

GUATEMALA

Claudia María Lara Galo

HONDURAS

Gerardo Josué Cruz Márquez
Melvin Cruz Amaya

MÉXICO

Alfonso Escorza Morales
Amaranta Viridiana Jiménez
Angélica Dueñas Cruz
Angie Damian Mojica
Carlos Daniel Prado Pérez
Claudia Margarita Acuña Soto
Edgar Ponciano Bustos
Eduardo Carlos Briceño Solis
Enrique Javier Gómez Otero
Evelia Reséndiz Balderas
Germán Muñoz Ortega
Jaime Ramos Gaytán
Jesús Eduardo Hinojos Ramos
Jesús Enrique Pinto Sosa
Jesús Salinas Herrera
José David Zaldivar Rojas
José Luis Soto Munguía
José Trinidad Ulloa Ibarra
Julio Moisés Sánchez Barrera
Karla Liliana Puga Nathal
Lidia Aurora Hernández Rebollar
Lorena Jimenez Sandoval
Lorenzo Contreras Garduño
Luis Manuel Aguayo Rendón
María del Carmen Fajardo Araujo
María del Carmen Olvera Martínez
María Graciela Treviño Garza
María Guadalupe Lomelí Plascencia
María Isabel Segura Gortáres
María Teresa Martinez Acosta
Mayra Báez Meléndres
Miriam Martínez Vázquez
Moisés Ricardo Migue Aguilar

MÉXICO

Norma Gutiérrez Rodríguez
Ofelia Montelongo Aguilar
Plácido Hernández Sánchez
Rafael Pantoja Rangel
Ramiro Ávila Godoy
Reyna Arcelia Brito Páez
Saúl Ezequiel Ramos Cancino
Víctor Hugo Luna Acevedo

PERÚ

Flor Isabel Carrillo Lara
Isela Patricia Borja Rueda

PORTUGAL

Ana Elisa Esteves Santiago

REPÚBLICA DOMINICANA

Roberto Byas de la Cruz

VENEZUELA

Ivonne Coromoto Sanchez
Luis Adres Castillo Bracho
Stephanie Diaz-Urdaneta

PRESENTACIÓN

El Acta Latinoamericano de Matemática Educativa (ALME) es una publicación semestral editada un equipo editorial conformado por matemáticos educativos procedentes de distintos países que han desarrollado una excelente labor para la conformación de este número, en circunstancias en que el mundo está inmerso en una crisis sanitaria producto a la COVID-19.

Es por eso que resalto la encomiable labor que realiza por ese equipo editorial, donde la mayoría de sus miembros son estudiantes de postgrado que conforman el talentoso movimiento de Juventud Clame, el que se constituye en la continuidad generacional de Clame.

Esta propuesta, es la número 2 del volumen 33, que al igual que la anterior, los 86 artículos que presentamos, son portadores de múltiples posturas teóricas, y se encuentran agrupados en temáticas relacionadas con el análisis del discurso matemático escolar, propuestas para la enseñanza de la Matemática, los aspectos socioepistemológicos para el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar, el pensamiento del profesor, sus prácticas y su formación profesional, y con el uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Sin duda este número es una evidencia más de la profesionalización de nuestra comunidad Clame, por la riqueza y profundidad de los artículos que se presentan, con acercamiento entre colegas, comunidades e instituciones de diversos países y regiones con identidades históricas y culturales marcadas por su geografía y su pasado, compartiendo además de lengua y cultura, desafíos semejantes entre sí, en este sentido, el movimiento de Matemática Educativa (Pérez, García y Triana, 2017).

Finalmente, invitar a toda nuestra comunidad a la presentación de propuestas que relacionen la Matemática Educativa con la situación sanitaria actual, desde la mirada de la importancia del desarrollo del pensamiento matemático para su comprensión e interpretación, de la virtualidad en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática, los retos y perspectivas del docente de Matemática en condiciones de Pandemia, y cualquier otra temática que favorezca la contextualización a la situación actual.

Olga Lidia Pérez González
Presidenta del Consejo Directivo
CLAME (2016-2020)

Referencia

Pérez, O., García, O. y Triana, B. (2017). Profesionalización de la comunidad latinoamericana de matemática educativa. *Paradigma*, 38(2), 346 - 365

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 1:
ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SISTEMAS NUMÉRICOS DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO: UN ESTUDIO DE CASOS 17
Marcela Parraguez, Valeria Randolph, Daniela Bonilla

ESTUDIO DE GÉNERO DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE BACHILLERATO 28
José García Suárez, María Guzmán Martínez

LOS DIFERENTES ENFOQUES DEL ÁLGEBRA ESCOLAR Y SU INFLUENCIA EN LOS ERRORES ALGEBRAICOS DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS 36
José García Suárez

DISEÑO DE UNA ESCALA DE PERCEPCIÓN SOBRE EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR 48
Jesús E. Pinto Sosa y Luz Marisa Alcocer Escalante

INICIOS DE UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DEL MÉTODO SEPARACIÓN DE VARIABLES EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES 59
Alan Arturo Flores Cambrón, Rosa María Farfán Márquez

CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA EN ESTUDIANTES MEXICANOS DEL PREUNIVERSITARIO 69
Karen Gisel Campo Meneses, Javier García-García

SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD PRESENTES EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMER AÑO DE SECUNDARIA EN MÉXICO 78
Jose Miguel Leon Banguero, José Iván López Flores, Carolina Carrillo García

ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ANÁLISIS A TRAVÉS DE LAS VARIEDADES DIDÁCTICAS DE LA FUNCIÓN LINEAL 89
Pamela Valencia Quezada, Álvaro Poblete Letelier

TABLA DE CONTENIDOS

TEST DE REFLEXIÓN COGNITIVA Y TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO COMO POSIBLES PREDICTORES DEL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRAMPA LINEAL **100**
Edgar Sánchez Campos, Josip Slisko Ignjatov

LUGARES GEOMÉTRICOS: PARADIGMAS Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE **111**
José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal

CONSIDERACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL MUNDO REAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES EN ESTUDIANTES DE ESCUELA SECUNDARIA **125**
Freddy Martínez García, José Gabriel Sánchez Ruiz

TRADUCCIÓN DE GRÁFICOS DE BARRAS POR ESTUDIANTES CHILENOS DE 6º GRADO **137**
Danilo Díaz-Levicoy, Carmen Batanero

PRÁCTICAS ASOCIADAS AL ÁREA DE FIGURAS PLANAS **147**
María José Castro,Myriam Nuñez, Christiane Ponteville

EL ANÁLISIS DE DATOS ORIENTADO A LA TOMA DE DECISIONES. UNA INVESTIGACIÓN CON ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA **158**
Cecilia Crespo Crespo; Christiane Ponteville

SECCIÓN 2:
PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

ENFOQUE SOCIO-ECONÓMICO EN EXÁMENES DE MATEMÁTICA NUMÉRICA **170**
Rafael Osvaldo Jiménez Rodríguez, Roberto Millet Luaces

DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE INCÓGNITA EN ALUMNOS DE TERCER GRADO DE PRIMARIA **177**
Carlos Alberto González Salazar, Julio Cesar Contreras Reyes, Evelia Reséndiz Balderas

TABLA DE CONTENIDOS

DIFICULTADES OCASIONADAS POR LA UTILIZACIÓN DE PROTOTIPOS GEOMÉTRICOS EN EL APRENDIZAJE DE EJES DE SIMETRÍA **185**
Julio Cesar Contreras Reyes, Carlos Alberto González Salazar, Evelia Reséndiz Balderas

UN CAMBIO PARADIGMÁTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR TÉCNICA PROFESIONAL DE CHILE MEDINTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: CASO INACAP **196**
Sebastián Herrera de la Piedra, Lorena Rosas Toro

UNA EXPERIENCIA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA PARA ABORDAR CONCEPTOS GEOMÉTRICOS **208**
Lennys Gaviria-Quintana, Maria Camila Ocampo-Arenas, Paola Andrea Patiño-León

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA QUE FAVORECE EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS **218**
Yudy Alexandra Molina Hurtado, María Martha Molina

IMPLEMENTACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN PRIMER CICLO DE PRIMARIA **228**
Carolina del Rosario Carrillo García, Itzel Hernández Nava

CONCIENCIA AMBIENTAL A TRAVÉS DE LA ESTADÍSTICA **240**
Adriana Lizeth Vega Carrillo, Wilmer Esneider Lozada Bonilla, Milady Astrid Guerrero Velasco

UN ESTUDIO SOBRE EL APRENDIZAJE DEL PESO COMO MAGNITUD EN NIÑOS DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA **251**
Alejandra Anahid Hernández Hernández, Juan Carlos Macías Romero

DISEÑO DE UNA LECCIÓN DE INVESTIGACIÓN PARA FAVORECER LA TRANSICIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ALGEBRAICO EN ALUMNOS DE BACHILLERATO **265**
Jesús Salinas Herrera, Mónica C. Pereyra Zamudio, J. César Domínguez Galván

FORMACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE SITUACIONES-PROBLEMA **275**
Carlos Daniel Prado Pérez

BILLETES DECIMALES, MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL **286**
Olga Emilia Botero Hernández

TABLA DE CONTENIDOS

CRITERIOS PARA LA IDONEIDAD EPISTÉMICA Y COGNITIVA DEL CONCEPTO FUNCIÓN REAL EN LAS INGENIERÍAS **297**
Seydel Bueno García, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca Recio

SENTIDOS DEL CERO Y LA NEGATIVIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS **307**
Celia E. Villagra, Marcela E. Chorolque

IDENTIFICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER COMO COMBINACIONES LINEALES DE UNA BASE DE DIMENSIÓN INFINITA ORTOGONAL **318**
José Isaac Sánchez Guerra, Carlos Oropeza Legorreta, José Juan Contreras Espinosa

LA CONCEPCIÓN DE LA INTERDISCIPLINARIEDAD EN LA DISCIPLINA ANÁLISIS MATEMÁTICO, DE LA CARRERA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA **328**
Raúl Herrera García, Enma Leticia Ochoa Domínguez, Odiel Estrada Molina

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA CONSTRUIR DEFINICIONES DE CONCEPTOS MATEMATICOS EN EL AULA **336**
Mabel Susana Chrestia

EL TRABAJO INDEPENDIENTE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA CON UN ENFOQUE ÉTICO, AXIOLÓGICO Y HUMANISTA **347**
Reina Altagracia Taveras

CARACTERÍSTICAS Y CONCEPCIONES ACERCA DE LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN EN EL RAZONAMIENTO SOBRE LA COMPARACION DE CONJUNTOS DE DATOS: EL CASO DE UN ESTUDIANTE **357**
Vivian Yulieth Marulanda Aroca, Maritza Méndez Reina

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA, "ÁREA DE FIGURAS COMPUESTAS", DIRIGIDO A FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS **367**
Mónica Paola Rivas Jiménez, Manuel Alfredo Urrea Bernal

FACTORES DETERMINANTES DEL DESEMPEÑO DE LOS ALUMNOS EXTRANJEROS EN LAS CARRERAS DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ ARICA- CHILE **376**
Norma Frisancho Quenta, Andrea Jiménez Veramendi, Álvaro Cortínez Pontoni

TABLA DE CONTENIDOS

PRAXEOLOGIAS QUE VIVEM ATUALMENTE NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL **387**
José Valério Gomes da Silva; Marianna Bosch i Casabò; Marlene Alves Dias

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS **399**
Nelsy Rocío González Gutiérrez, Laura Ximena Casas Rodríguez

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN Y DE SUS SIGNIFICADOS EN ESTUDIANTES PERUANOS DE SEGUNDO DE SECUNDARIA SEGÚN LA EVALUACIÓN CENSAL 2015 Y 2016 **409**
Olimpia Rosa Castro Mora

INCIDENCIA DE LA TEORÍA DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS DESDE LA EMOCIONALIDAD DE LOS ESTUDIANTES **419**
Natalia Klein Vergara

LAS CREENCIAS DE AUTOEFICACIA Y SU IMPACTO EN EL DESEMPEÑO Y PERMANENCIA EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS **430**
Lorena Jiménez Sandoval, Isai Francisco Carmona Borjón

PERCEPCIONES DE ADOLESCENTES TAMAULIPECAS SOBRESALIENTES EN MATEMÁTICAS Y LOS ESTEREOTIPOS DE GÉNERO COMO ELEMENTO DE LA FAMILIA EN SUS FORMACIONES **439**
Govedela González Aguirre; María Guadalupe Simón Ramos

CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO RELACIONAL DE NIÑOS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL **449**
Paulina Romero Montes Oca, Carolina Carrillo García, J. Marcos López-Mojica

UNA METODOLOGÍA PARA TIPIFICAR ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMATICAS **460**
Pedro Alvarez Barreras, María del Carmen Rivalta Valladares

PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA DEFINICIÓN DE MÁXIMO Y MÍNIMO **471**
Jesús Alfonso Noriega Márquez

VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA LA IMPLICACIÓN COMO CONDICIONAL GENERALIZADO **482**
Isabel García-Martínez; Marcela Parraguez

TABLA DE CONTENIDOS

EMOCIONES ANTE LA MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESORES DEL NIVEL PRIMARIO EN SU ROL COMO MAESTROS Y ESTUDIANTES **492**
María S. García González; Elizabeth Advíncula Clemente, Carina J. Saire Huamani

LAS SOLUCIONES Y REPRESENTACIONES DE UN ACERTIJO MATEMÁTICO QUE DAN LOS ALUMNOS MEXICANOS DE EDUCACIÓN MEDIA **502**
Martha Patricia Velasco Romero, Josip Slisko Ignjatov

EL DESARROLLO DE LA ETNOMATEMÁTICA EN CHILE: APORTES Y DESAFIOS **514**
Mónica Navarrete, Rodrigo Panes Chavarría Anahí Huencho, María Eugenia Reyes, Pilar Peña-Rincón

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: EMPLEO DE ESTUDIOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS EN EL DISEÑO DE EXPERIENCIAS DE AULA **523**
Gerardo Cruz-Márquez, Daniela Emmanuele, Fabián W. Romero, Neemias Lemus-Cortez

CARACTERIZACIÓN DE AMBIENTES Y TAREAS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS **533**
Maritza Méndez Reina, Nelly Yolanda Céspedes Guevara, Iván Darío Flórez Rojano

SECCIÓN 3
ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

EL NIÑO Y LOS NÚMEROS NATURALES: UN ESTUDIO EN LAS INTERACCIONES DE AULA **544**
Francisco Emmanuel González Ángeles, Daniela Reyes-Gasperini

DISCURSO ESCOLAR INCLUSIVO, UNA PROPUESTA PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS **554**
Fredy de la Cruz Urbina, Gabriela Buendía Ábalos

TABLA DE CONTENIDOS

PENSAMIENTO CRÍTICO Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS FUNCIONES REALES EN ESTUDIANTES INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD **563**
Diana Ruth Campos Fabian

LA IDENTIDAD DISCIPLINAR EN UN DISEÑO DE SITUACIÓN ESCOLAR DE SOCIALIZACIÓN: PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN **575**
Sindi Lorely Marcía-Rodríguez, Francisco Cordero Osorio

LA MODELACIÓN EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA: SUS PROGRAMA DE INVESTIGACIÓN Y LA DOCENCIA. EL ROL DE LA TRANSVERSALIDAD DE SABERES MATEMÁTICOS **584**
Francisco Cordero, Carolina Henríquez, Miguel Solís, Claudia Méndez, Claudio Opazo, Atenea De la Cruz

UNA EPISTEMOLOGÍA DE USOS DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN UNA COMUNIDAD DE INGENIEROS CIVILES **595**
Isabel Tuyub Sánchez, Yahaira Zapata Canché

RETOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS PARA LA TRANSVERSALIDAD DE GÉNERO EN LAS INVESTIGACIONES DE CORTE SOCIOEPISTEMOLÓGICO **606**
María Guadalupe Simón Ramos, Rosa María Farfán Márquez, Claudia Rodríguez Muñoz

REPRODUCCIÓN CONTINUA DE COMPORTAMIENTOS DISCONTINUOS. DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LA CONTINUIDAD DE LA REPRODUCCIÓN DE COMPORTAMIENTOS **615**
Falconery Mauricio Giacoleti-Castillo, Francisco Cordero Osorio

LA ESTADÍSTICA EN CONTEXTO: PRÁCTICAS ASOCIADAS A PROFESIONALES DE CIENCIAS DE LA SALUD **627**
Christiane Ponteville, Myriam Nuñez, Hugo Granchetti

TABLA DE CONTENIDOS

SECCIÓN 4:
EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS QUE IMPLICAN FRACCIONES 638
Ana María Reyes-Camacho, Eugenio Lizarde Flores, Francisco Javier Hernández Gutiérrez

DESCRIPTORES DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN SU PERSPECTIVA LOCAL: UN CASO DE ESTUDIO 649
Irma Pinto-Rojas, Marcela Parraguez, Nielka Rojas

ANÁLISIS DE ERRORES DE NEWMAN EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LÓGICA Y CONJUNTOS 661
Estela L. Juárez Ruiz, Ruth, G. Solano, Carina Andrea Hernández Pacheco

O PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA 671
José Fernandes da Silva; Marger da Conceição Ventura Viana

ERRORES DE NEWMAN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL: UN ESTUDIO DE CORRELACIÓN 681
Ruth G. Solano, Estela L. Juárez Ruiz

LA EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA CON ARDUINO Y CASIO 691
Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez, Sergio Raymundo, Betanzos Sarmiento

EL ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA 701
Cecilia Rita Crespo Crespo,

¿CÓMO HACEMOS LAS MATEMÁTICAS MÁS DEMOCRÁTICAS? UNA REFLEXIÓN AUTOBIOGRÁFICA SOBRE LA PRÁCTICA DOCENTE CON ESTUDIANTES BILINGÜES 712
Diana Paola Piedra Moreno

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS NORMALES DE MÉXICO 722
María del Carmen Fajardo Araujo, Ma. Carmen Barrios Cuevas, Alberto Salazar Barrios

REPERCUSSÕES DO CONHECIMENTO DIDÁTICO MATEMÁTICO DE UM PROFESSOR QUE VIVENCIOU PRÁTICAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL 731
José Fernandes da Silva; Ana Lúcia Manrique

¿QUÉ USO HACEN DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS LOS FORMADORES DE PROFESORES AL ENSEÑAR MATEMÁTICA? APORTES PARA REPENSAR LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES EN EL URUGUAY 741
Adriana Fajardo Berardi, Elena Freire Gard, Leticia Medina Uval

CONCEPCIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR. EL CASO DE LA FUNCIÓN Y SUS SISTEMAS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN 750
Augus Edoc Zaíra Molina Xerónimo, Noé Sanmartín Román

ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS ACTITUDES QUE MANIFIESTAN HACIA LAS MATEMÁTICAS LOS PROFESORES EN FORMACIÓN DE CHILE, SEGÚN VARIABLES SOCIODEMOGRÁFICAS 761
Marcelo Casis, Nuria Rico, Encarnación Castro.

ANSIENDAD MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON ALGUNAS VARIABLES EN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA DE LA ZONA SUR DE COSTA RICA 774
Johan Espinoza González, Fabián Jesús Hernández Vargas

NIVEL DE DESARROLLO DEL ESQUEMA GRÁFICO DE DERIVADA EN PROFESORES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR 785
Gerardo Amaro Macuil, Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Araceli Juárez Ramírez

CONCORDÂNCIAS E COMPLEMENTARIDADES ENTRE O LESSON STUDY E A IDONEIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA REFLEXIVA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES 796
Viviane Beatriz Hummes, Adriana Breda, Vicenç Font Moll

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LAS FUNCIONES Y SU RELACIÓN CON EL SENO TRIGONOMÉTRICO 807
Percy Lujan Rosadio, Cintya Gonzales Hernández

DIÁLOGOS DISCENTES SOBRE O CURRÍCULO DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DA UFRJ 817
Cleber Dias da Costa Neto, Victor Giraldo

SECCIÓN 5:
USO DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

USO DE SOFTWARE LIBRE EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL **828**
Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra, Miguel de Nazareth Pineda Becerril

MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LA ERA DIGITAL: PROYECTOS DE ALCANCE REGIONAL REALIZADOS POR LA COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA **838**
María Ivete Basniak; Horacio Sóstenes; Daysi García-Cuéllar; Sergio Rubio-Pizzorno

ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE HABILIDADES DIGITALES A TRAVÉS DEL LIBRO DE TEXTO GRATUITO DE EDUCACIÓN BÁSICA EN MÉXICO **849**
Horacio Sostenes

EXPLICACIONES DE TIPO VARIACIONAL: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO **861**
Luisa Fernanda Moreno Patiño

SERIES GEOMÉTRICAS DESDE UNA PERSPECTIVA VARIACIONAL CON APOYO DE GEOGEBRA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS **872**
Franklin Mejía Ochoa, Marvin Mendoza Valencia

EMPLEO DE LAS TECNOLOGÍAS PARA CONTRIBUIR AL DESARROLLO DE LA HABILIDAD MODELACIÓN DESDE LA ASIGNATURA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES **883**
Lester González López , Valentina Badía Albanés

EL AULA INVERTIDA Y LAS REGLAS DE DERIVACIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO **896**
Cristian Camilo Fúneme Mateus, Publio Suárez Sotomonte

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA VARIACIÓN DE MAGNITUDES GEOMÉTRICAS **906**
María Teresa Dávila Araiza

AVATARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES NA EDUCAÇÃO DE SURDOS **918**
Renata da Silva Dessbesel, Maria Ivete Basniak, Sani de Carvalho Rutz da Silva

SECCIÓN 1

ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

SISTEMAS NUMÉRICOS DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO: UN ESTUDIO DE CASOS

NUMBER SYSTEMS FROM THINKING MODES: A CASE STUDY

Marcela Parraguez, Valeria Randolph, Daniela Bonilla
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
marcela.parraguez@pucv.cl, valeria.randolph.v@mail.pucv.cl, danielabonillab@gmail.com

Resumen
Este reporte presenta un estudio de tres sistemas numéricos –los números enteros, los números racionales y los números complejos– desde los Modos de Pensamiento: Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE) de Sierpinska. Desde lo metodológico, se utilizó un Estudio de Casos, a través del cual se evidenciaron modos de pensar que se priorizan y que son articulados por estudiantes de educación escolar (16-18 años) y profesores de matemática en formación inicial al ser situados en los distintos Sistemas Numéricos. El análisis de las evidencias entregadas por los instrumentos aplicados –cuestionarios y entrevistas– dieron cuenta de un privilegio por el modo AA de los Sistemas Numéricos y de dificultades para articular los modos de pensar AE y SG. De esa forma, los resultados permitieron concluir una comprensión parcial de los Sistemas Numéricos y la necesidad de abordarlos desde una perspectiva geométrica y estructural, esto es, a partir de la recta numérica, el plano complejo y las propiedades que los definen.

Palabras clave: sistemas numéricos, modos de pensamiento, modelo de comprensión

Abstract
This report presents a study of three number systems –integer numbers, rational numbers and complex numbers– from the Synthetic-Geometric, Analytic-Arithmetic, and Analytic-Structural thinking modes of Sierpinska. From the methodological aspect, a case study was used, which allowed evidencing the thinking modes that are prioritized and that are articulated by school students (16-18 years old) and pre-service mathematics teachers when they are situated in the different number systems. The analysis of the evidence provided by the instruments –questionnaires and interviews– revealed a privilege by the Analytic-Arithmetic thinking mode of the number systems, and difficulties in articulating the Arithmetic-Structural and Synthetic-Geometric thinking modes. So, the results allowed concluding a partial understanding of number systems and the need to approach them from a geometric and structural perspective, i.e., considering the number line, the complex plane and their properties.

Key words: number system, thinking modes, understanding model

Introducción

La investigación que se presenta se centra en el estudio de la comprensión profunda de tres sistemas numéricos: el sistema de los números enteros (Z), el sistema de los números racionales (Q) y el sistema de los números complejos (C). Es preciso indicar que estos objetos matemáticos no solo se entienden como conjuntos de números, es decir, como una colección de elementos que poseen una característica común; sino que más precisamente, se definen como sistemas –sistemas numéricos– en cuanto están provistos de dos operaciones que verifican ciertas propiedades, independientemente de los símbolos que se utilicen para representarlos. En efecto, Z, Q y C son sistemas numéricos, pues se caracterizan por tener una estructura algebraica y satisfacer –algunos y no todos– ciertas propiedades de orden, topológicas y analíticas. Así, desde esta concepción y considerando como marco teórico los Modos de Pensamiento se exponen estudios de la comprensión –y a veces profunda– de estos tres sistemas numéricos.

Marco teórico: Los modos de pensamiento

Sierpinska (2000), identificó tres modos de pensar objetos del Álgebra Lineal, y que en esta investigación se ha extendido a tópicos del Álgebra, con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico de estos objetos matemáticos. En el modo *sintético-geométrico* (SG) los objetos son presentados mediante una representación geométrica, una figura o un conjunto de puntos. En el modo *analítico-aritmético* (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas o simbólicas. En el modo *analítico-estructural* (AE) los objetos son presentados a través de propiedades o por medio de axiomas.

Desde este referente teórico entenderemos la comprensión de un objeto matemático cuando hay articulación (Pinto-Rojas y Parraguez, 2017) entre estos tres modos de pensarlo.

Los modos de pensar el sistema de los números enteros, racionales y complejos

Se reporta una investigación que tiene por objetivo mostrar evidencias con sustento teórico, de las diferentes maneras de pensar que los profesores en formación inicial y ejercicio (Para el caso Q) y estudiantes (para C) ponen de relieve, para dar cuenta de la comprensión los sistemas numéricos.

(a) El sistema Numérico Z y Q desde los modos de pensamiento

Si bien existe en el área de la Matemática Educativa una nutrida gama de investigaciones que hacen referencia a la comprensión y enseñanza de los sistemas numéricos Z y Q con énfasis en lo algebraico (Arnon et al., 2014; Fandiño, 2009; Gairín, 2001; entre otros), hay, sin embargo, una ausencia en que estos sistemas se traten integralmente desde lo geométrico y lo algebraico. En relación a esto último, el foco de esta investigación está puesto en la mirada integradora de lo teórico y lo práctico que se puede brindar a estos sistemas desde el referente teórico *Los Modos de pensar*.

Modos de pensar Z. Para el caso de Z, este sistema se comprende desde los tres modos de pensar, SG-Z como un punto en la recta numérica; AA-Z como un conjunto de números positivos, negativos y el cero; y AE-Z como un representante de una clase de equivalencia. (ver Figura 1).

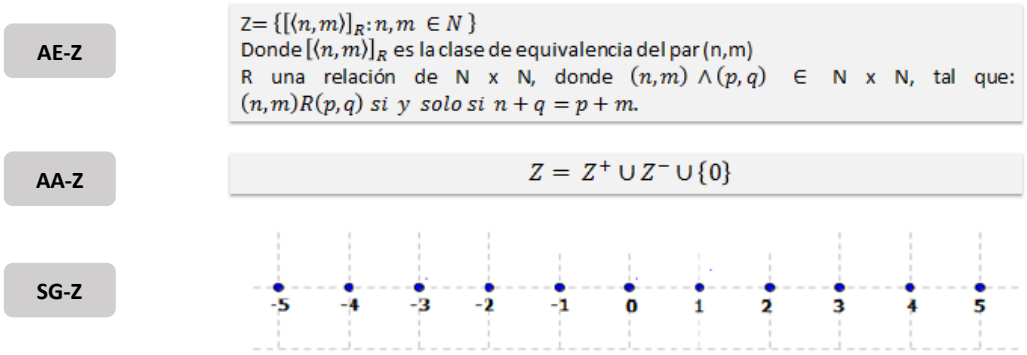


Figura 1. Modos de pensar el sistema de los números enteros (Dato de la Investigación).

Modos de pensar Q. De forma análoga el sistema Q, se analizó desde tres configuraciones, SG-Q como un punto en la recta numérica; AA-Q como un cociente de dos números enteros (con divisor distinto de cero), y AE-Q como un representante de una clase de equivalencia (ver Figura 2).

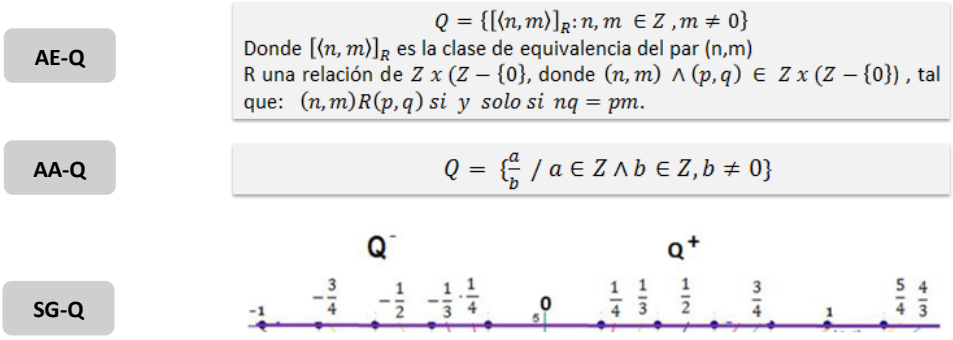


Figura 2. Modos de pensar el sistema de los números racionales (Bonilla y Parraguez, 2015, p. 78).

Para Q aportamos evidencia empírica sobre los modos de pensar que privilegia un grupo de 5 profesores en formación inicial (etiquetados como PF1, PF2, PF3, PF4 y PF5) y 6 en ejercicio (etiquetados como PE6, PE7, PE8, PE9, PE10 y PE11) entendidos cada uno como un caso de estudio (Stake, 2010), y que aceptan en forma voluntaria ser parte de la investigación.

Los instrumentos aplicados a los casos de estudio, cuestionario y entrevistas, aportaron elementos importantes, que nos permiten identificar los modos que privilegian los profesores en formación y en ejercicio al momento de responder. A continuación, se presentan ejemplos de ambos casos, respuesta a la pregunta 2 del cuestionario y un extracto de una de las entrevistas realizadas.

Caso Profesores en formación inicial

Pregunta 2 del Cuestionario: ¿Qué estrategias usarías para justificar que los números $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ *representan un mismo número racional? Escribe el procedimiento.*
La mayoría de estos profesores se sitúan en los modos SG-Q y AA-Q del sistema de los números racionales, de hecho, 3 de los profesores en formación, transitan desde un modo AA-Q a SG-Q, realizando la transformación a

escritura decimal y enfatizando que estos números tienen una única ubicación en la recta numérica, argumento dado por ellos para decir que todos esos números racionales son iguales (ver Figura 3).

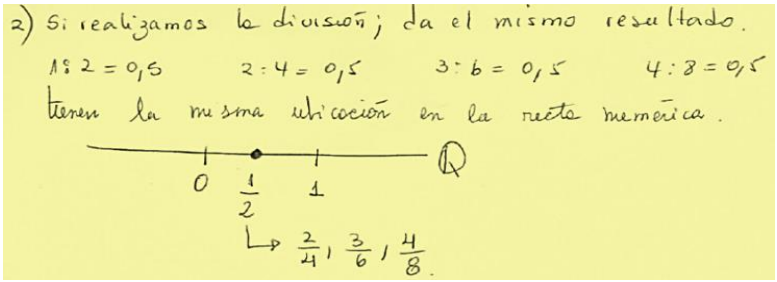


Figura 3. Respuesta pregunta 2 del PF2 (Dato de la Investigación).

La totalidad de estos profesores, muestran estrategias relativas a realizar cálculos (amplificar, simplificar, transformar la expresión $\frac{a}{b}$ a su escritura decimal y realizar producto cruzado) para determinar si los números presentados son equivalentes o no lo son.

El PF3, utiliza la propiedad que define el modo SE-**Q**, sin embargo no se situan en ese modo para responder, si no, más bien solo la utiliza como un procedimiento que se enseña en la formación escolar para verificar lo pedido (ver figura 4).

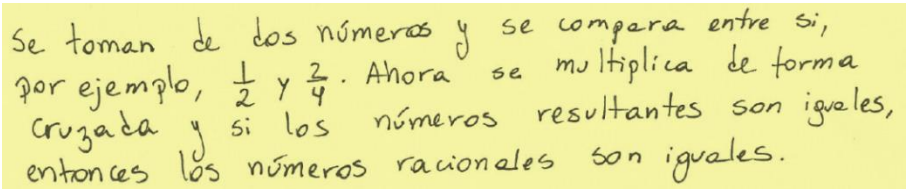


Figura 4. Respuesta pregunta 2 de PF3 (Dato de la Investigación).

*Pregunta del Guión de la Entrevista. ¿El número 1 de **N** es igual al 1 de **Z**? ¿Al 1 de **Q**?*
Se solicita reflexionar y responder. El informante PE5, indica que no son iguales. Por lo tanto, es de interés para los investigadores profundizar en sus argumentos.

Entrevistador: *¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q?*
PE5: *yo pienso que no son iguales.*
Entrevistador: puedes argumentar
PE5: *no pueden ser iguales, porque, se agregan otros elementos de un conjunto a otro, no todos tienen las mismas características, me explico!*
Entrevistador*: puedes especificar ¿a qué te refieres con características?*
PE5: *El 1 de los números racionales se puede escribir como cinco quintos y uno de los naturales no. Aunque a todos le corresponde el mismo punto en la recta numérica, mmmm.*
Entrevistador: *Entonces son iguales ¡!!!*
PE5: *no, no son iguales ... Aunque todos son neutros de la multiplicación,... pero la multiplicación es distinta en cada conjunto. O sea sus factores pueden ser naturales, números enteros o racionales.*

> Entrevistador: *supongamos que son distintos, como explicarías a un colega, ¿qué estos números son distintos?*
> PE5: *diría que el 1 de N también está contenido en Z y contenido en Q. pero como se agregan otros elementos al conjunto nuevo… no son iguales. Es como el mismo elemento en conjuntos distintos…*
> *Si lo miramos en la recta numérica tiene el mismo punto. Pero no son las mismas rectas numéricas..*

Al analizar los argumentos presentados por el informante PE5, se observa que en distintos momentos se sitúa en el modo SG-Z y SG-Q, cuando indica que a los números 1 de Z y de Q le corresponde el mismo punto en la recta numérica, sin embargo las justificaciones desde este modo no son suficientes para dar una respuesta adecuada a lo que se le pregunta.
Además se observan rasgos propios del modo AA-Q, cuando responde "*El 1 de los números racionales se puede escribir como cinco quintos"* desde este perspectiva, no logra dar una respuesta satisfactoria.

Por otra parte, queda en evidencia que al parecer la relación conjuntista entre N, Z y Q propia de la formación escolar es considerada por PE5 como la estructura que define los sistemas numéricos, e insiste en argumentar desde allí, sin llegar a una respuesta clara, porque sus argumentos están desprovistos de AE-Q, donde lo que hay es una copia de un sistema en otro (ver Figura 5).

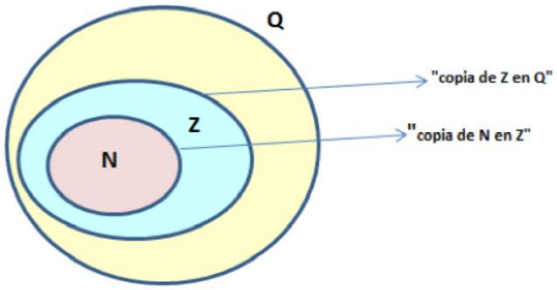


Figura 5. Copia de un Sistema Numérico en otro (Dato de la Investigación).

Caso profesores en ejercicio

Pregunta del Guión de la Entrevista. ¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q?
Se solicita reflexionar y responder.

A continuación, se muestra la respuesta del profesor PE9.

> *PE9: creo que el 1 es el mismo de los 3 conjuntos, sin embargo, el 1 de los naturales tiene "vecinos" distintos en la recta numérica a los que tiene en Q. Entonces al tener números distintos a su alrededor dependiendo del conjunto en que este, el 1 ya no es el mismo.*
> *Si bien, en los tres conjuntos representa lo mismo tiene un papel distinto dado el conjunto en el que está siendo usado.*
> *En los naturales es el primero de la recta numérica.*
> *En los enteros es el sucesor del cero.*
> *En los racionales es un número entre dos decimales (ej está entre 0,4 y 1,4).*
> *Representa lo mismo, pero no es el mismo 1.*

Al analizar las reflexiones de PE9, estas se interpretan desde sus argumentos que el profesor se sitúa en el modo SG-Q, cuando indica "*que los 1 tienen distintos vecinos dependiendo del conjunto en que se encuentre"* o cuando escribe "*En los racionales es un número entre dos decimales (ej está entre 0,4 y 1,4)",* sin embargo, los argumentos desde el modo SG-Q, no alcanzan para dar una respuesta satisfactoria a la pregunta, pero si, instan a un acercamiento a ese modo.

Por otra parte, PE9, hace alusión a la relación conjuntista de N, Z y Q cuando argumenta que "*en los tres conjuntos representa lo mismo tiene un papel distinto dado el conjunto en el que está siendo usado"*, esto es interpretado desde esta teoría Los Modos de Pensar, que PE9 está en vías de construir una articulación entre Z y Q.

(b) Los modos de pensar el sistema de los números complejos

En la misma línea de la búsqueda de la comprensión de los sistemas Z y Q, se abordó el estudio de C. Específicamente, se caracterizó un modelo de comprensión profunda de C desde los modos de pensamiento, y se aportó evidencia empírica sobre los modos de pensar que privilegian estudiantes de educación escolar (16-18 años) y profesores en formación inicial.

Caracterizar un modelo de comprensión para C.

Desde la literatura, diversas investigaciones reportan dificultades y errores en los procesos de apropiación de C tanto a nivel escolar como universitario (Ahmad y Shahrill, 2014; Aznar, Distéfano, Prieto y Moler, 2010; Bagni, 2001; Distéfano, Aznar y Pochulu, 2012; Martínez-Sierra y Antonio, 2009; Panaoura, Gagatsis y Giatilis, 2006; Pardo y Gómez, 2007). Particularmente, las evidencias revelan que hay una comprensión parcial de C debido, principalmente, a que se prioriza un enfoque aritmético-algebraico para su enseñanza y desde el cual se le entiende como la simple adjunción de un conjunto de números (los imaginarios) a uno preexistente (los números reales, R) cuyas propiedades y características no son explícitas; en consecuencia, los estudiantes no tienen construido un significado geométrico de C, reflejando una falta de flexibilidad en el uso de sus diferentes interpretaciones. Considerando los elementos que definen a C, y dada también su complejidad inherente, cabe preguntarse ¿cómo están comprendiendo C estudiantes escolares y de pedagogía en matemática?, y ¿cómo es posible que dichos estudiantes alcancen su comprensión profunda?

Modos de pensar C.

Los modos de pensamiento permiten abordar la comprensión profunda de C, ya que en la génesis y desarrollo del sistema se identifican cuatro momentos epistemológicos claves (Artigue y Deledicq, 1992) en los que subyacen distintas formas de pensamiento: algebraico, analítico, geométrico y formal (Martínez-Sierra y Antonio, 2009; Pardo y Gómez, 2007). Desde esta evidencia epistemológica se caracterizan tres formas de pensar C para su comprensión profunda como: el plano complejo (pensamiento SG-C); expresión algebraica $a + bi$ tal que a y b números reales e i la unidad imaginaria (pensamiento AA-C); y estructura algebraica de cuerpo tal que $i^2 = -1$ (pensamiento AE-C) (Figura 6).

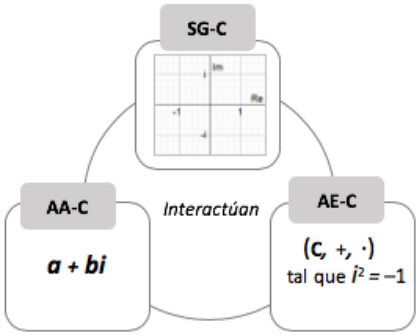


Figura 6. Modos de pensar **C** para su comprensión profunda (Randolph y Parraguez, 2019).

En el modo de pensar SG-C el pensamiento se dirige al plano complejo, a sus elementos (puntos y vectores del plano) y a todo lo que es posible realizar a partir de él, como construcciones de regla y compás de las operaciones suma y producto (ya sea en un registro de representación gráfico, geométrico o de lenguaje natural). En modo AA-C, por su parte, el pensamiento es conducido hacia la expresión $a + bi$ con a, b números reales e i la unidad imaginaria, considerando la definición de fórmulas. Mientras que en el modo AE-C, el pensamiento se enfoca en la estructura algebraica y de orden del sistema, sus propiedades y axiomas.

De esta manera, para alcanzar una comprensión de C los estudiantes deberán transitar articuladamente por los tres modos de pensar C (Sierpinska, 2000), por lo que lo valioso estará en pesquisar aquellos elementos articuladores (de la matemática: propiedades, definiciones, conceptos, entre otros) que permitan a los estudiantes transitar de un modo de pensamiento a otro. Con tal fin, se aplicaron nueve actividades matemáticas a seis estudiantes de educación escolar (E1, E2, E3, E4, E5, E6) y a cuatro profesores de matemática en formación inicial (P1, P2, P3, P4), obteniendo un modelo de comprensión validado en estos informantes.

Modos de pensar que se priorizan y elementos articuladores.

El análisis de las producciones de los estudiantes a las actividades propuestas muestra una falta de articulación de los modos de pensamiento, privilegiando el modo AA-C y careciendo de tránsitos hacia los otros modos de pensar. Las Figuras 7 y 8 exhiben, por ejemplo, las respuestas de E6 y P3 desde el modo AA-C, a la pregunta, ¿qué número complejo resulta de sumar z y w?

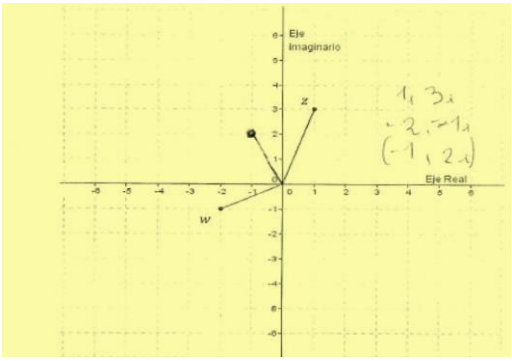


Figura 7. Respuesta de E6 (Dato de la Investigación).

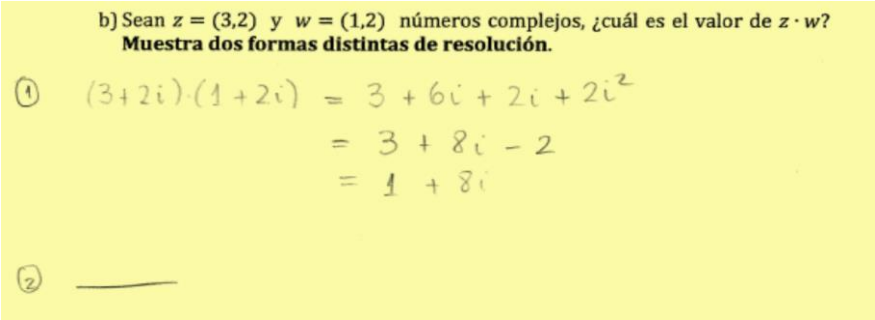


Figura 8. Respuesta de P3 (Dato de la Investigación).

En lo específico, la mayoría de los estudiantes escolares (quienes por su nivel de conocimientos solo pueden alcanzar SG-C y AA-C), no transitan al modo SG-C para resolver las actividades, debido a que no tienen un significado geométrico de C; ellos solo se sitúan y mantienen en AA-C y no reflejan un tránsito de AA-C a SG-C, a modo de ejemplo cuando se les pregunta, ¿qué números cumplen con $|z| = 5$? (ver Figura 9).

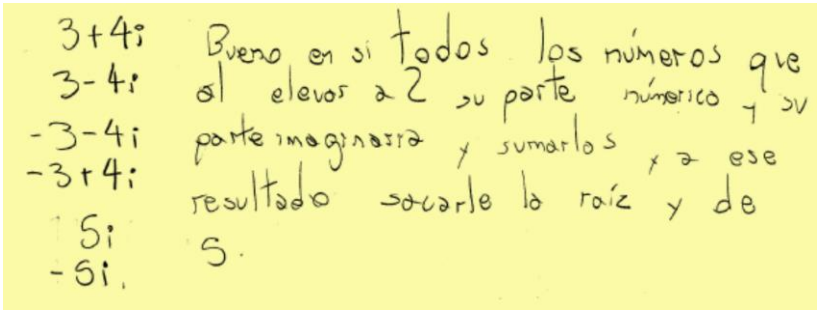


Figura 9. Respuesta de E4 (Dato de la Investigación).

Además, resuelven las actividades situados desde el sistema de los números reales, lo que se refleja —entre otros— cuando insisten en que un número al cuadrado es siempre positivo.

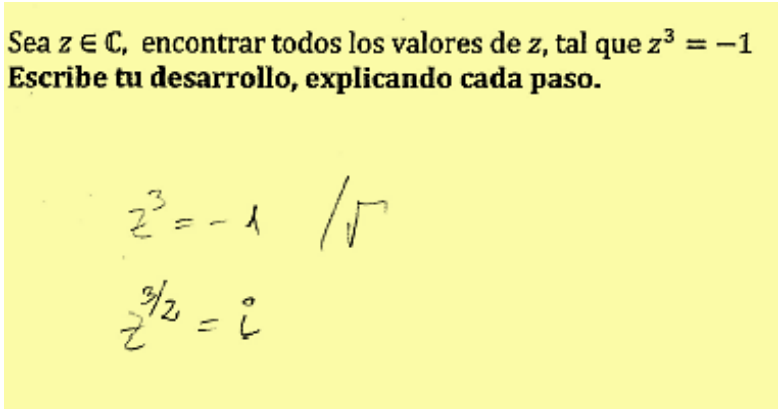


Figura 10. Respuesta de P1 (Dato de la Investigación).

Por su parte los futuros profesores de matemática exponen elementos matemáticos de los distintos modos de pensar C y se sitúan en ellos, pero en su mayoría no son capaces de transitar desde y hacia los otros modos para resolver las actividades con éxito. Por ejemplo, la Figura 10 muestra como P1 no entrega solución a la ecuación $z^3 = -1$ y aplica raíz cuadrada como si estuviera en el dominio de R. Por su parte en la Figura 11, P4 se sitúa en SG-C para responder a ¿qué número complejo resulta de sumar z y w? y utiliza también la notación *(a, b)*.

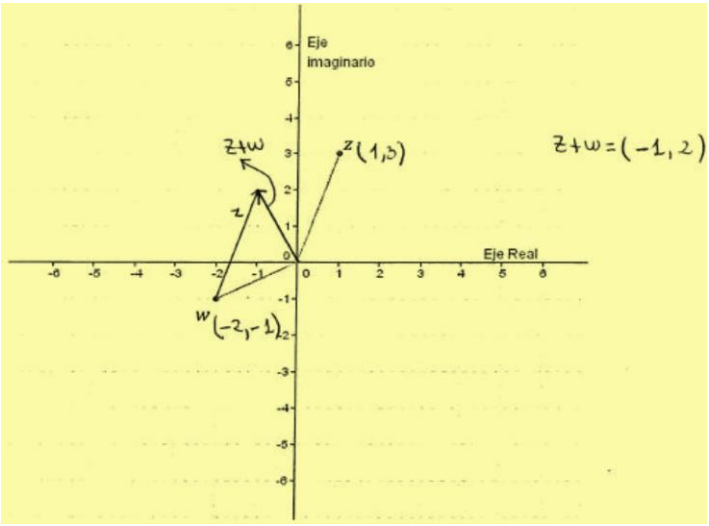


Figura 11. Respuesta de P4 (Dato de la Investigación).

Conclusiones

Desde lo general podemos concluir que los estudiantes de educación escolar y universitaria privilegian el modo AA-Sistemas Numéricos por sobre el modo de pensar SG-Sistemas Numéricos, y además que los profesores en formación inicial presentan dificultades para articular el modo de pensar AE-Sistemas Numéricos con SG-Sistemas Numéricos.

El análisis de las producciones de los estudiantes muestra una falta de articulación de los modos de pensamiento, privilegiando en todo momento el modo AA-Sistemas Numéricos y careciendo de tránsitos hacia los otros modos de pensar. En relación con el sistema numérico C, los estudiantes de enseñanza escolar resuelven las actividades situados desde R, lo que se refleja –entre otros– cuando insisten en que un número al cuadrado es siempre positivo. Por su parte los estudiantes de pedagogía en matemática evidencian elementos articuladores entre los distintos modos de pensar C, por ejemplo, la notación de par ordenado del número complejo, sin embargo, no logran transitar desde y hacia los otros modos para resolver exitosamente las actividades presentadas. Esto permite concluir una comprensión fragmentada de C y la necesidad de potenciar el trabajo desde lo geométrico y estructural. Como resultado final del estudio se entregan sugerencias didácticas sobre elementos validados en la investigación que permitirían transitar de un modo de pensamiento a otro para el diseño de actividades que favorezcan la comprensión cabal de los sistemas numéricos.

Sugerencias didácticas

En base a los resultados descritos para los sistemas numéricos Z y Q, se sugiere potenciar en la formación inicial de profesores de matemática la articulación AE–SG y AE–AA, promoviendo la reflexión en los futuros docentes,

en particular sobre ¿cómo se disponen los números enteros y racionales en la recta numérica? pues, se considera necesario que los docentes comprendan la relación conjuntista no como una estructura que define los sistemas numéricos, sino, como un modelo propio de la transposición didáctica para la enseñanza de los sistemas numéricos en estudiantes de secundaria.

Por su parte, para el abordaje de C, se espera que contenidos como las coordenadas polares sean incorporados y trabajados en la enseñanza de los números complejos. Además, de acuerdo a esta investigación, se plantea como pertinente comenzar el estudio de C potenciando la conexión SG-C a AA-C y luego abordar las conexiones entre AA-C, SG-C y AE-C. Para alcanzar esto último, recomendamos actividades que comiencen situando las operaciones en el plano complejo y definiendo a la unidad imaginaria desde $i^2 = -1$ y no desde $i = \sqrt{-1}$, ya que, aunque ésta no es una notación errada, conduce a los estudiantes a aplicar propiedades en C que solo se cumplen en R, fomentando un sesgo del número real sobre el número complejo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través del proyecto FONDECYT Nº1180468. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Ahmad, A. y Shahrill, M. (2014). Improving post-secondary students' algebraic skills in the learning of complex numbers. *International Journal of Science and Research, 3*(8), 273-279.

Artigue, M. y Deledicq, A. (1992). *Quatre étapes dans I 'histoire des nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques*. Cahier DIDIREM 15. Paris: IREM Paris 7.

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G. y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa, 12*(47), 13-22.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-61.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2015). Los números racionales: Una mirada desde la teoría. Los modos de pensamiento en la formación inicial de profesores. *Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 9*(1), 77-83.

Distéfano, M. L., Aznar, M. A. y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN, 30*, 61-80.

Fandiño, M. I. (2009). *Las Fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos*, *4*, 137-159.

Martínez-Sierra, G., y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado de número complejo y su operatividad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1033-1039). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A. y Giatilis, G. P. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 681-706.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, *2*(1), 3-15.

Pinto-Rojas. I. y Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. *Mathematics Education, 12(10),* 873-898.

Randolph, V. y Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria*, *12*(6), 57-82.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En J. Dorier (Ed), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

ESTUDIO DE GÉNERO DE LA ANSIEDAD MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES MEXICANOS DE BACHILLERATO

GENDER STUDY OF MATHEMATICAL ANXIETY IN MEXICAN HIGH SCHOOL STUDENTS

José García Suárez, María Guzmán Martínez
Universidad de Guadalajara. Universidad Autónoma de Guerrero
jose.gsuarez@academicos.udg.mx, manguzgm@gmail.com

Resumen
Numerosas investigaciones en diversos contextos educativos y en diferentes países han documentado la existencia de diferencias significativas entre hombres y mujeres con respecto a la ansiedad que manifiestan hacia las matemáticas. Este trabajo presenta los resultados parciales de un análisis exploratorio cuantitativo de las respuestas a una prueba diseñada para evaluar el nivel de ansiedad de 518 estudiantes (hombres y mujeres) de bachilleratos mexicanos. Los resultados muestran que existen diferencias significativas en los niveles de ansiedad según el género de los estudiantes. Lo anterior nos lleva a considerar la continuidad de esta línea de investigación para documentar las posibles causas que originan la ansiedad en estos estudiantes.

Palabras clave: ansiedad matemática, estudio de género, estudiantes de bachillerato

Abstract
Numerous investigations in different educational contexts and in different countries have documented the existence of significant differences between men and women with respect to the anxiety they show towards mathematics. This paper presents the provisional results of a quantitative exploratory analysis of the responses to a test designed to assess the level of anxiety of 518 (male and female) Mexican high school students.The results show that there are significant differences in anxiety levels according to students' gender. This leads us to consider giving continuity to this line of research to provide evidence for the possible causes that lead to anxiety in these students.

Key words: anxiety, gender study, high school students

Introducción

En más de 50 años de estudio de la ansiedad matemática, las diferencias entre la ansiedad matemática manifestada por hombres y mujeres han sido notorias y ha persistido y si bien antes podían atribuirse a que la educación matemática estaba concebida como un campo masculino, hoy en día esta teoría pierde fuerza. Algunas investigaciones realizadas en esta línea, como las de Fennema y Sherman (1976), Lafferty (1994), Vest (1998), Wigfield y Meece (1988) y Worley (1997), no logran determinar las causas que originan las diferencias entre ambos géneros. En el reporte del trabajo de Pérez-Tyteca (2012), de una investigación realizada en estudiantes españoles, sugiere que las diferencias de ansiedad entre hombres y mujeres pudieran ser derivadas de que a los hombres les cuesta más expresar sus emociones y por consecuencia responden con menor sinceridad a los instrumentos de evaluación y viceversa. Así mismo, Agüero *et al.* (2017) obtienen conclusiones semejantes en su investigación con estudiantes de educación media de Costa Rica. A partir de este interés de la comunidad de investigadores de educación matemática, en cuanto al estudio de la ansiedad como factor de influencia en el aprendizaje de las matemáticas, surge este trabajo de investigación orientado a determinar los niveles de ansiedad matemática que manifiestan los estudiantes de bachillerato participantes en este trabajo.

Referentes conceptuales

De acuerdo con Pérez-Tyteca *et al*. (2009) la investigación en educación matemática se ha centrado prioritariamente en el dominio cognitivo; relegando a un segundo plano al ámbito afectivo. No obstante, de acuerdo con lo mencionado por Hernández (1996), cuando los educadores se dan cuenta de la influencia de los aspectos afectivos en el aprendizaje escolar, dichos aspectos afectivos ganan importancia. Este interés se corrobora en los trabajos realizados por Estrada (2002), Gómez-Chacón (1997) y Hernández, Palarea y Socas (2001). A la hora de abordar el dominio afectivo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, una de las principales dificultades radica en la complejidad de las temáticas de investigación, así como en la falta de claridad de sus descriptores básicos (Gómez-Chacón, 2010). Por ello, Pérez-Tyteca (2012) sostiene que es necesario clarificarlos. Con esta pretensión, en esta investigación adoptamos la definición de McLeod (1992) que afirma que el dominio afectivo es "un extenso rango de estados de ánimo que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos las creencias, las actitudes y las emociones" (p. 245).

Estos términos varían en la estabilidad de las respuestas afectivas que representan, siendo las creencias y las actitudes generalmente estables y las emociones propensas al cambio. Además, existen diferencias en el grado en el que la cognición influye en la respuesta y en el tiempo que tardan en desarrollarse, siendo las creencias, en gran parte, de naturaleza cognitiva desarrollándose durante un periodo de tiempo relativamente largo.

Las creencias son ideas que la persona se forma sobre las matemáticas, su enseñanza y sobre cómo se posiciona a sí misma ante el aprendizaje de esta materia. De las creencias depende todas las conductas incluida la intelectual, ya que con ellas vivimos, nos movemos y somos (Hernández, 2011). McLeod (1992) propone una clasificación de estas creencias, que contempla cuatro categorías:

- Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas (p. ej. "Las matemáticas están basadas en reglas")
- Creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas (p. ej. "Soy capaz de resolver problemas")
- Creencias sobre la enseñanza de las matemáticas (p. ej. "La enseñanza es eficaz")
- Creencias sobre el contexto social que rodea el aprendizaje de las matemáticas (p. ej. "El aprendizaje es competitivo").

Así mismo, otros autores (Gómez-Chacón, 2009; Erazo y Aldana, 2015; Donoso, Rico y Castro, 2016) han reflexionado sobre las creencias mostrando la gran influencia que tienen en el aprendizaje de las matemáticas.

Así mismo, las actitudes son un constructo ampliamente estudiado (Candía, 2009; Pérez-Tyteca *et al*., 2009; Nortes y Nortes, 2017). La actitud hacia las matemáticas la entendemos, de acuerdo con Gil, Blanco y Guerrero (2005), como la predisposición aprendida de los estudiantes a responder de manera positiva o negativa a las matemáticas, lo que determina su intención e influye en su comportamiento ante la materia. Las actitudes tienen mayor intensidad que las creencias y menor estabilidad, y tienen una componente cognitiva (ya que están influidas por las creencias) y una afectiva (ya que también influyen en ella las emociones).

Las emociones, por su parte, son reacciones viscerales que se experimentan ante un estímulo concreto. Este es uno de los principales factores afectivos que intervienen en el proceso de enseñanza- aprendizaje de las matemáticas y son numerosas las investigaciones que se han centrado en su estudio (Hembree, 1990; Caballero, Blanco y Guerrero, 2008; Borrachero, Costillo, Dávila, y Mellado, 2017).

En este trabajo vamos a centrarnos en una de las emociones que más condicionan el aprendizaje en matemáticas: la ansiedad. De modo general, la ansiedad matemática se caracteriza por "la ausencia de confort que alguien podría experimentar cuando se le exige rendir en matemáticas" (Wood, 1988, p. 11). Por lo tanto, admitiremos esta conceptualización y consideraremos también una serie de síntomas como componentes de la ansiedad, dichos síntomas son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental.

Tomando como antecedentes las investigaciones antes mencionadas, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿los estudiantes mexicanos de bachillerato presentan ansiedad matemática? Para dar respuesta se realizó inicialmente, un análisis cuantitativo de las respuestas obtenidas al aplicar el cuestionario de Fennema-Sherman (1976) a una muestra intencional, compuesta por 518 estudiantes del quinto semestre de bachillerato y se utilizó el programa estadístico R (R Core Team, 2019) para el análisis de los datos.

Metodología

Población del estudio

La población está compuesta por 518 estudiantes, los cuales en ese momento cursaban el quinto semestre del bachillerato en las ciudades de Autlán y El Grullo en Jalisco, México.
La elección de la muestra fue de la siguiente manera: primero se eligieron los bachilleratos, por ubicación (Autlán y El Grullo) y posteriormente por tipo de institución (público y privado). Enseguida se acudió con las autoridades de los planteles y se les expuso el proyecto de investigación para su aceptación. Una vez aceptada la propuesta de investigación, se nos asignaron los grupos que participarían en este estudio.

Una vez aplicado el cuestionario se realizó el siguiente procedimiento con los datos:

1. Criterios de inclusión: Se tomaron en cuenta a los estudiantes inscritos que aceptaron ser parte de la investigación y que completaron la encuesta.
2. Criterios de no inclusión: No se incluyeron a los estudiantes que rechazaron participar o no estuvieron en el momento de la aplicación de la encuesta.

Tamaño de la muestra

La muestra está compuesta por 413 estudiantes de dos escuelas públicas y 105 estudiantes de dos escuelas privadas (Tabla 1).

Tabla 1. Composición de la muestra de estudio

Nombre	Localidad	Tipo	# Estudiantes
Escuela Preparatoria Regional de Autlán	Autlán, Jalisco	Público	308
Colegio de Estudios Científicos y Tecnológicos del Estado de Jalisco Plantel El Grullo	El Grullo, Jalisco	Público	105
Bachillerato Tecnológico del Grullo	El Grullo, Jalisco	Privado	72
Bachillerato Tecnológico de Autlán	Autlán, Jalisco	Privado	33

Fuente: Elaboración propia

Instrumento

El cuestionario aplicado está formado por 12 ítems tipo Likert (basado en la escala de la ansiedad matemática), y corresponde al constructo de ansiedad matemática que manifiestan los estudiantes, propuesto por Fennema-Sherman (1976). Cada uno de los ítems tiene 5 posibilidades de respuesta: "Totalmente desacuerdo", "Bastante en desacuerdo", "Ni en acuerdo ni en desacuerdo", "Bastante de acuerdo" y "Totalmente de acuerdo". Estas escalas se codificaron a los valores del 1 al 5. Así, cuando un estudiante contesta a cada uno de los ítems con indiferencia obtendrá una puntuación total de 36 puntos, este valor será tomado como punto de referencia para determinar si el nivel de ansiedad que perciben los estudiantes es alta o baja. De acuerdo con el número de ítems en el constructo, el mínimo teórico es de 12 y máximo teórico de 60 puntos. Es conveniente señalar que el constructo de ansiedad se divide en tres subescalas: ansiedad hacia las matemáticas, ansiedad hacia la resolución de problemas y ansiedad hacia los exámenes.

Para determinar si hay diferencias significativas en cuanto a la ansiedad matemática por: género y tipo de bachillerato (variables del estudio), se realizó una comparación de medias utilizando la prueba de Kruskal-Wallis (Conover, 1999). Se utilizó esta prueba no paramétrica por la ausencia de normalidad en las variables de estudio; además de tener tamaños de muestras pequeñas en el análisis. El análisis estadístico se llevó a cabo con la ayuda del software estadístico R (R Core Team, 2019).

Resultados

Considerando como valor de referencia el valor neutro que se tiene en cada uno de los constructos presentados en la Tabla 2, se observa que el valor promedio de las tres subescalas es menor a su respectivo valor neutro. Realizando la prueba de rangos a un α=0.05, se encontró que las diferencias entre los promedios de los bloques y sus respectivos valores neutros es estadísticamente significativa (p-valor<0). Es decir, el nivel ansiedad matemática general, problemas y exámenes de los estudiantes es significativamente menor al valor neutral que le corresponde.

Tabla 2. Estadísticas descriptivas del constructo ansiedad y subescalas.

Constructo	Ítems	Valor neutro	Mínimo	Máximo	Promedio	Desviación Estándar
Ansiedad total	12	36	12	60	31.73	10.21
Ansiedad general	6	18	6	30	15.47	5.60
Ansiedad problemas	3	9	3	15	7.70	2.60
Ansiedad exámenes	3	9	3	15	8.57	3.20

Fuente: Elaboración propia.
*Ansiedad total se refiere al análisis estadístico de los 12 ítems de ansiedad.

Realizando la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov a un nivel de significancia de $\alpha = 0.05$ en ansiedad general, ansiedad hacia los problemas, ansiedad en exámenes, se encontró ausencia de normalidad en los datos. Razón por la cual se utilizó la prueba de Mann-Withney para ver si existían diferencias significativas en género.

A continuación, en la Tabla 3, se presentan los resultados para género en las tres subescalas.
Considerando un $\alpha = 0.05$, se observa que para género existen diferencias significativas en ansiedad general (p-valor<0), ansiedad en resolución de problemas (p-valor<0), ansiedad en exámenes (p-valor<0) es decir, los hombres y las mujeres participantes en este trabajo, no manifiestan el mismo nivel de ansiedad matemática.

Tabla 3. Resultados de ansiedad por género

Constructo	Género	Mínimo	Máximo	Promedio	Promedio del Rango	Desviación estándar
	Mujer	12	60	33.97	290.1	10.30
Ansiedad total	Hombre	12	59	29.60	230.5	9.71
	Mujer	6	30	16.50	283.93	5.72
Ansiedad general	Hombre	6	30	14.54	236.36	5.30
	Mujer	3	15	8.19	285.3	2.68
Ansiedad problemas	Hombre	3	15	7.20	235.1	2.40
	Mujer	3	15	9.33	294.72	3.14
Ansiedad exámenes	Hombre	3	15	7.84	226.13	3.10

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, se realizó el análisis de la ansiedad matemática de los estudiantes de acuerdo al tipo de institución en el que estaban inscritos, a saber: Públicos y Privados.
Los resultados, Tabla 4, indican que los estudiantes de escuelas públicas presentan mayor ansiedad que los estudiantes de escuelas privadas (p-valor<0).

Tabla 4. Ansiedad por tipo de institución

Tipo	N	Mínimo	Máximo	Promedio	Rango	Desviación estándar
Publica	413	12	60	32.32	266.59	10.74
Privada	105	12	43	29.38	231.63	7.34

Fuente: Elaboración propia.

Por otra parte, dando seguimiento al objetivo de indagar acerca de la ansiedad matemática y la probable influencia del género de los estudiantes, se realizó el análisis estadístico de los hombres y mujeres de los bachilleratos, públicos y privados, participantes en este trabajo. En la Tabla 5 se puede observar que las mujeres presentan mayor ansiedad que los hombres (p-valor<0).

Tabla 5. Análisis estadístico por género y por tipo de bachillerato (público y privado)

Género	N	Mínimo	Máximo	Promedio	Rango	Desviación estándar
Mujer	252	12	60	33.97	290.14	10.26
Hombre	266	12	59	29.6	230.47	9.71

Fuente: Elaboración propia

A su vez, los resultados presentados en la Tabla 6, muestran que independientemente del tipo de escuela, las mujeres presentan el mismo nivel de ansiedad matemática (p-valor=0.837), lo mismo pasa con los hombres (p-valor= 0.836). Por su parte, las mujeres de escuelas privadas y los hombres de escuelas públicas presentan el mismo nivel de ansiedad (p-valor=1.0). Y finalmente, encontramos que las mujeres de escuelas públicas presentan mayor ansiedad que los hombres de escuelas públicas (p-valor<0) y los hombres de escuelas privadas (p-valor<0).

Tabla 6. Comparativa Tipo Bachillerato vs Genero

Grupo	N	Mínimo	Máximo	Promedio	Rango	Std
Publica-Mujer	203	12	60	34.6	296.85	10.83
Privada-Mujer	49	16	43	31.3	262.37	6.89
Publica-Hombre	210	12	59	30.1	237.33	10.2
Privada-Hombre	56	12	43	27.7	204.73	7.37

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

Este estudio produjo resultados interesantes respecto a la comprobación de que la ansiedad matemática se presenta en estudiantes mexicanos de bachillerato, de la misma forma como se manifiesta en estudiantes de otros contextos educativos en distintos países, como se puede ver en los trabajos realizados en España (Pérez-Tyteca, 2012), en Costa Rica (Agüero *et al*, 2017).

Con respecto al objetivo principal de este trabajo, se puede concluir que efectivamente las mujeres estudiantes de bachillerato participantes en esta investigación manifiestan una mayor ansiedad matemática que los estudiantes del género masculino.

Una de las probables causas que pudieran explicar estos resultados, es lo manifestado en el trabajo de Pérez-Tyteca (2012) en el cual se menciona que posiblemente las mujeres pueden ser más sinceras al momento de manifestar sus emociones que los hombres quienes aún en estos tiempos, en ocasiones son más reacios a manifestar esas emociones generalmente por cuestiones culturales, en las cuales se puede considerar un signo de debilidad el aceptar abiertamente que se experimenta ansiedad matemática. Así mismo, es importante destacar que la región donde se efectuó este estudio puede ser considerada una zona rural, por lo que el arraigo de estas costumbres aún persisten.

Finalmente, consideramos conveniente mencionar que paralelamente al cuestionario aplicado en este trabajo, se aplicó una encuesta con preguntas abiertas encausadas a profundizar en la indagación de las causas emotivas que originan la ansiedad matemática de los estudiantes participantes de este trabajo, por lo que se esperan ampliar de manera significativa los resultados de esta investigación con el análisis de las respuestas de las encuestas mencionadas.

Referencias bibliográficas

Agüero, E., Meza, L. G., Suárez, Z. y Schmidt, S. (2017). Estudio de la ansiedad matemática en la educación media costarricense. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *19*(1), 35-45.

Borrachero, A., Dávila, M., Costillo, E., y Mellado, V. (2017). Las emociones del futuro profesorado de secundaria de ciencias y matemáticas, tras un programa de intervención. *Ápice. Revista de Educación Científica*. 1. 17-39.

Caballero, A; Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *Paradigma*, Vol. XXIX, N0 2, 157 – 171**.**

Candia, P. T. (2009). Actitud hacia las matemáticas en alumnos de ingeniería de tercero y quinto semestres del ITESCA. Memoria X Congreso Nacional de Investigación Educativa. Área 5: Educación y Conocimientos Disciplinares. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/0310-F.pdf

Conover, W. J. (1999). *Practical nonparametric statistics*. Hoboken, NJ, Estados Unidos: Wiley.

Donoso, P., Rico, N., & Castro, E. (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 20(2), 76–97

Erazo, Jhon y Aldana, Eliecer. (2015). Sistema de creencias sobre las matemáticas en los estudiantes de educación básica. *Praxis*. 11. 163-169.

Estrada, M. A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, España**.**

Fennema, E., & Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and Males. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*. Tesis doctoral no publicada, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Gómez-Chacón, I. Mª. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición de bachillerato a la universidad. *Educación Matemática*, 21(3):5-32

Gómez-Chacón, I.Mª. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV (*pp. 121-140). Lleida: SEIEM**.**

Hernández, J. (1996). *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*. Tesis doctoral, Universidad de La Laguna, La Laguna, España.

Hernández, J., Palarea, M. y Socas, M. (2001). Análisis de las concepciones, creencias y actitudes hacia las matemáticas de los alumnos que comienzan la diplomatura de maestro. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds*.), Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III* (pp. 115-125). La Laguna, España: Ediciones CAMPUS.

Hernández, G. (2011).Estado del arte de creencias y actitudes hacia las matemáticas, *Cuadernos de Educación y Desarrollo*, Grupo Eumed.net (Universidad de Málaga), 24 (3).

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 33-46.

Lafferty, J. S. (1994*). The links among mathematics text, students´ achievement, and students´ mathematics anxiety: A comparison of the incremental development and traditional texts*. (Tesis doctoral). Widener University, Chester, EE.UU.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 575–596).

Nortes, R., & Nortes, A. (2017). Competencia matemática, actitud y ansiedad hacia las Matemáticas en futuros maestros. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 20(3), 145-160.

Pérez Tyteca, P., Castro Martínez, E., Segovia Álex, I., Castro Martínez, E., Fernández García, F.R. y Cano García, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA: Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 4 (1), 23-35.

Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

R Core Team (2019*). R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponible en https://www.R-project.org/.

Vest, B. (1998). Algebra I as an eighth-grade course: An examination of attitudes, mathematics anxiety, motivation, and achievement. (Tesis doctoral). University of Alabama, Tuscaloosa, EE.UU.

Wigfield, A.; Meece, J. L. (1988). Math anxiety in elementary and secondary school students. *Journal of Educational Psychology*, 80, 210-216.

Wood, E. F. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us?. *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 8-13.

Worley, A. (1997). *Mathematics anxiety in fourth, fifth, and sixth grade students: Origins and correlates*. (Tesis doctoral). Temple University, Philadelphia, EE.UU**.**

LOS DIFERENTES ENFOQUES DEL ÁLGEBRA ESCOLAR Y SU INFLUENCIA EN LOS ERRORES ALGEBRAICOS DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

THE DIFFERENT APPROACHES OF SCHOOL ALGEBRA AND ITS INFLUENCE ON THE ALGEBRAIC ERRORS OF UNIVERSITY STUDENTS

José García Suárez
Centro Universitario de la Costa Sur, Universidad de Guadalajara (México).
jose.gsuarez@academicos.udg.mx

Resumen
Se reportan los hallazgos de una prueba diseñada para evaluar el nivel de comprensiónde los distintos enfoques del álgebra escolar, de185 estudiantes universitarios de primer ingreso del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México.En dicha prueba se analizaron los elementos conceptuales y cognitivos que manifestaron los estudiantes al resolver distintas tareas algebraicas que les exigían identificar y asociar los diferentes enfoques algebraicos considerando su formación educativa previa al ingreso a la universidad. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes universitarios participantes, reconocen sin dificultad el uso del álgebra para la solución de ecuaciones y el desarrollo de estructuras. Sin embargo, manifiestan grandes carencias en la comprensión del álgebra para el estudio de las relaciones entre variables y sobre todo casi la totalidad de los participantes desconocen su uso para el desarrollo de patrones de generalización algebraica.

Palabras clave: enfoques del álgebra, errores algebraicos

Abstract
This paper reports on the findings of a test designed to evaluate the understanding of the various school algebra approaches by one hundred-eighty-five first-year students of the South Coast University Campus, from Guadalajara University, in Mexico. In this test, we analyzed the conceptual and cognitive elements that students show when solving different algebraic tasks that demanded they identify and associate different algebraic approaches considering their pre-university school training. The results show that most university students involved in the study are able to recognize, without difficulties, the use of algebra in the solution of equations, and the development of structures, as well. However, they show great inadequacies in algebra understanding to study the relationships between variables; and above all, almost all participants do not know their use for the development of algebraic generalization patterns

Key words: algebra approaches, algebraic errors

Introducción

Los estudiantes desarrollan conocimientos matemáticos durante sus estudios previos a la Universidad. Por lo cual es importante considerar la influencia de estos conocimientos adquiridos en sus niveles formativos pasados y su posible influencia en su comprensión actual, ya que los errores pueden venir arraigados desde la estructura básica y se presentan como un problema que se debe encontrar, analizar, comprender, corregir y validar.

Así mismo y de acuerdo con Chi y Roscoe (2002) no se debe considerar que los estudiantes se incorporan a nuevas situaciones de aprendizaje como si llegaran a un pizarrón en blanco, ya que probablemente tienen bases empíricas, no fundamentadas, que dificultan el aprendizaje de conocimientos formales con un sentido más profundo y correcto.

Otros autores como Ursini y Trigueros (1997, 1998, 2006), observaron y analizaron que el aprendizaje de los estudiantes de los diversos conceptos algebraicos, durante los niveles básico y medio superior, es poco significativo, afirmando que el nivel de manejo de estos conceptos algebraicos por parte de los mencionados estudiantes era muy elemental, concluyendo entre otras cosas, que cada alumno recurre de manera frecuente a sus conocimientos previos para poder resolver las nuevas situaciones que se les presentan, aunque estos conocimientos sean deficientes y resaltan que, comúnmente los estudiantes cuando se enfrentan a problemas complejos, suelen evitar el acercamiento algebraico y utilizan el conocimiento aritmético, en que confían más.

Con base en lo anterior, se consideró relevante investigar acerca de los conocimientos algebraicos previos de los estudiantes participantes en este trabajo, para valorar si fungen como apoyo o como dificultad al momento de enfrentar problemas matemáticos que los conducen a aplicar algunos enfoques algebraicos, que de manera hipotética ya conocen derivados de su formación académica previa a su ingreso a la universidad.

Marco teórico

Más allá de las discusiones epistemológicas y del contenido que se han desarrollado a lo largo de la historia en torno del significado del álgebra, diversos investigadores han descrito y desarrollado diferentes caracterizaciones de esta. Así pues, Kaput (1995) menciona que existen varios conceptos del álgebra en el programa de enseñanza de las matemáticas, afirmando que el álgebra se basa en la generalización, en la manipulación de la sintaxis, en el aprendizaje de las estructuras, además del estudio de las funciones, relaciones, variaciones y lenguaje modelado.

Por otra parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1998) establece que los temas que se tratan en el álgebra escolar deben ser las funciones y las relaciones; el modelado; el estudio de los esquemas; junto con el lenguaje y la representación. Así mismo, Kieran (1992) caracteriza álgebra escolar como una actividad generacional, ya que esta actividad consiste en la formación de las ecuaciones como incógnitas o variables que representan situaciones problemáticas, que permite conocer las expresiones que se forman a partir de patrones numéricos geométricos, además de la formación de las expresiones entre las relaciones numéricas.

Considerando que el álgebra consiste en la formación de las ecuaciones como incógnitas o variables que representan las situaciones problemáticas que se deben resolver, tal como lo menciona en Kieran (1992), es posible formar las expresiones a partir de patrones numéricos y geométricos, también pueden formarse las expresiones de las relaciones numéricas, el álgebra también es una actividad de transformación, posiblemente como actividades que se basan en normas o reglas bien definidas como la factorización, la sustitución, sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, resolver ecuaciones y expresiones, simplificar y trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes que deben ser más manejables a otras (García, Segovia y Lupiañez, 2012).

Por otra parte, Bednarz, Kieran y Lee (1996) desarrollaron cuatro enfoques a los objetivos y contenidos del currículo de álgebra que se presenta generalmente en la escuela, mismo que se basan en los cuatro aspectos diferentes del álgebra y en cada uno de ellos pone una especial atención, dichos enfoques son: 1) el álgebra como la expresión de la generalidad; 2) el álgebra como una herramienta para resolver problemas; 3) álgebra como el modelado, el uso de múltiples representaciones; y 4) el álgebra como el estudio de las funciones.

Uno de los enfoques del álgebra que más se apega al currículum escolar es el de Usiskin (1998), quien analiza esta asignatura desde una perspectiva utilitarista y propone algunos enfoques a partir de lo que se puede hacer con esta disciplina. Usiskin, pone de manifiesto cuatro distintas concepciones del álgebra, en las que se hace énfasis en la relación que existe entre ellas y que se utiliza con propósitos su enseñanza; estos usos se representan en la tabla 1, en la se muestran las diversas concepciones del álgebra y los distintos usos de ellas.

Tabla 1. Enfoques del álgebra escolar según Usiskin (1988)

Concepción del álgebra	Ejemplo de aplicación
Aritmética generalizada	3 + 5.7 = 5.7 + 3, que se generaliza como a + b = b + a
Procedimientos para resolver problemas	Cuando se suma tres a cinco veces cierto número el resultado es 40. ¿Cuál es el númerox^2?
Estudio de relaciones entre cantidades	"¿Qué le sucede al valor 1/x cuando x se hace más grande?"
Estudio de estructuras	Factorizar $3x^2 + 4ax - 132a^2$

Fuente: Elaboración propia

Usiskin, (1988) sostiene que la diversidad de enfoques bajo los cuales los estudiantes de secundaria y bachillerato aprenden álgebra, puede condicionar el aprendizaje no holístico de los conceptos algebraicos básicos, lo cual puede tener repercusiones en las producciones de los estudiantes cuando son incapaces de integrar los cuatro enfoques antes mencionados para una correcta y completa comprensión del álgebra.

De acuerdo con Usiskin (1988), en su concepción del primer enfoque del álgebra, afirma que esta puede ser concebida como aritmética generalizada, es decir, esta perspectiva concibe el álgebra como un tipo de aritmética en la que los números se sustituyen por letras, comúnmente llamadas variables; por ejemplo, cuando se parte de un patrón aritmético para obtener una propiedad algebraica como en la siguiente tarea:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4\ x\ 3$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5\ x\ 4$$

Son casos particulares del enunciado algebraico

$$z + z + z + z = 4z$$

El segundo enfoque al que se refiere Usiskin (1988), es a la orientación del álgebra como un método para la solución de problemas que impliquen la presencia de incógnitas obtenidas a partir de la generalización, es decir, que una vez establecido el patrón generalizador algebraico, la etapa siguiente consiste en la solución del problema. Para una mejor descripción de este enfoque del álgebra a continuación se describe el siguiente ejemplo:

Cuando se añade 3 a 5 veces un número determinado, la suma es 40. Encontrar el número.
El problema se traduce al lenguaje algebraico de la siguiente manera:

$$5x + 3 = 40$$

Bajo la concepción del álgebra como generalizador de patrones, se ha encontrado el modelo que se genera, en este caso, cuando se tiene conocimiento del álgebra adecuado entonces es posible aplicar las técnicas adecuadas para su resolución, sin embargo, para considerarlo como un método para solución de problemas, es necesario complementar el primer paso del procedimiento hasta obtener un valor de la incógnita. Dando secuencia al ejemplo anterior se soluciona de la siguiente manera:

Si se añade el valor -3 a cada lado se tendría, recordando que una igualdad requiere mantenerse estable y para ello lo que se haga de un lado de la igualdad es exactamente lo mismo que se debe realizar del otro lado, entonces:

$$5x + 3 - 3 = 40 - 3$$

Simplificando:

$$5x = 37$$

Finalmente resolviendo esta ecuación se obtiene que: $x = 7.4$ por lo tanto el número buscado en el problema es de 7.4.

En la solución de este tipo de problemas muchos estudiantes tienen dificultades para pasar de la aritmética al álgebra. Considerando que la solución aritmética consiste en restar 3 y dividir por 5, la forma algebraica $5x + 3$ implica la multiplicación por 5 y la adición de 3, es decir, en un sentido son operaciones inversas. En este tipo de tareas algebraicas, para establecer la ecuación hay que pensar precisamente lo contrario de la forma en que lo resolvería con la aritmética, además no se debe olvidar que en esta concepción del álgebra las variables pueden ser incógnitas o constantes.

Mientras que las palabras claves del primer enfoque de Usiskin (1988) muestran el álgebra como aritmética generalizada en donde traducir y generalizar es el objetivo, la prioridad del segundo enfoque es simplificar y resolver, obteniendo expresiones equivalentes.

El tercer enfoque que menciona Usiskin (1988), se refiere al álgebra como un instrumento utilizado en el estudio de las relaciones entre cantidades; un ejemplo de esta orientación es cuando se escribe $A = bh$, la fórmula del área de un rectángulo; en este tipo de fórmulas o expresiones algebraicas se está describiendo una relación entre tres cantidades. En este tipo de expresiones no existe la percepción de un valor desconocido, porque no se está resolviendo nada; aunque se debe tener cuidado se aborda en este tipo de expresiones, ya que la percepción de fórmulas tales como $A = bh$ es diferente de la de generalizaciones tales como $1 = n\,(\frac{1}{n})$, aún a pesar de que se puede pensar en una fórmula como un tipo especial de generalización.

¿Qué ocurre con el valor de $\frac{1}{x}$ cuando x se hace más y más grande?

En este ejemplo, no se ha pedido encontrar un valor desconocido, entonces la variable no es una incógnita, tampoco se pide al alumno que traduzca, ya que existe un patrón para generalizar, pero es fundamentalmente un modelo algebraico. Bajo esta concepción, una variable es un parámetro que representa un número del que dependen otros números o también puede ser un argumento que podría representar un valor en el dominio de una función o tal vez no.

Finalmente, el cuarto enfoque que menciona Usiskin (1988), concibe álgebra como el estudio de estructuras abstractas algebraicas como grupos, anillos, dominios de integridad, campos y espacios vectoriales, en este sentido, es necesario mencionar que en la concepción del álgebra visto como el estudio de las estructuras, en estos casos, la variable es poco más que un símbolo arbitrario.
Siendo necesario ilustrar lo dicho por Usiskin (1988) en su perspectiva el autor recurre al siguiente problema:

$$\text{Factorizar } 3x^2 + 4ax - 132a^2$$

Ante una expresión algebraica como la anterior, Usiskin (1988) menciona que la concepción de álgebra representada aquí no es la misma que en cualquiera de las descritas anteriormente, en este tipo de representaciones no existe un patrón aritmético a generalizar, tampoco hay ninguna ecuación que resolver, por lo que la variable no está actuando como una incógnita y además no existe una función o relación y por último, la variable no es un argumento. Es de esperar que cuando un alumno se enfrenta a ecuaciones de este tipo, cuando no ha comprendido, ni construido expresiones algebraicas, entonces tiene problemas para poder entender que procedimientos deber realizar para intentar resolver el problema expuesto. Pero si el alumno ya ha tenido práctica en expresiones o tareas de ese tipo y ha logrado entender cómo se pueden resolver, entonces le resulta viable la factorización de dicho polinomio, cuyo resultado es

$$(3x + 22a)\,(x - 6a).$$

En el trabajo docente, cuando se trabaja con álgebra, se pretende que los alumnos sean capaces de operar sobre las variables sin tener que recurrir siempre al nivel del referente. Por ejemplo, si se plantea un problema cuyo objetivo sea resolver una identidad trigonométrica como la siguiente expresión

$$2\,sen2x - 1 = sen4\,x - cos4x,$$

En esta expresión, el estudiante no debe de interpretar que las funciones seno o coseno tienen un valor específico. Simplemente se requiere que el alumno manipule *sen x* y *cos x* utilizando las propiedades que son tan abstractas como la identidad que se quiere obtener. Estas expresiones algebraicas tienen ciertas reglas definidas que han sido expuestas tan ampliamente, que el estudio del álgebra se centra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre x´s , y´s y n´s, ya sean como sumandos, factores, bases o exponentes.

Metodología

La metodología es de enfoque cuantitativo, descriptiva, la población de interés se ubica en estudiantes universitarios de primer curso.

Para la realización de este análisis se diseñó como instrumento de evaluación, una prueba escrita que contaba de 12 ítems seleccionados de los trabajos de investigación de los diversos investigadores del área de la enseñanza de la matemática, para evaluar los cuatro enfoques del algebra escolar mencionados en el marco teórico de este trabajo, una descripción general de estos ítems se presenta en la tabla 2.

Tabla 2. Descripción general del instrumento de evaluación

# tarea	Descripción tarea	Constructo/Enfoque que evalúa
1	a) Ecuación lineal b) Ecuación cuadrática simple c) Ecuación cuadrática compuesta	Algebra para resolución de problemas
2	a) Binomio al cuadrado b) Producto polinomios c) Propiedades radicales	Álgebra para manipulación de estructuras
3	3 tareas con enunciados donde se pedía establecer una función.	Álgebra como el estudio de las funciones
4	3 tareas con enunciados donde se pedía generalizar el resultado	Álgebra como patrones generalizadores

Fuente: Elaboración propia

La prueba fue aplicada en 185 estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur, las carreras participantes se presentan en la tabla 3.

Tabla 3. Descripción de la muestra

Carrera/ Ingeniería	# participantes	# pruebas evaluadas
Mecatrónica	42	38
Obras y Servicios	35	33
Teleinformática	23	20
Procesos y Comercio Internacional	35	32
Agronomía	35	31
Recursos Naturales y Agropecuarios	34	31

Fuente: Elaboración propia

Las pruebas fueron aplicadas por el responsable de esta investigación y en acuerdo con los profesores de la asignatura de matemáticas de los grupos de primer ingreso de las carreras participantes en este trabajo.

Los criterios para la inclusión o exclusión de los participantes fueron: no se incluyeron a los estudiantes que rechazaron participar o no estuvieron en el momento de la aplicación de la encuesta. Así mismo, solo se tomaron en cuenta a los estudiantes inscritos que aceptaron ser parte de la investigación y que completaron la encuesta. Finalmente es importante mencionar que se excluyeron a los estudiantes que no completaron el 50% de la encuesta.

Resultados

Los resultados muestran que casi la totalidad de los estudiantes universitarios participantes (97.7%), reconocen sin dificultad el uso del álgebra para la solución de problemas. Sin embargo, conforme aumenta la dificultad de esas tareas, se incrementa el porcentaje de esos errores, por ejemplo, en la tabla 4, se puede observar como en la tarea 1, el porcentaje de errores muestra una tendencia ascendente conforme aumenta la dificultad de la operación a ejecutar.

Tabla 4. Porcentajes de errores de las respuestas obtenidas

# tarea	Descripción tarea	Constructo/Enfoque que evalúa	Porcentaje de errores
1	a) Ecuación lineal b) Ecuación cuadrática simple c) Ecuación cuadrática compuesta	Algebra para resolución de problemas	a) 2.3% b) 17.8% c) 48.6%
2	a) Binomio al cuadrado b) Producto polinomios c) Propiedades radicales	Álgebra para manipulación de estructuras	a) 56.7% b) 34% c) 70.8%
3	3 tareas de funciones lineales	Álgebra como el estudio de las funciones	a) 97.2% b) 97.8% c) 97.8%
4	3 tareas con enunciados donde se pedía generalizar el resultado	Álgebra como patrones generalizadores	a) 28.1% b) 88.1% c) 98.9%

Fuente: Elaboración propia

Un ejemplo de estas situaciones se presenta en la fig. 1, en donde se puede observar las respuestas de un estudiante que reafirman nuestras suposiciones:

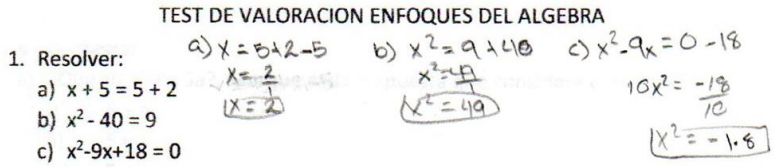


Fig.1 Ejemplo de respuestas a la tarea 1

En la figura 1, se puede ver como el estudiante no tiene problemas para resolver la ecuación lineal, pero es incapaz de dar una respuesta satisfactoria a las ecuaciones cuadráticas, las cuales le exigen un nivel cognitivo más alto para poder resolverlas. Así mismo, se puede observar como en la ecuación cuadrática completa, señalada con el inciso c), intenta utilizar sus conocimientos previos en un intento de adaptarlos a los nuevos problemas que se le presentan, cometiendo un error en su respuesta.

Algo similar se encontró en las respuestas a la tarea 4, en la cual, al aumentar el nivel de dificultad de las tareas, también aumentaron los errores. En la fig. 2 se presenta un ejemplo de esto.

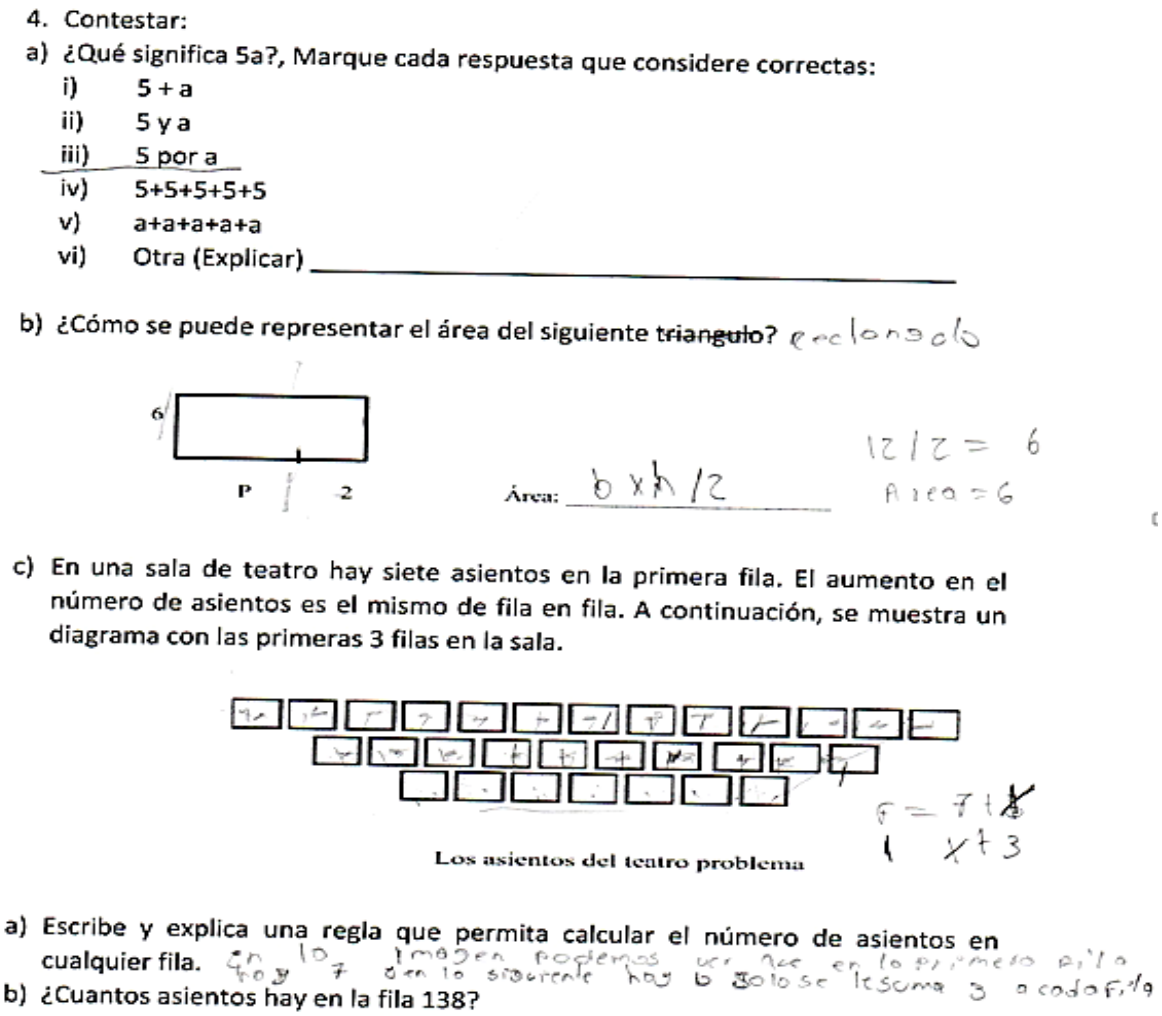


Fig. 2. Ejemplo de respuestas a la tarea 4

En la figura 2, se presenta el caso de un estudiante que sin dificultad responde a la tarea marcada como a), sin embargo, es incapaz de resolver el resto de las tareas, las cuales le exigen un mayor razonamiento para establecer expresiones algebraicas que expresen un resultado general de la situación problemática que se le presenta.

Un ejemplo de las respuestas obtenidas de la tarea 2, se muestra en la figura 3:

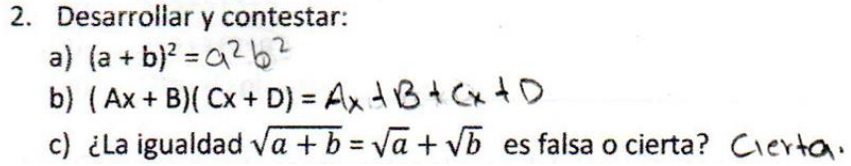


Fig. 3 Ejemplo de respuestas a la tarea 2

En este ejemplo, se puede apreciar, las dificultades que manifiestan los estudiantes cuando dejen de manipular estructuras algebraicas abstractas, en las cuales no tienen valores desconocidos, limitándose a responder tratando

de aplicar reglas aritméticas que parcialmente recuerdas pero que no son capaces de adaptar a los nuevos contextos matemáticos que se les presentan.

De manera similar, en la figura 4, se puede observar un ejemplo de las respuestas a la tarea 3.

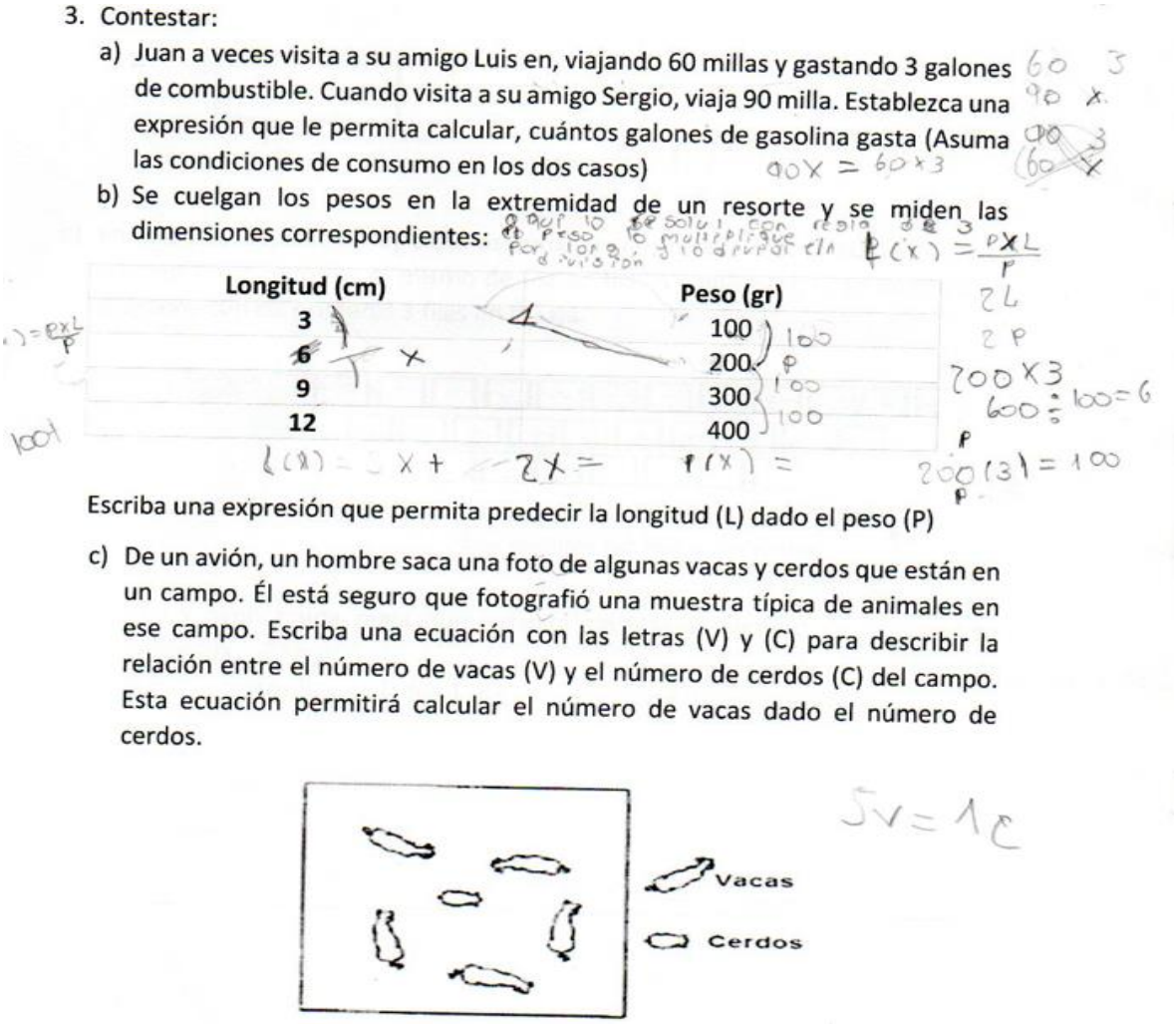


Fig. 4. Ejemplo de respuestas a la tarea 3

En la figura 4, se puede observar como el estudiante es incapaz de comprender el álgebra como una herramienta para el análisis de la relación entre dos cantidades o variables, en ese ejemplo también se observa como al ser incapaz de plantear una ecuación algebraica que exprese la relación entre las variables de cada problema, recurre a tanteos o estimaciones por medio de operaciones aritméticas intentando responder lo que se le cuestiona.

Finalmente, con las respuestas obtenidas de las producciones de los estudiantes se establecieron las relaciones entre errores documentados en trabajos de investigación previamente realizados por diferentes autores (Radatz, 1979, Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar 1987, Caputo y Macías (2006) y los enfoques del álgebra que sirven como marco teórico de este trabajo, dichas relaciones se presentan en la tabla 5:

Tabla 5. Relación de errores y enfoques del álgebra escolar

Descripción del error encontrado	Radatz (1979)	Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Caputo y Macías (2006)	Enfoque asociado
Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas	Errores de asociación	Inferencias no válidas lógicamente	Secuencias incoherentes	Como aritmética generalizada. Como método para resolver ciertos tipos de problemas matemáticos.
Resolución aditiva de la raíz de un binomio	Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.	Teoremas o definiciones deformados.	Demostraciones incompletas o conclusiones por decreto o con pasos "intermedios" incompletos	Como aritmética generalizada, , como estudio de estructuras abstractas algebraicas
Asociación incorrecta de productos notables	Asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento	Teoremas o definiciones deformados	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades	Como aritmética generalizada
Resolución aditiva de la potencia de un binomio	Aprendizaje deficiente	Inferencias no válidas lógicamente	Errores algebraicos elementales ocasionados por la carencia de los conocimientos adecuados en los niveles anteriores de educación.	Como aritmética generalizada, como estudio de estructuras abstractas algebraicas
Error al realizar productos de polinomios	Aprendizaje deficiente	Errores técnicos	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades.	Como aritmética generalizada
Error para establecer generalizaciones a partir de enunciados.	Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.	Interpretación incorrecta del lenguaje.	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura de álgebra.	Como un instrumento utilizado en el estudio de las relaciones entre cantidades y como una herramienta para establecer generalizaciones a partir de enunciados.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 5, se establece la aparente relación que existe entre los diferentes enfoques del álgebra escolar (Usiskin, 1988) y algunas clasificaciones de errores documentadas en la literatura consultada.

Conclusiones

De acuerdo con el análisis de las respuestas obtenidas, las diversas maneras de abordar los enfoques del álgebra escolar en los niveles educativos previos al ingreso a la universidad, aparentemente no se desarrollan con la profundidad requerida para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, que les permita construir una visión holística de lo que es el álgebra. Por lo anteriormente expuesto, se puede inferir que los estudiantes universitarios participantes en este estudio sólo reconocen el álgebra como herramienta para resolver ecuaciones y como un lenguaje matemático específico que les permite, por medio de la aplicación de reglas, desarrollar estructuras algebraicas carentes de valores reales. Sin embargo, a pesar de reconocer que algunas estructuras algebraicas requieren reglas para su desarrollo, así pues, casi la mitad de los participantes de este trabajo (48.6%) manifestaron respuestas incorrectas al resolver una ecuación cuadrática y hasta un 70.8% fue incapaz de reconocer una de las principales propiedades de los radicales.

Por otra parte, casi la totalidad de los estudiantes participantes en este trabajo (98.9%), fueron incapaces de establecer patrones de generalización a partir de enunciados de problemas, recurriendo la mayoría de las veces a sus conocimientos aritméticos, en el intento de adaptarlos a los nuevos contextos que se les presentaban y casi la totalidad de esos intentos finalizaban con resultados incompletos e incorrectos.

De manera análoga, la generalidad de estudiantes (más del 97%), no pudieron identificar al algebra como una herramienta para el estudio de las relaciones entre las variables o funciones, siendo incapaces de establecer estructuras o expresiones algebraicas que representaran las relaciones entre las variables que se les presentaban en los problemas con enunciados textuales que se les presentaron.

Finalmente, se puede concluir que es relevante ampliar este trabajo por medio de un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes, por medio de entrevistas con una muestra representativa de los participantes de este trabajo, teniendo como objetivo principal el confirmar las deducciones realizadas y en la medida de lo posible, documentar las posibles fuentes originales que les provocan las dificultades que exhibieron al responder al instrumento de evaluación aplicado en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Caputo, S. y Macías, D. (2006). Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones. Disponible en*: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.*

Chi, M. T. H., y Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer.

García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 139-148). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València / SEIEM.

Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from anengine of inequity to anengine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics. Boston MA.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. & Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18 (1): 3-14.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*. Reston. Virginia: NCTM.

Radatz, H. (1979). Errors Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 9: 163-172.

Ursini, S. y M. Trigueros (1997), "Understanding of different uses of variable: A study with starting college students", *Proceedings of the XXI PME Conference*, Lahti, Finlandia, pp. 4-254–4-261.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* II. (pp. 445-463). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*. 18 (3): 5-38.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

DISEÑO DE UNA ESCALA DE PERCEPCIÓN SOBRE EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR

DESIGN OF A PERCEPTION SCALE ON SCHOOL MATHEMATICAL DISCOURSE

Jesús E. Pinto Sosa y Luz Marisa Alcocer Escalante
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
psosa@correo.uady.mx, marisaalcocer96@gmail.com

Resumen
El objetivo de esta investigación fue diseñar una escala de percepción sobre el discurso Matemático Escolar (dME), con base en la opinión de los estudiantes del nivel secundaria. El diseño se basó en el marco de referencia de Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015), quienes estudian y analizan el dME desde tres dimensiones: adherencia, opacidad y exclusión. Se presenta cada una de las etapas del proceso de construcción. Como resultado, se obtuvo una escala con 43 ítems, donde el estudiante valora el grado de frecuencia (desde "nunca" a "siempre") de cada enunciado. Con un índice de confiabilidad α= .800, la escala permite hacer un análisis global con base en un puntaje alcanzado y específico ítem por ítem, y con base en los resultados de los estudiantes, valorar cada ítem como "aceptable", "puede mejorar", "necesita mejorar" y "urge mejorar" el dME.

Palabras clave: discurso matemático escolar, adherencia, opacidad, exclusión, escala de percepción

Abstract
The aim of this research is to design a perception scale about the School Mathematical Discourse based on secondary school students' opinion. The design was built on the reference framework by Cordero, Gómez, Silva-Crocci & Soto (2015), who study and analyze the School Mathematical Discourse from three dimensions: adherence, opacity and exclusion. Each stage of the construction process is presented. As a result, a scale with 43 items was obtained, where the student values the degree of frequency (from "never" to "always") of each statement. With a reliability index α= .800, the scale allows carrying out a global analysis based on a score reached and specific item by item. And based on the results of the students, it allows assessing each item as "acceptable", "can improve", " need to improve" and "urgently improve" the school Mathematical discourse.

Key words: school mathematical discourse, adherence, opacity, social exclusion, scale of perception

Introducción

En los últimos 10 años, las diferentes investigaciones sobre el discurso Matemático Escolar (dME) dan cuenta que en diferentes escenarios y contextos de clase se presenta o muestra una matemática como un cúmulo de conocimientos, donde los procesos suelen ser lineales, únicos y acabados, permitiendo además que los estudiantes crean o piensen que las matemáticas es sólo para algunos; para los más inteligentes y, que aquellos que no logran aprenderla es porque no tienen la capacidad suficiente para desarrollar su pensamiento matemático.

En este sentido, el dME es todo aquello que lleva al estudiante a asumir una creencia, idea o procedimiento único (incuestionable) y que lleva a adquirir una habilidad equivocada o errónea de la matemática, y que va en detrimento del desarrollo del pensamiento del saber matemático que por derecho le corresponde a los estudiantes.

El dME tiene una connotación negativa dado que, como señala Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015), se lleva asumir que el conocimiento es lineal y acabado legitimado por una epistemología dominante que está anclada exclusivamente a la construcción de conocimientos matemáticos (Cordero, 2008), normada por creencias del profesor y los estudiantes sobre lo que es la matemática, su enseñanza y aprendizaje (Buendía y Lezama, 2012). Se trata de un discurso que considera un sistema de verdades independientes de la actividad humana (Introcaso, Braccialarghe y Có, 2013); y un discurso que normativiza, homogeneiza y hegemoniza la manera en que se construyen los conocimientos matemáticos, que inflexibiliza y hasta enajena la significación de los objetos matemáticos a enseñar (Emmanuele, Risso, Rodil y Vernazza, 2015).

Las características del dME son puntualizadas por Soto y Cantoral (2014) haciendo énfasis en una serie de prácticas que generan exclusión. Investigaciones sobre las diferentes nociones o tópicos específicos en matemáticas, como los de Buendía (2006; 2011); Cantoral et al., (2006); Cordero (2003, 2008); Farfán (2012); Montiel (2011), entre otras; han evidenciado una serie de características del dME que se enuncian a continuación:

a) *La atomización en los conceptos*, no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
b) *El carácter hegemónico*, existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras.
c) *La Matemática es un conocimiento acabado y ordenado*, los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden.
d) *El carácter utilitario y no funcional del conocimiento*, la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, meramente operacional y práctico.
e) *La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar*, se ha sesgado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

Estudios como los de Castellanos y Valderrama (2014), Forero (2008) y Lee (2010 citado en Martínez y Hernández, 2017), afirman que el dME también se encuentra en el currículo matemático, haciendo referencia a los planes y programas de estudios, los libros de texto o materiales para la clase, secuencias didácticas y programas institucionales de actualización, así como en el lenguaje y las representaciones instruccionales que utiliza el docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los diferentes tópicos matemáticos que aborda. Por ejemplo, trazar una sola ruta de solución y propagar ideas dominantes aprendidas cuando el docente fue estudiante o tomadas de libros de texto desactualizados, son acciones comúnmente encontradas (Montiel, 2014; y Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel 2014).

Para fines de este estudio, se asume y problematiza el aprendizaje de la matemática desde tres fenómenos enlazados provocados por el dME con base en Cordero, et al (2015), representados por las dimensiones de adherencia, opacidad y exclusión. A continuación, se describe brevemente en qué consiste cada una.

> *Adherencia.* La organización de la matemática escolar se basa en objetos matemáticos y en estructuras inamovibles que son inmutables al tiempo y al espacio. En efecto el saber escolar adquiere una idea de pre-existencia y tiende a hacer creer que los esfuerzos didácticos no deben ni siquiera pensar en modificar el discurso (Introcaso, et al, 2013; Castañeda, 2006; y Cordero, 2008).
>
> *Opacidad.* Según la Real Academia Española (2018) lo opaco se refiere a algo oscuro, sombrío; aquello que impide el paso de la luz. Autores como Introcaso, Braccialarghe y Có (2013) y Báez y Farfán (2017) definen opacidad como un sistema de verdades independientes de la actividad humana, existiendo una débil relación entre la matemática escolar y la matemática de la gente, esto es que una nunca influye a la otra.
>
> *Exclusión*. Desde el contexto matemático aborda a la disciplina como un conocimiento lineal y acabado, legitimado por una epistemología dominante que está anclada exclusivamente a la construcción de conocimientos matemáticos. Se caracteriza por lo hegemónico, lo utilitario y lo universal que impide la construcción de argumentos y procedimientos asociados a un concepto matemático escolar; a su vez inflexibiliza y hasta enajena la significación de los objetos matemáticos a enseñar (Cordero, 2008; Montiel, 2011; Cantoral, 2013; y Emmanuele, et al, 2015). Se conceptúa una matemática donde "el problema es el estudiante", "es para unos cuantos" y la imposición de "esto es así" (violencia simbólica).

Como lo afirma la Dra. Gisela Montiel, "el discurso Matemático Escolar refleja una ideología sobre la forma de presentar y tratar la matemática" (Comunicación personal, 8 de julio, 2019). El análisis de la investigación en matemática educativa da cuenta que el dME ha sido estudiado en diversas situaciones desde los contenidos matemáticos; sin embargo, también es posible analizarlo desde las representaciones instruccionales, es decir, desde las expresiones, acciones, actividades, lecciones, consignas, conductas, instrucciones y actitudes del docente. Algunas de estas pueden ser perceptibles a la opinión de los estudiantes.

En la actualidad, no existen trabajos que analicen desde la perspectiva del estudiante, de qué manera este discurso es una vía de inclusión o exclusión que incida en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, la investigación que se presenta, buscó contestar preguntas como: ¿cuál es la percepción sobre el dME en opinión de los estudiantes?, ¿qué del dME que se da el aula escolar es posible que opinen los estudiantes?, ¿qué de estas conductas, acciones, discursos, ejemplos y situaciones es posible sea observado y apreciado por el estudiante?, ¿a través de qué instrumento el estudiante puede opinar sobre su percepción del dME presente en el aula?

Este artículo tiene como objetivo presentar el diseño de una escala de percepción sobre el dME, de tal manera que mida las percepciones de adherencia, opacidad y exclusión, que se originan en el aula desde la perspectiva de los alumnos. Un instrumento que no existe a la fecha, y que puede permitir una mirada distinta, complementaria y necesaria para conocer, ampliar y comprender más sobre el dME, desde la perspectiva de los propios estudiantes.

Método

El procedimiento general para el diseño de la escala consistió primero en definir de manera constitutiva (teórica y conceptual) y operacional cada una de las tres dimensiones del dME. Posteriormente, se identificó y se elaboró un listado de características de cada dimensión. De este listado, se seleccionaron únicamente aquellas características que fueran susceptibles de observación, opinión y valoración de la percepción por parte de los estudiantes. Se desecharon aquellas características ambiguas y que no podían ser valoradas según la opinión de un estudiante.

Con base en esta lista de características se procedió a elaborar enunciados que cumplan con las de una escala de valoración. Después de tres rondas de revisiones por parte de dos investigadores se procedió a la fase de jueceo, donde tres especialistas en educación y tres investigadores en matemática educativa completaron un formulario de análisis de validez de la escala. Con base en estas observaciones, se hizo una segunda versión, la cual fue administrada a una muestra de 36 estudiantes como parte de la prueba piloto.

El proceso de diseño del instrumento se llevó a cabo en seis fases que se presentan en la Figura 1.

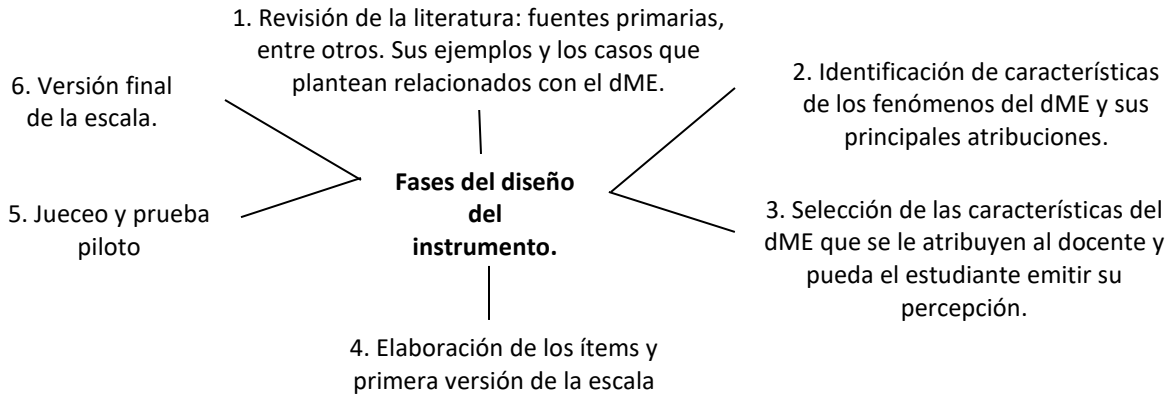


Figura 1. Proceso de elaboración del instrumento.

Los resultados forman parte de una investigación más amplia que buscó explorar ¿qué prácticas de exclusión e inclusión áulicas planteadas en el discurso Matemático Escolar son realizadas por el profesor de matemáticas desde el punto de vista del alumno?

Dado que el propósito de esta parte de la investigación fue el diseño de la escala de percepción sobre el dME, a continuación, se presenta en la sección de "Resultados" la descripción detallada de las fases del proceso de construcción del instrumento.

Resultados

A continuación, se presenta el resultado de cada fase, lo que permitió contar con la escala de percepción sobre el dME.

Fase 1. Revisión de la literatura

Consistió en la búsqueda de conceptos y manifestaciones que abordaran al dME y a cada uno de los fenómenos que se desprenden de este, contenidos en libros y artículos de revistas, así como de otras publicaciones como boletines o folletos. Estas particularidades y casos se obtuvieron principalmente de aquellos autores que se han encargado de dar a conocer esta perspectiva teórica y de la matemática educativa, tales como Soto (2014), Soto y Cantoral (2014), Inostroza (2016), Buendía y Lezama (2012).

Previamente se analizó la dialéctica de la exclusión y de la inclusión del dME. El referente principal fue la obra de "*El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*" de Cordero, et al, (2015), en la cual se discute la construcción social del conocimiento matemático, el origen y características de los fenómenos y las maneras en las que son presentadas o se manifiestan al momento en el que las matemáticas son enseñadas en el

aula. A su vez, implicó el análisis de las alternativas de poder guiar el dME hacía una cultura inclusiva, rescatando las situaciones en las que ésta ya se vislumbra en el contexto escolar.

Fase 2. Identificación de características del dME

Con base en la literatura, se identificaron diferentes características del dME, las cuales se anotaron en una lista. Muchas de estas características estaban todavía a nivel conceptual o teórico.

Cada característica y sus posibles orígenes fueron atribuidos a uno o más de los siguientes cuatro elementos o actores: al docente, al currículo, al ambiente y al estudiante. De igual manera, se identificaron y agruparon situaciones que concatenaran las características relacionadas con adherencia, opacidad y exclusión.

Fase 3. Selección de las características del dME

Se analizaron y seleccionaron aquellas características que podrían ser comunes en el aula y posibles de expresar o representar conductas observables. La finalidad fue separar aquellas características (manifestaciones) que de manera observable pueden ser atribuibles al docente y el ambiente de clases, y que pueda el propio alumno emitir su percepción. De este modo, por la naturaleza de la investigación, se desecharon aquellas características del dME que son atribuibles al currículo y al estudiante, o que son difíciles de ser observadas por el estudiantado en el aula escolar.

De 45 características, se seleccionaron 24 para constituir el instrumento. Es importante señalar que algunas de estas manifestaciones pudieron derivar de uno y hasta tres ítems. Para redactar los ítems se pensaron en situaciones ligadas a la contribución a manera de ejemplos con complejidad baja, logrando así que los estudiantes puedan comprenderlos y responder. Para conocer, seleccionar, definir o redactar cada ítem fue importante basarse en situaciones o ejemplos de las diferentes investigaciones sobre dME.

Los autores de los que se extrajeron estas situaciones o ejemplos fueron Buendía y Lezama (2012), Soto (2014), Soto y Cantoral (2014), Calderón (2012), Castañeda (2006), Inostroza (2016), Cordero, et al, (2015), D´ Amore (2000), Cordero y Flores (2007), Shoenfeld, (2000), Castro, Mardones, Ortíz y Quiroga (2013) y Cervantes, Sánchez y Villalobos (2013), principalmente.

Fase 4. Elaboración de los ítems y primera versión de la escala.

Esta fase consistió en la redacción de los ítems de la escala con base en las 24 características seleccionadas. Los ítems fueron escritos en función del objetivo de la investigación; asimismo, se buscó adecuarlo a ejemplos o situaciones que los alumnos pudieran observar y vivir en su clase de matemáticas en la cotidianidad.

De igual manera se decidió el tipo de instrumento, el cual resultó (de manera inicial) una escala Likert, dado que es un tipo de escala aditiva cuyo nivel de medición es la ordinal, integrada por una serie de ítems o juicios a los que se solicita la reacción de una persona (Padua, 1979).

La escala se constituyó inicialmente de 43 enunciados en escala Likert, en los que se plasmaron ejemplos de manifestaciones de la adherencia, exclusión y la opacidad del dME. Para la adherencia correspondieron 11 ítems; para la opacidad 12 y para la exclusión 20. Esta Escala iba del “Totalmente de acuerdo” como puntuación más alta, hasta el “Totalmente en desacuerdo” como la más baja para su tercera sección. Tal como lo establece el procedimiento de la escala Likert se buscó que el instrumento tenga un balance entre ítems positivos y negativos.

En el instrumento los ítems se acomodaron de manera aleatoria.

Fase 5. Jueceo y prueba piloto

Posteriormente se llevó a cabo el proceso de validación, a través del jueceo, que estuvo a cargo de un grupo de cuatro especialistas en elaboración de instrumentos y metodología de la investigación y dos con experiencia en investigación en matemática educativa. Se les invitó a través de una carta, adjuntando el instrumento y el formato para emitir su valoración sobre la pertinencia del ítem, así como el dictamen sobre su permanencia, modificación o eliminación.

La Tabla 1 resume las principales observaciones y sugerencias de los jueces, así como la manera como fueron atendidas. En resumen, los jueces solicitaron asegurarse que cada enunciado sea claro, preciso y refleje una sola idea.

Tabla 1. Modificación de los ítems de la escala.

Enunciados previos al jueceo	Enunciados posteriores al jueceo
E7. Conecta reducidamente los conocimientos de su asignatura con prácticas cotidianas de la sociedad.	E7. Conecta de manera reducida los conocimientos de su materia con las prácticas cotidianas de la vida diaria.
E9. Es evidente su manera de concebir a las matemáticas en el salón de clases.	E9. Hace evidente su manera de concebir a las matemáticas en el salón de clases.
E11. Ofrece perspectivas insuficientes sobre como emplear los contenidos de la asignatura en la vida cotidiana.	E11. Ofrece perspectivas suficientes sobre como emplear los temas de la asignatura en la vida cotidiana.
E4. Permite cuestionar sus ideas y maneras de transmitirnos los conocimientos en el aula.	E.4. Permite cuestionar sus ideas sobre las matemáticas. E5. Permite que los alumnos cuestionemos su manera de enseñar.
E30. Propone alternativas para la mejora y perfeccionamiento de mis aprendizajes.	E30. Propone alternativas para mejorar mi desempeño en su clase. E31. Presenta alternativas para perfeccionar nuestros aprendizajes en la materia.

De esta manera para la adherencia se conservaron los 11 ítems, los enunciados sobre la opacidad aumentaron a 13 y los de la exclusión del dME aumentaron a 21; quedando para esta versión 45 ítems.

Otra sugerencia de la mayoría de los jueces fue cambiar la escala Likert que iba del "Totalmente de acuerdo" al "Totalmente en desacuerdo" a una escala valorativa que tenga los valores "Siempre" (como el dato mayor en el caso de los ítems positivos y el más bajo para los negativos), "Casi siempre", "Algunas veces", "Rara vez" y "Nunca".

La prueba piloto se llevó a cabo en una escuela secundaria estatal (rural), ubicada en el municipio de Valladolid, Yucatán. Participó un grupo de 36 estudiantes del tercer grado de secundaria, entre ellos mujeres y hombres. Al término de contestar la escala, se les solicitó responder una hoja donde opinaban sobre la extensión del instrumento, la relevancia del contenido, el vocabulario y el tiempo que les tomó contestar.

Los alumnos destacaron que la información era atractiva y que el instrumento no les llevó tanto tiempo. Algunos alumnos tuvieron problema con la comprensión de algunas palabras, mismas que se sustituyeron para la siguiente versión del instrumento. Se eliminaron dos ítems, los cuales no discriminaron dado que el 100% de los estudiantes marco la opción de "Siempre".

El coeficiente alfa de Cronbach de esta versión de la escala arrojó un $\alpha = .731$, lo que según Bojórquez, López, Hernández y Jiménez (2013), representa un nivel de confiabilidad dentro del rango de "Aceptable".

Fase 6. Versión final de la escala.

La versión final de la "*Escala de percepción sobre el discurso matemático escolar*" (Escala-dME) constó de 43 enunciados valorados en una escala con cinco opciones de respuesta, que va desde "Nunca" hasta "Siempre". Para la dimensión de adherencia fueron 11 ítems, para opacidad 11 y para exclusión 21, distribuidos de manera aleatoria. A su vez, 26 ítems (60%) fueron redactados en forma positiva y 17 (40%) de manera negativa.

Los ítems 5, 9, 11, 12, 14, 15, 24, 26, 28, 32 y 41, son enunciados parafraseados con base en aportaciones de los autores. Los ítems 40 y 42 son enunciados que conservan la idea fiel de la característica enunciada por los autores. Los demás ítems fueron de autoría propia.
La Tabla 2 sintetiza las dimensiones de la escala, con sus correspondientes referentes teóricos y los ítems que la constituyen.

Tabla 2. Dimensiones, referentes teóricos e ítems de la escala.

Dimensión del dME	Referente teórico	Ítems
Adherencia	Soto (2014), Soto y Cantoral (2014), Buendía y Lezama (2012), Calderón (2012), Castañeda (2009) e Inostroza (2016).	1, 14, 16, 2, 27, 12, 31, 21, 22, 34 y 9.
Opacidad	Soto y Cantoral (2014), Cordero, et al (2015), D´ Amore (2000) e Inostroza (2016).	20, 13, 32, 17, 8, 33, 37, 24, 29, 30, 3.
Exclusión	Soto (2014), Cordero y Flores (2007), Shoenfeld (2000), Buendía y Lezama (2012), Soto y Cantoral (2014), Castro, et al (2013), Cervantes, et al (2013), Calderón (2012) e Inostroza (2016).	25, 38, 10, 26, 35, 4, 5, 19, 28, 18, 36, 39, 11, 40, 7, 43, 23, 6, 41, 15, 42.

Conclusiones

La Escala-dME fue administrada a una muestra de 232 estudiantes (121 mujeres y 111, hombres) de tercer grado de una escuela secundaria rural de muy alta marginación, ubicada en Valladolid, Yucatán (México).

El tiempo promedio de respuesta por estudiante de la aplicación de la escala fue de 10 minutos aproximadamente. Los datos se recolectaron en un solo día del mes de marzo del 2019. Se obtuvo un $\alpha = .800$, lo que significó un incremento en el índice de confiabilidad, y ser considerado "Muy aceptable".

Algunos ejemplos de ítems construidos para el instrumento se aprecian en la Tabla 3.

Tabla 3. Ejemplos de construcción de ítems contenidos en la escala.

Fenómeno	Autor	Característica	Ítem	Tipo de ítem.
Adherencia	Soto y Cantoral (2014)	Clases tradicionales de matemáticas (sin tecnologías por ejemplo).	Mi profesor de matemáticas incorpora en sus clases materiales diversos como: audio, video, modelos y pizarrón para enseñarnos los temas.	Positivo
Adherencia	Calderón (2012)	Se incorpora un lenguaje matemático no convencional en el aula.	Al explicar, emplea un lenguaje matemático que se me hace difícil de comprender.	Negativo
Opacidad	Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015)	Dificultad para traspasar los conocimientos matemáticos a la realidad.	Muestra dominio de las temáticas que nos presenta en clase.	Positivo
Opacidad	Soto y Cantoral (2014)	Conocimiento que carece de marcos de referencia.	Enseña contenidos que no tienen relación con mis intereses.	Negativo
Exclusión	Soto y Cantoral (2014)	Se niega al estudiante la posibilidad de que construya y reconstruya los saberes escolares matemáticos.	Acepta el uso de alternativas distintas a las que me enseña, para resolver problemas matemáticos.	Positivo
Exclusión	Cervantes, Sánchez y Villalobos (2013)	Subestimar la capacidad del alumno	Piensa que no tengo la suficiente capacidad para aprender.	Negativo

El análisis de los resultados de la Escala-dME se puede realizar desde dos maneras: (a) con el valor o puntaje alcanzado en el total de la escala o por cada una de las dimensiones (adherencia, opacidad y exclusión), o bien, (b) análisis por cada ítem, y por consiguiente, valoración cualitativa en cada dimensión.

El puntaje de la Escala, permite tener como valor mínimo 43 y como máximo 172 puntos, en donde el valor mínimo significa que la percepción de la prevalencia del dME por parte del estudiante es nulo, es decir, no se observa; mientras que un puntaje de 172 significa que el estudiante percibe su máximo nivel de prevalencia.

Para el análisis por ítem, cada uno se valora como “Aceptable”, “Puede mejorar”, “Necesidad de mejorar” y “Urge Mejorar” el dME. Esta valoración se obtiene con base en el porcentaje de respuestas de los estudiantes. Si un ítem obtiene como respuesta esperada 80% o más, significa que es “Aceptable” el dME, entre 70 – 79% se le asigna “Puede mejorar”, entre 60 a 69% se agrupa en “Necesidad de mejorar” y si algún ítem obtiene 59% o menos se etiqueta como “Urge mejorar”. Por ejemplo, la Tabla 4 muestra el porcentaje de ítems que se obtuvieron, con base en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 4. Porcentaje de ítems de las escalas por fenómeno del dME.

Fenómeno	Aceptable	Puede mejorar	Necesita mejorar	Urge mejorar
Adherencia	0%	36.36%	27.27%	36.36%
Opacidad	9.09%	9.09%	9.09%	72.72%
Exclusión	0%	23.80%	23.80%	52.38%

La Tabla 4 da cuenta de sólo el 9% (un ítem) del total de la escala se valoró como "Aceptable" el dME. En contraposición se observa que "Urge mejorar" un alto porcentaje de ítems (conductas) del profesor, dado que, desde la percepción de los estudiantes, prevalece un problema de adherencia (36.36%), de opacidad (72.72%) y de exclusión (52.38%).

El informe con los resultados de la Escala-dME integra el análisis exploratorio de datos, las distribuciones obtenidas, análisis comparativos y correlaciones entre las dimensiones y con diferentes variables sociodemográficas del estudio.

La forma de analizar los hallazgos representa una propuesta que puede servir como valoración diagnóstica de la prevalencia del dME en las tres dimensiones, desde la mirada del estudiante. La información es relevante tanto para las escuelas, las instituciones responsables de la actualización docente y de manera específica para los docentes.
En este sentido, el diagnóstico del dME a partir de la escala, es de carácter formativo, es decir, permitirá a los docentes reflexionar, definir y priorizar las acciones, expresiones, actitudes y conductas para mejorar la enseñanza de las matemáticas.

Por último, el diseño de la escala permite abrir una vertiente en la investigación en matemática educativa sobre el dME, desde la percepción de los estudiantes. Estudios que se suman a conocer y comprender más sobre su naturaleza conceptual y epistemológica, y que igual permiten contribuir tanto en la investigación como en la mejora de los aprendizajes y de la práctica docente.

Referencias bibliográficas

Baéz, M. y Farfán, R. (2017). Reflexionar sobre la matemática escolar. Una ruta socioepistemológica. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1037-1045). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Bojórquez, J. López, L. Hernández, M. y Jiménez, E. (2013). Utilización del alfa de Cronbach para validar la confiabilidad de un instrumento de medición de satisfacción del estudiante en el uso del software Minitab. *Latin American and Caribbean Conference for Engineering and Technology*. México. (pp. 1-9). Recuperado de: http://laccei.org/LACCEI2013-Cancun/RefereedPapers/RP065.pdf

Buendía, G. y Lezama, J. (2012). Epistemología del saber matemático escolar: una experiencia didáctica. *Nóesis, 21* (42): 86-111.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar: un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones.* Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Ciudad de México, 9 (2): 227- 251.

Calderón, D. (2012). *El lenguaje en las matemáticas escolares. En Perspectivas en la didáctica de las matemáticas*. Doctorado Interinstitucional en Educación. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Cantoral, R, Reyes-Gasperini, D, y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 7(3), 91-116. Recuperado de: http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RLE/article/view/149/161

Cantoral, R. et al. (2006). Socioepistemología y Representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Ciudad de México, Número especial: 83-102.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre Construcción Social del Conocimiento*. Barcelona, Gedisa.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* [en línea] 9 (2): 253-265.

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. En Lestón, Patricia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1379-1387). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Castellanos, J. y Valderrama, J. (2014). *El rol de los estándares para matemáticas en el discurso de profesores de primaria: una visión sobre el desarrollo del pensamiento algebraico.* Tesis de Maestría. Universidad del Tolima. Colombia.

Castro, A. Mardones, E. Ortiz, A. y Quiroga F. (2013). Interacciones Alumnos-Profesor en Contextos de Vulnerabilidad Respecto de la Ocurrencia de Episodios de Violencia Simbólica en Clases de Matemáticas. *Formación Universitaria*. 6(1): 29-40

Cervantes, M. Sánchez, C. y Villalobos, M. (2013). Primer Congreso Internacional de Investigación Educativa RIE-UANL. *Percepción de la violencia del docente hacia el alumno en instituciones de educación superior.* [en línea] Nuevo León: Universidad Autónoma de Nuevo León. Recuperado de: http://eprints.uanl.mx/8157/1/c13_1.pdf.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 10(1): 7-38.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Editorial: Gedisa.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. Ciudad de México: Iberoamérica.

D´Amore, B. (2000). Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(3): 321-337.

Emmanuele, D., Risso, M. Rodil, F y Vernazza, C. (2015). La transmisión del conocimiento matemático en la formación de Profesores en Matemática.. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. México: Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Recuperado de: http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/view/912/379

Farfán, R. (2012). *Socioepistemología y Ciencia.* Barcelona: Gedisa.

Forero, A. (2008). Interacción y discurso en la clase de matemáticas. *Universitas Psychologica*, (3): 799-804.

Inostroza, F. (2016). Análisis crítico del discurso de profesores de matemáticas y sus estudiantes: subjetividades y saberes en aulas heterogéneas. *Estudios Pedagógicos XLII*, [en línea] (3): 223-241. Recuperado de: https://scielo.conicyt.cl/pdf/estped/v42n3/art12.pdf

Introcaso, B., Braccialarghe, D. y Có, P. (2013). *El discurso Matemático Escolar como una práctica social. Su rediseño a través del trabajo interdisciplinario*. Argentina: Universidad Nacional del Rosario.

Lee, C. (2010). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Ediciones Morata.

Martínez, M. y Hernández, L. (2017). *Reflexiones sobre el discurso Matemático Escolar*. [sitio web] Saberes y Ciencias. Disponible en: http://saberesyciencias.com.mx/2017/09/08/reflexiones-sobre-el-discurso-matematico-escolar/

Montiel, G. (2014). El rol del discurso matemático escolar en la construcción de significados trigonométricos. En Lestón, P.atricia (Ed.), *Acta Latinoaméricana de Matemática Educativa* (pp. 1771-1779). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Montiel, G. (2011) *Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio Socioepistemológico*. Ciudad de México: Ediciones Díaz de Santos.

Padua, J. (1979). *Técnicas de investigación aplicadas a las ciencias sociales*. México: Fondo de Cultura Económica.

Schoenfeld, A. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47 (6): 461-469.

Soto, D. (2014). *La Dialéctica Exclusión - Inclusión entre el discurso Matemático Escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático*. Doctorado en Matemática Educativa. Instituto Politécnico Nacional.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión Una Visión Socioepistemológica. *Bolema*, 28 (50): 1525-1544.

INICIOS DE UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DEL MÉTODO SEPARACIÓN DE VARIABLES EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

A PREVIEW OF A SOCIO-EPISTEMOLOGICAL STUDY OF THE METHOD OF SEPARATING VARIABLES IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Alan Arturo Flores Cambrón, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (México).
alan.flores@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
En este trabajo se reportan los inicios de un estudio del método de separación de variables (MSV) en Ecuaciones Diferenciales Parciales; dado que el proyecto se encuentra en una fase inicial, nos centraremos en *caracterizar* al *MSV* en fenómenos donde su solución es posible expresarla por medio del producto de dos funciones, las cuales son independientes una de la otra; sugiere aspectos teóricos y metodológicos como el *análisis bibliográfico* de textos que serán eje transversal para dar una caracterización, así como la manera en que es posible determinar la naturaleza de otros fenómenos que su solución pueda hacer uso del método.

Palabras clave: método de separación de variables, socioepistemología

Abstract
This paper reports on a preview of a study related to the method of separation of variables in Partial Differential Equations. As the project is in a starting phase, we focused on characterizing the method of separating variables in phenomena where their solution can be expressed by means of the product of two functions, which are independent one from the other. It suggests theoretical and methodological aspects such as the bibliographical analysis of works, which will be a transversal axis, in order to give a characterization; as well as, the way that makes possible to determine the nature of other phenomena that can use the method of separating variables in their solution.

Key words: method of separating variables, socio-epistemology

Introducción

La fase inicial de la presente investigación se sitúa en dos campos de conocimiento: la Física y la Matemática. La Física explica la naturaleza y su comportamiento a través de la Matemática para comprender el mundo que nos rodea y en la Matemática recae su interpretación mediante la modelación de los fenómenos físicos considerando ciertas variables. Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) se utilizan por su gran capacidad de modelar estos y otros fenómenos (p. e.: químicos, biológicos, de ingeniería o de economía).

Las Ecuaciones Diferenciales (ED) resultan muy interesantes por la diversidad de aplicaciones que tienen. Stephan y Rasmussen (2002), en su investigación, indican que los avances en la tecnología y la evolución de los intereses de los matemáticos en los sistemas dinámicos están provocando actualmente cambios en los primeros cursos de ecuaciones diferenciales; lo anterior refiere a que los enfoques tradicionales de enseñanza de las ecuaciones diferenciales están centrados en mecanizar métodos para encontrar las *funciones solución*, sin que se comprenda su significado, más aún, se deja a un lado e incluso en el olvido la manera en que el estudiante pueda interpretar la solución de forma gráfica.

Hay esfuerzos en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales que están empezando a formar nuevos modelos de aprendizaje para los estudiantes, este tipo de análisis del aprendizaje se ha centrado en la cognición de los estudiantes de forma individual (Stephan, Rasmussen; 2002). Estos autores mencionan que este tipo de análisis son valiosos dentro de la práctica matemática, ya que se pueden tener cambios favorables en cuanto al ambiente instruccional, y esto no es solo por parte del docente, sino que incluye, tareas, el discurso Matemático Escolar (dME), las normas establecidas dentro del aula y lo importante, las herramientas que están presentes en el aprendizaje de las matemáticas, esto a través de formar modelos de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales que promuevan la resolución de problemas matemáticos por medio prácticas matemáticas dentro del aula donde a partir de diseños secuenciales se involucren a los estudiantes a interactuar por medio de equipos para la resolución de problemas específicos.

Como se mencionó arriba Stephan y Rasmussen (2002) mencionan que los modelos de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales se han centrado en la cognición de los estudiantes de forma individual, donde se permite observar que no existen análisis colectivos complementarios en cuanto al tratamiento de un concepto, esto es, que por medio de los diseños secuenciales didácticos se pongan en práctica los conocimientos *previos a* la resolución de un problema asociado a las Ecuaciones Diferenciales, a partir del intercambio de ideas matemáticas entre los estudiantes, para así ir robusteciendo la lluvia de ideas asociadas al concepto y una vez logrado comprenderlo y poder dar una solución.

Una vez centrados en el rubro de las Ecuaciones Diferenciales, destacamos la importancia no solo de su enseñanza y el auge que hoy día está teniendo; si bien, existen dos tipos de Ecuaciones Diferenciales que permiten en su contexto dar solución a un sinfín de problemas de diversa índole; hay un tipo especial de ecuaciones que brinda una mejor interpretación por medio de la modelación matemática al incluir más de dos variables independientes, ya que la mayoría de los fenómenos físicos que están presentes en la Naturaleza involucran más de dos variables, estos fenómenos son explicados por medio de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), mientras que, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) solo permiten hacer uso de una sola variable independiente, y para este tipo de problemas resulta insuficiente su uso debido a que no detalla de forma *completa* a un fenómeno.

La naturaleza de este tipo de ecuaciones (EDP) permite tratar problemas donde influyen más de dos variables independientes, como anteriormente se ha descrito; sin embargo es importante hacer notar que, en un primer curso de EDP, se introduce al estudiante a que conozca los conceptos básicos de estas, como su definición, el campo de aplicación, los tipos y su clasificación de estas ecuaciones, sin soslayar la mecanización algebraica, en un primer momento cuando el estudiante comprueba *funciones solución* de cierto tipo de EDP, aquí es donde se presupone

que el estudiante tiene un buen dominio de técnicas del cálculo en una variable y varias variables reales, como la derivación e integración, por mencionar algunas.

Posteriormente lo que ofrece el dME de un curso de EDP, dicho lo anterior es introducir al estudiante a que conozca los *métodos de solución* dada su clasificación y que el estudiante pueda identificar para hacer uso de estos, es necesario mencionar que dentro de los más usados es el *Método de Separación de Variables (MSV)*, es en este, que nuestra *problemática* estará centrada, para dar inicio a la presente investigación, ya que la mayoría o sino es que en la totalidad de veces en un curso se le dan al estudiante EDP donde el método funciona, y aprende a utilizarlo, sin embargo, el estudiante no sabe caracterizar el uso de este método, es decir, ¿por qué funciona?, ya que está centrado en la operatividad algebraica y es donde de alguna forma pierde una de sus importancias como el saber a qué se debe el empleo de este método o bien, qué fenómenos están intrínsecos en él.

Si bien, este método es típico y sin duda alguna uno de los más usados y poderosos debido a la bondad que ofrece para hallar o encontrar soluciones de las EDP-lineales, sin embargo, en algún momento si se aplica a otro cierto tipo de EDP llega a no poder funcionar.

Su planteamiento matemático permite suponer soluciones exactas separables de una EDP, siendo esta de la forma $U(x,t) = \phi(x) \circ \psi(t)$, es decir, donde $\phi(x)$ y $\psi(t)$ son funciones de x y t respectivamente, e independientes una respecto a la otra, el operador $\circ$ indica que puede ser una solución de forma aditiva o multiplicativamente (Shingareva y Lizárraga-Celaya, 2010).

Investigaciones recientes como la de Shingareva y Lizárraga-Celaya (2010) mencionan, que en general, el *Método de Separación de Variables (MSV)* permite reducir el problema original a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), el cual se pude resolver por cuadraturas, es decir, por el empleo de integrales. Indican también, que la aplicación exitosa de este método a varias ecuaciones de la física-matemática nos lleva a buscar una transformación de variables tal que en las nuevas variables la EDP se puede resolver mediante un *ansatz*, este término es usado por físicos y matemáticos para referirse a la solución estimada a una o varias ecuaciones que describen cierto fenómeno físico o matemático, considerando el caso de las ED, se establece un *ansatz* y las ecuaciones son resueltas considerando las condiciones de Cauchy (llámese también condiciones iniciales) para las EDO o bien las condiciones de frontera para las EDP.

Aunque aún, no existe todavía un método que nos permita decidir si una EDP dada admite soluciones separables y como encontrar estas, existen algunas clases particulares de EDP que brindan criterios algorítmicos de separabilidad que nos permiten decidir si la separación de variables existe y cómo es posible encontrar las soluciones explícitamente (Shingareva y Lizárraga-Celaya, 2010), tras el panorama descrito anteriormente, podemos decir que la operatividad o mecanización algebraica siempre estará presente en el *MSV*, lo que permite que el método sea efectivo, ya que recurre a conceptos matemáticos conocidos; además de ser una de las primeras técnicas aprendidas en la resolución de EDO de primer orden, y al ser aplicado a EDP el método es muy similar al de las EDO; finalmente el *MSV* nos lleva a la resolución de problemas de valores en la frontera mediante Series de Fourier.

Es por eso que nuestro objetivo será caracterizar al *MSV* a través de la búsqueda de fenómenos físicos en diversas fuentes bibliográficas como artículos, obras originales, libros especializados de física-matemática que permitan brindar una mirada acerca del por qué es posible expresar la solución por medio del producto de dos funciones independientes, tal y como lo detalla el *MSV*, ya que el discurso matemático escolar (dME) de un curso donde este método se enseña como lo es en Ecuaciones Diferenciales Parciales, al estudiante solo se le da la manera en cómo es que debe mecanizarlo al resolver ecuaciones o problemas con valores en la frontera de los ya conocidos como la ecuación de onda, de calor o de Laplace por mencionar algunos.

Por otro lado, Farfán (2012) menciona que la potencialidad del cálculo algebraico y el surgimiento de la ingeniería tuvieron en el Siglo XVIII, permitieron consolidar los fundamentos sobre los que el *análisis* se apoyaba como la

teoría de funciones, el papel del álgebra, el continuo real y la convergencia de series, así como la interpretación física de las soluciones matemáticas a fenómenos.

López-Ortega (2016) en su trabajo menciona que en los últimos años en París, Fourier publicó una serie de trabajos tanto en matemáticas puras como aplicada; estos trabajos proporcionaron un gran impulso para posteriores investigaciones sobre series trigonométricas y la teoría de funciones de variable real, pero la historia del Análisis de Fourier tiene más de 200 años, y sus orígenes se encuentran unos 60 años antes del momento en que Jean Baptiste Joseph Fourier presentara la primera versión de su trabajo sobre la teoría de la conducción del calor a la Academia de París en 1807, sin embargo, este fue rechazado.

Como referentes teóricos para esta investigación es necesario situarnos en el contexto histórico de la época: En el Siglo XVII, dado al desarrollo del cálculo se había convertido en una de las principales herramientas para estudiar y modelizar la naturaleza, es en ese marco entonces que una de las ideas era representar la evolución de un fenómeno físico por medio de una ED que relacionaba diferentes magnitudes que involucraban al fenómeno, la ecuación que lo modelaba surgía a través del análisis propio del fenómeno pero a nivel infinitesimal, ya que los fenómenos que se describían podían hacerse en términos de una sola variable (independiente) y estos eran modelados por medio de EDO, donde la ecuación relacionaba a la función desconocida respecto de sus derivadas más aún dado que en los Siglos XVII y parte del XVIII ya se tenían en desarrollo un número considerable de métodos de resolución para este tipo de ecuaciones; sin embargo, cuando el fenómeno físico dependía de dos o más de dos variables (independientes), su modelización venía regida por una EDP en donde el tratamiento era aún más difícil.

De los primeros fenómenos estudiados de ese tipo fue *El problema de la cuerda vibrante (Ecuación de onda)*, el cual llamó y acaparó la atención de una gran cantidad de físicos y matemáticos contemporáneos; la versión del problema es la siguiente:

Farfán (2012) lo detalla de la siguiente manera: Supóngase que una cuerda flexible se ha tensado sobre el eje x y sujetada de dos puntos, que por conveniencia serán $x = 0$ y $x = \pi$. Así, la cuerda representará una cierta curva $y = f(x)$ en el plano XY; donde si se le deja en libertad producirá *vibraciones* en el plano. El problema consiste en determinar su movimiento, es decir, su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante. En 1747, D'Alembert, se interesó por el problema y, bajo diversas hipótesis que permitieron obtener la ecuación de movimiento como la subsecuente vibración considerarla transversal, es decir, cada punto de la cuerda tiene coordenada constante $x = l$ y, por tanto, su coordenada y depende sólo de x en el instante t. Así, el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio está dado por alguna función $y = y(x, t)$, donde si calculamos la primera y segunda derivada parcial respecto al tiempo serán $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, donde representan la *velocidad* y *aceleración* de la vibración de la cuerda respectivamente.

Ahora si consideramos el movimiento de un *pedacito* de la cuerda, que en su posición de equilibrio tiene longitud Δx. Si la densidad lineal de la masa de la cuerda es $m = m(x)$, la masa del *pedacito* es $m\Delta$x y, según la Ley de movimiento de Newton, la fuerza transversal F que actúa sobre el *pedacito* está dada por la ecuación:

$$F = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdots (a)$$

Ya que la cuerda es flexible, la tensión $T = T(x)$ en cualquier punto está dirigida a lo largo de la tangente y tiene por componente y a $T \sin\theta$. La siguiente hipótesis se refiere a que el movimiento de la cuerda se debe únicamente, a la tensión sobre ella. Como consecuencia, F es la diferencia entre los valores inicial y final de $T \sin\theta$ en nuestro *pedacito*, a saber $\Delta(T \sin\theta)$; por tanto (a) se convierte en:

$$\Delta(T\sin\theta) = m\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(b)$$

Si las vibraciones de la cuerda son relativamente pequeñas, es decir, si θ es pequeño, $\sin\theta$ es aproximadamente igual a $\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial t}$; así (b) se convierte en:

$$\frac{\Delta\left(T\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\Delta x} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(c)$$

y cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos: $\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial t}\right) = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(d)$. Finalmente, puesto que la masa m y la tensión T son constantes, obtenemos:

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(e)$$

donde $a = \sqrt{\frac{T}{m}}$. Usualmente, a esta ecuación le nombramos *ecuación de onda* unidimensional y una solución $y(x,t)$ de ella debe satisfacer las condiciones de frontera: $y(0,t) = 0\cdots(f)$ y $y(\pi,y) = 0\cdots(g)$ así como las condiciones iniciales $\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0\cdots(h)$ y $y(x,0) = f(x)\cdots(i)$. Las restricciones (f) y (g) expresan la suposición de que los extremos de la cuerda permanecen fijos en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; en tanto que (h) e (i) aseguran que la cuerda no tiene movimiento cuando es liberada y que $y = f(x)$ es su forma inicial, respectivamente. Observemos que ninguna de estas condiciones se relaciona con la obtención de (e).

Daremos una solución formal de (e) utilizando el *método de separación de variables (MSV)*. Es decir, supondremos que la solución es de la forma:

$$y(x,t) = u(x)v(t)$$

factorizable en un producto de dos funciones, *en donde cada factor depende sólo de una de las variables independientes involucradas.* Sustituyendo esta última relación en (e), se tiene: $a^2u''(x)v(t) = u(x)v''(t)$ o, equivalentemente a:

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)}\cdots(j)$$

El lado izquierdo es una función de x, únicamente, y el lado derecho sólo depende de t, por lo que esta relación se cumple solamente si ambos miembros de la ecuación son constantes. Denotamos dicha constante por $-\lambda$; así (j) da lugar a EDO, una para $u(x)$ y otra para $v(t)$: $u''(x) + \lambda u(x) = 0\cdots(k)$ y $v''(t) + \lambda a^2 v(t) = 0\cdots(l)$. Ahora debemos encontrar las soluciones de estas ecuaciones: la primera sujeta a las condiciones de frontera $u(0) = u(\pi) = 0$, y la segunda a las restricciones iniciales $v'(0) = 0$ y $v(0) = f(x)$. La constante λ representa cualquier número real, y parte del trabajo al resolver las ecuaciones (k) y (l) consiste en determinar los valores de λ para los que el problema puede resolverse.
Si consideramos $\lambda = 0$, la solución general de (k) es $u(x) = c_1x + c_2$; pero como $u(0) = 0 = u(\pi)$, tendremos que la única solución que satisface las condiciones de frontera es la *trivial.* Lo mismo sucede si λ es negativa.

Si nos restringimos al caso $\lambda > 0$, una solución es $u(x) = \sin\sqrt{\lambda}\,x$, pero $u_2(x) = \cos\sqrt{\lambda}\,x$ es también solución, *así como cualquier combinación lineal de ellas*; por tanto, la solución general de (k) es:

$$u(x) = c_1\sin\sqrt{\lambda}\,x + c_2\cos\sqrt{\lambda}\,x$$

Como $u(0)$ debe ser cero, la solución se reduce a:

$$u(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

De la segunda condición de frontera, $u(\pi) = 0$, se debe tener que $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, para algún entero positivo n, es decir $\lambda = n^2$. En otras palabras, λ debe ser igual a alguno de los números $1, 4, 9, \ldots$. A estos valores de λ se les llama *valores propios* del problema, y a las soluciones correspondientes $\sin x\,, \sin 2x\,, \sin 3x\,, \ldots, \cdots (m)$ se les conoce como *funciones propias* o *eigenfunciones*. En tanto que los valores propios están determinados únicamente por la naturaleza del problema, no es así para las eigenfunciones, pues para cualquier constante diferente de cero, los múltiplos de (m), $a_1 \sin x\,, a_2 \sin 2x\,, a_3 \sin 3x\,, \ldots$, son eigenfunciones. Así las correspondientes soluciones de (k) son $u_n(x) = \sin nx\,, n = 1, 2, 3, \ldots$. Similarmente, para los valores de λ, la solución general de (l) es $v(t) = c_1 \sin nat + c_2 \cos nat$ y, si imponemos la condición de que $v'(0) = 0$, entonces $c = 0$, obteniéndose las soluciones $v_n(t) = \cos nat$. Recordamos que la solución para la ecuación que describe el movimiento de la cuerda es de la forma $y(x,t) = u(x)v(t)$ por lo tanto, las soluciones de (e) son de la forma: $y_n(x,t) = \sin nx \cos nat$. Cada una de estas funciones, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, satisface a la ecuación (e) y a las condiciones $(f), (g)$ y (h); lo anterior puede verificarse que es válido para cualquier suma finita de múltiplos de las $y_n's$.

Si bien podemos notar, que el *MSV* ha estado presente durante muchos años, *Fourier fue el que detalló este método en su obra Thèorié Analytique de la Chaleur* (1822), cuyo resultado descansa en 15 años atrás de arduo trabajo y en ella se matematiza un nuevo campo de fenómenos físicos no abordados hasta entonces (Farfán, 2012, p. 89). Fourier estudia la determinación de las leyes matemáticas que gobiernan los fenómenos de propagación del calor en la naturaleza, bajo la hipótesis de que el calor penetra todas las substancias del Universo, de la misma manera que la gravedad actúa sobre los graves. Reconoce que las teorías mecánicas no se aplican a la naturaleza del calor, el cual posee su propia especificidad; esto impide que sea explicado con base en los principios del movimiento y del equilibrio (Farfán, 2012).

Es así que nuestro interés por caracterizar al MSV en fenómenos físicos a partir de estos fenómenos permitirá estudiar la naturaleza de nuevas fenomenologías que pudiesen estar presentes en la Naturaleza, e incluso no solo de índole física; pensemos en el ámbito económico, donde la versatilidad de los flujos de un capital es invariante respecto al tiempo y otras variables de forma rápida.

Pensamos que, si bien, lo descrito anteriormente es modelado por una EDP-lineal (problema de la cuerda vibrante y la ecuación de calor), podemos imaginar el caso en el que los fenómenos no tienen un comportamiento transversal, o lineal, ¿será posible usar el MSV en fenómenos no-lineales?, esta pregunta es parte de lo que nos compite y sobre la cual la presente investigación está teniendo sus inicios.

Metodología

El inicio de esta investigación es planteada a partir de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) la cual muestra un acercamiento al proceso de *significación*, mediante los *usos* y los entendemos como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cruz-Amaya, 2019) esto recae en la transversalidad de hacer un *análisis de obras originales,* este análisis se hace de forma minuciosa en memorias, textos y tratados de los Siglos XVII, XVIII, XIX y XX donde se persigue el objetivo de identificar estrategias formales e informales que propician la *construcción de conocimientos matemáticos*, teniendo como referencia, el pensamiento físico propio de los fenómenos del movimiento; este análisis busca establecer de qué manera el pensamiento físico se nutre de los fenómenos de flujo el cual *contribuye* a la construcción del pensamiento matemático.

Cantoral (2013) menciona que el análisis epistemológico es una de las principales características para entretejer a los hechos científicos con base a sus circunstancias históricas y culturales que salen a la mirada de hoy día en diversos contextos, como lo es el nivel institucional, los actores y sus prácticas ya que son propiciadores de preguntarse sistemáticamente "*por qué se piensa de esta manera"*, con relación en la dirección, en el significado y el sentido del pensamiento de los científicos y matemáticos del periodo, es así que el inicio de la presente investigación está direccionado en conocer esa mirada científica singular como lo es *Thèorié Analytique de la Chaleur* (1822) de Fourier como eje transversal para concebir esa práctica acerca de la caracterización del *MVS* en fenómenos físicos.

Taylor (1715) expuso en su obra donde la idea y motivación principal de este método se da en la ecuación de difusión, el problema que el presentaba, y que más le interesaba era el del modo en que el calor fluía de un punto a otro a través de un objeto (caso de la lámina infinita); reconocer los elementos intrínsecos en la obra original dirigirán a la presente investigación a partir de un *análisis bibliográfico* para dar crítica a aquellos elementos que estén presentes en ella y que permitieron asociar la estructura del objeto matemático que es el *MSV* para dar solución a fenómenos físicos donde su naturaleza está dada por la independencia de las variables involucradas en dicho fenómeno.

Es necesario detallar que la conformación de nociones para el desarrollo del pensamiento matemático de ese tiempo permitieron confrontar a lo que hoy día se sabe o se conoce y que está presente de alguna manera en el dME, lo que derivó a que esas *prácticas* permitieron caracterizar ese *uso* y poder dotarlo de *significado*; es importante mencionar que el estudio está fuertemente ligado a fenómenos de la Física, específicamente a aquellos fenómenos en donde su naturaleza permite caracterizar matemáticamente a través del comportamiento, sea una variable como el *tiempo*, el *espacio*, por mencionar algunas, Cantoral (2013) detalla, que este tipo de estudios tiene un trasfondo donde su desarrollo se encuentra el *Preadiciere* como idea germinal.

Cantoral (2013) menciona que el *Preadiciere* es "La acción intelectual del sujeto epistémico sobre los datos fácticos para establecer los patrones de regularidad del comportamiento de lo que ha de predecirse. Acción que tiene efecto, sólo con el conocimiento de las explicaciones causales de los fenómenos estudiados", por lo que será un lente teórico *para ver la posibilidad de predecir* el *comportamiento de la solución* de los fenómenos físicos a lo largo del tiempo y/o de cualquier otra variable que esté influyendo; para así después expresar matemáticamente la solución, haciendo uso propiamente del *MSV* que en su mayoría es funcional usar en las EDP lineales.

Marco referencial

Dada nuestra línea de investigación y sustentados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) la cual tiene como aporte fundamental: modela la *construcción social del conocimiento matemático* conjuntamente con su *difusión institucional*, esto es, modeliza las dinámicas del *saber* o *conocimiento puesto en uso* (Cantoral, 2013, p. 97) con esto nos referimos a que dentro de la investigación en Matemática Educativa bajo esta orientación, se inicia particularmente con el tratamiento del *saber*, para lograr lo anterior, Cantoral (2013) menciona que fue necesario introducir a la noción de *uso*, en contraste con la noción psicológica de *adquisición por aprendizaje*; donde se pasó del *conocimiento estático* al estudio del *conocimiento en uso*, es decir, al estudio del *saber*; es así que, a través de esta postura nos permitirá *caracterizar* el *MSV en fenómenos físicos* donde a partir del estudio de su naturaleza permite ver el *uso* que dota de significado al método, lo cual lo señala Cantoral (2013), como una posibilidad de intervención en contextos escolares, ahora bien si nos centramos propiamente en el dME de un curso de EDP, o incluso en escenarios de conocimiento más amplios, pero de corte didáctico, donde se puede pensar en la posibilidad de hacer intervenciones didácticas para la mejora de un curso en ED, dado que el *MSV* es de los primeros métodos que se enseñan en un curso, tanto en EDO como en EDP, aunque la manera de tratarlos en ambas áreas de la matemática difieren la forma algebraica de brindar una solución, sin embargo, es necesario pasar

por un curso de Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para saber el comportamiento del método en EDP.

Interesados en la postura teórica de la TSME, y específicamente para que la presente investigación se vaya robusteciendo tomaremos la noción de *Preadiciere*, con ella trataremos de explicar si en algún momento permite ahondar en ella como la manera de *predecir* a través de sistemas evolutivos como es que el fenómeno físico queda *caracterizado* por el *MSV* a partir de su *solución*.

Cantoral (2013) menciona que la noción del *Preadiciere* como método de indagación, tiene tres niveles, y es posible verlo como *esquema*, como *modelo* y como *teoría*, esta triada estará en la base de la teoría, y opera al nivel de *tránsito* entre *conocimiento* y *saber*, por tanto, su localización y análisis es fundamental para la Socioepistemología, dichos niveles son estadios de desarrollo y sirven para clasificar el tipo de predicción que se lleva a cabo y las herramientas que se construyen y se emplean para esos fines.

Si vemos el *Preadiciere como esquema*, Cantoral (2013) lo detalla como la idea básica que consiste en que el *Preadiciere* se manifiesta en un inicio en tanto *noción* o *preconcepto,* vaga aún, en el pensamiento humano, que se relaciona a su vez con fenómenos del movimiento de los cuerpos en el espacio o de la mecánica de medios continuos; más tarde se traduce o se expresa en tablas numéricas como medios para anticipar mediante interpolación y extrapolación, así también se traduce en ecuaciones con variables continuas de naturaleza cuasi empírica. Lo anterior se produce en un contexto específico que evoluciona desde el momento en el que los *fenómenos de movimiento* eran interpretados cualitativa e intuitivamente, hasta la etapa en la que los fenómenos de movimiento fueron concebidos en el marco de esquemas que podemos llamar *aristotélicos*, es decir, interpretando al movimiento en la naturaleza, con explicaciones típicamente cualitativos posicionales. Se centraba la mirada en los atributos inherentes de los cuerpos y no en las medidas y comparaciones de las relaciones entre variables del movimiento.

Situándonos sobre la base de la primera significación que permite reconocer el todo sólo con mirar la parte, como una técnica de predicción, las ideas matemáticas van evolucionando hasta conformarse en el estudio del elemento puntual para el conocimiento del todo global, consolidándose así los elementos de una estructura matemática precisa que permanecerá como forma de mirar esta clase de fenómenos, es así que el *Preadiciere como modelo*, se conforma y robustece a través de la evolución histórica de las ideas con respecto al movimiento, de tal forma que éste centra su interés en la búsqueda de todas las relaciones-prácticas y utilitarias asociadas a él. (Cantoral, 2013, p. 112)

Finalmente si se considera al *Preadiciere como teoría*, Cantoral (2013) menciona que surge cuando este principio y su afirmación como modelo, se incorporan al modelo formal de las matemáticas para desarrollarse posteriormente mediante *principios*, *corolarios*, *axiomas*, *teoremas*, *procedimiento,* y detalla que solo aparece en la medida en que los resultados de los dos anteriores ámbitos encuentren un marco racional de organización, en él no se incluyen sólo nuevos resultados matemáticos sino, más bien, nuevas presentaciones de las viejas ideas. Se suele asociar con los momentos de formalización y, en consecuencia, se tornan en el sostén de los diversos paradigmas educativos.

Es así que entonces bajo esta postura veremos si existe un *momento* en el cual el *Preadiciere* funge como mediador para la caracterización del *MSV* en nuestra búsqueda de fenómenos físicos donde su uso impera para dar *solución*.

Reflexiones o discusión

El *análisis bibliográfico*, está permitiendo a la presente investigación brindar una mirada teórica para la *caracterización* del *MSV* brindando una dirección para poder determinar ¿qué es lo que permite hacer uso del método?, ¿a qué condiciones físicas los fenómenos están sujetas?, dado que el trabajo es totalmente teórico, se presenta una búsqueda de aquellos fenómenos que están en la Naturaleza y que incluso es posible pensar en que

están regidos por leyes matemáticas que terminan modelando de forma no-lineal al problema y quizá el *MSV* tenga la suficiente potencialidad para poder dar o brindar una solución.

Conclusiones

La revisión bibliográfica está focalizada hasta el momento en atender dos grupos, el *primero* de ellos centrado en el objeto matemático que es de nuestro interés (*MSV*) como lo es en: artículos científicos, libros especializados y tesis en Matemática y Matemática Educativa donde está presente la matematización de problemas como el de la cuerda vibrante y la ecuación del calor, mientras que el *segundo* atañe a identificar la obra matemática original donde está presente el *MSV*, la cual permitirá coadyuvar a la génesis epistemológica del método.

Una de las *metodologías* que concierne a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa es la *historización* y *dialectización*, la cual permite concebir y confrontar ideas que forman parte de una racionalidad contextualizada propias de un pensamiento matemático que es asociado a una determinada época. El surgimiento del Cálculo en el Siglo XVIII hizo posible la matematización del problema de la cuerda vibrante, la cual condujo a convocar a matemáticos de la época para dar solución a dicho problema.

Las primeras soluciones asociadas al problema de la cuerda vibrante dieron como tal el inicio a erigir una de las ramas de la Matemática, las Ecuaciones Diferenciales Parciales, y aunque no es nuestro objeto de estudio, quién o quiénes fueron los personajes involucrados en ella, si nos atañe el conocer este marco de referencia para situar la génesis matemática del *MSV*, es decir, dados sus contextos temporales y espaciales, cuál es la epistemología que escudriña las ideas matemáticas del método.

Actualmente hay muchos esfuerzos inquisitivos en el campo de las ED, por ejemplo, su enseñanza y aprendizaje concierne a tener desafíos con la apropiación significados y usos de las ED; que, sobre el aprendizaje memorístico, impere la construcción de conocimiento matemático asociado a *prácticas sociales* y de *referencia.*

En cuanto al *MSV*, escolarmente se ve una centración en el objeto, es decir, su enseñanza y aprendizaje tiene dominio y privilegio por lo algebraico; es por eso, que el objetivo de la presente investigación es *caracterizar* al *MSV* por medio de *prácticas* que serán identificadas en el análisis de textos (obras matemáticas originales).

Pensar a futuro en estas prácticas que pudieran ser identificadas, permitirán bajo la postura teórica de la Socioepistemología dar pautas para un diseño escolar, donde evidentemente esto, traerá consigo en un rediseño del discurso Matemático Escolar de los marcos de referencia donde el *MSV* está presente para su enseñanza.

Referencias bibliográficas:

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cruz-Amaya, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de trabajo geométrico* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Farfán, R. (2012) *Socioepistemología y ciencia: El caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona: Gedisa.

Fourier, J. (1822). *Thèorié analytique de la chaleur* (Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988) ed.) París : Chez Firmin Didot, père et fils. Libraires pour les mathématiques, l'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacop. No. 24.

López-Ortega, M. (2016). *Una perspectiva histórica de los métodos de Fourier*. Trabajo fin de grado de Matemáticas. Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada.

Shingareva, I & Lizárraga-Celaya, C. (2010). Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales: Separación de Variables, soluciones simbólicas. *En Memorias de la XX Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. 145-151

Stephan, M. & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in Differential Equations. *Diario de Comportamiento Matemático, 21*(2002), 459-490.

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa.* Londres: Impensis Gulielmi Innys.

CONEXIONES MATEMÁTICAS ASOCIADAS A LA FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA EN ESTUDIANTES MEXICANOS DEL PREUNIVERSITARIO

MATHEMATICAL CONNECTIONS ASSOCIATED WITH THE EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FUNCTION IN MEXICAN HIGH SCHOOL STUDENTS

Karen Gisel Campo Meneses, Javier García-García
Universidad Autónoma de Guerrero (México).
karenkmpo@hotmail.com, jagarcia@uagro.mx

Resumen
Las conexiones matemáticas representan un objetivo en el plan de estudios, por lo tanto, se han estudiado en la literatura internacional. En esta línea, el objetivo es responder la pregunta: ¿Cuál es el nivel de calidad de las conexiones matemáticas que hacen los estudiantes preuniversitarios al resolver tareas que involucran las funciones exponenciales y logarítmicas? Las conexiones matemáticas son un proceso en el que una persona establece una relación entre dos o más ideas, conceptos o teoremas, con otras disciplinas o con la vida real. La entrevista basada en tareas se utilizó en esta investigación en curso para la recopilación de datos y el análisis temático para su estudio.

Palabras clave: conexiones matemáticas, funciones exponencial y logarítmica

Abstract
Mathematical connections represent an objective in the curriculum; therefore, they have been studied in international literature. On this line, the aim is to answer the question: What is the quality level of the mathematical connections that high school students make when solving tasks that involve the exponential and logarithmic functions? Mathematical connections are a process in which a person establishes a relationship between two or more ideas, concepts or theorems, with other disciplines or with the real world. The task-based interview was used in this ongoing research for data collection and for its study, thematic analysis was used.

Key words: mathematical connections, logarithmic and exponential functions

Introducción

Por naturaleza la matemática está estructurada de forma que sus conceptos están interrelacionados unos con otros formando un todo coherente, es decir, está formada por conexiones matemáticas. Así, las conexiones entre conceptos matemáticos, entre estos con otras disciplinas y con la vida real se ha constituido como una meta en el currículum de diversos países, con el objetivo de que, como lo mencionan Eli, Mohr-Schroeder y Lee (2013), los estudiantes puedan mejorar su comprensión matemática. Por esta razón, nosotros nos interesamos en las conexiones matemáticas, pero particularmente, las asociadas a las funciones exponencial y logarítmica. Esto, porque como lo menciona Cano (2012), son conceptos base para la comprensión de conceptos matemáticos más avanzados, en especial en el campo del Cálculo, además de tener un amplio conjunto de aplicaciones prácticas en diversas disciplinas y en la vida real.

Existen diferentes enfoques en el estudio de las conexiones matemáticas. Entre ellos están aquellas investigaciones que estudian las conexiones respecto a las representaciones semióticas (*e.g* Elia, Panaoura, Eracleous y Gagatsis, 2007 y Moon, Brenner, Jacob y Okamoto, 2013); las que estudian aquellas conexiones matemáticas que surgen cuando estudiantes o profesores resuelven problemas de aplicación o modelado (*e.g* Cawley y Foley, 2002; Glass, 2002 y Yoon, Dreyfus y Thomas, 2010) y las investigaciones que estudian las conexiones matemáticas centradas en un concepto matemático particular (*e.g* Bingölbali y Coşkun, 2016; Brutlag y Maple, 1992; Dolores y García, 2017; Dolores-Flores, Rivera-López y García-García, 2019 y Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2013), a la cual pertenece la presente investigación.

En lo que respecta a las funciones en estudio existen algunas investigaciones respecto a la función exponencial (*e.g*, Sastre, Cañibano y D`Andrea 2017; Sureda y Otero, 2013 y Castro et al. 2017), sobre la función logarítmica (*e.g* Escobar, 2014) y sobre las dos funciones en conjunto (*e.g* Ferrari, Martínez y Méndez, 2016). Estas investigaciones coinciden en que estas funciones son base para temas más avanzados en el cálculo, son funciones que casi no se les presta atención en la escuela y que requiere de su aprendizaje en tanto que tienen una forma de variación particular que debe ser estudiada.

En este sentido, en el presente escrito, se reportan los avances de una investigación en curso que tiene como objetivo analizar el nivel de calidad de las conexiones matemáticas que hacen los estudiantes del preuniversitario al resolver tareas que involucran a las funciones exponencial y logarítmica. Para ello se elaboró y se aplicó un cuestionario a 9 estudiantes del preuniversitario, los datos se recopilaron empleando la Entrevista Basada en Tareas y se están estudiando mediante el Análisis temático.

Marco conceptual

Las conexiones matemáticas se asumen como un proceso en el que una persona establece una relación entre dos o más ideas, conceptos o teoremas, entre sí, con otras disciplinas o con la vida real (García, 2018). Para caracterizar a las conexiones matemáticas nos basamos en las seis tipologías identificadas en García (2018):

Representaciones diferentes, esta conexión matemática se manifiesta cuando un mismo concepto matemático es expresado en registros semióticos diferentes, por ejemplo: lenguaje natural-gráfico, algebraico-gráfico, numérico-tabular, etc. O bien, expresado en dos formas distintas dentro de un mismo registro.

Parte-todo, se exterioriza en el momento en que los estudiantes establezcan relaciones lógicas entre conceptos matemáticos, bien sea de generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (un concepto matemático está contenido en otro).

Procedimental, referida al uso de reglas, algoritmos o fórmulas establecidas dentro de un registro semiótico que son usados para resolver tareas matemáticas.

Significado, son aquellas conexiones matemáticas donde los estudiantes le atribuyen un sentido a un concepto matemático en tanto lo que para ellos es (que lo hace diferente de otro) y lo que representa; puede incluir la definición que ellos han construido para estos conceptos. Asimismo, incluye su contexto de uso.

Reversibilidad, referida a las relaciones bidireccionales entre dos objetos matemáticos, es decir, se puede partir de un concepto A para llegar a B e invertir el proceso partiendo de B para regresar al A.

Característica, esta conexión matemática se manifiesta cuando un estudiante es capaz de identificar un atributo invariante o rasgo de un concepto matemático que lo puede distinguir de otro. O bien, para identificar elementos en comunes entre dos o más conceptos, procedimientos o representaciones distintas.

Por otra parte, nos interesamos en la calidad de las conexiones que los estudiantes puedan establecer. Para ello, adaptamos el marco de referencia (ver tabla 1) propuesto por Mhlolo (2012) considerando las tipologías descritas en García (2018).

En este marco de referencia se entiende que una conexión matemática tiene un nivel de calidad 0 si es matemáticamente errónea, es decir, establece una relación falsa entre dos o más conceptos matemáticos. Tiene un nivel de calidad 1, si una relación verdadera entre dos o más conceptos matemáticos, pero sin justificación y tiene un nivel de calidad 2, cuando además es justificada.

Tabla 1. *Tipologías de conexiones y niveles de calidad de las conexiones matemáticas*

Forma de conexión (código)	Niveles de calidad			
	0	1	2	
Representaciones diferentes (CRD) Relaciones parte-todo (CRPT) Procedimental (CP) Significado (CS) Reversibilidad (CR) Característica (CC)				

Herramienta adaptada de Mhlolo (2012) para dar cuenta del nivel de comprensión relacionado con la calidad de conexiones que se realicen.

Baki, Çatlıoğlu, Coştu y Birgin (2009) recomiendan que, para contribuir a la realización de conexiones matemáticas por parte de los estudiantes, en las clases se involucren analogías simples, análisis de datos reales, discusiones sobre las matemáticas en la sociedad, modelación de fenómenos reales, realización de cálculos y resolución de problemas.

Metodología

La presente investigación es cualitativa, particularmente es un estudio de casos el cual se considera una forma de hacer investigación a profundidad de una unidad social. Su objetivo es identificar los factores que explican los patrones de comportamiento de la unidad dada como una totalidad integrada (Kothari, 2004). Como ruta

metodológica, un estudio de caso parte del diseño, la preparación, recolección de datos y termina en el análisis y las conclusiones respectivas.
Como método para la colecta de datos se utiliza la Entrevista Basada en Tareas, la cual según Goldin (2000), se emplea como un instrumento de investigación en la Educación Matemática a fin de comprender el conocimiento matemático existente y en proceso de desarrollo de un grupo de estudiantes, en tanto que permite al mismo tiempo recopilar información del trabajo escrito de los estudiantes y de lo que están pensando cuando resuelven las tareas.

- *Contexto de la investigación e instrumento*

La investigación se llevó a cabo en una preparatoria de la ciudad de Chilpancingo en México. Participaron 9 estudiantes de quinto semestre que estaban cursando cálculo diferencial. Los estudiantes participaron por voluntad propia y su desempeño era regular y bueno.

El cuestionario que se les aplicó constaba de 4 tareas: en la primera se presentan dos progresiones (una aritmética y otra geométrica) a fin de que los estudiantes encuentren la relación que hay entre ambas; en la segunda se presenta un problema de contagio de una enfermedad donde se usa, además del registro lengua natural, el registro tabular y el gráfico para ser analizados; en la tercera se presenta un problema donde se relaciona la estatura y el peso de los niños entre 5 y 13 años de edad y en la cuarta se pregunta sobre la definición de las funciones exponencial y logarítmica. Con cada tarea se busca identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes hacen al resolverlas y así establecer su nivel de comprensión. Este cuestionario previamente fue validado por expertos y mediante una prueba piloto.

- Análisis de los datos

El Análisis temático es empleado para analizar los datos recolectados. Éste permite identificar y analizar patrones en datos cualitativos (Clarke y Braun, 2013) y su objetivo es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada.

El análisis temático se estructura en seis fases (Braun y Clarke, 2006, 2012):
Fase 1. Familiarización con los datos.

Esta fase tiene que ver con conocer detalladamente las producciones (verbales, escritas o gestuales) de los estudiantes mediante la lectura general de las narrativas en repetidas ocasiones. Mientras se hace esto se puede tomar notas de algunas observaciones importantes asociadas a las primeras conexiones matemáticas que aparezcan.

Fase 2. Generación de códigos iniciales
Esta fase implica organizar la información en grupos de un mismo significado. Para ello se codifica la mayor cantidad posible de patrones de la información y se incorpora en cada código la información suficiente para no olvidar la perspectiva contextual. Por ejemplo, la aseveración "*la relación es que este dos elevándolo al número de arriba me da el número de abajo"* se convirtió en el código: "*las dos secuencias de relacionan mediante la expresión* 2^x*"* Esta codificación se fue refinando conforme avanzaba el proceso hasta analizar todas las narrativas de los estudiantes entrevistados.

Fase 3. Búsqueda de temas
Esta es la fase en la que se revisan los datos codificados para identificar áreas de similitud, se agrupan aquellos que compartan algún rasgo de tal manera que se formen familias de códigos y se describe la característica particular de cada una. Después de ello se asigna un tema o subtema a cada agrupación de códigos y con fines de la presenta investigación.

por ejemplo los códigos "*la sucesión … -1, 0, 1, 2, 3… va de uno en uno", "la sucesión …1/2, 1, 2, 4, 8… se forma encontrando el doble del término anterior"* y *"las dos sucesiones se relacionan mediante la expresión* 2^x *"* se convirtieron en el subtema: *"las parejas ordenadas …, (-1, 1/2) , (0, 1), (1, 2),…representan la expresión* 2^x *"*

Fase 4. Revisión de temas
En esta fase se hace una recodificación de nuevos temas y se da la posibilidad de descubrir nuevos explicitando un límite. Para ello se debe realizar una lectura de los temas establecidos y de los códigos agrupados, la cual debe hacerse analizando si el tema propuesto es útil en relación a la pregunta de investigación, si hay coherencia, si la agrupación realizada es correcta de tal forma que se verifique y se asegure que los temas escogidos sean acordes a los objetivos planteados y cuáles son sus límites.

Fase 5. Definición y denominación de temas
Consiste en establecer jerarquías de acuerdo a la identificación de los datos. En esta fase se exige que el investigador realice y describa de manera detallada el análisis de cada tema identificando lo más importante de cada uno a fin de construirle un nombre claro e informativo (Braun & Clarke, 2012). Los temas corresponden a las 6 tipologías de conexiones matemáticas. Por ejemplo, el subtema *"las parejas ordenadas…, (-1, 1/2), (0, 1), (1, 2), … representan la expresión* 2^x *"* está comprendido en el tema "*conexión matemática parte todo*".

Fase 6. Redacción del informe
Esta última fase tiene que ver con la escritura sustentada en la comprensión e interpretación de la información recogida, para lo cual se requiere contar con un conjunto de temas completamente definidos y analizados para proceder a la redacción del escrito.

Avances y resultados esperados

Hasta el momento se han realizado y transcripto algunas entrevistas. Se espera identificar en las producciones de los participantes una variedad de conexiones matemáticas, que a su vez permita validar el marco de referencia propuesto para determinar el nivel de calidad de las conexiones realizadas por los estudiantes.

De manera particular, a continuación, se presenta el análisis de uno de los 9 casos. Las conexiones realizadas por E1 se muestran en la tabla 2.

Tabla 2. Resultados del caso 1

Tema	Subtemas
Conexión característica	- $y = 2^x$ representa una función exponencial - La función exponencial tiene como base un número real y como exponente una literal - Para cualquier función exponencial de la forma $f(x) = 2^x$, $f(0) = 1$ - El dominio de $v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-t}}$ es $(-\infty, \infty)$ - El dominio de $v(t) = \frac{10000}{5 + 1245e^{-t}}$ que tiene sentido para la situación es $[0, \infty)$ - *La suma de dos logaritmos es igual al logaritmo de la suma de los argumentos*

	- *la suma de dos potencias con igual base es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes* $e^{\ln 2.4+1.84h} = e^{\ln 2.4} + e^{1.84h}$
Conexión procedimental	- Las parejas ordenadas ubicadas en el plano muestran el comportamiento de la función $v(t) = \frac{10000}{5+1245e^{-t}}$ - Los rectángulos que se forman bajo la gráfica de v(t) dan información sobre el crecimiento de la función. - Para encontrar un peso en particular se emplea la expresión general reemplazando el valor de la altura y resolviendo las operaciones. - *La expresión matemática no sirve para analizar el comportamiento de la infección.* - *Al aplicarle e a la ecuación* $\ln w = 3.5$ *obtengo* $e^w = e^{3.5}$
Conexión de significado	- La función exponencial es aquella que tiene como base un número mayor a cero y diferente de 1 y como exponente una literal
Conexión de reversibilidad	- La exponencial y la logarítmica como procesos inversos - La función exponencial y logarítmica son inversas
Conexión representaciones diferentes	- La expresión algebraica de la función permite encontrar las parejas ordenadas que son necesarias para construir su gráfica - *La gráfica de a función logarítmica es como esta (dibuja la gráfica* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *)*
Conexión parte todo	- Las parejas ordenadas…, (-1, 1/2), (0, 1), (1,2),.. representan la expresión $y = 2^x$ - La gráfica que modela el peso representa la gráfica de una función exponencial y la que modela la estatura representa una logarítmica - *La forma general de la función exponencial es* e^x $\ln 8$ *es una función logarítmica particular* - $\log_3 x$ *función logarítmica general*

En sus producciones, E1 evidencia las 6 tipologías de conexiones, unas con más frecuencia que otras. Las conexiones más frecuentes son la conexión característica, procedimental y parte todo. La menos evidenciada es la conexión de significado.

De manera particular el subtema "*las parejas ordenadas…, (-1, 1/2), (0, 1), (1,2),… representan la expresión* $y = 2^x$" E1 lo evidencia cuando encuentra que los términos de la sucesión aritmética y geométrica se relacionan (ver extracto de E1) de tal forma que dicha relación se puede observar mediante una expresión matemática (ver figura 1).

> E1: (El estudiante empieza a escribir cómo obtener los números de abajo a partir del 2, y así obtiene que 16 es 2^4) *ya encontré la relación de que este dos elevándolo al número de arriba me da el número de abajo.*
> K: Para encontrar el número que le corresponde a 11 en la fila de abajo ¿cómo hago?
> E1: *Sería* 2^{11}

b. Encuentra una expresión matemática que relacione el término de la segunda fila con el término de la primera fila. 2^x

c. La expresión que encontraste ¿representa o no una función? En caso afirmativo ¿qué función es? Si representa, representa una función exponencial

Figura 1: *Ejemplo de conexión matemática característica y conexión parte todo por E1*

Además, E1 logra identificar que la expresión que encontró representa una función, específicamente una función exponencial lo cual indica que E1 realiza la conexión parte todo en esos dos momentos: cuando encuentra la expresión y cuando identifica el tipo de función que representa.

Ahora bien, en cuanto al nivel de calidad de las conexiones evidenciadas por E1 (ver figura 2) podemos decir que su conocimiento respecto a las funciones exponencial y logarítmica se debe solidificar a fin de que pueda realizar más conexiones en un nivel 2, ya que hizo pocas conexiones correctas y la mayoría de las conexiones realizadas se encuentran en nivel 1, lo cual es evidencia que E1 no fue capaz de justificar algunas de las conexiones realizadas.

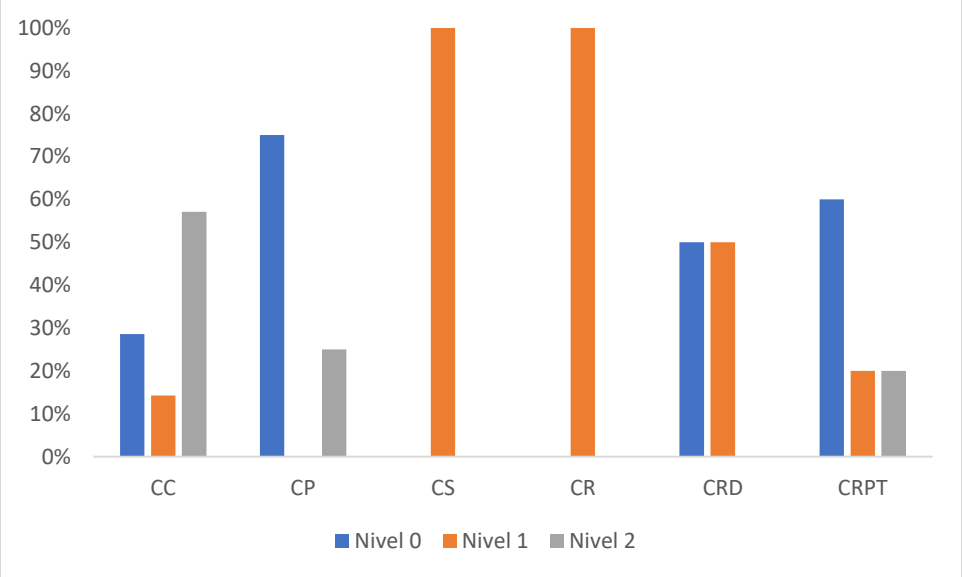


Figura 2. Nivel de calidad de las conexiones realizadas por E1

De acuerdo con lo anterior es necesario revisar la forma de enseñanza de estas funciones a fin de que los estudiantes puedan realizar conexiones matemáticas válidas y en un nivel 2, ya que de acuerdo con Mhlolo (2012) entre mejor sea la calidad de las conexiones que un sujeto realice mejor será su comprensión.

Consideraciones finales

Esta investigación tiene como objetivo analizar la calidad de las conexiones matemáticas que hacen estudiantes mexicanos del preuniversitario. Dado que aún se encuentra en curso, solo se mostró el análisis de uno de los nueve casos de estudio. Este análisis se está llevando a cabo empleando el análisis temático en el que una vez transcritas las entrevistas se revisan junto con las producciones escritas de los estudiantes a fin de identificar las conexiones matemáticas realizadas, así como su respectiva justificación y posterior a ello se siguen las demás fases del análisis

para finalmente emplear la herramienta adaptada de Mhlolo (2012) para revisar cuál es el nivel de calidad de las conexiones identificadas.

Respecto del caso expuesto se infiere que hubo una inclinación hacia la función exponencial, sin embargo, hubo dificultad para emplear algunas propiedades, para expresar la forma algebraica general de la función y esto puede deberse al uso prioritario que se le da a la función exponencial natural y por ello los estudiantes llegan a pensar que esa es la forma general de la función exponencial.

Hasta el momento los resultados que se están encontrando reflejan lo expuesto por Sureda y Otero (2013), quienes mencionan que el estudiante, cuando se le presentan problemas de variación piensa inmediatamente, en una variación lineal y por último en una variación exponencial o logarítmica.

Finalmente, se espera continuar analizando las producciones escritas y verbales de los estudiantes para identificar las conexiones que realicen y su nivel de calidad. Consideramos esto importante porque nos permitirá en futuras investigaciones analizar detalladamente la comprensión de los estudiantes y así elaborar propuestas de aprendizaje basadas en conexiones matemáticas correctas.

Referencias bibliográficas

Baki, A., Çatlıoğlu, H., Coştu, S., & Birgin, O. (2009). Conceptions of high school students about mathematics connections to the real-life. *Procedia Social and Behaviral Sciences, I* (2009), 1407-1407.

Bingölbali, E., & Coşkun, M. (2016). A Proposed Conceptual Framework for Enhancing the use of Making Connections Skill in Mathematics Teaching. *Education and Science, 41*(183), 233-249.

Braun, V, & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology,* 3(2), 77–101.

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. In H. Cooper (Ed.), *Handbook of Research Methods in Psychology*. (pp. 57–71). Washington, DC: American Psychological Association.

Brutlag, D., & Maple, C. (1992). Making Connections: Beyond the Surface. *The Mathematics Teacher, 85(3), 230-235.*

Cawley, J. y Foley, T. (2002) Connecting Math and Science for all student. *Teaching exceptional children, 34* (4), 14–19. https://doi.org/10.1177/004005990203400402.

Castro, M., González, M., Flores, S., Ramírez, O., Cruz, M., y Fuentes, M. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entreciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento, 5*(13), pp-pp. doi: 10.21933/J.EDSC.2017.13.218.

Cano, J. M. (2012). *La definición del concepto de función bajo el enfoque de la enseñanza para la comprensión en estudiantes de grado 11 de una Institución educativa oficial de Medellín*. (Tesis maestría). Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.

Clarke, V & Braun, V. (2013). Teaching thematic analysis: Overcoming challenges and developing strategies for effective learning. *The Psychologist, 26*(2), 120–123.

Dolores C. y García J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en nivel superior. *Bolema, Rio Claro, 31*(57), 158-180. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Dolores-Flores, Rivera-López & García-García (2019) Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50:3, 369-389, DOI: 10.1080/0020739X.2018.1507050

Elia, I., Panaoura, A., Eracleous, A. & Gagatsis, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 5, 533–556.

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connection and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics,* 113(3), 120-134.

Escobar, N. V. (2014). Elementos históricos para la enseñanza de la función logarítmica en la educación básica. *Revista Brasileira de Historia da Matemática, 14* (29), 83-115.

Ferrari, M., Martínez, G., y Méndez, M. (2016). Multiplicar sumando: Desarrollo del razonamiento covariacional logarítmico-exponencial en estudiantes de bachillerato. *Journal of Mathematical Behavior* 42 (2016), 92–108.

García, J. (2018). *Conexiones matemáticas y concepciones alternativas a la derivada y a la integral en los estudiantes del preuniversitario* (tesis doctoral no publicada) Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Glass, B. (2002). Students connecting mathematical ideas: possibilities in a liberal arts mathematics class. *Journal of Mathematical Behavior,* 21, 75-85

Goldin, A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. pp. 517–545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kothari, C.R. (2004). *Research Methodology. Methods and Techniques*. Jaipur, India: New Age International Publisher.

Mhlolo, M. K. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive Level: A Tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, 16(2), 176-191.

Moon, K., Brenner, M. E., Jacob, B. & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers 'understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning, 15*(3), 201–227.

Sastre, P., Cañibano, A., y D`Andrea, R. (2017). Aplicación de la función exponencial sobre el cambio aritmético en la variable independiente. *UNIÓN,* (48), 84-96.

Sureda, P., Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Educación Matemática, 25*(2), 89-118.

Yoon, C., Dreyfus, T. & Thomas, M. O. J. (2010). How High is the Tramping Track? Mathematising and Applying in a Calculus Model-Eliciting Activity. *Mathematics Education Research Journal, 22*(1), 141–157.

SIGNIFICADOS DE LA PROBABILIDAD PRESENTES EN LIBROS DE TEXTO DE PRIMER AÑO DE SECUNDARIA EN MÉXICO

MEANINGS OF PROBABILITY INCLUDED IN SECONDARY SCHOOL FIRST-YEAR TEXTBOOKS IN MEXICO

Jose Miguel Leon Banguero, José Iván López Flores, Carolina Carrillo García
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
josemigleon@gmail.com, ivan.lopez.flores@gmail.com, cgcarolin@hotmail.com

Resumen
En este artículo se reportan los resultados de una investigación documental acerca del significado promovido en el primer acercamiento a la probabilidad en la escuela secundaria mexicana. Se realiza un análisis de contenido de los dos libros de texto de primer año de secundaria más usados a nivel nacional y se encontró que en ambos casos se promueve primeramente un significado intuitivo a través de la construcción de ideas sobre "más o menos probable" o "imposible" y casi a la par se desarrolla un significado frecuencial usando experimentos aleatorios diversos en los cuales se usa la idea de frecuencia relativa.

Palabras clave: significados, probabilidad, secundaria, libros de text

Abstract
This article reports on the results of a documentary investigation about the meaning promoted in the first approach to probability in the Mexican secondary school. A content analysis was carried out on the two most used first- year secondary school textbooks in Mexico. It was found that in both cases an intuitive meaning is promoted through the construction of ideas about "more or less probable" or "impossible" and almost at the same time, a frequency meaning is developed by using diverse random experiments in which the idea of relative frequency is used.

Key words: meanings, probability, secondary school, textbooks

Introducción

La probabilidad está presente en muchos eventos del mundo en el que vivimos. Everitt (1999, p. xi) afirma que "el azar gobierna nuestras vidas", desde los genes que heredamos, pasando por las inversiones que decidimos hacer, todo está impregnado por el azar. Asimismo, Bennett (1998) señala que "Todos hemos sido tocados de algún modo por las leyes del azar" (p. 1), desde las probabilidades de ganar la lotería, al lanzar una moneda, al sopesar los riesgos de una operación de rodilla y así en un sinnúmero de situaciones de la vida en las que nos vemos involucrados en eventos que involucran el azar.

En este tenor, diversas investigaciones señalan la importancia de la probabilidad como parte de un conocimiento para ejercer una ciudadanía plena y responsable (Batanero, 2005; Gómez, Ortiz y Gea, 2014). Gal (2005), por ejemplo, indica que: "People need "probability literacy" to cope with a wide range of real-world situations that involve interpretation or generation of probabilistic messages as well as decision-making" (p. 45).

De este hecho se deriva su importancia como materia escolar, ya que aprender probabilidad contribuye a desarrollar el pensamiento crítico, aplicable a un amplio rango de situaciones de la vida real y profesional, proveyendo de modelos para situaciones en donde el azar está presente. Al respecto, Alsina y Vásquez (2017) señalan que la tendencia educativa actual es la incorporación progresiva de la probabilidad en los currícula de diversos países (EEUU, España y Chile) y un adelanto en su enseñanza, situándose en los primeros niveles escolares. Autores como Fischbein (1975) señalan que los niños entre 7 y 9 años pueden ya diferenciar entre un evento aleatorio y uno determinista; es decir, que es posible desarrollar las bases de un pensamiento probabilístico. En el caso de México, una revisión a los programas y libros de texto del nivel primaria de la Reforma de 2009-2011, cuyos libros son los que ahora se usan en las aulas, nos permite observar que si bien existen algunas situaciones que involucren el azar, éstas no son usadas para desarrollar en los estudiantes las ideas propias de la probabilidad en el sentido que se señala en López, Ojeda y Salcedo (2018) y que las primeras interacciones reales con estos contenidos se dan hasta el primer grado de la escuela secundaria (12 años).

La importancia del libro de texto en la educación ha sido reportada en la literatura especializada. Según Dolev & Even (2015), la investigación en varios países sugiere que los materiales curriculares, y especialmente los libros de texto, influyen considerablemente en la instrucción en el aula de matemáticas. Stylianides (2009) afirma que "mathematics textbooks have significant influence on students' opportunities to learn mathematics in many classrooms" (p. 259).

En las últimas décadas se ha incrementado el interés de la comunidad internacional en investigar sobre libros de texto de matemáticas. Por señalar algunos ejemplos, en el *10th International Congress on Mathematics Education* (ICME10) realizado en Dinamarca hubo un grupo de discusión sobre los libros de texto denominado "*Focus on the development and research of mathematics textbooks*". En el 2011 en el 5° APEC-Tsukuba International Conference el tema fue "*Focusing on Mathematics Textbooks, e-Textbooks and Educational Tools*". En el ICME13 realizado en Alemania en 2016 el grupo de discusión sobre el tema se nombró "*Research on Resources (Textbooks, Learning Materials, etc.)*". Estos congresos muestran el interés actual y relevancia del tema en cuestión.

Asimismo, encontramos que hay diversas investigaciones respecto al análisis de libros de texto en relación con la probabilidad en particular.

Ortiz (2002) analizó los significados de la probabilidad en una muestra de libros de secundaria españoles para el período de 1975 a 1991. Encontró que había una preferencia por el significado clásico y frecuencial por sobre el subjetivo, además de que pocos libros contemplaban todos los aspectos subyacentes a la noción de aleatoriedad. Al respecto, Batanero (2005) señala que la probabilidad tiene múltiples significados y se torna importante entender la forma en que los libros de texto los introducen.

Carranza y Kuzniack (2009) realizan un estudio comparativo de dos libros de texto franceses para 11° grado (16 años), teniendo como foco las actividades propuestas. Encuentran que en la enseñanza francesa se le da prioridad al enfoque frecuentista de la probabilidad sobre el bayesiano, no permitiendo tener una interpretación integral de ambos enfoques.

Por otra parte, Han, Rosli, Capraro y Capraro (2011) señalan la importancia de que los libros de texto reflejen situaciones de aplicación real, ya que los estudiantes pueden emplear conceptos de probabilidad cuando resuelven problemas del mundo real. Los libros de texto que analizan muestran que tenían más problemas de rutina, de cierre, de conocimiento y no contextuales.

Díaz-Levicoy y Roa (2014), a través de un análisis de contenido de tres libros de texto para el octavo año de la educación chilena para el tema de probabilidad, encuentran que hay una diferencia en la estructura de los libros de texto; que existe también un predominio de los ejercicios por sobre los problemas y que la mayoría de éstos son de naturaleza rutinaria y de contexto realista.

Gómez, Ortiz y Gea (2014) analizaron la presentación de conceptos y propiedades asociados a la probabilidad en un par de libros de texto españoles que se usan en la educación primaria y encontraron que están presentes los cuatro significados asociados a la probabilidad y las propiedades fundamentales asociadas a estos significados, el primer significado desarrollado de la probabilidad es el intuitivo.

A partir de una reflexión respecto a los estudios presentados, vemos que en su mayoría se enfocan a los diferentes enfoques y significados asociados a la probabilidad. Una pregunta que surge en relación al contexto mexicano, dada la tardía introducción sobre la naturaleza de ese primer acercamiento es:
¿Cuáles son los significados de la probabilidad presentes en los libros de texto de primer año de secundaria en México?

Fundamento teórico

A lo largo de la historia son distintos los significados que se le han atribuido a la probabilidad, dichos significados se presumen importantes para considerar en la enseñanza de este concepto (Batanero, 2005).

A continuación describimos, desde la propuesta de Batanero (2005), los cuatro significados que más se le atribuyen a la probabilidad en secundaria y que se usan como referente teórico en esta investigación:

1. *Significado Intuitivo*: a través de la historia hemos podido reconocer los intentos por comprender los juegos de azar que dieron pie al surgimiento de la probabilidad en el siglo XVII. A partir de este tipo de juegos emergen ideas intuitivas con base en la experiencia de los apostadores y que están ligadas a conceptos como esperanza matemática, variabilidad, azar, justicia, entre otros. Dicho así, consideramos que el significado intuitivo está asociado con las percepciones de los individuos a través de las experiencias con sucesos aleatorios. A continuación, se describen los conceptos y propiedades asociadas al significado intuitivo de la probabilidad, los cuales harán las veces de guía para realizar el análisis de los textos:

    a) *Conceptos*: azar y variabilidad; sucesos (seguro, posible e imposible); posibilidad (grado de creencia).
    b) *Propiedades*: impredecibilidad del resultado, posible, imposible, seguro, calificable comparando, aproximación por medio de análisis de fenómenos, aproximación de probabilidad con experiencias previas.

2. *Significado Clásico*: La correspondencia entre Pascal y Fermat en el siglo XVII, en la cual se aborda y discuten sobre la solución del problema del reparto, culmina en la definición de probabilidad clásica. Ésta es definida por Laplace en el año 1816 como el cociente entre el número de casos posibles de un evento aleatorio y el número de casos totales del suceso. Cabe mencionar que a pesar de que éste es uno de los significados a los que más se hace alusión en la escuela, fue considerado inadecuado incluso en la época de Laplace, dado que esta definición sólo proporcionó un método de solución para sucesos sencillos, dejando de lado experimentos con un número infinito de posibilidades o casos donde el número de ensayos es indeterminado. A continuación, se describen los conceptos y propiedades asociadas al significado clásico de la probabilidad:

    a) *Conceptos*: juego de azar, casos favorables, juego equitativo y valor estimado de probabilidad.
    b) *Propiedades*: número de resultados finito y numerable, equiprobabilidad de sucesos elementales, casos favorables, posibles, probabilidad como valor objetivo, regla de Laplace y posibilidad cuantificable.

3. *Significado Frecuencial*: Fue caracterizado por Bernoulli a finales del siglo XV y principios del siglo XVI y se entiende como la posibilidad de asignar probabilidades a sucesos aleatorios que ocurren en diversos campos como medicina, ingeniería, física, etc. Este tipo de consideraciones permitió a Bernoulli en 1713 hacer la demostración de la Ley de los grandes números, la cual toma el significado frecuencial de la probabilidad y se define como el número hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse, en un gran número de ensayos repetidos en las mismas condiciones. A continuación, se describen los conceptos y propiedades asociadas a este significado de la probabilidad:

    a) *Conceptos*: población, ensayo, frecuencia absoluta y relativa y valor estimado de la probabilidad.
    b) *Propiedades*: colectivo, atributos equiprobables o no, probabilidad como un valor objetivo hipotético, estabilización, fiabilidad al aumentar N ensayos y variación en cada serie de N ensayos.

4. *Significado Subjetivo*: Luego de la publicación del Teorema o Regla de Bayes, se adopta un nuevo punto de vista en el cual se transforman las probabilidades a priori de diversos sucesos aleatorios, una vez se han observado sus consecuencias, en probabilidades a posteriori, las cuales toman en consideración la información de los datos analizados. A continuación, se describen los conceptos y propiedades asociadas al significado subjetivo de la probabilidad:

    a) *Conceptos*: suceso incierto y la probabilidad como grado de creencia personal.
    b) *Propiedades*: condicionamiento por un sistema de conocimientos, uso de información adicional y probabilidad a priori.

Metodología

En México, los libros para educación básica son gratuitos y cada profesor tiene la posibilidad de elegir de modo personal el libro a utilizar para cada uno de los grupos a su cargo. Esto se realiza de entre las más de 20 editoriales posibles y a través del portal de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (CONALITEG): http:/libros.conaliteg.gob.mx. Posteriormente, la Secretaría de Educación Pública (SEP) envía a cada escuela los ejemplares correspondientes a la totalidad de los niños de cada aula.

Para la selección de la muestra de libros a analizar se consultó la página web oficial del Gobierno de México https://datos.gob.mx/. Esto permitió saber cuáles fueron los libros de primer año de mayor distribución en el periodo escolar 2017-2018. De ahí se obtuvo que los libros “Matemáticas 1. Conecta Estrategias” de la Editorial SM y

"Matemáticas 1: Por Competencias" de la Editorial Pearson, fueron los más usados en ese período. Los porcentajes de uso de los libros se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Porcentaje de uso de los libros de texto de matemáticas para primer año.

Editorial	Nombre	Número de lectores	Población
SM	Matemáticas 1 Conecta Estrategias	288,736	23%
Pearson	Matemáticas 1: Por Competencias	111,827	9%

El método usado para analizar los libros fue el Análisis de Contenido (Krippendorff, 1990; Cobo, 2003) y las unidades de análisis fueron las secciones en los libros de texto que incluían contenidos de probabilidad. Para llevar a cabo el análisis de los textos se efectuaron los siguientes pasos:

1. Identificación de las páginas o tareas en donde se incluyen los temas de probabilidad. Se procedió a la división del texto en párrafos independientes, esto dada la posibilidad de que en una sección se presente más de un significado o propiedad.

2. Reconocimiento de las variables de análisis, los significados y cada uno de ellos con sus respectivos conceptos y propiedades relacionados.

3. Establecimiento de la presencia de cada una de las variables en los libros, mediante la comparación del contenido de los párrafos.

4. Elección de ejemplos que permitan la identificación de la presencia de los conceptos y propiedades en los libros.

El instrumento para la recogida de datos fueron las tablas de categorización de conceptos y propiedades propuesta por Gómez, Ortiz y Gea (2014). En dichas tablas se consideran como ejes para la delimitación de los conceptos y propiedades, los distintos significados de probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial y subjetivo (Batanero, 2005).

Posteriormente, se realizó una comparación del contenido de estos textos con respecto a las tablas, para establecer la presencia o ausencia de cada una de estas subcategorías. Asimismo, para soportar dicha comparación se procede a la selección, en los libros de texto, de ejemplos que ilustren las diferentes categorías.

Resultados

Como resultado de esta investigación reconocemos, a partir de la tabla de categorización propuesta por Gómez, Ortiz y Gea (2014), que en ambos libros de texto analizados, *Matemáticas 1. Conecta Estrategias* y *Matemáticas 1: Por Competencias*, existe un predominio del significado intuitivo y frecuencial en la mayoría de sus actividades. Este resultado se presenta con mayor detalle en la Tabla 2.

Tabla 2. Conceptos asociados a la probabilidad en los libros de texto.

Significado	Conceptos asociados	Editorial SM	Editorial Pearson
Intuitivo	Azar y variabilidad	X	X
	Suceso; suceso seguro, suceso posible, suceso imposible	X	X
	Posibilidad, grado de creencia	X	X
Clásico	Juego de azar		
	Casos favorables; casos posibles	X	
	Juego equitativo		X
	Valor estimado Probabilidad	X	X
Frecuencial	Colectivo (población)	X	X
	Ensayo; ensayos repetidos	X	X
	Frecuencia absoluta; frecuencia relativa	X	X
	Valor estimado de la probabilidad	X	X
Subjetivo	Suceso incierto		
	Probabilidad como grado de creencia personal		

Fuente: Elaboración Propia

Específicamente, con respecto a los conceptos básicos asociados a cada uno de los significados propuestos por Gómez, Ortiz y Gea (2014), se resalta que en ambos libros de texto se abordan en su totalidad los conceptos asociados al significado intuitivo y frecuencial. La afirmación anterior puede evidenciarse en los resultados consignados en la Tabla 2.

Tabla 3. Propiedades de la probabilidad en los libros de texto.

X	Propiedades	Editorial SM	Editorial Pearson
Intuitivo	Impredecibilidad del resultado		
	Posible: cualquier resultado	X	X
	Imposible: nunca se verifica	X	

	Seguro: siempre ocurre	X	
	Calificable comparando	X	X
	La probabilidad se puede aproximar por análisis del fenómeno	X	X
	La probabilidad se puede aproximar con experiencias anteriores	X	
Clásico	Número de resultados finito y numerable	X	X
	Equiprobabilidad de sucesos elementales	X	X
	Casos favorables		
	Posibles	X	
	La probabilidad es un valor objetivo, calculable		
	Regla de Laplace		
	La posibilidad es cuantificable		
Frecuencial	Colectivo	X	X
	Atributos equiprobables o no	X	X
	La probabilidad es un valor objetivo hipotético, estimable		
	Tiende a estabilizarse	X	X
	Fiabilidad al aumentar N ensayos		X
	Varía en cada serie de N ensayos		
Subjetivo	Condicionamiento por un sistema de conocimientos		
	Uso de información adicional		
	Probabilidad a priori		

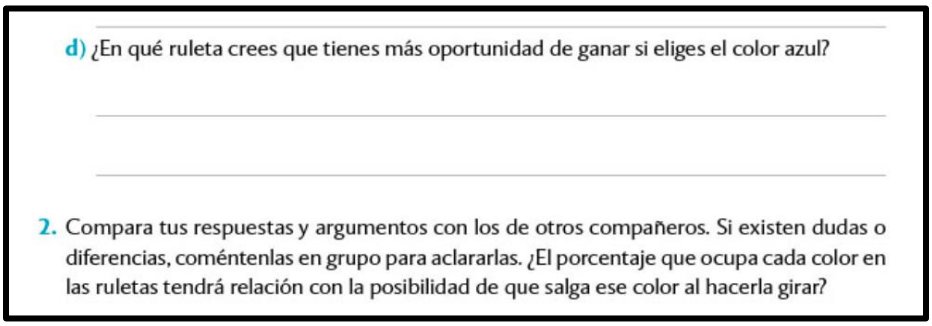
Fuente: Elaboración Propia

En relación con las propiedades asociadas a los significados de la probabilidad, se reconoce que se abordan la totalidad de las relacionadas con los significados intuitivo y frecuencial. Esto puede verse evidenciado en los resultados de los análisis consignados en la Tabla 3. Sin embargo, a pesar de abordarse la mayoría de las propiedades

del significado frecuencial, no se define la probabilidad como un valor hipotético a partir de un número determinado de ensayos. De igual manera, se abordan de manera somera en los libros de texto tres propiedades asociadas al significado clásico, entre las cuales se destacan la equiprobabilidad de los eventos aleatorios y espacio muestral. En general, podemos afirmar que en el libro de la Editorial SM se abordan más propiedades de los significados que en el libro de la Editorial Pearson, y que, en el caso de los conceptos asociados, ambos libros tienen prácticamente los mismos. Lo cual marca una diferencia al menos, en aparición de conceptos asociados que un profesor podría tomar en cuenta al elegir un libro.

De manera general, con base en el análisis realizado, observamos que los conceptos relativos al *significado intuitivo* de la probabilidad, los conceptos de azar y variabilidad, suceso seguro, posible e imposible, posibilidad, grado de creencia, estuvieron presentes en ambos libros. Asimismo, las propiedades relativas a este significado se abordaron casi en su totalidad, entre las cuales encontramos tipos de sucesos, estimación de probabilidad desde el análisis de fenómenos y experiencias previas, sin embargo, no se aborda la propiedad de la imprevisibilidad del resultado.

Un ejemplo de la presencia del significado intuitivo se presenta en la Figura 1, en la cual se puede evidenciar que en el libro Matemáticas 1 de la Editorial SM se promueve intuitivamente el concepto de probabilidad como grado de creencia para situaciones aleatorias. Si bien no se define explícitamente, se utilizan preguntas para guiar a los estudiantes con respecto a este concepto. En ambos libros se utiliza este tipo de preguntas para impulsar a los estudiantes a que realicen afirmaciones sobre lo que podría suceder en un juego de azar.

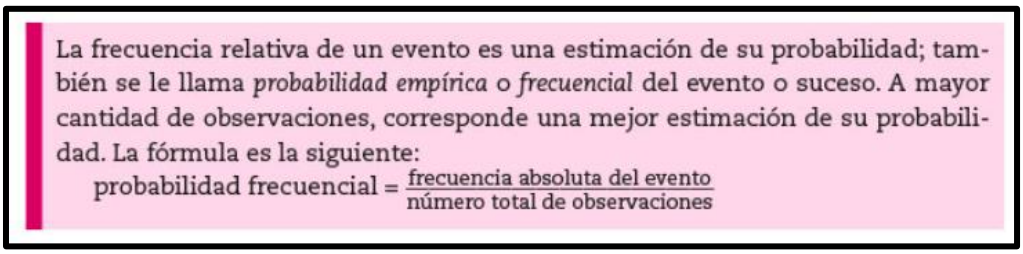

d) ¿En qué ruleta crees que tienes más oportunidad de ganar si eliges el color azul?

2. Compara tus respuestas y argumentos con los de otros compañeros. Si existen dudas o diferencias, coméntenlas en grupo para aclararlas. ¿El porcentaje que ocupa cada color en las ruletas tendrá relación con la posibilidad de que salga ese color al hacerla girar?

Figura 1. Ejemplo de significado intuitivo presente

En el caso del *significado frecuencial*, los conceptos de población, ensayo, frecuencia absoluta y relativa, y valor estimado de la probabilidad, estuvieron presentes en ambos libros; es decir, que en el caso de ambos significados (intuitivo y frecuencial), estuvieron presentes la totalidad de los conceptos. De igual forma, las propiedades de colectivo, equiprobabilidad, estabilidad del azar en una muestra mayor de ensayos estuvieron presentes en ambos libros. Sin embargo, no se abordaron propiedades como la probabilidad como un valor hipotético y la variabilidad de la serie en N ensayos.

Un ejemplo de actividades que promueven el *significado frecuencial* se presenta en la Figura 2, en la cual se identifica que en el libro de texto se da una definición de la probabilidad frecuencial y se proporciona su fórmula. De igual modo, ambos libros de texto proporcionan diversas actividades que impulsan al estudiante a realizar ensayos repetidos de un mismo experimento aleatorio y registrar los sucesos en tablas o diagramas. Consideramos que este tipo de actividades fomentan la aplicación, interpretación y conjetura en situaciones aleatorias a través del uso del significado frecuencial.

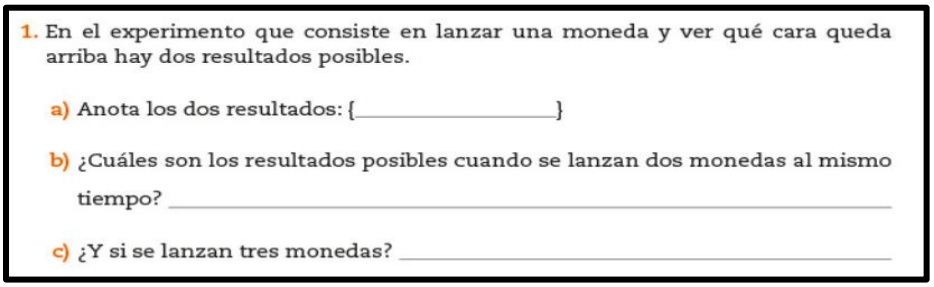

La frecuencia relativa de un evento es una estimación de su probabilidad; también se le llama *probabilidad empírica* o *frecuencial* del evento o suceso. A mayor cantidad de observaciones, corresponde una mejor estimación de su probabilidad. La fórmula es la siguiente:

$$\text{probabilidad frecuencial} = \frac{\text{frecuencia absoluta del evento}}{\text{número total de observaciones}}$$

Figura 2. Presencia del significado frecuencial

En el caso del *significado clásico,* en ambos libros estuvieron presentes los conceptos de juego de azar y casos favorables/posibles, faltando el valor estimado de la probabilidad y el concepto de juego equitativo. Sin embargo, es importante hacer la aclaración de que en ambos libros de texto este significado se aborda de forma superficial.

Un ejemplo del significado clásico se muestra en la Figura 3. En ésta se reconoce una aplicación del concepto de casos favorables/posibles del *significado clásico* asociado a una situación de juego de dados. Es importante resaltar que no se menciona explícitamente el significado clásico en el libro de texto. Sin embargo, a partir de la utilización de tablas y diagramas de árbol se aborda de manera superficial.


1. En el experimento que consiste en lanzar una moneda y ver qué cara queda arriba hay dos resultados posibles.

a) Anota los dos resultados: {_____}

b) ¿Cuáles son los resultados posibles cuando se lanzan dos monedas al mismo tiempo? _____

c) ¿Y si se lanzan tres monedas? _____

Figura 3. Significado clásico presente en una situación de juegos de azar

En general, los resultados del análisis de estos textos permiten mostrar que los significados que más se utilizan son el intuitivo y el frecuencial, dado que se abordan la mayoría de los conceptos y propiedades asociados a cada uno. Con respecto al significado clásico, podemos afirmar que se aborda parcialmente, dado que el análisis de texto solamente reconoce algunas de sus propiedades y conceptos. Con relación al significado subjetivo de la probabilidad, podemos afirmar que no estuvo presente en esta primera aproximación a la probabilidad en los libros de texto de primer año de secundaria.

Conclusiones

El primer acercamiento a la probabilidad en las escuelas mexicanas se da a través de 3 lecciones. En el primer año de la escuela secundaria los significados potenciados son primeramente una aproximación intuitiva, a través de actividades en las cuales el estudiante tiene que construir las nociones de más o menos probable, evento imposible, y casi a la par se desarrolla un significado frecuencial usando experimentos aleatorios diversos en los cuales se usa la idea de frecuencia relativa. El significado clásico no está explícito el cálculo de la probabilidad, pero sí se encuentran presentes indicios de ella a través de la noción de espacio muestral.

Hay que señalar que el orden de aparición identificado está en concordancia con los libros españoles (Gómez, Ortiz, Gea, 2014), ya que la primera aproximación es a través del significado intuitivo de la probabilidad, y si bien Batanero (2005) no da mayor importancia a algún significado en particular, sí afirma que es necesaria la presencia de todos para tener una comprensión completa de los temas relativos a la probabilidad. Un trabajo posterior en torno al desarrollo de los temas de probabilidad en segundo y tercer grado de secundaria permitiría comprobar si en los libros de texto correspondientes aparecen los conceptos y propiedades faltantes del significado clásico y del subjetivo.

Este análisis pone de manifiesto la necesidad de una reflexión profunda por parte del profesor al momento de elegir un libro de texto ya que, como se pudo ver, el que estén propuestos por la institución oficial no significa que éstos sean equivalentes o aborden los mismos significados. Los libros de texto oficiales deben cumplir cuando menos con los temas planteados en el plan de estudios. Las diferencias identificadas en nuestro análisis suponemos que obedecen a la perspectiva particular de los autores o de las editoriales, por lo tanto, una comparación detallada de los libros de texto con el plan de estudios podría ser un área de oportunidad.

Las nociones matemáticas relacionadas con el azar no aparecen en el currículo mexicano de primaria en el plan derivado de la Reforma 2009-2011; cabe señalar que actualmente se está implementando de manera gradual el plan de 2017, y en él se abordan de un modo explícito experimentos aleatorios en el último año de la escuela primaria.

Referencias bibliográficas

Alsina, A., & Vásquez, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema: Mathematics Education Bulletin, 31*(57), 454-478.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 8*(3), 247-263.

Bennett, D. (1998). *Randomness*. Cambrige: Harvard University Press.

Carranza, P., & Kuzniak, A. (2009). Enfoque bayesiano "oculto" y enfoque frecuentista "ambiguo" en los manuales franceses de Première S y ES. En P. Orús, L. Zamora, & P. Gregori (Eds.). *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. (pp. 447-460). Universitat Jaume I de Castellón, España.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, España.

Díaz-Levicoy, D., & Roa, R. (2014). Análisis de actividades sobre probabilidad en libros de texto para un curso de básica chilena. *Revista Chilena de Educación Científica, 13*(1), 9-19.

Dolev, S., & Even, R. (2015). Justifications and explanations in Israeli 7th grade math textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(2), 309-327.

Evveritt, B. (1999). *Chance Rules: an informal guide to probability, risk, and statistics. 2a. ed*. New York: Copernicus Springer-Verlag.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children. 1a ed.* Dordrecht: Reidel.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. (pp. 39-63).Nueva York: Springer Science + Business Media,

Gómez, E., Ortiz, J., & Gea, M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 49-71.

Han, S. Y., Rosli, R., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2011). The textbook analysis on probability: The case of Korea, Malaysia and US textbooks. *Research in Mathematical Education, 15*(2), 127-140.

Krippendorff, K. (1990) *Metodología del análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona: Paidós.

López, J., Ojeda, A., & Salcedo, J. (2018). Ideas fundamentales de estocásticos en libros de texto de educación primaria: una alternativa de enseñanza. *IE Revista De Investigación Educativa De La REDIECH, 9*(17), 87-102.

Ortiz, J. J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*. En C. Batanero y L. Serrano (Eds.). Grupo de Educación Estadística Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning*, *11*(4), 258-288.

ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ANÁLISIS A TRAVÉS DE LAS VARIEDADES DIDÁCTICAS DE LA FUNCIÓN LINEAL

STUDENTS' STRATEGIES IN PROBLEM SOLVING: AN ANALYSIS THROUGH THE DIDACTIC VARIETIES OF LINEAR FUNCTION

Pamela Valencia Quezada, Álvaro Poblete Letelier
Universidad de Los Lagos (Chile)
pameval@live.cl, apoblete@ulagos.cl

Resumen
El presente trabajo desarrolla un análisis a través de las Variedades Didácticas Matemáticas de las estrategias que utilizan los alumnos cuando resuelven problemas contextualizados sobre función lineal. Las variedades didácticas corresponden a las aproximaciones que reporta la historia de un objeto matemático definido, además se consideran los contextos y los registros de representación para definir cada problema. Al aplicar los problemas y analizarlos, se caracteriza la estrategia que utiliza el resolutor. Esta estrategia se define como los procesos y acciones que realizan los alumnos cuando resuelven un problema, siendo los procesos internos y las acciones observables a través de las producciones de los alumnos. El análisis de estas producciones categorizó dos tipos de estrategias, para problemas puramente matemáticos, y los de contexto real, además de caracterizar las estrategias con y sin la intervención del profesor (en este trabajo solo se analizará un problema de contexto real).

Palabras clave: variedades didácticas, estrategias, procesos y acciones

Abstract
This work makes an analysis of students' strategies when solving contextualized problems on linear functions, by using Mathematics Didactic Varieties. The didactic varieties correspond to the approaches reported by history, of a defined mathematical object. Besides, the contexts and representation registers to define each problem are considered. When applying and analyzing the problems, it is possible to characterize the strategy used by the one who solves the problem. This strategy is defined as the processes and actions that students carry out when they solve a problem, being the internal processes and actions observable through students' productions. The analysis of these productions characterized two types of strategies: the ones for purely mathematics problems and those of the real context. Besides, it compares the strategies with and without teachers' intervention. In this work, only a problem of the real context will be analyzed.

Key words: didactic varieties, strategies, processes and actions

Introducción y antecedentes

La investigación en resolución de problemas, es una temática existente desde la creación de la matemática escolar, sin embargo es Pólya (1945) quién propone por primera vez un "método" para resolver un problema, el que consiste en cuatro pasos, pero no propuso una definición de situación problema hasta la publicación de su libro "Mathematical Discovery" en 1981. Más tarde Schoenfeld (1985) postuló que se necesitaba algo más para convertirse en un buen resolutor de problemas, así en su libro "Mathematical Problem Solving" (Schoenfeld, 1985), sostiene que, además de lo cognitivo existen otras características necesarias para la resolución de un problema, agrega las creencias, y las define como la actitud, lo afectivo y lo socio-cultural, lo que él llamo lo metacognitivo, y según este autor influyen directamente en el actuar del resolutor.

Sin embargo el tiempo ha ido transcurriendo y otros autores como Beyer (2000), Ronh, Mayer citados en la investigación sobre los avances en resolución de problemas desde los años 1980 (Pérez & Ramírez, 2011), siguen buscando una definición para situación problema, y han señalado que consiste en: un desafío para el estudiante, que dedique tiempo, cree estrategias de resolución, entre muchos otros.

En esta investigación se utilizará la palabra "Problema" como: Planteamiento de una situación cuya respuesta implique un desafío para el estudiante, y que sea necesario crear una estrategia para obtener una o varias soluciones. Esta definición se obtiene luego de una revisión teórica que se evidencia en el marco teórico.

Al referirse al concepto de función (en este trabajo se abordará específicamente la función lineal), además de considerar su historia y epistemología, hay que estudiar sus representaciones y los conflictos que éstas producen en el estudiante, no sólo de secundaria. Al parecer, la articulación de las representaciones es un problema que comienza a ser reportado desde la representación misma de los sujetos que interactúan con la representación (Duval, 2004a). Sin embargo, la dificultad en la enseñanza y en el aprendizaje de las distintas representaciones, considerando además los tratamientos que se pueden realizar en ellas, implica otra complejidad para que un educador considere estas cuestiones cuando planifica una clase.

La evolución histórica es necesaria, pues el marco teórico que se utilizó en esta investigación, corresponde a lo referido a las Variedades Didácticas Matemáticas, que utilizan dominios de conocimientos, limitados por los marcos de referencia históricos en la construcción de las situaciones problemas que debieron resolver los alumnos sobre función lineal. Además de la historia del conocimiento matemático utilizado, se necesita definir las representaciones del concepto. Con respecto a las representaciones, Janvier en 1987 (Font, 2011) considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases: 1) Expresión Verbal, 2) Expresión simbólica, 3) Tabla de Valores y 4) Gráfica.

Los cambios de representación facilitan o dificultan la tarea en el estudiante, por lo tanto, se considera que las conversiones y tratamientos entre ellas son fundamentales para su enseñanza y aprendizaje (Duval, 2004a).

Luis Rico (2009), hace un análisis de la noción de "representación", mostrando la dualidad de este concepto, y como se ha usado en la educación matemática, en este trabajo de investigación, se utilizará desde el punto de vista de Duval (2004b), como representación dentro de un sistema semiótico, y cada una de ellas como registro de representación semiótica. También se define tratamiento y conversión dentro de un registro de representación semiótica y entre registros como:

> Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión es, al contrario, una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa. (Duval, 2004, p. 31-32)

Al existir cuatro registros para las funciones, esto también supone una serie de conflictos cognitivos (Font, 2011) reportados en la literatura, que describen problemas con la conversión (Duval, 2006) y con el tratamiento. Considerando los problemas de conversión, las investigaciones consultadas muestran dos tipos: las de conversiones múltiples, y las que se abordan desde un registro específico hacia otro, aunque como lo muestra la literatura, por lo general se utiliza más de un registro. Sin embargo, y a modo de previa conclusión, el más utilizado es el algebraico, y es precisamente porque se enseña privilegiándolo.

A modo de sumario, algunas de las investigaciones que involucran registros múltiples son Lesh, Post, & Behr (1987); Bal (2015); Valencia, Ojeda, Jiménez, & Cisternas (2016), mientras que literatura referida a la conversión de un registro a otro corresponden a: Guzmán (1998); Duval (2006); Flores, Chi Chablé, Canul Pech, Cantú Interián, & Pastor Solache (2009); Rojas (2012); Morales Martínez (2013); Bal (2015); Rahmawati, Purwanto, Subanji, Hidayanto, & Anwar (2017). Todas las investigaciones mencionadas, abordan cómo los estudiantes convierten desde un registro a otro y las dificultades para reconocer el objeto matemático, desde algunas de ellas. Independiente de la edad del alumno, las dificultades persisten, primero en el tema de funciones y luego se traspasa hacia el estudio de los límites (Font, 2011), también existen dificultades en el tratamiento dentro de un mismo registro (Duval, 2006; Valencia, Ojeda, Jiménez, & Cisternas, 2016).

Sobre los contextos, investigaciones de los ultimos años, han empezado a cuestionarlos. Primero se plantea que la matemática debe contextualizarse para ser aprendida, pero el problema ahora es el exceso de contextualización, o contextualizar por contextualizar, sin embargo hay que definir entonces que es un contexto. Es así que para Poblete, Guzmán y Méndez (1996) el contexto "tiene relación con el ámbito que da contenido a la situación problema planteado", para Ramos y Font (2006) los contextos pueden ser intra y extramatematicos, estos autores realizan un barrido por la literatura acerca de los "contextos", y finalmente, desde una aproximación ontosemiótica existen dos usos, el primero lo utiliza como un ejemplo particular de un objeto matemático y el otro lo enmarca en el entorno. Por otra parte, Beswick (2011), señala que, es importante considerar que no solo porque una tarea matemática sea contextualizada, el alumno la resolverá sin ningún problema.

En esta investigación se utilizará el contexto desde el punto de vista de las Variedades Didácticas Matemáticas, es decir, con el ámbito que da contenido a la situación problema planteado.

Cuando un resolutor se enfrenta a un problema, necesariamente utilizará una "estrategia" para resolverlo, pero "estrategia" en Educación Matemática, tiene variados significados dependiendo del autor consultado. Para Pólya (1945) las estrategias o heurísticas estaban compuestas por cuatro pasos: comprender el problema, trazar un plan, ejecutarlo y finalmente revisar la coherencia del resultado con lo solicitado en el problema. Para Schoenfeld (Mathematical problem solving, 1985), las heurísticas de Pólya (1945) no fueron suficientes, y para este autor era necesario algo más, entonces él agrega los recursos, el control y los sistemas de creencias a las heurísticas, pero el problema persiste, qué son entonces las estrategias.

Por su parte, Poggioli (1999) caracteriza las distintas estrategias existentes en el ámbito de la resolución de un problema matemático como:

> Operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos en metas y obtener una solución. Además, las estrategias incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. (Poggioli,1999, p. 26)

Además, esta investigadora realiza un análisis por los diferentes autores que han propuesto diversas estrategias, según el campo de estudio en matemática, sin embargo, la pregunta persiste: ¿existirá una estrategia para conocer las acciones que realiza un resolutor cuando se enfrenta a un problema, y el porqué de sus decisiones? En todas las investigaciones consultadas (Arteaga Palomares & Guzmán Hernández, 2005, Poggioli, 1999, Pérez & Ramírez,

2011), se identifica lo que se puede observar en las acciones del resolutor, pero no aparecen las razones de tales decisiones. Algunos autores lo atribuyen a que el sujeto lo hace de forma inconsciente, o que ejecuta sin reflexionar sobre su actuar, y por lo tanto desconoce si la estrategia elegida lo llevará finalmente a resolver el problema.

Considerando todas las investigaciones mencionadas, ninguna responde a qué estrategia utiliza el resolutor cuando se enfrenta a un problema, y más aún, ninguna identifica, la relevancia del profesor, para que el resolutor responda a la pregunta del problema, por lo tanto, investigar cómo y por qué el estudiante utiliza ciertos argumentos matemáticos, e interconecta conocimientos, permitiría intervenir no sólo a nivel cognitivo, sino también a nivel del currículo en matemática, y se evidencia en las producciones de los estudiantes.

Marco teórico

El término Variedad Didáctica Matemática (VDM) se define como "una situación de aprendizaje asociada a la matemática, construida como variables didácticas las situaciones problema, los contextos y registros de expresión". Como indican los autores (Poblete, Guzmán, & Méndez, 1996), las variedades aproximan un modelo a través de la proposición de diferentes problemas.

Redefiniendo Variedad Didáctica Matemática, como la aproximación a un conocimiento matemático utilizando la historia y epistemología de los objetos matemáticos, para la propuesta de las situaciones problemas, que además utilizarán distintos contextos y registros de expresión, lo cual genera un banco de problemas a partir de cada variedad.

Las Variedades Didácticas Matemáticas a utilizar según el objeto matemático función, basadas en las Variedades encontradas en la tesis de Parra (2015) son: 1) La función como correspondencia, 2) La función como relación entre magnitudes, 3) La función como representación gráfica, 4) La función como expresión analítica, 5) La función como representación arbitraria y 6) La función a partir de la Teoría de Conjuntos.

Las variables didácticas para considerar son las situaciones problema, los registros de expresión y los contextos.

Los registros de expresión, desde una perspectiva semiótica, están constituidos por signos que se asocian para formar sistemas de signos más complejos de manera interna y externa, la primera según lazos de contextos y pertenencia de la misma red semántica, la segunda las reglas de combinación de signos en expresiones o situaciones.

Estos registros llevarán precisamente a la formación de una representación de un objeto matemático, los que pueden ser gráficos, algebraicos, simbólicos, de tabulaciones, lenguaje (verbal, escrito) (Poblete, Guzmán, & Méndez, 1996).

Los registros corresponderán a la función lineal: 1) Registro gráfico, 2) Registro Algebraico, 3) Registro de tabulaciones y 4) Registro de lenguaje natural.
En esta investigación los registros corresponderán a la función lineal y se complementarán con la Teoría de Representaciones de Duval.

Un sistema semiótico comporta reglas, más o menos explícitas que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también sentido.

Así, los sistemas semióticos, han de permitir que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. Primero, constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Segundo, transformar las representaciones de acuerdo

con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Tercero, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Duval (2004a) establece una clara diferencia entre las actividades de tratamiento y las de conversión. Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior del mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento, un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión, al contrario, es una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (Duval, 2004a).

La conversión de las representaciones y el cambio de registro deben respetar en el primero, el sentido y referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que ésta representa. Y en el segundo, esperar que haya reglas explicitadas para que se realice el cambio de registro.

"Los contextos tienen relación con un ámbito de contenido a la situación problema planteada. Estos hacen referencia al campo de conocimiento o de aplicación de la situación propuesta desde la perspectiva de la representación" (Poblete, Guzmán, & Méndez, 1996).
Contextualizar el conocimiento es más que llevarlo al aula, es plantear la situación problema que identifique al estudiante con ella, que pertenezca a su entorno, para que se pueda apropiar del conocimiento.

En el artículo de Poblete & Díaz (1998), se señalan los tipos de problemas y sus características, estos permiten una clasificación según su naturaleza, en rutinarios y no rutinarios, y los problemas rutinarios a su vez se clasificarán en contexto real, realista, fantasista y puramente matemático.

Cuando un estudiante resuelve un problema en matemáticas, utilizará todo el bagaje adquirido hasta ese momento en cuanto a métodos y técnicas para resolver el problema. Bruner citado en el artículo de Rizo y Campistrous (1999) considera que el término estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros.

Poggioli (1999), señala que las estrategias para resolver un problema se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución (p.26).

De las definiciones expuestas con anterioridad, en esta investigación se utilizará "estrategia" como los procesos y las acciones que realiza un resolutor para alcanzar un resultado final, siendo los procesos internos y las acciones externas.

Las acciones serán externas, pues se observa el quehacer del resolutor en lo que transcribe para resolver un problema. Estas pueden ser conversiones desde un registro a otro o tratamientos en el mismo registro, las que son medibles y cuantificables.

Por otra parte, los procesos son internos, son los pensamientos que anteceden a la acción y no es posible observarlos a menos que el resolutor los verbalice o los relate durante el proceso de resolución de un problema. Son estos procesos los que se deberán intervenir para que el resolutor alcance una meta, puesto que, si solo nos limitamos a observar las acciones, no alcanzaremos a identificar la estrategia utilizada por el resolutor.

Cada estrategia dependerá del problema en particular y del sujeto que lo resuelva, pero se derivarán estrategias generales y particulares. Las estrategias generales serán las que observarían en cualquier problema, pero las particulares dependerán del objeto matemático en el cual esté centrado el problema.

Metodología

El enfoque de la investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, con enfoque interpretativo, y estudio de casos múltiples, donde cada situación problema será un caso.

Los problemas fueron creados por la investigadora, y se realizó una aplicación piloto para evaluar la pertinencia de los problemas a estudiantes de Pedagogía en Matemática, de lo cual se deprendieron ocho problemas preliminares. Luego se realizó la primera aplicación a estudiantes de entre 16 y 17 años, para realizar un análisis preliminar de las estrategias obtenidas, sin intervención del profesor. Se aplican estos problemas a dos grupos de tres alumnos cada uno.

Análisis preliminar del problema del profesor

El profesor de matemática evalúa las pruebas con una exigencia del 50% comenzando desde el 1,0 al tener cero puntos, es decir, que para obtener un 4,0 se necesita obtener la mitad del puntaje. Si tres estudiantes rindieron una prueba de 54 puntos en total, y cada uno obtuvo 37, 48, 25 puntos respectivamente, ¿cuáles son sus notas? Modela la ecuación y la gráfica de dicha ecuación.

La variedad didáctica en este problema es la función como correspondencia, en este caso puntaje y nota, el orden de las variables no altera el resultado, pues existe una correspondencia lineal ya sea del puntaje a la nota, o viceversa. La estrategia encontrada se muestra en la Figura 1, donde se observa que los alumnos transitan por tres registros de representación, se deducen dos procesos y tres acciones que se desprenden de las producciones de los estudiantes. Este grupo de alumnos transitó por las representaciones, pero no alcanzó a dar respuesta al problema.

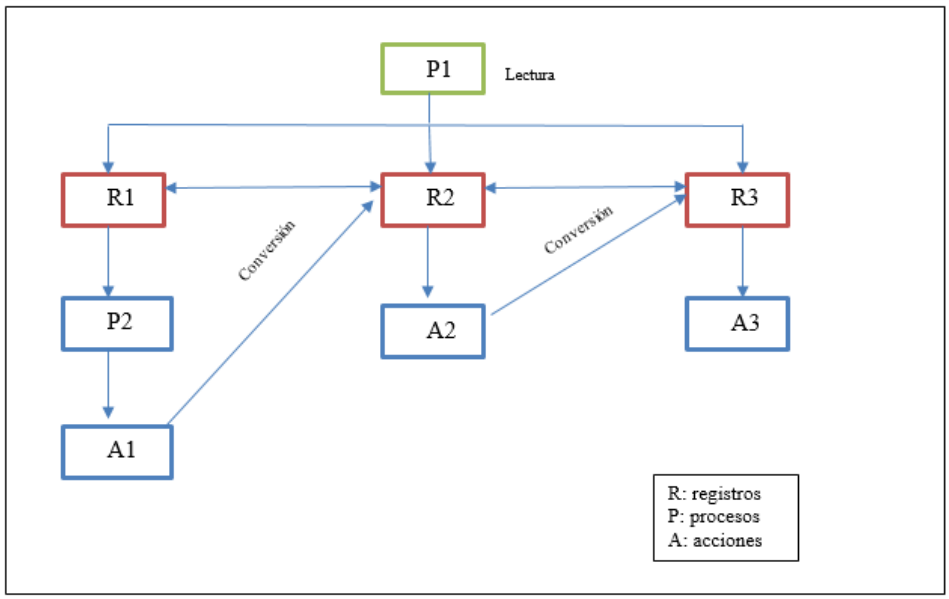


Figura 1. *Caracterización preliminar de la estrategia utilizada por los alumnos. Fuente: Elaboración propia.*

Proceso 1: Lectura del problema, los alumnos leen el problema, solo para constatar de qué trata el mismo.
Proceso 2: Relectura del mismo, que llevará a la primera acción observada.
Acción 1: Identifica y subraya los datos que le parecen relevante del problema, en este caso, los puntajes y las notas correspondientes a los mismos.
Acción 2: Primera conversión hacia otro registro, en este problema el registro de partida era verbal y el resolutor elige un "registro tabular", y genera pares ordenados, en este caso las tres duplas que encuentra en el problema ya sea de forma explícita o implícita en él, como se observa en la Figura 2.

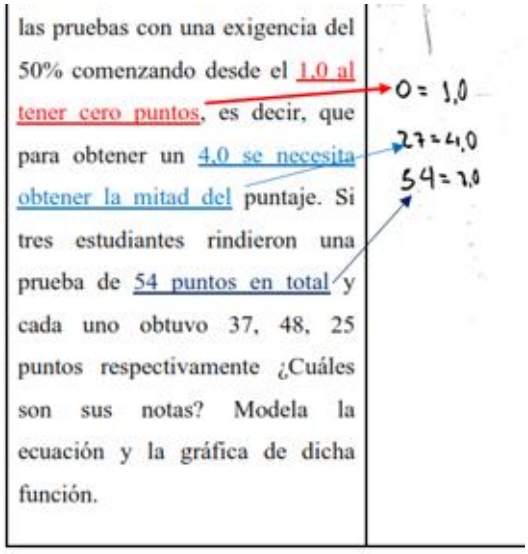


Figura 2. *Asocia los valores obtenidos de los datos del problema con una "tabla".*
Fuente: Producciones de los alumnos.

Acción 3: Segunda conversión a otro registro, en este caso a un registro gráfico, como se observa en la Figura 3, los alumnos trazan el primer cuadrante del plano cartesiano, considerando al eje de las abscisas como la nota y el eje de las ordenadas al puntaje.

Este grupo de alumnos consideró que la nota era la variable independiente y el puntaje la variable dependiente, la pregunta surge cuando los alumnos realizan una "tabla de valores", como se evidencia en la Figura con un orden distinto al que utilizan en la gráfica, donde asocian al puntaje la nota, por lo tanto, la variable independiente debió corresponder al puntaje y la dependiente a la nota.

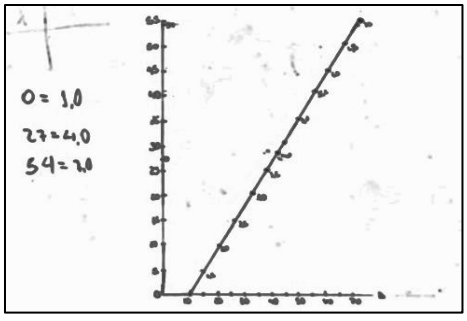


Figura 3: *Conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico.*
Fuente: Producciones de los alumnos.

Resultados de la investigación

Se analizará el problema del profesor que en esta segunda aplicación contó con la ayuda de la profesora.

Los dos cuadros verdes en el esquema, Figura 4, muestran que para que el alumno resuelva el problema, deberá volver a leerlo, y considerar la pertinencia de la solución encontrada, es en ese instante que se cierra el ciclo del problema. Los cuadros rojos, representan los registros utilizados por los alumnos, los cuadros azules, representan las acciones observadas en las producciones de los alumnos, los cuadros amarillos, los procesos donde interviene el profesor. Las flechas dobles, implican que el alumno puede decidir cómo transitar entre los diferentes registros, las flechas azules en un solo sentido, indican el recorrido que siguió el alumno, y las flechas amarillas, las intervenciones del profesor. Analizando los recuadros y flechas amarillas, se deduce que el estudiante no hubiera resuelto el problema sin la intervención del profesor.

Finalmente en el problema del profesor se encuentran siete procesos y siete acciones, incluida la respuesta verbal solicitada, como se observa en el esquema de análisis la intervención del profesor como mediador entre los conocimientos aislados del alumno y la utilización de los distintos registros es fundamental, pues como se verifica en la metodología con el análisis preliminar, los alumnos siempre quedaban detenidos entre las conversiones, sin encontrar el conocimiento engranaje para la siguiente conversión.

En la primera aplicación del problema del profesor de matemática, se dedujeron dos procesos y tres acciones, por lo tanto, se observa que la intervención de la profesora fue fundamental para dar respuesta al problema planteado.

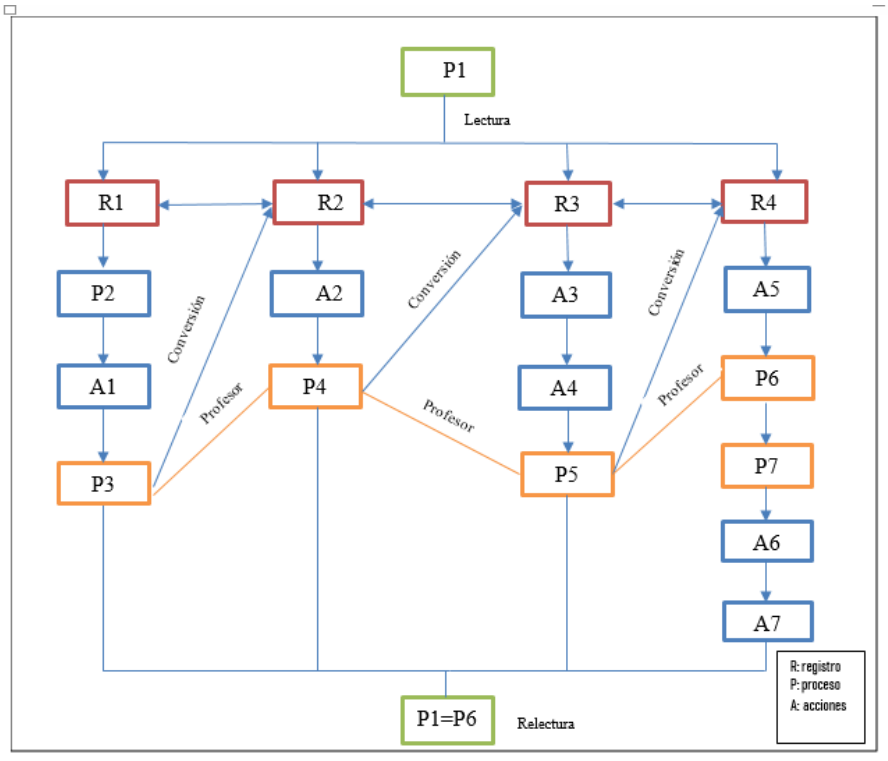


Figura 4: *Caracterización del problema del profesor, considerando sus registros de expresión, procesos y acciones.*
Fuente: Elaboración propia.

Este esquema muestra el recorrido que siguió el estudiante para resolver la situación problema planteada, desde la primera lectura en P1, y la segunda lectura en P2, luego una acción A1 en la representación R1, en este caso una representación verbal, luego interviene el profesor P3, para encontrar los pares ordenados, luego al realizar una tabla, se cambia de representación R2, este cambio de representación genera una nueva acción A2, luego para encontrar el modelo interviene el profesor P4, luego utiliza esos puntos para reemplazar en la fórmula de la ecuación de la recta A3, después realiza tratamientos para obtener el modelo requerido A4, posteriormente el profesor interviene para guiarlos al siguiente registro, el gráfico, en P5, luego los estudiantes realizan el gráfico A5, el profesor realiza preguntas con respecto al gráfico obtenido y su pertinencia en el problema P6, en P7 se realiza una nueva lectura del problema para revisar cuál era la pregunta que debían contestar, y los estudiantes reemplazan en su fórmula para encontrar las notas solicitadas A6, finalmente escriben la respuesta del problema en A7. P6=P7, se encuentran la primera lectura con la última lectura, lo que cierra la evaluación de los datos obtenidos para estimar la pertinencia de la solución encontrada.

Conclusiones e implicaciones del trabajo

En el título de esta tesis de magíster se pretendía indagar qué estrategias utiliza el estudiante cuando resuelve una situación problema desde alguna variedad didáctica, y si estas tienen relación o injerencia en la estrategia utilizada. El problema que surgió es qué es una estrategia y cómo se define a partir de la resolución de un problema. Esta pregunta necesitó de una revisión teórica de la noción de estrategia, pero solo estaba definida a partir de lo observable, teniendo varias acepciones al respecto de lo que sucedía en los pensamientos del estudiante, finalmente se propone una definición propia que divide la estrategia en dos nociones, a lo observable se le llama acción y a lo no observable proceso, desde estas definiciones se analiza cada problema aplicado.

Primero, en la metodología se describe la estrategia utilizada sin la intervención del profesor y en el análisis con su intervención y se observa si cambia la estrategia. Al comparar la resolución de los problemas sin ayuda del profesor como se observa en la Figura 1 y con la ayuda del profesor Figura 4, la estrategia está compuesta por más acciones que procesos, y los problemas verbales independiente de la variedad didáctica no fueron concluidos (en la tesis se analizan cuatro problemas, y en este trabajo solo se está mostrando un problema), en contraposición a la resolución de los mismos problemas con la intervención del profesor se observan 7 acciones y 7 procesos, además que se da una solución a la pregunta del problema.

Existen diferencias en las estrategias dependiendo de la variedad didáctica utilizada y del registro de partida, en el caso del problema del profesor, a pesar de toda la dificultad, a los alumnos se les hizo fácil obtener los datos, pero se les dificultó encontrar la relación entre las variables.

También se define la participación del profesor con dos roles distintos, uno como facilitador, cuando el alumno sabe la respuesta pero esta inseguro, y el profesor solo debe confirmar lo afirmado, es decir, el alumno sabe la respuesta pero necesita el refuerzo del profesor, este rol puede considerarse pasivo, en cambio en el otro rol el profesor es el protagonista y actúa como mediador entre el conocimiento aislado del alumno y cómo este conocimiento debe interactuar con la resolución el problema.

En cuanto al registro, el menos asociado al concepto de función lineal es la ecuación de la recta, para los estudiantes este concepto, que finalmente genera los modelos, está totalmente separado de la función, y por lo tanto, para los alumnos, generar modelos presenta una gran dificultad, y se observa fácilmente en los análisis de la metodología, que en ningún problema que necesite generar modelos los alumnos aplican la ecuación de la recta, por lo tanto en este ámbito en particular y con estos alumnos, la ecuación de la recta esta disociada de la función, así que los profesores deben reforzar este conocimiento.

Se generan dos modelos de estrategia, separados solo por el contexto del problema, pues este determinará las conversiones y por lo tanto la cantidad de acciones y procesos necesarios para resolver el problema.

Como reflexiones finales, es importante conocer dónde los alumnos quedan estancados cuando resuelven problemas, pues con esta información el profesor podrá intervenir durante las clases y así proveer los engranajes necesarios para alcanzar a dar solución a los problemas planteados.

En cuanto a las variedades didácticas, el problema que se analizó para este trabajo, el del profesor, correspondía a la variedad la función como correspondencia, y presentó varias dificultades, pues los estudiantes conocen solo a las funciones como relaciones entre cantidades variables, y esto implica que otra variedad se les dificulta, por lo tanto, este trabajo muestra que es necesario utilizar otras variedades didácticas para expandir las estrategias de los alumnos.

Al revisar los registros de representación, para los estudiantes que realizaron estos problemas, los registros más conocidos y transparentes para ellos, son el tabular y gráfico, en ese orden, desde el gráfico al tabular se estudiará en otros trabajos.

Los contextos también incidieron en los logros alcanzados por los estudiantes, pues los contextos puramente matemáticos son conocidos por los estudiantes, a diferencia de los problemas como el del profesor, que son claramente más complejos para ellos, pero sin embargo son motivadores dado que el contexto está relacionado directamente con ellos.

Referencias bibliográficas

Arteaga Palomares, J., & Guzmán Hernández, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver probelmas verbales de matemáticas. *Educación Matemática, 17*, 5 - 31.

Bal, A. P. (2015). Skills of Using an Transform Multiple Representation of the Prospective Teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 197*(Hal), 582 - 588.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contestualised" taks. *International Journal of Science and Mathematic Education*(9), 367 - 390.

Duval, R. (2004b). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* (I. d. Pedagogia, Ed.) Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2004a). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Editorial Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME, 1*(9), 143 - 168.

Flores, C. D., Chi Chablé, A. G., Canul Pech, E. R., Cantú Interián, C. A., & Pastor Solache, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones graficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(18), 41 - 57.

Font, V. (2011). Funciones. (E. J. Goñi, Ed.) *Matemáticas.Complementos de formación disciplinar*, 145 - 186.

Guzmán R, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(1), 5 - 21.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning an Problem Solving. En *Problems of Representations in the Teaching an Learning of Mathematics* (págs. 33 - 40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum: In C. Janvier.

Morales Martínez, Z. E. (2013). Análisis de las transformaciones semióticas en el aprendizaje de la función logarítmica. *VII CIBEM*, (págs. 1037 - 1044). Montevideo.

Parra, Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. Osorno, Chile.

Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación, 35*(73), 169 - 193.

Poblete, A., & Díaz, M. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos ¿una habilidad inhabilitante? *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*(N°42), pág. 409-424.

Poblete, A., Guzmán, I., & Méndez, C. (Junio de 1996). Variedades Didácticas Matemáticas. *Zeteiké, Campinas, 4*(5), 89 - 98.

Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender.* Caracas: Fundación Polar.

Pólya, G. (1945). *How to solve it (Traducción al española, Cómo plantear y resolver problemas, Trillas, México, 1976).*

Rahmawati, D., Purwanto, Subanji, Hidayanto, E., & Anwar, R. B. (2017). Process of Mathematical Representation Traslation from Verbal into Grafic. *IEJME - Mathematics Education, 12*(4), 377 - 381.

Ramos, A. B., & Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prostettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*(4), 535 - 556.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1 - 14.

Rizo Cabrera, C., & Campistrous Pérez, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 2*(2 - 3), 31 - 45.

Rojas, P. (2012). Sistema de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital matemática, Educación e internet, 12*(1).

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic Press, INC.

Valencia, P., Ojeda, L., Jiménez, A., & Cisternas, A. (2016). Diseño de problemas en contexto y diferentes representaciones. *XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, *20*, págs. 436 - 438. Valparaíso.

TEST DE REFLEXIÓN COGNITIVA Y TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO COMO POSIBLES PREDICTORES DEL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRAMPA LINEAL

COGNITIVE REFLECTION TEST AND TEST OF LOGICAL THINKING AS POSIBBLE PREDICTORS OF STUDENTS' ACHIEVEMENT IN PROBLEM SOLVING WITH LINEAR TRAP

Edgar Sánchez Campos, Josip Slisko Ignjatov
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).
chazo84@hotmail.com, josipslisko47@gmail.com

Resumen
Algunas investigaciones demuestran que existe relación entre test estandarizados y resolución de problemas matemáticos. En esta investigación se utilizan el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) para clasificar el tipo de pensamiento de los estudiantes con el objetivo de poder relacionarlo con su desempeño en resolución de problemas matemáticos con "trampa lineal" ("ilusión de la linealidad"). Varios estudios indican que existe el excesivo uso de métodos lineales en el razonamiento y estrategias de solución de los estudiantes. Este estudio presenta la evidencia inicial que los estudiantes con un pensamiento formal y un pensamiento reflexivo medianamente desarrollado usan con menor probabilidad el método lineal.

Palabras clave: pensamiento reflexivo, pensamiento formal, ilusión de la linealidad

Abstract
Some research shows that there is a relationship between standardized tests and mathematical problem solving. In this investigation, the Test of Logical Thinking and the Cognitive Reflection Test are used to classify the students' type of thinking with the aim to relate it to their performance in solving mathematical problems with a "linear trap" ("illusion of linearity"). Some studies indicate that there is an excessive use of linear methods in students' reasoning and solving strategies. This study presents preliminary evidence that students with a moderately developed formal-and-reflective thinking use the linear method with minor probability.

Key words: reflective thinking, formal thinking, illusion of linearity

Introducción

El pensamiento formal es una condición necesaria para acceder al conocimiento científico y matemático. Sin embargo, las investigaciones demuestran que los jóvenes escolarizados no manejan esquemas de operaciones formales (Aguilar, Navarro, López y Alcalde, 2002). Eso explica, por lo menos parcialmente, la incapacidad de muchos de los estudiantes para resolver problemas que exigen un nivel de abstracción y razonamiento típico del pensamiento formal. Los resultados alcanzados por las investigaciones anteriores permiten deducir que los estudiantes no cuentan con las habilidades cognitivas necesarias para resolver las situaciones problemáticas planteadas, puesto que manifiestan deficiencias al procesar información de una manera sistemática. Ello implicaría los bajos resultados obtenidos por los estudiantes al desarrollar pruebas de conocimiento a nivel nacional e internacional, lo que supone, por tanto, un desempeño deficiente a nivel académico, especialmente el área de matemáticas.

Es por esta razón que en esta investigación se realiza un análisis del desempeño de estudiantes en la resolución de problemas matemáticas con "trampa lineal" en combinación con dos pruebas: Test del Razonamiento Lógico (TRL) (Tobin & Capie, 1981; Acevedo y Martínez, 1995) y Test de la Reflexión Cognitiva (TRC) (Frederick, 2005). El objetivo es averiguar si existe una relación entre los resultados de ambas pruebas (TRC y TRL) y el desempeño en resolución de problemas matemáticos con "trampa lineal".

Por lo que se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes de primer grado bachiller al tratar de resolver problemas matemáticos con "trampa lineal"?
- ¿Qué tipo de estudiantes de acuerdo a sus estadios de pensamiento son los que presentan mayor tendencia a caer en problemas matemáticos con "trampa lineal"?

Constructos teóricos

En la presente sección se mencionan constructos que son importantes en la investigación, tales como pensamiento formal, pensamiento concreto, pensamiento rápido, pensamiento lento y proporcionalidad o linealidad.

El pensamiento reflexivo como parte de procesos duales (pensamiento lento y rápido)
El concepto de procesamiento dual se refiere a la coexistencia de dos modos de procesar la información que Kahneman (2002) resumió en la Figura 1.

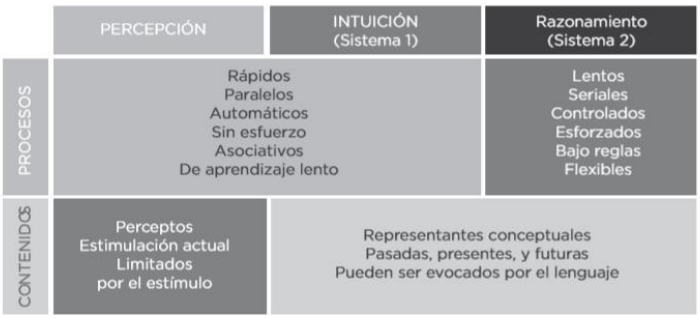


Figura 1: Diferencias de los dos sistemas (tomado de Kahnemam, 2002, p. 451).

A los procesos del Sistema 1 se les ha considerado preconscientes, implícitos, automáticos, de bajo esfuerzo, rápidos, de alta capacidad, en formato de default, holísticos, perceptuales y a los procesos del Sistema 2, conscientes,

explícitos, controlados, de alto esfuerzo, lentos, de baja capacidad, inhibitorios, analíticos, y reflexivos. Parece adecuado concebir al Sistema 2 como una forma de pensamiento bajo control de nivel intencional, apoyado por los procesos subconscientes del Sistema 1 que proporcionan perceptos, memorias, etc. También parece que la vía más promisoria es la de operacionalizar el concepto de conciencia, considerando que el pensamiento del Sistema 2 requiere acceso a un sistema central de memoria de trabajo de capacidad limitada, cosa que no ocurre con el Sistema 1.

Pensamiento formal y concreto

El pensamiento formal y el pensamiento concreto son estadios de pensamiento lógico-matemático que tienen ciertas características (Inhelder y Piaget, 1955).

En el pensamiento concreto el individuo realiza operaciones relativas a un objeto, o a situaciones tangibles y observables, mientras que en el pensamiento formal el individuo razona en abstracto, elabora conjeturas y realiza consideraciones fuera del objeto.

Los esquemas operatorios y tales razonamientos representan en el pensamiento formal un avance con relación al pensamiento concreto.

Linealidad

De book, Van Dooren, Janssens, y Verschaffel (2007) señalan que los términos "lineal" y "proporcionalidad (directa)" (así como sus derivados) los debemos utilizar como sinónimos y, también, para referirnos a las funciones de la forma $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$. La representación gráfica de este tipo de función es: una línea recta que pasa por el origen. Sin embargo, existen otras propiedades y representaciones de las funciones lineales que son conocidas y utilizadas con frecuencia. Cada una de estas propiedades y representaciones pueden ser aplicadas por los estudiantes en situaciones en las que no son aplicables. Esta tendencia se llama "*la ilusión de la linealidad"* o, simplemente, *"trampa lineal"*. Tales propiedades son las siguientes:

- cuando el factor de proporcionalidad es un número entero (relativamente pequeño), los estudiantes tienden a centrarse en esta propiedad (aditiva) por ejemplo: para cubrir 21 m^2 (3 m^2 + 18 m^2) necesitamos 3.5 litros (0.5 litros + 3 litros) de pintura.

- Esta propiedad (multiplicativa) se refiere a la igualdad de las relaciones internas y con frecuencia está representado en la regla "si k veces a entonces k veces b". Lo anterior, por lo general, se utiliza en el aula para resolver problemas verbales. Por ejemplo, para cubrir 36 m^2 (2 x 18 m^2) necesitamos 6 litros (2 x 3 litros) de pintura.

Metodología

La presente investigación es de naturaleza tanto cuantitativa como cualitativa. El grupo de estudio es de 33 alumnos de primer grado de bachiller del colegio privado Salvador Allende en Puebla.

Primera etapa:

Se aplicó al primero grado de bachiller el test de reflexión cognitiva y el test de razonamiento lógico para poder analizar su nivel cognitivo inicial.

- Test de Reflexión Cognitiva (TRC) de Frederick (2005) consiste en sólo tres ítems que se caracterizan por estar diseñados para llevar a errores en la ausencia de pensamiento reflexivo
- Test de Razonamiento Lógico (TRL) (Acevedo & Martínez, 1995) consiste en un cuestionario de diez tareas de papel y lápiz, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento: Proporcionalidad (PP), control de variable (CV), probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB).

Segunda etapa:

Aplicar problemas matemáticos con trampa lineal:
Los problemas son básicamente los mismos que proponen Van Dooren et al. (2007)
Problemas matemáticos aplicados:

- Un grupo de 5 músicos toca una canción en 10 minutos. Otro grupo de 35 músicos tocará la misma canción. ¿Cuánto tiempo le tomará e este grupo tocar la canción?
- Si 500 ml de agua se encuentran a 20° C en el ambiente, ¿qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?
- Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas ha corrido Kim?
- La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?
- El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?

Resultados

Con el análisis realizado de los Test de Razonamiento Lógico (TRL) y Test de Reflexión Cognitiva (TRC) se midió el nivel cognitivo de cada uno de los estudiantes. Con base en el análisis de los problemas matemáticos con trampa lineal se realizó una clasificación de respuestas de acuerdo con sus estrategias de solución, para poder encontrar una relación entre el nivel cognitivo de los estudiantes y su estrategia de solución.

Combinando los resultados de los dos test (TRC Y TRL) se obtiene lo siguiente:

Tabla 1. Resultados de TRC y TRL.

	Pensamiento concreto	Pensamiento en transición	Pensamiento formal	Total
Pensamiento rápido	30	0	0	30
Pensamiento lento	0	3	0	3
Total	30	3	0	33

Tenemos 30 pensadores concretos de los cuales estos 30 son pensadores rápidos, y el resto que son 3, son pensadores en transición y a la vez pensadores lentos. No se encontraron pensadores formales. Se puede decir que los estudiantes con bajo nivel cognitivo en TRC son bajos en TRL y alumnos con mejor nivel cognitivo en TRC son medianamente altos en TRL. Para dar un desglose más claro, se realiza una segunda clasificación de estratos de acuerdo a la cantidad de ítems correctos en ambas pruebas:

- Grupo 1: estudiantes con TRC = 0 y TRL = 0
- Grupo 2: estudiantes con TRC = 0 y TRL = 1,2
- Grupo 3: estudiantes con TRC = 0,1 y TRL = 3,4
- Grupo 4: estudiantes con TRC = 2,3 y TRL = 5,6

A continuación, se muestran los resultados globales en la resolución de los problemas matemáticos con trampa lineal.

Tabla 2. El desempeño de alumnos en problemas con trampa lineal.

Problema	Músicos	Temperatura	Carrera	Locomotora	Granjero
Caen en la trampa	10	10	19	21	31
Brincan la trampa	23	23	14	12	2
Total	33	33	33	33	33

La tabla anterior muestra crecientemente cómo los alumnos tienden en caer en trampa lineal. En los dos primeros problemas la mayoría no presentó mayor complicación, los dos siguientes problemas aproximadamente la mitad de los alumnos, presento dificultades, y finalmente los últimos tres problemas la mayoría presenta ilusión lineal. En la continuación se presentan los detalles del desempeño de los estudiantes en dos problemas (Carrera y Locomotora).

Análisis del problema Carrera

De acuerdo con la Tabla 2 se puede observar que 19 alumnos caen en la trampa lineal al aplicar métodos lineales donde no corresponden, por lo que es importante describir las estrategias con la que los alumnos resolvieron el problema y relacionarla con el nivel cognitivo.

Tabla 3. El desempeño de los grupos cognitivos en el problema Carrera.

Grupo	Caen	No-caen	Total
Grupo 1	8	5	13
Grupo 2	11	4	15
Grupo 3	0	2	2
Grupo 4	0	3	3
Total	19	14	33

Comparando el grupo 1 y 2 con el grupo 3 y 4, se observa de la Tabla 3 lo siguiente: Todos los alumnos del grupo 4 que consta de alumnos con un nivel cognitivo mejor (pensadores lentos y en transición) aplicaron métodos no lineales correctos. Mientras tanto, los alumnos en el grupo 1 y 2, que consta de alumnos con un nivel cognitivo deficiente (pensadores rápidos y concretos), la mayoría aplicaron métodos lineales donde no corresponde.

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías del problema de la carrera:

- *Razonamiento lineal*
- *Combinación de operaciones*
- *Razonamiento no-lineal*

Razonamiento lineal

La mayoría de los alumnos en los grupos 1 y 2 son los que muestran estrategias de razonamiento lineal, como forma de procedimiento se muestra la siguiente figura:

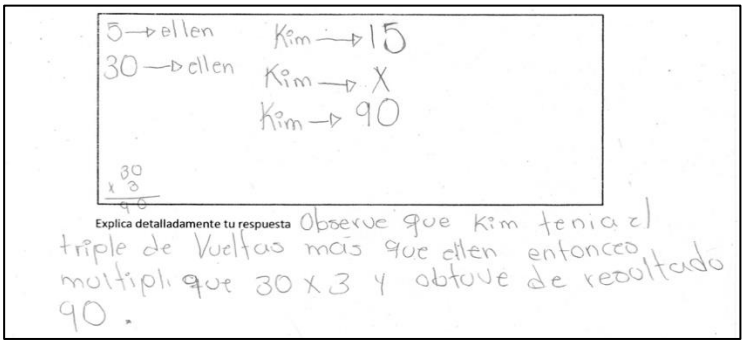


Figura 2: El problema Carrera - Razonamiento lineal.

La tendencia que muestran los alumnos que conforman los grupos 1 y 2 es la utilización de la regla de tres y se considera un método lineal porque, como lo mencionan De Bock et al. (2007), es un razonamiento del tipo "K veces a entonces k veces b", es decir, el alumno interpreta de manera incorrecta el problema pensando que Kim tiene el triple de vueltas que Ellen y no se percata que sólo le lleva de ventaja 10 vueltas por lo que responde de manera presurosa argumentando que Kim ha corrido 3 veces lo que ha corrido Ellen.

Combinación de operaciones

Algunos alumnos que caen en la trampa lineal de los grupos 1 y 2 utilizan combinación de operaciones, mezclado con indicios de razonamiento lineal un tanto confusos. Por ejemplo, dan razonamientos del tipo "el doble de vueltas" y como respuesta 3 x15 = 45.

Razonamiento no-lineal

El grupo 3 y el grupo 4 aplicaron un método no-lineal que se muestra en la siguiente figura:

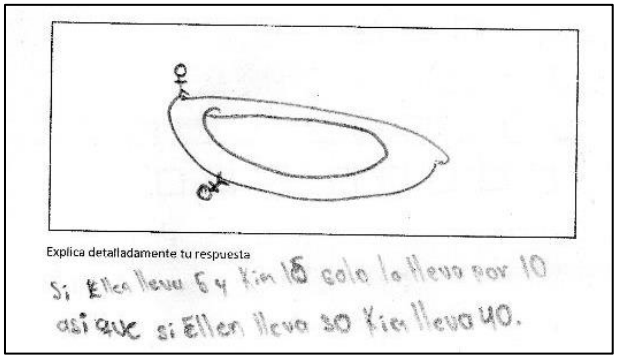


Figura 3: El problema Carrera – Razonamiento no-lineal.

Los alumnos de estos grupos cognitivos se percataron de una diferencia importante para resolver correctamente el problema, no lograron caer en el razonamiento impulsivo de interpretar 15 vueltas como un múltiplo de 3, sino que se tuvo un análisis más prolongado para poder visualizar las 15 vueltas como diferencia de 10 vueltas entre Kim y Ellen.

Análisis del problema Locomotora

En la Tabla 4 se puede observar que más de la mitad de los estudiantes utilizaron un método lineal donde no era aplicable en el problema de Locomotora. Los alumnos que conforman los diferentes grupos se describen en la siguiente tabla para un mejor análisis:

Tabla 4: El desempeño de los grupos cognitivos en el problema Locomotora.

Grupo	Caen	No-caen	Total
Grupo 1	11	2	13
Grupo 2	9	6	15
Grupo 3	1	1	2
Grupo 4	0	3	3
Total	21	12	33

Comparando los grupos extremos (Grupo 1 y Grupo 4), se puede observar que aproximadamente un 80 % de los estudiantes que conforman el grupo 1 caen en la trampa cognitiva y los alumnos que conforman el grupo 4, el 100 % no caen en la trampa lineal. Eso quiere decir que los estudiantes con pensamiento lento y pensamiento en transición son los que mejor desempeño tienen en este problema, por lo que es importante describir las estrategias que utilizaron los alumnos que conforman cada grupo cognitivo para complementar este análisis.

Es necesario mencionar que, con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema, se obtuvieron las siguientes categorías de resolución del problema de la carrera:

- *Razonamiento lineal*
- *Combinación de operaciones*
- *Razonamiento no-lineal*

Razonamiento lineal

La estrategia que utilizaron los alumnos con el método lineal son:

- Múltiplo (K veces a entonces k veces b)
- Regla de tres

Un 80 % de alumnos, que empleaban el método lineal de múltiplo, utilizaron lo que De Bock et al. (2007) llaman la propiedad multiplicativa de la ilusión de la linealidad y obtuvieron como respuesta 104 o 24 dependiendo de la comprensión del texto, pero básicamente es el mismo razonamiento.

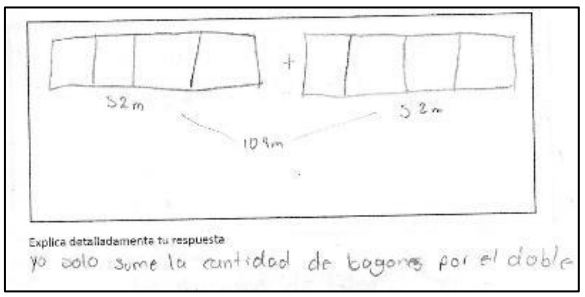


Figura 4: Locomotora –Razonamiento lineal l.

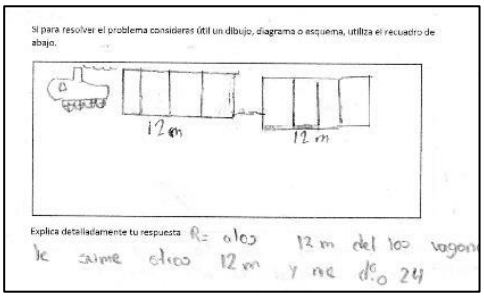


Figura 5: Locomotora-Razonamiento lineal 2.

Según la comprensión del texto, los alumnos no lograron ver la diferencia entre locomotora y tren y "largo" y "longitud" respectivamente, por lo que se representaron los 4 vagones de una longitud 52 metros. Entonces, al preguntarles el largo del tren, ellos solo multiplicaron 52 x 2 = 104 o sumaron 52 + 52 = 104.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de otra respuesta del mismo tipo de razonamiento lineal, sólo varía la forma de entender el problema donde en este tipo de respuesta se representó los 4 vagones de "longitud" 12 metros, por lo que la respuesta lineal es 24.

Otra variante de método lineal es la regla de tres:

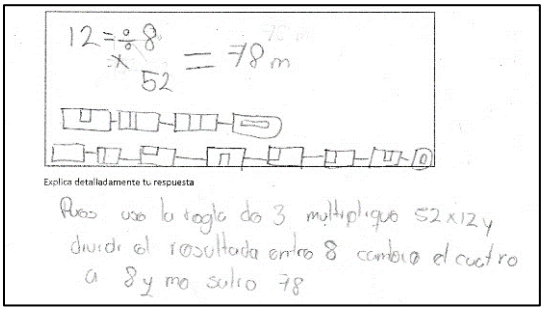


Figura 6: Locomotora - Razonamiento lineal 3.

Este tipo de respuesta es un razonamiento lineal mal planteado, esto porque combina de una manera arbitraria tres datos del problema, y poder formar la famosa regla de tres, la cual es una consecuencia de un razonamiento de tipo lineal.

Combinación de operaciones

Otra categoría de estrategias que no necesariamente está involucrado un razonamiento lineal es la búsqueda de una respuesta a través operaciones aritméticas que se mencionan en el problema que no muestran indicios de alguna regla de tres o de utilizar la propiedad multiplicativa de la linealidad a lo que Brousseau llama "contrato didáctico". Como ejemplo de esto tenemos la siguiente figura:

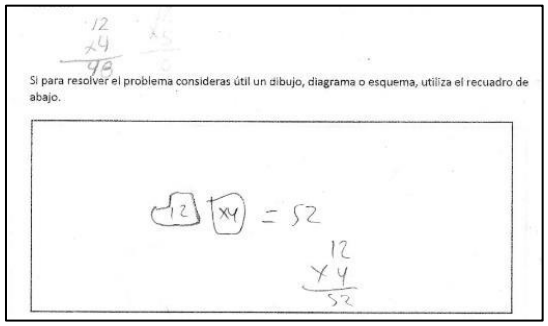


Figura 7: Locomotora - Contrato didáctico.

En este tipo de respuestas el estudiante se centró en realizar una multiplicación con los datos que se proporcionó en el problema, por lo que el multiplica 12 que es el largo de la locomotora por 4 que es el número de vagones y obtiene como respuesta 52 (con un error aritmético adicional). Esto muestra una falta de análisis y comprensión por parte del alumno. En cierto sentido, el alumno se vuelve flojo y sólo da como respuesta rápida este tipo de combinación de operaciones ya que, por contrato didáctico, sabe que está obligado a dar una respuesta.

Razonamiento no-lineal

Los alumnos en esta categoría no caen en la trampa lineal que tiene el problema y utilizan un razonamiento no-lineal ejecutado correctamente, comprenden correctamente el problema y la diferencia entre largo y longitud, como lo muestra en la siguiente figura:

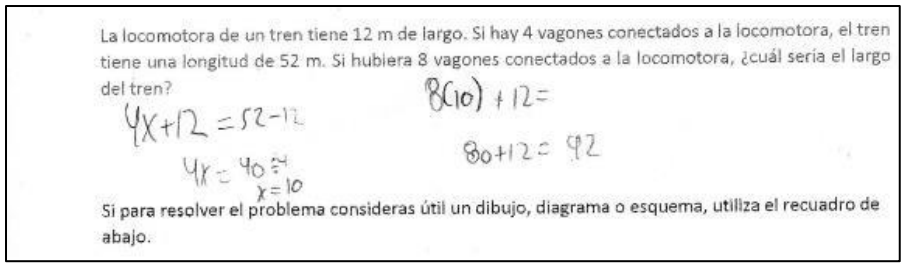


Figura 8: Locomotora - Razonamiento no-lineal 1.

El alumno llega a comprender la diferencia entre largo y longitud, en este caso lo representa simbólicamente, a 12 lo relaciona con el largo de la locomotora y 52 lo relaciona con la longitud "total", por lo que él encuentra, que cada vagón tiene longitud de 10 metros (la que representa con el símbolo x). Por lo tanto, multiplica los 8 vagones por los 10 metros de cada vagón y lo suma al largo de la locomotora.

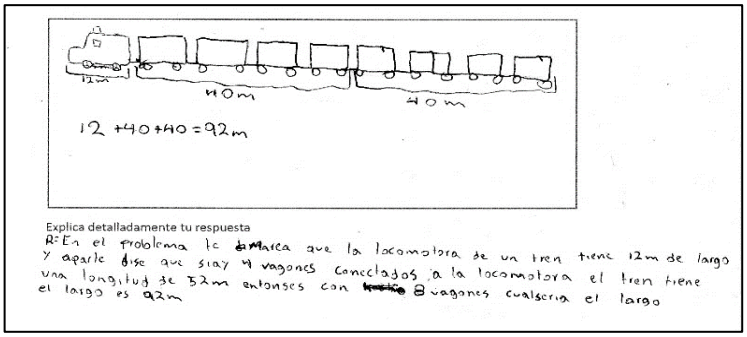


Figura 9: Locomotora – Razonamiento no-lineal 2.

Como lo muestra la Figura 9, los alumnos tienen una comprensión correcta del problema de tal forma que realizar una representación gráfica (dibujo) para poder realizar correctamente el problema. De la representación gráfica se pude deducir que el estudiante logra encontrar la diferencia entre largo y longitud y locomotora y tren.

Conclusiones

Este estudio permitió responder con los hechos iniciales las dos preguntas de investigación:

> ¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes de primer grado bachiller al tratar de resolver problemas matemáticos con "trampa lineal"?
>
> ¿Qué tipo de estudiantes de acuerdo a sus estadios de pensamiento son los que presentan mayor tendencia a caer en problemas matemáticos con "trampa lineal"?

Para la primera pregunta se encontró y documentó un amplio espectro de estrategias y se demostró que su carácter depende del nivel de reflexión cognitiva y razonamiento lógico, es decir, entre la variedad de estrategias de solución que utilizaron los estudiantes del bachillerato Salvador Allende, el método lineal y sus derivados fue la preferida de los estudiantes.

Para la segunda pregunta el test de razonamiento lógico (TRL) y el test de reflexión cognitiva (TRC) nos permitieron ubicar qué tipo de alumnos son pensadores concretos, formales, rápidos y lentos, para posteriormente relacionarlo con el desempeño que tienen en la resolución de problemas matemáticos.

Se encontró que los alumnos con un pensamiento rápido son pensadores concretos y los pensadores lentos están en transición hacia el pensamiento formal. Los resultados nos permitieron concluir que precisamente los pensadores rápidos y concretos (grupo cognitivo 1) son los que utilizan con mayor probabilidad el método lineal y sus derivados en problemas donde corresponde la linealidad y los pensadores lentos, así como en transición (grupo cognitivo 4) son los que percatan la no aplicabilidad del método lineal en problemas matemáticos con trampa lineal.

De tal manera, el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) podrían ser predictores que indican cuáles son los estudiantes que presentarán mayores dificultades en resolución de problemas matemáticos con "cierta trampa". Claro esa importante relación se debe investigar y corroborar realizando estudios que involucrarían el mayor número de estudiantes.

Los resultados de este estudio inicial tienen una fuerte implicación para la enseñanza de las matemáticas. Los docentes deben usar los diseños didácticos que ofrecen a los estudiantes las secuencias de actividades de aprendizaje que promuevan la "aceleración cognitiva" (Shayer & Adhami, 2007).

Referencias bibliográficas

Acevedo, J., & Martínez, J. M. O. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada*, *48*(3), 339-351.

Aguilar, M., Navarro, J. & López, J. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, *14*, 382-386.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity*: From analysis to improvement. New York: Springer.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 311-334.

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *The Journal of Economic Perspectives*, 19(4), 25-42.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós (1972).

Kahneman, D. (2002). Maps of bounded rationality: *A perspective on intuitive judgment and choice.Nobel PrizeLecture*. Recuperado el 08 de diciembre, 2002 en https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/kahnemann-lecture.pdf

Shayer, M., & Adhami, M. (2007). Fostering cognitive development through the context of mathematics: Results of the CAME project. *Educational studies in Mathematics*, *64*(3), 265-291.

LUGARES GEOMÉTRICOS: PARADIGMAS Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

LOCI: PARADIGMS AND LEARNING DIFFICULTIES

José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora, México Universidad de Sonora (México).
jlsoto@mat.uson.mx, maurr@mat.uson.mx

Resumen
Se presenta aquí un estudio desarrollado con estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora, México, sobre sus dificultades para justificar proposiciones geométricas. El trabajo está enmarcado en un curso de Geometría Analítica diseñado con apoyo de GeoGebra y se refiere al tema de lugares geométricos. Se utiliza la teoría de los paradigmas geométricos para explicar estas dificultades y el estudio revela que la formación en geometría de los estudiantes que ingresan a la Universidad, está limitada principalmente a la geometría natural, mostrando una precaria familiaridad con los métodos de la geometría axiomática natural.

Palabras clave: geometría analítica, lugares geométricos, paradigmas geométricos

Abstract
This paper presents a study on engineering students' difficulties to justify geometric propositions at the University of Sonora, in Mexico. The work is framed within a GeoGebra-supported Analytical Geometry course, and it refers to the topic of Loci. The theory of geometric paradigms is used to explain these difficulties and the study reveals that the geometry education of students entering the University is mainly limited to natural geometry, showing a precarious familiarity with the methods of natural axiomatic geometry.

Key words: analytical geometry, loci, geometric paradigms

Introducción

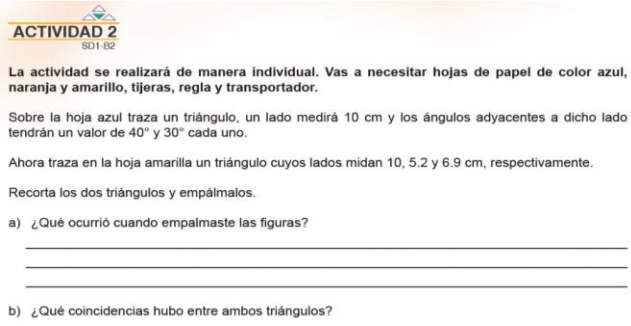
En el bachillerato mexicano la geometría se enseña en el segundo y tercer semestre, bajo el nombre genérico de Matemáticas II y Matemáticas III, el primero de estos cursos está dedicado a la geometría sintética y la trigonometría y en el segundo se abordan los elementos básicos de la geometría analítica plana. La geometría deductiva está concentrada en los temas de triángulos, triángulos congruentes y triángulos semejantes que se abordan en la primera parte del curso de Matemáticas II, este enfoque aparece aislado en el programa del curso y no vuelve a retomarse en el curso de Matemáticas III. En este último se privilegian las representaciones algebraicas sobre las geométricas y el uso mecánico de las herramientas algebraicas para obtener los parámetros de rectas y cónicas. Por otra parte, los cursos de matemáticas para futuros ingenieros en la Universidad de Sonora privilegian la modelación y la interpretación de modelos; en ambos casos se requiere que puedan justificar resultados matemáticos, en particular los resultados geométricos que aparecen en sus cursos.

Con el propósito de explorar hasta qué punto los estudiantes de ingeniería pueden justificar proposiciones geométricas, se han diseñado cinco secuencias didácticas sobre el tema de lugares geométricos. Las secuencias han sido diseñadas para desarrollarse con GeoGebra y tomando como referencia la construcción del *hiperbológrafo* de Descartes (1954), en lo que se refiere a la identificación de las relaciones geométricas de la construcción para encontrar la ecuación de la hipérbola. Todas fueron propuestas en un curso de Geometría Analítica impartido a 35 estudiantes de Ingeniería Civil durante el primer semestre de 2018. El uso de GeoGebra está limitado a la manipulación de Applets adjuntos a cada secuencia y las respuestas de los estudiantes fueron enviadas al profesor por correo electrónico.

Antecedentes

El presente estudio está motivado por el creciente descuido que hemos observado en la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios. Este descuido puede observarse en la manera como se aborda esta disciplina en los libros de texto de mayor uso en nuestra región. Existen, de acuerdo con Houdement, y Kuzniak (2003) tres tipos de paradigmas en Geometría llamados por ellos: *geometría natural*, *geometría axiomática natural* y *geometría axiomática formalista*. En el primero de ellos, los objetos geométricos son concebidos como objetos físicos, el segundo toma como base el aparato axiomático euclidiano y el tercero tiene como modelo prototípico, el sistema axiomático de Hilbert, en la sección siguiente los describiremos con más detalle.

En una revisión de los libros de texto usados en el bachillerato (Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca, 2016; 2018), con el propósito de identificar el paradigma predominante en ellos, encontramos actividades como la mostrada en la Figura 1, tomada del primero de ellos (p. 53).



ACTIVIDAD 2

SD1-B2

La actividad se realizará de manera individual. Vas a necesitar hojas de papel de color azul, naranja y amarillo, tijeras, regla y transportador.

Sobre la hoja azul traza un triángulo, un lado medirá 10 cm y los ángulos adyacentes a dicho lado tendrán un valor de 40° y 30° cada uno.

Ahora traza en la hoja amarilla un triángulo cuyos lados midan 10, 5.2 y 6.9 cm, respectivamente.

Recorta los dos triángulos y empálmalos.

a) ¿Qué ocurrió cuando empalmaste las figuras?

b) ¿Qué coincidencias hubo entre ambos triángulos?

Figura 1. Una actividad sobre triángulos
Fuente: Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca (2016, p. 53).

Esta actividad está propuesta para introducir la noción de congruencia de triángulos, pero los triángulos que se pide construir son objetos físicos y la comparación entre ellos está sujeta a la percepción sensorial, se espera por lo tanto que las respuestas de los estudiantes dependan de lo que hayan percibido durante el desarrollo de la tarea, ya sea de manera visual o táctil. Lo anterior ubica la tarea dentro del *Paradigma 1*.

Encontramos también otro tipo de tareas como la que muestra la Figura 2, resueltas aparentemente desde el *Paradigma 2*, en la que se establece que dos triángulos son semejantes aplicando uno de los criterios de semejanza. (Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca, 2016, pp. 57-58).

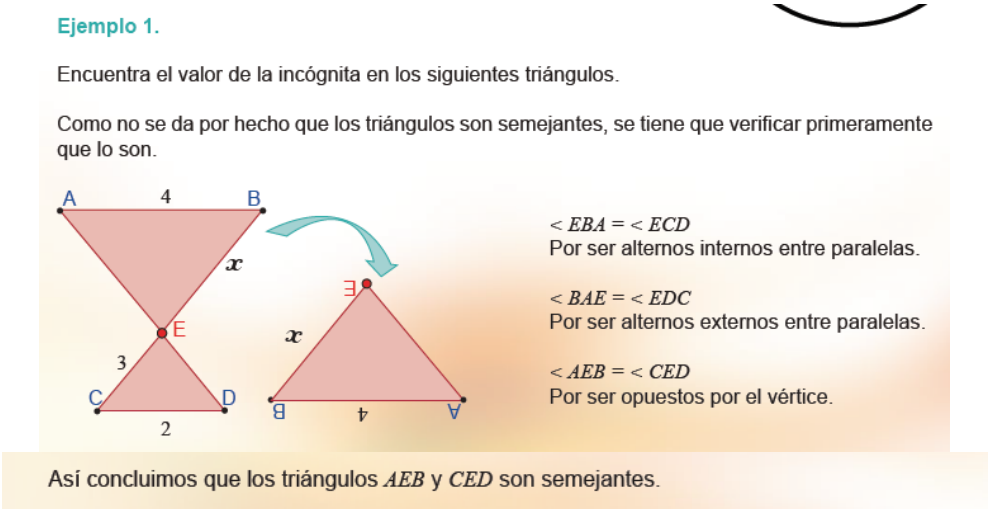


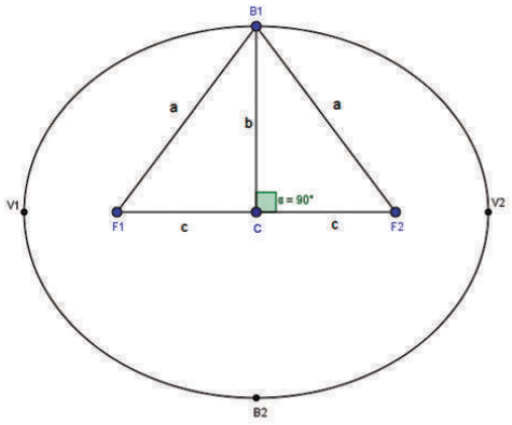
Figura 2. Ejemplo resuelto con herramientas aparentemente deductivas
Fuente: Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca (2016, pp. 57-58).

El razonamiento es aparentemente deductivo en el sentido de que la igualdad de los ángulos se establece a partir de las hipótesis, pero tales hipótesis no son explícitas en el problema. Los argumentos esgrimidos para establecer la igualdad de los ángulos, está basada en el paralelismo de los segmentos AB y CD, pero tal paralelismo no está enunciado, pero los segmentos se "ven" como paralelos. Estamos frente a un ejemplo que permanece anclado en el *Paradigma 1*, inmerso solo aparentemente en el Paradigma 2. Los autores no parecieran conscientes de la diferencia entre los métodos y formas de razonar que caracteriza a cada uno de los paradigmas.

En el texto de Matemática 3, dedicado a la Geometría Analítica, pueden encontrarse explicaciones como la que muestra la Figura 3.

Como lo pudiste corroborar en la **ACTIVIDAD 2**, la suma de las distancias de los focos a cualquier punto P de la elipse $P = (x, y)$ es constante y su valor es $2a$.

Si colocamos el punto $P(x, y)$ en el punto B_1, se forman dos triángulos rectángulos, por lo que se puede aplicar el teorema de Pitágoras.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Figura 3. La relación entre la semidistancia focal y los dos semiejes de la elipse.
Fuente: Morales, Cárdenas, Conde, Palafox y Amavisca, 2018, p. 189.

La actividad 2 a la que se refieren aquí, consiste en medir con una regla las distancias F_1B_1 y F_2B_2 tomando una elipse que ha sido trazada con el "método del jardinero" y luego verificar que la suma de estas distancias es constante para algunos casos particulares, contra lo que pudiera esperarse, no se hace alusión a que el cordón utilizado tiene una medida fija. De nueva cuenta las hipótesis se dejan a la percepción de la figura trazada, por ejemplo, la congruencia de los triángulos F_1B_1C y F_2B_2C no se verifica, porque ello obligaría a usar alguno de los criterios de congruencia de triángulos, lo cual implicaría la introducción de formas de razonamiento propios del Paradigma 2.

En síntesis, los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería han tenido el último contacto con la geometría, tres semestres antes y este contacto se concentra casi exclusivamente en el Paradigma 1.

Referencias teóricas

Las respuestas de los estudiantes se analizaron en el marco de la teoría de paradigmas geométricos propuesta por Hedemount y Kuzniak (2003); según estos autores bajo el término geometría elemental, coexisten tres tipos distintos de paradigmas que conducen a distinguir tres tipos de geometría: la *geometría natural*, la *geometría axiomática natural* y la *geometría axiomática formalista*, se describen a continuación estas geometrías, aunque en el presente trabajo solo tomamos en cuenta las primeras dos.

La *geometría natural* puede verse como una ciencia empírica en la que se trabaja con objetos muy ligados a la realidad, que pueden ser medidos y comparados físicamente, porque no siempre es clara la diferencia entre los objetos físicos y sus modelos geométricos. Las proposiciones aquí pueden validarse experimentalmente porque dependen de la percepción sensorial que se tiene de ellas. Dos triángulos aquí son iguales, por ejemplo, si recortados en cartulina coinciden al superponerse uno sobre el otro.

En la *geometría axiomática natural* los objetos geométricos son solamente aproximaciones a la realidad y son definidos por los axiomas de la Geometría Euclidiana clásica. Las proposiciones aquí son validadas mediante demostraciones construidas a partir de los axiomas euclidianos y de resultados geométricos previamente

demostrados. En esta geometría dos triángulos son iguales, si satisfacen alguno de los criterios de congruencia previamente establecidos.

En la *geometría axiomática formalista.* Los objetos geométricos en esta geometría provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo, pueden ser representados por un dibujo dependiendo del modelo y podrían guiar la intuición del geómetra (Hedemount y Kuzniak, 2003).

El razonamiento de validación en este paradigma es exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente y el uso de artefactos no es permitido y deja de ser una cara visible (a diferencia de los otros paradigmas), más bien se habla de instrumentos teóricos; de esta forma esta geometría no está relacionada con la realidad. En este paradigma, la geometría proviene de un sistema formal de axiomas, donde la lógica matemática es el motor. Las características de un sistema formal son la independencia, la consistencia y la completitud; por ello podemos distinguirla de las otras geometrías, GI y GII. La geometría GIII, surge con la aparición de las geometrías no Euclidianas y la Geometría de Euclides es parte de este paradigma, puesto que ya no se trabaja a nivel local para enfrentar los problemas geométricos.

En el diseño de las secuencias didácticas, se han tratado de recuperar las ideas desarrolladas por Descartes (1954) sobre lugares geométricos, en particular aquellas que están presentes en la construcción del *hiperbológrafo*. El aparato construido por Descartes consiste en dos ejes de referencia, perpendiculares entre sí (AG y AK), una barra fija en el punto G y que al rotar sobre este punto arrastra un dispositivo LKN. El dispositivo LKN mantiene el lado LK sobre el eje AK y su lado KN se prolonga lo suficiente para intersecar la barra GL (Figura 4a).

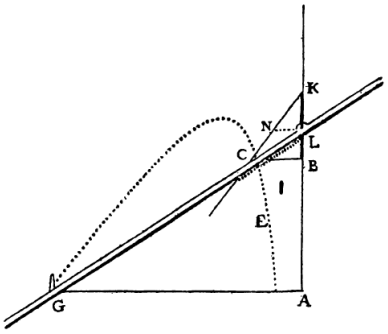


Figura 4a. El hiperbológrafo de Descartes

Fuente: Descartes (1954, p. 50)

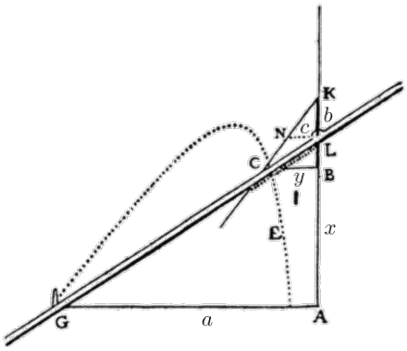


Figura 4b. El hiperbológrafo de Descartes con notación indicada.

Fuente: Descartes (1954, p. 50) con agregados propios sobre la notación

Una vez construido el *hiperbológrafo*, Descartes encuentra la ecuación de la curva trazada por ese aparato:

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

en la que las cantidades *x*, *y a*, *b* y *c*, son las que están indicadas en la Figura 4b.
La deducción está basada en la semejanza de los triángulos CBK y NLK por un lado y de los triángulos GLA y CLB.

Del método utilizado por Descartes, rescatamos dos características que serán tomadas en cuenta para el diseño de las secuencias:

1. La identificación de las cantidades que cambian y de las que permanecen fijas durante el trazado de la curva. Una manera sistemática de identificar estas cantidades ha sido propuesta a futuros profesores de matemáticas por Arcavi (2000), al modificar construcciones geométricas realizadas con un software de Geometría Dinámica.

2. La deducción exige el uso los métodos propios de la *geometría axiomática natural*, puesto que está basada en las propiedades de los triángulos semejantes, establecidos como teoremas en esta geometría.

Ambas características nos parecen deseables en la formación matemática de un ingeniero, la primera por la importancia que tiene en la modelación algebraica de situaciones geométricas y la segunda porque facilita la explicación y la argumentación de resultados geométricos. Pero en los cursos de Geometría Analítica que se ofrecen a los estudiantes de Ingeniería en nuestro país, los métodos enfatizan la algebrización y la graficación de curvas a partir de sus respectivas ecuaciones. En particular el tema de lugares geométricos está centrado en la construcción de representaciones gráficas a partir de representaciones algebraicas.

Decidimos diseñar secuencias en las que se promuevan las características mencionadas, a pesar de las dificultades que los estudiantes puedan enfrentar para desarrollarlas, sobre todo porque la Geometría del bachillerato cada vez provee menos al estudiante de experiencias relacionadas con la segunda característica.

Secuencias y aplicación

Retomando las ideas de Descartes, Arcavi y Kuzniak y apoyándonos en el software GeoGebra, hemos elaborado una serie de secuencias didácticas sobre la noción de lugar geométrico. La idea es que los estudiantes de ingeniería justifiquen algunos resultados geométricos elementales con argumentos propios del paradigma II. Dados los antecedentes sobre la geometría, con la que han tenido contacto en el bachillerato, no esperamos que las actividades propuestas en estas secuencias estén exentas de dificultades, pero nos interesa también estudiar la naturaleza de estas dificultades.

Las secuencias fueron cinco en total y los estudiantes las desarrollaron a lo largo de dos semanas, en un centro de cómputo en el que cada quien contó con una computadora con el software GeoGebra instalado.

En todas las secuencias se ofrece primeramente al estudiante una construcción en GeoGebra, sin ejes cartesianos, porque se trata de que las relaciones entre segmentos y ángulos sean identificadas por los estudiantes, para que estas relaciones puedan representarse algebraicamente, sin utilizar coordenadas. Nuestro punto de partida es que en una geometría sin coordenadas, los estudiantes podrán concentrarse mejor en las propiedades geométricas de la construcción y en las relaciones que se conservan entre los elementos de la construcción al introducir variaciones en las figuras. En la Tabla 1 mostramos una descripción sucinta de estas cinco secuencias.

Tabla 1. Resumen de las cinco secuencias aplicadas

Secuencia 1
Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al arrastrar el punto B y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). c) Encontrar la ecuación en s y t de la circunferencia en el caso de la Figura i), de la elipse en términos de s y u, en el caso de la Figura ii) y de la elipse en términos de x y y, en el caso de la Figura iii).
Características de las construcciones

AC es una recta fija, AB es un segmento de magnitud constante, BC y AC son perpendiculares, $AC = s$ y $BC = t$.	La construcción es la misma que en la Figura i), pero se ha trazado un punto D colineal a B y C, de tal modo que $DC = u$ es el doble que $BC = t$.	La construcción es la misma que en la Figura ii), pero trasladada y rotada en el plano cartesiano para que A coincida con el origen de coordenadas y C se mantenga sobre el eje X .

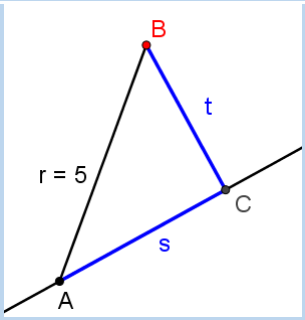
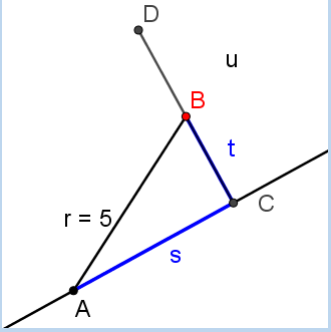
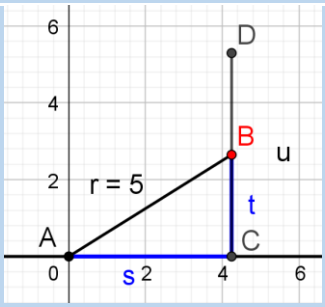

		

Figura i)	Figura ii)	Figura iii)

Secuencia 2

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al variar k y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Verificar que la curva trazada por P es una circunferencia y justificar geométricamente este resultado. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en s y t de la circunferencia de la Figura ii) y en términos de x y y en la Figura iii).

Características de las construcciones

AB es una recta fija, CBD es un ángulo de medida k, BE es la bisectriz del ángulo CBD, AP es la paralela a la bisectriz trazada por A y P es el punto de intersección de AP y BP.	La construcción es la misma que en la Figura i), pero se ha trazado desde P, una perpendicular a AB que interseca a AB en Q y se ha etiquetado como s al segmento BQ y como t al segmento QB.	La construcción es mostrada en la Figura ii), pero se ha trasladado y rotado para que la recta AB coincida con el eje X y B coincida con el origen.

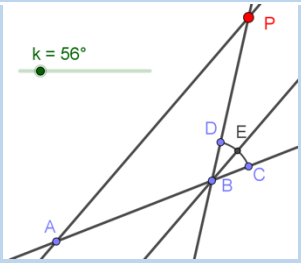
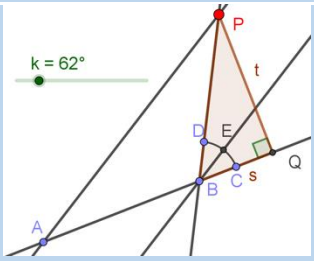
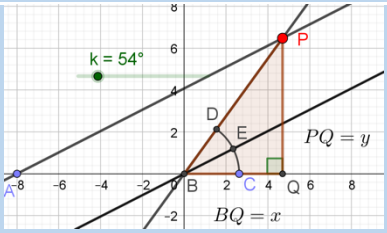

		

Figura i)	Figura ii)	Figura iii)

Secuencia 3

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al arrastrar el punto B (Figuras ii) y iii) y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Justificar geométricamente por qué el punto H traza un arco de circunferencia y el punto J un arco de elipse. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en r y s del arco de circunferencia trazado por el gato

(Figura ii)) y de la elipse trazada por el punto J , en términos de u y t, cuando el punto B se arrastra (Figura iii)).

Características de las construcciones		
El ángulo que forma la barda con el piso es recto, la escalera (segmento AB) mide 6 m, el gato permanece en el punto medio de la escalera (H) cuando la escalera se desliza.	La construcción es la ya mostrada en la Figura i) (ahora sin gato) y sobre la cual se ha trazado el triángulo rectángulo EHD. Los segmentos CD y DH, se han etiquetado como r y s respectivamente.	Ahora sobre la Figura ii), se ha trazado el punto J como punto medio del segmento AH. También se ha trazado el ángulo recto FJG. Los segmentos FJ y JG se han etiquetado como u y t respectivamente.

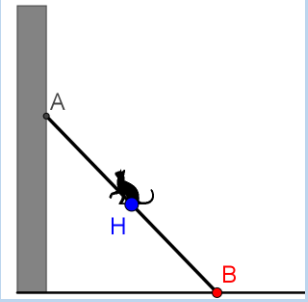
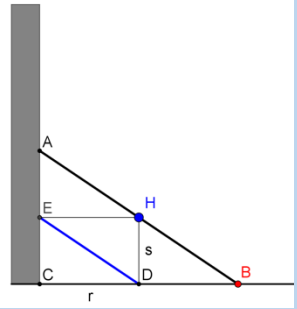
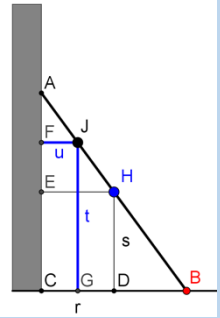

		

Figura i)	Figura ii)	Figura iii)

Secuencia 4

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al arrastrar el punto Q (Figuras i) y ii) y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Justificar geométricamente, por qué la curva trazada por P, corresponde a una parábola. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en t y s de la parábola trazada por el punto P, cuando se arrastra el punto Q. e) Encontrar la ecuación de la parábola en término de x y y, cuando la construcción se traslada al origen del plano cartesiano (Figura iii)).

Características de las construcciones		
AO es una recta fija y Q un punto sobre la perpendicular a AO trazada por O. La recta que pasa por M es la mediatriz a AB que interseca en P a la perpendicular a OQ trazada por Q.	La construccion es la ya mostrada en la Figura i), en la que se han resaltado los triángulos AOQ y QMP. Se han etiquetado además el segmento fijo $AO = a$ y los segmentos $OQ = t$ y $PQ = s$.	La construcción es la misma que la mostrada en la Figura ii), pero ha sido trasladad y rotada para que las rectas AO y OQ coincidan con los ejes cartesianos.

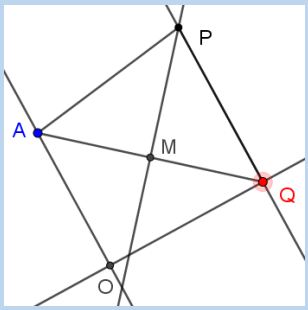
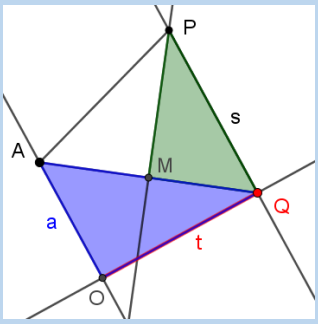
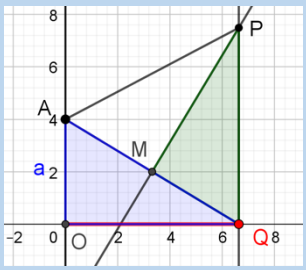
		

Figura i)	Figura ii)	Figura iii)

Secuencia 5

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades que se conservan, al arrastrar el punto P (Figura i)) y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Justificar geométricamente por qué el punto B traza elipse. c) Encontrar la ecuación en términos de x y y, de la elipse trazada por el punto B (Figura ii)).

Características de las construcciones		
C es el centro de una circunferencia de radio 5, P es un punto sobre esta circunferencia, A s un punto fijo tal que $CA = 4$, la recta punteada es la mediatriz del segmento AP y B es el punto de intersección entre esta mediatriz y la recta CP.	La construcción es la mostrada en la Figura i), pero ahora está en el plano cartesiano y ha sido trasladada y rotada para que A y C queden sobre el eje X y para que el origen de coordenadas coincida con el punto medio de CA.	

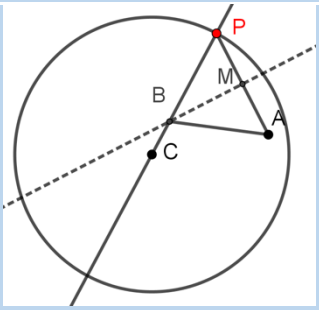
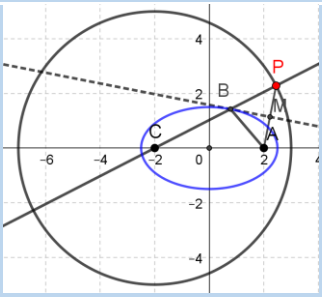

	

Figura i)	Figura ii)	

Fuente: Elaboración propia

A continuación, detallamos la Secuencia número dos, con el propósito de mostrar su estructura y porque la usaremos para ilustrar los resultados de la aplicación.

La secuencia inicia proporcionando al estudiante una construcción en GeoGebra y la explicación de las características con las que ha sido construida (Ver Figura 5):

En la construcción siguiente (Figura 1), se han trazado dos puntos A y B a 8 unidades de distancia entre sí sobre una recta cualquiera, luego se trazó la recta BD formando un ángulo CBD con la primera, posteriormente se ha trazado la bisectriz BE al ángulo CBD y una recta paralela a BE que pasa por A. Esta paralela interseca a la recta BD en el punto P. El ángulo CBD puede abrirse y cerrarse usando el delizador *k*. Abra el archivo Círc1.ggb y arrastre el deslizador *k* para verificar que la construcción funciona como se ha explicado.

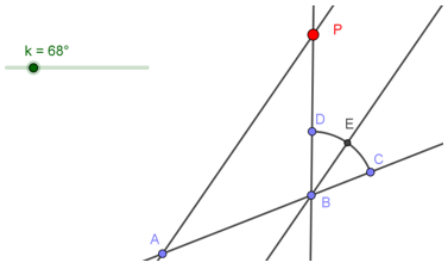


Figura 5. Construcción para trazar una circunferencia
Fuente: Elaboración propia.

Luego se pide al estudiante que explore la construcción, haciendo variar el "deslizador k" y que observe al mover la construcción, algunas características específicas de la misma. Las tareas aquí pretenden sistematizar la exploración: que distinga primero aquellas cantidades (medidas de ángulos y segmentos) que cambian de las que permanecen constantes durante el movimiento y luego que establezca las relaciones posibles entre estas cantidades, principalmente las relaciones de igualdad. El trabajo con esta construcción concluye con la solicitud al estudiante de que justifique geométricamente las relaciones detectadas.

Con el propósito de aproximarnos a un sistema de referencia, se propone una segunda construcción, que es similar a la primera, pero se han añadido algunos trazos que puedan servir de referencia para representar algebraicamente las relaciones identificadas entre las cantidades, la Figura 6 muestra esta nueva construcción.

3. Sobre la misma construcción se ha trazado ahora una perpendicular a la recta AB, que pasa por P e interseca a la recta AB en el punto Q, por estas razones el triángulo BQP mostrado en la Figura 2, es rectángulo.

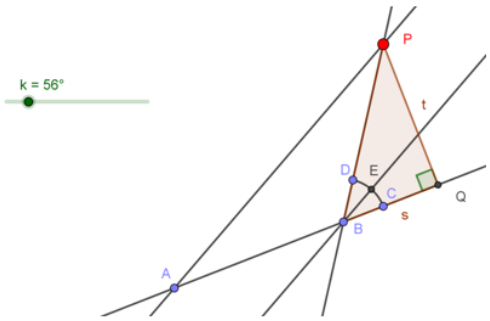


Figura 6. Construcción para trazar una circunferencia, con referencias
Fuente: Elaboración propia.

La secuencia concluye con la introducción de coordenadas cartesianas para tomarlas como referencia y expresar algebraicamente la curva trazada por el punto P, cuando se hace variar el parámetro k. En la Figura 7 puede verse el aspecto que tiene esta última construcción, en la cual las variables s y t han sido denotadas ahora como x y y.

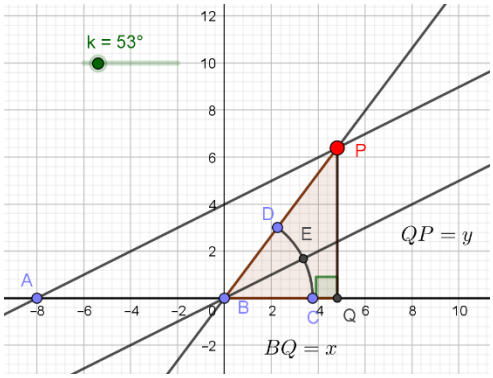


Figura 7. Construcción para trazar una circunferencia en el plano cartesiano
Fuente: Elaboración propia.

Análisis y resultados

Los resultados de este estudio revelan que en general, los estudiantes que ingresan a las carreras de Ingeniería, no están en condiciones de utilizar los métodos propios de la geometría axiomática natural y los que pueden hacerlo, lo hacen con poca pericia, como podrá verse a continuación.

A lo largo del desarrollo de estas secuencias, hemos concentrado la atención en aquellas preguntas en las que se solicita a los estudiantes justificar alguna proposición geométrica, porque nuestro interés principal es el de observar la naturaleza de las argumentaciones construidas por los estudiantes. Hemos clasificado a los estudiantes en cuatro tipos, según las características de sus respuestas a las preguntas de interés:
Tipo 1. Ubicamos aquí a los estudiantes que han ofrecido respuestas cuyas formas de argumentación han resultado poco coherentes y para los cuales el Paradigma II pareciera desconocido.

Tipo 2. Clasificamos aquí a los estudiantes que confunden las tesis con las hipótesis en una proposición geométrica y justifican con frecuencia las tesis, usando otra versión de las mismas.

Tipo 3. Consideramos que un estudiante pertenece a este tipo, cuando usa los métodos de la Geometría II de una manera inconsistente, sus justificaciones parecieran depender de la proposición específica que pretende justificar.

Tipo 4. Estudiantes que usan los métodos propios del Paradigma II, para construir sus argumentaciones.

La distribución de los 35 estudiantes que concluyeron las cinco secuencias puede observarse en la Tabla 2.

Tabla 2. Distribución de estudiantes por su tipo de respuestas.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Número de estudiantes	6	14	7	8

Fuente: elaboración propia

Ilustraremos los resultados con ejemplos extraídos de la Secuencia 2; en la cual, después de haber explorado la construcción mostrada en la Figura 5 y una vez que han establecido cuáles son los ángulos que permanecen iguales al arrastrar k, los estudiantes concluyen sin dificultades que el triángulo ABP es isósceles. Como podrá verse en las

respuestas siguientes, sus dificultades empiezan cuando intentan justificar algunos de los resultados obtenidos. En el inciso d) se les pide que justifiquen por qué el triángulo se mantiene isósceles y en el inciso e) se solicita que justifiquen por qué el segmento BP funciona como radio del círculo, es decir por qué su magnitud no cambia. La construcción ofrece datos sobre los ángulos y sobre el segmento AB, se esperaba entonces que llegaran a la conclusión de que el triángulo ABP es isósceles, partiendo de que dos de sus ángulos permanecen siempre iguales, como consecuencia de las propiedades de ángulos formados al intersecar dos paralelas con una recta, y pudieran argumentar que por lo tanto sus lados opuestos AB y BP debieran ser siempre iguales.

Ilustraremos a continuación los cuatro tipos de respuesta. Las respuestas se han escaneado para respetar el estilo con el que fueron escritas.

En las de Tipo 1, se tienen respuestas poco coherentes, en las cuales no pareciera concebirse conexión alguna entre las tesis y las hipótesis, sino más bien un intento por describir lo que se observa en la construcción; estas respuestas, como la que se muestra en la Figura 8, son las que más claramente se asocian con el Paradigma 1, en donde los objetos geométricos se perciben como objetos físicos, que a lo más podemos medir y describir.

d) Justifique su afirmación anterior
Por que dos angulos son iguales y el otro diferente
e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
La recta no cambia por que esta girando en al punto b, no hay otro factor que lo cambie

Figura 8. Ejemplo de una respuesta de Tipo 1
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En las de Tipo II, podemos ver respuestas como la mostrada en la Figura 9, en la que el estudiante recurre a la definición de triángulo isósceles para argumentar que el triángulo es isósceles. Y cuando intenta justificar por qué el segmento BP mantiene su magnitud constante, recurre a su percepción visual como fuente de argumentación. Es claro que los estudiantes ubicados en este caso no reconocen las hipótesis del problema y confunden las causas con los efectos en la construcción. Claramente están ubicados en el Paradigma 1, porque no están en condiciones de usar el razonamiento deductivo al construir una argumentación

d) Justifique su afirmación anterior
Porque tienen dos ángulos iguales y dos lados iguales por lo tanto son características por la cual se conforma un triángulo isósceles.
e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
Porque la construcción obliga a que el segmento AP siempre se mantenga fijo.

Figura 9. Ejemplo de una respuesta de Tipo 2
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En este segundo tipo, incluimos también respuestas como la que puede observarse en la Figura 10, con respuestas similares al inciso d) de la Figura 9, pero que en el inciso e) se limitan a ubicar una característica del segmento BP, para usarla como argumento, aunque sea ajeno a la razón por la cual el segmento BP permanece constante:

d) Justifique su afirmación anterior
Es isocele ya que siempre tiene dos ángulos iguales y el segmento de la recta AB es igual que PB.
e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento. Por que es una línea que interesca a dos líneas paralelas

Figura 10. Otro ejemplo de una respuesta de Tipo 2
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En un tercer tipo de respuestas se observa que el estudiante mezcla formas de argumentar del Paradigma 1 con argumentos propios del Paradigma 2, éste es el caso de la respuesta que mostramos en la Figura 11, en la se ofrece una respuesta al inciso d) que se ha desprendido de la observación, pero no deja en claro que la igualdad de ángulos implica la igualdad de lados, en cambio responde al inciso e) con mucha claridad al respecto de que tratándose de un triángulo isósceles con un lado fijo, el otro lado deberá tener una magnitud fija. Consideramos que la respuesta al primer inciso no corresponde al Paradigma 2, pero su respuesta al segundo inciso cae en las formas de argumentar propias del este paradigma.

d) Justifique su afirmación anterior
A pesar de su movimiento siguen siendo siendo con 2 lados iguales Y tiene ángulos iguales
e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
El segmento AB mide 8 y al ser triángulo isósceles mide igual que BP entonces a pesar del movimiento medirán lo mismo y se mantiene constante

Figura 11. Ejemplo de una respuesta de Tipo 3
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Y el cuarto tipo de respuesta corresponde a las que propiamente pueden ubicarse en el Paradigma 2, en donde se observa que el estudiante reconoce los datos proporcionados, como hipótesis a partir de las cuales puede construir sus argumentaciones, la Figura 12, muestra una de estas respuestas.

d) Justifique su afirmación anterior
R: porque tiene dos ángulos internos iguales y por lo tanto dos lados iguales que son los opuestos a los ángulos iguales.
e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
R:porque al ser triángulo isoceles obliga a que el segmento BP permanezca de la misma magnitud del AB, y como AB nunca cambia, este tampoco.

Figura 12. Ejemplo de una respuesta de Tipo 4
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Conclusiones

De los 35 estudiantes que integraban el grupo, apenas 8 pudieron presentar argumentos de manera consistente para justificar proposiciones, que han respondido del Paradigma 2 y que aquí hemos catalogado como respuestas de Tipo

4. El resto, en mayor o menor medida, permanecen anclados en las formas de argumentación propias del Paradigma 1. Estos hallazgos son preocupantes, porque la mayor parte de los estudiantes han mostrado estar imposibilitados para usar argumentos deductivos a la hora de justificar proposiciones geométricas, sus respuestas indican que pueden identificar hechos geométricos, pero no pueden presentar argumentos deductivos para explicarlos, lo cual resulta grave en estudiantes que cursan una carrera de Ingeniería. En la Tabla 2, puede observarse que las respuestas ubicadas fuera del Paradigma 2 no son homogéneas. En las respuestas de Tipo 1 podemos ver a los estudiantes más distantes del Paradigma 2 (seis en total) a los cuales se asocia además un desconocimiento recurrente de las definiciones de los objetos geométricos con los que han trabajado. La mayor cantidad de casos se presentaron en las respuestas de Tipo 2 (14 en total), las dificultades enfrentadas por estos estudiantes están relacionadas con la imposibilidad de ofrecer argumentos deductivos, en la medida en la que no identifican el punto de partida para validar un resultado geométrico. En todo caso, los estudiantes que dieron respuestas de Tipo 3 (siete en total), parecieran ubicados en una etapa de transición entre los dos paradigmas considerados, pero sus respuestas se mueven de un paradigma a otro dependiendo de la proposición que intentan validar.

Anotamos finalmente que el uso de GeoGebra ha resultado atractivo para los estudiantes, pero esto no se ha reflejado en mejorar la naturaleza de las argumentaciones que han presentado. Consideramos también que el presente estudio abre varias interrogantes que tendríamos interés en estudiar en el futuro, una de ellas tiene que ver con la enseñanza de la geometría en los niveles pre-universitarios, porque ahora tenemos indicios de que existen una serie de inconsistencias curriculares en este nivel, en lo que se refiere a la Geometría.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *Journal of Computers for Mathematical Learning 5*: 25–45.

Descartes, R. (1954) *The Geometry*. New York: Dover.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different paradigms, in M. Mariotti (ed.), *Proceedings of CERME 3*, Italy: ERME. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf

Morales, E., Rivera, H., Cárdenas, L., Conde, M., y Amavisca, R. (2016). *Matemáticas 2*. Hermosillo, México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Morales, E., Cárdenas, L., Conde, M., Palafox, M., y Amavisca, R. (2018). *Matemáticas 3*. Hermosillo, México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

CONSIDERACIÓN DEL CONOCIMIENTO DEL MUNDO REAL EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS VERBALES EN ESTUDIANTES DE ESCUELA SECUNDARIA

CONSIDERING REAL-WORLD KNOWLEDGE IN MATHEMATICAL WORD PROBLEM SOLVING IN SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Freddy Martínez García, José Gabriel Sánchez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México), Universidad Nacional Autónoma de México-Campus Zaragoza
freddymg23@gmail.com, josgsr@unam.mx

Resumen
En esta investigación de carácter empírica se indagó acerca del uso de los conocimientos del mundo real en la resolución de problemas aritméticos verbales. Participó un grupo de alumnos, de distinto grado, de una escuela secundaria de la ciudad de Puebla (México). Se administraron 10 problemas aritméticos verbales. Se analizaron las dificultades que surgen durante la resolución y el modelamiento en cada problema específicamente la falta de activación del conocimiento del mundo real. Se encontró una evidente propensión en los estudiantes a excluir el conocimiento del mundo real, mostrando un número pequeño de respuestas o comentarios con elementos realistas.

Palabras clave: resolución de problemas, problemas no rutinarios, pensamiento crítico

Abstract
In this empirical research we investigated about the use of real-world knowledge in arithmetic word problem solving. The sample involved a group of students, of different grade levels, from a secondary school in Puebla City (Mexico). Ten arithmetic word problems were applied. We analyzed the difficulties that arise while modeling and solving each problem; specifically, the lack of activation of real-world knowledge. The students showed an obvious tendency to exclude real-world knowledge, making few responses or comments with realistic elements.

Key words: problem solving, non-routine problems, critical thinking

Introducción

Como profesores de matemáticas hemos observado que cuando los estudiantes resuelven problemas en sus soluciones tienden a dejar de lado la interpretación numérica en relación con el contexto del problema. Según Saiz (1994) los alumnos no dan significado al algoritmo que ponen en práctica, lo que hace que no puedan interpretar lo que obtuvieron en las distintas etapas del cálculo en términos del problema planteado.

Por ejemplo, la solución de un problema como el siguiente: *Pedro ha organizado una fiesta para su cumpleaños. Pedro invita a 8 amigos y 4 amigas. ¿A cuántos amigos ha invitado Pedro a su cumpleaños?* No suele presentar dificultad para los alumnos.

Pero, cuando este mismo problema se formula de una forma no rutinaria como: *Carlos tiene 5 amigos y Jorge tiene 6 amigos. Carlos y Jorge deciden celebrar juntos su cumpleaños e invitan a todos sus amigos. Todos sus amigos asisten a la fiesta. ¿Cuántos amigos asisten?* Donde la solución puede ser cualquier número comprendido entre 6 y 11, sin contar a Carlos y Jorge, puesto que pueden tener hasta 5 amigos comunes, es cuando los alumnos muchas veces omiten información del mundo real, no ponen en contexto la situación problema (Verschaffel et al., 1994). Esto se debe en cierta medida al impacto de algunas de las creencias incorrectas que los niños tienen acerca de las matemáticas sobre el fracaso en la resolución de problemas, pues tienden a operar y dar una respuesta numérica aun cuando el problema se resuelva con palabras (Jiménez y Ramos, 2011). Los profesores muchas veces contribuyen a que esto no mejore debido al uso de problemas rutinarios en la mayoría de las ocasiones durante su labor docente, esto tal vez por facilidad en su práctica o muchas veces por seguir lo que dice el libro de texto (Dewolf, Van Dooren y Verschaffel, 2017). Por lo anterior, en este trabajo se pretende explorar y recopilar datos empíricos sobre la activación o no del conocimiento realista durante la comprensión y la solución de problemas aritméticos verbales, específicamente en las etapas inicial (representación y modelación del problema) y final (interpretación y verificación de estrategias de solución) del proceso de resolución.

La hipótesis general con respecto a la prueba fue que, debido a su experiencia continua con una dieta empobrecida de problemas verbales estándar y a la falta de atención sistemática a la perspectiva del modelado matemático en sus clases de matemáticas, los alumnos demostrarían una fuerte tendencia a excluir el conocimiento del mundo real, respondiendo de forma sistemática mediante la aplicación de algoritmos, ignorando el contexto del problema. Se esperaba, además, que los resultados de estos alumnos fueran mejores que los obtenidos por los participantes en los estudios de Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) y Verschaffel, De Corte y Borghart (1997).

Marco referencial

Los problemas matemáticos aritméticos constituyen una parte importante del programa de matemáticas de la escuela. La razón más importante para usar este tipo de problema es capacitar a los alumnos en la aplicación del conocimiento matemático formal y las habilidades aprendidas en la escuela, en situaciones de la vida diaria (Jiménez, 2012).

Para Sánchez, Carrillo, Vicente y Juárez (2015) existen dos tipos de tareas que se pueden realizar en el aula de clase: Los ejercicios (entendidos como la tarea cuyo resultado es calculado mediante una mera reproducción de contenidos aprendidos previamente) y los problemas. Un problema para un alumno es una tarea que requiere de una solución bajo ciertas condiciones específicas: si él comprende la tarea, pero no encuentra una estrategia inmediata para su solución y, finalmente, si es motivado para buscar una solución. Es decir, "un problema es una situación que difiere de un ejercicio en que el resolutor de problemas no tiene un proceso algorítmico que le conducirá, con certeza, a la solución" (Kantowski, 1981, p. 113). Uno de los tipos de problemas que más se consideran en las aulas son los denominados problemas verbales, es decir, aquellos problemas en los que es necesario la respuesta a una o varias

preguntas mediante operaciones matemáticas con datos expuestos en el propio problema (Sánchez et al., 2015). Estos problemas se pueden categorizar de muy diversas formas, una de las cuales es la sugerida por Jiménez (2012):

1) Problemas rutinarios: aquellos que pueden ser resueltos de forma automática, detectando palabras clave en el texto y aplicando estrategias de cálculo rutinarios.

2) Problemas no rutinarios: aquellos en que los alumnos no conocen inmediatamente el procedimiento de resolución, ya que la aplicación de la operación aritmética más obvia no conduce sin más a la solución apropiada.

De acuerdo con lo mencionado por Dewolf et al. (2017, p.335) "…existe una amplia evidencia de que los niños de primaria superior y secundaria inferior, e incluso los estudiantes de educación superior, resuelven problemas matemáticos verbales sin tener en cuenta las realidades de la vida cotidiana".

Un ejemplo de la falta de realismo en las respuestas de los alumnos ha sido igualmente estudiado con problemas de división con resto (Verschaffel et al., 1994; Jiménez y Ramos, 2011). Con el famoso problema del "Autobús" (i.e., *Un autobús del ejército tiene 36 lugares. Si van a trasladar 1128 soldados ¿cuántos autobuses se necesitan?*), empleado en la Tercera Evaluación Nacional sobre el Progreso Educativo y en el Test de Matemáticas del Programa de Evaluación de California, ambos desarrollados en 1983, se encontró que aproximadamente el 19% de los alumnos respondieron que se necesitarían 31 autobuses, dejando "en tierra" a 12 soldados, mientras que el 29% contestó que serían necesarios 31.33 autobuses. Lo anterior muestra que en ocasiones los estudiantes tienden a ignorar el conocimiento del mundo real e incluso a aceptar premisas sobre el contexto del problema que son empíricamente falsas. Según Verschaffel et al. (1994) causado y fortalecido por dos factores de instrucción:

1) La dieta empobrecida y estereotipada de los problemas matemáticos estándar, que siempre se pueden modelar y resolver mediante el uso directo de una o más operaciones aritméticas con los números dados.

2) Varias características de la práctica y cultura institucional actual, como la prematura imposición del enfoque aritmético formal en resolución de problemas requiriendo que los alumnos deben identificar la operación aritmética correcta para resolver un problema planteado y, de manera más general, la falta de atención a la perspectiva de modelado como uno de los bloques de construcción de una genuina disposición matemática.

Los problemas verbales realistas son aquellas situaciones en las cuales se necesita además del conocimiento matemático un razonamiento del mundo real, en donde la operación matemática da una solución que desde el punto de vista matemático es correcta, pero desde la vida real es contradictoria (Verschaffel et al., 1994). De acuerdo con Dewolf et al. (2017) se espera que los estudiantes usen sus conocimientos y habilidades matemáticas, así como también el conocimiento del mundo real de manera integradora en las diferentes fases del proceso de solución, especialmente en las fases iniciales (en las que primero tienen que entender la situación, construir un modelo de situación y luego construir un modelo matemático) y en las etapas finales (en las que derivan una solución matemática e interpretan su solución en relación con la situación de la vida real).

Verschaffel, Greer y De Corte (2000) proponen un modelo que describe las etapas por las cuales el alumno se conduce en la resolución de problemas (véase Figura 1). Sánchez et al. (2015) basados en este modelo mencionan que el resolutor, en un primer momento, genera un modelo situacional donde debe elegir qué información del texto del problema es importante (selección). Posteriormente, debe crear un modelo matemático generando el algoritmo de resolución apropiado y una estructura matemática apropiada en términos cuantitativos y de relación de datos (razonamiento).

Una vez generados ambos modelos, se interpreta la relación entre el modelo matemático y el de situación para validar e interpretar los datos.

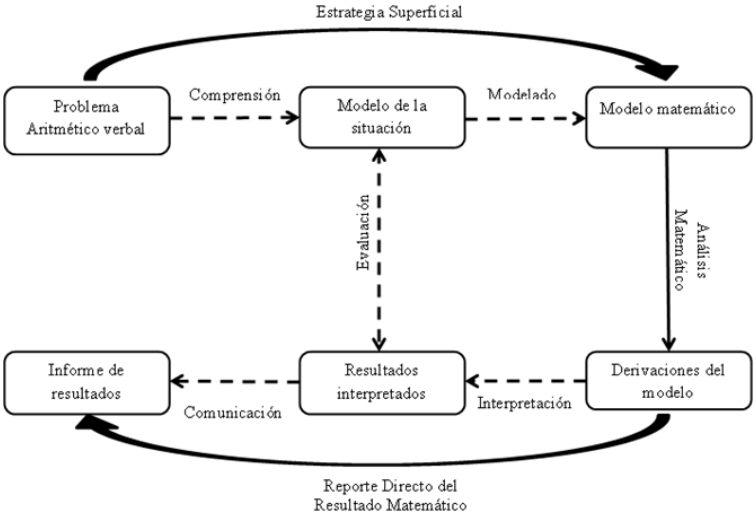


Figura 1. Modelo de resolución de problemas (Verschaffel et al., 2000).

Para Sánchez et al. (2015) los estudiantes pueden crear el modelo de la situación de forma superficial de manera que llegan al modelo matemático sin un razonamiento propiamente dicho. Es decir, mecanizan la selección de datos y deciden el algoritmo que van a utilizar a partir de algún elemento significativo del enunciado a través del cual ofrecen la solución que, en esos casos, no responde de forma razonada a la cuestión original.

Cuando los maestros resuelven problemas no rutinarios en conjunto con sus alumnos en el aula, se podría considerar que:

• Se promueve el razonamiento en mayor medida que cuando resuelven problemas rutinarios.
• El nivel de participación de los alumnos es mayor que cuando resuelven problemas rutinarios.

Para Dewolf et al. (2017), otro elemento importante en los antecedentes teóricos y empíricos del estudio actual en la literatura es el papel de las ilustraciones (es decir, visualizaciones o representaciones como dibujos, bocetos, pinturas, fotografías y otras representaciones gráficas).

Metodología

Participantes

Voluntariamente participaron 30 alumnos provenientes de una escuela secundaria privada del Estado de Puebla, en México. Los alumnos estaban distribuidos equitativamente en tres grupos, cada uno de un grado diferente. Las características de cada grupo fueron las siguientes:

En el grupo de primer grado había 7 alumnos masculinos, con edades de 12 a 13 años, y 3 alumnas, con una edad de 12 años, con una media de edad de 12.3 años. En el grupo de segundo grado había 5 alumnos, con edades de 13 a 14 años, y 5 alumnas, con una edad de 13 años, la edad media del grupo era de 13.3 años. En el grupo de tercer grado había 5 alumnos masculinos, con edades de 14 a 15 años y 5 alumnas con edades de 14 a 15 años. La edad media fue de 14.2 años.

Materiales

Se utilizó una prueba de papel y lápiz que consta de 10 problemas verbales, reportados en el estudio de Verschaffel et al. (1997), en los que los supuestos de modelado matemático subyacentes son problemáticos desde un punto de vista realista, incluyendo 3 problemas verbales que funcionaron como elementos de búfer, sin embargo, por el objetivo de este estudio solo se analizaron problemas (véase Tabla 1).

Tabla 1. Problemas analizados y utilizados en el estudio tomados de Verschaffel et al. (1994)

Nombre	Problema
Autobuses	450 soldados deben ser transportados a su sitio de entrenamiento. Cada bus del ejército puede albergar a 36 soldados. ¿Cuántos autobuses se necesitan? (Carpenter et al., 1983).
Colegio	Bruce y Alice van a la misma escuela. Bruce vive a una distancia de I7 kilómetros de la escuela y Alice a 8 kilómetros. ¿Qué tan lejos viven Bruce y Alice el uno del otro? (Treffers & de Moor, 1990).
Corredor	El mejor momento de John para correr 100 metros es de 17 segundos. ¿Cuánto tiempo tomará recorrer 1 kilómetro? (Greer, 1993).
Matraz	Este matraz se está llenando desde un grifo a una velocidad constante. Si la profundidad del agua es de 3.5 cms después de 10 segundos, ¿qué tan profundo será después de 30 segundos? (Este problema fue acompañado por una imagen de un matraz en forma de cono parcialmente lleno) (Greer, 1993).
Cuerda	Un hombre quiere tener una cuerda lo suficientemente larga como para estirarse entre dos polos I2 metros de distancia. Pero solo tiene trozos de cuerda de 1,5 metros de largo. ¿Cuántas de estas piezas necesitaría atar para estirarse entre los polos? (Greer, 1993).
Tablones	Steve ha comprado 4 tablones de 2,5 metros cada uno. ¿Cuántos tablones de metro puedo sacar de estos tablones? (Kaelen, 1992).
Amigos	Carl tiene 5 amigos y Georges tiene 6 amigos. Carl y Georges deciden dar una fiesta juntos. Invitan a todos sus amigos. Todos los amigos están presentes. ¿Cuántos amigos hay en la fiesta? (Nelissen, 1987).

Procedimiento

La aplicación de los problemas fue hecha por uno de los autores de este trabajo. Las instrucciones se mantuvieron al mínimo. Con respecto a cada problema, se les pidió a los alumnos que escribieran la respuesta, también fueron invitados a mencionar cómo llegaron a su respuesta, una vez que comenzaron las pruebas, los alumnos no podían hacer preguntas si tenían dudas o no podían resolver el problema fueron invitados a escribir el porqué de esta situación.

Manejo y análisis de datos

Para los siete problemas analizados, se obtuvieron dos tipos de datos:

1. La respuesta dada por el alumno.
2. Notas escritas de los participantes, como cálculos escritos y / o consideraciones realistas.

Con base en el trabajo de Verschaffel et al. (1994) se identificaron 5 categorías de respuestas para su calificación. Para ilustrar cómo se procedió al respecto se utilizará el siguiente problema:

Steve ha comprado 4 tablas de 2.5 m cada una. ¿Cuántas tablas de 1 m puede ver en estos tablones?

Respuesta esperada (RE), resulta de lo anticipado y directo aplicación no problemática de las operaciones aritméticas provocadas por el problema declaración. La respuesta esperada para el problema de ejemplo mencionado anteriormente es 10, es decir, el producto de 4 veces 2,5 m.

Error técnico (TE), resulta de la aplicación directa de las operaciones aritméticas esperadas provocadas por la declaración del problema, pero difiere de una RE porque en este caso se comete una ejecución inexacta o con fallas en las operaciones aritméticas. Por ejemplo, si un alumno contestó el problema de ejemplo con 100 m en lugar de 10 debido a que no se tiene en cuenta la naturaleza decimal del número 2.5 durante el cálculo de 4 por 2.5, esta respuesta se calificó como un TE.

Respuesta realista (RR), consiste en obtener una respuesta donde prevalece el uso efectivo del conocimiento del mundo real sobre el contexto provocado por el enunciado del problema en una o más etapas del proceso de solución. La RR para el problema de ejemplo es 8; de hecho, en la vida real solo se pueden ver 2 tablas de 1 m de una tabla de 2.5 m; entonces, 4 de estas tablas producirán 8 tablas de 1 m, no 10.

Sin respuesta (NR), esta categoría se usó cuando el alumno no respondió el problema o cuando escribió que no pudo responderlo.

Otra respuesta (OR), de esta manera se designan a todas las respuestas que no pudieron clasificarse en una de las categorías anteriores. Los errores típicos que pertenecen a esta categoría son: errores de operación incorrecta (por ejemplo, resolver el problema de ejemplo mediante una adición en lugar de una multiplicación con los dos números dados, resultando en 6.5 como respuesta) y errores de número dado (por ejemplo, respondiendo el ejemplo problema con 4 o 2.5), pero también otros errores, para los cuales no había una explicación clara, fueron calificados de esta manera.

Las notas de los alumnos también se analizaron en busca de indicios de vacilación para realizar la operación matemática simple y directa (por ejemplo, criticando el enunciado del problema, complementando la respuesta con ciertos comentarios calificativos, etc.), debido a la activación de conocimiento del mundo real o consideraciones realistas.

Si se encuentra rastro de esto, se agregó un signo ' +' al código de respuesta; si el área de comentarios no contenía tal rastro, el código de respuesta fue seguido por un signo "-". Al respecto, es importante señalar que un código "+" podría coincidir con las cinco categorías de respuesta. Un alumno que resolvió el problema de ejemplo con la respuesta esperada 10, pero que observó en el área de comentarios que, para llegar a 10 tablones de 1 m, el protagonista tendría que pegar las 4 piezas restantes de 0,5 m de dos en dos, fue calificado como EA +, mientras que un alumno que simplemente anotó la fórmula 4 x 2.5 = se calificó como EA-.

De manera similar, un alumno que no respondió el problema pero que escribió en el área de comentarios que se saltó este problema porque no sabía qué hacer con los 4 tablones restantes de 0.5m, se calificó como NA +, mientras que un alumno que simplemente se saltó el problema sin proporcionar una buena razón para hacerlo, se calificó como NA-. La misma distinción también se aplica a las respuestas realistas: la respuesta realista 8 sin ningún otro comentario se calificó como RA-, mientras que la misma respuesta con una explicación adecuada (por ejemplo, "Uno no puede ver tablas de 1 m de tablas de 0,5 m") fue calificado como RA +.

Análisis de resultados

La hipótesis formulada en nuestro estudio fue que los alumnos, debido a su experiencia continua con una dieta empobrecida de problemas verbales estándar y a la falta de atención sistemática a la perspectiva del modelado matemático en sus clases de matemáticas, demostrarían una fuerte tendencia a excluir el conocimiento del mundo real.

Si bien algunos libros de texto actuales prestan atención al problema de dar sentido al resultado de una división, las dificultades de modelado matemático realistas involucradas en otro tipo de problemas como los utilizados en este estudio, están completamente ausentes en los libros de texto. Por lo tanto, es mucho mayor la probabilidad de darse cuenta de lo absurdo de la respuesta estereotipada y no realista en el problema de los autobuses que en los otros. También nos preguntamos ¿existe una diferencia entre los alumnos que casi habían completado el tercer año de secundaria y los alumnos que acababan de comenzar el primer año de secundaria?

Se podría argumentar que los alumnos de tercer año tendrían una mayor disposición hacia modelos matemáticos realistas. Asimismo, que los alumnos de tercer año deben inevitablemente encontrarse con situaciones que invitaron o necesitaron tratar y reflexionar sobre las dificultades involucradas en modelos matemáticos realistas. También se puede suponer que la cantidad y / o la naturaleza de estas ocasiones fueron insuficientes para tener un impacto positivo y significativo en las cogniciones y creencias de estos alumnos sobre el tema de los modelos matemáticos realistas. Incluso se podría argüir que, debido a sus tres años de experiencia con un enfoque tradicional hacia las matemáticas de la escuela secundaria y con los problemas verbales aritméticos de la escuela en particular, los alumnos de tercer año podrían haber desarrollado una disposición más fuerte hacia modelos estereotipados y no realistas. Debido a estas hipótesis en conflicto, no se hizo una predicción específica sobre cualquier diferencia en el porcentaje de RR entre los estudiantes de primer año y de tercer año.

Después de analizar las respuestas proporcionadas por los 30 alumnos. Se pudo constatar claramente la exclusión del conocimiento del mundo real durante la resolución de los problemas verbales, mostrando simplemente el resultado numérico y solo en algunos casos incluyendo notas que dan destellos de consideración del conocimiento del mundo real aplicado a la solución de los problemas. Analizando las respuestas y notas adicionales de los participantes se encontró evidencia que apoyó nuestra hipótesis general planteada. Como se esperaba, los alumnos en general demostraron una tendencia muy fuerte a excluir el conocimiento del mundo real y las consideraciones realistas cuando se enfrentan a los problemas (véase tabla 2). Solo 1 de los siete problemas analizados obtuvo un número mayor de respuestas que reflejan ajustes de restricciones realistas o cualificaciones basadas en consideraciones realistas.

Tabla 2. Respuestas de los alumnos a cada problema. RE es Respuesta Esperada, TE es Error Técnico, OR es Otra Respuesta, NR es No existió Respuesta y RR es Respuesta Realista, cada una se acompaña de (+) si existió un comentario considerando el mundo real en su respuesta o (-) si dio la respuesta, pero sin comentarios.

Categoría de Respuestas	Problemas						
	Autobuses	Colegio	Corredor	Matraz	Cuerdas	Tablones	Amigos
RE+	**9**	**22**	**18**	**25**	**23**	**19**	**27**
RE-					**1**		

TE+		**1**					
TE-	**1**	**2**	**3**	**2**	**5**	**2**	
OR+							
OR-		**2**	**2**	**1**	**1**	**2**	
NR+							
NR-		**2**	**1**	**2**			**2**
RR+	**14**	**1**	**6**			**3**	**1**
RR-	**6**					**4**	

Se encontró que los alumnos proporcionan un número mayor de respuestas realistas al considerar el problema del autobús, esto puede deberse a las actividades que contienen sus libros de texto, pues actualmente se maneja que pasara con el residuo cuando se trabaja con divisiones con decimales, por lo que el alumno tiene una familiaridad con este tipo de ejercicios. Otra explicación viable es el contexto que emplean los alumnos al responder ya que si consideran que los autobuses no se pueden partir proporcionan mejores respuestas.

Aun cuando se obtuvo una mayor frecuencia de respuestas realistas (RR) para el problema de los autobuses, se puede observar que los alumnos en su mayoría no consideraron el mundo real al momento de responder a los problemas pues sus respuestas muestran una falta de activación de esto, la mayoría de alumnos dan una respuesta recurriendo al algoritmo clásico por lo cual sus respuestas son las esperadas (RE), sus respuestas matemáticamente son correctas pero desde el punto de vista realista no satisfacen lo solicitado por cada problema.

De manera general, es posible decir que de los siete problemas analizados solamente el de los autobuses, el de las tablas y el del corredor fueron en los que se obtuvieron ajustes realistas en las respuestas de los alumnos. Aunque se trabajó con una muestra pequeña, los hallazgos ofrecen una imagen de lo que está pasando en el salón de clase al resolver y plantear problemas: específicamente, el pensamiento del alumno se está dejando de lado o se está suspendiendo la relación entre lo matemático y lo real, debido al uso de problemas rutinarios en la mayoría de las clases de matemáticas. A continuación, mostramos los resultados obtenidos en cada grado escolar (véanse tablas 3, 4 y 5).

Tabla 3. Respuestas de los alumnos de primer año a cada problema donde: RE es Respuesta Esperada, TE es Error Técnico, OR es Otra Respuesta, NR es No existió Respuesta y RR es Respuesta Realista, cada una se acompaña de (+) si existió un comentario considerando el mundo real en su respuesta o (-) si respondió, pero sin comentarios.

Categoría de Respuestas	**Problemas**						
	Autobuses	Colegio	Corredor	Matraz	Cuerdas	Tablones	Amigos

RE+	**2**	**8**	**6**	**9**	**8**	**5**	**10**
RE-							
TE+							
TE-		**1**			**2**	**1**	
OR+							
OR-						**1**	
NR+							
NR-		**1**		**1**			
RR+	**7**		**4**			**2**	
RR-	**1**					**1**	

Tabla 4. Respuestas de los alumnos de segundo año a cada problema donde: RE es Respuesta Esperada, TE es Error Técnico, OR es Otra Respuesta, NR es No existió Respuesta y RR es Respuesta Realista, cada una se acompaña de (+) si existió un comentario considerando el mundo real en su respuesta o (-) si emitió una respuesta, pero sin comentarios.

Categoría de Respuestas	**Problemas**						
	Autobuses	Colegio	Corredor	Matraz	Cuerdas	Tablones	Amigos
RE+	**2**	**8**	**8**	**10**	**9**	**8**	**10**
RE-					**1**		
TE+							
TE-							
OR+							
OR-		**1**					
NR+							

NR-							
RR+	**5**	**1**	**2**			**1**	
RR-	**3**					**1**	

Tabla 5. Respuestas de los alumnos de tercer año a cada problema donde: RE es Respuesta Esperada, TE es Error Técnico, OR es Otra Respuesta, NR es No existió Respuesta y RR es Respuesta Realista, cada una se acompaña de (+) si existió un comentario considerando el mundo real en su respuesta o (-) si dio la respuesta, pero sin comentarios.

Categoría de Respuestas	**Problemas**						
	Autobuses	Colegio	Corredor	Matraz	Cuerdas	Tablones	Amigos
RE+	**5**	**6**	**4**	**6**	**6**	**6**	**7**
RE-							
TE+		**1**					
TE-	**1**	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	
OR+							
OR-		**1**	**2**	**1**	**1**	**1**	
NR+							
NR-		**1**	**1**	**1**			**2**
RR+	**2**						**1**
RR-	**2**					**2**	

De acuerdo con los datos de cada una de las tablas se puede observar una pérdida del sentido matemático durante la solución de problemas verbales aritméticos en los cuales se debe relacionar el mundo real. Los alumnos de primer año tendieron a dar respuestas más realistas a los problemas, mayormente en el problema de los autobuses. Los alumnos de segundo año dan respuestas realistas en menor cantidad, nuevamente en el problema de los autobuses es donde un número mayor de respuestas se obtuvo. Respecto a los alumnos de tercer año se puede observar un número mucho menor en cuanto a respuestas realistas, si se comparan estos resultados entre ellos, se puede observar cómo se mencionó anteriormente que los alumnos empiezan a ser escolarizados y al mismo tiempo su aplicación

del conocimiento del mundo real durante sus soluciones disminuye muy posiblemente debido al contrato didáctico el cual se empieza a hacer más fuerte conforme su escolaridad avanza.

Conclusiones

El objetivo del presente estudio fue recopilar de manera sistemática datos empíricos sobre la (falta de) activación del conocimiento del mundo real durante en la resolución de problemas matemáticos aritméticos de la escuela. Se replicó lo realizado por Verchaffel et al. (1994) y Verschaffel et al. (1997), de esta manera la atención se dirigió a las etapas iniciales y las etapas finales de la estrategia de solución. Los resultados encontrados demuestran convincentemente que los alumnos tienen fuertes tendencias a excluir el conocimiento del mundo real y las consideraciones realistas de su comprensión y solución de problemas verbales de la escuela.

Es interesante que nuestros resultados fueron muy similares a los encontrados por autores como Verchaffel et al. (1994), constituyendo un indicio de que el problema no es local ni nacional, sino que al parecer se presenta en diferentes partes del mundo, lo que en nuestra opinión lo sitúa como un tema de investigación novedoso y de interés para distintos autores.

Los hallazgos de este estudio están en línea con los reportados por Greer (1993, citado en Verchaffel et al., 1994) quien también encontró un porcentaje alto de respuestas que no mostraron ajuste por restricciones realistas como sucedió en este trabajo. Verchaffel et al (1994) menciona que en algunos casos el fracaso de los alumnos en dar una respuesta realista puede ser por la ausencia del conocimiento (o por conceptos erróneos) del contexto referido en el problema. Algunos alumnos podrían haber activado el conocimiento del mundo real durante sus procesos de solución que no se reflejó en sus protocolos escritos, simplemente porque finalmente decidieron responder y reaccionar de acuerdo con lo que se esperaba de ellos, basados en el contrato didáctico que subyace a los problemas aritméticos (De Corte & Verschaffel, 1985, citados en Verchaffel et al., 1994).

Si bien el presente estudio arroja una confirmación adicional de que los alumnos no tienden a considerar adecuadamente las suposiciones y la idoneidad del modelo matemático que subyace a sus soluciones de problemas matemáticos aritméticos escolares, no proporciona una visión más profunda de los factores que obstaculizan el desarrollo de esta tendencia y sus creencias y concepciones subyacentes.

Referencias bibliográficas

Dewolf, T., Van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2017). Can visual aids in representational illustrations help pupils to solve mathematical word problems more realistically? *European Journal of Psychology Educational, 32* (3), 335–351.

Jiménez, L. (2012). La aplicación del conocimiento contextualizado en la resolución de Problemas matemáticos: un estudio sobre las dificultades de los niños en la Resolución de problemas no rutinarios. *Cultura y Educación, 24* (3), 351-362.

Jiménez, L. y Ramos, F. (2011). El impacto negativo del contrato didáctico en la resolución Realista de problemas. Un estudio con alumnos de 2º y 3º de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 9* (3), 1155-1182.

Kantowski, M. G. (1981). Problem solving. En E. Fennema (Ed.), *Mathematics education research: implication for the 80's* (pp.111-126). Reston, VA: National council of Teachers of Mathematics.

Saiz, I. (1994). Dividir con dificultad o la dificultad de dividir en Didáctica de las Matemáticas. En C. Parra e I. Saiz I. *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Editorial Paidós. 185-217.

Sánchez, B., Carrillo, J., Vicente, S., y Juárez, J. A. (2015). *Análisis de la interpretación alumno-Profesor al resolver problemas no rutinarios en aulas de primaria.* Trabajo presentado en la XIV CIAEM-IACME, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997) Pre-Service Teachers' Conceptions and Beliefs about the Role of Real-World Knowledge in Mathematical Modelling Of School Word Problems. *Learning and Instruction, 7* (4), 339-359.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical Modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*, 273-294.

Verschaffel, L., Greer, B., y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

TRADUCCIÓN DE GRÁFICOS DE BARRAS POR ESTUDIANTES CHILENOS DE 6º GRADO

TRANSLATION OF BAR CHARTS BY CHILEAN SIXTH-GRADE STUDENTS

Danilo Díaz-Levicoy, Carmen Batanero
Universidad Católica del Maule (Chile); Universidad de Granada (España)
dddiaz01@hotmail.com, batanero@ugr.es

Resumen
El objetivo del trabajo fue evaluar la competencia de una muestra de 380 estudiantes chilenos de 6º grado para traducir los datos presentados en un diagrama de barras doble a una tabla de doble entrada. Mediante el análisis de contenido se clasifican las respuestas por su grado de corrección, obteniendo un 39% de traducciones correctas, o básicamente correctas. Se presentan ejemplos de los principales errores cometidos consistentes en construir una tabla de conteo o de la distribución marginal, construir otro gráfico y otros errores de poca incidencia. Alrededor del 33% de los participantes no pudo finalizar la tarea. En general, se considera que los porcentajes de éxito alcanzado por los estudiantes son bajos, por tratarse de una actividad que debieron trabajar en años anteriores.

Palabras clave: gráficos de barras, tabla estadística, educación primaria.

Abstract
This study was aimed at assessing the competence of a sample of 380 Chilean 6th- grade students to translate the data presented in a double bar chart to a two-way table .Through content analysis, the answers are classified according to their degree of correction, obtaining 39% of correct, or basically correct, translations. This paper shows examples of the main errors consisting of to construct a counting or of marginal distribution table, to construct another graph, and other errors of little incidence. About 33% of the participants could not complete the task. In general, the percentages of success achieved by students are considered low, because it is an activity that they should have worked in previous years.

Key words: bar charts, statistical table, primary education.

Introducción

Los temas de estadística y probabilidad se introducen para su trabajo, en las directrices curriculares de diferentes países, desde Educación Primaria (MEC, 2017; MECD, 2014; MINEDU, 2016). En el caso chileno, según las bases curriculares del Ministerio de Educación (MINEDUC, 2012), estos temas se enseñan en el eje temático de Datos y probabilidades, que pretenden dar respuesta a:

> (…) la necesidad de que todos los estudiantes registren, clasifiquen y lean información dispuesta en tablas y gráficos, y que se inicien en temas relacionados con las probabilidades. Estos conocimientos les permitirán reconocer gráficos y tablas en su vida cotidiana. Para lograr este aprendizaje, es necesario que conozcan y apliquen encuestas y cuestionarios por medio de la formulación de preguntas relevantes, basadas en sus experiencias e intereses, y después registren lo obtenido y hagan predicciones a partir de ellos (MINEDUC, 2012, p. 91).

Entre los contenidos a trabajar destacan los gráficos estadísticos, un elemento de la *cultura estadística* (Engel, 2019; English y Watson, 2015), usado ampliamente en medios de comunicación (Cavalcanti, Natrielli y Guimarães, 2010) y fundamental para el análisis estadístico de datos (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2016). Entre los gráficos mencionados en las directrices curriculares están: pictogramas (1º a 4º de primaria), gráficos de barras (2º a 6º), diagrama de puntos (3º y 6º), gráfico de líneas (5º), diagramas de tallo y hojas (5º y 6º) y diagrama de sectores (6º).

En el caso del gráfico de barras, este se propone introducir de forma sencilla en segundo curso, añadiendo posteriormente escala diferente de la unidad, llegando hasta los diagramas de barras dobles en 6º de Educación Primaria. En la Tabla 1 podemos ver los objetivos de aprendizaje relacionados con esta representación desde 2º a 6º de Educación Primaria.

Tabla 1. Objetivos de aprendizaje sobre gráficos de barras en el currículo chileno de Educación Primaria (MINEDUC, 2012)

Curso	Objetivos de aprendizaje
Segundo (p. 104)	• Registrar en tablas y gráficos de barra simple, resultados de juegos aleatorios con dados y monedas. • Construir, leer e interpretar pictogramas con escala y gráficos de barra simple.
Tercero (p. 109)	• Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra. • Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, de acuerdo a información recolectada o dada.
Cuarto (p. 116)	• Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala y comunicar sus conclusiones.
Quinto (p. 121)	• Leer, interpretar y completar tablas, gráficos de barra simple y gráficos de línea y comunicar sus conclusiones
Sexto (p. 126)	• Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones

Además, en Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2016) se confirma que esta representación es la más frecuente en los libros de texto de Educación Primaria en Chile y está presente en todos los cursos de este nivel educativo. Esta situación se repite en análisis de libros de texto de otros países, como Argentina (Díaz-Levicoy, Giacomone y Arteaga, 2017), Brasil (Silva, 2013), Costa Rica (Jiménez-Castro, 2017), España (Díaz-Levicoy et al., 2016), Guatemala y Venezuela (Salcedo, 2016) y Perú (Díaz-Levicoy, Osorio, Arteaga y Rodríguez-Alveal, 2018).

De acuerdo con las consideraciones anteriores, nos planteamos el objetivo de evaluar la competencia para traducir los datos presentados en un diagrama de barras doble a una tabla de doble entrada, y ampliar resultados de nuestros estudios previos (Batanero, Díaz-Levicoy y Arteaga, 2018; Díaz-Levicoy, Batanero y Arteaga, 2018; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2019).

En lo que sigue describimos los fundamentos y método del estudio, presentamos y discutimos sus resultados, finalizando con algunas implicaciones para la enseñanza del tema.

Fundamento teórico

Nuestro estudio se apoya en diversas investigaciones que destacan la actividad implicada en el trabajo con un gráfico estadístico. En primer lugar, consideramos los elementos que conforman un gráfico estadístico, fundamentales para una correcta lectura y/o construcción de esta representación. Curcio (1987, 1989) describe los siguientes:

- *Palabras o expresiones* que aparecen en el título del gráfico, o las etiquetas de los ejes, que establecen las escalas y que permiten comprender el contexto de la información representada, así como las variables de interés y la relación que se establece entre ellas.
- *Contenido matemático subyacente*. Son los objetos matemáticos usados para representar la información. Por ejemplo, el conjunto numérico al cual pertenecen los datos y/o frecuencias, y los elementos geométricos, como la longitud de las líneas en un gráfico de líneas, el círculo o sector circular en gráfico de sectores.
- *Convenios específicos* de cada gráfico estadístico. Por ejemplo, en el gráfico de barras, cada frecuencia es proporcional a la altura de la barra que lo representa, cada barra tiene el mismo ancho y la distancia entre ellas es uniforme.

Más tarde, Friel, Curcio y Bright (2001) reformulan los anteriores elementos de la forma siguiente:

- *Título y etiquetas*. Proporcionan información sobre el contexto de los datos y permiten identificar las variables que se están representando.
- *Marco del gráfico*. Se relaciona con la información que se muestra en los ejes, escalas y marcas. Con esta información se pueden interpretar las magnitudes utilizadas y rango de valores que se consideran.
- *Especificadores*. Son elementos propios y específicos de cada gráfico estadístico, que son utilizados para la representación de la información. Como, por ejemplo, las líneas en los gráficos de líneas y polígono de frecuencias.
- *Fondo*. Hace referencia los colores, cuadrículas e imágenes sobre la que se construye en gráfico estadístico.

Asumiendo que la lectura de los gráficos estadísticos es una actividad compleja, algunos autores han definido niveles de lectura para describir la dificultad que implica responder varios tipos de pregunta sobre estas representaciones. En nuestro trabajo, utilizaremos la taxonomía planteada por Curcio (1989), Friel et al. (2001) y Shaughnessy, Garfield y Green (1996):

- *N1. Leer los datos*. Se refiere a la lectura literal de la información representada en el gráfico estadístico. Un ejemplo de ello sería identificar la variable representada en el eje X.

- *N2. Leer dentro de los datos*. Se refiere a la lectura de algo que no está explícitamente en el gráfico, implicando la aplicación de procedimientos matemáticos (comparaciones, adiciones, etc.). Un ejemplo de este nivel sería encontrar el rango de los datos, pues requiere calcular la diferencia entre el valor máximo y mínimo.
- *N3. Leer más allá de los datos*. Se refiere a obtener una información que no está representada en el gráfico y que no se puede deducir con operaciones o comparaciones. Un ejemplo para este nivel es predecir un dato o alguna tendencia.
- *N4. Leer detrás de los datos*. Se refiere a la valoración crítica de las conclusiones, la recogida y de organización de datos. Este nivel supone un amplio conocimiento matemático y del contexto.

Por otra parte, Arteaga y cols. (Arteaga, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010) describen cuatro niveles de complejidad semiótica en la construcción de un gráfico estadísticos, que dependen de los objetos matemáticos y estadísticos que se movilizan. Estos niveles son los siguientes.

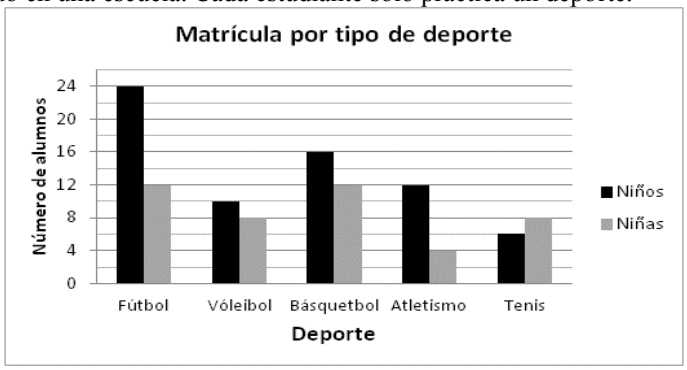
- *N1. Representación de datos individuales*. Los autores indican que un gráfico de este nivel se asocia a la representación de datos aislados, un dato o una porción de ellos, sin realizar una representación conjunta.
- *N2. Representación de una lista de datos, sin llegar a resumir su distribución*. Es la representación donde cada dato se representa en el orden dado en un listado, sin agruparlos y sin utilizar las ideas de frecuencia y distribución de frecuencias, aunque se maneja la idea de variable. El orden del listado y la representación de los datos no suele coincidir con el orden numérico.
- *N3. Representación de una distribución de datos*. Este nivel se refiere a la representación de una distribución, agrupando los datos y calculando las frecuencias respectivas. Los datos son mostrados en forma ordenada, en general, según el orden numérico.
- *N4. Representación de varias distribuciones sobre un mismo gráfico*. Corresponde a la representación de dos o más distribuciones de frecuencias en el mismo gráfico estadístico.

Metodología

Para este trabajo consideramos una muestra intencional, formada por 380 estudiantes de 6º de Educación Primaria en Chile (11-13 años), de 7 ciudades diferentes y 13 centros educativos; accediendo a ellos por medio de la negociación con directores y profesores.

La tarea aplicada (Figura 1) corresponde a una traducción y adaptación de la utilizada por Walichinski y dos Santos (2013), y consiste en traducir los datos de un gráfico de barras adosadas a una tabla de doble entrada. Dado que el gráfico estadístico presenta simultáneamente dos distribuciones, se trata de una representación de nivel de complejidad semiótica 4 (Arteaga, 2011; Batanero et al., 2010), representación de dos distribuciones sobre el mismo gráfico estadístico. Además, demanda un nivel de lectura 1 de *leer los datos* según la taxonomía de Curcio y cols. (Curcio, 1989; Friel et al., 2001; Shaughnessy et al., 1996).

El gráfico muestra el número de alumnos matriculados en cada deporte practicado en una escuela. Cada estudiante sólo practica un deporte.



Representa estos datos en una tabla de frecuencias.

Figura 1. Tarea planteada a los estudiantes

Para responder correctamente a esta tarea, los estudiantes tienen que leer el gráfico estadístico, así como identificar y leer las dos variables, sus categorías y frecuencias representadas. También, deben interpretar la escala numérica que representan las frecuencias en el eje vertical.

Con dicha información deben construir el cuerpo de la tabla, proponiendo un título, en la primera columna tienen que escribir las diferentes categorías de la variable (deporte). Además, deben considerar dos columnas, una para incluir la distribución de tipo de deportes practicado por los niños y otra para las niñas, identificado los valores de frecuencias para cada una de las celdas de la tabla.

Resultados

En lo que sigue describimos el tipo de respuesta de los estudiantes, basados en la calidad de la construcción de la tabla estadística.

Respuesta correcta. Cuando los estudiantes leen correctamente el gráfico estadístico y construyen la tabla considerando cada uno de sus componentes: título, categorías y sus frecuencias asociadas a cada una de las distribuciones representadas. Ejemplo de este tipo de respuesta es la entregada por el estudiante E31, quien identifica ambas distribuciones representadas en el gráfico de barras dobles (deporte practicado por niños y niñas) y las categorías de la variable (práctica de deporte). Además, lee correctamente las frecuencias del gráfico y construye correctamente la tabla con todos sus elementos.

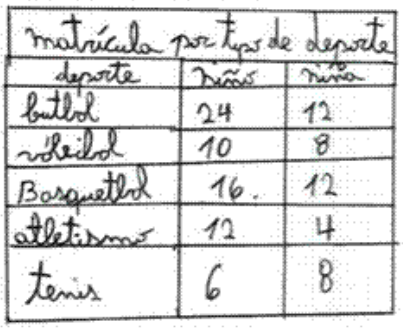


Figura 2. Respuesta correcta al ítem de E31

Respuesta correcta, salvo omisión. Cuando los estudiantes leen correctamente la información presente en el gráfico estadísticos y construyen una tabla casi correcta, pero cometen pequeños errores u omisiones. Entre ellos, consideramos el no asignar un título o no realizar las divisiones adecuada en la tabla de frecuencias, en este último la representación parece un listado y no una tabla. Por ejemplo, la respuesta E467, con dos representaciones que parecen dos listados (o tablas) de frecuencias, separando según sexo (Figura 3).

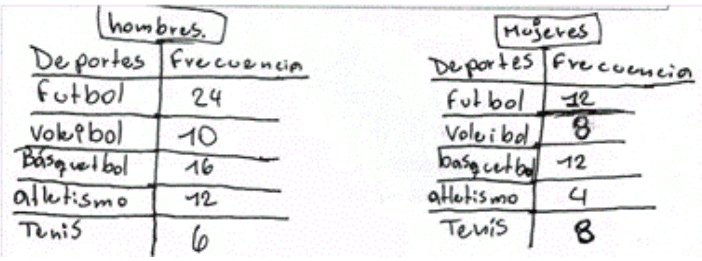


Figura 3. Respuesta correcta, salvo omisión, al ítem de E467.

Respuesta parcialmente correcta. Cuando los estudiantes realizan una traducción parcialmente correcta de la información que se presenta en el gráfico de barras, es decir, por errores de lectura de datos o confusión en los conceptos utilizados. En ambos casos, los estudiantes demuestran tener las herramientas para desarrollar con éxito la tarea, es decir, logran realizar una lectura de nivel 1 según la taxonomía de Curcio y cols. En lo que sigue, describimos y ejemplificamos las subcategorías encontradas.

- *P1. Realizar una tabla de conteo*. Cuando los estudiantes construyen una tabla donde las filas y columnas son correctas. Pero, no expresan las frecuencias numéricamente, lo hacen utilizando diferentes símbolos. Ejemplo de este tipo de respuestas es el E68, donde las frecuencias son remplazadas por una tabla de conteo en que se utilizan diferentes símbolos para representar a cada uno de los participantes.

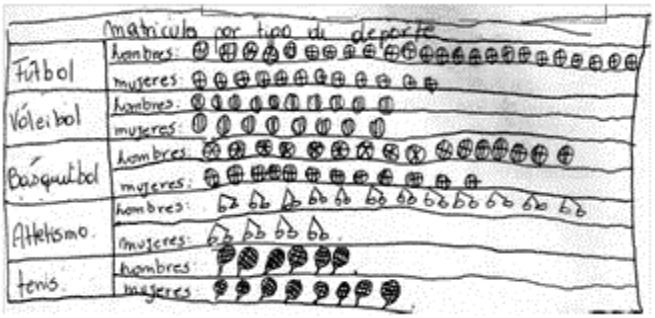
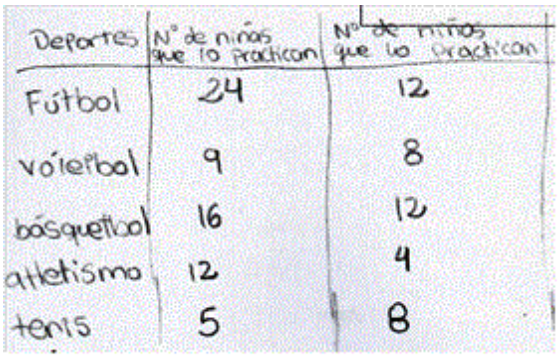



Figura 4. Respuesta parcialmente correcta, basadas en tabla de conteo, al ítem de E68

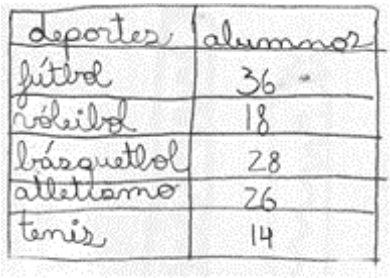
- *P2. Pequeños errores en la lectura del gráfico o en la construcción de la tabla*. Los estudiantes logran leer la información del gráfico estadístico y la traducen a una tabla, aunque comenten algunos errores en estos procesos. Algunos de estos errores se pueden deber a las alturas de algunas barras que no están explicitas en el eje de las ordenadas, y los estudiantes no llegan a identificar sus valores. En la Figura 5, vemos la respuesta del estudiante E305, que, aunque la tabla tiene todos los elementos, excepto el título general, hay fallos de lectura en las frecuencias de los niños que practican voleibol y tenis. Este tipo de respuestas coincide con los observados por Fernandes, Morais y Lacaz (2011), Jungkenn y del Pino (2009) y Walichinski y dos Santos (2013), donde no observan la necesidad de incluir los títulos o etiquetas en la construcción de gráficos y tablas.



Deportes	N° de niños que lo practican	N° de niños que lo practican
Fútbol	24	12
vóleibol	9	8
básquetbol	16	12
atletismo	12	4
tenis	5	8

Figura 5. Respuesta con problemas de lectura al ítem de E305

- *P3. Se construye la tabla de frecuencias de la distribución marginal*. Los estudiantes leen la información del gráfico estadístico, pero no construyen una tabla doble, sólo presentan una de frecuencias marginales, es decir, en vez de detallar la frecuencia de hombres y mujeres que practica cada tipo de deporte, la tabla sólo presenta una columna con los totales de personas que practican cada deporte. En esta categoría también se incluyen los casos en que existen algunos errores al realizar la suma de los totales. En la Figura 6, por ejemplo, E623 suma las frecuencias de niños y niñas asociadas a cada deporte, calculando en forma errada el total de personas que practican atletismo.



deportes	alumnos
fútbol	36
vóleibol	18
básquetbol	28
atletismo	26
tenis	14

Figura 6. Respuesta parciamente correcta: tabla de distribución marginal de E623

Respuesta incorrecta. Cuando los estudiantes realizan una traducción que no coincide con la información mostrada en el gráfico de barras, lo que puede ir desde la traducción de una porción pequeña de la información, realizar otra representación o bien no completan la tabla. Las subcategorías encontradas son las siguientes:

- *I1. Construyen otro gráfico en lugar de traducir el gráfico a una tabla*. Cuando el estudiante tiene desconocimiento de los convenios de construcción de una tabla estadística o simplemente desconocimiento de la terminología. En este caso, se construye un gráfico diferente o sin sentido. Por ejemplo, E21 construye un gráfico de líneas múltiples para representar las dos variables, sin considerar que no es adecuado de acuerdo a su naturaleza cualitativa.

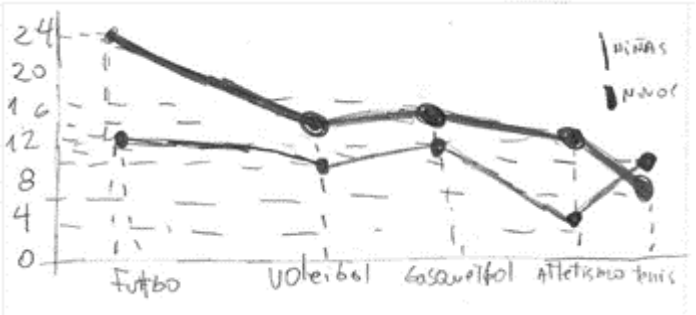


Figura 7. Respuesta incorrecta: construcción de otro gráfico de E21

- *I2. Otros errores.* Cuando la lectura del gráfico no es adecuada y/o no conocen los convenios para la construcción de una tabla de frecuencias, por lo que su tabla está incompleta o errónea. Por ejemplo, E79 construye unos intervalos que no incluyen todos los valores de las frecuencias, no indica las categorías ni realiza ninguna otra operación. Ninguno de estos estudiantes ha alcanzado un nivel de lectura adecuado del gráfico ni conoce los convenios de construcción de una tabla de frecuencias.

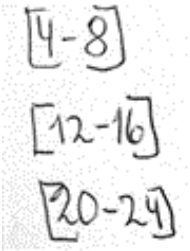


Figura 8. Respuesta incorrecta: otros errores de E79

A modo de resumen, en la Tabla 2 presentamos la distribución las respuestas según su tipo. De ella vemos que, a nivel general, los estudiantes construyen una tabla correcta, con algunas omisiones. Es decir, que pueden leer correctamente el nivel 1 de Curcio y cols. y son capaces de construir una tabla de frecuencia, con algunas omisiones. Un porcentaje levemente inferior no desarrolla la actividad, posiblemente por no llegar a leer el gráfico o no recordar los convenios de construcción de la tabla. Además, las construcciones correctas, correctas con omisión y parcialmente correctas superan el 60% de los estudiantes.

Tabla 2. Porcentaje estudiantes según tipo de respuesta.

Tipo de respuesta	Porcentaje (n=380)
Correcta	3,7
Correcta, salvo omisión	35,3
Parcialmente	21,6
Incorrecta	6,3
No contesta	33,2

En la Tabla 3 mostramos los porcentajes de los tipos de errores observamos en las respuestas parcialmente correctas e incorrectas. De ellas observamos que el error más frecuente el P2, consistente en cometer pequeños errores en la lectura o en la construcción de la tabla (17,6%). Los demás errores se presentan en un porcentaje bajo.

Tabla 3. Porcentaje de estudiantes con errores en tablas parcialmente correctas e incorrectas.

Tipo de error	6º curso (n=380)
P1. Construir una tabla de conteo	1,8
P2. Pequeños errores u omisiones	17,6
P3. Construir una tabla marginal	2,1
I1. Construyen otro gráfico	2,4
I2. Otros errores	3,9

Conclusiones

El traducir de una representación estadística a otra se denomina transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999) y es una competencia necesaria que deben desarrollar los estudiantes en la Educación Primaria, para formar ciudadanos cultos estadísticamente, y con presencia en los libros de texto (Díaz-Levicoy et al., 2016). Pese a ello, es una tarea compleja que exige el dominio de los convenios de lectura y construcción de ambas representaciones (gráfico de barras dobles y tablas de frecuencia).

Por medio del análisis de las respuestas de los estudiantes hemos observado que en torno al 60% de los estudiantes entrega una respuesta correcta a la actividad, porcentaje que se puede considerar bajo, debido al trabajo que se tendría que dar con estas representaciones en los años anteriores. Además, estos porcentajes son superiores a los resultados observados en los 22 estudiantes de 7º de Educación Fundamental en Brasil en el pre-test e inferiores a los obtenidos por este mismo grupo en el post-test.

Respecto de los errores observados, algunos concuerdan con lo mencionado ya en la literatura, como la ausencia de títulos y rótulos (Jungkenn y del Pino, 2009; Walichinski y dos Santos, 2013), así como errores en la lectura de frecuencias (Fernandes et al., 2011; Jungkenn y del Pino, 2009; Walichinski y dos Santos, 2013).

Finalmente, pese a trabajar con una muestra reducida, vemos que estos resultados pueden ser de interés para la organización del proceso de instrucción en la Educación Primaria chilena, donde se deben promover actividades de transnumeración, como una forma de aumentar el éxito en este tipo de tareas, manejar los convenios de lectura y construcción de ambas representaciones y, por, sobre todo, desarrollar una adecuada cultura estadística en los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. R. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 15-40.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Batanero, C., Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2018). Evaluación del nivel de lectura y la traducción de pictogramas por estudiantes chilenos de Educación Básica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 49-64.

Cavalcanti, M. R., Natrielli, K. R. y Guimarães, G. (2010). Gráficos na mídia impressa. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 23*(36), 733-751.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(5), 382-393.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C. y Arteaga, P. (2018). Dificultades de los estudiantes chilenos de Educación Básica en la construcción de diagramas de barras. *Paradigma, 39*(2), 107-129.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de primaria: Un estudio comparativo entre España y Chile. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 713-737

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea M. M. (2019). Chilean children's reading levels of statistical graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(3), 689-700.

Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B. y Arteaga, P. (2017). Caracterización de los gráficos estadísticos en libros de texto argentinos del segundo ciclo de Educación Primaria. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 21*(3), 299-326.

Díaz-Levicoy, D., Osorio, M., Arteaga, P. y Rodríguez-Alveal, F. (2018). Gráficos estadísticos en libros de texto de matemática de Educación Primaria en Perú. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 503-525.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Granada: Grupo FQM-126. Disponible en: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

English, L. D. y Watson, J. M. (2015). Statistical literacy in the elementary school: Opportunities for problem posing. En F. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: from research to effective practice* (pp. 241-256). New York, NY: Springer.

Fernandes, J. A., Morais, P. C. y Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. En R. Borba, C. Monteiro y A. Ruiz (Eds.), *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-13). Recife: Universidad Federal de Pernambuco.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Jiménez-Castro, M. (2017). *Los gráficos estadísticos en el currículo y los libros de texto de Educación Primaria en Costa Rica* (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, España.

Jungkenn, M. y del Pino, J. C. (2009). Analisando a capacidade de estudantes concluintes do Ensino Fundamental de interpretar informações de gráficos e tabelas. En E. F. Mortimer (Ed.), *Atas VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (pp. 1-12). Belo Horizonte: ABRAPEC.

MEC (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Secretaria de Educação Básica.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

MINEDU (2016). *Programa curricular de Educación Primaria*. Lima: Ministerio de Educación.

MINEDUC (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

Salcedo, A. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto para Educación Primaria de Guatemala y Venezuela. *Educação Matemática Pesquisa, 18*(3), 1141-1163.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 205-237). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Silva, E. M. C. (2013). *Como são propostas pesquisas em livros didáticos de ciências e matemática dos anos iniciais do ensino fundamental* (Tesis de Máster). Universidad Federal de Pernambuco, Brasil.

Walichinski, D. y dos Santos, G. (2013). Contribuições de uma sequência de ensino para o processo de ensino e aprendizagem de gráficos e tabelas segundo pressupostos da contextualização. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 35*, 19-42.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 221-248.

PRÁCTICAS ASOCIADAS AL ÁREA DE FIGURAS PLANAS

PRACTICES RELATED TO THE AREA OF PLANE SHAPES

María José Castro, Myriam Nuñez, Christiane Ponteville
Facultad de Farmacia y Bioquímica. Universidad de Buenos Aires (Argentina)
mjcastrogonzalez@gmail.com; myriam@ffyb.uba.ar; chponteville@gmail.com

Resumen
Se realizó un análisis cualitativo de exámenes de alumnos de la asignatura Matemática de las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires. Este análisis permitió identificar prácticas asociadas con los contenidos vinculados al cálculo de áreas de figuras planas. Se analizaron las resoluciones desarrolladaspor los alumnos,de los ejercicios correspondientes a los exámenes de dicha asignatura. La temática evaluada fue el cálculo de áreas involucrando la construcción de representaciones gráficas.

Palabras clave: figuras planas, áreas, integrales definidas

Abstract
This paper presents a qualitative analysis carried out with students' Mathematics-subject exams in Pharmacy and Biochemistry degree courses at the Faculty of Pharmacy and Biochemistry, from the University of Buenos Aires. This analysis allowed identifying practices associated with the contents involved in the calculus of plane shape areas. The students' solutions of the exercises corresponding to mathematics exams were analyzed. The topic evaluated was the calculus of areas involving the construction of graphical representations.

Key words: plane shapes, areas, definite integrals

Introducción

Los docentes identifican un conjunto de dificultades en el aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático. Es posible estudiar sus orígenes y diversas formas didácticas de tratarlos planteándose como dificultades centrales la comprensión de los procesos al infinito en la conceptualización del límite, de la derivada y de la integral y la utilización de los diversos modos de representación que constituyen una forma de análisis potente del concepto matemático (Duval, 1993). Además, estas dificultades pueden ser analizadas desde los terrenos epistemológico, didáctico y psicológico (Túregano, 1998). En el plano didáctico, por ejemplo, se asocian tales dificultades con el enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo (Milevicich, 2008).

Entre los obstáculos epistemológicos que deben atravesar los alumnos, se puede identificar, dualidad del lenguaje utilizado: conviven en el discurso matemático escolar de los cursos de cálculo el lenguaje propio del análisis con el de la geometría analítica. Las ideas asociadas a las integrales definidas aparecen de manera formal en los desarrollos de cálculo infinitesimal del siglo XVII, aunque sus ideas germinales se presentan ya en el desarrollo de la matemática griega. De esta manera en la organización clásica de los cursos de análisis, los temas vinculados al área quedaron circunscriptos a aplicaciones directas de conceptos infinitesimales (Boyer, 1996). Así, resulta que la geometría y la medida aparecen en general con un carácter instrumental utilizadas para la ejercitación de otros contenidos como, por ejemplo, cálculos aritméticos, resolución de ecuaciones, entre otros.

La introducción de la tecnología, gracias a la interacción y dinamismo que posee, ha producido el surgimiento de múltiples propuestas didácticas nuevas, a la vez que plantea un nuevo debate respecto de los alcances del análisis matemático vinculado a la habilidad de manipular el pensamiento visual y el analítico (Aranda y Callejo, 2017).

Integrales definidas y áreas

Este trabajo se origina al observar los inconvenientes que alumnos en el primer año de la Universidad enfrentan al abordar los conceptos vinculados al área en el contexto de las integrales definidas. El desarrollo de las ideas matemáticas vinculadas al concepto de área tiene su origen en las percepciones más antiguas de ideas matemáticas y en su uso empírico.

A lo largo de las diferentes instancias del curso, se busca que los alumnos puedan relacionar las representaciones analítica y gráfica de curvas; para que luego, dicha representación sea traducida mediante un proceso infinitesimal como es la integral definida, instrumento que permite el cálculo de áreas definidas por dichas curvas.

Todo este proceso requiere de razonamientos sobre gráficas planas, favorecidos por el proceso de visualización concebida como la construcción mental de los objetos o de los procesos que un individuo asocia con objetos o con eventos percibidos en el exterior (Zaskis, Dubinsky y Dautermann,1996). En este contexto, las representaciones gráficas de funciones cobran importancia en su vinculación con las figuras planas.

Experiencia realizada

El diseño curricular de las carreras de Farmacia y Bioquímica (Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires) está dividido en cuatrimestres (un total de 10 en Farmacia y 11 en Bioquímica). Estos cuatrimestres se distribuyen en tres ciclos diferentes: Ciclo Básico Común (para las carreras de las Ciencias de la Salud, cuatrimestre 1ero y 2do), Ciclo Común (cuatrimestre 3ero a 6to) y Ciclo Superior (de Farmacia o de Bioquímica, a partir del 7mo cuatrimestre). Ambas carreras tienen en común los dos primeros ciclos (Universidad

de Buenos Aires, Plan Bioquímica 2008, Modificatoria 2016); (Universidad de Buenos Aires, Plan Farmacia 2008, Modificatoria 2016).

La asignatura Matemática corresponde al 3er cuatrimestre y los alumnos acceden a cursarla luego de haber aprobado la asignatura homónima del Ciclo Básico Común, donde se imparten contenidos vinculados a funciones, elementos de cálculo diferencial y cálculo integral.

La guía de trabajos prácticos de la materia está organizada siguiendo los lineamientos del Análisis Matemático clásico. En lo que respecta a las integrales, la ejercitación propuesta se estructura según el siguiente orden: integrales indefinidas, familia de primitivas, integrales definidas, teorema del cálculo integral y aplicaciones de la integral. Dentro de las aplicaciones, la guía plantea el cálculo de áreas, las cuales se presentan de manera paulatina, incrementando el grado de dificultad de las áreas propuestas.

Los ejercicios de los exámenes tienen como objetivo principal el cálculo de áreas entre curvas de tipo exponencial, trigonométrica, polinómica, raíz cuadrada y recta. Ninguno de los enunciados contaba con el gráfico que mostrara en forma explícita la región de la cual se debía calcular su área. Para poder dar respuesta al ejercicio se esperaba que los alumnos, por ejemplo, identificaran los puntos de intersección entre curvas, realicen una representación gráfica de la región, establezcan posiciones relativas entre curvas y expliciten la o las integrales necesarias para calcular el área pedida por el ejercicio.

De los exámenes parciales rendidos por los alumnos durante el primer cuatrimestre de los años 2016 y 2019 y segundo cuatrimestre de 2018, se analizaron aquellos que involucraban el cálculo de área. Los mismos poseían diferente grado de dificultad tanto en la construcción de la gráfica como en el cálculo de las primitivas involucradas en la resolución.
Los enunciados de los ejercicios cuyas resoluciones se analizaron son:

Ejercicio 1
Calcular el área definida por las curvas definidas por

$$y = x^2 \cdot cos(x) \; ; \; el \; eje \; x \; ; \; x = 0 \; ; \quad x = \pi$$

Ejercicio 2
Calcular el área de la región encerrada por las curvas

$$y = e^x \quad , \quad y = e^{-x} \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 2$$

Ejercicio 3
Hallar el área limitada por las gráficas de

$$y = \sqrt{3x} \quad ; \quad y = -x \quad ; \quad x = 3$$

Dibujar las funciones y representar gráficamente la región correspondiente.

Se analizaron un total de 91 ejercicios resueltos:

Ejercicios resueltos	Cantidad
Ejercicio 1	14
Ejercicio 2	31
Ejercicio 3	46

En el análisis se tuvieron en cuenta las formas de desarrollo de la resolución, la simbología y las estrategias gráficas utilizadas.

Análisis de las resoluciones del Ejercicio 1

A continuación, se presenta la representación gráfica de la región planteada en este ejercicio:

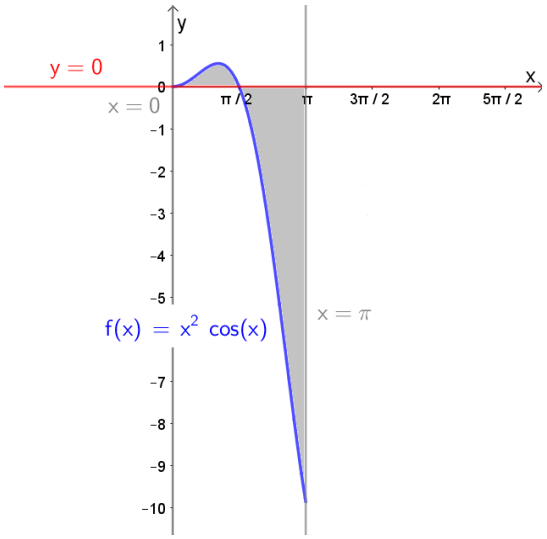


Figura 1: Representación gráfica correspondiente al Ejercicio 1 realizada con GeoGebra

Del análisis de las resoluciones del Ejercicio 1 se pudo observar que los estudiantes no realizan representaciones gráficas, ni figuras de análisis. Sólo en una de ellas se plantea en forma correcta la solución, identificando que el área total se debe calcular como la suma de dos áreas, pero no se explicita la estrategia utilizada para llegar a los límites de integración, ni al argumento de la integral.

Otra de las resoluciones asocia la identificación de los límites de integración obteniendo correctamente los ceros de la función estudiada, pero, identifica al eje x como la función identidad ($f(x) = x$) para definir el argumento de la integral no percibiendo la presencia de dos áreas a ser calculadas.

Seis de las resoluciones alternan los elementos simbólicos presentes en el enunciado, para proponer diversas integrales combinando los símbolos formales correspondientes al enunciado del ejercicio. Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi} x^2 cos(x) dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} x^2 cos(x) - x\, dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -x^2 cos(x) dx$$

Análisis de las resoluciones del Ejercicio 2

Las resoluciones del Ejercicio 2 pueden caracterizarse de la siguiente manera:

Siete alumnos plantearon en forma correcta el cálculo del área siguiendo las estrategias siguientes: encontraron los límites de integración, vieron que eran dos integrales las que tenían que calcular, plantearon bien los argumentos de las integrales y las calcularon en forma correcta.

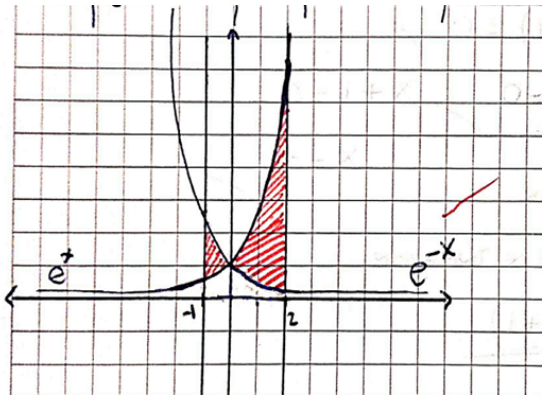


Figura 2: Representación gráfica correcta de uno de los exámenes

Otras herramientas utilizadas para la resolución:

- Cinco de los estudiantes representaron gráficamente la región. La Figura 2 muestra lo realizado por un estudiante.
- Análisis del valor de las funciones intervinientes en los intervalos $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$ para identificar los argumentos de las integrales.
- una de las resoluciones analizadas llega al resultado planteando las dos integrales y basándose en la gráfica de la Figura 3

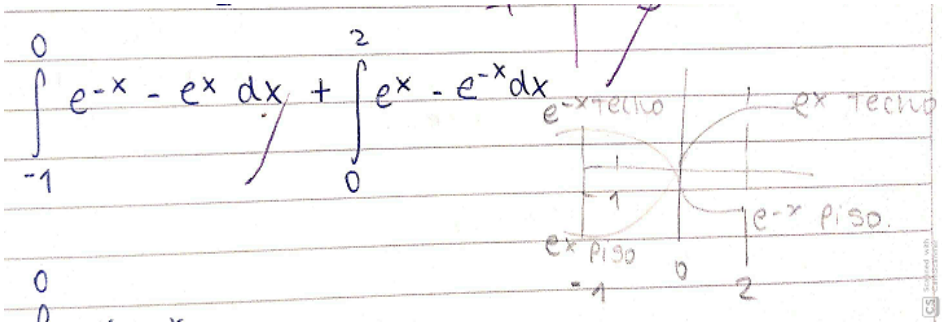


Figura 3: Resolución analítica correcta y gráfica realizada

Se identificaron nueve gráficas con un fallido intento de representar la región involucrada en el ejercicio que condujeron a planteos erróneos (Ver Figura 4).

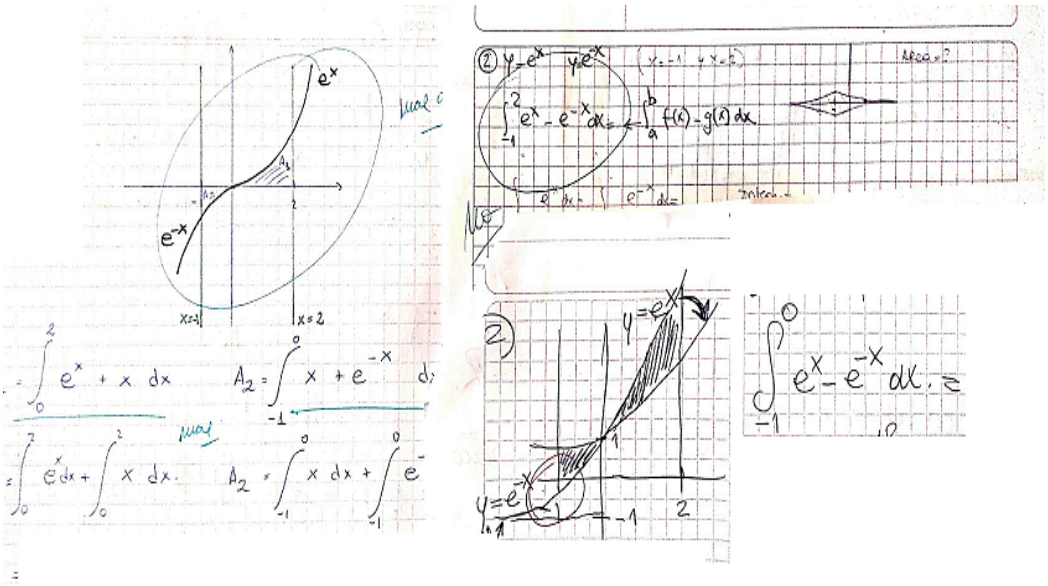


Figura 4: Gráficas y planteo de integrales del Ejercicio 2

Tres de los estudiantes lograron representar gráficamente las funciones exponenciales del ejercicio, no así las rectas que le permitían delimitar la región. Esto los llevó, como se muestra en la Figura 5, a representar una región diferente.

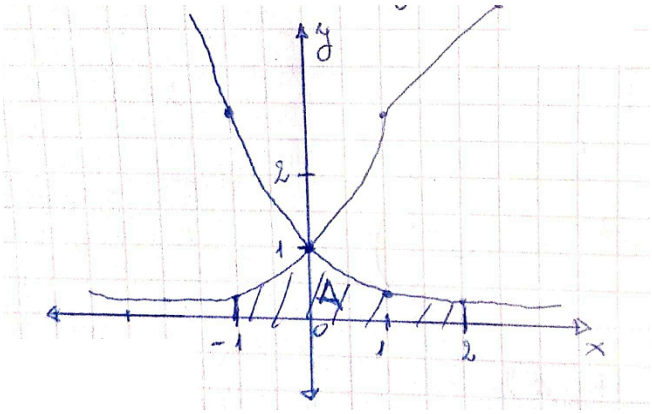


Figura 5: El área indicada no es la correcta para el Ejercicio 2

Los planteos de las integrales definidas realizados respecto del área correspondiente a la figura fueron tanto correctos como incorrectos. A continuación, se muestran las integrales planteadas:

$$\int_{-1}^{0}(e^x-0)\ dx+\int_{0}^{2}(e^x-0)dx \quad ; \quad \int_{-1}^{2}(e^x-e^{-x})dx \quad ; \quad \int_{-1}^{2}e^x+e^{-x}\,dx$$

En ocho resoluciones no realizan ninguna representación gráfica, proponiendo integrales que no representan el valor del área. Se evidencia una combinación formal de la información contenida en el ejercicio sin ningún criterio que lo relacione con la posición relativa de las curvas, ni de sus puntos de intersección. Se muestran algunos ejemplos:

$$\int_{-1}^{??} e^x - e^{-x} \; ; \; \int_{-1}^{2} e^x - e^{-x} dx \; ;$$

$$\int_{0}^{2} e^x - \int_{0}^{2} e^{-x} \; ; \; \int_{-1}^{2} e^{-x} + e^x dx \; ; \; \int_{-1}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{2} e^x dx$$

Seis alumnos no tuvieron propuesta para la resolución del ejercicio, ni gráfica ni analíticamente.

Análisis de las resoluciones del Ejercicio 3

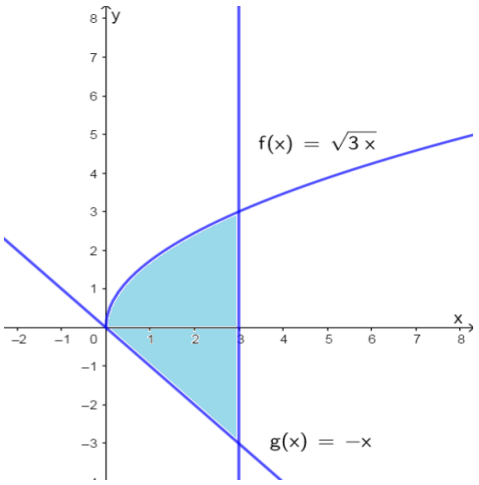


Figura 6: Representación gráfica correspondiente al Ejercicio 3 (GeoGebra)

El enunciado del Ejercicio 3 pedía explícitamente la realización de la gráfica, mientras que los dos primeros no lo hacían. La Tabla 1 resume la información obtenida:

Tabla 1: Descripción de la realización de gráficas en la resolución del Ejercicio 3

Gráfica de manera correcta	56,5%
Gráfica aproximada	10,9%
Gráfica incorrecta	8,7%
No realizan la representación gráfica	23,9%

a) Gráficas correctas

Entre las tácticas empleadas por los estudiantes que pudieron representar gráficamente la región de interés y el valor final del área encontramos que:

- A partir de la gráfica eligieron bien los límites de integración y argumento de la integral. En seis de las resoluciones el resultado final correspondía al valor del área y en otras once el resultado final fue

equivocado ya que cometieron un error en el cálculo de la primitiva al no utilizar método de sustitución para hallar la primitiva de $\sqrt{3x}$ a pesar de un planteo pertinente del problema.

- Un alumno elige correctamente el argumento de la integral utilizando un método en donde compara valores de las funciones en un punto. El resultado final de la integral fue equivocado, cometiendo el mismo error del caso anterior en el cálculo de la primitiva.

- Para el cálculo de los límites de integración plantean:
  - $\sqrt{3x} = -x$

$$3x = x^2 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2 - 3x \quad \rightarrow 0 = x(x-3) \quad \rightarrow \quad x = 0, x = 3$$

- no tienen en cuenta que parten de una ecuación cuya única solución es x = 0: llegaron a los límites correctos de integración por medio de un mal procedimiento. El planteo del argumento de la integral es correcto. De estos, tres alumnos obtienen el valor del área y 2 alumnos no llegan al resultado por no utilizar el método de sustitución en el cálculo de la integral de $\sqrt{3x}$.

- Un alumno divide el área en dos partes considerando las regiones definidas por el $eje\ x$. A1 encima del $eje\ x$, A2 debajo del $eje\ x$. Calcula en forma correcta los límites de integración, identifica argumentos de las integrales y obtiene el resultado esperado como muestra la Figura 7.

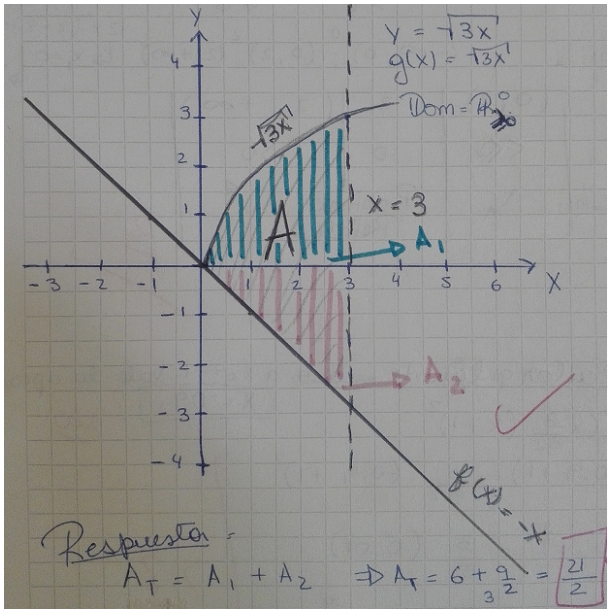


Figura 7: Representación gráfica correspondiente al Ejercicio 3 dividiendo el área en dos partes

b) Gráficas aproximadas

- Un alumno utiliza una tabla de valores para graficar la función de interés, pero, la representación gráfica obtenida se asemeja a una recta, ver Figura 8.

- Un alumno plantea acertadamente el área (límites de integración + argumento integral + valor final), y 3 alumnos se equivocan en el valor final (error en el cálculo de las integrales, sustitución).

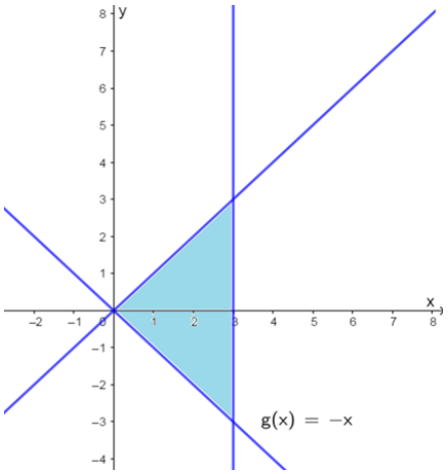


Figura 8: Representación gráfica que reproduce a la $\sqrt{3x}$ como una recta (GeoGebra)

c) Gráficas incorrectas

Los cuatro alumnos de esta categoría confunden como graficar la recta $x = 3$; interpretándola como una recta horizontal, como puede verse en la Figura 9.

Teniendo en cuenta las gráficas propuestas por los alumnos, plantearon coherentemente los límites y el argumento de la integral, equivocándose en el resultado final al no utilizar el método de sustitución para el cálculo de la integral.

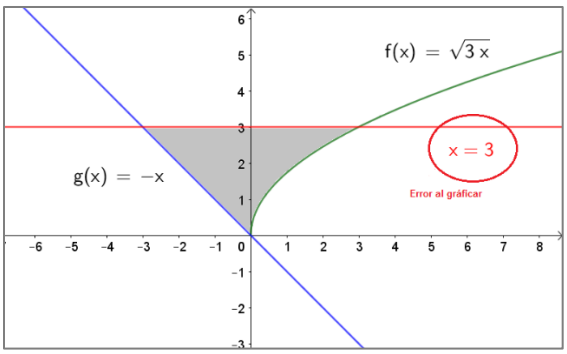


Figura 9: Representación incorrecta de la recta $x = 3$ (GeoGebra)

d) Resolución sin representación gráfica del ejercicio

Al no realizar la gráfica no están respondiendo a una de las consignas del ejercicio. Ninguno de los alumnos llegó a calcular el valor del área: 7 alumnos cometen errores algebraicos en el planteo de las ecuaciones para hallar los límites de integración, 4 alumnos propusieron desarrollos incoherentes con el problema, por ejemplo, derivadas.

Conclusiones generales

A partir de los análisis realizados pudimos identificar algunos hábitos presentes en el trabajo de los alumnos. Las conclusiones obtenidas se organizan alrededor de varias temáticas: la realización de representaciones gráficas, la definición analítica del conjunto plano correspondiente, el uso de límites de integración, los métodos de integración, coherencia de los diferentes registros utilizados, el resultado obtenido, entre otros.

Respecto del Ejercicio 1 se identifica ausencia de herramientas de construcción de gráficas planas relacionados con funciones, falta de consideración de posiciones relativas de curvas y la presencia de asociación según los elementos algebraicos formales sin considerar percepciones geométricas.

En el Ejercicio 2, se identifica que el planteo de gráficas incorrectas conduce, en general, a una resolución incorrecta. Además, la caracterización del área limitada en forma errónea, aunque las curvas están bien realizadas, muestra que la idea de región limitada no está siendo comprendida por los alumnos.

Las resoluciones del ejercicio 3 permiten mostrar que los alumnos eligen diversos caminos para obtener la gráfica. La posición relativa de curvas muestra la concepción presente respecto de las regiones en el plano y su identificación a través de funciones analíticas.

En general, podemos decir que las representaciones gráficas contribuyen a identificar elementos involucrados en el planteo de la integral. Se presentan dificultades al relacionar expresiones algebraicas con figuras planas, al utilizar gráficas aproximadas, al construir una combinación de símbolos algebraicos formales para identificar los elementos de la integral definida. Se cometen errores de resolución de ecuaciones de intersección de curvas, se identifican deficiencias de estrategias de representación de curvas y regiones asociadas y se favorece la obtención de puntos de intersección obtenidos a partir de gráficas.

Estas conclusiones se constituyen en elementos imprescindibles para repensar y reformular actividades vinculadas a la enseñanza del cálculo de áreas de figuras planas.

Referencias bibliográficas

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2017). Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias. 35(1),* 157-174

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Duval, R. (1993). Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Science Cognitives.* 5, 37-65.

Milevicich, L. (2008). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la universidad. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 339-349. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Túregano Moratall, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo.
Enseñanza de las ciencias. 16(2), 233-249.

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Farmacia y Bioquímica (2016). *Plan de Estudios de la Carrera de Bioquímica. Plan 2008, Modificatoria 2016 (Consejo Superior 6196/2016).*
Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Farmacia y Bioquímica (2016). *Plan de Estudios de la Carrera de Farmacia. Plan 2008, Modificatoria 2016 (Consejo Superior 6228/2016).*
Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Zaskis, J.; Dubinsky, E. y Dautermann, G. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students undestanding of permutation and symetry groups. *Journal of Research in Mathematics Education. 27(4)*, 435-457.

EL ANÁLISIS DE DATOS ORIENTADO A LA TOMA DE DECISIONES. UNA INVESTIGACIÓN CON ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA

DATA ANALYSIS DIRECTED TOWARDS DECISION MAKING. AN INVESTIGATION WITH MATHEMATICS STUDENT-TEACHERS

Cecilia Crespo Crespo, Christiane Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". Argentina
crccrespo@gmail.com, chponteville@gmail.com

Resumen
En la actualidad, los diseños curriculares en los distintos niveles educativos enfatizan la importancia de la organización de la información con la finalidad de tomar decisiones con un sustento argumentativo proveniente de datos estadísticos. Los futuros profesores deben acercarse a los procesos de recolección de datos y el análisis de los mismos. Juega un papel fundamental en este tipo de actividades el uso de diferentes recursos tecnológicos y el trabajo grupal. En esta investigación se analiza en forma cualitativa el trabajo realizado por estudiantes de profesorado de matemática en la presentación de un informe vinculado con temáticas demográficas, teniendo en cuenta prácticas propias de la educación estadística. Los resultados obtenidos se agrupan alrededor de estrategias argumentativas. A partir de la experiencia realizada, los estudiantes pudieron percibir la importancia social del análisis de datos en la toma de decisiones.

Palabras clave: estadística, análisis de datos, profesores

Abstract
Currently, curricular designs at different educational levels emphasize the importance of organizing information in order to make decisions with an argumentative support from statistical data. Prospective teachers should approach data collection processes and their analysis. Group work and the use of different technological resources play an essential role in this type of activities. In this research, the work carried out by mathematics student-teachers is qualitatively analyzed thought the presentation of a report related to demographic topics, taking into account statistics education typical practices. The results are grouped together around argumentative strategies. From this experience, the students could realize the social importance of data analysis in decision making.

Key words: statistics, data analysis, teachers

La Estadística en la formación de profesores de Matemática

La inclusión de la estadística en los diseños curriculares de los diversos niveles educativos en Argentina se ha realizado en tiempos recientes. En contraste, otros aspectos matemáticos determinísticos se encuentran presentes en todos los cursos desde el inicio de la educación formal en nuestro país. Uno de estos niveles educativos es el de la formación de profesores.

El diseño curricular de la carrera de Profesor de Matemática del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (ISP JVG, 2015) está estructurado alrededor de tres campos: Formación General; Formación Específica y Campo de la Formación en la Práctica Profesional. En el campo de la Formación Específica se encuentra una asignatura correspondiente a tercer año que lleva por denominación: Probabilidades y Estadística. Las temáticas que constituyen esta materia permiten a los egresados conocer y aplicar los métodos tanto de la Teoría de Probabilidades como de la Estadística, siendo esta la única instancia en el diseño en que aparecen.

Los alumnos se enfrentan al desafío de adquirir las prácticas relacionada con los contenidos de la asignatura: cálculo de probabilidades, variables aleatorias discretas, continuas y bidimensionales, estadística descriptiva, teorema central del límite, distribución de estadísticos, estimación puntual y por intervalos de confianza y pruebas de hipótesis. La justificación de la inclusión de estos contenidos se apoya en que deben ser parte de la formación de ciudadanos adultos, que sea útil para su vida posterior, y que ayuden a su desarrollo personal, además de que sean la base para una especialización posterior en el mismo tema u otros relacionados (ISP JVG, 2015).

En la actualidad se ha incluido el uso de software en el desarrollo de las clases. Algunos de uso frecuente en las clases de esta asignatura son: Excel, Infostat, Geogebra, tanto a través de computadoras y netbooks, como de teléfonos celulares. Se utilizan también aplicaciones de teléfonos celulares. No se trabaja con un software único, sino que los estudiantes seleccionan, identificando virtudes y falencias, cuál utilizan. El uso de varios de ellos favorece a una mejor interpretación de los resultados obtenidos (Ponteville, 2015) y además se intenta que adquieran la flexibilidad de adaptarse a los programas disponibles.

Existen investigaciones en las que se concluye la importancia de tomar conciencia de la necesidad de la presencia de la estadística en la formación de profesores: y de su reflexión didáctica por parte de los futuros docentes (Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea, 2012, Ferrari y Corica, 2018).

La Estadística en el discurso matemático escolar

Para realizar un análisis de la estadística en el discurso matemático escolar, es indispensable tener en cuenta el desarrollo en los últimos tiempos de la tecnología, las ciencias y los medios de comunicación. Con estos recursos, los métodos estadísticos se instalan en las prácticas habituales de diversas áreas: todo tipo de decisiones sean tanto comerciales como políticas, científicas como de todos los días se fundamentan a través del análisis de datos.

Entendiendo que la estadística se encuentra instalada dentro de nuestra sociedad como un instrumento de validación siendo utilizada y aplicada en una amplísima variedad de áreas que necesitaron de un desarrollo cualitativo significativo de ella (Crespo Crespo y Ponteville, 2015), es importante establecer que esta cultura estadística básica en los ciudadanos debe atender a su presencia en los dos extremos del proceso estadístico: como generador de información y como usuario de las decisiones que toma la sociedad a través de esta información (Ponteville y Núñez, 2010). La cultura estadística incluye no solamente capacidad de cálculo y manejo de definiciones: involucra habilidades básicas de lectura comprensiva, conocimiento del contexto y capacidad crítica (Gal, 2002).

¿Cómo respondemos los docentes a los objetivos que nos plantean los diseños curriculares de las instituciones en las que desarrollamos nuestra labor? Entre los temas de reflexión en la actualidad se encuentran las razones para

incluir los contenidos, la forma de desarrollarlos y de trabajarlos en el aula (Monzó y Queralt, 1995). Estas ideas deben estar en relación con procesos de culturalización estadística concebida como un proceso social que incluye la necesidad de incorporación a los diferentes niveles de educación de prácticas relacionadas con áreas de conocimiento de las probabilidades y la estadística. De esta manera se instala la necesidad de desarrollar en las aulas capacidades explicativas y valorativas para evaluar críticamente la información recibida de datos o situaciones estocásticas que se pueden encontrar en diversas situaciones (Batanero, 2002; 2005).

De esta manera debemos apoyarnos en contextos de realidad para poder analizar cómo se construye socialmente el conocimiento, o sea ir desde el concepto a las prácticas involucradas en él. El marco teórico bajo el cual se trabajó en esta investigación es la Socioepistemología. La estadística tiene sus orígenes en la práctica social de predecir, se integra a otras prácticas sociales (Ponteville, 2015). La estadística mira componentes diferenciadas de la predicción que se presenta en otras ramas de la matemática. Por lo tanto, al tomar decisiones debemos tener en cuenta: al alumno que aprende (¿cómo se aprende?), al contenido factible de ser modificado (¿qué se enseña?), al docente como canal de cambio (¿cómo se enseña?) y, englobando todos estos aspectos, el entorno sociocultural (¿dónde se aprende?).

En este marco, explicar y valorar en forma crítica la información exige realizar una lectura crítica de tablas y gráficos, identificar y clasificar variables y poder realizar una doble estrategia de aprendizaje: argumentar pertinentemente en relación con el objeto estadístico y su vinculación con el área de conocimiento de análisis en cuestión. Las herramientas informáticas cumplen un papel fundamental en esta construcción de conocimiento. En la actualidad su desarrollo es vertiginoso teniendo a disposición de los alumnos tanto adaptadas para objetivos estadísticos (Excel, GeoGebra, entre otros) o específicamente estadísticos (R, Infostat, entre otros).

En este trabajo, nos proponemos analizar estrategias didácticas que recuperen las características de la estadística como una construcción sociocultural.

El trabajo práctico planteado a los estudiantes de profesorado

Teniendo en cuenta esta visión y dentro del marco de considerar a la asignatura Probabilidades y Estadística como fundamental para la alfabetización estadística (Batanero, 2002) de los futuros profesores de matemática, se analiza en este trabajo la experiencia realizada en los cursos anuales 3º A y 3º B de esta asignatura de los años 2017 y 2018 a través de la realización de informes estadísticos en los cuales se deben tener en cuenta diversos aspectos relacionados con los experimentos aleatorios y su modelización, con el objetivo de mostrar como la toma de decisiones requiere de una comprensión de los procesos de recolección de datos y de organización de información (Ponteville y Crespo, 2016).

La figura 1 muestra el texto del trabajo práctico entregado a los alumnos resaltando los diferentes perfiles que ellos deben desarrollar.

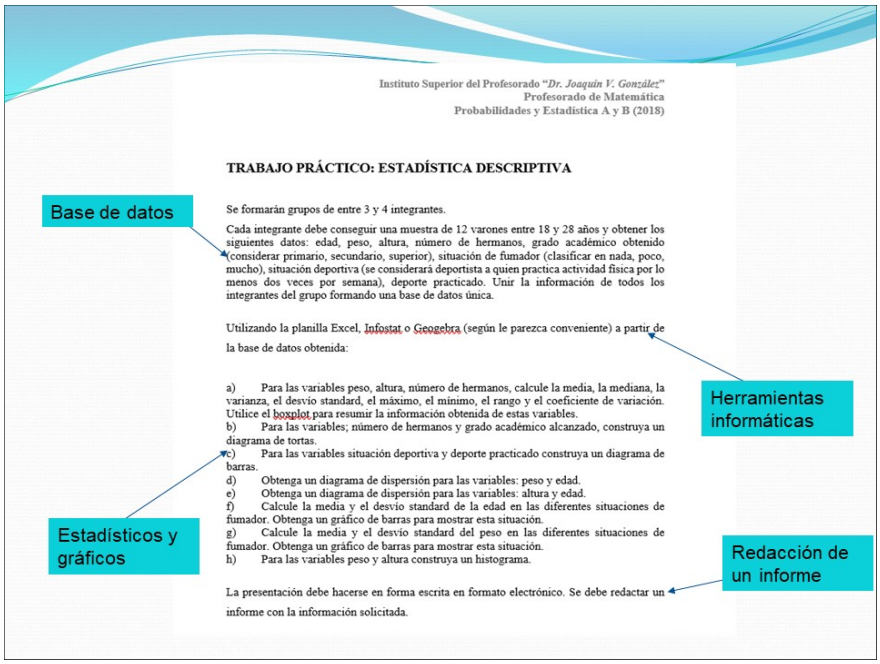


Figura 1: Texto del trabajo práctico entregado a los estudiantes

Se plantea a los alumnos la realización de un informe estadístico de corte demográfico a partir de la realización de una encuesta, la definición y caracterización de las variables involucradas, la identificación de estadísticos, la realización de gráficos y la organización general de la información a través de un informe con su correspondiente análisis. Este informe debe ser presentado en forma escrita y luego de ser aprobado por el profesor, se realiza un coloquio oral del mismo.

Con esta estrategia se busca que los estudiantes se aparten de las prácticas clásicas de enseñanza escolar, reconozcan a los gráficos estadísticos como generadores de conocimiento, incorporen procesos de cálculo realizados por medios informáticos, se acerquen a diversas disciplinas a través de variables asociadas y finalmente, reproduzcan situaciones reales de trabajo estadístico (Ponteville, 2012).

La actividad se organiza de la siguiente manera: el texto del trabajo práctico se entrega a principio del curso, se establece fecha de entrega, se presenta el informe en forma electrónica y se organiza un coloquio con todos los integrantes del grupo que se desarrolla a partir de preguntas que hace el profesor. Las consignas relacionadas con las características de la organización del contenido del informe son abiertas, para poder analizar las visiones que los estudiantes tienen acerca del proceso a desarrollar. El coloquio es considerado la instancia para complementar oralmente aquellos aspectos que la docente considere necesarios.

El trabajo está planteado para su realización en grupos porque se considera que las discusiones y argumentaciones de los estudiantes son fundamentales para obtener y organizar la información. El trabajo colaborativo en este tipo de actividades se ve enriquecido por las tareas favoreciendo la construcción social de conocimientos. Los estudiantes podrán realizar un reparto de tareas, sobre todo en la etapa de obtención de información por medio de las encuestas que realicen. El desempeño y organización del grupo es muy importante porque las tareas deben ser consensuadas y pautadas entre sus integrantes.

Análisis realizado

En el análisis de la experiencia se tuvieron en cuenta diversos aspectos vinculados a una variedad de prácticas, el uso de recursos tecnológicos, la utilización de argumentaciones para las explicaciones de lo ocurrido, el planteo de variables y sus correspondientes escalas, la organización de la información, la presentación del trabajo realizado, la construcción de gráficos, entre otros.

Se tuvieron en cuenta los 18 informes presentados en los cursos mencionados anteriormente. En el análisis que realizamos en esta investigación, tendremos en cuenta los siguientes aspectos: presentación (estrategias utilizadas en la recolección de datos), utilización y aprovechamiento de gráficos (tipos de gráficos y su aplicación para representar la información), comentarios y argumentaciones realizadas (formas de argumentación y conclusiones extraídas) y referencias bibliográficas (tipo de referencias, su formato y corrección).

a. Sobre la presentación

Las presentaciones de los informes tuvieron características diversas tanto formales (tipo de letra, de hoja, formato, presencia de carátula, etc.) como organizativas. Esto había sido pensado como posibilidad al plantear de manera abierta las características que tendría.

La mayoría de los grupos de estudiantes (13 de los 18 informes consideramos en esta investigación) explicó las características diseño del instrumento utilizado, pero sólo 10 explicaron de qué manera procesarían la información.

La mitad de los equipos presenta la base de datos como parte del informe (Figura 2). Los que no la presentan, anexan al informe un archivo con la base en planilla de cálculo. Al preguntárseles sobre la causa por la que no se incluyó, afirmaron que consideraban que el informe no debía incluirla porque es algo que fue utilizado en el trabajo, pero no lo consideraban como parte de él.
Sólo 2 grupos incluyeron la consigna del trabajo práctico como parte del informe, explicando el resto en el coloquio que lo consideraron innecesario por tratarse de las indicaciones de cómo se debía realizar el trabajo que ellos desarrollaron.

Las conclusiones son explicitadas como tales en 10 de los trabajos, en el resto el informe es una descripción de la información brindada por los gráficos y los estadísticos, no incluyendo apreciaciones personales ni reflexiones sobre lo obtenido.

10 de los equipos declaran bibliografía al final del informe, aunque no son tratadas en el trabajo como referencias ni citas bibliográficas, asumiendo que se trata de bibliografía consultada.

Una vez recolectados los datos los organizamos de la siguiente manera:

	Edad	Peso	Altura	Nº hermanos	Grado académico Primario - Secundario – Superior	Situación fumador Nada - Poco - Mucho	Situación deportiva Por lo menos 2 veces por semana	Deporte
1	19	79	1,76	2	Secundario	poco	Si	Rugby
2	28	76	1,84	2	Superior	mucho	Si	Futbol
3	28	83	1,69	2	superior	nada	Si	Crossfit
4	19	76,4	1,64	1	secundario	nada	Si	Rugby
5	19	85	1,65	0	secundario	nada	Si	Rugby
6	27	69	1,74	2	superior	nada	Si	Futbol
7	25	60	1,74	2	superior	nada	No	
8	28	52	1,62	2	superior	nada	No	
9	25	71	1,8	2	secundario	poco	No	
10	27	76	1,75	1	secundario	poco	Si	Futbol
11	22	93	1,82	3	secundario	nada	Si	Rugby
12	27	79	1,86	1	secundario	nada	No	
13	21	67	1,84	3	secundario	nada	No	
14	18	62	1,79	3	secundario	nada	No	
15	28	60	1,75	12	primario	mucho	No	
16	26	64	1,55	9	primario	poco	No	
17	23	80	1,78	3	secundario	nada	Si	Futbol
18	19	60	1,65	1	secundario	nada	Si	Futbol
19	27	75	1,75	1	secundario	poco	No	

Figura 2: Ejemplo de presentación de base de datos en el informe

b. Sobre utilización y aprovechamiento de gráficos

Respecto de la utilización y aprovechamiento de gráficos pudimos identificar algunos aspectos que nos mostraron características respecto de la conceptualización de diversos aspectos.
Uno de ellos, fue la relación que se presenta con los ejes cartesianos estableciendo que la intersección de dos ejes debe quedar representado por el punto de coordenadas nulas. Esto se evidenció en la construcción de gráficos de dispersión. Veamos un ejemplo:

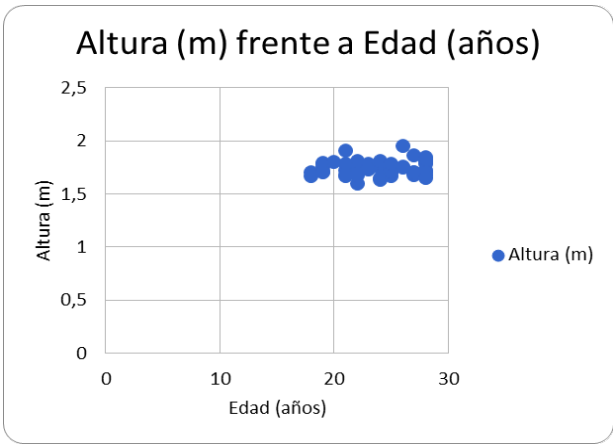


Figura 3: Ejemplo de grafico de dispersión en uno de los informes, con la escala utilizada por ellos

En este gráfico puede verse como, con el objetivo de mantener el origen de la representación en el origen de coordenadas se pierde la posibilidad de representar más claramente la nube de puntos generada por los datos de la muestra. Durante el coloquio se les consultó y coincidieron en que trasladar el origen permitía una mejor visualización de los datos. En este caso, primo la formalidad de la representación clásica de los ejes cartesianos sobre el objetivo central de comunicación de información a través de las representaciones gráficas.

Otra de las situaciones que se presentaron fue la construcción de diagramas de barras que comparan medias y desvíos estándar de varias categorías sin tener en cuenta que está comparación carece de contenido conceptual como muestra la Figura 4.

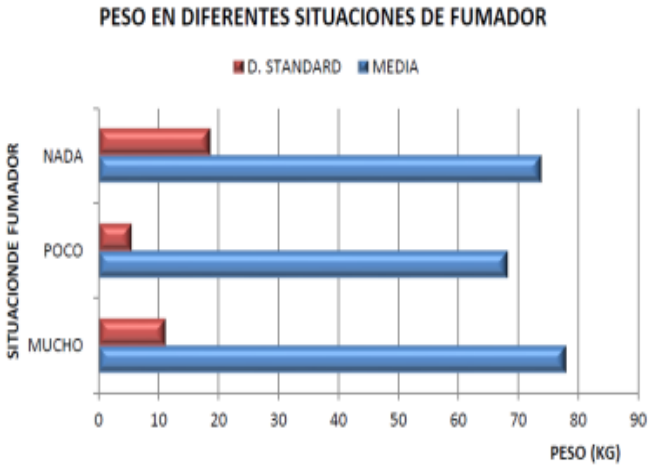


Figura 4: Ejemplo de comparación de medias y desvíos en el informe

Otra de las consideraciones realizadas por la tercera parte de los trabajos fue no incluir los gráficos dentro del informe enviándolos en otro archivo aparte. Esto muestra la fuerte relación entre la conceptualización a través del registro escrito y la construcción de un informe.

Respecto de las variables, uno de los aspectos que generaron debate entre los integrantes de los grupos fue el tema de identificar las categorías a ser consideradas en cada variable analizada. Por ejemplo, en los deportes, en algunos casos, se tuvo en cuenta simultáneamente no practicar deporte con los distintos tipos de deportes. Como vemos en el caso siguiente, la comparación de la columna No con la columna Tenis carece de interés:

Figura 5: Ejemplo de gráfico de barras en el informe tal como fue presentada por un grupo

También se presentó una situación similar en el siguiente gráfico donde las variables que definen actividad y tipo de trabajo no tienen sentido de ser comparadas:

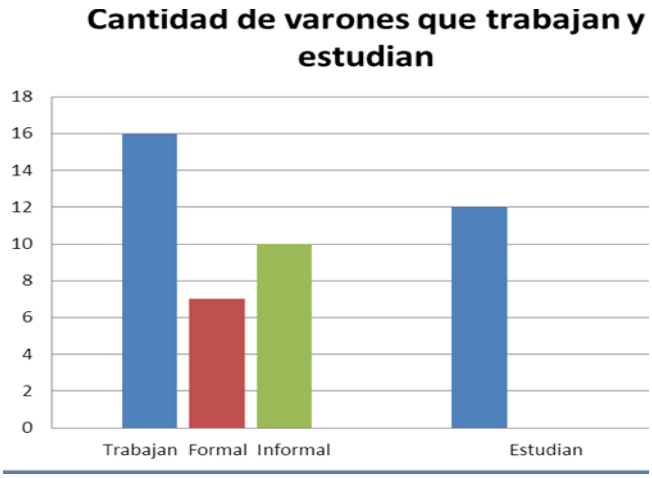
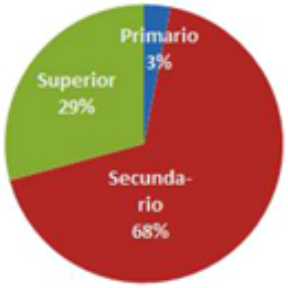


Figura 6: Ejemplo de diagrama de barras relacionado con la actividad y el tipo de trabajo. en el informe tal como fue presentada por un grupo

Durante el coloquio reconstruyeron esta idea viendo que deberían haber construido dos variables y, por lo tanto, dos gráficos para comunicar la información.

c. Sobre comentarios y argumentaciones realizadas

En los informes, ninguno de los equipos extrajo conclusiones de los gráficos, sino que redactaron con palabras el contenido de los gráficos. Podría decirse que la riqueza visual no fue adecuadamente aprovechada. Los gráficos no jugaron un papel central en las argumentaciones utilizadas, sino que se recurrió a las palabras para explicar lo que los gráficos manifestaban con claridad, otorgando a lo verbal más peso que a lo visual (Figura 6). Lo visual no es reconocido y aceptado por los estudiantes como una normativa válida para un trabajo escrito (Crespo Crespo, 2007), teniendo para ellos más valor la formalización verbal de las ideas.



En la encuesta también se preguntó sobre el nivel académico alcanzado (se entiende por ello el último nivel completado). Se tomaron como opciones para esta categoría: primario, secundario y superior.

De las 65 personas encuestadas, solo 2 afirmaron que su grado académico es primario, 44 aseguraron tener un grado académico alcanzado secundario y 19 encuestados consiguieron alcanzar el nivel superior.

(Figura 3)

Se puede observar que en el rango etario encuestado (18 a 28 años) una gran mayoría ha llegado a completar el nivel secundario; y que muy pocos, ya sea por la elección de una carrera larga, por dedicarse a trabajar o por algún otro motivo personal, lograron adquirir un título superior.

Figura 6: Ejemplo utilización de lo verbal para describir lo visual de datos en el informe

d. Sobre conclusiones extraídas

Al analizar las conclusiones que presentan en los informes los distintos grupos de estudiantes, es posible identificar que se centran en tres aspectos básicamente: conclusiones acerca de los resultados obtenidos a partir del procesamiento de los datos de la muestra, acerca del método de análisis utilizado en el trabajo y, finalmente acerca de los aportes que consideran que la realización del trabajo realizó en su formación.

La mayoría de los equipos que redactaron en el informe conclusiones (9 sobre un total de 10), se refirieron a los resultados que obtuvieron en el trabajo estadístico. Se pueden leer afirmaciones como las siguientes que estamos citando textualmente de los informes presentados por los estudiantes:

> *"Se llegó a la conclusión de que pocos varones entre 18 y 28 en la actualidad tienen finalizados los estudios superiores"*
> *"Respecto a la altura, al haber separado los gráficos por sexos, podemos apreciar la diferencia de estatura entre varones y mujeres marcadamente.",*
> *"Los jóvenes con mayor peso son aquellos que menos fuman y sus edades rondan los 22 años."*

En algunos casos, las conclusiones se mezclan con comentarios personales:

> *"Originalmente, creíamos que los factores que influían en la disminución de deporte eran las actividades diarias tales como el estudio, el trabajo y las horas en transportes públicos; como también el tabaquismo. Obtuvimos resultados dispares en la muestra analizada."*

También hicieron afirmaciones de las que se infiere que son conscientes de las limitaciones de haber trabajado con muestras pequeñas:

> *"Con respecto al tabaquismo, dado que sólo un porcentaje reducido de mujeres consume, no pudimos estimar probabilidades certeras."*

Solo 5 de los equipos incluyeron conclusiones basadas en las herramientas utilizadas para procesar los datos de la base obtenida. Algunas de las afirmaciones que escribieron son:

> *"Como consecuencia del informe presentado, podemos destacar la practicidad de los gráficos estadísticos para la visualización de los comportamientos de los datos."*
> *"Las gráficas de tipo torta están especialmente diseñadas para representar partes de un todo, es decir: las porciones de la torta deben sumar 100% siempre. En este tipo de gráfico lo importante es mostrar el porcentaje o proporción que le corresponde a cada categoría y no el orden en que son presentados los datos."*

En relación con las conclusiones vinculadas con los aportes que el trabajo hizo a su formación académica, sólo fueron 2 los equipos que realizaron ese tipo de conclusiones:

> *"Creemos que aprendimos más de lo suponíamos antes de comenzar el trabajo."*

En el coloquio oral, todos los equipos reconocieron los aportes que este tipo de trabajos brinda a sus estudios, ya que les permite vivenciar prácticas relacionadas con la estadística y comprender la utilidad que pueden tener en estudios de corte social. Sin embargo, comentaron que no incluyeron este tipo de conclusiones en el informe, por considerar que el informe debía enfocarse sólo a lo disciplinar.

e. Sobre referencias bibliográficas

En relación con la bibliografía referenciada por los distintos grupos, es posible clasificarla en cuatro grandes grupos, según el tipo de publicaciones que reportan: Textos académicos de estadística, textos de didáctica de la matemática, páginas web relacionadas con instructivos para construcción la construcción de gráficos estadísticos y referencias de los softwares utilizados en el procesamiento de datos. La mayoría de los equipos declararon bibliografía de uno solo de los grupos de publicaciones mencionadas.

La mayoría fueron textos académicos, predominantemente libros de texto de nivel superior, tanto de los presentes en la bibliografía sugerida por el programa de la materia como otros que los estudiantes buscaron para la realización del trabajo práctico.

Un solo grupo incluyó artículos que abordan contenidos didácticos de la estadística, en particular investigaciones sobre aplicaciones del uso de la tecnología a la enseñanza de la estadística en el nivel superior.

Un solo equipo incluyó el listado de los programas utilizados, aunque no utilizando formatos estandarizados de referencias.

En la manera de reportar las referencias bibliográficas utilizaron diferentes formatos, pero con falencias, ya que no en todos los casos aparecían los datos completos o correctamente escritos.

Comentarios y conclusiones

El trabajo práctico de cuyo análisis damos cuenta en este trabajo, permitió a los estudiantes enfrentarse a la construcción de una base de datos y realizar su procesamiento. Una de las primeras decisiones que debieron tomar fue la organización de la obtención de las muestras. Los distintos equipos generaron la encuesta correspondiente y decidieron de qué manera la pondrían en práctica. Algunos de los grupos debieron realizar reformulaciones de la misma al detectar ciertas imprecisiones en su formulación. Esto era planteado a la docente durante algunas clases de consulta, pero en ningún caso figuró en los informes presentados. La supervisión de la profesora en esta etapa inicial resultó fundamental, ya que una encuesta mal diseñada y con preguntas ambiguas hubiera generado dificultades en su procesamiento por parte de los estudiantes.

Los informes presentados no reflejan todo el trabajo previo realizado. Los estudiantes se limitaron en general a escribir sobre los resultados y no sobre el proceso que habían realizado previamente.
Este trabajo brindó a los estudiantes la posibilidad de analizar y contrastar una muestra estadística a través de distintos registros gráficos. Los informes presentados muestran que en algunos casos, aunque no la mayoría, no pudieron llegar a reconocer a los gráficos como centrales en el procesamiento y los dejaron aparte en el informe.

En la exposición oral los estudiantes debieron reflexionar a través de las preguntas realizadas por la docente acerca de aquellos aspectos que los informes no reflejaban. En la carrera no habían realizado un trabajo similar en otra asignatura hasta el momento, lo que permite explicar algunas falencias detectadas en los informes.

El análisis de cada tipo de representación permitió abordar una medida de análisis y contrastar otras. En algunos casos, fueron capaces de reconocer e identificar que los gráficos pueden influenciar la percepción de la información, permitiendo manipular intencionalmente la opinión de quienes hagan una lectura no profunda.

A partir de los coloquios realizados tras la experiencia los estudiantes explicitaron que pudieron percibir la importancia social que tiene el análisis de datos en la toma de decisiones. Con la presentación de la información en

gráficos es posible observar tendencias y comportamientos generales permitiendo su aprovechamiento para la realización de conjeturas y la argumentación.

Por otra parte, los distintos grupos pudieron realizar un uso inteligente de los recursos tecnológicos. Los reconocieron como recursos didácticos orientados al aprendizaje de la estadística en la escuela sumándolos a los que han ido viendo en las clases de didáctica de la matemática. Los estudiantes descubrieron durante el análisis de los datos de sus muestras relaciones matemáticas de manera eficaz en la resignificación de los conceptos matemáticos al encontrarles su utilidad en la argumentación orientada a la toma de decisiones.

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Gea, M. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educação Matemática Pesquisa*, *14*(2), 279-297.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 8* (3), pp. 247-263.

Batanero, C. (2002). *¿Hacia dónde va la educación estadística?* Recuperado el 23 de abril de 2017 de http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/BLAIX.pdf

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2015). Evolución del concepto de inferencia estadística. Influencia en su enseñanza. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28,. 433-439. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Ferrari, C. y Corica, A (2018). Formación estadística de estudiantes para profesor en matemática: un estudio exploratorio. Revista Investigación Educativa, 164-189.

Gal, I. (2002). Adults´ Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsabilities. *International StatisticalReview, 70 (1)*, 1-25.

Ponteville, Ch. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la estadística. *Premisa,* 14 (54), 37-40.

Ponteville, Ch. (2015). *El rol de las Argumentaciones Estadísticas: Pruebas de Hipótesis.*Tesis de maestría no publicada. CICATA-IPN, México.

Ponteville, Ch. y Crespo Crespo, C. (2016). Las pruebas de hipótesis en la visión de docentes de estadística. E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 29*, 1232-1238. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México.

ISP JVG (2015). *Plan curricular institucional. Profesorado de Educación Superior en Matemática.* Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”.

Monzó, O. y Queralt, T. (1995). La inferencia estadística en los bachilleratos. *Actas 7as Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp.114-119). Madrid.

Ponteville, Ch. y Núñez, M. (2010). La demostración y la enseñanza de la estadística. En H. Blanco (Ed). *Acta de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática,* (pp. 346-350). Buenos Aires: Sociedad Argentina de Educación Matemática.

SECCIÓN 2

PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

ENFOQUE SOCIO-ECONÓMICO EN EXÁMENES DE MATEMÁTICA NUMÉRICA

SOCIO-ECONOMIC APPROACH IN NUMERICAL MATHEMATICS EXAMS

Rafael Osvaldo Jiménez Rodríguez, Roberto Millet Luaces
Universidad de las Ciencias Informáticas (Cuba).
rafaelj@uci.cu, millettp@uci.cu

Resumen
Nuestra educación considera el desarrollo del alumno como resultado del proceso de enseñanza aprendizaje, un papel esencial lo desempeña la formación y desarrollo de normas de conducta, sentimientos, convicciones, conocimientos, habilidades, hábitos y capacidades teórico prácticas, regidos por el principio de vinculación de la teoría con la práctica consciente, activa y creadora. La evaluación es un componente esencial de la enseñanza. Si se la utiliza adecuadamente, puede ayudar a lograr objetivos curriculares importantes. El presente trabajo muestra como se le puede dar cumplimiento a dicha estrategia mediante ejercicios y problemas seleccionados para diversas pruebas parciales en la asignatura Matemática Numérica.

Palabras clave: matemática, numérica, enfoque socio-económico

Abstract
Our educational system considers the development of the student as a result of the teaching-learning process; an essential role is played by the formation and development of behavioral norms, feelings, convictions, knowledge, abilities, habits and practical-theoretical skills, governed by the principle of linking theory with conscious, active and creative practice. Evaluation is an essential component of teaching. If properly used, it can help achieve important curriculum objectives. This paper shows how this strategy can be fulfilled through exercises and problems selected for various mid-term tests in the Numerical Mathematics subject.

Key words: mathematical, numerical, socio-economic approach

Introducción

El mundo contemporáneo, caracterizado por grandes desigualdades sociales y la globalización de todos los procesos económicos, sociales, políticos, culturales e ideológicos, exige, cada vez más, de hombres con una cultura general integral; ésta es necesaria para poder enfrentar, sin grandes dificultades, los enormes y complejos problemas que imponen el desarrollo acelerado y vertiginoso de la ciencia y la técnica.

Nuestra educación considera el desarrollo del alumno como resultado del proceso de enseñanza aprendizaje. Un papel esencial en este proceso lo desempeña la formación y desarrollo de normas de conducta, sentimientos, convicciones, conocimientos, habilidades hábitos y capacidades teórico prácticas regidas por el principio de vinculación de la teoría con la práctica consciente, activa y creadora.

La finalidad esencial de nuestra educación es la formación de personalidades integralmente desarrollada, que piensen y actúen creadoramente, que sean capaces de construir la nueva sociedad y defender sus logros. Esta característica en medio del vertiginoso desarrollo de la ciencia y la técnica genera una gran contradicción entre los conocimientos acumulados por la humanidad y el tiempo disponible, se ha convertido en un reto para el proceso de enseñanza, y determina la necesidad de definir y perfeccionar la metodología del trabajo docente, en aras de una cuidadosa selección de los conocimientos y habilidades esenciales que deben ser adquiridos.

La enseñanza de la matemática no está ajena a todo lo anteriormente expresado, aunque generalmente los matemáticos dedican todo su esfuerzo a que los estudiantes asimilen los contenidos no dedicando grandes esfuerzos a la aplicación de los mismos, deficiencia esta que trae consigo carencias de orden político ideológico en los educandos.

Fundamento teórico

Las Matemáticas forman parte de una cultura que se define como el conjunto de conceptos en términos de los cuales una población dada actúa y piensa. La influencia sociocultural se manifiesta en los diseños curriculares, en la formación y selección del profesorado y en los procesos de ajuste ideológico entre los tres niveles de infusión ideológica. Este fenómeno conlleva tres acciones principales:

- Selección de contenidos. Se promocionan unos contenidos en detrimento de otros.
- Intercambio cultural entre el profesor y sus alumnos.
- Transmisión de valores culturales de las Matemáticas: realismo, objetismo, control, progreso.

En el proceso de socialización que tiene lugar en la Escuela el profesor desempeña una doble actividad: socializar y ser socializado. La función que justifica su presencia en el sistema educativo es la socialización de los alumnos. El profesor delimita para sus estudiantes el rango de actividades que resulta habitual y aceptable para el grupo, participa en la construcción de su identidad y les introduce en el conocimiento específico de los roles que surgen en la división del trabajo, en el conocimiento de los mundos objetivos. Estas acciones forman parte del proceso de infusión ideológica de la Escuela y del profesorado como elemento destacado de ella.

Para comprender esta doble situación (socializador socializado) del profesor resulta útil centrarse en el estudio del rol de profesor. La socialización se entiende como la ejecución de ese rol, la manifestación de significados sobre los acontecimientos objetivos que de la definición de rol se derivan. El profesor socializado se explica cómo su compromiso con el rol definido exteriormente.

Se entiende por Trabajo Político-Ideológico: Sistema de acciones de todos los factores (escuela-familia y comunidad) que influyen sobre la preparación ideo-política de los jóvenes de modo coherente y sistémico y que están dirigidas al cumplimiento de los siguientes objetivos:

- Incentivar los sentimientos de pertenencia y de identificación con los valores que caracterizan a nuestro pueblo.
- Inculcar nuestros principios y posiciones a los jóvenes, para que argumenten y valoren las causas de la situación actual del país.
- Defender con sólidos argumentos la soberanía, la independencia nacional y la justicia social.

Teniendo en cuenta algunos aspectos del Reglamento Docente Metodológico relacionado con el profesor y la clase se hace referencia al *artículo 27*:

El profesor es el responsable fundamental de que la asignatura que imparte posea la calidad requerida, desarrollando una labor educativa desde la instrucción. Para ello debe poseer una adecuada preparación pedagógica y dominar los contenidos de la asignatura; así como orientar, controlar y evaluar a los estudiantes para lograr un adecuado dominio de dichos contenidos, en correspondencia con los objetivos generales de la asignatura, contribuyendo así a su formación integral.

Resultados

La evaluación es un componente esencial de la enseñanza. Si se la utiliza adecuadamente, puede ayudar a lograr objetivos curriculares importantes. El impacto de las decisiones que se refieren a cómo y cuándo evaluar los conocimientos y el rendimiento de los alumnos no puede sobreestimarse.

Un objetivo fundamental de los exámenes es indicar lo que usted considera importante. Los exámenes son un poderoso motivador y los alumnos aprenderán lo que creen que usted considera valioso. La evaluación también ayuda a llenar brechas en la enseñanza ya que estimula a los estudiantes para que amplíen sus conocimientos por sus propios medios y participen en las oportunidades educativas que están disponibles.

En ocasiones se presentan los contenidos matemáticos sin mostrar sus aplicaciones, al igual que se elaboran exámenes donde no se tiene en cuenta estos aspectos señalados, a continuación, se muestra a modo de ejemplo solo una pregunta aplicada en un examen de la asignatura.

1- Dada la ecuación $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x - 6 = 0$.

a) Utilice la Regla de Descartes y obtenga la información que proporciona acerca del posible número de raíces negativas y positivas.
b) Utilice la fórmula de Lagrange para determinar el intervalo en el que se encuentren todas las raíces reales de la ecuación.
c) Determine el número total de raíces reales de la ecuación.

Exámenes aplicados donde se explotan los contenidos con un correcto enfoque socio- económico

Le mostramos exámenes aplicados donde se tiene en cuenta el logro de las habilidades matemáticas, pero desde un contexto que tributa a la estrategia del trabajo socio-económico

Como puede observarse a continuación, los ejercicios del examen propuesto parten de una situación problémica real, donde en cada pregunta se van introduciendo situaciones que el estudiante tiene que darle solución utilizando los conocimientos que ha adquirido durante el curso.

Primera prueba parcial aplicada curso 2012-2013

En el proceso de perfeccionamiento económico, una empresa productora de software entre otros aspectos analiza su rentabilidad financiera, la que puede verse como una medida de cómo se invierten fondos para generar ingresos. Los especialistas monitorean estos últimos aspectos utilizando los siguientes modelos matemáticos:

Inversión de fondos $I(x) = x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 60x + 30$
Generación de Ingresos $G(x) = x - \cos(x)$

I- Utilizando técnicas estudiadas, solucione las siguientes interrogantes.

1.1-Determine cuántos posibles puntos de inversión nula pudiera tener la empresa.
1.2-Puede afirmarse que dichos valores si existen están todos dentro del intervalo $[0, 10]$ Justifique su respuesta analíticamente.
1.3- Utilizando técnicas gráficas separe en intervalos los puntos de inversión nula.
1.4-Qué método de intervalo le recomendaría al especialista para determinar una aproximación para un punto de inversión nula, si conoce que se satisfacen las hipótesis para aplicar dichos métodos y además 4 y 7 son cotas inferiores y superiores respectivamente de $|I\,(x)|$. Justifique su respuesta.

II- Si la empresa se declarará en bancarrota cuando los ingresos sean nulos y conocemos que un posible punto de bancarrota está en el intervalo [0, 2].

2.1-Suponiendo que x=0.7391 es una aproximación del posible punto de bancarrota con error absoluto máximo de 0.005, determine si la tercera cifra de dicha aproximación es exacta.
2.2- Se podrá garantizar utilizando el método de Newton-Raphson la convergencia de dicho método, tomando como aproximación inicial x0=1.
2.3- Realice dos iteraciones de dicho método.

III- Teniendo en cuenta los modelos inversión de fondo y generación de ingresos.

3.1- Cuántos puntos existen donde coinciden las inversiones y los ingresos.
3.2- Separe el menor de estos valores en un intervalo de longitud 1.
3.3- Determine la cantidad mínima de iteraciones si utilizara el método de bisección para obtener el valor anterior con error no mayor que 0.004.
3.4- Determine dos iteraciones de dicho método y estime el error.

Segunda prueba parcial curso 2012-2013

La salud pública cubana ha alcanzado los más altos niveles de atención a las gestantes y los recién nacidos a través de Programa Nacional de Atención Materno-Infantil.
La siguiente tabla muestra los pesos normales de bebés durante los primeros 12 meses de vida.

Edad en meses	0	2	5	8	10	12
Peso en libras	7.5	10.25	15	16	18	21

Se le asigna la tarea de estimar el peso de los bebés a los 8.5 meses a un grupo de tres ingenieros informáticos que trabajan en una oficina de estadística.

I. *Ingeniero 1:* Decide que para resolver la situación anterior es mucho más conveniente utilizar un proceso de interpolación y sólo tomar cuatro de los seis datos ofrecidos.

a) Seleccione el juego de datos adecuado y resuelva la situación propuesta sin necesidad de determinar la expresión analítica del polinomio interpolador.

b) Se obtienen las siguientes expresiones analíticas utilizando el mismo juego de nodos:

- Manualmente utilizando Método Lagrange $1.207x^2 - 0.054x - 12.345$
- Utilizando un programa Matlab para Método Newton $1.207x^3 - 0.054x - 12.345$

¿Pudieran ser correctos los resultados obtenidos? Justifique.

c) ¿Es correcto utilizar la función $r(x) = f[2,5,8,10](x - 10.25)(x - 15)(x - 16)$ para estimar el error de interpolación? En caso de entender que no sea la correcta, reelabórala.

II. *Ingeniero 2*: Piensa que lo mejor sería construir una función spline utilizando los cinco primeros nodos y la técnica del spline cúbico natural.

a) Resuelva el sistema tridiagonal que se obtiene $HM = Y$ utilizando el método de Gauss con factorización LU y estrategia parcial de pivote.

b) Determine la ecuación correspondiente al tramo de curva para el trabajo de estimación necesario.

c) Con los elementos anteriores de respuesta a la interrogante inicial.

III. *Ingeniero 3*: Le proponen los siguientes modelos de ajuste.

i) $y = a + bx^2$ ii) $y = m + px$ iii) $y = m + 2^{px}$ iv) $y = c + \log(\varphi x)$

a) Diga cuál de los modelos anteriores no constituye un modelo lineal. Justifique su respuesta.

b) Tomando en cuenta la tabla ofrecida. ¿Cuál de los dos primeros modelos sería más representativo para los datos? Justifique su respuesta. (Puede realizar un análisis gráfico).

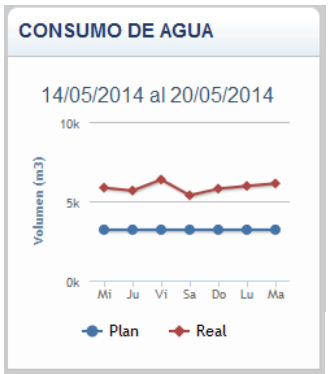
c) Ajuste los datos al modelo seleccionado.

d) Con los elementos anteriores de respuesta a la interrogante inicial.

IV. Valore los resultados obtenidos por los tres ingenieros.

Segunda prueba parcial curso 2013-2014

Un profesor realiza un debate con un grupo de estudiantes sobre el consumo de agua en nuestra Universidad para ello le muestra los datos publicados en la intranet el día 21 de mayo del presente año, con los días comprendidos entre el 14 y el 20 (ver figura) y lo acompaña con una tabla que elaboró al extraer los datos.



Día	14	15	16	17	19	20
Consumo de agua	5.852	5.667	6.364	5.371	5.958	6.118

El profesor olvida colocar los datos correspondientes al día 18, al generarse el debate tres estudiantes deciden aplicar diversas técnicas numéricas para realizar un estimado del resultado que omitió el profesor.

I. Piensa que determinando un polinomio interpolador utilizando los últimos tres nodos puede determinar un estimado del valor omitido.
   a. Obtenga el sistema con matriz de Vandermonde necesario para determinar los coeficientes del polinomio.
   b. ¿Convergerá el método de Jacobí al aplicarlo en la resolución del sistema anterior? Justifique.
   c. ¿Será mal condicionada la matriz del sistema? Justifique su respuesta. Resuelva dicho sistema.
   d. Con los resultados anteriores forme el polinomio y estime el dato solicitado.

II. Piensa que lo más conveniente sería buscar un modelo adecuado, ajustar los datos a dicho modelo pudiendo solucionar la situación. Para lo cual tiene propuesto tres modelos.

   i) $y = ax - bx^c$ ii) $y = cx + sen(bx)$ iii) $y = a + bx + dcos(x)$

   a) En cada caso clasifica los modelos en lineal y no lineal. Justifica los no lineales.
   b) Seleccione el modelo lineal para realizar el ajuste.
   c) Si el estudiante obtiene el sistema normal de Matriz A y vector de términos independientes b
      >> A= [6 101 -0.459; 101 1727 -2.534; -0.459 -2.534 2.732];
      >> b= [35.33; 595.6; -2.69];
      Resuelve dicho sistema utilizando el método de Gauss con factorización LU.
   d) Ajuste los datos al modelo seleccionado.

III. Piensa que lo más conveniente es tomar tres nodos los dos primeros junto al último y emplear el método de Lagrange. Además, tiene la tarea de valorar los tres resultados y dar una respuesta final a la problemática, para ello realice lo que se le orienta.

   a) Determine el dato solicitado sin necesidad de encontrar previamente el polinomio de Lagrange.
   b) ¿Será igual el polinomio que obtuvo el primer estudiante y el que obtuviera el tercer estudiante? Justifica.
   c) Valore los tres resultados y diga cuál de los tres estudiantes obtuvo la mejor aproximación, si al concluir la actividad el profesor les informa que el valor que había omitido era 5.788 para ello determine el error de interpolación.
   d) Tomando en cuenta lo anterior. ¿Cuál será el estimado de consumo de agua al finalizar el día de hoy?

Como se puede apreciar, se han evaluado los mismos contenidos, pero desde otro enfoque, utilizando situaciones prácticas, en el primer caso mostramos una aplicación en una cooperativa, en el segundo caso damos información sobre la edad de un bebé en meses y su peso correspondiente en libras y observe que al final del examen se le pide al estudiante que haga valoraciones de los resultados obtenidos, habilidades escasamente evaluadas en exámenes matemáticos. En la tercera situación se muestra una situación real publicada en nuestra intranet universitaria, el consumo de agua durante una semana, donde el estudiante además de aplicar los conocimientos matemáticos debe predecir el consumo de agua el propio día que se aplicó el examen.

Para que se pueda valorar la experiencia, le mostramos los resultados en nuestra facultad y los obtenidos de manera general por la Universidad en los últimos cuatro cursos, para ello debe tener en cuenta que en nuestra Universidad se imparte la asignatura con el mismo programa en 5 facultades, y solo en la nuestra se ha aplicado la experiencia.

Curso	2013-2014		2014-2015		2015-2016		2016-2017	
	% Aprob	%Calidad	% Aprob	%Calidad	% Aprob	%Calidad	% Aprob	%Calidad
Universidad	78.95	22.65	70.53	29.31	91.86	31.96	79.74	25.7
Facultad	85	35	91.3	34.78	93.88	32.65	91.11	35.56

Como se puede apreciar los resultados obtenidos a partir de la experiencia aplicada, resultan superiores a los obtenidos por las restantes facultades. Lo cual valida de positiva nuestra experiencia.

Conclusiones

El reforzamiento de los valores es una tarea difícil y compleja a la cual se enfrenta arduamente la sociedad. En este sentido les corresponde a las instituciones educacionales un papel activo. La asignatura Matemática, al ser básica para el estudio de diversas especialidades en la Educación Superior, tiene mucho que aportar y así lo demuestran disímiles investigaciones de la Matemática Educativa.

El presente trabajo sirve para reflexionar sobre cuanto potencial presenta el contenido de la asignatura Matemática Numérica para contribuir a fortalecer valores en los estudiantes, tarea estratégica del Ministerio de Educación Superior en Cuba.

Todas las situaciones anteriormente mostradas son muy útiles, para en trabajos posteriores en clases retomarlas, actualizarlas y debatir sobre ellas, haciendo énfasis en lo necesario que resulta como futuros profesionales estar preparados para enfrentarse a diversas situaciones prácticas que requieren los conocimientos adquiridos durante los estudios universitarios.

Se pretende en un trabajo posterior realizar estudios sobre la aceptación por parte de los estudiantes de este recurso pedagógico y sobre su efecto en el mejoramiento del proceso de enseñanza aprendizaje, que es en definitiva el propósito para el cual han sido creados.

Referencias bibliográficas

Alarcón Ortiz, R. (2000). Actualización del enfoque integral para la labor educativa y política ideológica. *La Habana. Editorial Félix Varela*.

Álvarez Blanco M. (2005). Matemática Numérica. *La Habana. Félix Varela*, 342p.

Bastán, M. (2015) Las tecnologías informáticas en la formación de profesores de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación. ISSN: 1681-5653. http://www.rieoei.org/experiencias109.htm*

Ibade, I. (2007) Autoevaluación a través de Internet: variables metacognitivas y rendimiento académico. *Revista Iberoamericana de Tecnología educativa, 6 (2), 59-75. http://campusvirtual.unex.es/cala/editio/*

JUN (2001) La Universidad en la Batalla de Ideas.5to Taller Nacional del Trabajo Político Ideológico. MES. Palacio de la Convención.

Machado Darío (2000). Cuba Ideología Revolucionaria. *Editora Política. La Habana*.

MES (2000) Trabajo Político Ideológico en la Universidad.5to Taller Nacional. Editorial Felix Varela. La Habana.

Pérez, C. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva Educacional. Formación de Profesores, 53*(2), 129-150.

DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE INCÓGNITA EN ALUMNOS DE TERCER GRADO DE PRIMARIA

DEVELOPING THE NOTION OF UNKNOWN QUANTITY IN THIRD-GRADE ELEMENTARY STUDENTS

Carlos Alberto González Salazar, Julio Cesar Contreras Reyes, Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México).
a2153030001@alumnos.uat.edu.mx, julio_43@live.com.mx

Resumen
En esta comunicación breve se documenta la implementación de una propuesta didáctica diseñada para el desarrollo de la noción de incógnita. Se llevó acabo con estudiantes de tercer grado de primaria, con la finalidad de permitir a los estudiantes una transición más natural entre el estudio de la aritmética y el álgebra con la intención de desarrollar el pensamiento algebraico, como fundamento teórico se utilizó la teoría de registros semióticos propuesta por Duval (2004). Se conformó en 4 momentos específicos: Observaciones frente a grupo, el diseño de una propuesta didáctica, su implementación y por último la redacción del informe correspondiente. Se optó por utilizar una investigación de tipo cualitativo de corte etnográfico.

Palabras clave: pre-álgebra; primaria; cualitativa, representaciones semióticas

Abstract
This brief communication documents the implementation of a didactic proposal designed for the development of the notion of a variable (unknown quantity). The study was carried out with third-grade students, to help them in a more natural transition between the study of arithmetic and algebra with the intention of developing algebraic thinking. The theoretical framework used the theory of semiotics records proposed by Duval (2004). It was formed in 4 specific moments: Class observations, the design of a didactic proposal, its implementation and finally the writing of the corresponding report. It was decided to use qualitative research of an ethnographic nature.

Key words: pre-algebra; elementary; qualitative, semiotic representations

Introducción

La mayoría de los estudiantes en distintos niveles académicos tienen dificultades en la comprensión del álgebra y un rechazo general por ella y por las matemáticas en general. Teniendo dificultades en la comprensión de elementos algebraicos como la variable y la incógnita, Butto y Rojano (2004) menciona que la transición de la aritmética al álgebra es muy compleja, debido a que en aritmética todos los símbolos tienen sentido y un contexto, en comparación, en álgebra se encuentran con símbolos desprovistos de significado, y sin sentido para los estudiantes.

A su vez Serres (2011, p. 318) menciona que:

> "La conceptualización del álgebra escolar está relacionada con distintos factores. El primero de ellos es su relación con la aritmética y la definición de la misma como una aritmética generalizada, lo cual presenta ciertas dificultades para comprender los cambios de significado de los símbolos de la aritmética al álgebra, como es el caso del signo igual y de las operaciones"

Esta investigación tiene la finalidad de presentar una propuesta didáctica enfocada en el eje "Sentido numérico, y pensamiento algebraico" buscando desarrollar el aprendizaje esperado "Calcula mentalmente, de manera exacta y aproximada, sumas y restas con números hasta de tres cifras" del programa de estudios impuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2017) de una manera alternativa a la forma tradicional de desarrollar este aprendizaje.

Se incluirán y resaltarán los momentos más significativos observación, diseño, implementación y rediseño. Justificando aspectos, sociales, cognitivos, epistemológicos y didácticos, que deben ser considerados antes y después de la elaboración de propuestas didácticas para la enseñanza de matemáticas.

Se expondrá la realización del diseño original, el análisis de autores consultados, tales como; Duval (2004), Serres (2011), Cabañas-Sanchez (2017) entre otros. También los resultados encontrados, se presentan las evidencias brindadas y realizadas por los estudiantes, y conclusiones del porque nos parece importante desarrollar esta noción matemática.

Fundamento teórico

Para la elaboración de esta secuencia didáctica nos basamos en la teoría de registros semióticos propuesta por Raymond Duval (2004), la cual tiene el objetivo de usar varias técnicas y estrategias desde una perspectiva relacionada con un tema, en nuestro caso, el desarrollo de la noción de incógnita.

El álgebra debido a su complejidad puede ser entendida desde distintas perspectivas tanto matemáticas como didácticas, algunos autores como Serres (2011); Socas y Palarea, (1997), mencionan que el modo más tradicional de interpretar el álgebra es como la rama de las matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, las estructuras matemáticas y las operaciones de esas estructuras, es decir ver al álgebra como "aritmética generalizada". Debido a que en el nivel primaria se trabaja de manera implícita el álgebra, nos referiremos a ella como preálgebra (Cabañas-Sánchez, Salazar; Nolasco-Hesiquio, 2017).

Cabañas-Sánchez et al., (2017) sugieren cinco grandes ideas matemáticas en las practicas del conocimiento algebraico las cuales son: "1 equivalencia, expresiones, ecuaciones y desigualdades, 2 aritmética generalizada, 3 pensamiento funcional, 4 variable, 5 razonamiento proporcional".

Los estudios Cabañas-Sánchez et al., (2017) se enfocan en la revisión de libros de texto para la educación básica, estos autores identificaron que el álgebra en dichos libros es manejada desde dos perspectivas: "implícita y

explícita". Identificando tres categorías generales de las tareas planteadas: "1.- Relación aritmética situada, 2.- Relaciones basadas en reglas, 3.- Tareas de relaciones conocidos-desconocidos".

Para este trabajo nos enfocaremos únicamente en el tercer tipo de tarea, que consiste en identificar relaciones conocidas-desconocidas las cuales son definidas como relaciones entre cantidades y números conocidos y desconocidos, y tratan a las incógnitas como objetos.

La teoría seleccionada por nosotros es la de Registros de Representación Semiótica, propuesta por Raymond Duval, dicha teoría tiene como objetivo la enseñanza de una noción matemática mediante distintos tipos de representaciones o registros.

Esto Según Duval (2004) es una manera de trabajar un tipo de registro, el cual puede ser planteado al alumno mediante el lenguaje informal (natural), así como también se le puede plantear en lenguaje matemático o formal, entre otros registros. Una de las principales ventajas de esta teoría es que las actividades no permanecen como cuadros inmóviles, permitiendo al estudiante brindarle la capacidad de entender el contenido mediante distintas representaciones, las cuales conserven el objetivo principal, pudiéndolo representar de manera distinta en un mismo registro (tratamiento) o bien utilizando un registro distinto (conversión) Duval (2004).

Esta teoría será empleada en la propuesta para mostrar distintas representaciones del álgebra, con el objetivo de ampliar su visión en el pensamiento algebraico, en esta teoría el modo en que se puede comprobar que un alumno esté desarrollando una noción matemática es cuando se es capaz de pasar de un registro a otro.

Investigaciones reportan que los estudiantes de distintos niveles académicos tienen dificultades en la comprensión del álgebra y un rechazo general por ella y las matemáticas. Teniendo dificultades en la comprensión de elementos algebraicos como la variable y la incógnita. Butto y Rojano (2004) menciona que la transición de la aritmética al álgebra es muy compleja, debido a que en aritmética todos los símbolos tienen sentido y un contexto el cual ayuda en gran medida a darles un sentido para su resolución, en comparación, en algebra se encuentran con símbolos desprovistos de significado, y sin sentido.

Para la solución de esta problemática Aké, Mojica, Ramos (2015), mencionan que el álgebra debe ser reforzada desde niveles básicos como la primaria, y se debe de desarrollar distintas nociones en el nivel básico, lo que permitiría una transición más natural al estudio formal del álgebra a esto se le denomina con el concepto de "álgebra temprana".

Nuestra propuesta gira en torno del reforzamiento de álgebra temprana en primaria, por lo que consideramos a la teoría de registros antes mencionada como un modelo teórico que nos será de ayuda. Según esta teoría los estudiantes no han aprendido matemáticas porque les han enseñado los contenidos matemáticos, en este caso el desarrollo de la noción de incógnita ya que algunas de las contextualizaciones son artificiales y carentes de sentido llegando a ser muy tradicionalistas, privándolos de relacionar los aprendizajes con sus distintas representaciones o usos.

A causa de esas escasas formas de enseñanza, los alumnos no han sido capaces de relacionar sus aprendizajes con su contexto inmediato, siendo un obstáculo de aprendizaje. Por ejemplo, encontrar una relación entre una operación simple como lo puede llegar a ser una multiplicación plasmada en el cuaderno, a poder relacionarlo con ir de compras a cualquier abarrote o establecimiento, incluso ir de compras al supermercado quitando de por medio el obstáculo de resolver operaciones por resolverlos.

El segundo modelo teórico el cual nos fue de ayuda para el diseño, rediseño y para analizar fue la teoría socioepistemológica de la matemática educativa dicha teoría contempla aspectos sociales, didácticos, cognitivos y epistemológicos, ya que como lo menciona Cantoral y Farfán (2006, p. 86):

> "La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa se ocupa entonces, específicamente, del problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Dado que este conocimiento adquiere el estatus de saber sólo hasta que se haya constituido socialmente en ámbitos no escolares".

Metodología y desarrollo de algunos ejemplos

En la investigación se empleó una metodología cualitativa y de corte etnográfico, la cual se conformó en cuatro etapas, observación, diseño, aplicación y rediseño.

Etapa 1: Observaciones

Durante la primera etapa se realizaron observaciones prolongadas con un grupo de tercer grado de primaria para identificar aspectos con el fin de observar la dinámica del grupo, la relación entre el docente-alumno, y entre alumno-alumno, sirviéndonos para posteriormente realizar modificaciones en las propuestas didácticas.

Etapa 2: Diseño

Se parte de la idea de que debido al grado escolar en el que se encuentran los alumnos, saben realizar operaciones aritméticas elementales (suma, resta, incluso la multiplicación), lo cual consideramos esencial para el desarrollo de la noción del "pre–álgebra". Se diseñó una situación de aprendizaje en donde se tomaron en consideración aspectos, cognitivos, didácticos, epistemológicos y sociales, los cuales serán detallados a continuación:

a) Cognitivo

Debido a la información encontrada en la bibliografía consultada, los alumnos suelen tener muchas dificultades en el aprendizaje de álgebra en el caso de primaria, este tema es nombrado "pre–álgebra" y los alumnos suelen tener dificultades en la identificación de patrones y variaciones, debido a que las situaciones planteadas por los profesores son carentes de sentido en donde se privilegia que los alumnos memoricen procedimientos, más que buscar desarrollar una habilidad para la resolución de estos problemas, esto debido a que los programas tradicionales se concentran más en la enseñanza de contenidos que el desarrollo de nociones. Se plantearon actividades en donde el alumno manipule el material didáctico teniendo la posibilidad de interactuar con él, rayar sobre de el para que sean ellos mismos quien vayan descubriendo y construyendo su conocimiento.

b) Epistemológico

Partimos del supuesto que las clases impartidas por el profesor eran tradicionales, con una visión platónica de las matemáticas, en donde estas son conceptos abstractos que son inmodificables y de difícil acceso para la mayoría de la población, lo que posteriormente genera un desprecio hacia las matemáticas. Es por eso que nuestra propuesta gira en torno a una matemática más constructivista, en donde sean los alumnos los que construyan su propio conocimiento. Pasando a segundo plano el formalizar conceptos y utilizar la memorización.

c) Social

La población a la cual sería aplicado el diseño de nuestra actividad sería un poco distinta a la educación convencional del turno matutino, donde creemos que la situación de los padres de familia es más regular que lo que podría ser en el turno vespertino.

Etapa 3: Implementación

Como actividad inicial realizamos un diagnóstico de los conocimientos previos, solicitando la participación de algunos alumnos para que identificaran los precios conforme a la ilustración presentada. (figura 1)

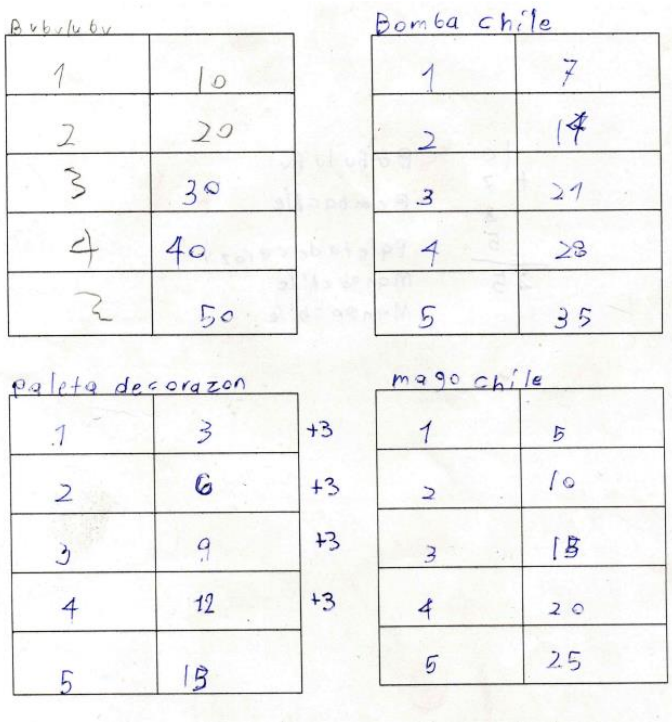


Figura 1

Se les entregó una tabla de variación previamente diseñada con cantidades faltantes; como actividad de desarrollo se les presentó una cantidad fija (25 pesos) a los estudiantes para que hicieran uso de ella a su criterio con la única condición que se utilice toda la cantidad, sin dejar cambio alguno (figura 2).

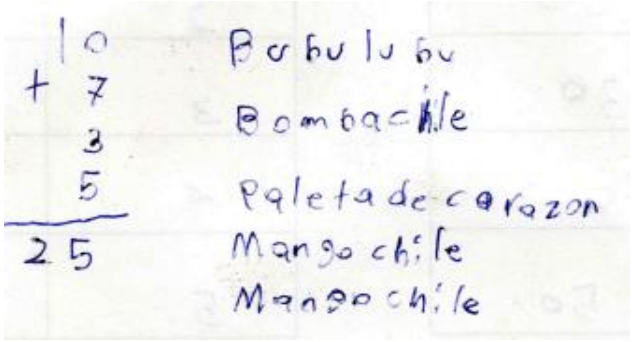


Figura 2

Posteriormente se les solicitó que llenaran las tablas de variación anteriormente brindadas, poniendo en cada espacio el número de producto y el precio del mismo. Cuando terminaron la actividad, se les hizo entrega del material

restante para que simularan la compra del producto. Se les solicitó que llevaran un registro de cómo se repartió la cantidad previamente brindada, en que compraron, para que pudiesen exponerlo frente al grupo.

Como actividad de cierre, los alumnos discutieron de manera individual distintas opciones de como se pudo haber repartido su recurso, una vez que eligieron la opción más viable se procedió a realizar la organización del grupo para la implementación de un convivo el cual los alumnos se hicieron cargo de repartir el recurso que se les otorgó (200 pesos).

Etapa 4: Aspectos para el rediseño

a) Didáctico

Nos percatamos que en las actividades planteadas en nuestra secuencia didáctica tenemos que hacer ajustes en la dificultad debido a que por los conocimientos previos que contaban los alumnos les permitieron realizar las actividades sin muchas dificultades.

Ante esta situación concluimos que es prescindible ampliar la dificultad de la actividad y ponerles limitantes, para aumentar la complejidad de la actividad, ya que existe una gran posibilidad que puedan seguir avanzando en la comprensión del concepto que se buscó desarrollar. Otra cosa que no teníamos contemplada fue que algunos de los estudiantes estaban cerrados a solo querer comprar un dulce y no seguir gastando la cantidad que se le había asignado, lo que fue una complicación para la fluidez de la actividad.

b) Cognitivo

Logramos identificar que la perdida de interés de los alumnos fue porque las actividades asignadas por los planes y programas de estudio no representaban un verdadero reto para los estudiantes, porque estipulan un método de enseñanza tradicional el cual se centra en la memorización de operaciones aritméticas.

La consideración inicial fue que los alumnos utilizaran el material para trabajar, sin embargo, es importante resaltar que es mejor si no entraban en contacto con el material que en este caso fueron dulces, esto hubiese sido de gran retroceso en la actividad ya que la hubiesen dejado, por un lado.

c) Epistemológico

En nuestro rediseño quisimos adaptar una visión constructivista para los estudiantes, debido a que las clases que proponen los planes y programas de estudio se centran en una visión más platónica de las matemáticas, estaban poco adaptadas a la realidad.

Durante la realización de las actividades, pudimos percatarnos que sólo se utilizaba ejemplos que eran posibles de resolver, y no se optaba por mostrar ejemplos donde los alumnos batallaran por si mismos en encontrar una solución.

Quisimos que los estudiantes contrastasen sus ideas con el objetivo en el cual, estuvieran en una situación donde tuviesen que invertir toda la cantidad brindada. Desarrollando así el concepto de incógnita y trabajándolo no solo como una etiqueta, sino también como un valor.

d) Social

Durante las observaciones identificamos que las relaciones en el grupo eran un tanto agresivas entre alumnos, utilizaban juegos o conversaciones. Debido a esto se optó por integrarlos en equipos de cuatro. Siempre

considerando las relaciones de respeto que había en grupo eso fue esencial y la clave para formar los equipos y pudiesen trabajar sin obstáculo en este aspecto.

Debido a que la socialización e interacción entre los estudiantes contribuye a una construcción más sólida de sus conocimientos matemáticos.

Resultados

Los alumnos tienen habilidad para el cálculo mental, aunque solamente utilizan el método de memorización para la realización de sus actividades, por lo cual al momento de llevarlos a situaciones en las que tienen que hacer operaciones mentales, se les dificultó un poco, pero al final y con apoyo en sus compañeros y sus cálculos mediante el método de contar palitos pudieron repartir satisfactoriamente toda la cantidad asignada.

Se identificaron dos estrategias para el llenado de las tablas, una era encontrando la relación entre el precio unitario de un dulce y la cantidad de dulces, por lo que unos alumnos fueron sumando los precios uno por uno, mientras que otros identificaron más rápidamente la relación de variabilidad y multiplicaron la cantidad unitaria por el número de productos.

Al momento de la actividad de desarrollo, algunos estudiantes tuvieron dificultades con el hecho de que tenían que gastar todo el dinero, posiblemente no estaban acostumbrados a gastar tanto dinero, lo que les resultaba extraño, llegando a cerrarse en adquirir determinados productos, lo que sin duda fue uno de los principales obstáculos. También presentaron dificultades en la organización del trabajo, y delego de actividades, debido a que los estudiantes no estaban acostumbrados al trabajo colaborativo

Algo muy interesante fue que uno de los alumnos optó por abreviar los nombres de los productos, utilizando las iniciales de los dulces, lo que evidenció la utilización de incógnitas como un valor y una etiqueta, surgiendo de una manera natural y adoptándose de las exigencias requeridas.

Al momento de subirles la cantidad de efectivo, los estudiantes presentaron las mismas dificultades expresadas anteriormente. Algunos alumnos trabajaron individualmente, mostrando mejor desempeño que los que trabajaron colaborativamente, lo que nos dejó diversas dudas en cuanto a la organización del grupo. Identificando las capacidades de los estudiantes, pero reconociendo la importancia del trabajo en equipo como una medida preventiva de la disciplina que a la vez sirve para que los alumnos pueden socializar, y arreglar sus problemáticas mediante el dialogo.

Conclusiones

Al final de la implementación de las actividades, obtuvimos buenas impresiones, sin que fuera una prioridad y debido a su necesidad, fueron los mismos estudiantes los que propusieran la utilización de las incógnitas no solo como un valor, como originalmente se tenía planeado, sino también como una etiqueta, ocasionando que, los estudiantes sin saberlo realizaran operaciones algebraicas de primer grado. Consideramos que el instrumento aplicado, tuvo algunas carencias en cuanto a la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes, y que la dificultad resultó relativamente sencilla para los estudiantes, lo que nos llevó a considerar, el agregar y mejorar elementos en el rediseño de la misma. Con la intención de que los alumnos desarrollen y refuercen la noción de incógnita, esto también permitiría una transición más natural entre el lenguaje y pensamiento aritmético al algebraico.

La importancia en el reforzamiento del pensamiento algebraico radica en la importancia de la resolución de problemas y la creación de modelos para la aplicación en distintos contextos de la vida, como podría serlo un problema científico o uno cotidiano (Serres, 2011).

Referencias bibliográficas

Aké, L.; Mojica, M.; Ramos, B. (2015). Introducción del pensamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la educación básica en México. En P. Scott y A. Ruíz (Ed.), *Comunicación. Educación Matemática en las Américas. Volumen 1: Formación Inicial para Primaria, Edition: 14* (pp.143-150). Tuxtla: CIAEM.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16* (1). 113-148.

Cabañas-Sánchez, G; Salazar, V; y Nolasco, V. (2017). Tareas que potencian el desarrollo del pensamiento algebraico temprano en los libros de texto de matemáticas de primaria. En L. Aké (Ed.), *Pensamiento algebraico en México desde diferentes enfoques. (pp. 13-33)*. San Luis Potosí: Colección procesos educativos.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática educativa, Número especial*, 83-102.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Scholz, O. y Montiel, G. (2017). Problematización de la trigonometría en la génesis histórica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, 1018-1026.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica Primaria.* Sexto Grado, México.

SEP (2011). Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Tercer grado.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. Sapiens. *Revista Universitaria de Investigación, 12* (1), 122-142.

Socas, M. y Palarea, M. (1997). Las fuentes del significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas.*

DIFICULTADES OCASIONADAS POR LA UTILIZACIÓN DE PROTOTIPOS GEOMÉTRICOS EN EL APRENDIZAJE DE EJES DE SIMETRÍA

DIFFICULTIES ON THE USE OF GEOMETRIC PROTOTYPES IN LEARNING SYMMETRY AXES

Julio Cesar Contreras Reyes, Carlos Alberto González Salazar, Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México).
julio_43@live.com.mx, a2153030001@alumnos.uat.edu.mx

Resumen
Este trabajo presenta un estudio de caso que documenta la implementación de una situación de aprendizaje diseñada para el desarrollo de la comprensión de los ejes de simetría en triángulos. Se llevó a cabo con estudiantes de tercer grado de Primaria. Estuvo conformada por cuatro momentos: observaciones frente a grupo, diseño de la situación de aprendizaje, implementación y redacción del informe correspondiente. Como fundamento se utilizó la teoría socioepistemológica de la matemática educativa propuesta por Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014), que contempla dimensiones sociales, cognitivas, epistemológicas y didácticas. Se muestra la utilización de distintas representaciones gráficas que contribuyó a mejorar la consolidación de conocimientos y a un desarrollo en la visualización espacial de los alumnos.

Palabras clave: ejes de simetría, geometría, socioepistemología

Abstract
This paper presents a case study that provides evidence of the implementation of a learning situation designed for the development of understanding the axes of symmetry, specifically in triangles. The research was carried out with primary school third- grade students. It consisted of four stages: observations in front of the group, design of the learning situation, implementation, and writing of the corresponding report. It was based on the socio-epistemological theory of mathematics education proposed by Cantoral, Reyes-Gasperini and Montiel (2014), which includes social, cognitive, epistemological and didactic dimensions. It shows the use of different graphic representations which contributed to enhance the consolidation of knowledge and the development of the students' spatial visualization.

Key words: symmetry axes, geometry, socio-epistemology

Introducción

Existe una gran cantidad de factores internos y externos al aula de clase, que influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En las últimas décadas, la matemática educativa ha tenido un creciente interés por considerar cuestiones de tipo contextual, afectivo, social, político, moral y de equidad, para el entendimiento de la realidad educativa.

La matemática educativa cuenta con sus propios objetivos de estudio, es por esto que es considerada por muchos no solo una práctica, sino una disciplina científica o campo de investigación (Artigue, 2013; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Al respecto, Artigue (2013, p. 47) mencionó que "no se puede negar que en las dos últimas décadas hemos visto importantes cambios, y en particular la influencia creciente de los enfoques socioculturales".

La matemática escolar tiene como uno de sus principales objetivos el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico. Uribe, Cárdenas y Becerra (2014, p.145), menciona que el desarrollo del pensamiento espacial tiene la finalidad de desarrollar "la facultad de reconocer y discriminar estímulos visuales e interpretarlos asociándolos con experiencias anteriores". Otros autores como Reséndiz, Correa, Salazar y Sánchez (2016, p. 30) definen a la visualización como "el estudio de las posibles formas en las que el pensamiento visual puede provocar atracciones y generalizaciones en el proceso de transformación en pensamiento abstracto".

Entre los estudiantes, el pensamiento matemático se va desarrollando a medida que estén en condiciones para tomar el control de sus actividades matemáticas, orquestadas por el profesor. Cordero (2006) menciona que los alumnos desarrollarán progresivamente este modo de pensar, a través de múltiples condiciones estructurales; debe, por así decir, esto debe ser el resultado de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos encontrados a lo largo de sus actividades. Cantoral y Montiel (2001) afirman que al utilizar una estrategia de graficación, ya sea para construir, interpretar o transformar una representación gráfica, se está abriendo, al mismo tiempo, una manera particular de pensamiento matemático en el estudiante.

Diversos autores han abordado a la visualización en sus trabajos de investigación. Tal es el caso de Cantoral et al. (2000), quienes afirman que la visualización se puede entender como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este aspecto, se habla de un proceso mental muy utilizado en distintas áreas del conocimiento matemático y, en general, del científico.

El vocablo visualización se utiliza, por lo general, en referencia a figuras o representaciones gráficas externas o internas; es decir, sobre un soporte material – papel, pantalla, etc. – o en la mente (Duval, 1999). Por otro lado, Arcavi y Hadas (2000) afirman que la visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar sobre información visual.

La capacidad de formar imágenes mentales, de abstraer y manipular conceptos matemáticos, se encuentra fuertemente relacionado al pensamiento visual. Para ello, se requiere desarrollar la habilidad de interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente y expresarla sobre un soporte material.

Tomando en cuenta que el campo de estudio con el que se trabajaría es el matemático, se optó por utilizar el término visualización matemática. Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2000), hacen referencia al término pensamiento matemático para representar el cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a la matemática. El pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis.

Investigaciones como las reportadas por Fripp y Varela (2012), Reséndiz et al. (2016), Scaglia y Moriena (2005) y Rey (2004), documentan que, usualmente, la enseñanza de la geometría se hace con limitadas representaciones de

objetos matemáticos, lo que trae como consecuencia que los alumnos le asignen propiedades erróneas a las representaciones geométricas. Al respecto, Reséndiz et al. (2016, p.40) mencionan que por la "falta de experiencias variadas (y en contextos diferentes) de los alumnos con objetos geométricos, la construcción de significados que se hacen sobre el objeto queda limitada".

Estas escasas representaciones geométricas son denominadas prototipos o estereotipos geométricos. Scaglia y Moriena (2005) definen a los prototipos geométricos como modelos que se utilizan como puntos de referencia cognitivos y se construyen, entre otras razones, por la constante utilización de representaciones gráficas estereotipadas a lo largo de la enseñanza en los conceptos geométricos.

Barrantes y Zapata (2008) mencionan que existen diversos obstáculos y errores dentro de la geometría escolar, clasificando estas dificultades como: simbología visual del concepto, distractores de orientación, distractores de estructuración e imágenes reales de conceptos.

Estos errores son replicados constantemente por los libros de texto y los profesores, lo que ocasiona enormes dificultades para el aprendizaje de temas geométricos de mayor complejidad. Incluso cuando los estudiantes se encuentran con representaciones de figuras geométricas no estereotipadas tienden a formar un rechazo: "Si el dibujo posee características visuales distintas a las del modelo, algunos alumnos no reconocen o rechazan esa representación gráfica, sin analizar si responde o no a la definición del concepto" (Scaglia y Moriena, 2005, p. 106).

Godino y Ruiz (2002) hacen mención de algunas dificultades didácticas como lo son la utilización de palabras para hacer referencia a los objetos matemáticos abstractos y a la realidad concreta, dentro de los libros de texto se siguen presentando estas dificultades.

Como se pudo documentar en la revisión bibliográfica, existen varias problemáticas y deficiencias en la manera tradicional de enseñar geometría, como la utilización de prototipos geométricos estereotipados lo cual produce una escasa concepción y limitada de representaciones geométricas en el pensamiento matemático de los estudiantes. Este fue uno de los motivos por el cual se buscó atender estas dificultades por medio de nuestra sencilla situación de aprendizaje.

El principal objetivo de esta investigación fue atender algunas de las problemáticas que existen en la geometría escolar durante los primeros años de educación primaria. En específico, se trabajó con el obstáculo que representa la utilización de prototipos geométricos en el aprendizaje de ejes de simetría para el tercer grado de Primaria. Esto contribuyó a que los estudiantes pudieran desarrollar su visualización espacial, y su pensamiento matemático en general.

Fundamentos teóricos

Tomando en cuenta la naturaleza de la investigación, optamos por utilizar la teoría socioepistemológica de la matemática educativa como nuestro principal referente teórico, este enfoque nos brinda categorías, métodos y herramientas que permiten el estudio de la construcción social del conocimiento matemático Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014).

Cualquier tipo de conocimiento es considerado valido dentro de la teoría socio-epistemológica, ya sea que este tenga un origen culto, técnico o popular para la realización del estudio de los fenómenos didácticos relacionados al conocimiento matemático. Una de muchas tareas que se abordan en esta teoría consiste en estudiar dichos fenómenos, ligado a la construcción del conocimiento matemático, teniendo como principal objetivo la democratización del conocimiento, oponiéndose a las practicas tradicionalistas para la enseñanza de esta disciplina (Cantoral et al., 2014).

Simetría

La simetría es normalmente un concepto que se encuentra relacionado con estética, perfección y orden. Podemos encontrar en distintos contextos de la vida, y disciplinas la presencia de este concepto, como lo son el arte, la arquitectura, la ciencia e incluso en la naturaleza (Morones, 2002; Olkhovaia, 2005; Bohorquez, Franchi, Hernández, Salcedo y Morán, (2009).

Bohorquez et al. (2009, p. 478) retoman las aportaciones de Weyl (1989), mencionando que el concepto de simetría puede entenderse desde diferentes maneras: desde una idea relacionada con la proporción o desde una perspectiva más matemática y formal, como una "invariabilidad de una configuración de elementos bajo un grupo de transformaciones auto mórficas".

Para esta investigación, se hará uso de la definición empleada por Soto (2011) para el entendimiento de la simetría y ejes de simetría. Dentro de las representaciones geométricas, se entiende a la simetría como una propiedad presente en sólo algunas, las cuales tienen correspondencia en tamaño y forma respecto a un segmento o una línea en particular. El segmento que divide a una figura geométrica en dos partes iguales, es el eje de simetría. El uso de los prototipos geométricos mencionados anteriormente por Barrantes, Balletbo, y López (2014) afecta también al entendimiento de la simetría en el ambiente escolar, ya que los estudiantes suelen utilizar representaciones geométricas con configuraciones estereotipadas para identificar los ejes de simetría.

Por otro lado, Bohorquez et al. (2009) realizaron una investigación donde se registró la preferencia por parte de los estudiantes, para hacer uso de representaciones geométricas simétricas para dar solución a problemas geométricos. Estos autores hacen mención que, al solicitarles a los estudiantes la demostración de propiedades generales, de triángulos, optan frecuentemente por utilizar la representación geométrica tradicional del triángulo isósceles, lo que origina que se introduzcan arbitrariamente condiciones no dadas en el enunciado.

La simetría ha tenido gran relevancia en el campo de las matemáticas y las físicas, no solo en cuestiones artísticas y de arquitectura. El uso de la simetría es empleado para darle explicación a un gran número de situaciones, como el esclarecimiento de fenómenos y/o la modelación de otros (Bohorquez et al., 2009).

Morones (2002, p.173) Documenta que el círculo y la esfera, eran para los griegos objetos perfectos de dos y tres dimensiones correspondientemente. Este autor también menciona que "El círculo es simétrico respecto a cualquier línea recta que pase por su centro y la esfera lo es respecto a cualquier plano que la corte pasando por su centro". Otro de los campos en los cuales la simetría tiene un papel fundamental es en la física, ya que esta guarda una profunda relación con sus leyes de conservación y los conceptos fundamentales de esta ciencia (Morones, 2002).

Metodología

En relación a las características y perspectiva teórica, el estudio de caso es de tipo cualitativo y de corte socioepistemológico. La investigación consistió en cuatro fases: observaciones frente a grupo, diseño de la situación de aprendizaje, implementación en el aula y redacción del informe y conclusiones correspondientes.

En la primera fase de la investigación con el objetivo de conocer aspectos característicos de la clase se llevaron a cabo observaciones en un grupo de tercer grado de Primaria, con el fin de obtener información de la dinámica del grupo.

Durante la segunda fase, se realizó el diseño de la situación de aprendizaje, se tomaron en cuenta la información que se obtuvo anteriormente durante la observación, considerando las características específicas del grupo. Durante

la tercera fase se llevó la situación de aprendizaje, en el aula donde se realizaron las observaciones anteriormente, ya que se consideró para su diseño, dividiéndose en tres etapas: Inicio, desarrollo y cierre.

Diseño de la situación de aprendizaje

Se sustentó la actividad en la teoría socioepistemológica, por lo tanto, la actividad consistió en tres fases: inicio, desarrollo y cierre. A continuación, se describe brevemente la actividad para posteriormente explicar los momentos de la teoría para realizar el diseño.

Descripción de la actividad

Para la actividad de inicio se formaron equipos previamente planeados por las características del grupo, esto para la realización de las actividades de modo fluido, a continuación, se les solicitó a los alumnos que elaborarán las representaciones geométricas que conocían de un triángulo, una vez realizado esto seleccionamos varios alumnos al azar para que pasaran a realizar una de las representaciones que habían dibujado.

Posterior a esto pasamos a realizar la actividad de desarrollo. Se les entregó material didáctico con distintas configuraciones y diseños de las representaciones de los triángulos.

Se les pidió a los equipos recortar y manipular material didáctico que se les entregó, en el cual podrían identificar las distintas representaciones que hay de un triángulo. Se trabajó con las distintas representaciones que hay de un triángulo, con el material didáctico pudieron doblar, comparando así sus lados y su simetría. Se les solicitó describir las figuras a partir de sus lados y sus características (tamaño, forma, posición, número de ejes).

Y por último volvimos a entregar copias del material anteriormente mencionado y la actividad de cierre consistió en, utiliza el material impreso para plasmar distintas representaciones de triángulos (con distintas posiciones y Características). Se solicitó que en equipos identificaran y trazaran los ejes de simetría de las representaciones que aparecen en ellos.

Se empleó la teoría socioepistemológica para la creación de la situación de aprendizaje y también para el análisis de las observaciones, ya que esta teoría se considera para el estudio de la educación matemática en distintas ramas: social, cognitiva, epistemológica y didáctica (Reyes- Gasperini y Cantoral, 2014).

Dimensión social

Se planificó que los estudiantes trabajaran en grupos de máximo cuatro integrantes, ya que el trabajo en equipo es fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Los alumnos por medio de la comparación de ideas, llevan a cabo una adquisición del conocimiento de un modo más concreto.

La teoría socio-epistemológica considera a la matemática como un elemento de la cultura, producto de la actividad humana. Desde esta perspectiva teórica, “la significación que construirá a partir de la actividad de relacionarse al saber matemático como aquél que es producto de la cultura, le permitirá entender aquellas nociones que las miradas platónicas consideran como la matemática escolar” (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, p. 367).

Dimensión cognitiva

Los estudiantes suelen hacer uso de representaciones geométricas estereotipadas, solamente pueden identificarlos cuando estas se encuentran únicamente en algunas posiciones y diseños con elementos muy generales. Cuando pasan al reconocimiento de dichas representaciones geométricas, con características no estereotipadas, suele causar

conflictos, debido a que solo tomaban en cuenta una representación usual, afectando el entendimiento general de las representaciones, ya que se considera a esta como la única (Scaglia y Moriena, 2005).

Tomando en cuenta esta problemática, se planificaron trabajos en los que el estudiante pudiese manipular el material didáctico, con la intención de que interactúe, mida, recorte, doble e incluso pudiese rayar sobre él, brindándole al estudiante la oportunidad de construir su propio conocimiento. Del mismo modo se les solicitó a los estudiantes que realizaran configuraciones diferentes, y que participaran entre ellos debatiendo si la representación mostrada por sus compañeros cumplía con su definición propia de ésta.

Dimensión epistemológica

La filosofía tiene como una de sus ramas a la epistemología, en esta se tiene como principal objetivo, entender los problemas que rodean al conocimiento científico. Etimológicamente viene del griego episteme, que significa "conocimiento verdadero", esta definición tradicionalmente es empleada para referirse al conocimiento científico. Es descrita como una ciencia encargada de discutir acerca del conocimiento mismo (Martínez y Ríos, 2006).

En esta dimensión se estableció el tipo de conocimiento que queríamos abordar, siendo en este caso un enfoque constructivista debido a que la teoría socio-epistemológica acepta como conocimiento una enorme variedad de familiaridades relativas, tomando como valido el saber popular, culto, y técnico, esto a que, en conjunto, conforman la experiencia y sabiduría humana (Cantoral et al., 2014).

Dimensión didáctica

Durante el diseño de la situación de aprendizaje se optó por que los alumnos manipularan distintas representaciones geométricas no estereotipadas, (triángulos en distintas posiciones, ángulos, medidas y formas) con la intención que las pudiesen manipular y recortar, de tal modo que tracen los ejes simétricos, de un modo más dinámico a lo tradicional.

Ballester (2009) hace mención sobre la utilización de recursos manipulativos para la enseñanza de geometría suele resultar en un aprendizaje más dinámico y motivante para los alumnos. Rojas, Cruz, Escalona, Estrada, y Sánchez (2012) documentan que con la impartición de la geometría del espacio se propicia con el desarrollo de la visualización bidireccional. La construcción de representaciones mentales y procesos que una persona relaciona con objetos o sucesos percibidos por él como externos y, por otra parte, la construcción de objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos y procesos en su mente.

Análisis de datos

En la actividad inicial de dicha situación se hizo un diagnóstico acerca de los conocimientos previos que tenían los alumnos del tema. Se les pidió a algunos de los alumnos que participaran, pasando al pizarrón y dibujando una representación de lo que concebían como un triángulo.

Las representaciones dibujadas tendrían una sola condición, la cual era que no se repitieran o fuesen iguales a las que ya estaban dibujadas en el pizarrón. Cuando los estudiantes terminaron de participar plasmando sus representaciones, se les pidió que debatieran si las figuras dibujadas por ellos realmente eran triángulos.

Uno de los estudiantes dibujó un triángulo escaleno, pronunciando exageradamente uno de sus ángulos. Cuando se les preguntó a sus demás compañeros si la figura que había plasmado su compañero era un triángulo, la mayoría de los alumnos argumentaba que no, ya que para ellos "estaba chueco". Posterior a esto se discutió si un triángulo isósceles trazado por una alumna, el cual contaba con uno de sus vértices como base.

Al cuestionar a los estudiantes si la figura elaborada por su compañera era un triángulo o no, se obtuvieron respuestas similares a las de la primera participación. La mayoría de ellos argumentaba que la figura era similar a un triángulo, pero lo descartaban, debido a que la figura se encontraba "al revés". Esto evidencia que, en cursos pasados, sus profesores o libros de texto sólo utilizaban escasas representaciones de figuras geométricas, lo que los privaba de ampliar su concepto y percepción. Ello les daba una visión muy limitada, corriendo el riesgo de ser un obstáculo para el estudio de temas de mayor complejidad (Rey, 2004).

Se cuestionó a los estudiantes si la figura hecha por su compañera era un triángulo o no, obteniendo respuestas similares, debido a que la mayoría de ellos mencionaban que no era un triángulo debido a que "estaba al revés". Lo cual demuestra que, en su escolaridad, los profesores o libros de texto, utilizaban insuficientes representaciones de figuras geométricas lo cual acorta su concepto y percepción del mismo. Lo que limitaba su visión, aumentando la posibilidad de ser un obstáculo para el entendimiento de temas más complejos (Rey, 2004).

Durante la actividad de desarrollo, se organizó a los estudiantes en equipos de cuatro integrantes. Se hizo entrega de tres hojas, conteniendo un particular tipo de triangulo -escaleno, isósceles o equilátero- (Figuras 1, 2, 3). Dichos triángulos contaban con diversas configuraciones con respecto al tamaño, posición y medidas de sus ángulos (triángulos isósceles y escaleno). Se les solicitó que recortaran los triángulos, para que tuvieran la posibilidad de interactuar con ellos. El principal objetivo de la actividad fue que encontraran
los ejes de simetría de cada representación, si esta lo tenía.

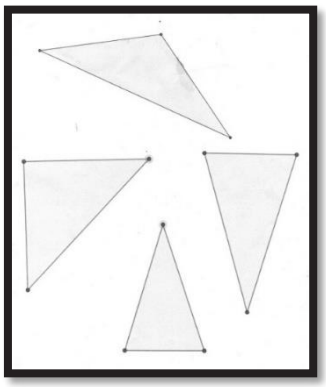


Figura 1

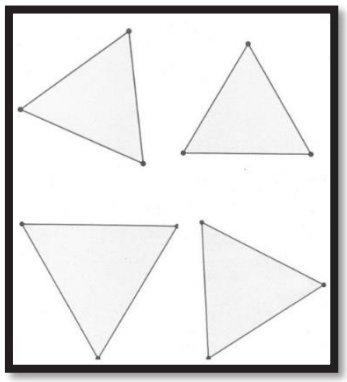


Figura 2

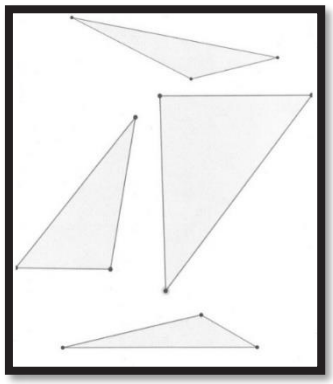


Figura 3

Por lo que se les solicitó que realizaran un doblez por la mitad a dichas figuras, de modo que pudiesen identificar, si al terminar de marcar el doblez, los triángulos resultantes eran iguales o no. En el caso que fuese igual, se les pidió que marcaran la línea que divide la figura en ambas partes.

Se logró identificar que el trabajo en colaboración fue algo que se les dificulto al principio de la actividad a la mayoría de los alumnos. Con el transcurrir de la actividad, empezaron a establecer una mejor relación, surgiendo como necesidad el compartir e intercambiar, ideas, opiniones e incluso estrategias entre ellos, lo que en su momento llevó a una construcción colectiva del aprendizaje. De este modo, los alumnos lograron percatarse que la técnica, utilizada para remarcar los ejes simétricos de los triángulos equiláteros no daba el mismo resultado que con los triángulos isósceles, y a su vez no obteniendo resultados con los triángulos escalenos.

Con esto, pudieron identificar que existen triángulos que tienen tres ejes de simetría (equiláteros), otros con solo un eje simétrico (isósceles) y algunos otros que no cuentan con ningún eje simétrico (escalenos), lo cual es enriquecedor para ampliar su visión acerca del concepto de simetría.

Las siguientes figuras son algunas de las representaciones con las que los estudiantes trabajaron, manipulándolas, recortándolas, doblándolas y señalando su eje de simetría en caso de que existiera (figura 4).

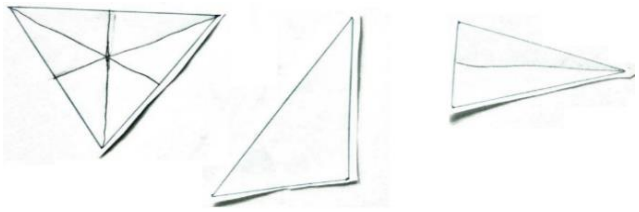


Figura 4

Durante la segunda parte, se les entregó hojas de trabajo similares con las que ya habían trabajado anteriormente. Para esta actividad solamente tuvieron que dibujar los ejes simétricos, sin poder realizar recortes ni dobleces en el material. Fue sencillo para algunos de los estudiantes, dibujar los ejes simétricos de cada triángulo, ya que antes de marcarlos llegaron a un consenso recapitulando todos los conocimientos adquiridos durante la actividad.

En las figuras 5, 6 y 7 se puede identificar las hojas de trabajo de un equipo al azar, en las que se realizó la actividad. Se puede percatar que el equipo dejó triángulos escalenos sin dibujo, lo que funciona como evidencia de que los estudiantes lograron identificar que no se cuenta con ejes simétricos por las peculiaridades de dichas figuras (Figura 5). Para los triángulos isósceles, los alumnos encontraron los lados que eran similares, esto les ayudo para dibujar el eje simétrico (Figura 7).

Figura 5

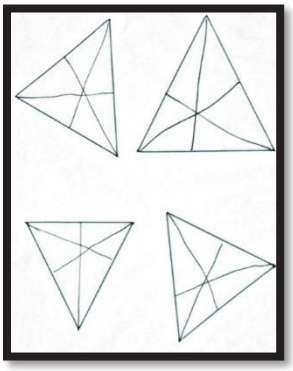


Figura 6

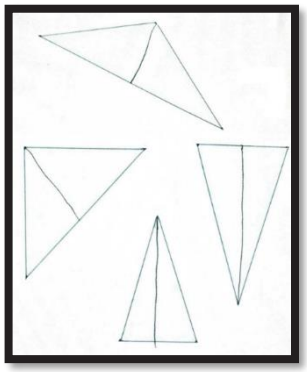


Figura 7

Los alumnos presentaron algunas dificultades en la hoja que tenía la representación gráfica de triángulos equiláteros, puesto que batallaron para identificar el punto medio de sus lados para unirlo con su vértice opuesto, dibujando así el eje simétrico. Aunque se precipitaron con este detalle, los alumnos lograron encontrar que esta clase de triángulo tiene tres ejes simétricos.

En la actividad de cierre se le pidió a cada grupo, que escogieran uno de sus integrantes para narrar, al resto del salón, cuales habían sido sus estrategias para desarrollar las actividades, del mismo modo cual había sido la conclusión grupal que se construyó.

Esta actividad tuvo como objetivo que los estudiantes retomaran y argumentaran los conocimientos que habían obtenido durante la clase.

> Alumna (AA): Este es el triángulo que no se puede doblar a la mitad.
> Maestro (M): ¿Por qué no se puede?

AA: Porque éste es más largo, éste es más corto y éste mucho más chico.
(Refiriéndose a los lados del triángulo)
M: Entonces, ¿cómo son sus lados?
AA: Éste mide 10, éste mide 7, éste mide 14. Si se dobla, no quedan igual los pedazos.

En la transcripción anterior, se puede identificar la participación de una alumna acerca de las conclusiones que construyó su equipo. La figura que describió era un triángulo escaleno, el cual se utilizó a lo largo de la actividad. Comentó que eran distintos los tres lados de ese triángulo: "éste es más largo, éste es más corto y éste mucho más chico", no identificando ningún eje de simetría: "si se dobla no quedan igual los pedazos".

En la geométrica del espacio, para poder lograr una interacción satisfactoria de sujeto-objeto, fue obtenida por medio que los estudiantes visualicen constantemente, e interactúen con el objeto. Aportando a que se pueda estimular, desarrollar, y activar los procesos lógicos del pensamiento, obteniendo un conocimiento geométrico espacial nuevo, llevando a los alumnos a tener la posibilidad de plantear, argumentar, profundizar, reflexionar y valorar conjeturas. (Rojas et al., 2012).

AA: Este triángulo primero se dobla a la mitad, después lo volteamos y también lo podemos doblar a la mitad, y, por último, si se vuelve a girar, también se dobla a la mitad. Se puede doblar tres veces, de diferentes maneras, y en las tres quedan las mitades iguales.
M: ¿Cómo son sus lados entre sí?
AA: Los tres son iguales.

En la anterior transcripción se puede observar que la estudiante identificó, solamente unas de las características del triángulo equilátero, comentando acerca de sus lados, que "los tres son iguales". Mencionó también que el triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría: "se puede doblar tres veces, de diferentes maneras, y en las tres quedan las mitades iguales."

Las representaciones gráficas permiten al alumno comprender los conceptos de manera más motivante que si no se usan, o si sólo se aplican formas verbales o descriptivas. Por lo tanto, comprobamos que la representación por medios visuales es una importante manera de comunicar la geometría (Ballester, 2009). Para el caso de los triángulos escalenos tomamos como referencia la participación de un alumno de otro equipo.

Para comprender conceptos de una manera más motivante, el docente debe utilizar representaciones gráficas, ya que, si no se utilizan o solo se usan de forma verbal o descriptiva, no se tendrá un aprendizaje óptimo y concreto. Es por esto que se comprueba que la representación por el medio visual es un modo significativo de transmitir la geometría (Ballester, 2009). En el caso de los triángulos escalenos, se utilizó la aportación de un estudiante de otro equipo:

Alumno (AO): Este triángulo lo doblo, y después lo abro, sólo se puede doblar una vez.
M: ¿Entonces cómo son sus lados entre sí?
AO: (los mide) Éste mide 9, éste mide 9 y éste mide 13. Tiene dos lados iguales y uno más grande.
M: ¿Entonces, cuántos ejes de simetría tiene?
AO: Tiene una… y dos, tiene dos ejes.

El estudiante mencionó que el triángulo isósceles, contaba con dos de sus lados iguales y uno distinto. Lo que nos gustaría destacar fue su argumentó, en el que menciona que solo se podía doblar una vez el triángulo, pero al momento de cuestionarle acerca de los ejes de simetría resultantes, dijo que la representación, contaba con dos, puesto que lo confundió el eje simétrico resultante, con los triángulos que se produjeron al doblar la figura.

Al aprender geometría es de gran importancia el proceso cognitivo que se emplea en la visualización. Se requiere de una representación gráfica (dibujo), para la creación de la representación mental (figura); considerando los elementos representativos de las figuras y/o cuerpos geométricos, es la forma en la que los alumnos desarrollan su razonamiento en la resolución de problemas geométricos (Reséndiz et al., 2016).

Conclusiones

A lo largo de la investigación se analizó diversas complicaciones en la enseñanza tradicional de la geometría, como lo es el uso de prototipos geométricos y las dificultades que representó para el desarrollo del pensamiento matemático y geométrico. Consideramos que se lograron los objetivos planeados, ya que los alumnos fueron capaces de ampliar su concepto acerca de las representaciones geométricas, construyéndolo de manera colectiva.

Es importante destacar que la aplicación de distintas representaciones gráficas durante la enseñanza de la geometría, también de material didáctico concreto. Esto contribuye a mejorar la consolidación de conocimientos y a un desarrollo mayor en la visualización espacial de los alumnos.

Uno de los principales aciertos de la actividad fue la colaboración que hubo en el grupo. Tomamos en cuenta que uno de los factores que determinan una efectiva práctica educativa es conocer a fondo el contexto inmediato de los alumnos, la forma en que se relacionan, sus dudas, opiniones e intereses, de tal modo que el diseño fuese lo más adaptado posible, considerando intereses específicos del grupo.

Para el alumno es importante familiarizarse con la descripción verbal de algunas representaciones graficas de los objetos geométricos, lo que permitirá la interpretación de iconos como el reconocimiento del objeto por medio de ellos.

Para comprender la manifestación del objeto geométrico a entender, es necesario brindarle diversos ejemplos. La enseñanza de la geometría tradicionalmente se hace por medio de representaciones únicas de los objetos geométricos, lo que ocasiona que los estudiantes determinen pseudo-propiedades a dichos objetos, como lo es la posición y la dimensión. (Fripp y Varela, 2012). Esto quiere decir que, a falta de prácticas variadas, y en contextos múltiples, con las representaciones geométricas, originan que los alumnos deduzcan representaciones limitadas.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer Meditated Learning: An Example of an Approach, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(2),* pp. 63-85.

Artigue, M. (). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*. 43-59. Brasil: CIAEM.

Ballester, S. (2009) Didáctica de la geometría, *Revista Digital Innovación y Experiencias, vol. 20.* 1-8.

Barrantes, M.; Balletbo, I. y López, M. (2014). La componente visual en geometría en los libros de texto de secundaria, *Revista Premisa, 16* (62), 24-35.

Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza aprendizaje de las figuras geométricas, *Campo Abierto, 27 (1),* 55-71.

Bohorquez, H., Franchi, L., Hernández, A., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría, *Educere, 13 (45),* 477-489.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, México: Trillas.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*, México: Prentice Hall.

Cantoral, R.; Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad, *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7 (3),* 91-116.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del dME, En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 824-830. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega Restrepo, Trad.) (Título original: Semiosis et Penseé Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels), Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Fripp, A. y Varela, C. (2012). Pensar geométricamente, *4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática. (4)* (pp. 11-16). Montevideo: CUREM.

Godino, J. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y didáctica para maestros. Manual para el estudiante*. Recuperado el 10 de diciembre de 2019 de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Martínez, A., & Ríos, F. (2006). Los Conceptos de Conocimiento, Epistemología y Paradigma, como Base Diferencial en la Orientación Metodológica del Trabajo de Grado. *Cinta de Moebio, (25),* 1-13.

Morones, R. (2002). La simetría izquierda-derecha en la naturaleza*, Ciencia UANL, vol. 5* 173-179.

Olkhovaia, E. (2005). La unidad del mundo y la simetría, Franciscanum. *Revista de las Ciencias del Espíritu, 140, (1)*75-84.

Reséndiz, E.; Correa, S.; Salazar, M. y Sánchez, G. (2016). *Diseño de objetivos de aprendizaje de matemáticas básicas (Geometría)*, México: Pearon Educación.

Rey, J. (2004). Dificultades generadas por los prototipos geométricos, cuando los modelos ayudan, pero no tanto", En Premisa, 6 (22), 7-32.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático, *Boletim de Educação Matemática, 28 (48),* pp. 360-382.

Rojas, O., Cruz, M., Escalona, M., Estrada, M., y Sánchez, J., (2012). El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 44-54. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría, *Educación Matemática, 17 (3),* 105-120.

Soto, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. Consultado el 20 de noviembre de 2018 de: http://www.aprendematematicas.org.mx/.

Uribe, S., Cárdenas, O. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños, *Educación Matemática, 26(2),* pp. 135-160.

UN CAMBIO PARADIGMÁTICO EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR TÉCNICA PROFESIONAL DE CHILE MEDINTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: CASO INACAP

A PARADIGMATIC CHANGE IN THE MATHEMATICS TEACHING-LEARNING PROCESS THROUGH PROBLEM-SOLVING IN CHILEAN TECHNICAL/PROFESSIONAL HIGHER EDUCATION: THE INACAP CASE

Sebastián Herrera de la Piedra, Lorena Rosas Toro
Universidad Tecnológica de Chile, INACAP (Chile).
herreradelapiedra@gmail.com, lorena.rosas03@inacapmail.cl

Resumen
El presente reporte tiene como objetivo exhibir cómo una institución de Educación Técnica y Profesional de Chile está realizando un cambio progresivo en el área metodológica en las matemáticas iniciales, focalizando el aprendizaje en habilidades de Resolución de Problemas y Modelación. Dicha transición, considera la reestructuración de los descriptores de las asignaturas, la implementación de la Resolución de Problemas y Modelación en el aula y, la capacitación académica y la alineación en la concepción de qué es un problema. Se presentarán las percepciones de los académicos previo a la capacitación, algunas evidencias gráficas después de ésta e indicadores de los resultados obtenidos en las matemáticas iniciales bajo el nuevo modelo.

Palabras clave: resolución de problemas, programa de estudio (descriptor), capacitación y problema

Abstract
This report is aimed at showing how a Chilean institution of Technical and Professional Education is undertaking a progressive shift in methodology in Initial Mathematics, focusing learning on problem solving and modeling skills. Such transition considers restructuring subject descriptors, implementing problem solving and modeling in the classroom, as well as academic training, and agreement in the conception of what a problem is. This report will present the perceptions of the teachers prior to training, some graphic evidence after training, and indicators of results obtained in elementary mathematics under the new model.

Key words: problem solving, syllabus (descriptor), training and problem

Introducción

Un problema común en las aulas de Educación Superior y en particular la Educación Superior Técnica Profesional (ESTP), consiste en limitar la Enseñanza a la transmisión de conocimientos, es decir entregar el protagonismo al académico en la entrega de los contenidos y al Estudiante el rol de receptor de este y la responsabilidad de preparar las evaluaciones según lo entregado por el Docente. En este sentido, la Universidad Tecnológica de Chile INACAP, declara en uno de sus pilares institucionales el enfoque pedagógico del *Aprender Haciendo*, una metodología que promueve el aprendizaje experiencial y experimental, con Estrategias Pedagógicas Activas, como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), Aprendizaje Basado en Proyectos (ABPro), Método de Casos, entre otros. Entonces, es así como surge nuestra interrogante de investigación: ¿Cómo se ha gestado este cambio paradigmático en dicha Institución de Educación Superior?

La Universidad Tecnológica de Chile INACAP

INACAP, es la institución de Educación Superior Chilena con mayor cobertura en matrículas, más de 120 mil estudiantes que se distribuyen en el Centro de Formación Técnica, el Instituto Profesional y la Universidad Tecnológica de Chile INACAP y que cuenta con la mayor cantidad de Sedes, un total de 26, en las 16 regiones del país.

El Área de Ciencias Básicas de la Universidad Tecnológica de Chile INACAP ha centrado sus esfuerzos en el fortalecimiento de la Educación Matemática desde los primeros niveles, poniendo énfasis en las Metodologías de Enseñanza-Aprendizaje y en el aseguramiento de la calidad de las Asignaturas de matemática inicial. Entre las iniciativas llevadas a cabo podemos destacar: la propuesta metodológica ACERPA (Aprendizaje Centrado en la Resolución de Problemas en el Aula), el Proyecto de capacitación docente ARPA (Activación de Resolución de Problemas en el Aula) y el Congreso Universitario de Educación Matemática Técnica Profesional CEMTYP (versiones 2017 y 2018), entre las más relevantes.

Las iniciativas anteriores dan cuenta de las acciones que hasta hoy han sido implementadas para su consecución; las dos primeras, desafían a los Académicos de la Institución a realizar un cambio en el Modelo Didáctico aplicado en su cátedra, (lo que no es menor), transitando así, de un Modelo Didáctico Tradicional (de Transmisión) a un Modelo Didáctico Espontaneísta (Bravo & Varguillas, 2015) y la tercera invita a compartir en Conferencias Magistrales, Reportes de Investigación, Experiencias y Talleres relacionadas en la Educación Matemática Técnica Profesional, en ésta instancia los académicos comparten las experiencias y resultados obtenidos en la transición que tienen las matemáticas iniciales de INACAP.

Para que esta transición se produzca de manera efectiva, la institución ha realizado cambios estructurales en sus programas de asignatura, jornadas e inducciones de Resolución de problema a académicos y directivos, asesorías y capacitación en otras instituciones, seguimiento a las prácticas de los académicos del área para evaluar, ajustar y retroalimentar la práctica profesional dentro del aula y desarrollar la Investigación e Innovación.

El cambio en los programas de asignatura

Antes de la intervención de ACERPA, los programas focalizaban las asignaturas de matemáticas iniciales a la adquisición de contenidos por parte del estudiante, dando el protagonismo al académico en la entrega de éstos; sin embargo, luego de establecer el perfil del estudiante y buscar un nuevo marco metodológico que se ajuste al anterior, se decide centrar las matemáticas iniciales en la Resolución de Problemas, definiendo un problema como una

situación nueva para el estudiante, ante la cual no conoce estrategias inmediatas para su solución (Isoda & Olfos, 2009).

Los programas de matemáticas iniciales han incorporado estos cambios metodológicos y declaran como estrategia en el aula el Aprendizaje Centrado en la Resolución de Problemas (ACERPA), un derivado de la Activación de Resolución de Problemas en el Aula (ARPA), así el protagonismo pasa a las manos de los estudiantes, logrando con esto que construyan un objeto matemático, bajo la mediación del académico y el andamiaje entre los estudiantes.

Con el fin de que los programas de estudio se enfoquen en la Resolución de Problemas se realizan ajustes en la articulación entre la competencia genérica, que en Matemática es la Resolución de Problemas, y el contenido, que no sólo procura que el estudiante adquiera un objeto matemático, sino que pretende que los estudiantes lo construyan, por lo que en los descriptores se declara la importancia y el valor que se le debe dar a la diversidad de estrategias de Resolución obtenidas por los estudiantes en las actividades entregadas.

Tabla 1: Descriptor matemática inicial (MTAN01). (INACAP,2020)

COMPETENCIA DEL PERFIL DE EGRESO ASOCIADA	INDICADOR DE DESARROLLO
Esta asignatura contribuye de manera transversal a las competencias del Perfil de egreso y a la competencia genérica Resolución de Problemas Nivel N°1	Esta asignatura contribuye de manera transversal al logro de los indicadores de las competencias del Perfil de egreso.
COMPETENCIA GENÉRICA	**NIVEL DE DOMINIO**
Resolución de Problemas	Nivel 1 - Resuelve problemas que involucran un número limitado de variables, en operaciones propias de la especialidad, aportando a la eficiencia de los procesos.

En la Tabla 1, se puede observar la descripción de la competencia genérica y el nivel de dominio que se debe desarrollar en los estudiantes de las matemáticas iniciales, además de relacionar y explicitar la competencia genérica con la consecución del perfil de egreso declarado en cada una de las carreras que se imparten en la institución. la progresión del desarrollo de la competencia genérica de Resolución de Problemas se ha categorizado en tres niveles los que se desarrollan progresivamente durante la carrera académica del estudiante en INACAP, estos son:

Nivel 1: Resuelvan problemas que involucran un número limitado de variables, en operaciones propias de la especialidad, aportando a la eficiencia de los procesos.

Nivel 2: Resuelve problemas integrando diversas variables, en sistemas y procesos propios de la especialidad, aportando a su mejora y optimización.

Nivel 3: Resuelve problemas simultáneos y/o de carácter multidisciplinario, en el ámbito de la especialidad, aportando al conocimiento en su disciplina y quehacer profesional.
Los estudiantes que aprueban la matemática inicial no sólo han cumplido los Aprendizajes Esperados declarados, además se asegura el desarrollo de la Competencia Genérica en su Nivel 1.

Las matemáticas iniciales poseen seis unidades: I. Resolución Algebraica; II. Manipulación Algebraica; III. Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones; IV. Funciones Polinómicas. V. Funciones Exponenciales y Logarítmicas; VI. Progresiones Geométricas y Aritméticas. La estructura de cada Unidad se muestra en el Tabla 2:

Tabla 2: Descriptor matemática inicial (MTAN01): Unidad I: Resolución de Problemas. (INACAP,2020)

UNIDADES DE APRENDIZAJE		
1.- Resolución de problemas.		*HORAS DE LA UNIDAD: 14* *Horas Presenciales: 14 Horas Online: 0*
APRENDIZAJES ESPERADOS	**CRITERIOS DE EVALUACIÓN**	**CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS**
1.1.- Resuelve problemas de la disciplina y/o especialidad, que permita la construcción de conocimiento matemático basal para el aprendizaje del álgebra y las funciones. (Integrada Competencia Genérica Resolución de Problemas)	1.1.1.- Modelando múltiples situaciones, a través de la transición aritmético algebraica. 1.1.2.- Generalizando regularidades numéricas. 1.1.3.- Representando regularidades, mediante su registro algebraico, verbal o gráfico. 1.1.4.- Calculando áreas y perímetros de figuras geométricas rectangulares. 1.1.5.- Calculando los términos de una regularidad numérica a partir de arreglos rectangulares. 1.1.6.- Argumentando estrategias emergentes y resultados propuestos. 1.1.7.- Comunicando sus conclusiones. 1.1.8.- Analizando situaciones problemáticas establecidas. 1.1.9.- Considerando información, variables y criterios establecidos.	1.- Regularidades: Construcción de regularidades lineales y cuadráticas, a través de una transición numérica algebraica. Representación gráfica, algebraica y pictórica de una regularidad. 2.- Figuras rectangulares: Área y perímetro de figuras rectangulares. Construcción de regularidades cuadráticas a partir de arreglos rectangulares. Cálculo de trazos de figuras rectangulares compuestas. 3.- Argumentación en la resolución de problemas matemáticos: Datos. Justificación. Fundamentos. Conclusión. 4.- Comunicación de resultados de la resolución de problemas matemáticos: Unidireccional. Contributiva. Reflexiva. Instructiva. 5.- Introducción al uso de calculadora y/o Geogebra como herramienta para la resolución de problemas genéricos.

El Tabla 2 enseña la Unidad I, llamada Resolución de Problemas, entrega el Aprendizaje Esperado, los Criterios de Evaluación y los Contenidos Mínimos Obligatorios que se deben abordar, el primero manifiesta explícitamente que se debe integrar la competencia genérica de Resolución de Problemas, así los estudiantes al término de la unidad deben ser capaces de Resolver Problemas asociados a la disciplina y/o especialidad, utilizando estrategias que emerjan de la acción de resolver problemas, argumentando y razonando matemáticamente; además, entrega los

Criterios con los que se evidencia el nivel de logro del Aprendizaje Esperado, por lo que apuntan a que los estudiantes demuestren la habilidad de Modelar, Generalizar, Argumentar y Comunicar sus conclusiones; los Contenidos Mínimos Obligatorios son elementos trascendentales, ya que no están focalizados en la construcción de un objeto matemático en particular, sino que explicita los elementos que permiten desarrollar las Habilidades de Resolución de Problemas, Modelación, Argumentación y Comunicación, como son la organización y representación de la información, la justificación y comunicación de conclusiones.

Tabla 3: Descriptor matemática inicial, (MTAN01): Unidad IV: Funciones Polinómicas. (INACAP,2020)

4.- Funciones polinómicas.		HORAS DE LA UNIDAD: 16
		Horas Presenciales: 16 Horas Online: 0
APRENDIZAJES ESPERADOS	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS
4.1.- Resuelve problemas de la disciplina y/o especialidad, que involucren tópicos de funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2. (Integrada Competencia Genérica Resolución de Problemas)	4.1.1.-Representando funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2, mediante su registro algebraico, pictórico, literal o gráfico. 4.1.2.- Calculando imágenes y/o pre imágenes de funciones polinómicas. 4.1.3.- Identificando las características principales de las funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2. 4.1.4.- Seleccionando métodos y procedimientos establecidos. 4.1.5.- Aplicando métodos establecidos.	1.- Estrategias, argumentación y comunicación de resultados en la resolución de problemas matemáticos. 2.- Conceptos fundamentales de funciones. 3.- Funciones polinómicas: Definición de función polinómica. Representación gráfica de funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2. Intersección de funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2. Álgebra de funciones polinómicas. 4.- Introducción al uso de calculadora y/o Geogebra como herramienta para la resolución de problemas que involucren tópicos de funciones polinómicas.

La estructura de las siguientes Unidades siguen el modelo de la Unidad I, la diferencia se encuentra en que hacen referencia a un objeto Matemático; por ejemplo la unidad IV (Tabla 3), lleva por nombre Funciones Polinómicas, teniendo como Aprendizaje Esperado, Resolver problemas de la disciplina y/o especialidad, que involucren funciones polinómicas de grado 0, 1 y 2 (Integrada Competencia Genérica Resolución de Problemas), por lo que la implementación de la unidad debe realizarse con la propuesta metodológica ACERPA (Aprendizaje Centrado en la Resolución de Problemas en el Aula). Y en los contenidos se explicita la importancia de valorar e indagar en la importancia de las estrategias, argumentación y comunicación de resultados en la resolución de problemas matemáticos, además de incorporar los elementos que definen y representan a las Funciones Polinómicas. Para cada unidad se diseñó un conjunto de problemas que forman una secuencia didáctica que permiten lograr en toda su dimensión el programa de la asignatura, tanto la competencia genérica como el objeto matemático asociado a cada Unidad.

Tabla 4: Descriptor matemática inicial, (MTAN01): Sistema de Evaluación Unidad I. (INACAP,2020)

UA	*Criterios de Evaluación*	*Procedimiento de Evaluación*	*Instrumento de Evaluación*	*Evidencia*	*Observaciones*	*% Parcial*
1	1.1.1 Modelando múltiples situaciones, a través de la transición aritmético algebraica. 1.1.2 Generalizando regularidades numéricas. 1.1.3 Representando regularidades, mediante su registro algebraico, verbal o gráfico. 1.1.4 Calculando áreas y perímetros de figuras geométricas rectangulares. 1.1.5 Calculando los términos de una regularidad numérica a partir de arreglos rectangulares. 1.1.6 Argumentando estrategias emergentes y resultados propuestos. 1.1.7 Comunicando sus conclusiones. 1.1.8 Analizando situaciones problemáticas establecidas 1.1.9 Considerando información, variables y criterios establecidos.	Aprendizaje Centrado en la Resolución de Problemas en el Aula (ACERPA)	Pruebas de desarrollo	Problemas resueltos relacionados con la disciplina y/o especialidad, que permita la construcción de conocimiento matemático basal para el aprendizaje del álgebra y las funciones.	Considerar como base del instrumento de evaluación aquellos problemas sugeridos en el diseño instruccional elaborado por el Área de Ciencias Básicas de la VRA. Este instrumento debe tener una parte grupal (30%) y una parte individual (70%). El tiempo destinado para la aplicación del instrumento es de 80 minutos. El uso de calculadora es fundamental.	10%

La evaluación (Tabla 4) es otro elemento que cobra relevancia en el descriptor y articula la Competencia Genérica, Aprendizaje Esperado y Contenidos, siendo construida con el objetivo que el estudiante evidencia el cumplimiento de los Criterios de Evaluación. La Unidad I se desarrolla mediante la estrategia del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), se utiliza un instrumento de desarrollo, evaluado mediante una Rúbrica, entregando valor al resultado obtenido, a las diversas estrategias que se utilizan para resolver los problemas, al nivel de conclusiones y fundamentación que los estudiantes entregan de sus conclusiones, estrategias y resultados; la evaluación tiene dos etapas: una grupal y una individual. El resto de las unidades se realizan con el mismo Procedimiento de Evaluación, ABP, de desarrollo, en estos casos, son contestadas y analizadas individualmente, su corrección se realiza mediante una Pauta de Corrección abierta, es decir, se valorarán todas las estrategias que permitan dar solución a los problemas evaluados, aunque estas no hayan sido consideradas en la Pauta sugerida, estas deben ser correctas matemáticamente y bien fundamentadas. Cada una de las evaluaciones es confeccionada por un equipo externo al cuerpo académico que imparte la asignatura.

El logro del nuevo programa depende de la implementación que realiza el académico, es por ello que el nuevo programa viene acompañado de un paquete de problemas distribuidos en una secuencia didáctica para cada unidad,

Actividades de Trabajo Autónomo (ATA) que complementan y profundizan las actividades realizadas en el aula y la elaboración de una plataforma de trabajo con Actividades Geogebra que dinamizan el trabajo del Estudiante.

La capacitación, el inicio

Para lograr la transición metodológica, no sólo se debe realizar un cambio estructural en los programas de las asignaturas, preparar materiales, actividades y evaluaciones articuladas a los programas, además se debe proveer de herramientas metodológicas a los académicos que permitan implementar de manera efectiva dichos cambios, por este motivo se imparte el "Diplomado en Didáctica de la Matemática: innovación centrada en el proceso de modelación y Resolución de Problemas" (Pontificia Universidad Católica de Valparaíso) a los académicos del Área de Matemática, cuyo propósito entregar al docente herramienta didácticas y matemáticas. Terminado el Diplomado se implementa un taller de Estudio de Clases, con la participación del Doctor Arturo Mena, con la finalidad de discutir y reflexionar acerca de los cambios que se incorporarán en los programas de las matemáticas iniciales.

Luego, se realizar el taller de Activación de Resolución de Problemas en el Aula (ARPA) por la Universidad de Chile, el que busca desarrollar capacidades de Resolver Problemas, autonomía, aprendizaje colaborativo, razonamiento y comunicación de la Matemática en el estudiante (Perdomo & Felmer, 2017). Dicha estrategia está basada en la Resolución de Problemas con una estructura definida, que distingue 4 etapas dentro de una cátedra: *Entrega, Activación, Consolidación y Discusión* (Perdomo & Felmer, 2017). ARPA llega a INACAP el Año 2015, con su Taller RPAula, acá donde los académicos resuelven problemas, los planifican e implementan problemas en el aula (ARPA, 2018), en esta instancia han participado 92 académicos; una vez que los académicos finalizan el Taller RPAula, participan en el Taller RPContenidos, que pretende que los académicos elaboran problemas articulados al programa de asignatura, (ARPA, 2018).

Hoy, INACAP a ARPA lo referencia en sus Descriptores de asignatura como ACERPA y los académicos que realizaron el Diplomado de Didáctica de la Matemática (Pontificie Universidad Católica de Valparaíso) y los Talleres de RPAula y RPContenido (Universidad de Chile), son los responsables de compartir y entregar las herramientas para una efectiva aplicación del programa bajo Metodología de Resolución de Problemas, todo esto a cargo del equipo de ARPA.

Dentro de los objetivos de la capacitación están el contar con académicos competentes en la aplicación de la Resolución de Problemas mediante la estrategia ARPA y crear un equipo experto que haga sustentable por INACAP la capacitación de nuevas sedes. Así INACAP cuenta con 5 monitores certificados los que, hoy en día, han llevado la Metodología a otras 5 sedes.

Para apoyar las instancias anteriores, el equipo de Ciencias Básicas de INACAP en el año 2015, implementa un Taller para profundizar en el enfoque de la Resolución de Problemas, cuyo propósito es apoyar a los docentes en la implementación de actividades de Resolución de Problemas en la enseñanza de la Matemática, mediante el análisis a priori de los conocimientos matemáticos puestos en juego al resolver una tarea matemática.

Una clase en INACAP

En cada una de las sesiones de las matemáticas iniciales se implementa la Estrategia ARPA, está tiene una estructura definida que distingue 4 etapas dentro de una cátedra: *Entrega, Activación, Consolidación y Discusión* (Perdomo & Felmer, 2017).

Cada unidad del descriptor o programa de las matemáticas iniciales tiene asociado un grupo de problemas, que en su conjunto forman una secuencia didáctica los que evolucionan en niveles crecientes de dificultad Genicio, Hernández & Forcinito, 2008) , los problemas se transforman en un reactivo, cada uno diseñado con el objetivo que

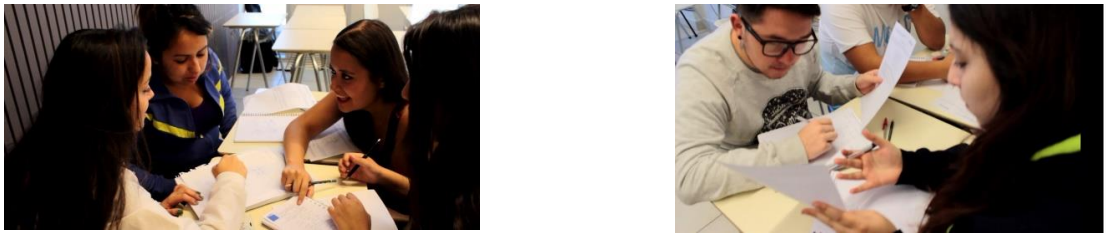
los estudiantes construyan en equipo un objeto matemático y sea consolidado por parte de cada uno de los estudiantes, generando conocimiento matemático a partir de prácticas socialmente situadas (Soto & Cantoral, 2014).

La primera sesión consta de dos partes, la primera tiene como finalidad dar una bienvenida a los estudiantes, realizar un encuadre de la asignatura, explicar la Metodología de Resolución de Problemas, los lineamientos generales del trabajo en el aula, explicar a los estudiantes lo que se entiende como problema matemático en INACAP y mostrar el material complementario de trabajo que se encuentra en la plataforma Online de la asignatura. En lo que se refiere a la metodología de trabajo, se explica el rol que tendrá el académico y los estudiantes durante las sesiones, las características de los problemas y de las habilidades que se quieren desarrollar durante cada unidad; en el caso de los lineamientos generales de trabajo, el académico explica:

1. Que en todas clases del curso serán separado en grupos de 3 a 4 estudiantes de forma aleatoria, de tal manera que en cada clase los grupos sean distintos;
2. Que se les entregará una copia del problema a cada miembro del grupo y se espera que los estudiantes lo lean y discutan antes de llamar al académico en caso de dudas;
3. Que el académico en caso de dudas intervendrá en base a preguntas;
4. Que el problema está resuelto cuando cada uno de los integrantes del grupo son capaces de explicar comprensivamente la estrategia utilizada y la solución al problema;
5. Cuando todos los grupos terminen el problema se discutirán las estrategias y soluciones encontradas por cada grupo en un plenario;
6. Que no se puede interactuar entre los grupos. La primera parte de la sesión finaliza explicando a los estudiantes la concepción de problema matemático para INACAP, entendiendo como problema una situación nueva para el estudiante, ante la cual no conoce estrategias inmediatas para su solución (Isoda & Olfos, 2009).

En la segunda parte de la clase se realiza el primer problema de la asignatura, en donde se implementa la Estrategia de Resolución de problemas en sus cuatro etapas.

- La primera etapa es la *Entrega*; para ello, se separa el curso en grupos de 3 a 4 estudiantes los que se distribuyen en el espacio de la sala de tal manera que no se interrumpan entre los grupos, se crea una atmósfera positiva hacia la actividad y se entrega el problema para que los estudiantes lo lean y tengan una primera discusión de acercamiento a la comprensión del problema. En el caso de que un grupo tenga dudas al iniciar el problema, deberá llamar al académico, el que realizará preguntas previamente preparadas en la planificación acerca del enunciado, lo que se entendió del problema y sobre posibles formas de abordarlo (Perdomo & Felmer, 2017), la comprensión del problema e inicio del trabajo marca el momento del paso a la segunda etapa de la estrategia, lo que no necesariamente ocurre con todos los grupos en el mismo momento;
-



(a) **(b)**

Figura 1. (a) y (b) Estudiantes tienen una primera discusión de acercamiento a la comprensión del problema

- La *Activación*, se caracteriza en que cada grupo trabaja de manera autónoma. Una vez que los estudiantes inician la tarea, si el académico llegase a interactuar con los grupos debe hacerlo sólo a través de preguntas al grupo o a un integrante específico de éste; las preguntas pueden enfocarse en un elemento específico del problema o en la simplificación de éste para ayudar a la comprensión y a generar estrategias que permitan dar solución al problema. En esta etapa, se debe lograr la comunicación entre los integrantes del grupo (Perdomo & Felmer, 2017).Durante la activación, los estudiantes van generando diversas estrategias de resolución, por lo que el académico debe estar monitoreando el trabajo de cada grupo, ya que en la última etapa de la clase se trabajará con los análisis, hipótesis, errores y conclusiones que cada grupo obtuvo en esta etapa;

(a)

(b)

Figura 2. (a) y (b) Los académicos monitorean el trabajo de cada grupo

- El momento en que los estudiantes creen haber encontrado la solución al problema y llaman al académico para comunicar las conclusiones obtenidas, marca el inicio de la tercera etapa: la *Consolidación***.** Ésta es la instancia en que se debe evaluar la pertinencia de las respuestas entregadas por el grupo, se evalúa si cada integrante del grupo comprendió y si es capaz de explicar la estrategia utilizada para dar solución al problema; en el caso de que el grupo cumpla estas dos condiciones, se harán nuevas preguntas acerca del problema, con la finalidad de que los estudiantes extiendan y profundicen en la comprensión del problema (Perdomo & Felmer, 2017). La intervención del académico en esta etapa busca que los estudiantes puedan comunicar sus razonamientos matemáticos, interactuar entre los integrantes del grupo y mostrar sus diferentes modelos o representaciones del problema;

(a)

(b)

Figura 3. (a) y (b) Los académicos monitorean el trabajo de cada grupo

- La última etapa de la clase es la *Discusión*; acá se promueve la participación de todo el curso y su objetivo es la presentación de las distintas estrategias, errores, hipótesis y soluciones que emergieron producto del trabajo realizado por cada grupo (Perdomo & Felmer, 2017). La pizarra sirve para dejar evidencia de los elementos que se debaten en la plenaria; por este motivo, el académico tiene que dar un orden a esta etapa seleccionando las opiniones e intervenciones de los grupos, según lo observado en la Activación y Consolidación. Generalmente, el Plenario comienza solicitando a un grupo o a algunos estudiantes del curso que expliquen el problema, sus alcances e impresiones generales; luego, se direccionan las preguntas a los

grupos entorno a conocer las distintas hipótesis iniciales y los errores cometidos a partir de éstas. La clase finaliza cuando se presentan en el pizarrón las estrategias que permitieron dar solución al problema y se debate y argumenta acerca de sus diferencias, limitaciones y condiciones, de tal manera que los estudiantes opten por la más eficiente; con ello, se pretende colaborar con el rediseño del Discurso Matemático Escolar (DME), sin imponer un procedimiento o única argumentación y significado, evitando en algún grado la violencia simbólica (Soto & Cantoral, 2014).

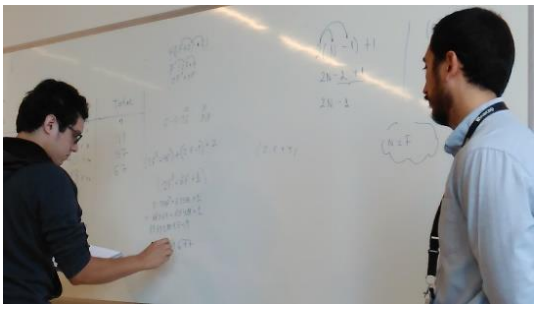


Figura 4. Se presentan las estrategias que permitieron dar solución al problema

Conclusiones

Como se mencionó previamente, el equipo de Ciencias Básicas de INACAP realizó un Taller de Resolución de Problemas para los académicos del Área de Matemática. Como primera actividad del taller, se aplicó una encuesta con el objetivo de conocer la percepción de los académicos acerca de la Resolución de Problemas. Alguno de los reactivos hacía referencia a: entregar una definición de Problema y ejercicio Matemático; nombrar ventajas y desventajas asociadas al enfoque de la Resolución de Problemas en el Aula; describir el Rol del Docente en la aplicación del enfoque de Resolución de Problemas; clasificar como problema o ejercicio un conjunto de enunciados fundamentado dicha opinión.

Respecto a la pregunta acerca de qué es un problema en Matemática, los académicos caracterizan un problema como una situación contextualizada que debe ser traducido a Matemática, que necesita de un Metodología o estrategia para llegar a la solución, la que se debe argumentar y comunicar, lo que podemos observar en las siguientes evidencias:

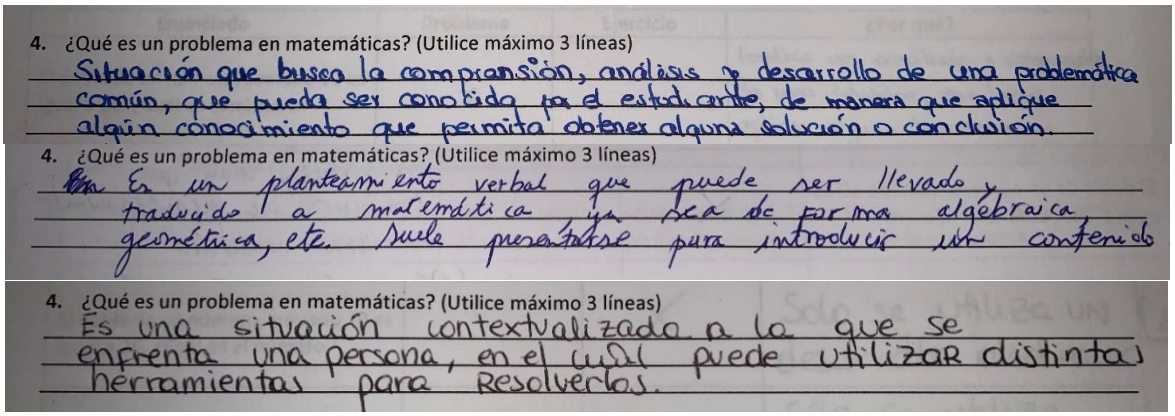


Figura 5. Evidencias de Respuestas de Académicos sobre la definición de un problema en Matemática

Cuando describen qué es un ejercicio en Matemática es considerado, en general, como una operación o aplicación Matemática sin contexto que no necesita un análisis pofundo; es decir, donde sólo se utiliza la operatoria; algunos ejemplos de respuestas de los académicos son:

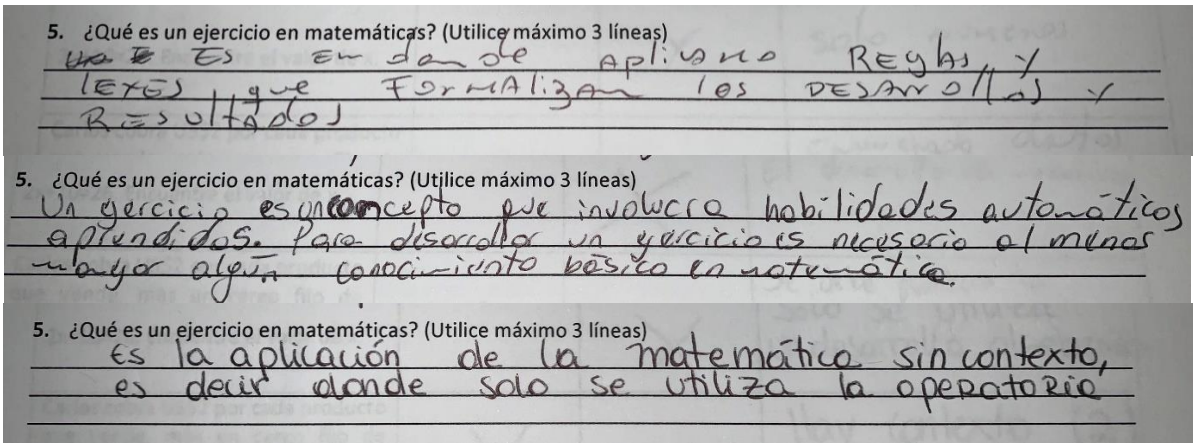


Figura 6. Evidencias de Respuestas de Académicos sobre la definición de un ejercicio en Matemática

Cuando a los académicos se les pide clasificar tareas matemáticas, reafirman la información entregada previamente.

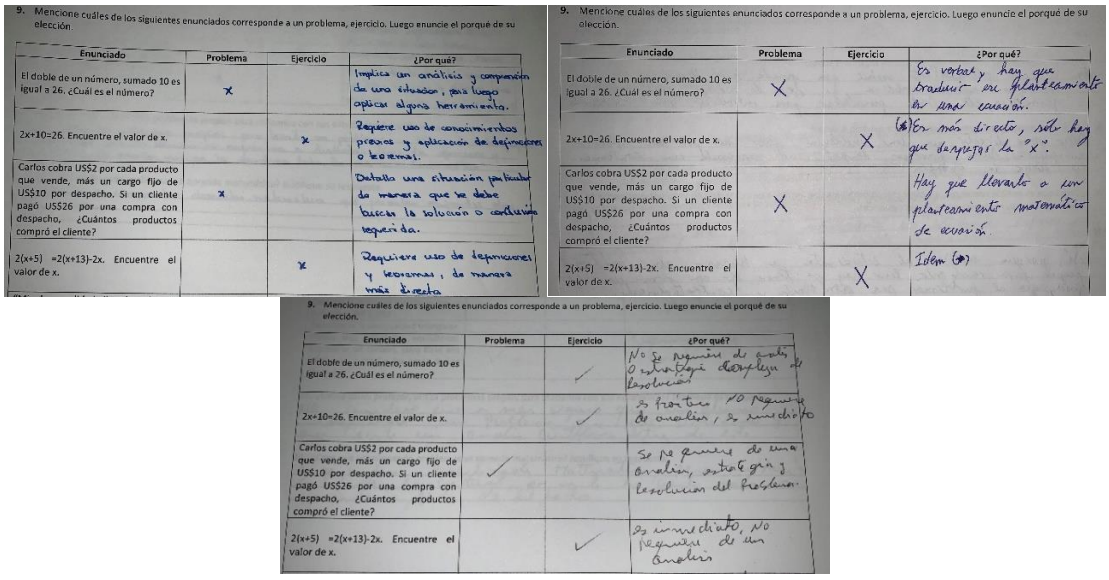


Figura 7. Evidencias de Respuestas de Académicos sobre la clasificación de un ejercicio en Matemática

La información entregada por la encuesta de percepcepción permitió concluir que las creencias personales y los distintos procesos de formación académica generan disperción al momento de pedir sus opiniones acerca de conceptos relacionados al grado que el académico tiene. Así, se concluye que es fundamental generar instancias de capacitación que se focalicen en la implementación de estrategias de Resolución de Problemas en el Aula, además de enfatizar en las concepciones y definiciones que INACAP pretende implementar en sus aulas.

La implementación del Taller de Estudio de Clases asesorados por una eminecia internacional en Didáctica de la Matemática (como el Doctor Arturo Mena), permitió concluir que no sólo se debía realizar un cambio en los

Programas de Estudio, sino que además se debían generar Situaciones de Aprendizajes para que las sesiones de Matemática tuvieran un enfoque constructivista con el proposito de que los estudiantes generasen su conocimiento, orientados por directrices de trabajo, cuidadosamnete diseñadas, y que se basan en los contenidos a esa clase, además de generar instacias de colaboración que permitan mejorarlas, aprender metodologías y conocer mejor, tanto a los alumnos como a la propia práctica.

Figura 8. Taller de Estudio de Clases

La Universidad Tecnológica de Chile INACAP tiene 26 Sedes, con presencia en las 16 regiones de Chile; además, en cada una de ellas imparte matemáticas iniciales con distintos códigos en los Semestres de Otoño y Primavera. Dichos códigos y semestre dependen de la Escuela y Área Académica. En el semestre Otoño 2019 (Primer Semestre), los estudiantes matriculados que rindieron matemática inicial fueron 31.285; de ellos, el 62,69% aprobó la asignatura y el porcentaje promedio de Asistencia de los estudiantes fue de un 75,55%. Dichos resultados son considerados positivos por la Institución, los que se pretenden mejorar con nuevas instancias de formación y capacitación continua.

Referencias bibliográficas

ARPA (2018). Activando la Resolución de Problemas en el Aula. Obtenido de ARPA: http://www.arpamat.cl/nuestra-iniciativa.

Bravo Mancero, Patricia, & Varguillas Carmona, Carmen Siavil (2015). *Estrategias didácticas para la enseñanza de la asignatura Técnicas de Estudio en la Universidad Nacional de Chimborazo*. Sophia: colección de Filosofía de la Educación, 19(2), pp. 271-290.

Genicio, M., Hernández, C. and Forcinito, S. (2008). Sistema de Ecuaciones lineales: Secuencia didáctica para su enseñanza. Estado de México: Patricia Lestón, pp.190-200.

INACAP (2020). *Descriptor Matemática, (MTAN01)*. Recuperado 05 de mayo del 2020 de http://siga3.inacap.cl/AAPEDescriptor/ShowAsig.aspx?idasig=MTAN01

Isoda M, & Olfos, R. (2009). *El enfoque de la Resolución de Problemas en la enseñanza de la Matemática a partir del Estudio de Clases*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Perdomo, J., & Felmer, P. (2017). *El taller RPAula: Activando la Resolución de Problemas en las Aulas*. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 21, 425-444.

Soto, Daniela, & Cantoral, Ricardo. (2014). *Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica*. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 28(50), 1525-1544. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a25.

UNA EXPERIENCIA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN PRIMARIA PARA ABORDAR CONCEPTOS GEOMÉTRICOS

AN EXPERIENCE OF MATHEMATICAL MODELING IN PRIMARY EDUCATION TO APPROACH GEOMETRIC CONCEPTS

Lennys Gaviria-Quintana, Maria Camila Ocampo-Arenas, Paola Andrea Patiño-León
Universidad de Antioquia (Colombia).
lennys.gaviria@udea.edu.co, camila.ocampo@udea.edu.co, paola.patinol@udea.edu.co

Resumen
Se presenta una experiencia de Modelación Matemática en Educación Primaria con estudiantes de primer grado, con el objetivo de propiciar espacios de aprendizaje relacionados con la geometría en torno a la organización de una fiesta de fin del año escolar. Se evidenció que los estudiantes lograron tomar decisiones por medio del uso del número, los sólidos geométricos, las tablas de conteo y las medidas no convencionales. La experiencia permitió reconocer que este tipo de acercamientos a los conceptos permite que los estudiantes se sientan protagonistas de su proceso de aprendizaje.

Palabras clave: educación matemática, primaria, modelación matemática

Abstract
This article reports on an experience of Mathematical Modeling in Primary Education first-grade students. It is aimed at fostering learning spaces related to geometry with respect to the organization of a party for the end of the school year. It was evidenced that students managed to make decisions through the use of numbers, geometric solids, counting tables and unconventional measures. The experience allowed us to recognize that this type of approach to concepts make students feel leaders of their learning process.

Key words: mathematics education, primary, mathematical modeling

Introducción

Este artículo se deriva de una experiencia de Modelación Matemática en Educación Primaria desarrollada en el marco de la Licenciatura en Pedagogía Infantil, de la Universidad de Antioquia, en una práctica temprana denominada Práctica Integrativa V, la cual tiene su énfasis en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y está articulada a dos aspectos. Por un lado, a un seminario al que asisten todos y todas los y las maestras en formación y sus asesores con el fin de propiciar el diálogo y la reflexión entre la teoría y la práctica; y por otro lado, a una práctica realizada por las maestras en formación en un grado específico de una institución educativa, la cual tiene una duración de 4 meses, en los cuales se asiste al centro de práctica cuatro horas a la semana.

El escenario que se reporta tuvo lugar con estudiantes del grado primero de una institución educativa pública ubicada en el municipio de Medellín, Colombia. Durante la experiencia, se realizó una observación participante de los estudiantes en diferentes espacios, allí se identificaron diversas características de los niños y las niñas frente a las clases de matemáticas tales como: curiosidad por los conceptos matemáticos que se presentaban durante exploración de saberes previos, motivación para expresar sus ideas, protagonismo y participar en los debates planteados. Mediante dicha observación también se evidenció que el grupo prefería trabajar de manera individual, pero cuestionaban algunas actuaciones de sus compañeros y lo expresaban de manera oportuna.

De igual forma las discusiones y experiencias tenidas en el seminario de la práctica permitieron que se retomara y modificara una situación publicada en la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (Recomem). La experiencia propuesta a partir de la situación modificada tuvo como objetivo propiciar espacios de aprendizaje relacionados con la geometría, mediante una situación de Modelación Matemática en torno a la organización de una fiesta de fin del año escolar.

El desarrollo de la experiencia posibilitó, abordar temáticas propias de las matemáticas en el nivel escolar, y, permitió que los estudiantes relacionarán las matemáticas con la cotidianidad, ante lo cual se mostraron interesados y motivados. Esto se mostró evidenciado en sus comentarios, ideas para próximos encuentros, participación en los mismos y altas expectativas al iniciar una sesión, las cuales manifestaban mediante las sugerencias que realizaban para el próximo encuentro.

A continuación, se presentan los fundamentos teóricos que sustentaron la experiencia, el aspecto metodológico de la misma, los resultados, las conclusiones y las referencias bibliográficas utilizadas.

Modelación matemática como estrategia para abordar conceptos geométricos: Fundamentos teóricos

La Modelación Matemática en Educación Primaria, ha sido materia de interés por varios autores, tales como López y García (2008) y Parra-Zapata (2015), esta última expresa que la Modelación Matemática en dicho nivel puede ser entendida como la matematización de la realidad. La autora entiende la matematización de la realidad como aquella práctica en la que los estudiantes, a partir de una problemática de su cotidianidad, observan, experimentan, indagan y validan con las matemáticas.

La Modelación Matemática en Primaria implica el cruce de límites disciplinarios, con un énfasis en la estructura de las ideas, formas de conocimiento conectadas y la adaptación de ideas complejas a nuevos contextos (Hamilton, Lesh, Lester y Brilleslyper, 2008). La transversalización de diversos saberes disciplinarios es fundamental para que el aprendizaje sea integral y no se fragmente, y así abordar las matemáticas a partir de la flexibilización del diseño de la experiencia para incluir otras áreas.

La experiencia fue direccionada por medio de los momentos propuestos por Parra- Zapata para la Modelación Matemática en primaria "[…] describir e interpretar la situación a estudiar, simplificar asuntos a considerar en la situación, recolectar información pertinente para la situación, proponer una solución o unas soluciones a la situación por medio de la matematización de relaciones propias de la situación y a través de la interpretación y evaluación de resultados, y comunicar los resultados¨ (Parra-Zapata, 2015, p. 59).

Por su parte, la geometría, es fundamental en el desarrollo del estudiante, ya que su presencia en la vida diaria la convierte en uno de los conocimientos más necesarios para que el estudiante logre interactuar con el entorno, apoyándose de relaciones y conceptos geométricos que la cotidianidad y el saber de esta asignatura les ofrecen (López y García, 2008). En este sentido, el espacio está lleno de geometría, alrededor se puede encontrar diversas figuras y sólidos geométricos, por lo cual el rol que tiene la geometría en el proceso de enseñanza y aprendizaje es necesario, ya que, la geometría, también se centra en la medida de magnitudes y la representación plana de situaciones espaciales (Chamorro, 2007).

Durante esta experiencia, la representación del espacio juega un rol fundamental ¨[...] con niños de 5 a 6 años, muestran claramente cómo la representación del espacio se produce por una geometrización creciente en el curso del desarrollo cognitivo¨ (Chamorro, 2007, p. 262) con base a este planteamiento, la representación del espacio se pudo fortalecer partiendo de los conceptos geométricos que se abordaron e interactuando con estos mismos.

De acuerdo con los elementos anteriores en esta experiencia de Modelación Matemática se retomaron como ejes centrales la matematización de la realidad y la geometría, en el desarrollo de una fiesta de fin del año escolar, como una posibilidad de acercarse a cuestiones de las matemáticas.

Metodología

En este apartado hacemos referencia a asuntos de la metodología, en los que argumentamos el enfoque en el que fue enmarcada la experiencia de aula descrita en el presente artículo. Describimos el escenario y los participantes de la experiencia, planteamos cómo se recolectó la información, el camino seguido en la implementación de la experiencia, la cual se desarrolló por momentos, y la forma en que se realizó el análisis de la información.

Dado que el objetivo de esta experiencia hace referencia a propiciar espacios de aprendizaje relacionados con la geometría, mediante una experiencia de Modelación Matemática en torno a la organización de una fiesta de fin de año escolar, este proyecto se enmarca en un enfoque cualitativo. Dicho enfoque permite centrarnos en datos que van más allá de la cuantificación. Es decir, estudiar las actuaciones y procedimientos de los estudiantes al participar en experiencias de Modelación Matemática (Hernández-Sampieri et al., 2006). De igual manera, el enfoque cualitativo nos permite centrarnos en las percepciones, actuaciones y procedimientos de un grupo de estudiantes y reflexionar en torno al aprendizaje de aspectos relacionados con la geometría en un contexto de la fiesta de fin de año escolar. Además, este enfoque permite que nuestro papel sea activo en el proceso, donde nuestras percepciones, actuaciones y reflexiones también son tomadas en cuenta para alcanzar el objetivo propuesto.

La experiencia se llevó a cabo con el grado primero con niños y niñas que asistían regularmente en el horario de la tarde, en la institución educativa Villa Flora, ubicada en el municipio de Medellín en el barrio Robledo; es una institución de carácter público y mixta, que presta su servicio educativo desde el grado transición hasta el grado undécimo.

Los estudiantes del grado primero siempre se mostraron participativos, motivados y curiosos respecto a los momentos que conformaron la experiencia de modelación, atentos y dispuestos a trabajar, generalmente expresaban sus intereses y opiniones en las socializaciones que se realizaban en las sesiones. Inicialmente se mostraron algo tímidos para trabajar en equipo y expresar verbalmente sus ideas o inquietudes, sin embargo, a medida que se

conformaron los grupos de trabajo y a su vez se distribuyeron tareas para llegar al mismo objetivo, los niños y niñas demostraron, mediante su participación y facilidad para expresar dudas, motivación e incluso expectativas respecto a la experiencia que se estaba desarrollando. El grupo en general siempre dispuesto a participar, tenían una capacidad de asombro que les permite sorprenderse y disfrutar cada uno de los momentos que componían la experiencia, además de eso esta misma capacidad propició espacios de conversación para hacer frente a las inquietudes que surgieron con cada concepto abordado.

Acorde con el enfoque de la experiencia utilizamos técnicas como, observación participante, y documentos producidos por los estudiantes (Gewandsznajder y Alvez-Mazzoti, 1998). La observación participante nos permitió, por un lado, enfocarnos en eventos que sucedan en un periodo de tiempo y, por otro, identificar acciones de los participantes en el contexto en que se desenvuelven. El instrumento que utilizamos para registrar los aspectos que surgieron de la observación participante, fueron los diarios de campo, en los cuales realizamos la descripción de lo sucedido para identificar aspectos relevantes por medio de la reflexión constante.

También, empleamos la técnica de los documentos en los que los estudiantes develaron asuntos de análisis y de producción que fueron la fuente de información. Los instrumentos que utilizamos para analizar los documentos fueron escritos en los que organizamos la información y la analizamos al tener en cuenta aspectos repetitivos y relevantes, que evidencian percepciones y reflexiones de los estudiantes.

Esta experiencia estuvo compuesta de 5 momentos (Tabla 1) que nacieron de los planteamientos propuestos por Parra-zapata (2015), y que fueron surgiendo poco a poco durante la experiencia, es decir, la descripción e interpretación de la situación se dio desde el primer momento cuando se les hizo a los niños y niñas la propuesta inicial de organizar juntos una fiesta, en este mismo momento llegamos a algunos acuerdos para poder trabajar de forma conjunta. A medida que las otras sesiones estaban en curso surgieron ideas por parte de los niños y niñas, tales como temática de la fiesta o entrenamiento durante la misma, para llegar a un consenso realizamos un debate respecto a estos asuntos y lograr abordar los conceptos matemáticos en la organización de la fiesta, y así llegar a la meta final. Respecto a las propuestas de soluciones para diversas situaciones, se evidenció cuando los niños y niñas frente a la situación de la decoración, comida y música plantearon la opción de preguntarles a sus compañeras que era lo que más les gustaba, es decir, realizar encuestas.

Tabla 1. Momentos del proyecto

Experiencias	Finalidad	Conceptos matemáticos
¨ ¿Cómo vemos el mundo en las figuras geométricas? ¨	Identificar las figuras geométricas y utilizar sólidos geométricos en tareas cotidianas, en este caso la elaboración de la tarjeta de invitación para una fiesta de fin del año escolar.	Figuras geométricas y sólidos geométricos.
¿Qué podemos medir?	Descubrir unidades de medida diferentes a las convencionales, con una ruleta la cual indica con que objeto medir; de esta forma los estudiantes midieron el espacio que desean decorar para la fiesta escolar.	Unidades de medida no convencionales.
¿Las matemáticas son mágicas?	Interpretar la información contenida en las tablas de conteo; los estudiantes por medio de los resultados obtenidos en encuestas lograron identificar cual era la preferencia en música, comida, colores y temática para la fiesta.	Tablas de conteo, encuestas con preguntas abiertas y cerradas.

Recopilando y construyendo detalles	Relacionar objetos y espacios. Los estudiantes lograron ultimar detalles para la fiesta que no se habían tenido en cuenta, como la ubicación de objetos: sillas, mesas, entre otros.	Nociones espaciales.
Fiesta escolar: Vivir la fiesta de fin del año escolar por medio de las creaciones elaboradas de forma individual y grupal.		

Fuente: Creación propia

A continuación se profundizan las experiencias que se llevaron a cabo en cada sesión, durante el desarrollo de estas se tuvieron momentos de indagación de saberes previos, socialización, explicación de conceptos ya fuera en forma de conversatorio o de juego, también se articularon algunos cuentos de literatura infantil; es relevante mencionar que para cada planeación se elaboró una guía de trabajo la cual al inicio de cada clase se entregaba a los estudiantes, está contenía el objetivo, actividades a desarrollar y conceptos a trabajar, para que lo adjuntaran en sus cuadernos.

¿Cómo vemos el mundo en figuras geométricas?

Se hizo una presentación del ejercicio de la guía el cual pedía unir cada figura geométrica con su respectivo nombre y colorearlas, luego por equipos se repartieron diversas fichas de dominó que contenían las figuras geométricas que se trabajarían en la guía, entre todos se fue diciendo el nombre de cada figura y ubicándolas en el domino. Para la actividad central se presentaron varias opciones a los niños de tarjetas para Halloween, y se les dio el espacio para la creación de esta.

Cuando se presentaron las fotos de opciones para las invitaciones de Halloween, se habló con ellos de que figuras geométricas se necesitan para realizar las invitaciones, en este momento todos se mostraron participativos y la mayoría nombraba por su nombre las figuras, haciendo la construcción de las invitaciones como se muestra en la figura 1, allí a partir de las claridades y el reconocimiento descrito anteriormente los niños y las niñas hicieron sus propias creaciones.

Figura 1. Producciones de los niños de primer grado.

¿Qué podemos medir?

Se dio inicio con la lectura del gusanito medidor, orientada por preguntas como ¿qué se puede medir? ¿Con que se puede medir? Los niños y niñas se mostraron muy participativos y comenzaron a expresar que cosas podían median y con que, llegando a la conclusión que a la mayoría de los objetos se les puede medir algo. Para ilustrar un poco mejor esta afirmación de los niños y las niñas, se realiza un juego de medir el largo de algunas partes de su cuerpo con instrumentos no estandarizados, en este caso una pita de un color específico, las cuales tenían medidas diversas. Un integrante de cada fila sale a girar la ruleta (Figura 2), la cual tiene varias divisiones con partes del cuerpo y un color, por lo cual al girarla cada niño obtendrá el color de la tirilla con el que debe medir y la parte del cuerpo que va a medir. Todos participan de esta actividad, llegando a conclusiones entre ellos mismos como ¨el que mida con la tirilla amarilla va a tener más puntos¨, ¨ es mejor medir al compañero más alto¨ entre otros.

Figura 2. Juego de la ruleta con medidas antropométricas.

Luego de esta actividad, se pasa a distribuir por equipos lugares del salón, estos lugares se debían medir, tomar nota de los datos obtenidos para relacionar decoración de la fiesta con el lugar donde era posible ubicarla, de esta forma cada grupo estuvo encargado de medir con sus tirillas e informar cuantas tirillas mide la parte asignada del salón para saber de qué tamaño se debe hacer la decoración, algunos de los estudiantes utilizaron otros elementos como cuadernos, marcadores o cartucheras para realizar la medición correspondiente (Figura 3).

Figura 3. Otros elementos utilizados para la medición de espacios.

¿Las matemáticas son mágicas?

Luego de realizar la medición del salón y determinar la decoración a utilizar, los niños y las niñas propusieron que la comida y la música fuera elegida por ellos mismos, por lo anterior se les propuso realizar una encuesta para determinar los gustos de la mayoría del salón. Para conocer y familiarizar a los niños y las niñas con lo que es una encuesta, inicialmente se mostró una tabla de conteo realizada previamente sobre los animales favoritos, la tabla ya estaba hecha. Se preguntó si sabían que información daba la tabla, surgieron preguntas como ¿por qué se hacen puntos y luego se dice el numero?, ¿por qué no se pone el número de personas de una vez?, ¿porque no hay tantas opciones? Se dio respuesta todas estas preguntas mediante la realización de la misma encuesta, los niños y niñas participaron alzando la mano, se habló de preguntas cerradas y abiertas, encuestas con opción múltiple.

Posterior a este ejercicio, se hizo en el tablero una lista de lo que se necesitaba para la fiesta, esta para identificar que faltaba por decidir, decoración, comida, dulces, música entre otros aspectos, por lo que se organizaron los equipos de trabajo y cada uno se hizo cargo de uno de estos detalles faltantes haciendo la pregunta ¿qué comida prefieres para la fiesta? ¿Qué decoración prefieres para la fiesta?, y así sucesivamente con cada detalle. Dichos aspectos fueron los temas de las encuestas realizadas por cada equipo, cada encuesta se debía poner en una urna de votación.

Luego en el tablero se socializaron las encuestas y se hizo una tabla de conteo por cada detalle faltante por los equipos (figura 4), explicando de esta forma, por qué cuando se cuentan los votos se van poniendo puntos y luego se suma el total de todos los puntos, también se logró dar respuesta a la importancia de estas encuestas ya que de esta forma se simplificarían todos esos detalles que se tenían pendientes para la fiesta.

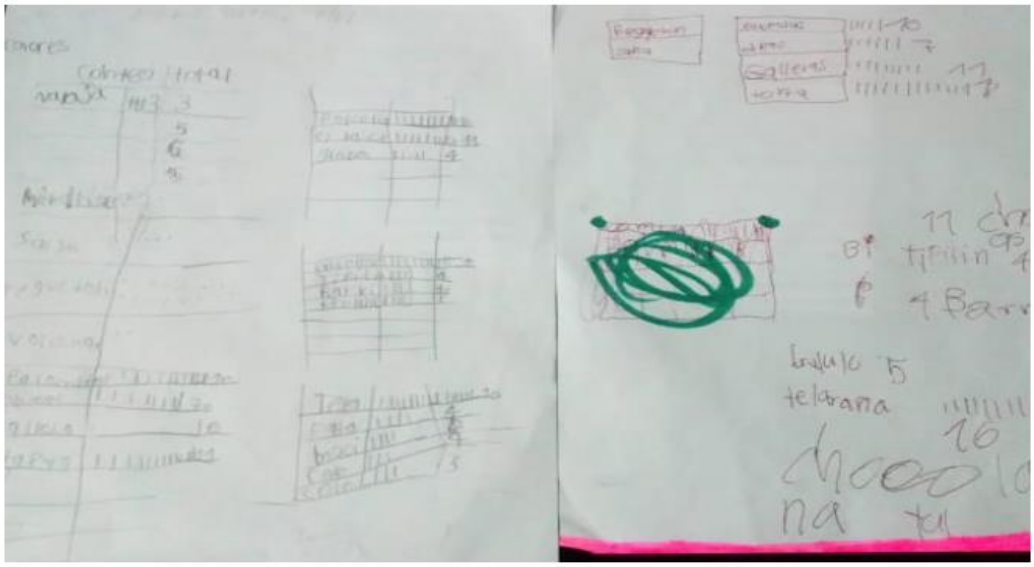


Figura 4. Tablas elaboradas por los niños y las niñas.

Recopilando y construyendo detalles

Se da inicio con la lectura del grufaló, mientras se hace la lectura de este se va orientando una pequeña conclusión que trata de que cada uno a su manera es un héroe, independientemente de si es diferente o igual a los demás, por lo cual cada uno puede elegir su antifaz para la fiesta sin preocuparse quién va a ser mejor.

Luego se habla con los niños y niñas de la ubicación, de cómo se ubican ellos, en qué lado de la ciudad viven, si serían capaces de dar indicaciones para llegar a su casa o al colegio. Y se les explica el juego ¨la familia izquierdo¨ es un texto que tiene las palabras, izquierda, derecha, arriba, abajo, y cada que se digan estas palabras los niños y niñas deben seguir las indicaciones en el espacio para no ser eliminados del juego, esto se realiza con el fin de que los niños construyan algunas indicaciones y unos breves mapas de cómo podría estar ambientada el aula en el momento de la fiesta, en qué lugar iría cada detalle teniendo en cuenta las medidas y el espacio (figura 5).

Figura 5. Detalles para la fiesta escolar.

Fiesta escolar

Para la fiesta y sus preparativos se tuvo en cuenta cada detalle que los niños y niñas habían construido, la decoración fue con globos de colores y serpentinas, unas luces para bailar y pantalla para ver videos; respecto la comida se hicieron bolsitas con dulces, se llevó torta con gaseosa; el día anterior se creó una lista de reproducción con la música que habían elegido para bailar y cantar y finalmente se tuvieron en cuenta diversos juegos como ¨ponerle los colmillos al vampiro¨ ¨el baile de las sillas¨ ¨desfile de antifaces¨ entre otros, el material para estos juegos se elaboró con anterioridad y que habían sido elegidos en la encuesta.

Resultados

Mediante el desarrollo de la experiencia los estudiantes lograron llevar a cabo un proceso de Modelación Matemática que les permitió reconocer aspectos geométricos en el desarrollo de una experiencia cotidiana, lo cual se dio porque la fiesta escolar se presentó como una situación que despertó su interés y permitió una matematización de la realidad, que llevó a los estudiantes a la resolución de problemas en un contexto cercano.

Durante el primer momento, ¨como vemos el mundo en las figuras geométricas¨, los niños y las niñas se mostraron sorprendidos al darse cuenta como la tarjeta que habían construido por sus propios medios, tenían tantas figuras geométricas. También les causó mucha curiosidad el concepto de ¨sólido geométrico y su diferencia con ¨figura geométrica¨, esto se evidenció en los comentarios de los niños y niñas, debido a que no sabían el concepto de ¨sólido¨, pensaban que los cuerpos y las figuras geométricas eran lo mismo.

En el segundo momento ¨¿Qué podemos medir? fueron muy creativos al intentar medir con sus manos o con los objetos que tenían a su alcance, incluso hubo una evidente resolución de problemas, cuando por su propia cuenta concluyeron que debían elegir a uno solo para medir con sus manos o pies debido a que no todos medían lo mismo, lo anterior hace referencia al uso que se le da a las medidas antropométricas y la importancia con respecto a la historia de las medidas tal como las conocemos en el momento. De manera particular en la educación matemática, experiencias que lleven a los estudiantes a reconocer el cómo se ha llegado a lo que conocemos ahora genera una reflexión significativa en cuanto a los conceptos y su utilidad en actividades cotidianas (Kula. 1999).

En el tercer momento ¨ ¿Las matemáticas son mágicas? ¨ es necesario mencionar que este momento fue planteado por ellos, en encuentros anteriores habían manifestado la necesidad de saber que comida, que música, que juegos y que decoración tendrá su fiesta, por lo cual se propuso trabajar de forma grupal para que cada uno se hiciera cargo de estos detalles de la fiesta, de esta forma se desarrollaron encuestas y tablas de conteo. De acuerdo con lo anterior la articulación de otros pensamientos, como el aleatorio, fue importante en esta experiencia. Por su parte ¨... integrar la modelación en la clase de matemáticas subyace a la idea de que cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones de su contexto cercano pueden explorar diferentes formas de representarlas en términos matemáticos¨ (Parra-Zapata, M. 2015). En esta misma línea Parra-Zapata cita a Bassanezi (1994) quien defiende que implementar la modelación en la enseñanza de las matemáticas conlleva a un aprendizaje de conocimientos matemáticos vinculado con formas diferentes de conocimiento.

En el cuarto momento ¨Recopilando y construyendo detalles¨ El trabajo en equipo se hizo notorio debido a que se ayudaban entre ellos mismos y se escuchaban para analizar el espacio y solucionar las complicaciones que se les iban presentando.

Según Parra-Zapata, ¨...la matematización de la realidad fue entonces una práctica de resolución de problemas, de búsqueda de problemas, pero también una actividad de organización de un tema¨ con base a lo anterior, durante la experiencia de modelación matemática los estudiantes realizaron este proceso mediante el reconocimiento del número, el uso de los sólidos geométricos, las tablas de conteo y las medidas con objetos no convencionales, debido a que se valieron de estos conceptos para resolver su situación en contexto real y llegar al objetivo inicialmente establecido.

Igualmente, se evidenció un alto grado de participación de los estudiantes, como resultado de la motivación y de la consideración de las opiniones e ideas de los estudiantes y abordarlas mediante pequeños debates formados por ellos mismos.

También se evidenció avance en cuanto al trabajo en grupo, ya que, al principio se mostraron muy tímidos al momento de hablar o escuchar. Durante la experiencia los estudiantes tomaron los conceptos abordados y los emplearon en su cotidianidad, esto se evidenció en cada uno de los momentos mencionados en la tabla 1.

Conclusiones

Durante los momentos que conformaron la experiencia de modelación matemática se evidenciaron diversos resultados que nos permiten concluir, que la experiencia posibilitó por parte de los estudiantes el reconocimiento y uso de conceptos en actividades cotidianas tales como, sólidos geométricos, medidas convencionales, no convencionales y tablas de conteo.

En el primer momento, mediante la construcción de la invitación con sólidos geométricos se evidenció que los estudiantes interactúan con el entorno y los conceptos geométricos, durante el segundo momento, en el cual se trabajaron las medidas no convencionales, se logró propiciar un espacio en el cual los estudiantes demuestran centrarse en la medida de magnitudes y la representación plana de situaciones espaciales. Respecto al tercer

momento, el cual como se mencionó fue propuesto por los estudiantes, nos permite concluir que los niños y niñas observaron, experimentaron, indagaron y validaron con las matemáticas. Finalizando con el cuarto momento, durante la recopilación y construcción de detalles se logra observar cómo los estudiantes tienen buen manejo de la ubicación espacial.

Los estudiantes para dichos logros tuvieron en cuenta su singularidad y el contexto que compartían. De igual forma los aportes realizados por los estudiantes fueron tomados en cuenta para los momentos que componían esta experiencia, las creaciones elaboradas durante este proceso se utilizaron en todos los momentos logrando de esta forma que los estudiantes se motivaron aún más al ver sus creaciones como protagonistas de su proceso de aprendizaje. Así mismo se logró también estimular su creatividad propiciando un espacio para el planteamiento, el análisis y la ejecución de cada momento que conllevaba al objetivo final de la experiencia.

Finalmente, en la experiencia se vio que la modelación matemática permite la transversalización de los pensamientos matemáticos en este caso la intencionalidad inicial era trabajar el pensamiento geométrico, sin embargo, a medida que se generan reflexiones con los estudiantes fue necesario acudir a la reflexión sobre el espacio versos las medidas de los objetos y aspectos como tabulación de datos y su interpretación.

Agradecimientos

A la Facultad de Educación y al Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas-CIEP, en su convocatoria interna: Innovaciones didácticas IV, por el apoyo a la investigación titulada “Transformación de las prácticas educativas de matemáticas de los maestros y las maestras en formación inicial al participar en ambientes de aprendizaje”.

Referencias bibliográficas

Chamorro, M. (2007). Matemáticas para la cabeza y las manos: La enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria. *Revista Quehacer Educativo*, *83*. Recuperado de: http://2633518-0.web-hosting.es/blog/didact_mate/Geometria_CChamorro.pdf

Gewandsznajder, F. y Alves–Mazzotti, A. (1998). O método nas Ciências Naturais e Sociais. São Paulo: Pioneira.

Hamilton, E., Lesh, R., Lester, F., & Brilleslyper, M. (2008). Model-eliciting activities (MEAs) as a bridge between engineering education research and mathematics education research. *Advances in Engineering Education*, *1*(2), n2.

Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., y Baptista-Lucio, P. (2006). Metodología de la investigación. México: McGraw Hill. Sexta Edición.

Kula, W. (1999). *Las medidas y los hombres,* Madrid, España: Siglo XXI.

López, O. y García, S. (2008). *La enseñanza de la geometría*. DF, México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE)

Parra-Zapata, M. M. (2015). *Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de Modelación Matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la Modelación Matemática* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia. Medellín. Colombia.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA QUE FAVORECE EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

PROBLEM SOLVING AS A METHODOLOGICAL STRATEGY THAT FOSTERS THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL COMPETENCES

Yudy Alexandra Molina Hurtado, María Martha Molina
Fundación Universitaria Juan de Castellanos (Colombia).
yamolina@jdc.edu.co, mariamartha1361@yahoo.es

Resumen
Esta investigación surge de la experiencia como docentes de educación en primaria y en nivel universitario, en donde el anhelo de buscar alternativas que permitan generar escenarios significativos en el contexto escolar, implica replantear y resignificar la praxis docente y el rol del estudiante para comprender los fenómenos que condicionan la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, donde se abordan diferentes procesos generales tales como: formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. La mayor dificultad se visualiza en la resolución de problemas, debido a la falta de planeación de ambientes de aprendizaje que propicien el acercamiento de los estudiantes a la comprensión y conocimiento de la realidad que los rodea, así como al análisis de los aspectos didácticos y metodológicos que inciden en el aprendizaje de los estudiantes, dinámica que conduce a planificar situaciones problémicas de interés, poniendo en juego buena parte de los procesos de producción y validación del conocimiento.

Palabras clave: resolución de problemas, competencias matemáticas, ambientes de aprendizaje

Abstract
This research arises from our experience as teachers of primary and university level education. It is based on the desire to find alternatives that allow generating significant scenarios in the school context, which implies rethinking and re-signifying the teaching praxis and the student role to understand the phenomena that condition mathematics teaching and learning, where different general processes are addressed, such as: posing and solving problems; modeling processes and phenomena of reality; communicating; reasoning, and formulating, comparing, and exercising procedures and algorithms. The greatest difficulty is visualized in problem solving, due to the lack of planning of learning environment that encourage students' approach to the understanding and knowledge of the reality that surrounds them, as well as to the analysis of didactic and methodological aspects involved in students' learning. This dynamic leads to pose problem situations of interest, putting into practice a good deal of the processes of knowledge production and validation.

Key words: problem solving, mathematical competences, learning environments

Introducción

La resolución de problemas en las últimas décadas se ha convertido en el eje central del currículo y ha tomado gran auge en el campo investigativo (Santos Trigo, 2007), dada la importancia que ésta juega en el desarrollo y potenciación de competencias para la vida (Iriarte, 2011).

El propósito de este trabajo se enmarca en fortalecer la resolución de problemas como una estrategia metodológica que favorecen el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes del grado cuarto de la institución educativa Técnica "Santa Cruz" del municipio de Motavita.

Los bajos resultados obtenidos en los últimos años en las pruebas saber, reflejan que la resolución de problemas se constituye en un escenario para fortalecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes desde una óptica más activa, que favorezca un acercamiento al conocimiento matemático de una forma autónoma entre lo teórico y lo práctico como una perspectiva distinta de pensar, entender y ver la matemática.

Asimismo, la manera como se aborda el enfoque del planteamiento y resolución de problemas en el aula de clase, involucra como labor principal una exposición por parte del docente, quien plantea un problema y lo desarrolla mediante una secuencia de procedimientos, que luego el estudiante por su parte, repetirá en la solución de situaciones similares. Metodología que limita al estudiante a que indague, explore y plantee diferentes estrategias de solución acordes a las condiciones dadas en la situación, truncando de esta manera, el desarrollo de competencias en cuanto al análisis, representación e interpretación.

Al respecto Skovsmose (2000), señala que la educación matemática tradicional se centra en el paradigma del ejercicio, a partir de las prácticas desarrolladas en el salón de clase, donde el docente propone ejercicios que no resultan ser relevantes para los estudiantes y que poseen una única respuesta como resultado de aplicar una fórmula matemática. Este paradigma puede contrastarse con posibles escenarios de investigación que les permita a los estudiantes implicarse en procesos de exploración, indagación y explicación.

Ante esta panorámica, se viene trabajando en una experiencia de aula que involucra la resolución de problemas como una estrategia generadora de conocimiento (Brousseau, 1986), mediante la cual, los estudiantes descubren por sí mismos el camino para resolver situaciones de su contexto, a través de conjeturas, construcción de modelos y representaciones e intercambio de opiniones, que hacen pensar y ver la matemática de una manera distinta a la del proceso algorítmico de análisis, operación y respuesta.

La importancia de sistematizar la presente experiencia de aula, radica en la articulación del análisis y la reflexión en torno al currículo, didáctica y pedagogía como componentes esenciales de la práctica educativa que vislumbran el reconocimiento del trabajo del docente y las dinámicas que se dan entorno a la resolución de problemas, donde los actores del proceso, planifican, toman de decisiones, argumentan y desarrollan el pensamiento crítico. (Farias y Velásquez, 2010)

En este sentido, la experiencia de aula ha permitido transformar y resignificar la praxis pedagógica desde una visión constructivista que busca avanzar en la consolidación de saberes significativos que favorecen la aprehensión de competencias y por ende el desarrollo del pensamiento lógico matemático, generando de esta manera, una actitud favorable frente a la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

La realidad educativa que se vivencia en las instituciones, proporcionan elementos claves en la configuración de ambientes de aprendizaje óptimos para encarar las falencias de los estudiantes hacia ciertos tópicos disciplinares, como el de las matemáticas, puesto que se convierten en oportunidades para optimizar la interacción con la realidad, lo que conlleva a identificar permanentemente situaciones problémicas que permitan a fortalecer la habilidad para usar el conocimiento, realizar inferencias y extrapolar ideas (Puche, R. y Puche, C., 2011).

Fundamentación teórica

La resolución de problemas como eje central de la actividad matemática

La resolución de problemas abarca un amplio constructo teórico y conceptual, de acuerdo con su epistemología y pedagogía (Villalobos Fuentes, 2008). Para el desarrollo de esta experiencia, se retoman las perspectivas fundamentadas en los lineamientos curriculares de matemáticas emitidos por el Ministerio de Educación Nacional (1998b), en donde se pone de manifiesto la relevancia de la resolución de problemas debido a que, permite el desarrollo de habilidades relacionadas con la formulación de conjeturas, la generalización y la argumentación, promoviendo en los estudiantes la construcción de heurísticas que integran conceptos y procedimientos propios de la matemática para dar solución a situaciones de la vida cotidiana.

Precisamente, una de las formas más apropiadas para acercar al estudiante a la construcción de conocimientos es trabajar por medio de situaciones problema que involucren el ambiente en el cual se encuentra inmerso el estudiante, lo cual le permitirá indagar, explorar y llegar a resultados propios, a través del desarrollo de habilidades de pensamiento crítico, contrapuesto al trabajo rutinario y monótono de situaciones que carecen de interés para el estudiante, en donde la mayoría de las veces, se le debe indicar el paso a paso de cómo resuelve, creando de esta manera una visión algorítmica del proceso de aprendizaje de la matemática (De Guzmán, 2004).

A propósito, Halmos (1980), expone que resolver problemas es la esencia y el corazón de las matemáticas, en referencia a que sea apreciado como lo más relevante de la actividad matemática, debido a que articula las heurísticas con la naturaleza del pensamiento matemático centradas en mejorar la actitud de los estudiantes hacia su aprendizaje, vislumbrándola como un entramado de saberes que pueden poner en práctica en su diario vivir.

Así mismo, Brosseau (1986), reconoce que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otros problemas. Concibe además la matemática como un conjunto organizado de saberes previos producidos por la cultura.

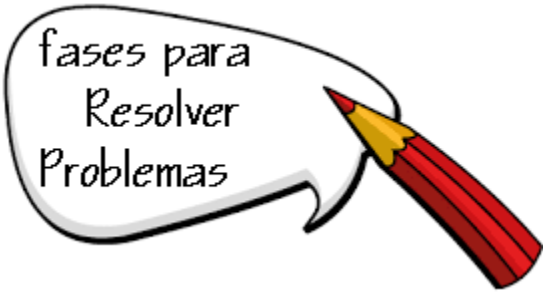
En virtud de ello, la resolución de problemas constituye en el foco transversal del aprendizaje de la matemática por estar implícito en las actividades intelectuales que se derivan de los procesos generales propuestos por los lineamientos curriculares.

Metodología y estrategias en la mediación docente

La resolución de problemas demanda ambientes aprendizaje que permitan a los estudiantes enriquecer su formación, a ser constructores de su propio conocimiento, ayudándoles a enfrentarse de manera acertada ante los diversos retos que surgen en la cotidianidad.

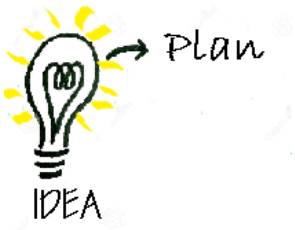
En el desarrollo de la experiencia de aula, se retoman las cuatro etapas de resolución de problemas propuestas por Polya (1965), debido a que en cada una de ellas se expone una serie de preguntas y sugerencias que han de ponerse en juego durante el proceso resolutor.

En el gráfico 1, se desglosa cada una de las etapas.



1. COMPRENDER EL PROBLEMA
Ver claramente lo que se pide.

- ✓ ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Cuáles son los datos?
- ✓ ¿Cuáles son las condiciones?
- ✓ ¿Es suficiente la condición para determinar la incógnita?



2. ELABORAR UN PLAN
Identificar las relaciones que existen entre los diversos elementos.

- ✓ ¿Conoce algún problema relacionado?
- ✓ ¿Puede enunciarse el problema en forma diferente?
- ✓ ¿Ha empleado todos los datos?
- ✓ ¿Ha hecho uso de todas las condiciones?

3. EJECUTAR EL PLAN
Concebir la idea de la solución

- ✓ ¿Los pasos utilizados son correctos?
- ✓ ¿Puede demostrar que la solución es correcta?

4. VISIÓN RETROSPECTIVA
Ningún problema puede considerarse completamente terminado

- ✓ ¿Puede usted verificar el resultado?
- ✓ ¿Puede verificar el razonamiento?
- ✓ ¿Puede obtener el resultado de forma diferente?
- ✓ ¿Puede verlo de golpe?
- ✓ ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Figura 1. Etapas en la resolución de problemas.
Fuente: Polya (1965).

Para verificar la eficacia del método, es importante tomar como referencia situaciones del contexto de los estudiantes, para que vean el sentido y utilidad lo que aprende en la escuela.
A propósito, en los lineamientos curriculares de matemáticas en Colombia, se plantea que:

> El contexto del aprendizaje de las matemáticas es el lugar no sólo físico, sino ante todo sociocultural desde donde se construye sentido y significado para las actividades y los contenidos matemáticos, y, por lo tanto, desde donde se establecen conexiones con la vida cotidiana de los estudiantes y sus familias, con las demás actividades de la institución educativa y, en particular, con las demás ciencias y con otros ámbitos de las matemáticas mismas (MEN, 2006, p. 70).

Al aprovechar el contexto del estudiante, se recrean ambientes de aprendizajes favorables, que conducen a la participación activa de los estudiantes y a la construcción de saberes significativos.

Con la puesta en marcha de cada una de las etapas, se generan escenarios de aprendizaje significativos que dan "sentido al saber matemático que den sentido al saber matemático pretendido, procurar su "devolución" a los estudiantes creando las condiciones para que éstos se involucren en una verdadera actividad matemática de resolución, comunicación y validación de las soluciones" (D'Amore, Font y Díaz, 2007, p. 53).

Metodología

La investigación cualitativa conlleva a mejorar el quehacer pedagógico fundamentado en la innovación y construcción de conocimientos que aporten al aprendizaje de los estudiantes y se generen cambios al interior del aula, con el fin de establecer una dinámica que contribuye a salvar los obstáculos y a comprender los hechos que tiene lugar en la vida cotidiana de la escuela; donde se generen procesos proactivos, a partir de situaciones problemáticas que propicien la creatividad y favorezcan el desarrollo de competencias en el saber hacer (McMillan y Schumacher, 2005).

El enfoque bajo el cual se sustenta la propuesta es la investigación acción, dado a que es un paradigma que permite al maestro comportarse como aprendiz de largo alcance, como aprendiz de por vida, ya que le enseña cómo aprender a aprender, cómo comprender la estructura de su propia práctica y cómo transformar permanente y sistemáticamente su práctica pedagógica.

A partir de la reflexión de la praxis pedagógica, surgen cuestionamiento alrededor de: ¿cómo lograr que los estudiantes de la Institución Educativa Técnica Santa Cruz de Motavita mejoren en el proceso de resolución de problemas?, interrogante que llevó a plantear una propuesta metodológica que gira en torno a la resolución de problemas, temática considerada como el punto álgido de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, al ser concebida por el estudiante como una asignatura rutinaria y mecánica, donde se repiten procesos algorítmicos sin tener una comprensión.

El contexto de la investigación

La propuesta se viene adelantando en la Institución Educativa Técnica Santa Cruz, ubicada en el municipio de Motavita (Boyacá, Colombia). Esta institución presta sus servicios en su mayoría, a niños y niñas de estrato 1 y 2 de veredas aledañas. La unidad de trabajo está constituida por 20 estudiantes del grado cuarto de primaria. Son niños alegres, dinámicos y espontáneos, dispuestos a colaborar en la ejecución de cada una de las actividades planeadas.

Fases de la experiencia de Aula

De acuerdo a lo propuesto por Kemmis y Mctaggart (1988), la sistematización de la experiencia de aula, se viene adelantando a partir de las siguientes fases:

- *Planeación***:** orientada al diseño y elaboración de instrumentos, con el fin de identificar las fortalezas y debilidades frente a la competencia de resolución de problemas. Asimismo, se enfoca a confirmar los resultados obtenidos en las pruebas saber. En cuanto al diseño de las pruebas diagnósticas y las secuencias didácticas, se retoman los estándares de competencias para el grado cuarto, a partir de situaciones del contexto de los estudiantes y el uso de materiales concretos.

- *Acción –Observación:* esta fase comprende la puesta en marcha de la experiencia de aula. Donde se evidencia cada una de las heurísticas que se desprenden del método de Polya (1965), en el proceso de resolución de problemas.

- *Reflexión:* se enmarca en el análisis e interpretación de las situaciones que se generan y la resignificación frente a la instrucción de la enseñanza de la matemática.

Resultados

Los resultados de la fase de la prueba diagnóstica expuestos en la figura 2, permiten evidenciar que cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones problemas donde no se hace evidente el camino que se debe seguir para su solución, implica dificultad para llevar una secuencia lógica e inferir los posibles resultados que se puedan derivar de ello.

Es así como, la mayoría de los estudiantes se enfocan a efectuar operaciones sin tener en cuenta las condiciones planteadas o si los datos son suficientes para determinar la incógnita, lo que lleva a pensar que, no entienden lo que leen, es decir, hay falencias en la comprensión lectora, lo que limita el análisis y la interpretación, generando bloqueos a la hora de poner en juego sus capacidades cognitivas, conceptuales, aptitudinales, y procedimentales.

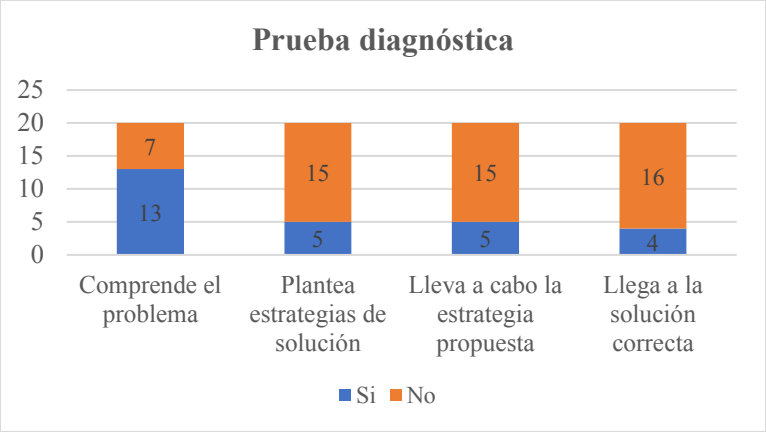


Figura 2. Resultados prueba diagnóstica

Como intervención pedagógica, se lleva cabo la sistematización de la experiencia de aula, mediante el desarrollo de secuencias didácticas que reflejan la aplicación de las cuatro etapas de la resolución de problemas propuestas por Polya (1965), en ambientes de aprendizaje que abarcan la práctica instruccional, el trabajo colaborativo, discusión y extrapolación de ideas.

En la figura 3, se exponen las etapas en las que se enmarca cada una de las actividades planteadas.

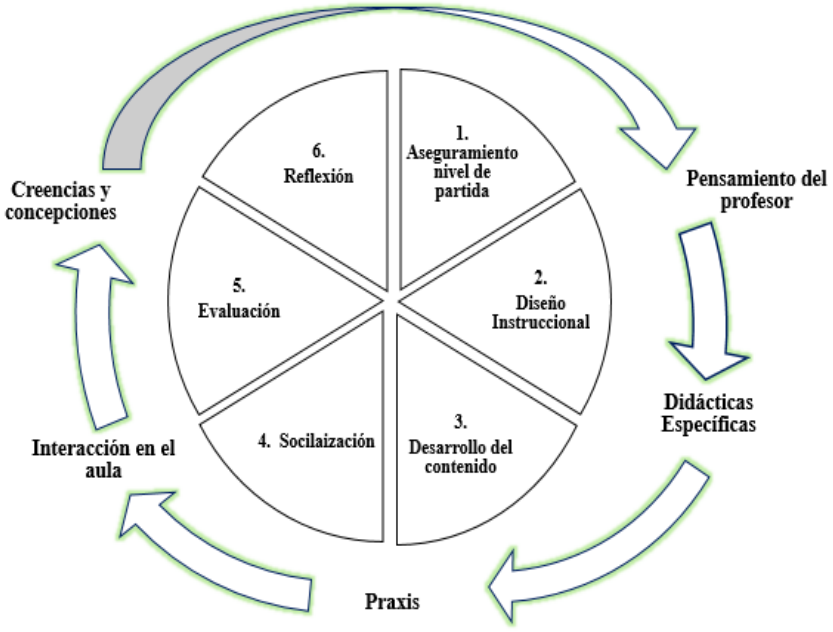


Figura 3. Fases sistematización experiencia de aula

- Aseguramiento del nivel de partida: esta fase comprende un pequeño repaso del contenido visto anteriormente, con el propósito de identificar las fortalezas y debilidades de los estudiantes en cuanto a temáticas ya abordadas y que deben ser articuladas con las actividades propuestas.

- Diseño Instruccional: comprende la designación de reglas y roles, que garantizan la participación activa dentro del proceso de interacción que se da entre los pares y el docente. Dentro de las estrategias instruccionales utilizadas se encuentran las siguientes: la pregunta, definiciones y explicaciones, analogías, ejemplos, el contexto, entre otros. El docente como mediador que transforma la materia en representaciones comprensibles a los estudiantes, debe poseer un amplio conocimiento de la didáctica específica para guiar de manera pertinente su práctica como un servicio a otros. (Bolívar, 2005).

- Desarrollo del contenido: refiere a la puesta en marcha de saberes, habilidades, estrategias en la interpretación y ejecución de la guía de trabajo propuesta, por parte de los estudiantes con la orientación del docente. Donde se visibiliza la confrontación de ideas como parte vital para el aprendizaje de la matemática.

- Socialización: en este espacio los estudiantes tienen la oportunidad de expresar los aciertos y logros alcanzados, así como, los conceptos que se deben retomar para que haya claridad sobre la temática abordada. Desde el momento de la socialización, el estudiante adquiere confianza a través del uso de la matemática con sentido lógico, marcada por la interacción que encuentra en su grupo y que le permite comprender que ésta no es una serie de recetas, sino un sistema que favorece el desarrollo de habilidades para explorar, razonar y usar diferentes estrategias en la solución de situaciones problemas no rutinarias.

- Evaluación: vista como un proceso de validación, que permite confrontar la adquisición de competencias, conocimientos y destrezas con la movilización y puesta en marcha en la ejecución de actividades propias de la matematización. Es así como, en esta fase, el estudiante da cuenta de sus logros y lo que le hace falta para mejorar en su proceso de aprendizaje. La evaluación se convierte en una fuente de información valiosa

para el docente, puesto que le permite reorganizar la estructura curricular con miras a crear alternativas conducentes a lograr la comprensión de los estudiantes.

- Reflexión: aparece como un elemento dinámico que está presente en todas las fases del proceso de enseñanza, donde se visibilizan las dificultades, los obstáculos e inquietudes que tienen los estudiantes respecto a las fases para resolver problemas. Al contemplar la reflexión en la acción como punto crucial en la comprensión, adaptación y enseñanza de la matemática, posibilita al profesor a integrar de manera holística los componentes del currículo, con el fin de conectar el saber hacer en contexto, identificando la utilidad y aplicación del conocimiento en la vida cotidiana de los estudiantes, configurándose como un conocimiento particular, propio de la profesión docente, integrando la praxis y la reflexión sobre la misma, proveyendo de sentido a la teoría, a través de la mediación entre el saber del maestro y la movilización de su discurso y su quehacer en el aula.

La reflexión sobre la acción, se manifiesta como una oportunidad para dotar de significado a la resolución de problemas derivadas de la experiencia de los estudiantes; esto le permitirá al docente adquirir confianza y práctica en el uso la matemática, adoptar esas experiencias y llevarlas a sus prácticas reales de enseñanza (Llinares, 1995).

La estrategia consiste en plantearle al estudiante, antes de empezar la explicación del tema a enseñar, un problema matemático que se identifique con sus intereses y su contexto cotidiano, el cual debe ser resuelto en grupos de 3 estudiantes, usando los conocimientos previos y sus experiencias.

En este proceso los estudiantes obtienen sus propias conjeturas con respecto al problema formulado, proponen estrategias de solución y las planifican por etapas, mediante la distribución de tareas en el equipo, resaltando la formación de líderes y el espíritu emprendedor de los estudiantes, finalmente socializan el trabajo realizado ante todo el grupo.

Esta secuencia didáctica conlleva a establecer una pequeña dialéctica entre los procesos de indagación y argumentación lógica, en el intercambio permanente de procesos cognitivos y metacognitivos de los estudiantes, donde el propósito fundamental del planteamiento y resolución de problemas se enfoca en la elaboración de conjeturas, construcción de lenguajes y modelos, llevar a cabo un proceso de comprobación, refutación y luego intercambiarlos con otros, competencias que generalmente no son potenciadas en el modelo de enseñanza tradicional.

Entre los problemas abordados en el aula de clase, se trae a colación la siguiente situación:

Ignacio es un empresario reconocido en el municipio de Motativa, él tiene dos minas de carbón ubicadas en la vereda de carbonera, diariamente extrae 8 toneladas de carbón de cada mina, la cantidad de mineros que trabajan para él es de 12. El precio de venta de cada tonelada es de $200.000, a cada trabajador le paga $850.000 mensuales, además debe cancelar los recibos de luz por valor de $198.000 y de agua por $60.000. Con base en esta información, determine:

¿Cuáles son los ingresos de Ignacio, si mantiene la misma producción de carbón durante 20 días?

Esta situación es muy cercana a la vida cotidiana del estudiante, lo que conlleva a que centre su interés y atención en la búsqueda de alternativas de solución a partir de la interacción social, la negociación de nuevos significados, el desarrollo de nuevas estrategias y la construcción de nuevo conocimiento, acciones que repercuten positivamente en su aprendizaje (D'Amore, Didáctica de la Matemática., 2006).

Esta experiencia de aula busca transformar la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula de clase, a partir del reconocimiento, por parte de los estudiantes, de sus habilidades de abstracción, análisis y síntesis; así como fomentar la autonomía y el aprender a aprender (De Guzmán, 2004).

Conclusiones

Los resultados de esta experiencia de aula han sido placenteros, en la medida que el estudiante adquiere distintas habilidades, valores, destrezas y actitudes que contribuyen de manera significativa en su desarrollo integral.

La sistematización de la experiencia de aula da pie a la planificación de situaciones problémicas basadas en la contextualización del entorno del estudiante, la utilización de metodologías de enseñanza que visibilicen el rol protagónico del estudiante, el diseño de recursos didácticos que orienten la organización, la gestión y control de las estrategias para resolver un problema y la creación de espacios de interacción social y de reflexión alrededor de los procesos de producción y validación del conocimiento.

Cuando el docente contextualiza su práctica pedagógica y propone problemas de situaciones cotidianas del estudiante, está logrando llamar la atención, generar sentido y aplicabilidad a lo aprendido (D'Amore, 2006), con el fin de despertar el pensamiento crítico desde las realidades del discente obteniendo aprendizajes significativos. Por ende, su papel se ve redimensionado, pasando de la persona que enseña, a aquella que propicia y conduce a situaciones de aprendizaje enriquecedoras y con un sentido y aplicabilidad en un contexto real.

Es importante conceptuar la resolución de problemas como un proceso complejo que requiere de heurísticas situadas en el contexto de los estudiantes para que generar conciencia de su relevancia y trascendencia en la evolución del mundo que le rodea.

La experiencia de aula contribuyó en el mejoramiento del proceso de enseñanza y aprendizaje en la práctica educativa desde una perspectiva más emancipadora, donde el estudiante fue el protagonista de su aprendizaje y el docente aportó de manera comprometida ambientes propicios tendientes al quehacer pedagógico, a través del interés y la motivación, así mismo, favoreció la aprehensión de conceptos matemáticos, el sentido crítico y la formación integral e intrapersonal de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1-39.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática.* Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., Font, V., & Díaz, J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

De Guzmán, M. (2004). *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas.* Madrid: Anaya.

Farias, D., & Velásquez, F. R. (2010). Estrategias lúdicas para la enseñanza de la matemática en estudiantes que inician estudios superiores. *Paradígma, 32*(2), 53-64.

Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly, 87*(7), 517-524.

Iriarte, A. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona próxima. Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte*(15), 2-21.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción.* Barcelona: Laertes.

Llinares, S. (1995). Del conocimiento sobre la enseñanza para el profesor al conocimiento del profesor sobre la enseñanza: implicaciones en la formación de profesores de matemáticas. (B.-D. Badajoz, Ed.) *La formación del profesorado de Ciencias y Matemáticas en España y Portugal*, 153-172.

McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (Quinta ed.). Madrid: Pearson.

Ministerio de Educación Nacional, (. (1998b). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional, (. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden.* (MEN, Ed.) Bogotá.

Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Wiley.

Puche, R. C., & Puche, R. C. (2011). *Didáctica de las matemáticas: de preescolar a secundaria.* (Primera ed.). Bogotá: Ecoe Edciones.

Santos Trigo, M. (2007). Mathematical problem solving: an evolving research and practice domain. *ZDM The International Journal on Mathematics Education,, 39*(5-6), 523-536. doi:10.1007/s11858-007-0057-9

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* California: Academic Press.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *Revista Ema, 6*(1), 3-26.

Villalobos Fuentes, X. (2008). Resolución de Problemas Matemáticos: Un cambio Epistemológico con Resultados Metodológicos. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 6*(3), 36-58.

IMPLEMENTACIÓN DE MATERIALES DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN PRIMER CICLO DE PRIMARIA

IMPLEMENTING DIDACTIC MATERIALS FOR MATHEMATICS TEACHING IN THE FIRST- PRIMARY SCHOOL CYCLE

Carolina del Rosario Carrillo García, Itzel Hernández Nava
Universidad Autónoma de Zacatecas (México).
cgcarolin@hotmail.com, itzel_11_nov@hotmail.com

Resumen
En esta comunicación se presentan los resultados obtenidos de experiencias de enseñanza de las matemáticas mediante el uso de materiales didácticos concretos en un contexto extraescolar. Se abordaron conceptos matemáticos contenidos en el modelo educativo mexicano en primero y segundo grado de primaria (6-8 años). Los materiales fueron diseñados o adaptados e implementados por una profesora de matemáticas, en formación, en el marco del "Taller de Matemáticas para Niños" impartido en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, en México. Como resultado de esta experiencia, se presentan observaciones y reflexiones sobre el uso de estos recursos.

Palabras clave: materiales didácticos, enseñanza de las matemáticas, motivación, comprensión

Abstract
This report presents the results obtained from mathematics teaching experiences by using specific teaching materials in an extracurricular context. It tackles concepts contained in primary school first-and-second grade (aged 6-8) of the Mexican educational model. The materials were designed or adapted and implemented by an in-training mathematics teacher, within the framework of the "Mathematics Workshop for Children" taught at the Mathematics Academic Unit of the Autonomous University of Zacatecas, in Mexico. As a result of this experience, observations and reflections on the use of these resources are presented.

Key words: didactic materials, mathematics teaching, motivation, understanding

Introducción

Las matemáticas suelen ser una asignatura que provoca animadversión en la mayoría de los estudiantes. Uno de los motivos de ello puede ser la falta de comprensión de los conceptos estudiados, los cuales aumentan en grado de complejidad y abstracción conforme se avanza en el sistema educativo. Esto, a su vez, puede generar malos resultados en la materia y provocar que su mayor o menor presencia sea un criterio en consideración cuando los estudiantes deben elegir una carrera universitaria.

Los resultados en evaluaciones de logro académico permiten ver que este bajo desempeño en matemáticas es observable no sólo en las aulas sino también en los resultados de pruebas estandarizadas. Según Soto y Lera (2017, p. 9) "Los resultados de la Evaluación Nacional del Logro Académico (ENLACE) nos dicen que el 63.7 por ciento de los estudiantes de bachillerato tienen conocimientos insuficientes en matemáticas". En este mismo tenor, Novelo, Herrera, Díaz y Salinas (2007, p. 4) reportan que "En el área de matemáticas el promedio de estudiantes mexicanos evaluado alcanzó un puntaje de 413, menor que la media estandarizada de la OCDE que es de 494".

Pero ¿Por qué se tienen estos resultados (y las consecuentes sensaciones)? ¿Siempre ha sido así? Ímaz (1987) describe un fenómeno denominado "Mathematical Anxiety", según él poco estudiado en México en ese momento, y se puede agregar que aún en la actualidad. Al respecto, afirma:

> Por regla general, los niños, antes de ingresar al sistema escolarizado, de manera espontánea se sienten atraídos hacia muchos elementos que forman parte del cuerpo de la matemática (figuras geométricas, números y su manipulación, etc.), dicha atracción suele permanecer sólo en los primeros años de su educación primaria, para cuando ese niño se ha convertido en adulto, su solo enfrentamiento a un problema simple de aritmética puede sacarlo totalmente de quicio, invalidando y frenando todo intento razonable de acercamiento al problema. (Ímaz, 1987, p. 269).

Es posible apreciar que este rechazo hacia las matemáticas no suele presentarse en los niveles iniciales; algo pasa en el recorrido de los estudiantes en su vida académica que produce un cambio. Por tanto, se requiere observar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde los niveles básicos, tratando de identificar aquellos momentos que potencian sentimientos negativos hacia el tema o hacia él mismo como estudiante.

Cabe advertir que esto no es un fenómeno exclusivo de México, tal como lo declara el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) refiriéndose a sus estudiantes: "presentan dificultades en las áreas de Castellano y Matemáticas específicamente en la habilidad para resolver problemas (Prueba saber, 2010) observándose, dificultades en la comprensión lectora, análisis y resolución de problemas matemáticos"; se afirma también que no es un caso aislado de Colombia sino que se repite en toda América latina. (Durán y Bolaño, 2013, p. 39).

¿Qué se puede hacer para enfrentar estos problemas en el aprendizaje de las matemáticas? Si se parte de que la falta de comprensión es un factor que repercute en la actitud de los estudiantes hacia las matemáticas, entonces se debe trabajar para favorecer su comprensión. Por lo tanto, una respuesta tentativa se puede vislumbrar cuando Arrieta (1998) afirma que:

> El material [didáctico] facilita la comprensión y la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, favorece la visualización, la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática, convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento. (p. 107).

Se puede ver en los materiales didácticos una propuesta potencial para atender la presentación de los conceptos matemáticos, favoreciendo la comprensión.

Es por estos motivos, los materiales didácticos parecieron una buena opción para implementar en el aula de matemáticas dada la coincidencia de que ofrecen numerosas características que se necesitan para atraer la atención de los alumnos y disminuir la animadversión que suele causar la materia, así como para facilitar el paso de lo concreto a lo abstracto. Atendiendo la hipótesis de Ímaz respecto a la pérdida de atracción inicial, es que se decide observar en el nivel básico.

Marco teórico

Materiales didácticos

Basta hacer una búsqueda rápida para darse cuenta de que no existe una definición única de Materiales didácticos. Para este trabajo se convino adoptar la definición de materiales didácticos dada por Alsina, Burgués y Fortuny (1988): "Bajo la palabra 'material' se agrupan todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que puedan ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje" (p. 13). Esta definición se percibe inclusiva tanto en la consideración de aquello que se puede admitir como material como en las actividades que se contemplan, así como los momentos en que se considera su empleo.

Clasificaciones de los materiales

Una de las clasificaciones más reconocidas de los materiales didácticos se da al observar su origen, dividiéndose en dos grandes rubros:

- *Material estructurado*. - El material que fue creado con fines educativos.
- *Material no estructurado*. - Es cualquier objeto que se utiliza para enseñar pero no fue diseñado ni creado para la enseñanza.

Cascallana (1988, p. 24).

Considerar otros aspectos como su utilidad, su formato, su contenido matemático, el momento en el que se usa (introducir, reforzar o evaluar un tema), condice a diferentes clasificaciones. Según García, en la educación se pueden encontrar:

- *Materiales Impresos*: Son los más antiguos y más utilizados por los maestros. Entre ellos están los libros, revistas, periódico, etc.
- *Materiales Gráficos*: Mapas, Carteles, trípticos, etc.
- *Materiales Mixtos*: En estos podrían entrar las Tic´s.
- *Materiales Auditivos*: Las grabadoras, cd´s, música, etc.

(García, 2009, p. 5).

Características de los materiales didácticos

Guerrero (2009, p. 2) enlista las principales características que debe tener un material didáctico:

- *Facilidad de uso*. Si es controlable o no por los profesores y alumnos, si necesita personal especializado,...;
- *Uso individual o colectivo*. Si se puede utilizar a nivel individual, pequeño grupo, gran grupo;
- *Versatilidad*. Adaptación a diversos contextos: entornos, estrategias didácticas, alumnos;
- *Abiertos*, permitiendo la modificación de los contenidos a tratar;
- Que *promuevan el uso de otros materiales* (fichas, diccionarios...) y la realización de actividades complementarias (individuales y en grupo cooperativo);
- *Proporcionar información*. Prácticamente todos los medios didácticos proporcionan explícitamente información: libros, videos, programas informáticos...;

- *Capacidad de motivación*. Para motivar al alumno/A, los materiales deben despertar y mantener la curiosidad y el interés hacia su utilización, sin provocar ansiedad y evitando que los elementos lúdicos interfieran negativamente en los aprendizajes.

Funciones de los materiales didácticos

Otro tema de importancia en los materiales didácticos es la función que tiene cada material didáctico ya que un material puede funcionar para diferentes momentos de la enseñanza y o podrían servir para ciertos niveles y para otros no.

- *Innovación*. Cada nuevo tipo de materiales plantea una nueva forma de innovación. En unas ocasiones provoca que cambie el proceso, en otras refuerza la situación existente;
- *Motivación*. Se trata de acercar el aprendizaje a los intereses de los niños y de contextualizarlo social y culturalmente, superando así el verbalismo como única vía;
- *Estructuración de la realidad*. Al ser los materiales mediadores de la realidad, el hecho de utilizar distintos medios facilita el contacto con distintas realidades, así como distintas visiones y aspectos de las mismas;
- *Facilitadora de la acción didáctica*. Los materiales facilitan la organización de las experiencias de aprendizaje, actuando como guías, no sólo en cuanto nos ponen en contacto con los contenidos, sino también en cuanto que requieren la realización de un trabajo con el propio medio;
- *Formativa*. Los distintos medios permiten y provocan la aparición y expresión de emociones, informaciones y valores que transmiten diversas modalidades de relación, cooperación o comunicación.

Guerrero (2009, p. 3).

Comprensión y motivación

Como se ha visto, los materiales didácticos pueden ser utilizados como motivadores en la educación y ayudar a que los alumnos comprendan mejor un tema. Pero, ¿qué es la comprensión?, ¿qué es la motivación? Sobre estos temas se ahondará en este apartado.
La comprensión, según Perkins y Blythe (2006), es "poder realizar una gama de actividades que requieren pensamiento respecto a un tema; por ejemplo, explicarlo, encontrar evidencia y ejemplos, generalizarlo, aplicarlo, presentar analogías y representarlo de una manera nueva" (p. 3).
Al analizar esta definición, se puede notar que la mayoría de las actividades que se suelen poner en el aula no están hechas para la comprensión sino para la repetición de un tema. Esto es un problema ya que en realidad no se logra que los alumnos comprendan las matemáticas, sino que aprendan algoritmos sin entender por qué; y no se motiva la curiosidad del alumno. Una de las funciones de los materiales didácticos es la "estructuración de la realidad", lo cual favorece la comprensión de conceptos matemáticos.

Respecto a la motivación, este escrito partió señalando la animadversión de la mayoría de los alumnos hacia la clase de matemáticas. Con base en las investigaciones precedentes, la motivación tiene un papel importante en el aprendizaje. La motivación académica es el contrario de la indiferencia, es decir, un estudiante está motivado académicamente cuando no permanece indiferente ante cualquier aprendizaje nuevo o tarea que se le proponga, o dicho de otra forma, cuando más indiferente se muestra un estudiante, menos motivado está. (Alsina y Domingo, 2007, p. 24).

Hay varios tipos de motivación, las dos más destacadas según Anaya-Durand y Anaya-Huerta (2010) son:

- *Motivación intrínseca*: Se puede definir como aquella que procede del propio sujeto, que está bajo su control y tiene capacidad para auto-reforzarse.
- *Motivación extrínseca*: Se define como aquella que procede de fuera y que conduce a la ejecución de la tarea.

Los materiales didácticos pertenecen a la segunda categoría, la motivación extrínseca, dado que son algo externo que conduce a la actividad. Sin embargo, una postura optimista podría considerarlos como un primer paso en el acercamiento hacia las matemáticas. Es decir, gracias a las características de los materiales didácticos se les puede ofrecer a los alumnos una manera distinta de aprender que les ayuda a visualizar conceptos que por su nivel de abstracción suelen ser poco atractivos, difíciles de comprender. Esto permite promover y mantener su interés por el tema y de esa forma facilita estructurar e interiorizar los conceptos deseados.

Pero los materiales didácticos no sólo cumplen función motivadora y atractiva en los alumnos, sino que también el uso de materiales didácticos modifica el proceso cognitivo que el estudiante lleva a cabo al estar aprendiendo, tal como declara Muñoz (2014, p. 20) "La visualización de relaciones entre objetos matemáticos permite establecer con mayor claridad conceptos abstractos que de otra manera serían más complejos".

En síntesis, podemos destacar que el enseñar con materiales didácticos puede promover que los alumnos aprendan de una manera divertida y a la vez desarrollen la creatividad, es decir, el pensamiento lógico-matemático y la creatividad al mismo tiempo. Pero cabe advertir, como señalan Manrique y Gallego (2012): los materiales didácticos son una buena alternativa para la enseñanza-aprendizaje, pero dependen de la implementación que el docente haga.

Metodología

Se analizó el plan de estudios de primaria del Modelo Educativo 2018 con el fin de identificar los conceptos que se abordan en cada grado escolar (primero y segundo) y los aprendizajes esperados correspondientes.

En primer grado se abordan los temas siguientes:

- Número,
- Adición y sustracción,
- Figuras y cuerpos geométricos,
- Magnitudes y medidas y
- Estadística.
-

Para segundo grado de primaria, además de los temas antes mencionados, se encontró:

- Multiplicación y división.
-

Aunque primero y segundo grado comparten temas, es natural que en segundo grado los conceptos se aborden con mayor complejidad. Por ejemplo: en el caso del concepto "número" en primer grado los aprendizajes esperados incluyen que los estudiantes sepan los números del 1 al 100 y en segundo grado se espera que sepan los números del 1 al 1000. De manera similar, en los demás temas.

Contexto de la aplicación

A continuación, se describen, a grandes rasgos, las características de "Taller de Matemáticas para Niños" en el cual se aplicaron los materiales, esto con el fin de contextualizar al lector, así como para mostrar la adecuación de este taller como el ambiente propicio para llevar a cabo este trabajo.

Es un taller extraescolar que se imparte jueves y viernes en las instalaciones de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas. En él se dan clases de matemáticas para los niveles de primaria, segundaria y bachillerato, clases de física para los niveles de secundaria y bachillerato; además de preparación de olimpiada para los alumnos destacados. Los instructores que ofrecen clases ahí suelen ser estudiantes

de la Licenciatura en Matemáticas y suelen ser 2 instructores por grupo, pero esto puede variar según sea el número de alumnos inscritos.

Desde el perfil de Facebook de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ es descrito como un "Taller de difusión creativa de las matemáticas. Dirigido a niños de Primaria, Secundaria y Bachillerato, con el objetivo de acercarlos a las matemáticas de manera lúdica, divertida". Planteado en estos términos, se consideró que los materiales didácticos eran una buena opción para cumplir con los objetivos del taller, claramente relacionados con los objetivos de esta investigación. Por lo que se pidieron los permisos correspondientes con las autoridades educativas a cargo de la realización del taller.

Las planeaciones

Manrique y Gallego (2012) afirman que los materiales didácticos son una buena alternativa para la enseñanza-aprendizaje, pero dependen de la implementación que el docente haga. Ante ello, se hizo una búsqueda de propuestas de enseñanza para cada concepto matemático, se diseñaron o adaptaron materiales para enseñar o reforzar el concepto en cuestión, y se consideraron aspectos del Taller, tales como el número de alumnos y el hecho de que las clases no se imparten diariamente. Posteriormente, se realizó una planeación para cada material en la que se incluyó:

- ✓ Nombre de la actividad,
- ✓ Público al que va dirigido,
- ✓ Objetivo,
- ✓ Justificación,
- ✓ Tema a enseñar,
- ✓ Aprendizajes esperados,
- ✓ Introducción al tema (justificación, importancia, historia, errores o dificultades en su enseñanza),
- ✓ Materiales necesarios para elaborar el material,
- ✓ Foto del material didáctico,
- ✓ Descripción de la actividad,
- ✓ Preguntas guía, que promuevan la interacción con los niños,
- ✓ Tiempo estimado para la aplicación de la actividad y
- ✓ Observaciones.

La aplicación tuvo como objetivo la validación de los diseños; es decir, el observar ventajas y desventajas en torno a la implementación de actividades las actividades diseñadas, las cuales implican el uso del material didáctico.

1er grado

En el grupo de primero de primaria se trabajó con 22 alumnos y estaba a cargo de dos instructoras, al turnarse la responsabilidad de guiar las actividades, la aplicación de los materiales didácticos se hacía cada 15 días. Entraban a las sesiones, en calidad de observadoras, una investigadora del área de Matemática Educativa y una profesora en servicio de un Colegio Montessori. Al final de las sesiones, recibía una retroalimentación de ambas sobre los aspectos que habían ido bien y aquellos que podía mejorar, los cuales complementaban las observaciones realizadas durante la implementación. En total, se aplicaron 8 actividades en 8 sesiones.

2º grado

En el caso de segundo de primaria el grupo estuvo conformado por 38 alumnos; al ser un grupo numeroso, desde la organización del taller se asignaron 3 instructores para impartir las clases. Esto hizo que la forma de trabajar fuera reconsiderada. Las aplicaciones de los materiales se planearon para cada 3 semanas. A raíz de ello, la dinámica de

las actividades también se modificó. Las actividades de la primera sesión se plantearon de manera grupal (para un mejor manejo del grupo), y a partir de la retroalimentación de ese día se decidió realizar las actividades a manera de rally, poniendo 3 bases, 1 a cargo de cada instructor.

Se llevaron a cabo 2 rallys y se aplicaron las siguientes actividades:

• Primer rally: Tablas reborujadas, boliche matemático y tangram.
• Segundo rally: Carrera de colores, repartiendo pizza y repartiendo aprendemos a dividir.

En cada uno de los rallys se organizó el espacio con tres estaciones o áreas de trabajo en los que un tutor del taller era responsable de guiar la actividad. Los niños iniciaban en una estación y tenían que dirigirse a otra cuando se les indicaba, y así hasta haber pasado por las tres estaciones. En total, se aplicaron 7 actividades en 3 sesiones

Al ser éste un primer acercamiento hacia la práctica como docente, muchos aspectos fueron novedosos. Para rescatar las impresiones de la experimentación, posterior a la aplicación, en el periodo de agosto-diciembre, se realizaba una reflexión en torno a tres preguntas respecto a la aplicación: ¿Qué me gustó?, ¿Qué no me gustó? Y ¿Qué cambiaría? Esta reflexión permitió una retroalimentación personal sobre lo experimentado en el taller.

Resultados

A continuación, se presentan los resultados de la aplicación de dichas planeaciones. Éstos se dividieron en: dificultades encontradas las aplicaciones, observaciones relacionadas con la motivación y la comprensión de los niños del taller y, retomando la idea de validación de las actividades propuestas, se presentan finalmente algunas consideraciones sobre la implementación y el diseño.

Dificultades encontradas en las aplicaciones:

- *Falta de familiarización con los dígitos*: Algunos alumnos de primer grado no conocían cómo se escribían los números.
- *Memorización del orden en que se pronuncian los números, pero no de la forma en que se escriben*: En ocasiones, los estudiantes eran capaces de "recitar" los números, pero no hacían una asociación entre el nombre del número y su representación escrita.
- *Escritura reflejada de algunos números*: Los alumnos escribían los números reflejados, los casos más recurrentes observados en la aplicación fueron los números 2, 5, 6 y 9. Asimismo, se detectó un niño que además de los números, escribía algunas letras de su nombre reflejadas.
- *Confusión en el cambio de decena*: Al decir la serie numérica del 1 al 100, los alumnos se confundían al momento de hacer el cambio de decena.
- *Confusión con el valor posicional*: Al escribir las sumas, los alumnos tenían dificultad al ordenar las cifras, es decir, escribían las centenas con las decenas y al intentar hacer la suma obtenían mal el resultado. Además, tenían dificultad para convertir estas unidades, por ejemplo: no eran capaces de decir cuánto eran 8 centenas en unidades.
- *Dificultad al memorizar las tablas*: A los alumnos se les dificultaba memorizar las tablas, para ayudar a la memorización solían cantar canciones o recitarlas de corrido, lo cual ayudaba. Sin embargo, al preguntarlas en un orden diferente al establecido, se les dificultaba terminar la actividad. El material de las "Tablas reborujadas" (Figura 1) ayudó a fomentar el interés y el repaso de este aprendizaje.

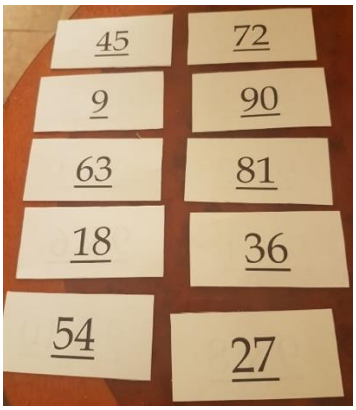


Figura 1. Tablas reborujadas

- *Complicación al identificar las partes de una división*: Al resolver una división con el material didáctico los alumnos no identificaban qué significaba cada parte de la división. No asociaban términos como dividendo, divisor, cociente y residuo en una división. Sin embargo, con el material los alumnos pudieron comprender que el residuo es lo que sobra, el cociente era el resultado, el dividendo era lo que se tenía que dividir y el divisor era el número de niños entre los que se dividía el material.
- *Familiarización con las figuras prototipo*: Al aplicar los materiales para enseñar figuras geométricas se pudo observar que los alumnos tenían conocimiento previo de las figuras geométricas, es decir, sabían el nombre y características como el número de lados. Esto facilitó las actividades que involucraban estos conceptos. Sin embargo, es de señalar que también ya, a esta temprana edad, tenían figuras prototipo asociadas a las figuras utilizadas, tales como el triángulo y el cuadrado con bases horizontales, por ejemplo.

Motivación

La motivación fue uno de los aspectos señalados en el planteamiento del problema y en el marco referencial como parte del interés de llevar a cabo este trabajo. Pudieron identificarse varios momentos que favorecieron la motivación en los estudiantes.

- *Contextos conocidos o familiares*. Se aplicó un material llamado "la tiendita matemática" (Figura 2) en el cual los alumnos tenían que comprar, con dinero de juguete, cosas que suelen haber en una tienda. En el caso particular de la actividad con la tiendita, fue sorprendente ver cómo los niños podían hacer operaciones aritméticas con dinero de juguete que no habían podido hacer al planteárselas con las cuentas cotidianas. Esto podría deberse a que ellos realizan actividades de compra en las cooperativas de sus escuelas (así lo manifestaron).

Figura 2. La tiendita matemática

- *Ambiente de competencia*. Para aplicar algunos materiales se realizaron actividades que implicaban competencia (tanto por las actividades, como por la participación y por tiempo) y se observó que esto motivó a los alumnos para realizar las actividades de forma correcta y rápida para poder ganar.

Figura 3. Carrera de colores

- *Actividades dinámicas*: El hecho de que las actividades no implicaran estar sentados y escribiendo, sino, corriendo alrededor del salón y resolvieran actividades sin necesidad de usar libreta y lápiz motivaba a los alumnos a realizar la actividad.
- *Ambiente lúdico*. Los alumnos trabajaron más a gusto con el material tangible que con operaciones escritas en la libreta. Algunos materiales fueron juegos o adaptaciones de juegos, otros tenían reglas que eran similares a las que suelen usarse al jugar en equipos.
- *Gusto por colorear*: Los alumnos disfrutaban las actividades que implicaban colorear, ellos mismos las solicitaban. Se les entregaron mandalas y aunque ésta fue una actividad complementaria (no se hizo planeación para implementarla, pero sirvió para completar el tiempo de la sesión), se aprovechó para explicar nociones de simetría.

Figura 4. Mándalas coloreadas por los niños

- *Premios*: Al final de la actividad se otorgaban premios (como útiles escolares) al equipo que hubiera logrado la correcta resolución de las actividades y de forma más rápida. Esto hacía que los estudiantes mostraran interés en realizar las actividades.

Comprensión

- *Elección del momento adecuado*. Consideramos importante aplicar el material en el momento adecuado para que realmente se pueda llegar a una comprensión del concepto en cuestión. Al aplicar el material (Figura 5) para introducir el concepto de multiplicación varios alumnos ya se sabían las tablas, les resultó tedioso usar el material y preferían resolver los problemas por memorización de las tablas; por otro lado, para los alumnos que aún no se sabían las tablas el material fue de gran ayuda para resolver los problemas.

- En el caso de los niños que manifestaron que era aburrido distribuir frijoles representando los resultados de la multiplicación, se les hizo énfasis en que el material servía para comprender qué representa multiplicar pero que por ello era importante que memorizaran las tablas no quedarse en la fase del material didáctico. También se les mostró como una ventaja que al saber las tablas no tendrían que hacer actividades de suma abreviada para obtener resultados.

Figura 5. Material utilizado para representar la multiplicación

- *Descubrimiento de propiedades*: Al utilizar materiales didácticos los alumnos lograron descubrir propiedades de la multiplicación y de la división como la propiedad conmutativa del producto y propiedad del neutro en la división, esto con el uso del material didáctico de la Figura 5.
- *Favorecer otro tipo de actividades mentales*. Es de resaltar que en algunas actividades se realizaron las operaciones sin anotar las cuentas, lo cual favoreció la agilidad mental.
  Se distinguieron procesos cognitivos diferentes necesarios para actividades que en primera instancia podrían parecer similares y que se dirigen hacia los mismos aprendizajes esperados.

Consideraciones sobre la implementación y diseño

- *Se requieren actividades complementarias* que permitan un mejor manejo del tiempo y orden en las actividades. Algunos niños terminaban antes las tareas y se tenía que esperar a que todos acabaran para continuar con la planeación.
- *Repensar las indicaciones*. Se solicitó poner flechitas y eso hizo que los niños se distrajeran más tiempo, dada la meticulosidad de su diseño de flechas. Hubiera sido mejor pedirles que usaran una línea para unir los números.

- *Tener las actividades con antelación*. Tuvimos unas copias en el momento de iniciar que eran de baja calidad y no se apreciaban los números.
- *Considerar el lugar apropiado para el desarrollo de las actividades*. La aplicación de las actividades a manera de rally fue posible por el espacio que disponíamos para ello. Sin embargo, algunas actividades planteadas en este trabajo no serían posibles considerando un aula regulas, sino más bien para el patio de juegos.
- *La organización grupal* permitió mayor orden al trabajar con los niños y promovió el respeto por reglas. Sin embargo, somos conscientes de que esto fue posible debido a que éramos cuatro responsables en las sesiones.
- Consideramos que para un profesor de aula podría ser complicado realizar de manera solitaria algunas de las actividades presentadas. Pero podría valer la pena *promover el trabajo con colegas de academia*, ya que cuando los alumnos fueron organizados en equipos ayudó a que se conocieran mejor y tuvieran una mejor relación con sus compañeros.

Conclusiones

Se pudo constatar el interés generado, la motivación y concentración en la actividad. Asimismo, se pudo percibir que los alumnos aprenden jugando con los materiales didácticos y sin darse cuenta de que están inmersos en una actividad didáctica.

Es importante que el maestro experimente y valide por él mismo el material previo a su aplicación para evitar errores que los alumnos puedan cometer o confusiones que el material podría provocar, así como para verificar la correcta funcionalidad del material y evitar contratiempos a la hora de la aplicación de la actividad.
Es deseable conocer a los estudiantes tanto de manera diagnóstica como para seleccionar las actividades que les sean atractivas y saber cuándo es el momento adecuado para implementar algún material.

Al hacer uso de materiales didácticos para el proceso de enseñanza- aprendizaje de un tema es recomendable dar las instrucciones de la actividad antes de brindarles el material a los alumnos, y proporcionárselos cuando haya quedado claro lo que se tiene que hacer; esto con la finalidad de que el material no se vuelva un distractor a la hora de que el profesor esté dando las instrucciones de lo que tienen que hacer los estudiantes.

Si bien es cierto que la aplicación de materiales puede guiarse con base en los conocimientos y experiencia del profesor, como afirman Manrique y Gallego (2012) se deben además utilizar “metodologías lúdicas y ricas en aprendizajes prácticos para los niños, logran fortalecer su desarrollo, propiciar esquemas cognitivos más significativos, ejercitar la inteligencia y estimular los sentidos” (p. 104). Dicha metodología debe estar bien sustentada, validada y guiada de manera sistemática y reflexiva; además de que, si se realiza en un ámbito escolar, considerar el plano oficial. En este caso las actividades se diseñaron tomando en cuenta fuentes de investigación y de divulgación y con base en los aprendizajes esperados que marca el Modelo Educativo 2018.

La planeación de una actividad que involucra materiales didácticos suele demandar más tiempo de elaboración y la aplicación de la actividad con estos recursos puede requerir más tiempo que una actividad que no implica el uso de éstos.

Dado el contexto de aplicación extraescolar, para poder observar la comprensión de los alumnos se les preguntaba ¿qué habían comprendido de lo visto en clase?, ¿en dónde podíamos aplicar esos conceptos? Se pudo observar que algunos alumnos explicaban a otros alumnos que aún no lograban comprender los conceptos, lo cual también permite afirmar que los alumnos comprendieron (basado en la definición de comprensión dada por Perkyns).

Referencias bibliográficas

Alsina, A., & Domingo, M. (2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. Suma, (56), 23-31.

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J.M. (1988). Materiales para construir la geometría. Madrid, Síntesis.

Anaya-Durand, A., & C. Anaya-Huertas (2010). ¿Motivar para aprobar o para aprender? Estrategias de motivación del aprendizaje para los estudiantes. Tecnología, Ciencia, Educación, 25 (1), 5-14.

Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. Revista de Psicodidáctica, 5, 107-114.

Cascallana, M. (1988). Iniciación de la Matemática. Materiales y recursos didácticos. Madrid, Santillana.

Durán, G., & Bolaño, O. (2013). Resolución de Problemas Matemáticos: Un Problema de comprensión en el Quinto Grado de Básica Primaria de la Institución Educativa Thelma Rosa Arévalo del Municipio Zona Bananera del Magdalena, Colombia. Recuperado el 6 de julio del 2019 de file:///C:/Users/ihernande/AppData/Local/Packages/Microsoft.MicrosoftEdge_8wekyb3d8bbwe/TempState/Downloads/Dialnet-ResolucionDeProblemasMatematicos-4714332%20(1).pdf

García, O. (2009). Clasificación de los materiales didácticos. Recuperado el 25 de mayo del 2019 de https://www.dropbox.com/home/IDHFM/Formato%20APA?preview=ESTILO+APA_DME-Cinvestav_2012.pdf

Guerrero, A. (2009). Los materiales didácticos en el aula. Revista Digital para Profesionales de la Enseñanza, (5), 1-6.

Ímaz, C. (1987). ¿Qué es la Matemática Educativa? En E. Bonilla, O. Figueras y F. Hitt (Eds.), Publicaciones Centroamericanas, 1(1), 267-272.

Manrique, A. & Gallego, A. (2012). El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos. Revista Colombiana de Ciencias Sociales, 4(1), 102-108.

Muñoz, C. (2014). Los materiales en el aprendizaje de las matemáticas. (Tesis de licenciatura inédita). Facultad de Letras y de la Educación, Universidad de la Rioja. Logroño, España.

Novelo, S., Herrera, S., Díaz, J., & Salinas, H. (2007). Temor a las matemáticas: causa y efecto. Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa, 2, 1-15. ISSN 2007 – 8412.

Padrón, C. L. (2009). Desarrollo de materiales didácticos desde una perspectiva basada en modelos. (Tesis de Doctorado inédita). Escuela Politécnica Superior, Universidad Carlos III de Madrid. Madrid, España.

Perkins, D., & Blythe, T. (2006) Putting Understanding up-front. Educational Leadership, 51(5), 1994, p. 4-7. Trad. Español Agustí, P. y Barrera, M. X. 1997. Ante Todo, la Comprensión. Curso Enseñanza para la Comprensión para la Construcción de Ciudadanía. Recuperado el 25 de Mayo del 2019 en http://zipaquira-cundinamarca.gov.co/apc-aa

Soto, E., & Lera, J. (2017). Influencia de las matemáticas en la deserción escolar; estudio del CBTIS 236 y la Preparatoria Antonio Repiso (prevención por medio de la lúdica). Actas del II Congreso sobre Desigualdad Social, Económica y Educativa en el Siglo XXI. Disponible en: http://www.eumed.net/libros-gratis/actas/2017/desigualdad/index.htm

CONCIENCIA AMBIENTAL A TRAVÉS DE LA ESTADÍSTICA

ENVIRONMENTAL AWARENESS THROUGH STATISTICS

Adriana Lizeth Vega Carrillo, Wilmer Esneider Lozada Bonilla, Milady Astrid Guerrero Velasco
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Universidad ECCI (Colombia).
alvegac@upn.edu.co, wilmere.lozadab@ecci.edu.co, maguerrerov@upn.edu.co

Resumen
Dada la importancia de promover la compresión de la realidad social en cuanto a las problemáticas ambientales que nos aquejan hoy día y la necesidad de favorecer procesos estadísticos que beneficien la toma de decisiones para solucionar problemas del entorno, se diseña e implementa una propuesta de enseñanza interdisciplinar a estudiantes de 9° grado de una institución educativa distrital de Bogotá, basada en el análisis del estado del agua del río Fucha (que se encuentra en los alrededores del colegio), específicamente parámetros de calidad de agua como pH y turbiedad para identificar la alteración de sus propiedades físico químicas y así determinar su contribución a problemáticas ambientales, con la finalidad de favorecer procesos de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales y Estadística.

Palabras clave: estadística, ciencias naturales, ciencias sociales, educación ambiental, calidad de agua

Abstract
Given the importance of promoting the understanding of social reality in terms of environmental problems that afflict us today and the need to promote statistical processes that benefit decision making to solve environmental problems, a proposal is designed and implemented for interdisciplinary teaching to 9th- grade students of a district educational institution in Bogota. This study is based on the analysis of the water status of the Fucha river (which is located around the school), specifically, water quality parameters such as pH and turbidity, to identify the changes of its physical and chemical properties and thus, to determine its contribution to environmental problems, in order to promote processes of Natural Sciences, Social Sciences and Statistics.

Key words: statistics, natural sciences, social sciences, environmental education, water quality

Introducción

Documentos que orientan el currículo escolar colombiano, como los propuestos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998,2006), mencionan la necesidad de hacer un trabajo interdisciplinar en el aula de clase, que permita que los estudiantes aborden temas globales, como por ejemplo, la contaminación a los recursos naturales, de manera que ellos puedan analizar su realidad ambiental y lograr aprendizajes significativos en Ciencias (Naturales y Sociales), que de acuerdo con el MEN (2006) se desarrollan al involucrar otras áreas del saber, una de ellas, la Estadística, para la recolección, organización y análisis de datos que den lugar a la toma de decisiones, con el fin de que los estudiantes generen una compresión del entorno y actúen en pro de este. Sin embargo, el MEN (2006) menciona que, en muchos casos, la realidad de la educación es que el proceso de enseñanza y aprendizaje se da de forma segmentada y separando las disciplinas.

Así como se evidencia la necesidad de un trabajo interdisciplinario que dé lugar a un proceso de enseñanza a aprendizaje con sentido y significado para los estudiantes, también es preciso promover en ellos la compresión de la realidad social en cuanto a las problemáticas ambientales que los rodean y favorecer procesos estadísticos que beneficien la toma de decisiones para solucionar problemas del entorno, puesto que de acuerdo con Mallows (1998), en la enseñanza de la estadística las personas aprenden métodos y procedimientos, pero no reconocen su aplicación ni cómo interpretar los resultados.

Es por ello, que con el objetivo de generar una interacción entre tres disciplinas y dar lugar a un enriquecimiento recíproco en el que se desarrollen algunas competencias de Matemáticas (desde el pensamiento aleatorio y sistemas de datos), Ciencias Naturales y Ciencias Sociales, se diseña una propuesta de aula para estudiantes de 9° grado, basada en el estudio de la situación ambiental del entorno (contaminación del río Fucha), desde la medición y análisis de parámetros de calidad de agua (pH y turbiedad), para así identificar alteraciones físico químicas y asociarlas con algunas problemáticas ambientales que dicha situación genera, de forma que dé lugar en los estudiantes, por medio de un estudio estadístico, la preocupación, cuidado y respeto por los recursos del medio ambiente y la compresión de la importancia de su cuidado, para lograr la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre, que para este caso, ayuden el medio ambiente.

Marco referencial

De acuerdo con el MEN (1998c), para el desarrollo del pensamiento aleatorio, docentes y estudiantes deben participar en procesos de investigación que estudien fenómenos físicos, para explorar nociones estadísticas y generar soluciones a problemas. Además, tras la búsqueda de respuestas a preguntas cotidianas es necesaria la recolección, organización y análisis de datos, promoviendo la toma de decisiones. Por lo que el MEN (2006), indica que el desarrollo competencias matemáticas avanza a través de problemas significativos y de interés para los estudiantes, los cuales tienen lugar en otras ciencias como por ejemplo Biología, Medicina, Economía, Antropología, etc.; ciencias que permiten a los estudiantes usar la Estadística para el reconocimiento, descripción y estudio de problemas de la vida real, siendo estas, de acuerdo con el MEN (2006) una oportunidad para trabajar en la formación de ciudadanos. En ese sentido, desde las Ciencias Naturales y Sociales se estudia la relación del sujeto con su cultura, dicha relación, de acuerdo con la UNESCO (1990) es analizada por la Educación Ambiental cuyo fin es desarrollar habilidades y actitudes necesarias para entender las relaciones y así tomar decisiones en situaciones reales en pro de la calidad ambiental, dando así lugar al desarrollo de la formación de ciudadanos y con ello al diálogo y debate sobre situaciones reales presentes en el entorno; la comprensión de la necesidad del cuidado del medio ambiente y la participación en iniciativas que permitan contribuir a ese cuidado, y con esto, aportando también a los fines de la educación propuestos por la Ley de General de Educación (Ley 115, 1994).

Así, en los Lineamientos Curriculares de Ciencias Sociales (MEN, 1998b), se manifiesta que la Educación y las Ciencias Sociales tienen el deber de propiciar ambientes de reflexión y análisis crítico que ayuden a los jóvenes a

afrontar las problemáticas de hoy y del futuro. Adicionalmente, el MEN (1998b) refiere que algunos objetivos de las Ciencias Sociales para la educación básica y media son apoyar la comprensión de la realidad para hacer cambios en la sociedad o formar individuos que participen activamente en la sociedad. Dicho documento también menciona como un propósito de las Ciencias Sociales, abordar elementos de historia, geografía y filosofía, pero además trabajar en un sentido transversal aspectos de la Cátedra de Estudios Afrocolombianos, la Constitución Política y Democracia, la Educación Ética y Valores Humanos, la Educación Ambiental y la Educación en Estilos de Vida Saludable, pues esto contribuye en la formación de un ciudadano crítico y activo en la sociedad. De manera que, para esta investigación, se destaca la necesidad de trabajar aspectos relacionados con la Educación Ambiental, la cual, de acuerdo con el MEN (2006), está directamente relacionada con las Ciencias Naturales.

De esta manera, en cuanto a la Educación ambiental, Flores (2010) dice que la Educación Ambiental "proporciona elementos teóricos y metodológicos para analizar la orientación, alcances y limitaciones de las relaciones del ser humano con el medio ambiente" (p. 81). Esta relación se debe hacer de manera que promueva la participación crítica y reflexiva de los sujetos. Adicionalmente, la Unesco (1990) plantea que la Educación Ambiental es:

> el proceso de reconocer valores y clarificar conceptos con el objeto de desarrollar habilidades y actitudes necesarias para comprender y apreciar las interrelaciones entre el hombre, su cultura y sus entornos biofísicos. […] incluye también la práctica en la toma de decisiones y la autoformulación de un código de conducta sobre los problemas que se relacionan con la calidad ambiental (Unesco, 1990, p. 36).

En este sentido y de acuerdo con dicha Organización, el reto de la Educación Ambiental es contribuir a la solución de problemáticas ambientales, para lo cual es necesario proponer actividades con objetivos centrados en ayudar a los estudiantes en acciones como adquirir conciencia y preocupación hacia el medio ambiente, comprender el medio ambiente y las interrelaciones entre este y el hombre.

Así, en los Lineamientos Curriculares en Ciencias Naturales y Educación Ambiental (MEN 1998a), se propone como objetivos, el desarrollo de capacidades tales como, el suscitar a un desarrollo de concientización ambiental en el estudiante permitiéndole participar de forma activa y responsable en actividades de su alcance, enfocadas a la preservación y cuidado de los recursos naturales.

Como se ha podido evidenciar hasta el momento, los Lineamientos Curriculares separan las Ciencias Sociales de las Ciencias Naturales y la Educación Ambiental, sin embargo, estas tres áreas se relacionan y tiene varios elementos en común, como por ejemplo la importancia de comprender el entorno, y las relaciones entre los elementos que lo componen, para contribuir a la formación de ciudadanos críticos y activos. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006) menciona que las ciencias ocupan un papel importante en el desarrollo de las sociedades, pues aspectos relevantes como el transporte, las comunicaciones, la toma de decisiones y la educación, están dados por los avances científicos y tecnológicos, por lo que resulta necesario para cualquier persona contar con el conocimiento y las herramientas necesarias para comprender su entorno y así aportar a su evolución, desde un postura crítica y ética.

Adicionalmente, el MEN (2006) menciona que la educación en Ciencias debe aportar a la formación de ciudadanos, pues a través de ésta, se contribuye, entre otras competencias, a que el estudiante desarrolle la capacidad de formular preguntas, recolectar información, debatir, y buscar soluciones a los problemas que atañen a su comunidad.

De esta manera, atendiendo a los referentes curriculares descritos anteriormente y a la necesidad de trabajar de forma interdisciplinaria para favorecer diferentes procesos, se resalta que desde las Ciencias Naturales y las Ciencias Sociales se contribuye a la identificación y reflexión de problemáticas del entorno real, de manera que esto aporta herramientas para poder actuar en favor de dichas problemáticas y contribuir al bienestar social, ayudando de esta manera a la formación de un ciudadano crítico capaz de actuar en y para la sociedad. En este sentido, resulta ser

que las problemáticas ambientales son de carácter social y para tratar de buscar una solución a las mismas o ayudar en su atenuación, es necesario comprenderlas y reflexionar sobre sus implicaciones, para lo cual se requiere de un trabajo interdisciplinar que permita una compresión de ellas. Por lo tanto, las problemáticas ambientales a trabajar en este proyecto serán abordadas desde la Educación Estadística, las Ciencias Naturales y las Ciencias Sociales, por lo que, se realiza una selección de estándares básicos de competencias en Matemáticas (pensamiento aleatorio y sistemas de datos), Ciencias Naturales y Ciencias Sociales (Tabla 1), y objetivos de la educación Ambiental (Tabla 2), para que se conviertan en objetivos de la secuencia de intervención a diseñar para estudiantes de 9° grado.

Tabla 1. Estándares básicos de competencias en Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales

COMPETENCIAS BÁSICAS DE COMPETENCIAS (OCTAVO A NOVENO)		
Matemáticas	**Ciencias naturales**	**Ciencias sociales**
- Reconozco cómo diferentes maneras de presentación de información pueden originar distintas interpretaciones. - Interpreto analítica y críticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas). - Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría. - Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo o de razón). - Resuelvo y formulo problemas seleccionando información relevante en conjuntos de datos provenientes de fuentes diversas. (prensa, revistas, televisión, experimentos, consultas, entrevistas) (p. 87).	- Realizo mediciones con instrumentos adecuados a las características y magnitudes de los objetos de estudio y las expreso en las unidades correspondientes. - Utilizo las matemáticas como herramienta para modelar, analizar y presentar datos. - Comunico el proceso de indagación y los resultados, utilizando gráficas, tablas, ecuaciones aritméticas y algebraicas. - Describo procesos físicos y químicos de la contaminación atmosférica. - Respeto y cuido los seres vivos y los objetos de mi entorno (p. 138-139).	- Recolecto y registro la información que obtengo de diferentes fuentes. - Tomo notas de las fuentes estudiadas; clasifico, organizo, comparo y archivo la información obtenida. - Utilizo mapas, cuadros, tablas, gráficas y cálculos estadísticos para analizar información. - Asumo una posición crítica frente al deterioro del medio ambiente y participo en su conservación (p. 128-129).

Fuente. Ministerio de educación nacional (MEN, 2006)

Tabla 2. Objetivos de la educación ambiental

OBJETIVOS DE LA EDUCACIÓN AMBIENTAL
- Adquirir una conciencia y una preocupación hacia el medio ambiente total. - Desarrollar una comprensión básica del medio ambiente total y de las interrelaciones entre el hombre y el medio ambiente. - Desarrollar las habilidades necesarias para investigar el medio ambiente total y para identificar y resolver los problemas ambientales. - Adquirir valores sociales y sólidos sentimientos de interés por el medio ambiente. - Lograr la motivación necesaria para participar activamente en el progreso y la protección ambiental. - Descubrir enfoques alternativos y tomar decisiones informadas acerca del medio ambiente basándose en los factores ecológicos, políticos económicos y estéticos. - Proporcionar a los estudiantes las oportunidades para que se comprometan activamente, a todo nivel, en el trabajo en favor de la resolución de los problemas ambientales (Unesco, 1990, p. 37).

Fuente. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco, 1990)

Metodología

Partiendo del hecho que el objetivo de la enseñanza de la Estadística gira en torno al análisis e interpretación de datos, y no a la habilidad de recordar fórmulas y hacer cálculos, tal como lo plantea MEN (2006) y de la necesidad de generar conciencia de la realidad del entorno (contaminación del agua del río Fucha y sus consecuencias ambientales), se desarrolla un proceso (Figura 1) en el que se toman algunas muestras de agua en diferentes tramos del Río, para que este sea el escenario que permita que los estudiantes recolecten datos (medición de pH y turbiedad) por medio del uso multiparámetro y el turbidímetro, se realiza un estudio estadístico, se plantean conclusiones sobre el estado del cuerpo de agua estudiado y sus posibles causas para posteriormente establecer relación con problemas ambientales como la mala calidad del aire y finalmente, se proponen acciones para mitigar el estado del río Fucha.

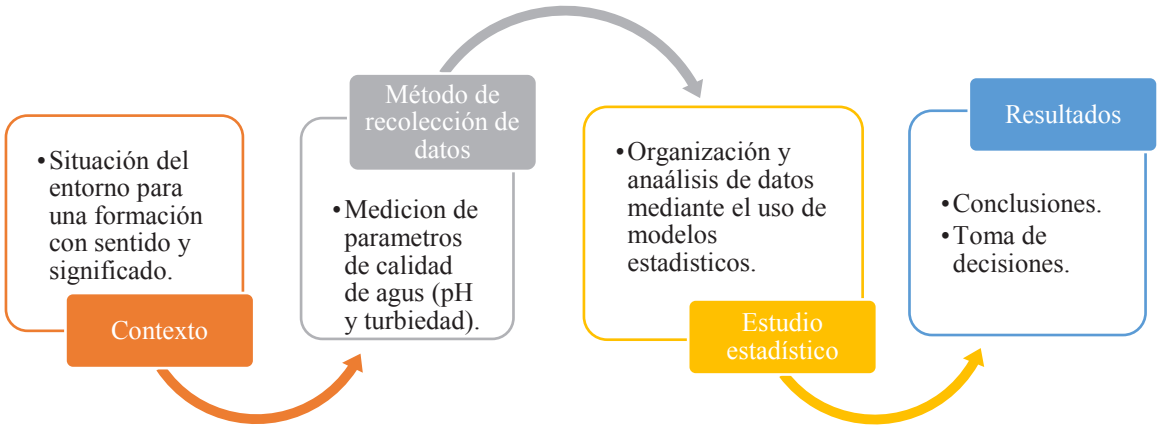


Figura 1. Proceso metodológico
Fuente. Creación propia

Resultados

Por medio de la propuesta implementada, en la que los estudiantes por medio de un análisis estadístico de los datos recolectados sobre pH y turbiedad de muestras de agua del río Fucha comprenden problemáticas ambientales, se evidencia, tras el análisis de la información recolectada por medio de grabaciones y los trabajos de los estudiantes, el desarrollo de algunas competencias de Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias sociales.

En este sentido, el primer trabajo a realizar con los estudiantes es determinar el tema significativo y de interés trabajar, para lo cual, los estudiantes, teniendo en cuenta la necesidad de comprender la realidad ambiental y sus consecuencias, mencionan la pertinencia de analizar componentes del agua (Imagen 1), para determinar la calidad de esta. Dentro de los componentes mencionados por los estudiantes, se encuentra el pH, residuos sólidos, el color y químicos, de manera que revisando los parámetros de calidad de agua establecidos por la Organización Mundial de la Salud (OMS), se establece que se va a realizar la medición del pH y la turbiedad.

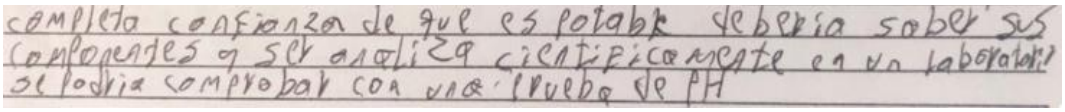


Imagen 1. Idea sobre tema a trabajar
Fuente. Producción de los estudiantes

De acuerdo con lo propuesto por lo estudiantes, es necesario tomar muestras de agua de diferentes tramos del Río Fucha, de manera que, haciendo uso de los instrumentos adecuados (multiparámetro y el turbidímetro), cada grupo de trabajo realiza la medición del pH y la turbiedad de una de las 11 muestras llevadas por el docente (Imagen 2) y además realizan el registro de los datos obtenidos (Imagen 3).

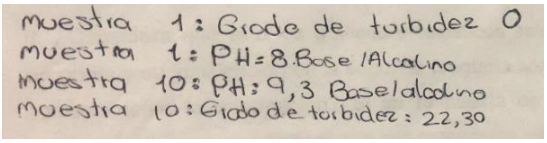


Imagen 3. Registro de datos
Fuente. Producción de los estudiantes

Imagen 2. Medición de pH y turbiedad
Fuente. Estudiantes

A partir de la medición de los parámetros de calidad de agua establecidos, de cada una de las muestras de agua, los estudiantes utilizan tablas (Imagen 4)

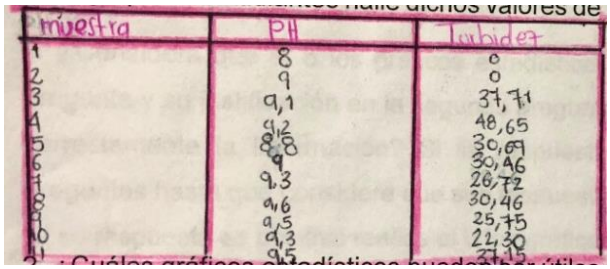


Imagen 4. Organización de datos en tablas
Fuente. Producción de los estudiantes

para organizar los datos correspondientes al pH y la turbiedad de las muestras de agua del río Fucha. Adicionalmente durante este trabajo, surge el cuestionamiento sobre las unidades de medida de cada parámetro de manera que son socializados por el docente.

Con lo anterior se logra evidenciar competencias de Matemáticas, Ciencias Naturales y Ciencias Sociales ya que los estudiantes tras recolectar datos (correspondientes a una situación real de su entorno relacionada con el estado del agua del Río que se encuentra alrededor de su colegio) haciendo uso de los instrumentos de medición correspondientes y reconociendo las unidades de medida de cada parámetro (pH y turbiedad), registran los resultados y los organizan por medio de modelos estadísticos.

Partiendo de la organización de los datos por medio de tablas, los estudiantes representan los datos de pH y turbiedad por medio del histograma o diagrama de líneas, los cuales se utilizan para las variables cuantitativas continuas, mostrando que utilizan gráficos estadísticos acordes al tipo de variable (Imagen 5),

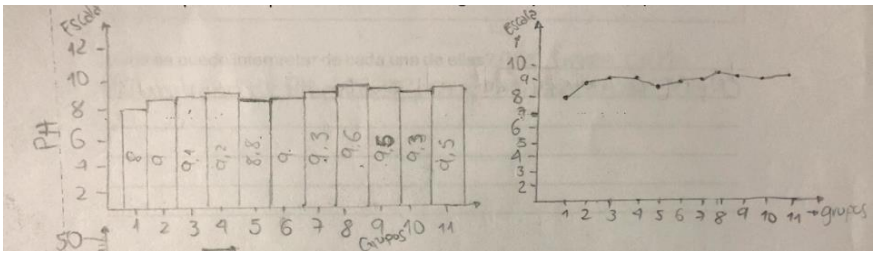


Imagen 5. Uso de modelos estadísticos de acuerdo con el tipo de variable
Fuente. Producción de los estudiantes

y por tanto que utilizan adecuadamente modelos estadísticos para presentar información relacionada con los niveles de cada uno de los parámetros estudiados.

Los estudiantes hallan de forma adecuada las medidas de tendencia central correspondientes a los 11 datos de pH y turbiedad respectivamente (Imagen 6),

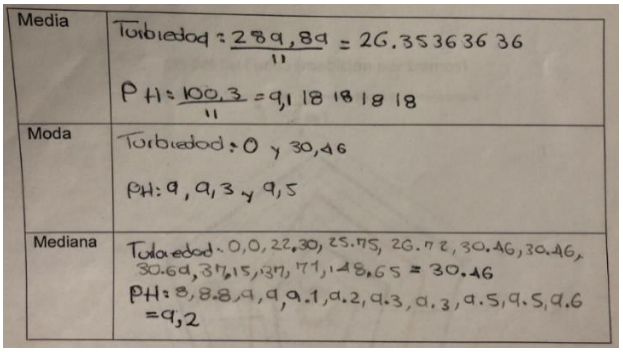


Imagen 6. Medidas de tendencia central
Fuente. Producción de los estudiantes

y por medio de diálogos entre ellos, se logra evidenciar e identificar que dichos resultados no son representativos para toda la cuenca del río Fucha, sino que, por el contrario, manifiestan por ejemplo, que para que el promedio tuviese sentido, pero se tendrían que tomar algunas muestras de agua del mismo tramo para hacer la medición de algún parámetro y ahí si se pueda hacer el promedio y concluir entorno al agua de ese tramo. Adicionalmente añaden que el valor de pH puede variar si se toman muestras de agua en tramos o sectores donde haya presencia de fábricas,

pues estas contaminan el río de diferentes químicos, alterando el pH de manera que tome valores que represente un estado acido del agua, evidenciándose así una identificación de condiciones que influyen en los resultados de cada parámetro de calidad de agua.

De esta manera, se evidencia que los estudiantes interpretan de acuerdo con el contexto, el significado de cada uno de los datos recolectados, al identificar que el estado del agua no es el mismo a lo largo del Río, y de esta manera logran darse cuenta que no tiene sentido hacer afirmaciones como que el agua del río tiene el mismo pH o que no es apta para el consumo, por lo que afirmar que el promedio de pH del agua del río Fucha es 9,11 (imagen 7), no es válido, pues 9,11 no es un valor que represente el estado del agua de cada uno de los 11 tramos analizados. Esto refleja de que hay una interpretación del significado de las medidas de tendencia central y un cuestionamiento sobre la pertinencia de su aplicación.

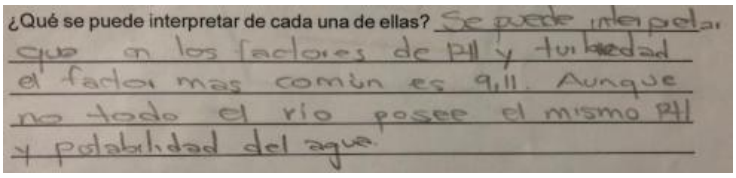


Imagen 7. Pertinencia del promedio de pH
Fuente. Producción de los estudiantes

En cuanto a la dispersión de los datos, los estudiantes, por medio de las gráficas de líneas (Imagen 8), logran identificar que, en comparación con los valores de pH, los valores de turbiedad presentan mayor dispersión, pues se encuentran más alejados y también el tamaño del rango es mayor.

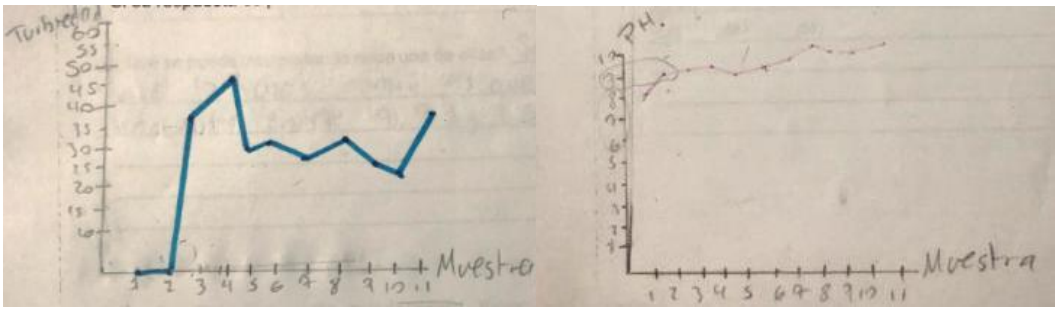


Imagen 8. Recurso para identificar dispersión de los datos
Fuente. Producción de los estudiantes

Los estudiantes, a partir de los datos, interpretan de manera crítica los cambios de valor que presenta el pH y la turbiedad, y los asocian al contexto, afirmando que la contaminación inicia con la urbanización y así con la presencia de ciudadanos y empresas (Imagen 9), reflejando así, una conciencia del estado de alteración del Río y sus causas.

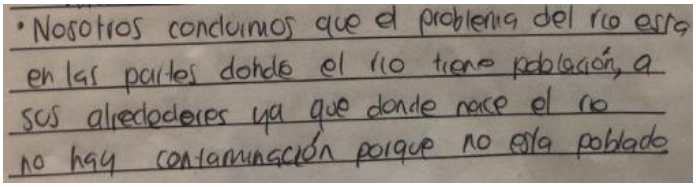


Imagen 9. Identificación del hombre como actor de la contaminación del río Fucha
Fuente. Producción de los estudiantes

Se identifica, por parte de los estudiantes, que la Estadística es importante para hacer un análisis del agua del río Fucha. Además, se puede afirmar, a través de las conclusiones del estudio estadístico, que estas son asociadas con otras áreas del conocimiento, específicamente las Ciencias Naturales y Sociales, al comparar los valores de pH y turbiedad obtenidos, con los valores recomendados por la Resolución 2115 de 2007 sobre Calidad del agua potable y establecer las causas y consecuencias de los cambios observados (Imagen 10).

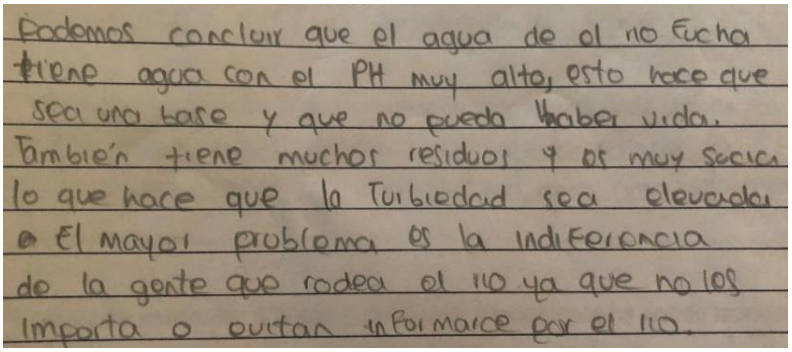


Imagen 10. Causas y consecuencias de las alteraciones de pH y turbiedad del agua del río Fucha
Fuente. Producción de los estudiantes

Es decir, hay un reconocimiento de la contribución directa de los habitantes del sector, en el estado de contaminación del Río, pues con sus acciones ayudan a generar alteraciones de los parámetros de calidad de agua, como por ejemplo el pH, generando así consecuencias como la ausencia de vida en los diferentes tramos del río.

En este sentido, los estudiantes afirman que el agua del río Fucha, a excepción de su nacimiento, no es potable o está contaminada a causa de las acciones del hombre y también por su indiferencia, evidenciándose de esta manera, una conciencia sobre la contribución de la carga contaminante aportada por la sociedad al Río.

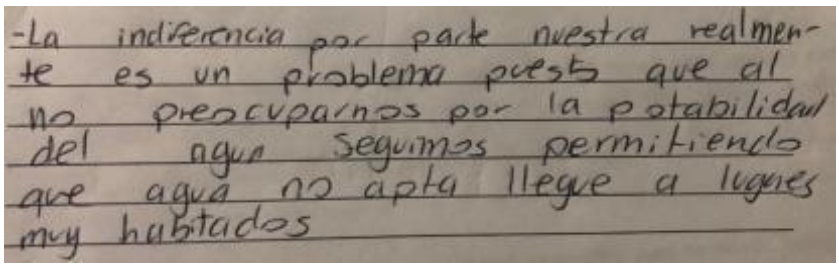
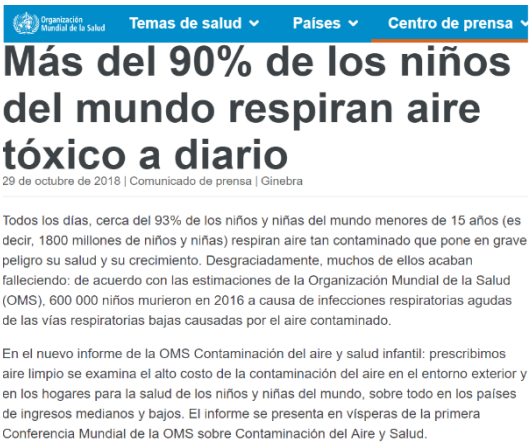


Imagen 11. Medición de pH y turbiedad
Fuente. Producción de los estudiantes

Con base en el análisis realizado y presentado hasta el momento, se trabaja con los estudiantes el reconocimiento de las consecuencias del estado del agua del río Fucha, logrando, por medio del análisis de noticias como la presentada en la Imagen 12, que ellos conozcan y sean conscientes de que cualquier acción que contamine el Río, esta contribuyendo en la expansión de problemáticas ambientales como la contaminación del aire y de otras fuentes hídricas, calentamiento global y daño de la capa de ozono.


Organización Mundial de la Salud Temas de salud Países Centro de prensa

Más del 90% de los niños del mundo respiran aire tóxico a diario

29 de octubre de 2018 | Comunicado de prensa | Ginebra

Todos los días, cerca del 93% de los niños y niñas del mundo menores de 15 años (es decir, 1800 millones de niños y niñas) respiran aire tan contaminado que pone en grave peligro su salud y su crecimiento. Desgraciadamente, muchos de ellos acaban falleciendo: de acuerdo con las estimaciones de la Organización Mundial de la Salud (OMS), 600 000 niños murieron en 2016 a causa de infecciones respiratorias agudas de las vías respiratorias bajas causadas por el aire contaminado.

En el nuevo informe de la OMS Contaminación del aire y salud infantil: prescribimos aire limpio se examina el alto costo de la contaminación del aire en el entorno exterior y en los hogares para la salud de los niños y niñas del mundo, sobre todo en los países de ingresos medianos y bajos. El informe se presenta en vísperas de la primera Conferencia Mundial de la OMS sobre Contaminación del Aire y Salud.

Imagen 12. Noticia sobre consecuencias de la mala calidad del aire
Fuente. Organización mundial de la salud (2018)

Dicho análisis da lugar a que los estudiantes, a partir de sus conocimientos previos, identifiquen razones por las cuales la contaminación del río contribuye a otras problemáticas ambientales. En este sentido, identifican procesos físicos como la evaporación del agua, como causa de la contribución a la mala calidad del aire y al daño de la capa de ozono, además identifican que el agua del río Fucha contamina diferentes fuentes hídricas, como otros ríos, mares y océanos, debido a su carga contaminante, generando así alteración de la biodiversidad, pues se genera la muerte de diferentes especies. Adicionalmente, los estudiantes reconocen, que el río contribuye no solo a problemas ambientales, sino que, además, otros problemas de tipo social, como enfermedades respiratorias debido a los olores nauseabundos que se presentan a menudo, presencia de habitantes de calle e inseguridad.

Finalmente, a partir del reconocimiento logrado del estado del agua del río Fucha a partir del estudio estadístico realizado con dos parámetros de calidad de agua y del análisis de su relación con otras problemáticas ambientales, los estudiantes muestran una preocupación hacia la necesidad de conservar los recursos naturales, al mencionar la necesidad de participar en campañas que permitan concientizar a los demás estudiantes y personas que se encuentran en los alrededores del Río, con el fin de que conozcan la situación, y se detengan las acciones que contribuyen a un grado mayor de contaminación del agua de dicho caudal, y que por el contrario realicen acciones que permitan contribuir en la mitigación de dicho problema ambiental.

Conclusiones

Por medio del trabajo interdisciplinario de la Estadística, las Ciencias Naturales y las Ciencias Sociales, se logra que los estudiantes visualicen la aplicación de la estadística para analizar y comprender su entorno, logrando así el fortalecimiento de procesos de recolección, organización y análisis de datos estadísticos para dar lugar a una comprensión del contexto basada en datos y con ella a una conciencia ambiental y toma de decisiones que permitan posibles estrategias de mitigación y prevención para la conservación del río Fucha.

Adicionalmente, el trabajo con situaciones del entorno de los estudiantes promueve su participación activa mediante diferentes diálogos, debates y reflexiones encaminadas a la compresión de las causas y consecuencias del estado de contaminación del río Fucha y la generación de alternativas de solución que permita contribuir de forma positiva a una mitigación de dicha situación ambiental, evidenciándose así el desencadenamiento por la preocupación y cuidado hacia los recursos naturales.

Referencias bibliográficas

Congreso de Colombia. (8 de febrero de 1994). *Ley general de educación*. [Ley 115 de 1994]. DO: 41.214.

Flores, R. (2010). Educación ambiental: representaciones sociales del uso del agua. *Revista Educación y Desarrollo Social*, 4(1), pp. 78-93.

Mallows, C. (1998). The zeroth problems. *The American Statistician*, 52(1), 1-9.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998a). *Lineamientos Curriculares en Ciencias Naturales y Educación Ambiental*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998b). *Lineamientos Curriculares en Ciencias Sociales*. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998c). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. 1-51. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá, D.C., Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de la Protección Social - Ministerio de Ambiente, Vivienda y Desarrollo Territorial (22 de junio de 2007). Resolución 2115.

Organización Mundial de la Salud. (2018). Más del 90% de los niños del mundo respiran aire tóxico a diario. Recuperado el 27 de junio de 2019 de https://www.who.int/es/news-room/detail/29-10-2018-more-than-90-of-the-world%E2%80%99s-children-breathe-toxic-air-every-day#

Unesco. (1990). *Educación ambiental: módulo para la formación de profesores de ciencias y de supervisores para escuelas secundarias*. Santiago, Chile: Andros S.A.

UN ESTUDIO SOBRE EL APRENDIZAJE DEL PESO COMO MAGNITUD EN NIÑOS DEL PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

A STUDY ON THE LEARNING OF WEIGHT AS MAGNITUDE IN PRIMARY EDUCATION FIRST-CYCLE CHILDREN

Alejandra Anahid Hernández Hernández, Juan Carlos Macías Romero
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).
al_anahid@hotmail.com, jcmacias24@hotmail.com

Resumen
El estudio de las magnitudes y medidas en primaria ha sido considerado difícil tanto para los niños como para los maestros (Chamorro 2003). El objetivo de este trabajo es presentar una actividad que favorece el aprendizaje del peso como magnitud utilizando la balanza como instrumento de medición. La investigación se centra en la comprensión e interpretación de este tópico, apoyándonos en los estudios de Chamorro y de la Teoría de Desarrollo Cognitivo de Bruner. Se presenta el diseño y aplicación de una actividad de aprendizaje, considerando como sujetos de estudio a alumnos de cuatro escuelas primarias de la ciudad de Puebla, empleando una metodología de tipo cualitativo descriptivo. La evaluación se lleva a cabo mediante: la observación, registros anecdóticos, fichas de trabajo y entrevistas a los alumnos. Los resultados proporcionados en cada una de las diferentes sesiones, revelan que, el diseño de este tipo de actividades contribuye a que los alumnos muestren mayor interés y disminuyen las dificultades que se presentan al tratar el tema del peso.

Palabras clave: magnitudes, peso, estudio, aprendizaje

Abstract
The study of magnitudes and measures at primary school has been considered difficult for both, children and teachers (Chamorro 2003). The aim of this work is to present an activity that favors the learning of weight as magnitude using the balance as a measurement instrument. This research is focused on the interpretation and understanding of this topic, based on Chamorro's studies, and Bruner's Theory of Cognitive Development. It shows the design an application of a learning activity, involving students from four primary schools of Puebla City, as subjects of study; and using a qualitative descriptive methodology. The evaluation is carried out by means of observation, anecdotal registers, work records, and interviews to students. The results from the different sessions reveal that this type of activities make the students show greater interest and diminish their difficulties when dealing with the topic related to weight

Key words: magnitudes, weight, study, learning

Introducción

La medida de magnitudes constituye un bloque de contenidos tradicionalmente tratado tanto en la enseñanza Primaria como Secundaria, ninguna reforma del currículo ha dejado fuera este núcleo temático de gran utilidad en la vida práctica de cualquier ciudadano. (Chamorro 2003). Sin embargo, a pesar de la vital importancia que juega el estudio de las magnitudes y medidas la escuela ha dejado atrás parte de esa enseñanza, ya que se considera que este se trata de un conocimiento social (Pizarro 2015).

El tema de magnitudes y medidas, tradicionalmente se ha considerado difícil tanto para los niños como para los maestros (Chamorro 2003), puesto que su práctica docente, en la mayoría de los casos está encaminada a entrenar a los alumnos en la resolución de ejercicios de los manuales escolares, lo que conlleva a una sustitución de saberes, en la que los problemas de medida son sustituidos por problemas exclusivamente de tipo aritmético.

En México, este tema ha prevalecido en diferentes currículos a lo largo de la historia de la educación, tal es el caso del Nuevo Modelo Educativo 2018, que, en específico para estos tópicos aplicados al primer ciclo de educación primaria, hace referencia a los aprendizajes esperados por la Secretaria de Educación Pública (2017) establece:

Estima, compara y ordena longitudes, pesos y capacidades directamente y, en el caso de las longitudes, también con un intermediario" y "Estima, mide, compara y ordena longitudes y distancias, pesos y capacidades, con unidades no convencionales y el metro no graduado, el kilogramo y el litro, respectivamente. (p. 317)

La importancia de la enseñanza de estos temas radica en que son útiles para la vida cotidiana y son conceptos que los van a acompañar a lo largo de su vida, pues al ser enseñados durante los primeros años de educación, se consideran las bases para el proceso de adquisición de otros conocimientos matemáticos.

Aunado a todo lo anteriormente mencionado, es importante sumar la preocupación mostrada por los maestros de nivel primaria, ya que, con las nuevas exigencias curriculares, se ven obligados a considerar nuevas estrategias y planteamiento de los temas y aprendizajes esperados en cada materia; por lo cual los docentes manifiestan preocupación, pues argumentan que es un tema difícil de impartir y no cuentan con variados recursos para enseñarlo a los niños.

Nuestro objetivo consiste en observar de qué forma es más eficiente y significativo trabajar el tema del "peso como magnitud" en primer ciclo de educación primaria. Proponemos hacerlo a través del diseño y evaluación de actividades mediante el uso de la balanza como instrumento de medición para favorecer el nivel de entendimiento en los niños en este tópico.

Marco teórico

La enseñanza de las magnitudes en el Sistema Nacional de Educación comienza desde las edades tempranas y un reflejo de ello lo constituyen los importantes aportes que han realizado diversos autores internacionales. Se destacan: Chamorro (2003), Osorio (2011), Pizarro (2015), entre otros, quienes constituyen puntos de partida para el análisis del diseño y planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido.

De acuerdo con Pizarro (2015), las magnitudes como parte del contenido de las matemáticas es un conocimiento social: la escuela delega parte de la enseñanza de estos contenidos a la sociedad, con la convicción de que los escolares terminan aprendiendo ciertos temas en su entorno familiar o social. La influencia que tiene el contexto extraescolar y escolar en el desarrollo de los contenidos de magnitudes es importante porque en ella surge lo que Osorio (2011) enuncia alrededor de la necesidad de enseñar las magnitudes con aspectos concretos, es decir, en el aula se desarrollan los procesos de estimación invitando a los escolares a estimar.

Por otra parte, Chamorro (2003) considera que hay cuatro obstáculos que dificultan la enseñanza de la medida, todos descansan en la falta de manipulación, que anula la percepción y resume el trabajo al uso de la aritmética.

Esta consideración coincide con los estudios de Bruner (1988) ya que, para él, el aprendizaje en los primeros años de vida se basa en "saber hacer" existiendo una reflexión mínima. Entre los 5 y 7 años se hace importante la reflexión y, por último, durante la adolescencia el pensamiento se hace cada vez más abstracto y dependiente del lenguaje.

A continuación, se muestran los tres modos básicos de representación mental de la realidad, que propone Bruner y a partir de los cuales están diseñadas nuestras actividades. (Tabla 1)

- *Representación Enactiva*: Representación que se basa en la reacción inmediata de la persona a través de la manipulación de objetos.
- *Representación Icónica:* Representación mediante una imagen o esquema espacial.
- *Representación Simbólica:* Representación con un símbolo arbitrario que representa algo abstracto.

Tabla 1. Aprendizaje y representación principal de la realidad (Bruner, 1988)

EDAD	APRENDIZAJE	REPRESENTACIÓN DE LA REALIDAD
De 0 a 4 años	Saber Hacer	*Representación enactiva* Representación icónica Representación simbólica
De 5 a 7 años	Pensamiento Reflexivo	Representación enactiva *Representación icónica* Representación simbólica
De 8 años en adelante	Pensamiento abstracto	Representación enactiva Representación icónica *Representación simbólica*

Estos tres procesos de aprendizaje son paralelos y complementarios, aunque, probablemente, uno de ellos sea más relevante que otro en ciertos periodos de la vida.

Por otra parte, los conocimientos y las habilidades que se forman a partir de la enseñanza de las magnitudes contribuyen a una mejora general del pensamiento, al potenciar el empleo e inversión de estrategias y destrezas propias para la resolución de diversos problemas de la vida cotidiana. En el caso del peso como magnitud, la característica que evaluamos en un objeto para calcularlo es la sensación de ser pesado.

La percepción del peso corre paralela con la de la longitud puesto que ambas nociones son fácilmente asociadas con los seres vivos. El peso de los objetos puede ser sentido directamente. Sosteniendo dos objetos y comparando sus sensaciones tenemos una experiencia sensorial directa. (Godino, Batanero y Roa, 2004, p.643).

Metodología

El desarrollo de este trabajo se realizó basado en un paradigma de tipo interpretativo ya que considera la comprensión e interpretación de las actividades realizadas a partir de la Teoría de Bruner, mediante un estudio de tipo cualitativo, descriptivo, considerando la recolección de datos a través de notas de campo, registros anecdóticos, fotografías, entrevistas y videos. Se trabajó con niños de entre 6 y 7 años de edad, en 4 Instituciones ubicadas en diferentes puntos de la ciudad de Puebla; cuyas características fueron:

Escuela 1. (E1)

Escuela Pública, se trabajó un grupo con un total de 17 alumnos, de los cuales fueron seleccionados 7 de ellos con la finalidad de tener mayor control de datos e información respecto a las actividades realizadas. Además de 4 alumnos de segundo grado.

Escuela 2. (E2)

Escuela Pública, para los fines del presente estudio, se trabajó con una muestra representativa del grupo considerando 12 alumnos de primer grado y 5 alumnos de segundo grado, elegidos por su profesor de clase considerando alumnos de niveles académicos: alto, medio y bajo.

Escuela 3. (E3)

Escuela Privada, se realizó la actividad con el grupo completo el cual tiene 12 alumnos, sin embargo, no fue posible trabajar con alumnos de segundo grado.

Escuela 4. (E4)

Escuela Privada, se trabajó con la mitad del grupo del primer grado, 12 alumnos y para la actividad con alumnos de segundo grado se seleccionaron a 3 alumnas.

Instrumentos de investigación o recolección de datos

Se diseñaron dos cuestionarios de tipo abierto que se aplicaron a los profesores de los grupos con los que se trabajó. Esto con la finalidad de indagar de manera general sobre la forma en que abordan este tópico dentro del aula.

Rodríguez, Gil y García (1999) explican que el realizar cuestionarios en una investigación permite abordar los problemas desde un punto de vista exploratorio, no en profundidad, y, por otro lado, consigue minimizar los efectos del entrevistador, haciendo las mismas preguntas y de la misma forma a distintas personas.

Los materiales empleados durante las sesiones fueron: Balanzas, Unidades de medida (cubos de 50 g, cada uno), lápiz, objetos de diferentes pesos (paquete de sopa, plastilina, bolsa de frijol), cofre, bolsa de plástico, pollito, Tablas de datos (1 y 2)

Se procede a realizar las actividades propuestas de la siguiente manera:

- *Primera sesión:* (90 minutos) En ella se realiza la actividad de apertura, a manera de actividad previa, considerando el peso de objetos.

Primera sesión

Actividad de Apertura/ Fase de Preparación

Propósito: Activar los conocimientos previos de los estudiantes, identificar y conocer la magnitud a trabajar (Peso).

A través de preguntas se conversa con los alumnos, sobre ¿para qué nos sirve pesar objetos?, ¿saben cuánto pesan?, ¿en qué situaciones de la vida cotidiana se pesa?, ¿qué instrumento se utilizan para pesar?

Mostrando ahora la balanza preguntamos: ¿para qué sirve este instrumento?, ¿qué puedo colocar en él?, ¿en dónde lo han visto?, ¿cómo funciona?, etc.
Una vez que los alumnos han respondido dichas preguntas, se procede:

Parte 1:
1.- Se pide a los alumnos que pasen a tomar los 3 objetos (paquete de sopa, barra de plastilina, bolsa de frijol) que se encuentran dentro del cofre, a su vez se les proporciona una tabla. (Tabla 1) y sus unidades de peso (cubos).

2.- Los alumnos anotarán los nombres de los objetos que han tomado, en la primera columna dentro de su tabla de registro.

3.- Se les pide que sopesen cada uno de los objetos, esto es; van estimar el peso únicamente teniendo como recurso sus manos y una bolsa de plástico en caso de requerirla, colocando la unidad de medida (cubo) en una de ellas y en la otra el objeto a pesar, tratarán de adivinar, estimando cuántos cubos podría pesar el objeto que tienen en la mano contraria en la que se tiene la unidad de medida, anotando su predicción en la segunda columna de la tabla. *(Fase Icónica)*

4.- Realizan este paso para cada uno de los tres objetos seleccionados y anotan sus resultados en la tabla.

Nº	Nombre del objeto	¿Cuántas cajitas crees que pesa?	¿Cuántas cajitas peso?
1			
2			
3			

Tabla 1

Parte 2:

1.- Se reparte una balanza a cada uno de los equipos integrados.

2.- Se indica a los alumnos que ayudándose del instrumento de medición proporcionado (la balanza), van a descubrir que tan alejados o que tan cerca estuvieron de la estimación realizada en un inicio, para lo cual tendrán que ir colocando los cubos dentro de los platillos uno a uno hasta obtener su peso.

	3.- Durante este proceso se observa de qué manera los alumnos la utilizan y se le pregunta al niño: ¿En qué momento sabes o te darás cuenta, que has obtenido el peso del objeto? *(Fase Enactiva)* 4.- Una vez que el alumno tiene la respuesta inmediatamente coloca su resultado dentro de la tercera columna de la tabla proporcionada. *(Fase Simbólica)* 5.- Como último paso dentro de esta primera actividad, se pide a los alumnos que ordenen los objetos de mayor a menor de acuerdo al peso que obtuvieron

- *Segunda sesión:* (60 minutos) Fase I: Esta se lleva a cabo 8 días posteriores a la primera, en ella se realiza una segunda actividad, pero ahora no con objetos, sino presentando a los estudiantes un pollito para su pesado.

	Actividad de Desarrollo/ Fase Activa
Segunda sesión	Propósito: Adquirir habilidad para pesar diferentes objetos no vivos y ahora introduciendo un ser vivo (pollito) con la ayuda de la balanza diseñada. Fase I: Una vez que han pasado 8 días de la actividad previa, se realiza una segunda visita y se recuerda lo que se trabajó en la sesión anterior con los alumnos, posteriormente se les pregunta ¿hay algún objeto o alguna cosa que te gustaría pesar? ¿por qué? Se les comenta que ahora se va a realizar la actividad, pero considerando a un ser vivo. ¿qué creen que podamos pesar? (Observamos las reacciones de los niños y anotamos sus respuestas). En ese momento les presentamos a: Pio pio, Plumitas, Lucho y Rocky (Mostrando uno a uno los pollitos) 1.- A continuación, se pide que se integren por equipos de 3 integrantes y se asigna uno de los pollitos a cada equipo. 2.- En primera instancia se le pide que al igual que como fue el caso de los objetos, los alumnos estimen cuánto creen que pesa su pollito y anoten su predicción dentro de su planilla de datos (Tabla 2). *(Fase Icónica)* 3.- Una vez que los alumnos han estimado el peso del pollito, se les pide que con la ayuda de nuestro instrumento de medición realicen el pesaje del pollito, *(Fase Enactiva)* para obtener el peso real que tiene en ese momento y lo registren en la tercera columna de la planilla de datos. *(Fase Simbólica)* (Se observa y registra como realizan los niños esta actividad).

Fase	Nombre del pollito	¿Cuántas cajitas crees que pesa?	¿Cuántas cajitas peso?
I			
II			

Tabla 2

Se les indica a los alumnos que guarden sus resultados obtenidos durante esta primera fase de nuestra sesión, porque los requeriremos en la siguiente.

- *Tercera sesión*: (60 minutos) Fase II: Esta se lleva a cabo 9 días posteriores a la primera, en ella se realizar un segundo pesado del pollito asignado, se comparan resultados, se aplica la entrevista y se obtienen conclusiones.

	Actividad de Cierre /Fase de Consolidación
Tercera sesión	Propósito: Analizar qué pasa con el peso de los objetos y con el del pollito, argumentar por qué la diferencia de pesos entre ellos. Fase II: Transcurridos 9 días después de la primera sesión realizada con los alumnos. Llega el momento del segundo pesaje de: Lucho, Pio pio, Plumitas y Rocky. 1.- Se forman los equipos tal y como trabajaron en la sesión anterior y se les entrega el pollito que pesó cada uno. 2.- Se pide a los alumnos que observen el crecimiento de su pollito transcurridos estos 9 días y respondan: ¿crees que tu pollito tenga el mismo peso que la ocasión pasada?, de no ser así ¿cuántos cubos más crees que pese ahora? (Lo discuten entre el equipo y anotan su predicción en la planilla de datos (Tabla 2*) (Fase Icónica)* 3.- Una vez que los alumnos observan y responden estas preguntas, se les indica que es el momento de realizar el segundo pesaje, por lo cual se les proporciona la balanza y sus unidades de medida (cubos). *(Fase Enactiva)* 4.- Los equipos realizan el pesado de su pollito, y se anota el resultado obtenido en su planilla de datos Una vez que todos los alumnos han terminado con el pesado de sus pollitos, se les pide que comenten en equipo los resultados que han obtenido en esta sesión y la anterior respecto al peso de sus pollitos. Posteriormente se pide que argumenten y en grupo se discuta sobre lo que observaron durante toda la secuencia empleada, desde el momento en el cuál únicamente

estimaron con sus manos el peso de objetos "no vivos", el momento en el que emplearán la balanza y el momento en el que se enfrentaron al pesado de un ser vivo.

Discuten: ¿por qué el pollito pesa ahora más? ¿crees que pase lo mismo con los objetos?, ¿tuviste dificultades en algún momento del trabajo?, ¿pensaste que aumentará de esa manera el peso del pollito? ¿qué otras cosas u objetos podrías pesar? ¿has escuchado sobre la forma en que pesan en las tiendas?

Finalmente, el alumno realiza su representación en papel de lo que pudo observar tanto al pesar los objetos como con el peso del pollito, y se le entrega una ficha de manera individual que debe realizar para concluir con la actividad. *(Fase Simbólica).*

La evaluación en las tres sesiones se llevó a cabo por medio de:

- Registros anecdóticos, de los argumentos de los alumnos al momento de realizar las actividades.
- Observación directa: debemos comprobar que saben medir objetos con unidades de medida no convencionales, utilizando para ello los instrumentos proporcionados.
- Ficha de trabajo

Análisis de resultados

Como se mencionó en nuestro apartado de metodología, se inició cuestionando a los docentes para conocer de qué forma abordan el tema con sus alumnos, y pudimos corroborar que la mayoría de ellos no tiene un plan, actividades o ideas para abordar este tema en específico.

La mayoría únicamente acude a las actividades planteadas por los libros de texto, que, a pesar de no ser parte del objetivo de este estudio, ha sido importante considerarlos pues como podemos ver en los ejemplos de los libros de texto gratuitos proporcionados por la Secretaria de Educación Pública (Block, D.F., Carvajal, A. L., Fuenlabrada, I. R. y Martínez, N.P.,1993) (Imagen 1) enfocándonos al tema de peso, las actividades suelen ser muy simples y poco significativas para los alumnos.

En estos solo se pretende que los alumnos respondan las fichas de trabajo, y a pesar de que se comienza a hablar en ellos del uso de una "balanza" para pesar, únicamente se muestran máximo dos ejercicios para abordar el tema, en donde los niños poco manipulan y únicamente siguen instrucciones.

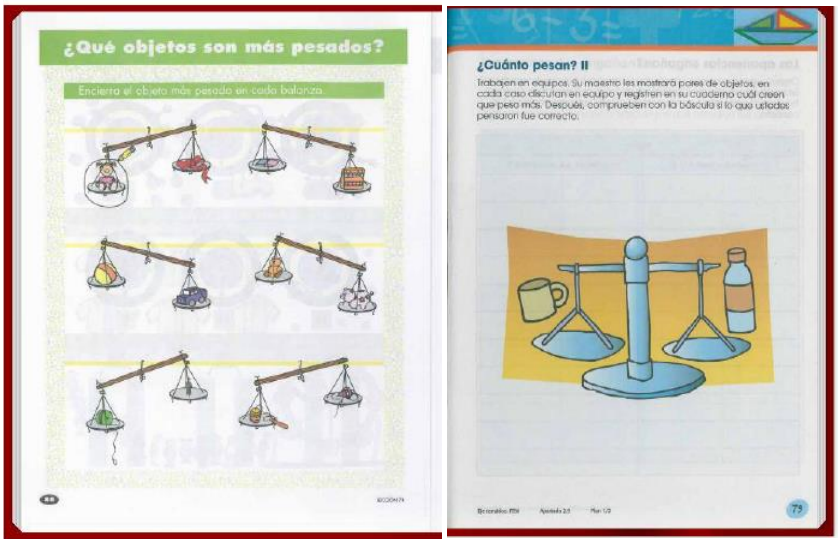
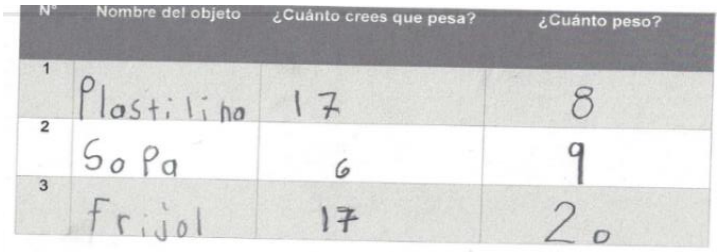


Imagen 1. Ejemplo de actividades en libro de texto sobre el tema de "peso"
Block, D.F., Carvajal, A. L., Fuenlabrada, I. R. y Martínez, N.P. (1993)

Tomando en cuenta estos aspectos, fue diseñada una propuesta creativa, que no consta únicamente de resolver fichas, sino que además involucra el uso de un ser vivo (pollito) y algunos objetos. A continuación, se detallan los resultados obtenidos para cada institución, en los cuales, cada alumno al cual se haga referencia dentro del trabajo será denominado como A1, A2, A3, etc. y la parte entrevistadora será referenciada como "S".

Escuela 1.

En esta escuela, al realizar las preguntas de exploración, nos dimos cuenta de que estos alumnos a pesar de no saber una definición clara de lo que es "El peso como magnitud", tienen al menos un conocimiento previo del uso que tiene el "peso" en su vida cotidiana.
Aplicando la actividad, se observa en esta escuela que los alumnos, al proporcionar una respuesta al estimar el peso de los objetos se dejan guiar por el tamaño que tiene, esto es, tienen la concepción de que *"a mayor tamaño, mayor será el peso***"** que tenga su objeto. (Imagen 2)



Nº	Nombre del objeto	¿Cuánto crees que pesa?	¿Cuánto peso?
1	Plastilina	17	8
2	Sopa	6	9
3	Frijol	17	20

Imagen 2 Estimación y peso de objetos en sesión 1

Algo importante ocurrido en las fases I y II en el momento de pesar al pollito, fue que uno de los alumnos de esta institución pretendía explicar a sus compañeros de qué forma tenían que "ver" si ya estaba correcto el peso o tenían que agregar o quitar cajitas:

-A1: *Para saber si ya están iguales* (Refiriéndose a ambos lados de la balanza). *Tenemos que hacerle así con la mano.* (Haciendo con su mano un movimiento de manera horizontal pasando por encima de las cubetas) (Imagen 3).

Imagen 3. Medición de peso del pollito

Razonamiento que sus demás compañeros aprobaban y al tener el ejemplo que él pone, los demás continúan tratando de medir de esta manera si han llegado o no al peso que tiene su pollito.

Escuela 2

En esta ocasión al realizar las preguntas previas algunos de los alumnos mencionaban conocer básculas puesto que sus papás "venden fruta y la usan para saber cuánto tienen que pagar".
Un caso particular fue el de la alumna A2, que, al trabajar con su equipo, hace referencia al peso como una unidad de longitud.

-S: ¿Para qué crees que nos sirva conocer el peso de algo?
-A2**.** (Sin dudar responde) *Para saber la estatura y cuanto mido.*

En su respuesta podemos notar, que, si bien no es correcta, puesto que el peso no es una medida de longitud, si concibe al peso como una medida de magnitud.
Esta misma alumna al trabajar con sus compañeras en equipo en la fase de pesaje de los pollitos menciona:

-A2: -*No pesó nada el pollito*
Sin embargo, otra alumna (A3) perteneciente al equipo de A2 al escuchar lo que su compañera dice, se acerca y pregunta:
-A3: *¿No?* (con cara de sorpresa hacia A2)
-A2: *No, pesó cero,* (con cara de sorpresa)
Un poco extrañada de lo que acaba de mencionar su compañera A3, responde y mostrándole la balanza trata de convencerla:
-A3: *Si pesa, peso 10.*

A3 y A2 comienzan a cuestionarse A3 tratando de convencer A2 de su hipótesis, le dice mira. (y vuelve a pesar a su pollito). Demostrándole que, en efecto, el pollito plumitas pesa 10 y no 0 como A2 decía.

Escuela 3

En esta escuela los alumnos, carecían de conocimientos previos, mínimos o básicos como lo es, el acompañar a su mamá al supermercado y colocar alimentos en la báscula para pesarlos como fue referido en la mayoría de las escuelas visitadas.
Otro dato interesante fue que los alumnos empleaban para su estimación unidades en cientos o inclusive en miles de cajitas que era la unidad de medida empleada. (Imagen 4)

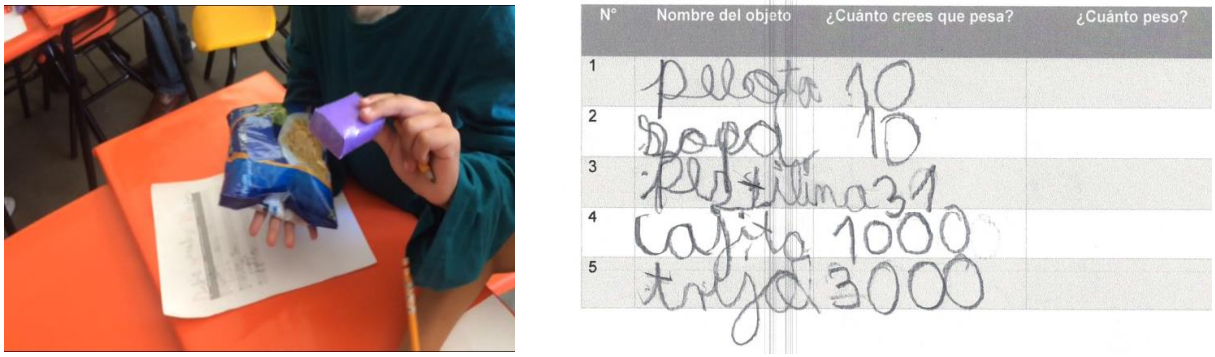


Imagen 4 Estimación de alumno para el peso de objetos propuestos

Otro caso especial fue el de un alumno A5, quien al momento de realizar el sopesado, se da cuenta que la cajita que va a sopesar tiene un número (25), por lo cual empieza a colocar de forma rápida una tras otra las unidades de medida sobre la balanza por lo que se le cuestiona:

-S: ¿Cuantas crees que pesa?
-A5: *Son 25 cajitas*
-S: ¿25? ¿Cómo lo sabes?
-A5: *Ah pues porque en la cajita tiene ese número.*

Se puede notar que el alumno busca la forma de dar una respuesta y que ésta sea un número, el cuál creyó haber encontrado al revisar el objeto y coincidir con que el objeto pesado contenía información que proporcionaba un número.

Escuela 4

En esta escuela, se tiene el caso en el que dos alumnas, ante el hecho de estimar el peso de la sopa mencionan que pesa “cero”, caso similar al que se presentó en la escuela de distribuidores Nissan donde A2, trata de ser convencida por su compañera de que no puede pesar cero el pollito, o en este caso sería el objeto, que está pesando. (Imagen 5). Sin embargo, esto puede deberse a que a esta edad los alumnos aun no conciben el valor de cero o al verlo como un número pueden llegar a pensar que tiene algún “peso” como lo es cualquier otro número natural.

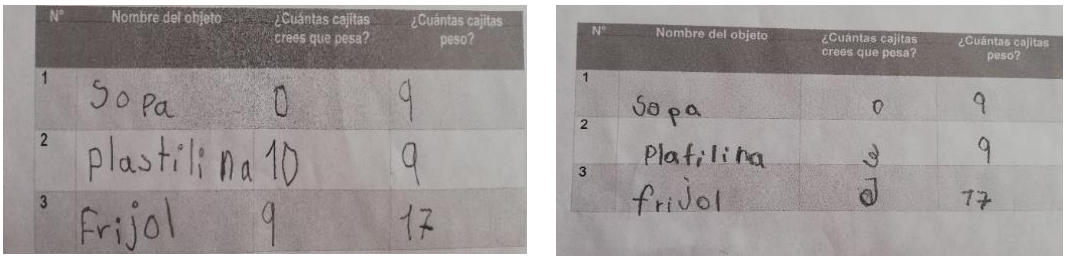


Imagen 5 Respuestas de Alumnas mencionando valor cero en peso de objetos

Además, también se presentó el hecho de que el alumno, intenta mantener el equilibrio o bien darse cuenta si ha obtenido el peso de sus objetos, apoyándose de sus manos, moviéndolas de forma horizontal de una parte de la balanza a la otra tal como fue el caso de la escuela Vicente Suarez. (Imagen 6)

Imagen 6 Medición de Peso de objetos

En general, con las sesiones planteadas, podemos notar que a pesar de que esta actividad se ha evaluado en diferentes contextos, hay algunas observaciones que durante su desarrollo han sido puntos clave en este estudio, puesto que los alumnos han actuado de manera similar, estas observaciones han sido enlistadas en la Tabla 2.

Tabla 2. Porcentaje de Observaciones realizadas en las diferentes escuelas

No.	Descripción breve de observaciones realizadas durante el desarrollo del estudio	Tipos de escuela			
		Pública		Privada	
		E. No. 1	E. No. 2	E. No. 3	E. No. 4
1	Tienen conocimientos previos relacionados con el peso en actividades cotidianas	50%	86%	67%	17%
2	Han tenido actividades escolares similares relacionadas con el tema de pesos.	0%	14%	58%	0%

3	Conocen y han empleado la balanza.	17%	14%	42%	0%
4	Presentan una mejor estimación en la segunda sesión; esto es después de realizar la actividad previa.	83%	86%	83%	0%
5	El alumno inicialmente al no haber equilibrio en ambascubetas, no deduce rápidamente a cuál de las dos debe quitar o poner cajitas para encontrar el peso deseado	25%	57%	17%	33%

En estas actividades es importante mencionar que las tres sesiones fueron aplicadas a los alumnos de primer grado, sin embargo, también se realizó con alumnos de segundo grado, para fines comparativos de este trabajo. En el caso de los alumnos de segundo grado, no tomaron la primera sesión, es decir, no tuvieron una "actividad previa" ya que consideramos que al ser un año mayores, debieron al menos realizar con anterioridad alguna actividad similar a la que se hizo con los pequeños de primero o bien tener una idea o conocimiento previo de ello.

Conclusiones

En base a los resultados podemos decir que la mayoría de los niños que han adquirido un conocimiento previo sobre el tema, pueden argumentar de qué manera se logra obtener el peso de un objeto, ya que saben interpretar el funcionamiento de la balanza.

Gracias a la experiencia manipulativa propuesta en la actividad, se pudo notar que han logrado responder de mejor manera, incluso que de aquellos alumnos que tienen un grado escolar mayor al que ellos se encuentran. El uso de material concreto *(fase enactiva de Bruner),* del propio cuerpo (al sopesar los objetos) y el conocimiento de instrumentos de medición, le proveen al niño un espacio de seguridad para que mejore sus conocimientos en el tema. De acuerdo a nuestro estudio, podemos decir que a medida que manipulan los objetos, observan relaciones y reflexionan sobre sus resultados, los niños construyen gradualmente su propia comprensión de las relaciones entre objetos y conceptos *(fase icónica),* tal como lo propone Bruner en su Teoría. También, pudimos observar que al ponerlos en situaciones controladas y proporcionarles un ámbito favorable para la comunicación de ideas, creamos oportunidades de aprendizaje eficaces y significativas *(fase simbólica)*. Finalmente, concluimos que el diseño y aplicación de actividades de interés y contextuales para ellos favorecen su aprendizaje disminuyendo las dificultades que se presentan al tratar el tema del peso.

Referencias bibliográficas

Block, D.F., Carvajal, A. L., Fuenlabrada, I. R. y Martínez, N.P. (1993) ¿Qué objetos son más pesados? En *Matemáticas Primer grado.* (p.88). Ciudad de México, México: Secretaria de Educación Pública.

Bruner, J. (1988). *Realidad mental y mundos posibles*. Barcelona: Editorial Gedisa

Chamorro, M. C. (2003). El Tratamiento Escolar de las Magnitudes y su Medida. En *Didáctica de las matemáticas para Primaria* (pp.221-242). Madrid: Pearson-Prentice.

Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2004). Didáctica de la medida de magnitudes para maestros. En J. D. Godino. (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para maestros* (pp. 613-650). *Proyecto Edumat-Maestros*; España: Universidad de Granada.

Osorio, A.M. (2011). *Modelos Mentales sobre el Concepto de Medida. Instituto Universitario de Caldas*. Universidad Autónoma de Manizales. Quindío, (p.124) Colombia. Recuperado:http://167.249.43.80/jspui/bitstream/11182/145/1/Modelos_mentales_concepto_medida.pdf

Pizarro, R.N. (2015). *Estimación de medida: el conocimiento didáctico del contenido de los maestros de primaria.* (Tesis de doctorado inédita). Universidad Autónoma de Barcelona.
Recuperado:http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/309285/rnpc1de1.pdf?sequence=1

Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Secretaria de Educación Pública (2017). *Aprendizajes clave para la educación Integral*. Recuperado de: https://www.tamaulipas.gob.mx/educacion/wp-content/uploads/sites/3/2017/07/aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

DISEÑO DE UNA LECCIÓN DE INVESTIGACIÓN PARA FAVORECER LA TRANSICIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL LENGUAJE ALGEBRAICO EN ALUMNOS DE BACHILLERATO

DESIGN OF A RESEARCH LESSON TO PROMOTE THE TRANSITION OF NATURAL LANGUAGE TO ALGEBRAIC LANGUAGE IN HIGH SCHOOL STUDENTS

Jesús Salinas Herrera, Mónica C. Pereyra Zamudio, J. César Domínguez Galván
Universidad Nacional Autónoma de México (México).
jes54@unam.mx, moni90citlalli@gmail.com, fdex2000@yahoo.com

Resumen
Se presenta el diseño de una lección de investigación que se elaboró siguiendo la metodología Lesson Study, la cual busca vincular la práctica docente con la investigación mediante un trabajo colaborativo entre profesores del nivel medio superior. Aquí se hace énfasis en la componente docente, la cual se centra en diseñar una estrategia de aprendizaje que desarrolle la habilidad de alumnos del bachillerato de modelar problemas usando ecuaciones de primer grado. De manera más específica, la meta de aprendizaje es que los alumnos adquieran la habilidad de traducir al lenguaje algebraico una situación problema, presentada en lenguaje natural. Esta propuesta didáctica se basa en la Teoría de la Objetivación de Luis Radford. La idea central que seguimos es impulsar la toma de conciencia en los alumnos de discursos y prácticas matemáticas que se han constituido histórica y culturalmente, relacionadas con el pensamiento algebraico.

Palabras clave: pensamiento algebraico, simbolización, teoría de la objetivación

Abstract
This paper presents a research lesson design based on the Lesson Study methodology. It seeks to link teaching practice to research through the collaborative work of upper middle education teachers. It focuses on the teaching component, which is addressed to design a learning strategy to develop high school students' skill for modeling problems by using first-grade equations. Specifically, the learning goal is that students acquire the ability to translate algebraic language to a problem situation, presented in natural language. This didactic proposal is based on The Theory of Objectification, by Luis Radford. The main idea we follow is to encourage students' realization of discourses and mathematical practices that have been formed historically and culturally, related to the algebraic thinking.

Key words: algebraic thinking, symbolization, theory of objectification

Introducción

El presente trabajo consiste en el diseño de una lección de investigación de acuerdo con la metodología *Lesson study* (LS). LS es una metodología de trabajo colaborativo para el desarrollo profesional del docente. Se originó en Japón y desde la década de los 90 se ha adoptado en muchos países con diferentes adecuaciones (Hart, Alston, & Murata, 2011). Una característica central de esta metodología es relacionar la investigación y la docencia para apoyar el desarrollo profesional de los profesores, mediante la atención de la mejora de los aprendizajes de los estudiantes (Murata, 2011). LS consiste en realizar un ciclo de cuatro etapas, de las cuales aquí tomamos en cuenta únicamente las dos primeras: *Organización*, en la que se establecen metas de aprendizaje de acuerdo con las necesidades de los estudiantes y con base en el currículum; *Planeación*, donde se elabora una lección de investigación dirigida al logro de tales metas. Las otras dos etapas son la *Implementación* de la lección y la *Revisión*, que consiste en analizar y discutir los resultados (Murata, 2011). Estas dos últimas etapas se llevan a cabo a partir de que la lección es puesta en práctica; en nuestro caso será el próximo ciclo escolar 2019-2020.

La lección de investigación está constituida por una serie de actividades que permiten un desarrollo gradual de los aprendizajes esperados relacionados con la adquisición del pensamiento algebraico, a través del uso del lenguaje simbólico. La lección fue realizada por profesores que cursan la Maestría de Enseñanza de Educación Media Superior, MADEMS, de la Universidad Nacional Autónoma de México. La meta de aprendizaje propuesta es que los alumnos de bachillerato adquieran la habilidad para traducir al lenguaje algebraico una situación problema presentada en lenguaje natural. Se considera una secuencia de actividades, de acuerdo con la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (Simon, 1995), para desarrollar la habilidad para modelar problemas usando ecuaciones de primer grado. Desde el punto de vista de la docencia, la lección de investigación que aquí presentamos es una estrategia de enseñanza dirigida a la consecución de esta meta de aprendizaje.

Esta propuesta se orienta con distintos supuestos teóricos que adoptamos, tomando como eje central la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2014). Esta teoría considera que la educación matemática debe atender la creación de sujetos reflexivos y éticos "que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente, …" (D`Amore y Radford, 2017). Es importante señalar que tales discursos y prácticas están en permanente evolución. El enfoque de esta teoría sobre el aprendizaje es sociocultural, se aleja de la noción de aprendizaje como transmisión de conocimientos o como construcción subjetiva de un sujeto. Considera que el aprendizaje no es inmediato, sino que está siempre mediado por diferentes elementos, como artefactos materiales, lenguajes, y símbolos. Así, el lenguaje y todo tipo de signos tienen un papel muy importante, pues inciden de manera fundamental en la forma como pensamos y actuamos (Vygotsky y Luria, 1994).
El pensamiento algebraico, aunque diferente al aritmético, se encuentra estrechamente vinculado a él. Históricamente la aritmética apareció primero, se originó de la invención de los números para contar y su manejo en la operación de sumar o agregar objetos. Así, el uso de números es muy antiguo. Hay testimonios arqueológicos y antropológicos que indican que desde mucho antes de las grandes culturas antiguas de Babilonia y Egipto, el ser humano se interesó por las relaciones numéricas y geométricas. Las sociedades antiguas contaban con un lenguaje en el que había un sistema de números e, incluso, herramientas y construcciones que muestran la intuición de relaciones espaciales (Collette, 2006). Podían contar a través del uso de un lenguaje descriptivo (Figura 1).

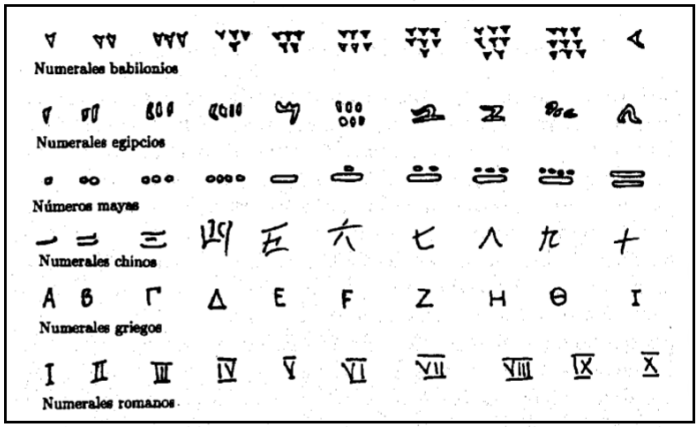


Figura 1. Sistemas de numeración antiguos.
En de la Peña J. A. (1999). *Álgebra en todas partes*

El saber aritmético y algebraico se fue desarrollando en un proceso de atención a problemas diferentes en distintas culturas y contextos y se fueron codificando términos para la solución de esos problemas. Los mesopotámicos, desde alrededor del año 2000 a. C., se plantearon problemas comerciales. Los pitagóricos privilegiaron la representación geométrica de los números inspirados por problemas filosóficos. Diofanto en Alejandría, en el siglo III d. C., hablaba de *aritmos* e introdujo un lenguaje sincopado para abordar los problemas aritméticos que se formulaban. Un aspecto innovador del trabajo de Diofanto fue que introdujo el primer simbolismo en la matemática, antes de él sólo se usaba el lenguaje verbal. A su notación se le llamó sincopada por transcribir el lenguaje verbal al simbólico, las operaciones y las cantidades las representaba frecuentemente por abreviaturas simbólicas. El uso del lenguaje verbal y simbólico en un mismo problema es lo que caracteriza al lenguaje sincopado (Gómez i Urgellés, 2017). Los árabes alrededor del siglo VIII d. C. introdujeron la numeración posicional de los hindúes y desarrollaron un sistema numérico de gran potencia para facilitar los cálculos. Hasta Viete, segunda mitad siglo XVI y, sobre todo con Descartes, en la primera mitad del siglo XVII, se introdujo el simbolismo actual del álgebra.

Teniendo en cuenta este proceso histórico, un aspecto muy importante a promover con los alumnos es reflexionar sobre el papel del lenguaje y de los símbolos para pensar y abordar problemas numéricos. Consideramos muy importante que los alumnos se den cuenta que este ha sido un proceso largo, complejo y muy valioso para el desarrollo del pensamiento.

La concepción del álgebra como una aritmética generalizada ha sido ampliamente estudiada por diversos autores; de hecho, en diferentes estudios se describen y analizan los procesos de generalización como una vía para introducir a los estudiantes al algebra (Salinas et al., 2011; D`Amore y Radford, 2017). Por ejemplo, cuando se proponen actividades en las que se pide a los estudiantes generalizar secuencias numéricas o patrones geométricos simples, de la aritmética neo-pitagórica, se espera que se pongan en contacto con una forma de saber sobre secuencias aritméticas construidas en la antigüedad (Salinas et al., 2011). Se espera que los estudiantes tomen conciencia de una forma algebraica de percibir, reflexionar e investigar secuencias en aquellos tiempos (D`Amore y Radford, 2017).

Estas son formas codificadas de pensar y hacer en una cultura. Con la aparición del simbolismo alfanumérico de Viete y Descartes, el saber matemático se expresa de nuevas maneras, a través de la construcción de nuevos códigos, que ahora son parte de nuestros currículos. Viete, en particular, introdujo el uso de letras para representar clases de números, este recurso le da al álgebra su generalidad. Esto permite hacer cálculos con especies completas en lugar del trabajo numérico de sus antecesores (Kline, 2012). Esta codificación del lenguaje, además, facilita enormemente la solución de problemas complejos. Este aspecto fue nítidamente percibido por Descartes.

Marco teórico

Una dificultad reconocida en alumnos de bachillerato consiste en el tránsito del lenguaje natural al lenguaje algebraico (Mason, 1996). Pasar del lenguaje natural al algebraico para resolver un problema involucra la actividad de modelación. Para ello, es necesario impulsar en los alumnos el desarrollo de habilidades de traducción de situaciones problemáticas descritas en el lenguaje natural, a su representación algebraica (Puig y Rojano, 1994; Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Existe una amplia literatura sobre el tema e investigaciones que lo han abordado desde distintas perspectivas. En particular, consideramos el enfoque de Luis Radford quien sigue la perspectiva de Vygotsky, de que la cognición está vinculada al uso de instrumentos psicológicos, donde el lenguaje y los signos juegan un papel fundamental. En este enfoque, es importante enfatizar la dimensión cultural para analizar la emergencia del pensamiento algebraico en los estudiantes (Radford, 2001).

De manera específica, seguimos la Teoría de la Objetivación de Luis Radford (2006, 2014). En esta teoría se distingue el saber, del conocimiento. El saber es posibilidad, algo potencial que emerge de la actividad humana y se encuentra en devenir y que se actualiza o materializa en un conocimiento. La potencialidad del saber algebraico, que es una entidad general, como simbolizar el lenguaje natural, se concreta en poder hacer algo, en un conocimiento, por ejemplo, la modelación algebraica de un problema. En este caso, el proceso gracias al cual el saber se actualiza o se materializa es mediante la representación algebraica del problema en cuestión. Este proceso se produce en la actividad a través de la cual se da contenido o se actualiza el saber.

El contenido conceptual concreto, el conocimiento, se produce únicamente gracias a una actividad, la actividad que establece la mediación entre el saber y el conocimiento. Por ello, todo conocimiento es mediado, no hay conocimiento inmediato. La mediación de la actividad se realiza por medio de artefactos materiales, instrumentos psicológicos, como el lenguaje, y la comunicación que se produce en la interacción humana. Así, la participación activa de los estudiantes en actividades diseñadas por el profesor y con su guía permite el conocimiento. Para Radford, el aprendizaje es finalmente un proceso cuya meta es adaptarse a las prácticas sociales de una cultura, es la toma de conciencia de las formas y maneras codificadas de hacer y pensar de una cultura (D`Amore y Radford, 2017).

Metodología

Esta lección se aplicará a un grupo de estudiantes del nivel medio superior en México, dentro de un curso regular de primer semestre en el mes de agosto de 2019. El trabajo se desarrollará con aproximadamente 50 alumnos, entre 15 y 16 años, de una escuela pública ubicada en la Ciudad de México, quienes llevarán el curso de Álgebra como parte de las asignaturas del tronco común que deben cubrir antes de optar por una carrera profesional o técnica.

De acuerdo con nuestro marco teórico, el foco de atención de la lección se centra en la actividad de los alumnos que trabajarán con el lenguaje de la aritmética y del álgebra. El profesor deberá observar con cuidado sus usos y su tarea central será promover la toma de conciencia de los alumnos de las formas de usar el pensamiento algebraico para modelar problemas con ecuaciones de primer grado. Nuestro interés es que los alumnos desarrollen la habilidad de vincular el lenguaje natural con el lenguaje algebraico. El proceso de atención en el desarrollo de las actividades se enfocará, particularmente, en aspectos relacionados con los procesos cognitivos que tienen lugar en la traducción de los enunciados de problemas verbales al lenguaje algebraico (Filloy, Puig y Rojano, 2008). Esta lección hace la hipótesis de una ruta que los alumnos podrían seguir para el logro de los aprendizajes supuestos en las actividades, de acuerdo con una cierta trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995), esto no implica un esquema rígido de trabajo en el aula, sino todo lo contrario es un reto de creatividad y apertura al trabajo conjunto de profesor y alumnos en el aula.

El concepto de actividad que propone la Teoría de la Objetivación es "orgánico y sistémico", es una búsqueda conjunta de alumnos y profesor, de manera cognitiva, emocional y ética, de la solución de un problema planteado. Las actividades están diseñadas para generar en los alumnos asombro, curiosidad y motivación para trabajar con matemáticas. Es importante buscar despertar su curiosidad y que sientan una conexión vital con la actividad. Para que se dé el aprendizaje, el pensamiento algebraico tiene que aparecer y concretarse en la conciencia de los estudiantes. Es muy importante propiciar la toma de consciencia en los alumnos para busca iniciar la transición entre los casos particulares y la generalidad de las situaciones que se abordan. Por consiguiente, se requiere una actividad o una serie de actividades que hagan posible dicho proceso de aprendizaje.

En las actividades que se presentan a continuación los profesores deben identificar previamente los procedimientos que piensen más adecuados para su realización. Es necesario hacer un análisis *a priori* de cuál es una sucesión de acciones posibles que permite realizar la tarea. También es importante distinguir entre "actividad" y "tarea". Cuando se está implicado o involucrado en una actividad se realiza determinada tarea, es decir, la tarea es el objetivo de la actividad. Hay que tener claro que la actividad la van a realizar los alumnos y al profesor le toca orientar y dirigir la tarea, es decir, distinguir qué aspectos atender y orientar la atención de los alumnos hacia ciertos aspectos de la actividad para alcanzar el objetivo de la tarea (Da Ponte, 2004).

Realización de la lección

Primera Sesión: Actividad diagnóstica e introducción a la lección.
Actividad 1. Contestar las siguientes preguntas de manera individual y entregar las respuestas.

1. ¿Qué es el lenguaje?
2. ¿Crees que las matemáticas son un lenguaje que toda persona, sin importar de dónde provenga, puede comprender?
3. ¿Qué relación y diferencias encuentras entre el lenguaje aritmético y el del álgebra?
4. ¿Tiene alguna ventaja usar un lenguaje algebraico para resolver un problema de la vida cotidiana?
5. ¿Puedes dar ejemplos del uso del lenguaje algebraico?
6. ¿Qué es una incógnita en matemáticas?

Formar grupos pequeños de tres o cuatro alumnos y discutir las mismas preguntas. Posteriormente, el profesor coordina una discusión en todo el grupo y promueve una reflexión acerca de la importancia del lenguaje para la comunicación y el desarrollo del pensamiento. Compara la facilidad de realizar operaciones aritméticas usando el sistema numérico y usando únicamente el lenguaje natural.

En el proceso de aprendizaje es claro que los alumnos no tienen la mente en blanco, sino que poseen previamente ciertos conocimientos. Por ello, al inicio de la lección, en la actividad diagnóstica, nuestra primera intención es sondear qué conocimientos o nociones poseen los alumnos con relación al uso del lenguaje natural y otros lenguajes, como los de las matemáticas. Al terminar de responder de manera individual el cuestionario, es importante que el profesor propicie una reflexión sobre el contenido de las preguntas a través de promover la participación de los alumnos y orientar la discusión hacia la toma de consciencia de la importancia del lenguaje para conocer.

Similarmente, es importante explorar qué tipo de vocabulario matemático básico poseen los estudiantes que les permite simbolizar las relaciones entre cantidades mediante operaciones básicas.

Por otro lado, se puede suponer que los estudiantes manejan adecuadamente los signos de agrupación, los paréntesis, elementos necesarios al momento de traducir un enunciado del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Los signos de agrupación usados de forma adecuada permiten establecer la jerarquía de operaciones que con frecuencia se requiere para realizar una traducción adecuada entre estos dos lenguajes. Es otro aspecto de atención.

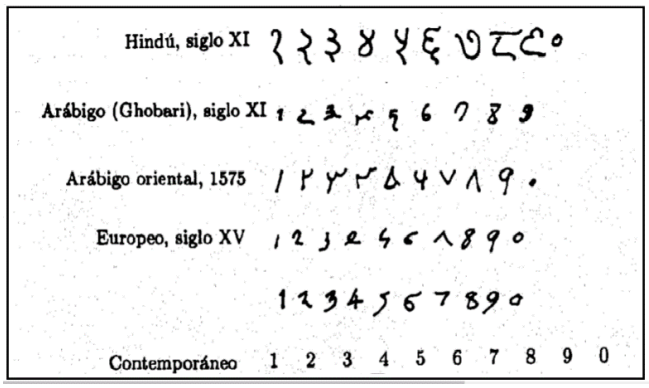


Figura 2. Evolución de los números arábigos
Imagen extraída de la Peña J. A. (1999). *Álgebra en todas partes*

Para introducir la siguiente actividad es conveniente comentar brevemente a los alumnos que existen diferentes códigos de numeración que se han desarrollado históricamente en diferentes culturas, como se muestra en la Figura 2. El sistema numérico que ocupamos y que nos resulta familiar hoy en día, evolucionó hasta transformarse y utilizar los números (indo-arábigos) que hoy conocemos. Este sistema numérico tiene un enorme potencial y se puede observar, con la siguiente actividad que, en comparación con otros sistemas numéricos, es muy fácil de usar.

Actividad 2. Realizar la suma de los siguientes números, escritos en la numeración romana.

CXVI + XXIV =

El sistema de numeración romano es muy distinto del sistema decimal que usamos debido a que tienen diferentes códigos. El sistema decimal es posicional, es decir, el valor de los números depende de su posición, mientras que la numeración romana es aditiva: cada número vale lo mismo independientemente de su posición y para determinar el valor de un número cada cantidad se suma a la anterior. Ahora, ¿cómo sumar dos números romanos sin traducirlos al sistema decimal?

Hay que considerar ciertos procedimientos con la notación y seguir los siguientes pasos: 1. Cuando aparece un símbolo de valor menor a la izquierda de otro, se restan. Por ejemplo, IV esto es IIII o XL esto es XXXX. Así, en esta primera etapa del método para sumar, hay que modificar la notación incluyendo los símbolos que sean necesarios. 2. Juntamos todos los símbolos que se hayan obtenido y se ordenan de manera decreciente, por ejemplo, CCXXXXXIIII. 3. Reemplazamos los símbolos repetidos por sus equivalentes de valor mayor, CCXXXXXXIIII → CCLXIIII. Finalmente, si es necesario ajustamos la notación usual de los números romanos. Por ejemplo, CCLXIV.

Como se puede observar una tarea muy sencilla en un sistema de numeración puede ser más complicada de realizar en otro sistema. Si aplicamos los pasos siguientes a la suma solicitada, obtenemos:

CXVI + XXIV = CXVI + XXIIII = CXVIXXIIII = CXXXVIIIII = CXXXX = CXL
Hacer la misma operación traduciendo los números a la numeración indo-arábiga que utilizamos actualmente. Comparar la diferencia en la facilidad de solución.

Actividad 3. Un día, el maestro de matemáticas llegó a clase y dijo: “Vamos a jugar con nuestras mentes un rato. A ver, piensen un número entero del 1 al 9; multiplíquenlo por 5; a lo que da súmenle 4; multipliquen por 2 el resultado. Les quedó un número de dos cifras; el número de la derecha es un 8 y el de la izquierda es el número que pensaron”.

Los estudiantes estaban asombrados porque efectivamente así ocurrió, independientemente del número que eligieron al principio. A Katherine le pareció que el "truco" se relacionaba con matemáticas y supuso que tenía que ver con cómo interpretar de forma matemática las indicaciones que dio el profesor. ¿Puedes ayudarla con esa tarea? (Tomada y adaptada de Blasco (2016)).

Preguntas clave:

¿Por qué hacer esas operaciones con esos números garantiza el resultado?
¿Cómo representar el número en que cada uno piensa si hay nueve posibilidades y cada quien puede elegir la que quiera?
¿Cómo se traducen las indicaciones en operaciones con cantidades conocidas y desconocidas?

*Respuesta esperada del alumno***:**

1) Elige una literal para representar a cualquiera de los nueve números que puede elegir, digamos n. Se puede llegar a la elección de la literal mediante la discusión guiada por el docente de los casos particulares que algunos alumnos podrían ilustrar a partir de su propia elección al inicio de la actividad. Después de presentar cuatro o hasta cinco casos (que de hecho son la mitad de todos los posibles) el docente tiene elementos para hacer visibles los patrones que están involucrados en el truco, es decir, puede ayudar a los jóvenes a identificar que hay un fenómeno recurrente y que la elección de una literal que representa todos los casos particulares es un buen principio para modelar el problema.
2) Utiliza las operaciones básicas entre constantes y literales para representar simbólicamente las indicaciones "multiplicar por 5" y "sumar 4 al resultado", lo que da como resultado las expresiones $5n$ y $5n + 4$ respectivamente. Si el trabajo con los estudiantes se conduce de manera que la generalidad de las opciones quede expresada mediante una literal (n), lo que corresponde es continuar guiando la actividad para que las operaciones que se siguen en los casos particulares ilustrados por los alumnos se apliquen también (y en ese orden) a la literal elegida.
3) Utiliza los paréntesis para simbolizar correctamente la última indicación "multipliquen por 2 el resultado", lo que daría la expresión $2(5n + 4)$. Si los dos puntos anteriores se han cumplido, es decir, si las tres primeras indicaciones del "truco" se han traducido a una expresión matemática, incorporar adecuadamente la siguiente (y última) instrucción puede darse a partir de que el docente permita a los estudiantes expresar al resto cómo lo harían.
4) Simplifica la expresión eliminando el paréntesis usando la propiedad distributiva, lo que da como resultado $10n + 8$. Parecería que haber llegado al momento anterior de la tarea es suficiente para completar la actividad, pero no es verdad. En todo momento el docente debe mantener la atención de los alumnos en resolver el "truco" y la expresión $2(5n + 4)$ no ofrece una explicación de por qué el resultado final, en efecto, un número de dos cifras que tiene las características señaladas al principio de la actividad. Si los alumnos opinan que así es, ello es una buena oportunidad para que el docente elabore preguntas como ¿y por qué el número que está en el lugar de las decenas coincide con el que uno elige? ¿Por qué, con toda seguridad, el número que está en las unidades es siempre 8?

Posibles dificultades del alumno:

A) En lugar de utilizar una literal para simbolizar *la generalidad* de los números que se pueden elegir, el estudiante empieza el ejercicio con un número *en particular*; aunque siga las indicaciones al pie de la letra y de forma correcta, al final sólo tendrá un número que valida el "truco", pero es muy difícil que entienda por qué funciona. En los puntos señalados en líneas previas se plantea la forma en la que podemos conducir al estudiante para que tome consciencia de la formulación e importancia del uso del lenguaje algebraico para explicar cómo funciona el truco.

B) Simboliza bien las tres primeras indicaciones hasta obtener la expresión correcta, a saber, $5n + 4$, pero no utiliza los paréntesis para expresar adecuadamente la multiplicación por 2 que marca la última instrucción con lo que queda la expresión $2 \cdot 5n + 4$ o ya simplificada $10n + 4$, que no corresponde con la expresión buscada. Si los estudiantes no la comprueban con un caso particular muy probablemente no se darán cuenta de que la expresión es incorrecta.

Actividad 4. a). Indicar los números triangulares y cuadrados que siguen a los que aparecen en la Figura 3 y dibújalos.
b). Indicar las series a partir de las cuales se forman los números triangulares y cuadrados de la Figura 3.
c). Identificar el patrón geométrico que permite construir las figuras de los números triangulares y cuadrados de la figura 3.
d). Representar algebraicamente el siguiente enunciado: Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.
Esta es una actividad tomada y ajustada de (Salinas, Adamuz-Povedano y Jiménez-Fanjul, 2011).

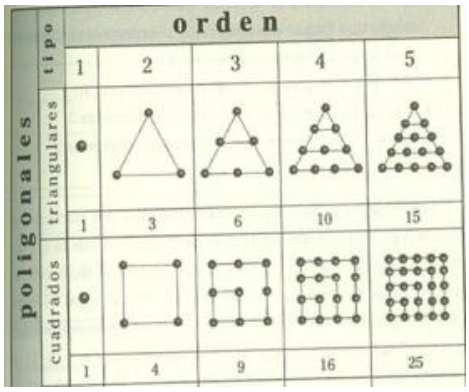


Figura 3. Representación de los números triangulares y cuadrados.
Tomado de (González Urbaneja, 2009).

Estos números se forman por puntos que describen polígonos regulares. Las figuras geométricas que construyeron los pitagóricos con los números poligonales proporcionan una evidencia visual de numerosas propiedades de los números naturales. Todas estas propiedades y relaciones se obtienen de simples comprobaciones aritméticas. Sin embargo, su prueba requiere de un simbolismo algebraico (Salinas y Maz, 2011).

La regla para formar un número triangular es agregar, a cada triángulo de lado n, un lado con $n + 1$ puntos, así obtenemos 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... que son las sumas parciales de la serie $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ ... Por lo tanto, el n-ésimo número triangular está dado por $T(n) = [n \cdot (n + 1)]/2$.

Además, podemos observar que la regla para la construcción de los números cuadrados es $C(n) = n^2$.
1+3=4
1+3+5=9
1+3+5+7=16
1+3+5+7+9=25

Actividad 5. Dividir un número dado en dos (números) *teniendo una razón dada* (entre estos dos números). *Sea 60 el número dado, y la razón dada 3 a 1.*
¿Cuáles son los números que cumplen con las condiciones anteriores?

Es probable que por tanteo los alumnos comiencen de alguna manera, por ejemplo, explorar números que sumen 60:
30 + 30 = 60
40 + 20 = 60
50 + 10 = 60

La interacción del profesor es importante y podría acercarse a los grupos y preguntarles si las combinaciones de dos cantidades que proponen para dividir el número 60 cumplen con la condición de tener una razón de 1 a 3. Se les podría sugerir a los alumnos hacer un listado de números que cumplieran dicha condición.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45

Se observa que cada número con su correspondiente de la línea inferior satisfacen la condición de estar a una razón de 3 a 1 y se cumple que 15 + 45 = 60
Entonces, el profesor podría preguntar si identifican algún patrón en las sucesiones numéricas anteriores. Tratará de que se den cuenta que:

1	2	3	…	15
(3)1	(3) 2	(3)3	…	(3)15

Por lo tanto, tomando en cuenta las condiciones del problema, dado que el número que queremos dividir en dos números es 60, y tales números están en una razón de 3 a 1 obtenemos finalmente la siguiente relación $x + 3x = 60$.

Para terminar esta actividad los alumnos harán alguna variante (Lo, 2012). Consideremos el mismo enunciado, pero ahora el número a dividir es 90. La solución por tanteo ya no es viable porque el número no es natural sino racional. La simbolización algebraica del problema resulta la vía adecuada y muy fácil para resolver el problema, es decir $x + 3x = 90$. La realización de la actividad se concreta en un aprendizaje que resulta de la toma de consciencia de una práctica social.

La siguiente actividad es la última y se toma como un indicador para evaluar el aprendizaje de la lección. Este problema consiste en la traducción de una situación descrita en el lenguaje natural, al lenguaje del álgebra que se expresa en una ecuación de primer grado. Los alumnos deberán tomar conciencia de que en dicha traducción el lenguaje del álgebra sólo tiene como contenido las cantidades y las relaciones aritméticas entre ellas (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

*Actividad 6***.** Representar algebraicamente el siguiente problema: Cuatro piezas de tela de 50 m cada una se van a utilizar para hacer 20 trajes que necesitan 3 metros de tela cada uno. El resto de la tela se utilizará para hacer abrigos. Si para hacer cada abrigo se necesitan 4 m de tela, ¿cuántos abrigos pueden hacerse?
Este problema se tomó de (Filloy, Puig y Rojano, 2008).

Conclusión

A manera de conclusión, y de acuerdo con la metodología *Lesson Study*, esta lección de investigación habrá que completarla con las otras dos etapas: la *Implementación* y la *Revisión*, que consiste en analizar y discutir los resultados (Murata, 2011). Una vez más, siguiendo la Teoría de la Objetivación, es necesario tener en cuenta que:

> La investigación de la objetivación se enfoca en la manera en que las formas cultural e históricamente codificadas de pensamiento y acción se convierten en objetos de reconocimiento u objetos de conciencia. Dado el rol mediador que tiene la actividad entre el saber y el conocimiento, la actividad

> es un componente clave de la investigación del proceso de objetivación. (D`Amore y Radford, 2017, p. 123).

En este proceso, el papel conjunto de profesor y alumnos implicados en la actividad es la condición que permitirá generar una reflexión y acción que actualice el saber en un contenido conceptual particular y consiente para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Blasco, F. (2016). *Matemagia*. Barcelona: Ariel.

Collette, J. P. (2006). *Historia de las matemáticas*. México: Siglo XXI editores.

D´Amore, B. y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

De la Peña, J. A. (1999). *Álgebra en todas partes*. México: Fondo de Cultura Económica.

Da Ponte, J.P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos, en *La actividad matemática en el aula*, Joaquim Giménez, L. S. y Ponte, J.P. coords. Barcelona: Graó.

Gómez i Urgellés, J. (2017). *Diofanto. El precursor del lenguaje aritmético*. España: RBA Editores.

Gónzalez Urbaneja, P.M. (2009). *Pitágoras. El filósofo del número*. México: Nivola.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson study research and practice in mathematics education: learning together*. New York: Springer.

Kline, M. (2012). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de Cultura Económica.

Lo, M. (2012) *Variation Theory and the improvement of the Theaching and Learning*. Acta Universitatis Ghotoburgensis.

Mason, J. (1996). Expressing Generality and Roots of Algebra. In Bernarz N., Kieran C. Lee L. (eds) *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching.* Mathematics Education Library. Sringer, Dordrecht.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. In Hart L., Alston A., Murata A. (eds) *Lesson Study Researchand Practice in Mathematics Education*. Springer, Dordrecht.

Radford, L. (2001). The Historical Origins of Algebraic Thinking, en Sutherland, R. Rojano, T., Lins, R. y Bell, A. (eds). *Perspectives on School Algebra, pp. 13-36.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129 (available at: http://luisradford.ca)

Radford, L. (2014). De la Teoría de la Objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática,* 7(2), 132-150.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 12(1), pp.45-56.

Salinas, J. y Maz, A. (2011). La aritmética pitagórica como un recurso para la introducción a la demostración. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebráico e Historia de la Matemática y Educación Matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Salinas, J., Adamuz-Povedano, N. y Jiménez-Fanjul, N. (2011). Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas. España: *Épsilon. Revista de Educación Matemática.* Vol. 28 (1), No. 77.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective*, Journal for Research in Mathematics Education, 2*(26), 114-145.

Filloy, E.; Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 327-342.

Vygotsky, L. S. & Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. In R. Van der Veer & J. Valsiner (Eds), *The Vygotsky reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell Publishers.

FORMACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE SITUACIONES-PROBLEMA

MATHEMATICAL TRAINING THROUGH SITUATIONS-PROBLEM

Carlos Daniel Prado Pérez
Tecnológico de Monterrey (México).
cprado@tec.mx

Resumen
Se presentan en este trabajo los aspectos esenciales del Modelo Educativo del Tecnológico de Monterrey para desarrollar una formación profesional con énfasis en la promoción de competencias disciplinares y personales. El modelo, que inició en agosto del año 2019, abarca a todas las carreras profesionales en las áreas de Negocios, Ciencias Sociales e Ingeniería. En este reporte, se pondrá de realce la formación matemática asociada a éstas. Se señalará también que una característica distintiva del modelo es su apego a situaciones-problema planteadas bajo el contexto de la realidad circundante. El Tecnológico de Monterrey ha materializado el esfuerzo de varios años en aras de ofrecer un Modelo Educativo orientado a la adquisición de competencias para lo cual los programas de estudio de todas las carreras se han desglosado en unidades de formación a las que se ha llamado bloques y materias. Estas unidades de formación tienen aspectos distintivos que los aleja de las interpretaciones convencionales y tradicionales tal y como se explicará en el presente artículo.

Palabras clave: situación, problema, modelo educativo

Abstract
This paper shows essential aspects of the Educational Model of Monterrey Technical College which approaches the development of professional training focused on fostering disciplinary and personal competences. The model, started in August 2019, covers all professional degrees in business, social sciences and engineering areas. This report highlights the mathematical training associated to these areas, and it also points out that a distinguishing characteristic of this model is that it is based on problem situations under the context of the surrounding reality. Monterrey Technical College has materialized its endeavor of many years in the interests of providing an educational model oriented to the acquisition of competences. So, the curricula of all the degree courses have been divided into training units which has been called thematic units and subjects. These training units have distinctive aspects that keep them away from conventional and traditional interpretations; the way it will be explained in this paper.

Key words: situation, problem, educational model

Introducción

Estudios realizados en el Tecnológico de Monterrey indican que los alumnos, que toman los cursos de matemáticas, no son capaces de analizar situaciones-problema en contexto debido al débil desarrollo de sus habilidades de resolución de problemas y porque los cursos sólo promueven el estudio de métodos algorítmicos (Santiago, Delgado y Quezada, 2012). Es habitual que, al trabajar con un curso de matemáticas, los profesores presenten los asuntos relacionados a los contenidos, pero deban sacrificar la modelización de la misma. De esta forma, se pierde así la posibilidad de utilizar las herramientas discutidas en el curso para describir fenómenos que ocurren en la economía, la demografía, la ecología, entre muchas otras áreas. Como consecuencia, los algoritmos y fórmulas estudiados no son apreciados y, ante la falta de contexto, pierden significado para los alumnos. Por si esto fuera poco, tampoco se logran avances significativos en sus competencias algorítmicas. Para atender esta situación, es que el Modelo Educativo aquí presentado parte del desarrollo de competencias, y lo hace a través del desarrollo de situaciones-problema cuya descripción se precisará más adelante.

Debe precisarse que la formación matemática que se reporta en este trabajo, está enmarcada dentro de una Educación Basada en Competencias (EBC), propuesta educativa del Tecnológico de Monterrey. Ésta difiere en varios aspectos de la educación tradicional. Por ejemplo, en la educación tradicional, la acreditación de un determinado nivel educativo se apoya primordialmente en un sistema de créditos por hora que se obtienen a lo largo de materias colocadas en una secuencia. En una EBC, se busca un esquema más integrador que parte de la idea de que el aprendizaje se obtiene de un conjunto de experiencias de vida que se entrelazan con el desarrollo cognitivo para desarrollar, además de los conocimientos propios de una disciplina, habilidades y actitudes que conforman la formación del estudiante tanto en el ámbito profesional como, no menos importante, la esfera de lo personal (Argudín, 2006). Bajo este marco educativo integral: persona-profesión, el Tecnológico de Monterrey se propuso brindar una formación disruptiva y alejada del enfoque tradicional para promover la competitividad de los estudiantes en su campo profesional a través de una educación basada en competencias, sin perder de vista su deliberado crecimiento personal (Tecnológico de Monterrey, 2018). La atención que se ha puesto en la educación basada en competencias se apoya en su relevancia para potenciar la capacidad de aprendizaje mediante una conjugación de conocimientos, habilidades y actitudes, aspectos que atienden el propósito de impulsar el binomio persona-profesión (Tecnológico de Monterrey, 2015a).

De esta forma el Modelo Educativo, vigente a partir de agosto de 2019, se apoya en un cambio de la didáctica general de las carreras, pero no solo esto. Como se ha dicho, el ámbito de la persona también es una cuestión de vital importancia que tiene varios reflejos, uno de los cuales se refiere a la administración de las carreras profesionales que ahora contempla tres grandes etapas: exploración, enfoque y especialización. Estas etapas posibilitan al estudiante, que posiblemente no se encuentre seguro acerca de la definición de elección de una carrera profesional, a examinar un panorama general, por ejemplo, de la ingeniería (esto es su propia exploración), antes de enfocarse en una línea particular la de misma (segunda etapa: enfoque), para finalmente, y una vez hecha su elección, especializarse en la ruta de formación profesional que haya decidido (especialización). Ahora bien, cada etapa fue estructurada en unidades didácticas llamadas unidades de formación, éstas son, a saber: bloques y materias, cuya descripción se precisará más adelante.

Como efecto inmediato de este Modelo Educativo, se rompieron los paradigmas tradicionales enfocados en la enseñanza, particularmente en las áreas de ciencias y matemáticas (D'Amore, 2005). De manera particular, en contraposición a una simple secuencia lógica de las materias, el desarrollo de competencias implica un esquema de bloques de conocimientos, entrelazados para atender problemáticas de diversa índole y bajo una idea general: competencias-aprendizaje-vida (Tecnológico de Monterrey, 2015a). Por lo tanto, el conocimiento por sí mismo ya no lo es todo bajo este esquema, otros saberes, acaso olvidados, o cuando menos no fomentados de manera deliberada en la educación tradicional, han tomado un lugar de relevancia capital en concordancia con el enfoque educativo expresado por la UNESCO, (Delors, 1996). De acuerdo con este reporte, la educación debe comprender:

aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir con los demás y aprender a ser; es notable que los últimos dos saberes estén relacionados con la persona.

Por lo tanto y, en resumen, la estructura curricular de todas las carreras profesionales se distribuye tal y como se muestra en la Figura 1.

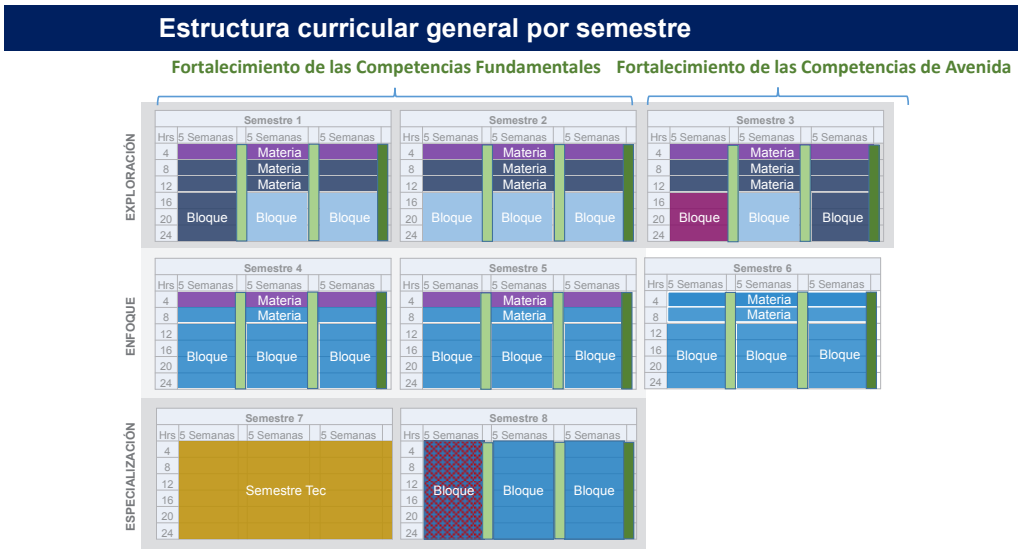


Figura 1. Aspecto general de la distribución de los semestres. Elaboración propia

Marco teórico

En este trabajo se propondrá la tesis sobre las delimitaciones y características de una situación-problema en la esfera de la matemática. Las siguientes son algunas precisiones que se requiere exponer para contextualizar el Modelo Educativo basado en competencias del Tecnológico de Monterrey. Como ya se ha indicado, en primer lugar, se debe comprender que el currículo en todas las carreras del Tecnológico de Monterrey se ha fragmentado en unidades de formación llamadas: bloques y materias. Las diferencias aparecen a continuación (Tecnológico de Monterrey, 2015b).

Bloque: Es una unidad de formación que promueve:

- El aprendizaje de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.
- Aborda varias disciplinas, razón por la cual de manera natural engloba varias áreas del saber.
- Enfatiza el aprendizaje de procesos, metodologías y estrategias para la solución de problemas.
- Se aplican los contenidos a problemas o necesidades reales y actuales del ámbito profesional, social de área o carrera.
- Promueve un aprendizaje más experiencial y situado en la profesión y la sociedad.
- Incorpora en su mayoría contenidos clásicos, sin embargo, los contenidos que van surgiendo dependiendo de las circunstancias, van en aumento con el fin de lograr una mejor conexión con el contexto actual tanto social como profesional.
- Incluye avances recientes en una o varias disciplinas.
- Promueve el desarrollo de uno o varios niveles de dominio en el logro de las competencias.

Materia: Es una unidad de formación más cercana al enfoque tradicional, pero con diferencias significativas que a continuación se enuncian:

- Promueve el aprendizaje de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales.
- Aborda de manera preferente el contenido de una sola disciplina, sin que esta condición le resulte limitativa.
- Incluye contenidos fundamentales del área o disciplina.
- Promueve el aprendizaje abstracto.
- Vincula los contenidos con situaciones reales, actuales y del entorno.
- Incluye en su mayoría contenidos clásicos.
- Promueve el desarrollo de uno o varios niveles de dominio en el logro de las competencias.

Este trabajo enfoca su atención en la unidad de formación llamada Materia, con énfasis en matemáticas. Antes de presentar la definición que delimitará la descripción de una situación-problema en matemáticas en el marco del Modelo Educativo del Tecnológico de Monterrey, se presentan a continuación tres ejemplos extraídos de autores que han puesto particular interés en ofrecer su visión sobre la aplicación de la matemática a la vida. Al finalizar la presentación de estos problemas de aplicación se analizará si satisfacen las condiciones requeridas de una situación-problema.

Problema 1. El Puente New River George. Este puente, tiene una longitud de 923.7 metros. Se terminó de construir en 1977, en Virginia Occidental, y describe el arco con mayor amplitud del mundo. Su peso total es de 4.3×10^7 kilogramos; su pieza más pesada es de 9.1×10^4 kilogramos.

a) ¿Cuántas veces es más grande el peso total del puente que el peso de la pieza más pesada?
b) ¿Cuál es la diferencia entre el peso total del puente y el de la pieza más pesada? (Angel, 2004, p. 58).

Problema 2. El promedio anual del gasto familiar es una función del ingreso familiar promedio anual. El gasto promedio puede calcularse por medio de la función:

$$f(i) = 0.6i + 5000, 3500 \leq i \leq 50000$$

Donde $f(i)$ es el gasto familiar promedio e "*i*" es el ingreso familiar promedio.

a) Trace una gráfica que muestre la relación entre el ingreso familiar promedio y el gasto familiar promedio.
b) Calcule el gasto familiar promedio para una familia con un ingreso promedio de $30,000.00. (Tan, 2012, p. 98).

Problema 3. Para una constante positiva *C*, el cambio de temperatura *T* en un paciente generado por una dosis *D* de un cierto fármaco se expresa por medio de:

$$T = \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right) D^2$$

a) ¿Qué dosis maximiza el cambio de temperatura?
b) La sensibilidad del organismo a la dosis *D* de la medicina se define mediante dT/dD.
c) ¿Qué dosis maximiza la sensibilidad? (Hughes-Hallet, et al., 2009, p. 180).

Antes de iniciar el análisis de los Problemas 1-3 anteriores, se toman como referencia adicional al Modelo Educativo aquí expuesto, dos trabajos (Brousseau,1999; Sadovsky, 2005). En ellos, se pone de realce la siguiente concepción que viene a modo en la búsqueda de las características de una situación-problema: "*el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como la ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje*".

Sobre esta base de concepciones y sin perder de vista las necesidades propias del Modelo Educativo, se inicia el análisis de los Problemas 1-3. Las siguientes son observaciones que saltan a la vista:

- En cada uno de los problemas anteriores se proporciona, sin más, la información matemática; es como si ésta surgiera de la nada. No se atiende una cuestión de suma importancia: ¿cómo se logran en la vida real formulaciones como las de los Problemas 2 y 3. En el mundo real se cuenta con datos, no con fórmulas. Es precisamente el enlace entre datos y fenómenos reales contra la formulación matemática, que se halla uno de los asuntos más complicados de la modelización matemática.
- En la modelización, otro aspecto de interés y complicación radica en hallar las formulaciones, o los criterios que den certidumbre para manipular los datos de una situación. Aquí en cambio, en los tres Problemas 1-3, aunque con un cierto disfraz de realidad, todo está hecho. Solo debe manipularse, en el problema más "complicado" con algo de cálculo diferencial. Sin embargo, buena parte del trabajo requerido recae sobre aspectos puramente operativos. En cuanto al manejo de datos, la posibilidad de utilizar tecnología se escapa porque ésta, entre otros elementos, resulta innecesaria dada la naturaleza de los problemas.
- Con planteamientos tan directos como los ejemplificados en los tres problemas anteriores, ¿cómo poner en juego un medio ambiente que le exija al alumno una adaptación a éste (Brousseau,1999; Sadovsky, 2005)?
- En el Problema 2, se proporciona información de una familia (todo sugiere que es ficticia). El problema entraña artificialidad y la percepción de algo ajeno a una cultura propia, inclusive deba decirse: de poco interés para alumnos que cursan una carrera profesional.
- En el Problema 3, se proporciona una fórmula matemática, pero no se dan señalamientos de la procedencia de la constante C, menos aún de cómo se obtiene la fórmula. Se señala el término "sensibilidad", pero no se indica qué efecto real tiene sobre el cuerpo, ni cómo se mide. Si la fórmula es experimental o no, no puede saberse tal y como ha sido presentada.
- En cada uno de los problemas se solicitan respuestas muy concretas, sin ir más allá de implicaciones sobre las cuales algún sector de la sociedad pudiese estar interesada.
- El planteamiento de los problemas es tan directo que siguen cayendo en el mismo patrón de un problema típico de libro de texto: se ofrece información (básica) y se solicitan cálculos muy puntuales sin conectar con otras áreas del saber. Los contextos parecen ser tan solo un pretexto para ofrecer la apariencia de aplicabilidad.
- No se deja nada a la averiguación por parte del estudiante, como podría ser una búsqueda. No cabe la necesidad de utilizar bases de datos de diversas fuentes de información. No, no se hace esto; todo se plantea tanto que solo hay que dar un pequeño empujoncito operativo.

En resumen, aunque los problemas aparentan ofrecer una aplicación, ésta se disipa porque cada problema ha perdido su esencia: habilidad-conocimiento-aplicación-vivencia real. Tal y como se desarrollará en lo que sigue, las situaciones-problema deben asociarse a contextos más bastos en cuanto a la generación de aprendizajes, habilidades y conexiones con el "mundo real". Adaptando la definición de reto de la que hay una descripción muy clara en el Modelo Educativo del Tecnológico de Monterrey, la siguiente descripción para situación-problema (Tecnológico de Monterrey, 2015b) quedaría de la siguiente manera:

"Una situación-problema es una actividad, tarea o situación que implica un estímulo y un desafío para el estudiante y en la que debe poner en juego sus habilidades y conocimientos a fin de ofrecer una solución".

Por lo tanto, de acuerdo con esto una situación-problema tiene como principio fundamental que los estudiantes aprenden mejor cuando participan de forma activa en experiencias de vida que cuando participan de manera pasiva al recibir una clase en su forma tradicional.

Recientemente, se han dado orientaciones sobre la pertinencia de incorporar el uso de la experimentación computacional y actividades retadoras o problemas reales para provocar una mejora en nuestros conceptos de

matemáticas. Al proponer situaciones-problema reales, factibles de representarse mediante modelos matemáticos, se puede incentivar la contextualización del conocimiento matemático. En general, estos modelos surgen de manera natural cuando se tiene la necesidad de responder preguntas específicas en situaciones reales, cuando se requiere tomar decisiones o cuando es necesario hacer predicciones relacionadas con fenómenos naturales; por ejemplo, analizar resultados médicos, predecir el clima, o decidir cursos de acción ante los fenómenos económicos.

Lehrer y Schauble (2000) sugieren, como hipótesis, que la introducción de la modelización al aula permitirá que los alumnos enfrenten situaciones de interés que desarrollarán su capacidad de explorar y obtener formas de representarlas, que podrán explorar las relaciones que aparecen en esas representaciones y manipularlas para desarrollar ideas importantes y que reducirán sus errores en conceptualización. Sin embargo, en general, el planteamiento no es simple y la construcción de modelos requiere de práctica. Aunque la práctica docente hace dudar ciertamente acerca de las bondades del uso de la modelización y por ende de la generación de la competencia matemática a través de esta metodología, muchos investigadores se adhieren a la idea de que los estudiantes aprenderán por el simple hecho de enfrentarlos, y hacerlos conscientes de ello, a un ambiente de situaciones-problema. De acuerdo con esto, se puede concluir que la solución misma de una situación-problema no es lo único importante, también lo es el proceso mismo. Entre las varias posturas existentes en el ámbito de la modelización, la llamada “Modelos y Modelación” (Trigueros, 2009) se enfatiza la construcción, por parte de los alumnos, de sistemas conceptuales o modelos cuando ellos trabajan con una situación en contexto para favorecer el proceso de matematización.

Esta postura complementa los rasgos distintivos en cuanto a formación profesional de una situación-problema, a saber: la primera, consiste en preparar a los estudiantes para planear y resolver el tipo de problemas que enfrentarán fuera de un ambiente académico. La segunda es relacionar este tipo de problemas con los temas que se estudian en las matemáticas escolares, aunque esa relación no sea clara y evidente. En esta línea de investigación el interés se centra en que los estudiantes desarrollen formas flexibles y creativas de pensar que les permitan abordar las situaciones que se les presentan (Lesh y English, 2005).

Diseño de una situación problema

Como se ha ejemplificado en el apartado anterior, el diseño de una situación-problema no se reduce a tan solo colocar una fórmula matemática en un determinado contexto aparentemente real. La tesis de este trabajo es que una situación-problema debe ser tal que:

- Permita la naturalidad de un análisis a través de un modelo matemático con algún enfoque: numérico, gráfico, verbal o analítico, sin quedar limitado a este último.
- Lleve a la explicación de un fenómeno, a la proyección de una estimación, y/o a la simulación de alguna parte de la realidad.
- Promueva la esencia de la modelización: la simplificación de algún aspecto de la realidad que origine interpretaciones de esa realidad.
- Obligue al razonamiento y a la solución de problemas a partir de la elaboración de posibles estrategias, pretextos todos ellos para la generación de competencias disciplinares y transversales.
- Posibilite el uso de diversas bases de datos que lleven a la vinculación, interpretación, simulación y/o predicción de un fenómeno y que por lo mismo no evada el posible uso de la tecnología en cuanto a la búsqueda de información como al uso de software especializado.

Así el marco de condiciones a través de las cuales una situación-problema se califica como idónea en el contexto del Modelo Educativo. El trabajo realizado en matemáticas ha llevado al diseño y generación de situaciones-problema que comprenden las anteriores características. Las materias, y los bloques dentro de los cuales se han

colocado las situaciones-problema y los retos se han situado dentro de un diseño preestablecido en una plataforma llamada CANVAS. La Figura 2 muestra el aspecto del Tablero de materias y bloques dentro de la referida plataforma.

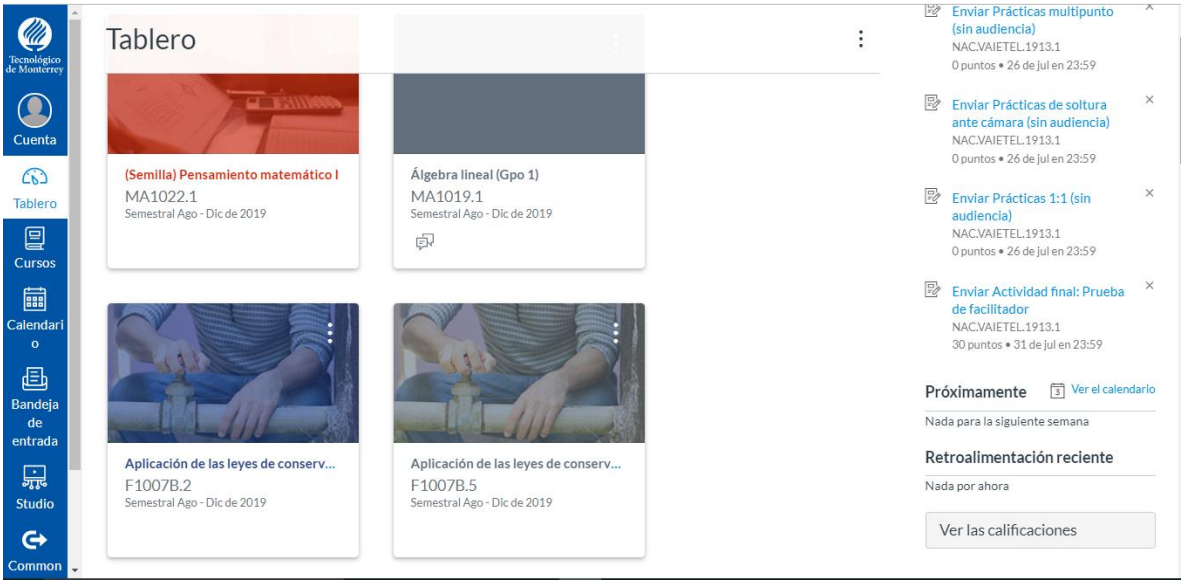


Figura 2. Bloques y materias ubicados en CANVAS. Tablero de CANVAS

La Figura 3 ofrece una vista de la página de CANVAS con sus elementos constitutivos en cuanto a la información básica de una situación problema: competencias, contenidos de aprendizaje, metodología y plan de evaluación.

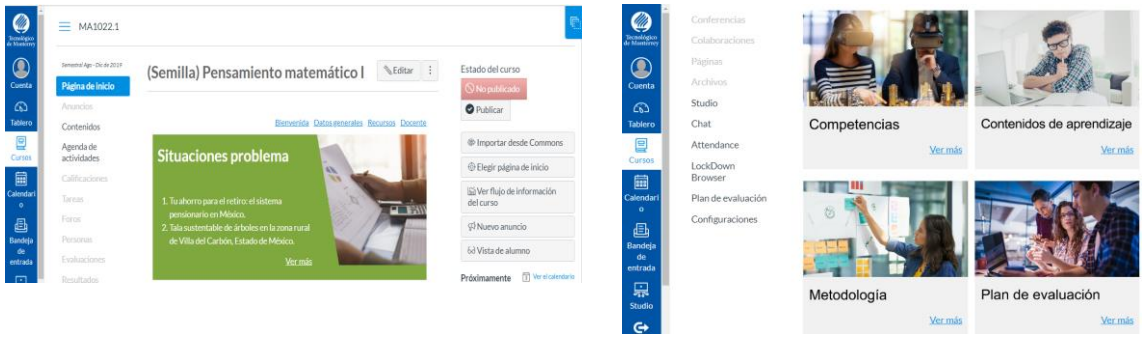


Figura 3. Administración de una materia o bloque. Página de CANVAS

A continuación, se enlistan algunos ejemplos de situaciones-problema que han sido planteados por el autor del presente trabajo y que cubren el perfil indicado.

Problema 1. Realidad pensionaria de las nuevas generaciones en México.

Destinatarios: Primer semestre de todas las carreras de Ciencias Sociales.

De acuerdo con los expertos, para asegurar una pensión digna el trabajador debería ahorrar al menos el 12% de su ingreso, y en caso de aspirar al 100% de su ingreso debería ahorrar hasta el 36% de su sueldo; una condición alejada de la realidad presente. Las noticias sobre el tema abundan. Los aspectos más significativos giran en torno a los aspectos de cobertura, suficiencia, temporalidad y crisis tanto personal como fiscal. Como a las generaciones jóvenes en México les corresponde la ley de pensiones de 1997, toda persona en este caso debe conformar su fondo de pensión, y solo en la medida de su ahorro podrá disfrutar por más tiempo de una pensión suficiente para satisfacer sus necesidades.

Para análisis:
Con base en una estimación a valores presentes (con proyección de valor futuro del dinero), ¿cómo se puede conseguir durante la vida laboral un monto de ahorro suficiente para vivir la vejez con autonomía y suficiencia? La respuesta debe acompañarse con los cálculos y análisis correspondiente.

*Problema 2***.** Tala sustentable de árboles en la zona rural de Villa del Carbón, Estado de México.

Destinatarios: Primer semestre de todas las carreras de Ingeniería.

Una comunidad en Villa del Carbón (zona rural en el Estado de México) siembra y administra la tala de sus recursos madereros. Se cuestiona el momento más conveniente para realizar la tala de una zona de esa región. Se analizan dos posibilidades:
A) Talar la plantación esperando la total madurez de los árboles
B) Talar los árboles en algún momento anterior a su total madurez (¿qué momento es el más conveniente?)

Para análisis:
Considerando aspectos de sostenibilidad, ¿cuál es mejor la opción entre las dos anteriores? Fundamenta tu respuesta con argumentos bien sustentados y los cálculos adecuados.

*Problema 3***.** Ingresos promedio de una armadora de vehículos en México.

Destinatarios: Tercer semestre de las carreras en ingeniería, negocios y particularmente finanzas.

Hace unos 6 años ingresó a nuestro país una empresa armadora de automóviles, que con el paso del tiempo adquirió una presencia insospechada en México (por obvias razones se omite el nombre de la empresa). Sobre la base de los datos que la misma empresa colocó en internet, se requirió una valoración de negocios apoyada sobre los ingresos promedio de esta empresa a lo largo de su primer año en México. De haber sido el CEO de KIA hace 6 años, después de analizar el estudio realizado y antes de ingresar en México, ¿te hubiese parecido buena idea penetrar en el mercado mexicano?

En total se han generado alrededor de 23 situaciones-problema de este tipo, todas ellas comparten algunas de las siguientes características:

- Tienen un contexto con verdadero apego a la realidad.
- No se ofrecen fórmulas, los cálculos requeridos no son de aplicación inmediata; sin embargo, se dan las condiciones a fin de que éstos resulten viables dentro de un trabajo en equipo.
- Requieren los contenidos temáticos en matemáticas, pero no se limitan a ellos necesariamente.
- Se espera que los alumnos generen modelos matemáticos de estudio, o que trabajen directamente con datos que ellos mismos deben localizar en diversas fuentes de información.
- Todos requieren software, frecuentemente el enfoque analítico no es viable debido a su complejidad.
- Se proponen para que se desarrollen en ambientes de trabajo en equipo.

- Tienen como intención educativa el desarrollo de competencias.
- Todas ellas han sido colocadas en alguna página electrónica, CANVAS o Weebly.

Investigación

Como se ha dicho en este trabajo, el Modelo Educativo iniciará su implementación a partir de agosto de 2019. Aunque la educación basada en competencias cuenta con investigaciones al respecto de sus puntos fuertes y débiles (Conchado y Carot, 2013), debe decirse que éstos no pueden aplicarse inmediatamente en lo concerniente al modelo aquí presentado porque el Modelo Educativo, del que trata este trabajo, no es un esfuerzo aislado por parte de un profesor, no tiene que ver solo con algunas carreras, ni con una parte de alguna de ellas; uno de los aspectos fuertes del Modelo Educativo del Tecnológico de Monterrey es su aplicación irrestricta y generalizada en todas las áreas, en todas las unidades de formación y a lo largo de todas y cada una de las carreras profesionales en todos sus Campus. En efecto, hay diversos aspectos que este trabajo, dado su enfoque prácticamente exclusivo para el área de matemáticas, no ha mostrado con relación al esfuerzo integral de toda la institución.

Sigue, por supuesto, la interrogante: en los términos y objetivos que se ha planteado la institución para potenciar el binomio persona-profesionista, ¿es mejor para este fin, la educación basada en competencias o la que está orientada por los contenidos de la curricula tradicional de una carrera profesional? La respuesta no es trivial, y no puede plantearse a corto plazo porque el desarrollo de competencias y la correspondiente evaluación de las mismas, requiere mucho más que la evaluación de los conocimientos del enfoque tradicional.

La atención se centra ahora en la formación integral de los estudiantes en cuanto al binomio persona-profesionista, y tendrá que darse tiempo para valorar si en la medida en que se implemente o se complete una primera generación el resultado, en cuanto a competencias personales y profesionales, ha dado los resultados esperados. El Tecnológico de Monterrey tiene contemplada esta valoración a través de su departamento de Efectividad Institucional, pero por el momento solo podrá confiarse en la experiencia que a favor han señalado muchos investigadores especialistas en el tema, y varias instituciones de educación superior que han implementado un modelo semejante con resultados muy favorables.

Resultados

Una cuestión de indudable interés en el proceso de implementación estriba en la percepción que de las situaciones-problema se hayan formado los estudiantes en los cursos de matemáticas hasta este momento. Lo que se presenta en las siguientes Figuras 4-6 corresponde a la opinión que los alumnos en el Campus Estado de México del Tecnológico de Monterrey han emitido sobre este particular. Estas evaluaciones se han generado dentro de un preámbulo a la implementación integral del Modelo Educativo aquí presentado. Tal vez, uno de los aspectos a destacar sea el que se refiere a que, en general, los alumnos se sorprenden al notar cómo la matemática puede tener aplicaciones tan francas en la vida diaria:

Campus Estado de México	[MA1016] Matemáticas I	2	31	21	Aplica la clase a cosas útiles y reales

Figura 4. Comentario acerca de la incorporación de situaciones-problema. Sistema de Encuestas del Tecnológico de Monterrey, 2019

La implementación de un proceso educativo en el que se insiste en modelación matemática puede no ser tan simple como aquella didáctica en la que se lleva al estudiante a la repetición de ideas y procedimientos discutidos en clase:

Campus Estado de México	[MA1016] Matemáticas I	2	31	21	Estoy aprendiendo mucho en las clases, aunque me cuesta un poco a veces razonar yo solito.

Figura 5. Percepción sobre dificultad en el análisis de situaciones-problema. Sistema de Encuestas del Tecnológico de Monterrey, 2019

La valoración que hace el estudiante es del todo alentadora.

Campus Estado de México	[MA1016] Matemáticas I	5	33	30	Es el mejor profesor de matemáticas que he tenido, ademas es muy practica la manera en que muestra las matemáticas y las enfoca en un uso real

Figura 6. Percepción sobre motivación por la incorporación de situaciones-problema. Sistema de Encuestas del Tecnológico de Monterrey, 2019

Conclusiones

El Modelo Educativo que se ha expuesto en este artículo le ha significado al Tecnológico de Monterrey todo un reto durante al menos 5 años. En éstos, se han conjugado los esfuerzos diversos del cuerpo académico y administrativo en aras de ofrecer una educación donde la atención a la persona, eventualmente el profesionista de alguna de sus carreras profesionales, sea un punto-enfoque de importancia capital. Y éste será posiblemente uno de los aspectos más relevantes de la propuesta educativa. Al margen de que esto no signifique que otros enfoques no hayan logrado avances sustanciales en este sentido, subsiste como tesis de este trabajo que lo que aquí se presenta tiene un carácter deliberado, metódico y sistemático a tal punto que ha movido la curricula tradicional en varios sentidos. Lo que aquí se ha señalado, se ha indicado tan solo para la formación matemática, pero ésta es en última instancia tan solo una de las caras de un conjunto enorme de éstas con las que el esfuerzo de un gran grupo de personas ha buscado dar un sentido humano a la educación, una revolución educativa que conforme mejores profesionistas, pero mejor aún que esto: mejores seres humanos.

Referencias bibliográficas

Angel, A. (2004). Álgebra intermedia. México: Pearson.

Argudín, Y. (2006). Educación Basada en Competencias: nociones y antecedentes. México: Trillas.

Brousseau, G. (1999). Educación y Didáctica de las Matemáticas. México: Educación Matemática.

Conchado, A. y Carot, J.M. (2013). Puntos fuertes y débiles en la formación por competencias. Revista de docencia universitaria, Vol. 11 (1) Enero-abril, 2013. Recuperado de: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4244037.pdf.

D'Amore, B. (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. Ciudad de México: Editorial Reverté.

Delors, J. La educación encierra un tesoro: Informe para la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI. México: Ediciones UNESCO, 1996.

Hughes-Hallett, D., Gleason, A., Lock, P., Flath, D., Gordon, S., Lomen, D., Lovelock, D., McCallum, W., Osgood, B., Quinney, D., Pasquale, A., Rhea, K., Tecosky-Feldman, J., Trash, J., Tucker, T. (2009). Cálculo Aplicado. México: Grupo Editorial Patria.

Lehrer, R., & Schauble, L. The development of model-based reasoning, *Journal of Applied Developmental Psychology*, 21(1), 2000, pp. 39-48.

Lesh, R. & English, L. Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving, ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 37(6), 2005, pp. 487-489.

Sadovsky, P. (2005). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la Matemática [Archivo electrónico]. Recuperado de https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Santiago, R., Delgado, D. & Quezada, M. (2012) Sistema de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas basado en Web. Compendio de innovación Educativa 2012.

Tan, S. (2012). Matemáticas Aplicadas a los Negocios, las Ciencias Sociales y de la Vida. México: CENGAGE Learning.

Tecnológico de Monterrey (2015a). Reporte EduTrends "Educación Basada en Competencias". Recuperado de: https://observatorio.itesm.mx/redutrends/

Tecnológico de Monterrey (2015b). Reporte EduTrends "Aprendizaje Basado en Retos" Recuperado de: https://observatorio.itesm.mx/redutrends/

Tecnológico de Monterrey (2018). Reporte EduTrends "Modelo Educativo del Tecnológico de Monterrey". Recuperado de: https://observatorio.itesm.mx/redutrends/

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, 9(46), 75-87.

BILLETES DECIMALES, MATERIAL DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

DECIMAL BANKNOTES, DIDACTIC MATERIAL FOR TEACHING OF THE DECIMAL NUMBERING SYSTEM

Olga Emilia Botero Hernández
Universidad de Antioquia (Colombia).
oebotero@gmail.com

Resumen
Se presenta a continuación el material didáctico denominado billetes decimales, que surgió como una posible respuesta a las dificultades particulares que se observaron en un grupo de estudiantes de educación básica primaria. Se analizaron los diferentes enfoques didácticos relacionados con la enseñanza del sistema de numeración decimal y se diseñó un conjunto de fichas con denominaciones de potencias de 10 que pudiesen representar las unidades de diferente orden del sistema de numeración decimal posicional, con las cuales los niños interactuaron de forma concreta en diversos contextos cotidianos para ellos. Después de emplearlos se concluyó que favorecieron en los niños su comprensión de las relaciones y propiedades del sistema de numeración decimal y de las operaciones básicas de adición y sustracción.

Palabras clave: billetes decimales, sistema numeración decimal

Abstract
This paper presents the teaching material called decimal bills, which arose as a possible answer to the specific difficulties observed in a group of primary basic education students. Different approaches related to the decimal number system were analyzed. So, a set of cards was designed, involving base-ten power denominations that could represent the different-order units of the positional decimal number system, which the children interacted with, specifically in their different daily contexts. After putting such cards into practice, it was evidenced they enhance children' understanding of the decimal number system properties and relationships, as well as, addition and subtraction basic operations.

Key words: decimal bills, decimal number system

Introducción

En este trabajo se presenta el material didáctico Billetes Decimales, el contexto en el cual tuvo su origen, los referentes teóricos que soportan su diseño y su utilización en el aula de clase, algunos ejemplos de tareas que se han desarrollado con los niños y algunas conclusiones que se han derivado de las experiencias e investigaciones, posteriores a su diseño, en las cuales se han utilizado los billetes decimales. Este material se diseñó con el propósito de constituir una propuesta para la enseñanza de las matemáticas en los primeros grados de escolaridad, de manera particular para la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal (en adelante SND) y de las formas básicas de calcular adiciones y sustracciones, como respuesta a las múltiples dificultades que se observaron en los estudiantes de estos grados iniciales, con relación a las nociones mencionadas.

Al incluir este material en el proceso de enseñanza y aprendizaje del SND se pretende que los niños alcancen un mayor nivel de comprensión de las relaciones entre las unidades de diferente orden y de las características del funcionamiento del SND, de modo que, de acuerdo con Terigi y Wolman (2007) el proceso de aprendizaje del SND y de las operaciones adición y sustracción se lleve a cabo, por parte de los niños, de manera simultánea y que sus estrategias de cálculo no dependan de manera exclusiva de la utilización de los algoritmos convencionales con lápiz y papel.

El aporte fundamental de los billetes decimales a la matemática educativa es ofrecer a los docentes un medio que permita a los niños que están en el proceso de constitución del SND y de aprendizaje de las Estructuras Aditivas (Vergnaud, 1991) y sus operaciones adición y sustracción, comprender los principios que rigen el sistema y las operaciones subyacentes a la notación numérica (Terigi y Wolman, 2007), de manera que puedan representar y manipular las unidades del SND y sus relaciones de forma concreta. Este material permite superar algunas dificultades que se presentan al emplear otros materiales que se utilizan en la escuela para la enseñanza del SND. Con relación al ábaco, la principal ventaja que presentan los billetes es que la relación de equivalencia entre una decena y diez unidades se hace evidente, en tanto al trabajar con este instrumento, esta relación no es evidente ya que la arandela que se retira de la segunda barra (la de las decenas) es exactamente igual a las que están en la primera barra (la de las unidades), haciendo que los niños presenten confusiones acerca del SND pues tanto la arandela de la unidad como la de la decena son idénticas y su uso se restringe a la representación de numerales en las barras del ábaco. En cuanto a los bloques de Dienes, la ventaja que presentan los billetes decimales consiste en permitir que se lleve a cabo una abstracción con respecto a las unidades de diferente orden y se reconozcan como cantidades, en tanto dicho material, por su diseño, conlleva a la realización de conteos uno a uno, sin establecer una abstracción sobre las equivalencias entre las unidades de diferente orden.

Una de las posibilidades más relevantes en cuanto al uso de los billetes decimales es que permite hacer explícitas las relaciones de adición presentes en la representación numérica de nuestro Sistema de Numeración Decimal, potenciar habilidades de cálculo mental y posibilitar así la comprensión y posterior uso de algoritmos convencionales en tanto permite dotar de significado las reglas subyacentes a su utilización a partir de la composición y descomposición en las unidades del sistema. El trabajo con los billetes decimales en la escuela permite que los estudiantes realicen procesos como composición y descomposición de unidades, fundamentales para la comprensión de los algoritmos convencionales de adición, sustracción y división.

El presente artículo está compuesto por cuatro apartados, el primero corresponde a la descripción del contexto y de la problemática que dio origen a los billetes decimales, en el segundo apartado se presentan los referentes a nivel teórico que fundamentan la pertinencia y las características propias del material en cuestión, en el tercero se presentan tareas que se han desarrollado con los niños y, por último, el lector podrá encontrar algunas de las conclusiones que se han derivado de la implementación de tareas con los billetes decimales en investigaciones y experiencias de aula.

Problemática

Los billetes decimales surgieron en el contexto de la clase de matemáticas del segundo grado de básica primaria en un colegio privado de la ciudad de Medellín, Colombia, en el año 2010. Al inicio del año escolar se lleva a cabo, en este colegio, un repaso general de las nociones y conceptos abordados durante el grado primero, durante este repaso inicial del sistema de numeración decimal (SND) y de las operaciones adición y sustracción los niños debían resolver diversas tareas en el aula que implicaban descomponer cantidades en unidades, decenas y centenas y realizar adiciones sencillas.

Ante estas tareas los niños manifestaron la necesidad de dibujar una casilla conformada por
tres columnas y sus correspondientes encabezados de unidades, decenas y centenas para descomponer los números y recurrieron, de manera exclusiva, a la escritura de las sumas y restas de forma vertical para hallar su resultado. Mostrando así poca habilidad para establecer las relaciones entre las diferentes unidades del SND, sus descomposiciones y sus valores relativos y absolutos. De la misma manera que se evidenció en los niños dificultad para componer y descomponer cantidades y poco dominio de las reglas que subyacen al funcionamiento del SND. En la imagen 1 se muestra la descomposición en unidades, decenas y centenas de tres números diferentes, realizadas por los niños durante las actividades de repaso.

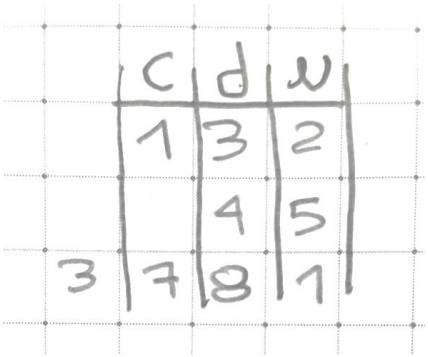


Imagen 1: Casilla empleada convencionalmente para descomponer cantidades.
(Fotografía tomada el 18 de febrero de 2010)

Ante este panorama toman fuerza los planteamientos de Brissiaud (1993), quien afirma que cuando los niños comienzan el aprendizaje del SND y de las operaciones básicas es necesario conducirlos a realizar procesos de cálculo, que vayan más allá del conteo con colecciones analógicas y que les permitan establecer relaciones entre cantidades a partir de su representación simbólica. En esta etapa es fundamental desarrollar tareas a partir de materiales que le permitan al niño comprender la estructura del sistema de numeración decimal (Obando, Vanegas & Vásquez, 2006), para lo cual Martínez (2000), propone utilizar material estructurado que tenga de manera visible unos, dieces y otras potencias de 10.

A partir de lo propuesto por Martínez (2000), se implementó en el aula en la que se evidenciaron las dificultades mencionadas, un proyecto acerca de la tienda, en el que la moneda a emplear eran billetes con denominaciones de $1, $10, $100 y $1000 para que los niños manipularan las unidades del SND y establecieran relaciones entre ellas. Este material les permitió descomponer numerales como el 132 de diferentes formas, a saber: la estándar, en la que se pone de manifiesto la adición, que existe entre cada potencia de diez, correspondiente a un billete de $100, tres billetes de $10 y dos billetes de $1, y formas alternativas a partir de cambios entre unidades, como en un billete de $100, dos billetes de $10 y doce billetes de $1, entre otras. En la imagen 2 se observan cuatro posibles maneras de descomponer el 132.

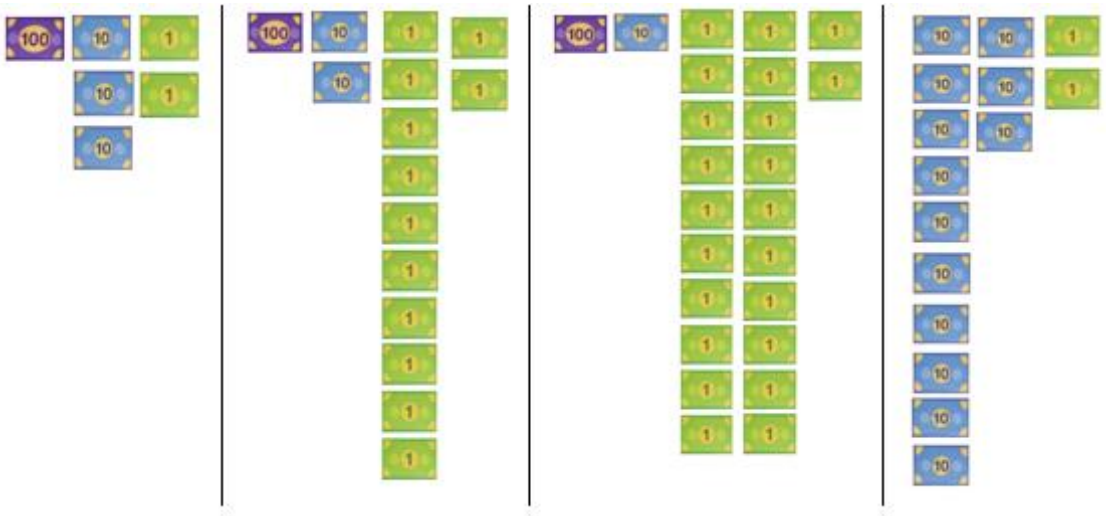


Imagen 2: Arreglos posibles para representar el 132.
Elaboración propia.

Los niños realizaron adiciones y sustracciones sin recurrir exclusivamente al algoritmo vertical, pues en cálculos como 13 + 18, lograron concluir que un billete de $10 más otro billete de $10 son $20 y los tres de $1 y los 8 de $1 permiten tener once de $1, de los cuales diez se pueden cambiar por uno de $10, para un total de $31. El procedimiento descrito se observa en la imagen 3.

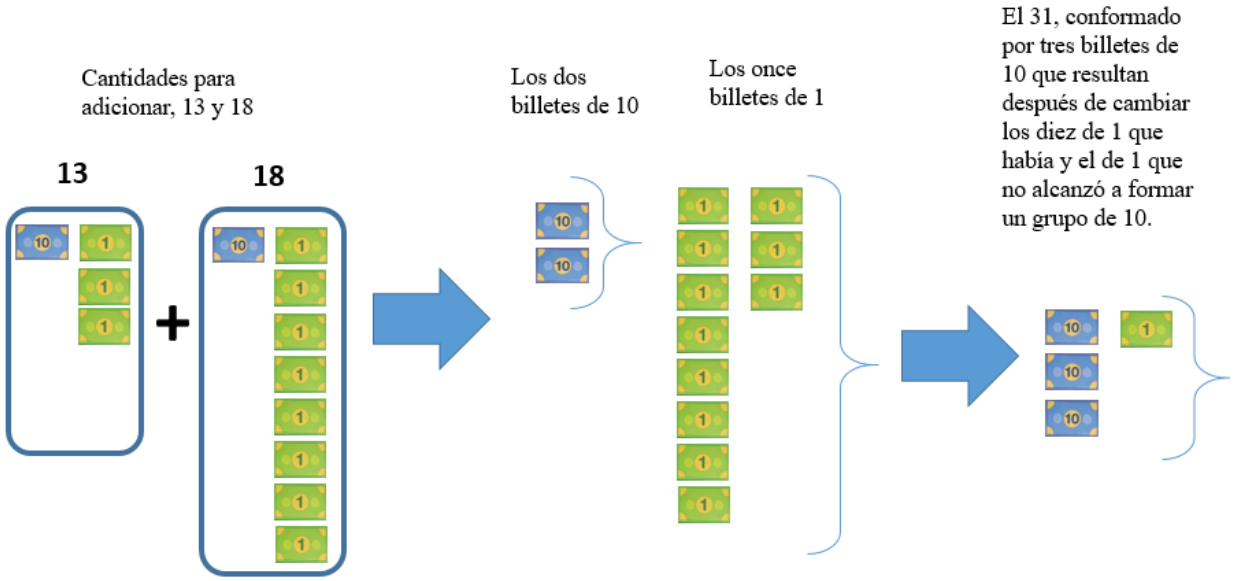


Imagen 3: Adición de 13 + 18 = 31 con los billetes decimales.
Elaboración propia.

Ante los resultados obtenidos al emplear este material estructurado, se validó su utilidad en una investigación de pregrado, calificada como trabajo meritorio, (Jiménez, Cautiva y Zapata, 2017) y se llevaron a cabo los talleres denominados "Los billetes decimales: más allá de Unidades, Decenas y Centenas en la enseñanza del Sistema de

Numeración Decimal" (Botero y Jiménez, 2017) en el II Cemacyc del 2017 en la ciudad de Cali, Colombia y "Ábaco, regletas, bloques multibase y billetes decimales: posibilidades y restricciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración" (Botero y Jiménez, 2019) en el XV CIAEM del 2019 en la ciudad de Medellín, Colombia. Otra investigación a nivel de pregrado que incorporó este material en alguna de sus tareas (Gaviria y López, 2018) mostró su utilidad en el proceso de aprendizaje de las estructuras aditivas y se utiliza en la actualidad como material didáctico e instrumento de cálculo en la clase de matemáticas de los grados 1°, 2° y 3° de una institución de carácter privado en la ciudad de Medellín.

Fundamentos teóricos

Para Vygotsky (1981), la acción mediada instrumentalmente hace parte fundamental del desarrollo de los procesos psicológicos superiores, en tanto el sujeto transforma la realidad y se transforma a sí mismo a partir del uso que hace de diferentes instrumentos simbólicos para actuar sobre dicha realidad. Es así como en la misma línea Obando, Arboleda y Vasco (2014) se refieren a la importancia de los instrumentos como mediadores de la actividad matemática del sujeto ya que "median las prácticas matemáticas en el aula de clase, dado que cristalizan en su estructura ciertas formas de relación que pueden ser puestas en analogía con formas de relación entre conceptos y objetos matemáticos" (p. 85). Los billetes decimales permiten que el niño establezca la analogía existente entre diferentes unidades del SND, como la relación entre diez unidades y una decena que el niño puede "materializarla" a través de la relación entre diez fichas de 1 y una ficha de 10 a l que equivalen.

Los instrumentos, según Leontiev (1978), citado Obando, Arboleda y Vasco (2014, p.85), corresponden a "ese conjunto de recursos simbólicos —signos, símbolos, textos, fórmulas, medios gráfico-simbólicos, artefactos, software, gestos— que constituyen los medios para la acción matemática"

Se optó por recurrir a este material manipulativo en tanto constituye un modelo físico que permite comprender las relaciones entre las unidades del SND, en consonancia con los planteamientos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, que en sus documentos rectores afirman que el uso de materiales manipulativos es importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en tanto "los modelos y materiales físicos y manipulativos ayudan a comprender que las matemáticas no son simplemente una memorización de reglas y algoritmos, sino que tienen sentido, son lógicas, potencian la capacidad de pensar y son divertidas" (MEN, 2006, p. 54). En los Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas se plantea como uno de los principales propósitos "que los niños logren entender el significado de los números, además del uso cotidiano, hay que darles la oportunidad de realizar experiencias en las que utilicen materiales físicos y permitirles que expresen sus reflexiones sobre sus acciones y vayan construyendo sus propios significados" (MEN, 1998, p. 46).

A lo largo de las décadas de 1960 y 1980 se desarrollaron varias teorías didácticas (Mialaret, 1962 y Kamii, 1989) que sostenían que los conocimientos de la serie numérica y del Sistema de Numeración Decimal se aprenden en una secuencia que inicia con la manipulación de material concreto para contar, luego semiconcreto y por último abstracto, de manera que los niños lograran generalizar relaciones numéricas, sin embargo autores como Silva A. y Varela C. (2010) plantean que estos materiales, como el ábaco, los bloques multibase, las regletas de colores, entre otros, no permiten establecer la distinción entre el conteo y el sistema de numeración decimal, dado que el material se usa tanto para contar como para trabajar con los símbolos numéricos.

> La enseñanza usual se diseña sobre el supuesto de que los niños tienen que comprender el sistema de numeración antes de comenzar a utilizarlo, pues el uso deviene de la correcta aplicación de los principios conceptuales que rigen al sistema. Se establece, entonces, un proceso didáctico que comienza con la explicación por parte del docente del principio de agrupamiento en base diez que rige al sistema, y que promueve luego la aplicación de ese principio a diversas situaciones de uso, como la resolución de pequeñas cuentas, el dictado de números, etcétera (Terigi y Wolman, 2007, p.72).

Si bien no se reconoce esta práctica como errónea, si es posible mencionar que es una práctica bastante extendida y que no permite que los niños detecten regularidades en la elaboración de la secuencia numérica ni que comprendan los mecanismos de acción, (agrupar y desagrupar) subyacentes al cálculo de las operaciones matemáticas adición, sustracción y división. Es por esto que mediante la utilización de los Billetes Decimales se pretende que el niño logre establecer la distinción entre el conteo y los símbolos numéricos, en tanto los billetes de 1, permiten que se lleve a cabo un conteo de colecciones y a su vez los símbolos impresos en los billetes, 1, 10, 100 etc., permiten trabajar con símbolos numéricos que representan las unidades de diferente orden del Sistema de Numeración y hacen posible hacer conteos de colecciones mayores, de diez en diez o de cien en cien, etc. Este material hace posible que los niños se aproximen, de manera simultánea a los procesos de numeración, de comprensión del SND y de cálculo de operaciones adición y sustracción, que como lo señalan Terigi y Wolman (2007) debe ser un aprendizaje simultáneo de manera que no se lleve a cabo de manera fragmentada.

Diseño de tareas

A continuación, se ofrecen ejemplos de actividades y juegos llevados a cabo con los estudiantes que ilustran al lector en la forma en que se utilizan las fichas numéricas para representar cantidades, favorecer procesos de cálculo, llevar a cabo adiciones, sustracciones y divisiones.

Serpiente numérica: favorece procesos de cálculo rápido con base en las unidades del sistema de numeración decimal. Se trata de formar una hilera de fichas y llevar la cuenta, mentalmente, del total de puntos que se representan allí. Por turno cada integrante del juego (pueden ser varios jugadores) añade una ficha numérica y enuncia verbalmente la cantidad que representa la serpiente, a medida que alguien añade una ficha debe enunciar la nueva cantidad. Pierde quien olvide la cuenta de la serpiente. Se puede repetir cuantas veces sea necesario y de acuerdo con el nivel de los niños puede variar su longitud. Este juego puede apoyarse del uso y registro en tabla para observar la regularidad en el aspecto escrito de los numerales.

Esta actividad favorece en los niños el cálculo de adiciones y sustracciones en potencias de diez, de manera que, ante cada nueva pieza que modifica la fila, deben determinar cuál de las unidades es la que se modifica, para dar cuenta de la cantidad de puntos totales. El ejemplo de la imagen 4 ilustra los billetes que se fueron agregando, uno a la vez, hasta completar la serpiente numérica cuyo puntaje total fue de 352 y la tabla 1 presenta el registro que se completa durante el proceso y que permite a los niños establecer regularidades.

Imagen 4: Fila numérica o serpiente. Elaboración propia.

Ficha agregada	Puntaje total
1	1
10	11
100	111
10	121
10	131
1	132
100	232
10	242
100	342
10	352

Tabla 1: Registro durante la formación de la serpiente numérica. Elaboración propia

Para resolver adiciones: la principal ventaja de llevar a cabo adiciones con este material es que les permite a los alumnos hacerlo de manera "natural", similar al manejo del dinero y no se ven forzados a iniciar los cálculos por la "casilla de la derecha" como es el caso de los algoritmos convencionales. También les permite a los niños dotar de sentido la acción convencional de "llevar", en tanto el material hace evidente que realmente se realiza un cambio de varias unidades que están desagrupadas, por una unidad que las reúne.

El ejemplo que se presenta en la imagen 5 ilustra la manera de realizar la adición de $35 + 28$ con los billetes decimales.

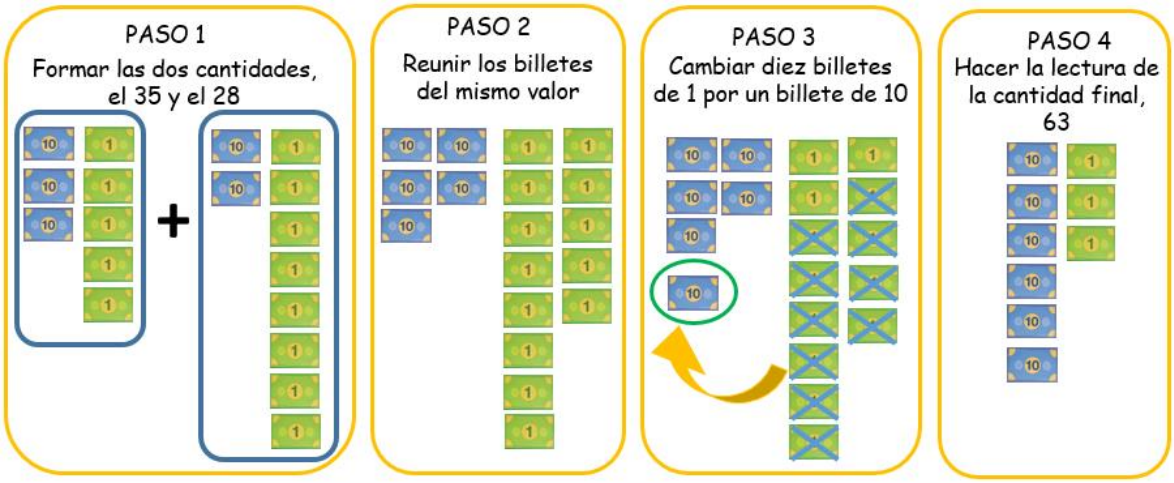


Imagen 5: Secuencia de pasos para sumar con los billetes decimales. Elaboración propia.

Para resolver sustracciones: la principal ventaja de llevar a cabo sustracciones con este material es la naturalidad que implica la realización de estas operaciones y sus reglas implícitas al utilizar el material, el cual es similar al

manejo del dinero, de manera que los niños no se ven forzados a iniciar los cálculos por la "casilla de la derecha" como es el caso de los algoritmos convencionales. También le permite al niño dotar de sentido la acción convencional de "prestar", en tanto el material hace evidente que realmente se realiza un cambio o desagrupamiento de una unidad de mayor denominación, por las diez fichas equivalentes de orden inferior.

En la imagen 6 se presentan los pasos para llevar a cabo la sustracción $54 - 28$ con los billetes decimales.

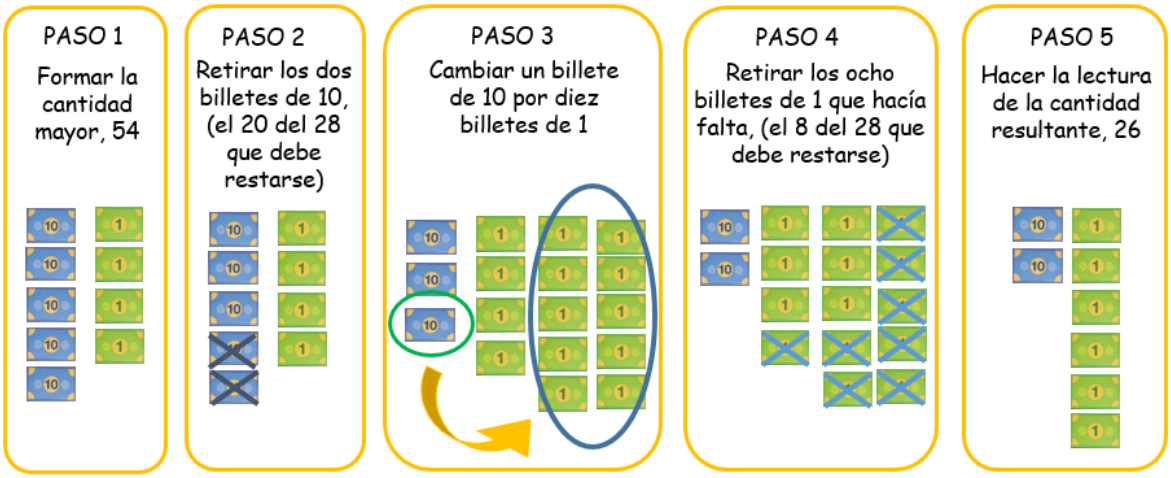


Imagen 6: Secuencia de pasos para restar con los billetes decimales. Elaboración propia.

Para resolver situaciones de reparto: la principal ventaja de iniciar el proceso de comprensión del algoritmo de la división con este material es que permite a los niños comprender los cambios de unidad que implica "bajar la cifra siguiente" cuando se llevan a cabo divisiones. Se presenta en la imagen 7 un ejemplo que muestra proceso para repartir de manera equitativa 435 entre tres personas.

Repartir de manera equitativa 355 entre dos personas.

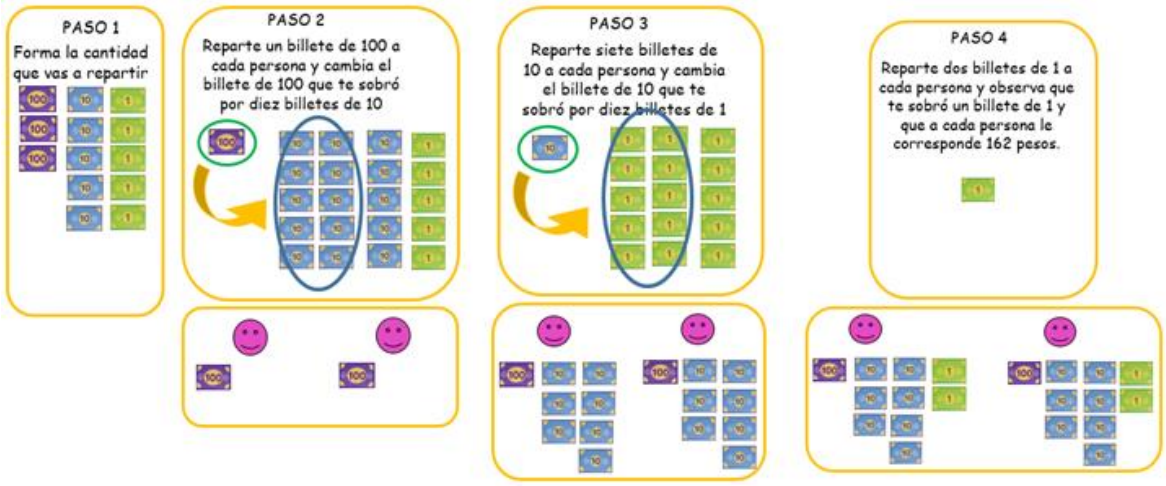


Imagen 7: Secuencia de pasos para llevar a cabo repartos con los billetes decimales. Elaboración propia.

También se propone el uso de las fichas en otros contextos simulados de compra y venta, como la tienda o el restaurante, en los que los niños pueden utilizar los billetes decimales para hacer pagos de determinados artículos, de manera que tengan la oportunidad de calcular el valor total de una compra, formar la cantidad para pagar o decidir con cuál billete hacerlo y en ese caso, cuáles serían las "vueltas" que recibiría. Los niños pueden intercambiar roles y jugar algunas veces a ser el vendedor y otras veces a ser el comprador.

Uno de estos contextos fue el de la compra y venta de materiales para la elaboración de accesorios decorativos como collares o pulseras (Jiménez, Cautiva y Zapata, 2016). Se llevó a cabo en la investigación mencionada y en las clases de matemáticas en el colegio donde se utilizan de manera regular. La tarea consistió en que la profesora dispuso de material para la elaboración de pulseras, como cuerda de colores, chaquiras pequeñas y medianas, con formas circulares y de estrella. Se le presentó a los niños la lista de precios para cada uno de los materiales que se emplearían en la elaboración de las pulseras y ,como se acercaba la fecha del día de amor y amistad, (fecha especial en nuestro país), se invitó a los estudiantes a pensar en alguna persona significativa para ellos a quien le desearan regalar una pulsera, luego de esto, se les mostraron los materiales y los precios de cada uno, de manera que los niños pudieron elaborar un presupuesto de los materiales que comprarían y proceder a hacer el pago. Para este momento del trabajo se dispusieron diferentes condiciones que movilizaran en los niños el uso de cambios entre las fichas, la adición y la sustracción, en ocasiones los niños podían hacer el pago con el valor exacto, lo que les implicaba formar la cantidad que debían entregar, en otras oportunidades la profesora hizo las veces de banco y tenía todos los billetes de 1 pertenecientes a los niños, de manera que ellos debían acercarse a realizar cambios y poder entregar el valor correspondiente a su compra, en otros momentos los niños debían hacer el pago con billetes diferentes a los de 1, de manera que fuera necesario recibir el cambio y ellos eran los encargados de decir a la profesora qué cantidad de dinero correspondía a dicho cambio.

Composición y descomposición de numerales, favorece su comprensión del sistema de numeración decimal, en tanto logran trascender la descomposición de cantidades solo en la casilla que se utiliza de manera convencional con unidades, decenas y centenas.

Por ejemplo, el número 234 puede formarse de muchas formas diferentes, algunas de ellas se muestran en la tabla 2.

	Billetes de 100	Billetes de 10	Billetes de 1	Total
Forma uno	Dos	Tres	Cuatro	234
Forma dos	Uno	Trece	Cuatro	234
Forma tres	Uno	Doce	Catorce	234
Forma cuatro	Cero	Veintitrés	Cuatro	234
Forma cinco	Cero	Veinte	Treinta y cuatro	234

Tabla 2: Descomposición del numeral 234 de diferentes formas. Elaboración propia.

Conclusiones

Los Billetes Decimales permiten vincular de manera simultánea el aprendizaje del SND, sus relaciones de orden y las equivalencias entre las diferentes unidades con el aprendizaje de las operaciones básicas y los agrupamientos y reagrupamientos que deben llevarse a cabo durante los cálculos de adiciones y sustracciones.

Los Billetes Decimales constituyen un material idóneo para mediar de los procesos de enseñanza y aprendizaje del SND y de las operaciones básicas como adición y sustracción en tanto permiten que los niños de los primeros grados de educación básica lleven a cabo composiciones y descomposiciones que se encuentran implícitas en los cambios de unidades y los procesos de representación cuando se interactúa con el SND.

Con relación a los materiales manipulativos que se emplean en la enseñanza y aprendizaje del SND, los billetes Decimales ofrecen la posibilidad de trascender el conteo de colecciones analógicas y avanzar hacia el cálculo, es decir hacia el establecimiento de relaciones entre cantidades sin la mediación de todos los elementos involucrados en la adición o la sustracción que se lleve a cabo.

La posibilidad de llevar a cabo adiciones y sustracciones de manera "natural", simulando el empleo que se hace en la vida cotidiana de los billetes para las acciones de compra y venta favorece en los niños el desarrollo de habilidades de cálculo mental sin depender de manera exclusiva de los algoritmos escritos para su realización.

Referencias bibliográficas

Botero, O. y Jiménez, A. (2017) Los billetes decimales: más allá de Unidades, Decenas y Centenas en la enseñanza del Sistema de Numeración Decimal. *Educación Matemática desde América Central y El Caribe.* (Memorias del II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe). México: Comité Interamericano de Educación Matemática. ISBN: 978-607-97480-4-3

Botero, O. y Jiménez, A. (2019) Ábaco, regletas, bloques multibase y billetes decimales: posibilidades y restricciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (Memorias de la XV Conferencia Interamericana de Educación Matemática). Recuperado el 15 de mayo de 2020 de https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/schedConf/presentations

Botero, O. y Villa-Ochoa, J. (2011). *Estrategias y reflexiones matemáticas de maestr@s para maestr@s. Propuestas para la Educación Básica Primaria.* Medellín: Escuela del Maestro.

Brissiaud, R. (1993). *El aprendizaje del cálculo, más allá de Piaget y de la teoría de conjuntos.* Madrid: Visor.

Gaviria, Y. y López, M. (2018). *Prácticas de Enseñanza en torno a las Estructuras Aditivas y el Sistema de Numeración Decimal en el Grado Primero de la Institución Educativa la Asunción.* Tesis de pregrado no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín. Colombia. Recuperada el 15 de mayo de 2020 de http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/bitstream/10495/13833/4/GaviriaValenciaYuliana_2019_Ense%c3%b1anzaEstructurasAditivas.pdf

Jiménez, A., Cautiva, F y Zapata, C. (2017). *Prácticas matemáticas que movilizan los estudiantes de primer grado al utilizar los billetes decimales.* Tesis de pregrado no publicada. Universidad de Antioquia, Medellín. Colombia. Recuperada de http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/handle/123456789/2486?mode=simple Universidad de Antioquia, Medellín.

Kamii, C. (1989). *Reinventando la aritmética II*. Madrid: Ed. Aprendizaje Visor

Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. New Jersey, NJ: Prentice-Hall.

Martínez, J. (2000). *Una didáctica del cálculo para el siglo XXI*. Madrid: CissPraxis.

Mialaret, G. (1962). *Pedagogía de la iniciación en el cálculo*. Buenos Aires: Kapelusz.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Recuperado el 15 de mayo de 2020 de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Recuperado el 15 de mayo de 2020 de http://cms.mineducacion.gov.co/static/cache/binaries/articles-340021_recurso_1.pdf?binary_rand=1223

Obando, G., Vanegas, D. y Vásquez, N. (2006). *Pensamiento numérico y sistemas numéricos.* Medellín: Gobernación de Antioquia.

Obando, G., Arboleda, L. y Vasco, C. (2014). Filosofía, Matemáticas y Educación: una perspectiva histórico-cultural en Educación Matemática. *Revista Científica, 3(20),* 72-90.

Silva, A. y Varela, C. (2010). Los materiales concretos en la enseñanza de la numeración. *Que hacer Educativo 110*, 26-36.

Vergnaud, G. (1991/2000). *El niño, las matemáticas y la realidad*. (Reimpreso en 2000.) México: Editorial Trillas.

Vygotsky, L. (1981). The instrumental method in psychology. En: J. V. WERTSCH (ed.). *The concept of activity in Soviet psychology*. (pp. 134 – 143) Armonk, NY: M. E. Sharpe.

Terigi, F. & Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista iberoamericana de educación*, ISSN 1022-6508, Nº 43, 2007, 59-84.

CRITERIOS PARA LA IDONEIDAD EPISTÉMICA Y COGNITIVA DEL CONCEPTO FUNCIÓN REAL EN LAS INGENIERÍAS

CRITERIA FOR THE EPISTEMICAL AND COGNITIVE SUITABILITY OF THE REAL FUNCTION CONCEPT IN ENGINEERING

Seydel Bueno García, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca Recio
Universidad de Camagüey (Cuba).
seydel.bueno@reduc.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu, nancy.montes@reduc.edu.cu

Resumen
Existen insuficiencias con las prácticas matemáticas de los significados de las funciones reales de una variable real. El objetivo en la investigación es identificar los significados institucionales pretendidos con criterios de mejora para la enseñanza del concepto de función que podemos encontrar en los planes y programas de estudio de matemáticas, así como en los libros de texto básicos de las carreras de ingeniería. La metodología de análisis didáctico aplicada muestra, con la ayuda de algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, una síntesis de los principales significados institucionales, que son intencionados en planes de estudio, programas de la asignatura y libros de texto para el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto función, desde su significación global. Los criterios de mejora que se brindan para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto en la educación superior, permiten el desarrollo del uso de las nuevas tecnologías.

Palabras clave: concepto de función, significados institucionales, criterios de mejora

Abstract
There are inadequacies in the mathematical practice of meanings of the real functions of a real variable. This research is aimed at identifying the institutional meanings intended, with improvement criteria, to teach the concept of function. Such meanings are included in mathematics curriculum and syllabuses, as well as in the basic textbooks of engineering degrees. The applied didactic-analysis methodology shows, supported by some tools of the Onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction, a summary of the main institutional meanings included in the curricula, subject syllabuses and textbooks for the teaching learning process of the concept of function, from its global signification. The improvement criteria, provided for the teaching and learning of this concept in higher education, allows developing the use of new technologies.

Key words: concept of function, institutional meanings, improvement criteria

Introducción

Una aspiración en las carreras de ingeniería de la Universidad de Camagüey *Ignacio Agramonte Loynaz* es mejorar los indicadores globales de calidad del Ministerio de Educación Superior, reflejados en los objetivos de trabajo del curso 2016-2017 (colectivo de autores, 2014). Un reciente análisis cuantitativo-cualitativo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en nuestro departamento, demuestra que la calidad de los aprendizajes de los estudiantes no permite alcanzar tal propósito. En los informes de la asignatura Matemática I, donde se imparte el contenido básico de cálculo diferencial e integral de funciones reales de una variable real, ha quedado confirmado el siguiente problema: el trabajo con las funciones y su aprendizaje aún no responde a una sólida comprensión de su estructura y apropiación en todos los temas de matemáticas impartidos en las carreras de ingenierías, lo cual ha provocado el pobre desenvolvimiento en el trabajo con los conocimientos de función, tanto en los docentes como en los alumnos.

En la actualidad, el aprendizaje de las funciones reales en la educación superior constituye una dificultad aún no resuelta. El estudio hecho por Amaya, Pino-Fan & Medina (2016) revela la falta de comprensión del concepto función y su identificación; así se corrobora en otros estudios hechos por Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2006), donde afirman que el conflicto epistémico más marcado con el concepto de función, y que impacta en la formación de ingenieros es el distanciamiento entre el reconocimiento del concepto a nivel escolar y su uso consciente en el ámbito social.

El aprendizaje del concepto de función está ligado a su componente semiótico, que se refiere al significado numérico, algebraico, geométrico y verbal, pero que también interviene en las prácticas de enseñanza influenciadas por documentos rectores; y estas, a su vez, configuran un significado institucional que es llevado de forma planificada a su enseñanza. Debido a la manera en que este significado institucional o pretendido del concepto es implementado, se hace necesario caracterizarlo, pues se refleja en las prácticas operatorias de nuestros alumnos que se forman como ingenieros.

El objetivo de nuestra investigación es identificar los significados institucionales (prácticas institucionales) pretendidos con criterios de mejora para la enseñanza del concepto de función que podemos encontrar en los planes y programas de estudio de matemáticas, así como en los libros de texto básicos de las carreras de ingeniería. Estas prácticas serán caracterizadas y analizadas a través del complemento didáctico-matemático del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino & Batanero, 1994; Godino *et al*. 2007), la idoneidad didáctica (Godino, Font, Contreras & Wilhelmi, 2006) del proceso de enseñanza del concepto función real de una variable real, de manera que solo se tome la dimensión epistémica y los criterios dados por Pino-Fan, Castro, Godino & Font (2013), que se da en este proceso instructivo en la actualidad.

Aspectos teóricos y metodológicos

La enseñanza de las matemáticas en la formación de un ingeniero es aquella donde todo ingeniero considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos, con los cuales refleja los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia. De tal modo, el objetivo de esta disciplina es lograr que el ingeniero domine el aparato matemático que lo haga capaz de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, de manera que utilice en ello tanto métodos analíticos como aproximados, y use eficientemente las técnicas de cómputo. El diseño de diferentes planes y programas de estudio ha dedicado atención al concepto de función, pues ha sido caracterizado en la formación del ingeniero como conocimiento previo, invariante del conocimiento, conocimiento básico y línea directriz para el estudio de diferentes temas de matemáticas. Estos planes y programas conciben el uso del texto básico (Stewart, 2012), de donde partimos para realizar el análisis epistémico de cómo emerge y se desarrolla, el conocimiento del concepto de función y sus significados en la formación del ingeniero. Aunque también el proceso de su enseñanza y aprendizaje puede utilizar otros textos que complementan su

tratamiento. Lo cierto es que su contenido es una prioridad indispensable para cualquier proceso de enseñanza de las matemáticas.

Fundamentos epistémicos del enfoque Onto-Semiótico para la construcción del conocimiento matemático

Una visión amplia sobre el significado de función se tiene a partir de sus representaciones, cuando se define como correspondencia entre conjuntos, relación entre magnitudes variables, representación gráfica, expresión analítica, correspondencia arbitraria y la función a partir de la teoría de conjuntos (Amaya *et al*. 2016). El concepto de función como se entiende hoy se consolidó en 1837, con el matemático Gustav Dirichlet, aunque Gottfried Leibniz en 1673 ya había expresado algunas ideas al respecto en sus trabajos (Parra, 2015). En el proceso de enseñanza de las matemáticas, donde también tiene lugar la apropiación de sus contenidos por los estudiantes, los significados de tales contenidos son transmitidos a partir de enfoques, concepciones y estrategias asumidas desde la didáctica. La apropiación de los significados se consolida en la medida en que son usadas las definiciones, propiedades y los procedimientos que los involucran. Estos son mediados por registros semióticos que permiten evaluar las operaciones que son realizadas con los significados.

Para describir la operatividad del concepto de función a partir de sus significados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y su implicación en la formación de ingenieros, según lo planteado en (Bueno, Pérez, 2018) es necesario recurrir a enfoques que brinden una herramienta metodológica que contribuya a caracterizar y describir, como se pretende en las diferentes directrices curriculares que aparecen en planes, programas y libros de texto de la asignatura, al igual que la articulación entre tales conocimientos significativos. Por esto en la presente investigación adoptamos el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática, desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino *et al*., 2007) para lograr el objetivo propuesto.

Dicho marco teórico incluye un modelo epistemológico y cognitivo de las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo sobre bases semióticas de índole pragmática, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. Para nuestro análisis es importante la elección de este enfoque, pues consideramos que no solo posibilita describir aspectos del aprendizaje de los sujetos que aprenden, sino que permite explicar cuáles son los factores que inciden en las dificultades y establecer criterios para orientar la construcción y perfeccionamiento del conocimiento matemático en la enseñanza y el aprendizaje. Los elementos fundamentales de este enfoque que resultan novedosos para la didáctica de las matemáticas, y que sustentan nuestro propósito, son los componentes epistémicos y sus configuraciones. De este enfoque tomaremos en cuenta la noción de idoneidad epistémica (Pino-Fan *et al*., 2013) que se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto a un significado de referencia, que en nuestro caso es el significado matemático o global del concepto de función.

Utilizaremos los criterios para la idoneidad epistémica dados por Pino-Fan *et al*., (2013), contextualizados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Universidad de Camagüey, debido al trabajo sistemático que se hace con la funciones en los temas de límite y continuidad, derivada y cálculo integral con funciones de una variable real, sin descuidar que la tendencia al perfeccionamiento de los planes de estudio es integrar el sistema de conocimientos y reducir el número de horas para tratar los temas del cálculo diferencial e integral. Estos fundamentos epistémicos nos permiten analizar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios y su relación con las actividades de aprendizaje a partir de su descriptor, como se propone:

Situaciones/problemas: propuesta de situaciones que generan conversiones y tratamientos de variadas formas de representación del concepto de función, uso de medios tecnológicos y aplicaciones del concepto. *Conceptos/definiciones:* características esenciales y no esenciales, propiedades comunes y no comunes que se

analizan y expresan en el lenguaje matemático (verbal, gráfico, simbólico). Clasificaciones y relaciones conceptuales que se determinan. *Elementos de representación semiótica*: implementación de procesos y tipos de representaciones de la actividad matemática que se proponen. *Proposiciones/propiedades:* adecuación de las explicaciones, deducciones, enunciados, comprobaciones y demostraciones al nivel que se trata. *Procedimientos y argumentos:* empleo de reglas, principios, pasos y estrategias que se utilizan para el análisis de significados.

En nuestra concepción, estos objetos matemáticos son utilizados en instituciones y destinados a la resolución de problemas y preparación del conocimiento que antecede al resto de las temáticas del cálculo diferencial e integral. La sólida apropiación de los significados garantiza el desarrollo de la práctica matemática. Las prácticas institucionales que están asociadas al concepto de función se refieren a la implementación planificada y concatenada del contenido matemático, en la documentación normativa (planes de estudio, programas de asignatura y libros de texto, entre otros elementos) que predominan en los docentes de matemática para el desarrollo del tema. Las prácticas personales se observan en el desempeño operacional de los estudiantes durante la interacción con el contenido matemático. Estos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas institucionales y personales sobre el concepto de función real de una variable real, son propuestos en los planes de estudio, programas y libros de texto básicos.

La metodología aplicada en esta investigación, dirigida a identificar los significados institucionales o prácticas institucionales que se pretenden sobre el concepto de función real de una variable real, tiene en cuenta tres momentos principales: 1) La determinación de un significado global de referencia para el concepto de función; 2) La determinación del significado pretendido para el concepto de función en los planes y programas de estudios, y en los libros de texto considerados básicos; y 3) La aplicación de los fundamentos o criterios de idoneidad epistémica precisados con anterioridad, para valorar dichos significados y brindar criterios sobre su mejora.

Determinación de un significado global de referencia para el concepto de función

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento; esto es, las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge parte de su interés didáctico. Entre las formas de representación más generales de los contenidos matemáticos estudiados en el nivel superior en las carreras de ingeniería, se distinguen dos familias de sistemas: las representaciones simbólicas y las gráficas. Las simbólicas son de carácter alfanumérico (es un término más general que incluye letras y números, así como la combinación de estos). Las gráficas incluyen las de tipo figurativo, de carácter analógico, y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación. Los registros semióticos incluyen ambos tipos de representaciones, al igual que en su aprendizaje se implementan e interactúan estas representaciones.

Las funciones son los objetos fundamentales con los que trata el cálculo diferencial e integral, donde sus representaciones tabular, verbal, gráfica y analítica también se pueden transformar y combinar para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real. Las funciones siempre surgen cuando una cantidad depende de otra (Stewart, 2012), por tal motivo, su generalización se puede modelar cuando nos encontramos con conjuntos de variables ligadas entre sí.

Significados pretendidos para el concepto de función

La idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006). Por considerar que los criterios dados por Pino-Fan *et al*. (2013) en el análisis epistémico de la derivada son generales, los tomaremos en cuenta para el análisis de los significados pretendidos del concepto abordado, y realizaremos algunos

ajustes en ellos, debido a la evolución de las exigencias del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la actualidad.

I. Representatividad de los campos de problemas (CP) propuestos

Este criterio refleja las tareas (problemas) matemáticas que requieren de los objetos y significados matemáticos que promueven el aprendizaje de los significados definidos en el entorno del concepto de función. CP1: determinación de relación entre magnitudes. CP2: cálculo y estimación de valores funcionales. CP3: representación de funciones en situaciones intra-matemáticas. CP4: modelación de situaciones prácticas mediante funciones. CP5: representación de funciones en computadoras u otros dispositivos electrónicos.

II. Procesos de representación activos en el planteamiento y solución de las tareas

Este criterio se refiere a los distintos tipos de representaciones (lenguaje matemático) utilizados para referirse a los diferentes objetos matemáticos, así como los tratamientos y conversiones entre ellos, que tienen una alta significación en el desarrollo del concepto de función en la actualidad.

III. Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos

En este criterio se toma en cuenta los elementos regulativos y argumentativos (definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) relativos al concepto de función, que son mediados a través de elementos lingüísticos y que sirven para identificar con claridad los significados más usados por los docentes y estudiantes durante el estudio de este concepto.

IV. Conocimientos previos a la profundización del concepto de función

Este criterio se refiere a las formas previas de definir, analizar y representar el concepto de función, permitiendo a la vez caracterizar la comprensión y resolución de ejercicios y problemas, como forma de actividad matemática, sobre los tipos de representaciones y los procedimientos para la conversión y el tratamiento entre estos.

V. Representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto al significado global de referencia

En este criterio se concibe los contenidos matemáticos que aparecen en los planes de estudio, programas de las asignaturas y los significados que se les da en los textos básicos como los significados institucionales pretendidos de referencia. Los significados que se pretenden con el concepto de función pueden ilustrarse a partir de la configuración epistémica dada por Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2006), la cual considera objetos matemáticos primarios alrededor de las representaciones semióticas del concepto de función, que pueden ser descritos y caracterizados.

Para comparar los significados globales o de referencias del concepto de función con los pretendidos en las carreras de ingeniería, utilizamos la noción de configuración epistémica dada por Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2006), representada en la figura 1. Esta configuración muestra los principales componentes epistémicos históricos, así como sus contenidos y relaciones, que se utilizan en la construcción del concepto función real de una variable real, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Solo que se reconfigura, debido al nivel de enseñanza y a la introducción del uso de computadoras en la actualidad, que permiten la introducción y el uso del lenguaje, procedimientos, entre otros elementos computacionales. Esta noción permite identificar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios (problemas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) puestos en juego durante la solución de las prácticas matemáticas propuestas.

Configuraciones epistémicas

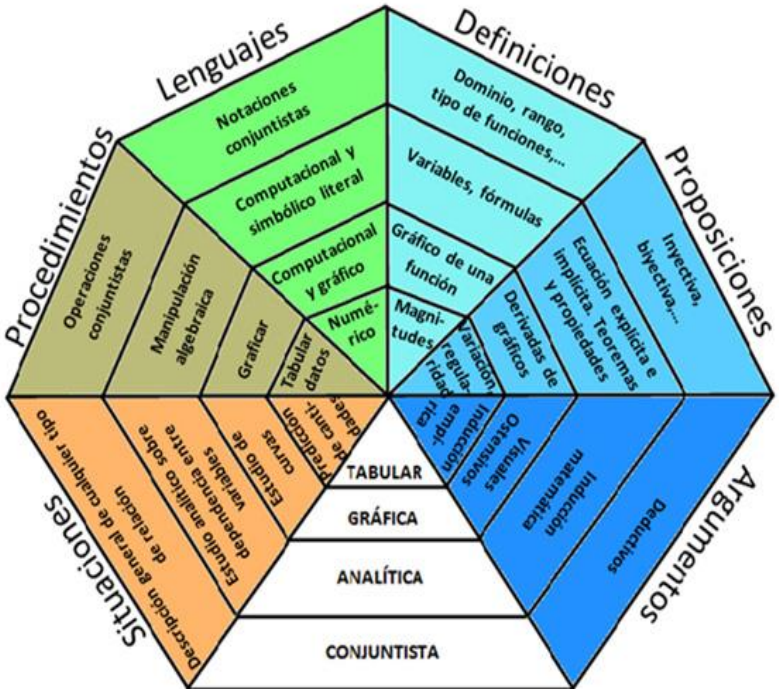


Figura 1. Representación de la configuración epistémica históricamente utilizada por textos y programas de matemáticas en la enseñanza del concepto de función real de una variable real.

Aplicación de los criterios de idoneidad epistémica y criterios de mejora que resultan

Se abordan cuatro tipos de *situaciones/problemas:* las que plantean alguna relación conjuntistas entre magnitudes de naturaleza geométrica, física, etc., que buscan establecer correspondencias; las que ejemplifican, sistematizan y profundizan el uso de las representaciones y definiciones de las funciones, sus propiedades generales y particulares y la aplicación de modelos analíticos; que analizan gráficas (curvas) de mayor composición y comportamientos diversos para determinar propiedades generales y particulares, al igual que a la interpretación de magnitudes y las que utilizan principalmente tablas para realizar análisis e interpretaciones, como también conversiones entre las representaciones funcionales.

Se introducen conceptos/definiciones relacionados con las clasificaciones de funciones polinómicas, racionales, algebraicas, trascendentes, y el concepto de función por parte y/o por secciones. Entre las propiedades/proposiciones que se introducen podemos señalar las propiedades sobre las operaciones con funciones, las transformaciones sobre las funciones, nociones del comportamiento asintótico de una función, el estudio de propiedades particulares y generales de funciones no elementales, por ejemplo, su forma gráfica. Son ampliadas las propiedades y proposiciones sobre las funciones compuestas, en cuanto a su determinación y su análisis. Dentro de las características se encuentra la extensión del estudio del concepto de función, la variedad de representaciones funcionales, donde algunas son sistematizadas, se profundizan y otras son ampliadas, como es el caso de las funciones por partes. La propuesta de tareas con el uso de asistentes matemáticos es mucho más eficaz para la comprensión de los conceptos y propiedades, y la realización de tareas con tales elementos cognitivos del aprendizaje.

La tabla 1 muestra el tipo de conversión que se activa (significados pretendidos y personales) entre las representaciones de una función, en la resolución de los campos de problemas que hemos considerado en este libro

de texto, tanto en el planteamiento del problema, como en su solución, así vamos a interpretar la información que nos brinda. Por ejemplo, la celda marcada con una x indica que el libro de texto considera problemas que requieren la conversión entre los distintos registros semióticos que se mencionan en la tabla por cada campo de problemas. Si un problema plantea representar gráficamente una función algebraica dada su ecuación, es un problema que requiere la conversión de analítica a gráfica. Las celdas que poseen color indican que el proceso de conversión no se aplica por una razón lógica, es la misma representación y solo se ejecuta un tratamiento. Las celdas sin selección ni color nos muestran pocos ejemplos y tareas dirigidas en este sentido.

Tabla 1. Tabla de doble entrada con las principales conversiones que se realizan en la solución de problemas donde emergen significados que se pretenden del concepto función.

Campo de problemas (CP)	Representaciones para f(x)						
	Emergentes / Previas	Verbal	Gráfica	Analítica	Tabular	Secciones	Computacional
CP1: Determinación de relación entre magnitudes (establecer reglas o leyes).	Verbal		x	x	x		
	Gráfica			x	x	x	
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x	x		x	x
	Secciones		x		x		x
	Computacional		x	x	x		
CP2: Cálculo y estimación de valores funcionales.	Verbal	x					
	Gráfica		x				
	Analítica			x			
	Tabular				x		
	Secciones					x	
	Computacional						x
CP3: Representación de funciones en situaciones intramatemáticas.	Verbal		x	x			
	Gráfica			x	x	x	
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x	x			x
	Secciones		x				x
	Computacional		x	x	x	x	
CP4: Modelación de situaciones prácticas mediante funciones.	Verbal		x	x			
	Gráfica			x	x	x	
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x	x			x
	Secciones		x				x
	Computacional		x	x	x	x	
CP5: Representación de funciones en máquinas computadoras u otros dispositivos electrónicos.	Verbal						
	Gráfica						
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x				x
	Secciones						x
	Computacional						

Persiste aún en la enseñanza del concepto de función la prevalencia de significados algebraicos y gráficos, tales como el ejemplo 1:

Encuentre el dominio y grafique la siguiente función.

$$g(x) = \frac{3x + |x|}{x}$$

Ejemplo 1. Conversión de la analítica a la gráfica.

Sin embargo, se incrementa el trabajo con funciones numéricas y verbales en problemas prácticos que apoyan la comprensión y significatividad del concepto, mediante un cubrimiento más completo de sus formas de representación, tal como se presenta en los problemas presentados en los ejemplos 2 y 3.

Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10m3. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta $10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta $6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales, como una función del ancho de la base.

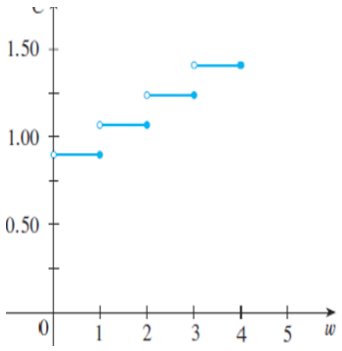
$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Ejemplo 2. Conversión de la verbal a la analítica, requiere de un tratamiento más complejo que la identificación de una ley por simple inspección.

Se tiene que C(w) es el costo de enviar por correo paquetes con peso w. Representa mediante una función por secciones a C(w) a partir de la tabla dada y luego la gráfica de esta función C(w).

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.88
$1 < w \leq 2$	1.05
$2 < w \leq 3$	1.22
$3 < w \leq 4$	1.39
$4 < w \leq 5$	1.56
⋮	⋮

$$C(w) = \begin{cases} 0.88 & \text{si } 0 < w \leq 1 \\ 1.05 & \text{si } 1 < w \leq 2 \\ 1.22 & \text{si } 2 < w \leq 3 \\ 1.39 & \text{si } 3 < w \leq 4 \\ \vdots & \end{cases}$$



Ejemplo 3. Conversión de la representación tabular a secciones y luego a gráfica.

En este sentido, es necesario que tales significados sean sistematizados durante la actividad matemática y la práctica-profesional que se realiza vinculada con el concepto.

- Criterio 1: La inserción de múltiples significados del concepto función en la instrucción facilita y complementa el diseño de actividades matemáticas vinculadas con la profesión. De acuerdo con lo planteado por Pino-Fan, Guzmán, Font & Duval (2017), la representación semiótica que se moviliza en cada contexto (algebraico, gráfico, numérico) es amplia, pues son incorporados gráficas, ecuaciones, tablas y elementos lingüísticos, entre otros elementos. Para esto, los procedimientos, métodos, estrategias, etc., que se dirijan al tratamiento deben ser generales, de manera que lo particular de cada representación pueda ser relacionado con lo esencial del concepto.
- Criterio 2: La conversión de registros semióticos en el trabajo con funciones es considerada un procedimiento heurístico esencial para el entendimiento y la solución de tareas y ejercicios, como forma de resolver problemas.

- Criterio 3: En el trabajo con funciones la conversión y el tratamiento es el componente esencial para la comprensión y la resolución de ejercicios. El análisis de propiedades de las funciones en la enseñanza se realiza fundamentalmente sobre la base de distinguir propiedades generales y particulares en sus más diversas formas de representación. Esto implica que debe procurarse mediante herramientas didácticas que permiten la racionalidad del pensamiento matemático, tales como la interpretación representacional del concepto y sus propiedades.
- Criterio 4: El análisis funcional como actividad fundamental del trabajo con funciones requiere del uso racional de acciones de didácticas, las cuales pueden ser: la descripción, la interpretación, la variación de condiciones, la modificación, etc., que conlleven a la determinación de propiedades.

Para abordar las prácticas operativas fueron objeto de evaluación los ejercicios tratados por cada campo de problemas en los alumnos que cursan las carreras de ingeniería industrial, mecánica y ciencias alimentarias, que conforman una muestra de 128 estudiantes. El propósito de la evaluación en cada uno de estos problemas consistió en valorar la obtención de la conversión y la ejecución del tratamiento, de manera que se tenga en cuenta que son dos procesos paralelos y verticales que ejecuta el sujeto que aprende cuando se enfrenta a los problemas que hemos descrito. De manera general, pudimos determinar que los resultados de los problemas no son favorables cuando se centran en la obtención de registros de forma gráfica y analítica a partir de otros, pues solo 48% de los estudiantes logra resultados satisfactorios en este sentido. Sin embargo, la motivación por realizar tareas de este tipo mejora, pues constituye algo novedoso en el conocimiento de las funciones para el quehacer del ingeniero. Los mejores resultados, 62%, se obtienen cuando los alumnos realizan tareas donde interactúa el registro analítico con el gráfico, o viceversa.

De manera global, en este análisis sobre las prácticas operativas de los estudiantes se manifiesta que los algoritmos utilizados en el tratamiento son usados de forma eficiente, pero después de que el profesor ofrece niveles de ayuda, con baja efectividad para el desarrollo cognitivo del estudiante. Por tal motivo, es necesario que en las tareas que realicen los alumnos evidencien el trabajo eficiente con los componentes epistémicos, sobre sus interpretaciones y justificaciones en el conocimiento de las funciones reales de una variable real.

Conclusiones

Hemos presentado un análisis didáctico de los principales significados epistémicos que se pretenden en los planes y programas de estudio, al igual que en libros de texto, para la enseñanza de las matemáticas en las ingenierías. Los significados epistémicos que están presentes de manera frecuente en el trabajo con funciones son los 6 expresados en la tabla 1, aunque existen otros significados como los diagramas de flechas y de máquinas, que son solamente ilustrativos para comprender el concepto de función. Se presentaron algunos resultados en el orden cognitivo, que desarrollan los estudiantes. Como aspecto importante a tener en cuenta desde la perspectiva de nuestro análisis, está que los registros semióticos asociados al concepto de función articulan con el objeto y con los diferentes tipos de problemas; además de que profundizan el trabajo en la conversión y el tratamiento entre variadas formas de representaciones.

En resumen, tenemos que la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función en las ingenierías, los docentes y alumnos encuentran un aumento de los registros semióticos sobre la representatividad del concepto, incluido de forma ascendente el computacional, así como su complejidad. Los procesos de conversión y tratamiento entre representaciones están reflejados por campos de problemas. Las clasificaciones, procedimientos de solución, habilidades, proposiciones, entre otros elementos, conforman el significado epistémico idóneo para realizar tareas de aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Amaya, T. R., Pino-Fan, L. R. & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática, 28*(3), 111-144.

Bueno, S. & Pérez, O. (2018). Prácticas actuales de la idoneidad epistémica y cognitiva del concepto función real de una variable real en carreras de ingeniería. *Revista Educación Matemática, 30*(2), 202-231.

Colectivo de autores. (2014). *Objetivos de trabajo de la organización para el año 2016*. La Habana: Ministerio de Educación Superior de Cuba.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/558/

Godino, J., Bencomo, D., Font V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la *idoneidad didáctica* de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *XXVII* (2), 221-252.

Godino, J., Font, V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 117-150.

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (Tesis de maestría, inédita). Universidad de Los Lagos. Chile.

Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *XXXIV* (2), 123-150.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V. & Duval, R. (2017). *Analysis of the Underlying Cognitive Activity in the Resolution of a Task on Derivability of the Absolute-Value Function: Two Theoretical Perspectives*. PNA, *11*(2), 97-124.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Cendage Learning.

SENTIDOS DEL CERO Y LA NEGATIVIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

SENSES OF ZERO AND NEGATIVITY IN THE TEACHING OF WHOLE NUMBERS

Celia E. Villagra, Marcela E. Chorolque
Universidad Nacional de Salta (Argentina).
villagracelia@gmail.com, marcelachorolque@gmail.com

Resumen
En este documento se analiza la producción e intervención de los docentes que asisten a un taller sobre enseñanza de números enteros, donde, además, se busca que valoren la gestión del error y acuerden algunos puntos de partida para la apropiación de las nociones vinculadas a los números enteros, enfatizando la importancia del cero y de la negatividad. La mayoría de los docentes pueden anticipar los errores que cometen sus estudiantes en la realización de diferentes tareas vinculadas a los números enteros, pero inicialmente los atribuyen a obstáculos propios de los estudiantes. También se pone de manifiesto que los docentes desconocen la naturaleza dual del cero, los distintos sentidos del signo menos y los significados de la sustracción. Se concluye que la mayoría de los errores de los estudiantes son reforzados por la metodología utilizada por el docente o por las decisiones que toma sobre cómo enseñar los números enteros.

Palabras clave: números enteros, cero, negatividad, obstáculos

Abstract
This report makes an analysis on the production and intervention of teachers who are involved in a workshop about the teaching of whole numbers; where it is also wanted that teachers assess the error handling, and agree on some starting points for the acquisition of notions linked to whole numbers, making emphasis on the importance of zero and negativity. Most teachers are able to anticipate errors students make when doing different tasks related to whole numbers, but they initially attribute them to students' own barriers. It is also evidenced that students do not know dual zero nature, the different senses of minus sign and subtraction meanings. The findings from this analysis suggest that most of the students' errors are caused by the methodology used by the teacher or by the decisions the teacher makes on how to teach whole numbers.

Key words: whole numbers, zero, negativity, barriers

Introducción

Por lo general la enseñanza de los números enteros suele desarrollarse en el último año de la escuela primaria o en el primer año del nivel secundario. Los docentes de los niveles mencionados manifiestan que sus estudiantes, tienen dificultades al operar con números enteros, particularmente con la adición y sustracción, trasladándose luego a la operatoria con las expresiones algebraicas. Es así que los estudiantes, cometen diferentes tipos de errores cuando operan con los números enteros. Becerra, Buitrago, Calderón, Gómez, Cañadas y Gómez (2012) caracterizan los errores y dificultades considerando además las dificultades en el uso del lenguaje matemático en situaciones aditivas, para dar sentido a un resultado negativo y en la interpretación en la sustracción de los números enteros.

El alto nivel de formación que tengan los docentes no asegura una apropiación científica del concepto de número entero, provocando que su enseñanza se remita, en la mayoría de los casos, a la ejemplificación y no hacia la profundización de los conceptos científicos que ayudan a comprender qué son los números enteros, asintiendo que los conceptos intuitivos circulen al interior de las aulas.

Maca Díaz (2016) recomienda replantear la apropiación que sobre el número entero tienen los docentes, con el fin de direccionar el sentido que les dan los estudiantes a los números enteros. Para ello el docente de matemática tiene que generar estrategias y acciones que lleven al estudiante a relacionar los aprendizajes y conocimientos previos con los que están por conseguir. "En esto recae la función de los objetos de aprendizaje (recursos y materiales didácticos) que el mediador debe emplear para generar los escenarios que lleven a poner a sus estudiantes en situación de aprender" (Villarruel, 2009, p. 2). Por lo tanto, se hace necesario que el docente tenga una formación continua y reflexione sobre cuestiones que interesan a la Didáctica de la Matemática en cuanto a la apropiación de objetos matemáticos por parte del estudiante, en este caso de los números enteros.

Como ya se mencionó, los estudiantes tienen dificultades tanto operativas como conceptuales en la adquisición de la estructura numérica de los enteros, que se ponen de manifiesto en la aparición de distintos errores cuando resuelven actividades en las que utilizan este conjunto numérico. Por lo general, estos errores, son producto de los obstáculos vinculados con la comprensión de los números negativos y del cero.

En este documento, más adelante, se precisará la concepción de error y obstáculo que se sustenta. Gallardo, Santos y Hernández (2010) consideran que para poder comprender el cero es necesario que se identifiquen los distintos "sentidos del uso" de este número: nulo, implícito, total, aritmético, algebraico. En cuanto a la negatividad es importante la comprensión de la triple naturaleza del signo menos (binaria, unaria y el simétrico de un número).

En este trabajo se pretende reflexionar sobre las concepciones que tienen los docentes sobre los errores frecuentes cuando los estudiantes ordenan, operan o resuelven ecuaciones con números enteros y a partir de ellos analizar y discutir sobre los obstáculos que los provocan. De esta manera se busca acordar algunos puntos de partida para la apropiación de las nociones vinculadas a los números enteros, enfatizando la importancia del cero y de la negatividad, como elementos fundamentales en la construcción del concepto de número signado que también influye sobre la capacidad en el manejo del lenguaje algebraico. Se tiene en cuenta el marco conceptual sobre la importancia del cero y la negatividad en cuanto a su emergencia, para proporcionar herramientas que permitan comprender la naturaleza de los errores frecuentes de los estudiantes, pudiendo anticiparlos y tomar decisiones sobre cómo gestionarlos.

Propósito y alcance

El propósito es intervenir en la reflexión docente sobre los errores frecuentes de los estudiantes en la operatoria con números enteros, identificando los obstáculos de enseñanza y epistemológicos que los provocan, particularmente en situaciones donde se pone de manifiesto la negatividad y el uso del cero. También se pretende que los profesores

valoren los aportes de las investigaciones en Didáctica de la Matemática, en cuanto a la negatividad y el cero, al uso de los modelos de neutralización y de desplazamiento y a la inclusión de los juegos para propiciar aprendizajes.

Marco conceptual de la propuesta de taller

El cero y los negativos

Desde los inicios históricos de la Matemática se pueden encontrar reflexiones acerca de las dificultades que permiten generar los números enteros para su comprensión y total aceptación. Este campo numérico sufrió el reconocimiento y la legitimación durante un largo proceso, requiriendo de mucho tiempo para que los matemáticos reconocieran, aceptaran y legitimaran los números negativos, por lo que no debería resultar tan extraño que los estudiantes presenten dificultades a la hora de construir conocimientos en torno a ellos. Es decir que las dificultades señaladas tanto operativas como conceptuales que tienen los estudiantes, en la adquisición de las estructuras numéricas de los enteros, son producto de los obstáculos vinculados con la comprensión de los números negativos, que han sido descritos detalladamente desde hace mucho tiempo, en particular por Glaeser (1981) y Cid (2000).
Janvier (1985), Bell (1986), Vergnaud (1989), Gallardo (1994) y Cid (2002) han realizado investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes con los números enteros y han concluido que las más importantes son las relacionadas con la conceptualización de los números negativos en el ámbito aritmético y algebraico.

Como lo afirma Schubring (1988) se asume que los números negativos no constituyen un concepto aislado en la matemática, pero pusieron en tela de juicio los pilares de la filosofía por cuanto no necesariamente podrían entenderse como una cantidad ya que ninguna realidad del mundo exterior podía asignársele a estos números.

Gallardo y Hernández (2007) realizan una revisión histórica de la emergencia del cero y la negatividad y se encuentraron con diversos obstáculos y discrepancias en la génesis y uso de estos. Las autoras señalan:

> Es así que el cero y los negativos surgen del manejo de oposición o conceptos como el del vacío o el de no ser, que son fundamentales para la construcción de la negatividad, pero que, sin embargo, se mantiene oculta hasta muchos siglos después. Resulta fascinante la búsqueda del porqué el cero y los negativos fueron muy difíciles de aceptar. (Gallardo y Hernández, 2007, p 3)

Gallardo y Hernández consideran que para poder comprender el cero es necesario que se identifiquen los distintos "sentidos del uso" de este número:

- Cero nulo, "no tiene valor, es la nada, el vacío";
- Cero implícito, no aparece escrito, es verbal y utilizado durante el proceso de resolución de la tarea;
- Cero total, está formado por parejas de opuestos (+n, –n con $n \in N$);
- Cero aritmético, surge como el resultado de una operación aritmética;
- Cero origen es localizado sobre la recta numérica o bien como un elemento que separa los números positivos de los negativos;
- Cero algebraico, emerge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación.

Modelos para la enseñanza de los números enteros

Cid y Bolea (2010) señalan que por lo general en la escuela se introducen los números positivos y negativos a través de los enteros y en un registro aritmético, justificando la necesidad y el significado de los mismos a través del uso de diversos modelos concretos. A continuación, se presentan algunos modelos propuestos por diversos

investigadores con los que se puede trabajar el tema de números enteros en el aula, y que también fueron clasificados por Gallardo y Hernández (2007).

Modelos concretos de neutralización

Cid y Bolea (2010) refieren que en un modelo de neutralización los números enteros expresan medidas de cantidades de magnitud que pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos y los signos predicativos indican el sentido de la cantidad de magnitud, mientras que los signos operativos binarios y unarios se relacionan con las acciones de añadir, quitar, reunir o separar fichas o bloques de dos colores, bolas que se ensartan en dos varillas distintas, deudas y haberes o pérdidas y ganancias, ejércitos que se enfrentan cuerpo a cuerpo; cargas eléctricas positivas o negativas, sumandos y sustraendos, acciones de añadir o quitar u operadores aditivos; juegos o clasificaciones con puntuaciones positivas o negativas, clavijas con tres posiciones, estimaciones con errores por exceso o defecto; seres u objetos que pueden estar valorados positiva o negativamente, entrando o saliendo de un recinto, cubitos que calientan o enfrían un líquido; balones de helio y sacos de arena que elevan o bajan un globo, fichas de dominó en las que los puntos situados en una de las partes de la ficha neutralizan a los situados en la otra parte.

En la práctica docente, es frecuente el uso del modelo de pérdidas y ganancias con el que los estudiantes pueden obtener el conocimiento de adición, ya que lo relacionan fácilmente con su vida cotidiana, saben cuánto ganan o cuanto pierden. También los docentes suelen utilizar este modelo con lo que Freudenthal (1991) denomina nivel referencial porque para resolver adiciones y sustracciones en otros contextos, el estudiante siempre recurre al contexto referencial de pérdidas y ganancias.

Hernández y Gallardo (2006) realizaron una investigación con un grupo de estudiantes de segundo año de la escuela secundaria utilizando el modelo concreto “modelo de bloques”, para la introducción de las operaciones con números con signo en aritmética y álgebra elemental. Concluyeron que los modelos de enseñanza no son paradigmáticos, debido no sólo a las contradicciones intrínsecas surgidas de su propia construcción, sino también, ineludiblemente, a las tendencias cognitivas de los estudiantes. Pero también señalaron que una de las alumnas que participó en la investigación poseía una concepción dual del cero, generalizada a partir del modelo de bloque y que otro de los estudiantes concibió las adiciones y sustracciones con números signados, pero siempre atados a la representación del modelo.

Modelos de desplazamiento

En un modelo de desplazamiento los números enteros expresan desplazamientos o posiciones; los signos predicativos, el sentido del desplazamiento o la situación de la posición a uno u otro lado de la posición origen; los signos operativos binarios, la composición de desplazamientos o aplicación de un desplazamiento a una posición para obtener otra posición; y los unarios, mantenimiento o cambio del sentido de desplazamiento.

Personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino, peldaños que se suben o bajan, termómetros o escalas de diversas magnitudes, ascensores que bajan a los garajes o suben a los pisos; globos que se elevan o que se hunden por debajo del nivel del mar, variaciones en el nivel de agua de un depósito; desplazamientos representados por vectores unidireccionales que actúan sobre posiciones (puntos) de la recta numérica.

Bell (1986) muestra que hay niños que no saben dibujar correctamente la escala de un termómetro, ya que cuando tienen que calcular la diferencia entre dos temperaturas, realizan siempre una resta independientemente de los signos de las mismas, que no interpretan adecuadamente la expresión “más abajo” o “más arriba”.

Obstáculos

La noción de obstáculo epistemológico fue acuñada por Bachelard (1987) utilizada para identificar las dificultades que las personas tienen al aprender algo nuevo. Posteriormente Brousseau (1989) se refiere a los obstáculos epistemológicos y didácticos o de enseñanza. Éstos últimos son los que surgen del modo como se enseñan los conocimientos de acuerdo a un modelo educativo específico. Los obstáculos epistemológicos son dificultades intrínsecas de los conocimientos. Es posible encontrarlos en la historia de los conceptos mismos, lo cual no implica que se habrán de reproducir en situación escolar necesariamente las mismas condiciones históricas en que se han superado.

El primer artículo encontrado sobre obstáculos de aprendizaje en cuanto a los números enteros fue en Glaeser (1981). De acuerdo con este artículo publicado, los obstáculos son los siguientes:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. La primera referencia que se tiene de este obstáculo es en la obra de Diofanto donde se hace mención de la dificultad de operar con la diferencia y con el producto de dos números negativos. Fue entonces cuando enuncia la regla de los signos, pero sigue sin aceptar las operaciones con números negativos separados y mucho menos las soluciones negativas a un problema.
- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Durante toda la historia de las matemáticas han surgido diversos estudiosos que encuentran soluciones negativas de ecuaciones, pero no aceptan que sea así, justificándose en que el problema está mal redactado o bien que simplemente es una solución inconsistente.
- Dificultad para unificar la recta real. Se concebía a los números enteros como algo real pero que se oponía a los números positivos, ello *favorecía al modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente.*
- La ambigüedad de los dos ceros. Durante el trayecto de los números negativos existieron diversos cuestionamientos acerca de la existencia del cero y de cantidades inferiores a éste. Las diversas opiniones llegaban muchas veces a la misma conclusión "*no puede existir menos que nada"*.
- El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Solamente si se superaban los obstáculos ya mencionados se podría seguir con operaciones concretas.

La gestión del error

Es necesario que los docentes tomen conciencia que analizar los errores de sus estudiantes y comprender la causa de los mismos les permite poder anticiparlos y de esta manera gestionarlos a través de las interacciones, buscando que el estudiante aprenda a partir del trabajo con los propios errores. La gestión del error por parte del docente se debe realizar a través de preguntas oportunas al alumno, para ello es importante tener una comprensión de la naturaleza del mismo. Los errores forman parte del proceso de aprendizaje y como lo señalan Brousseau, Davis y Werner (1986), los alumnos piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo distinto a lo que esperan los docentes, sin embargo, esa vía de pensamiento tiene una lógica que puede resultar inesperadamente útil en algunos casos y por ello se elogia. Otras veces este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial y entonces lo denominamos error. Pero en ambos casos siempre hay una lógica que es necesario que el docente conozca y analice. Particularmente en el aprendizaje de números enteros, los mismos docentes suelen mencionar errores muy frecuentes de sus estudiantes cuando operan con números enteros, sin embargo, muchas veces sólo se atribuyen los mismos a obstáculos epistemológicos y no a decisiones didácticas de los propios docentes.

Se considera que es necesario realizar un tratamiento didáctico del error y en ese sentido se adhiere a Martinand (1989) que expresa "el error no es un defecto del pensamiento sino el testigo inevitable de un proceso de búsqueda" y también remarca que el error debe estar al servicio del alumno. Desde este enfoque habría que prever los errores y considerarlos vitales en el proceso de aprendizaje.

Los juegos en la enseñanza de números enteros

Para predisponer al aprendizaje es importante que los estudiantes estén motivados a partir de la generación de un clima adecuado en la clase, inclusión de material didáctico, el uso de problemas interesantes y también por la incorporación de actividades lúdicas.

Se entiende por juego a toda actividad cuya finalidad es lograr la diversión y el entretenimiento de quien la desarrolla. Según Piaget (1985) "los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla". Es importante que el juego tenga un alto contenido matemático que los estudiantes deben comprender para llegar a ser buenos jugadores, a través del juego se pueden crear ambientes que inciten a pensar de forma matemática.

Chamoso, Duran, García, Martín y Sánchez (2004) caracteriza a los juegos como actividades atractivas que los estudiantes fácilmente aceptan, logrando interesarlos y desarrollar el espíritu competitivo. Además, el juego estimula el desarrollo social de los estudiantes, favoreciendo las relaciones con otras personas, la expresión, la empatía, la cooperación y el trabajo en equipo, la aceptación y seguimiento de unas normas, la discusión de ideas, y el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos.

Particularmente interesa incluir juegos como recursos didácticos donde se consideren la neutralización y el desplazamiento. Se busca construir el sentido dual del cero, a través de la neutralización donde se hace hincapié en el cero total y de los desplazamientos donde se manifiesta el cero nulo.

Metodología del taller: trabajo con los profesores

En este trabajo se analiza la producción de los docentes del nivel secundario y formadores de formadores sobre las actividades de un taller que se realiza en el marco de la Relme 33. Se tiene en cuenta la realización de las actividades del mencionado taller y las intervenciones de los asistentes durante la puesta en común de las mismas.

En el Taller se genera un espacio para reflexionar sobre los errores que pueden cometer los estudiantes cuando resuelven tareas vinculadas con el orden, comparación y la operatoria básica con los números enteros. Interesa que además de reconocerlos, los docentes reflexionen sobre la naturaleza de los mismos y los asocien a algún tipo de obstáculo.

Se abordan los obstáculos epistemológicos poniendo de manifiesto la emergencia de la negatividad y del cero. Por eso en el desarrollo conceptual se hace hincapié en los diferentes sentidos del cero y en la triple naturaleza del signo menos.

También se hace referencia a los obstáculos de enseñanza, particularmente a aquellos ligados a la elección del docente en cuanto al modelo que utiliza para enseñar números enteros. Se procura que los asistentes experimenten con algunos modelos concretos, pudiendo reconocer ventajas y desventajas de la implementación de estos. Se presenta el modelo de bloques como lo denominaron Hernández y Gallardo, que tiene su versión simplificada con el uso de fichas de diferentes colores, brindando posibilidad de que experimenten con las mismas mientras resuelven problemas. Se genera un espacio de reflexión para la valoración del error como fuente de aprendizaje para los estudiantes y se habilita un espacio para la discusión de estrategias que posibiliten una apropiada gestión del mismo por parte del docente.

El taller se realiza en dos encuentros de una hora y media cada uno y las actividades proporcionadas a los docentes son las siguientes:

Primer encuentro

1. En grupo se analizan actividades con números enteros, destinadas a alumnos del ciclo básico de la escuela secundaria. Además, se identifican errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven las mismas.
2. Se realiza una puesta en común propiciando el intercambio entre los grupos.
3. Se promueve el debate entre los coordinadores sobre la naturaleza de los errores y realizan aportes utilizando diapositivas.
4. Se realiza el desarrollo conceptual acerca de los distintos significados del signo menos y del cero.

Segundo encuentro

1. En grupo, los docentes caracterizan las actividades de iniciación que suelen utilizar para el conjunto de los números enteros y/o su operatoria.
2. Se realiza una puesta en común con aportes de los coordinadores en cuanto a modelos implícitos en dichas actividades de iniciación.
3. Se presentan los diferentes modelos de enseñanza de números enteros.
4. Los docentes utilizan los modelos de bloques (gráfico y concreto) para resolver actividades destinadas a alumnos del secundario. Analizan ventajas y obstáculos sobre el uso de los mismos.
5. Se Manipulan los juegos: "la escoba del cero", "el juego de la oca", "dominó de operaciones con números enteros".

Las actividades que analizan los docentes fueron diseñadas teniendo en cuenta los tipos de tareas sobre números enteros, que con mayor frecuencia se utilizan en primer año de la escuela secundaria. Se proponen tres actividades destinadas a estudiantes de primer año del nivel secundario:

1. Realiza las siguiente sumas y restas (puedes utilizar la recta numérica)
   a) $10-(-5)=$
   b) $(-3)-(-6)=$
   c) $(-2)+(+7)=$
   d) $4+(-5)=$
   e) $2+0=$

2. Contesta las preguntas
   a) En América, el punto más alto es la montaña Aconcagua, situada en Argentina, que se encuentra a 6.962 metros sobre el nivel del mar. Mientras que el punto más bajo se encuentra en el Valle de la Muerte, en Estados Unidos, una depresión situada a 86 m bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la diferencia de altura entre el Monte Everest y la montaña Aconcagua?

   b) ¿Qué lugar está más cerca del nivel del mar, el Mar Muerto o el Valle de la Muerte? ¿Cuántos metros?

3. Si el número *n* está comprendido entre -15 y -10, indica cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas, justifica la respuesta:

a. $-n$ es mayor o igual que 10
b. *n* es positivo
c. El siguiente de *n* está entre -16 y -11
d. El anterior de *n* puede ser -14

Figura 1. Actividades para analizar
Fuente: elaboración propia

También se retoman algunas intervenciones y reflexiones interesantes de la puesta en común de las actividades mencionadas.

Resultados

Los docentes identifican la mayoría de los errores frecuentes de los estudiantes:

- Uso incorrecto de la regla multiplicativa de los signos en las adiciones y sustracciones de enteros. La expresión de un docente al respecto fue: "cuando están sumando dos números de igual signo, por ejemplo, dos números negativos, dicen menos por menos es más y colocan signo más al resultado".

- Resuelven las adiciones o sustracciones ignorando el signo unario del número o aplicando regla de multiplicación. Algunos docentes expresaron: "no miran algunos signos por ejemplo en (-3) -(-6) no tienen en cuenta el signo menos del seis y entonces el resultado es -9","En (-2) +(+7) dicen menos por más menos y el resultado será negativo".

- Resuelven los problemas de enunciado verbal sin expresar los signos de cada número priorizando el signo de la operación. Un docente manifiesta "…van a hacer una resta y no le asignarán el signo menos a la depresión, por ejemplo 6962-86"

- Para ordenar los números sólo prestan atención al valor absoluto del número y no al signo del número. Un docente dice "en el problema dado como es un contexto real, se lo imaginan y se dan cuenta quien está más cerca del cero, pero si fuera un contexto matemático o inclusive de temperaturas no miran el signo".

- Asumen que –n es un número negativo y que n es un número positivo. Un profesor acota "el signo del número es el signo de la letra".

Las intervenciones de los docentes asistentes al taller evidencian que no reconocen que la sustracción puede tener distintos significados ya que ellos mismos manifiestan que en general asocian la operación con una diferencia. Además, un grupo reducido de docentes desconoce la regla que para restar enteros se debe sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Para ellos se debe hacer supresión de paréntesis teniendo en cuenta el signo que precede al mismo o utilizar la regla de la multiplicación y posteriormente aplicar las reglas de la adición de enteros.

Respecto a cómo introducen el conjunto de los números enteros, la mayoría reconoce que lo presentan en el contexto de la vida cotidiana, por lo general en situaciones de deudas, de nivel del mar, del tiempo antes y después de Cristo. Ninguno de los docentes presentes se refiere a la necesidad de dar solución a la resta de números naturales. Ninguno utiliza material concreto.

Al analizar la naturaleza de los errores que pueden cometer los estudiantes, en general los atribuyen a que los estudiantes confunden las reglas de los signos de las operaciones o también a qué no diferencian los signos de los números del de la operación que interviene. También expresan que los alumnos siguen intentando aplicar las reglas que gobiernan las operaciones con los números naturales.

Cuando se les presenta la doble naturaleza del cero (todo y nada) los docentes expresan que desconocen la dualidad del cero.

La mayoría conoce dos sentidos del signo menos, como sustracción (binaria) y cómo signo del número (unaria), pero no como opuesto o simétrico. También se reflexiona sobre el hecho de que usualmente se presentan los números negativos dentro del conjunto de los enteros, hecho que refuerza en los estudiantes, la idea de que cualquier número negativo es entero.

Cuando se trabaja con los bloques (modelo de neutralización), los docentes lo hacen sin dificultad y consideran que es un buen recurso sobre todo para contribuir al cálculo mental cuándo los números enteros son de diferentes signos. Ante la inclusión de juegos los profesores aceptan el uso de estos para motivar a los estudiantes, pero reconociendo las ventajas y desventajas de los mismos.

De las intervenciones de la puesta en común entre los profesores asistentes y los coordinadores del taller se acuerda que se hace necesario hacer hincapié en que los estudiantes reconozcan la triple naturaleza del signo menos y la dualidad del cero utilizando actividades que permitan diferenciarlos. También incorporar problemas de sustracción con distintos sentidos de la operación sustracción y generando espacios para discutir con los estudiantes sobre esos sentidos. Respecto a la supresión de paréntesis hay consenso respecto a que se debe evitar el uso de la regla de signos de la multiplicación.

Conclusiones

Durante el taller los docentes identifican muchos de los errores que cometen los estudiantes. Por lo general atribuyen la naturaleza de los mismos a dificultades propias de los estudiantes. Tienen una visión muy reducida sobre los obstáculos que los provocan y por lo general no asumen la gran influencia que ejercen sobre tales errores. Por ejemplo, el hecho de que muchos de los profesores promueven que para sumar o restar números enteros se supriman los paréntesis utilizando la regla de los signos de la multiplicación o que algunos desconozcan que la sustracción puede transformarse en una adición utilizando el opuesto del sustraendo. La mayoría de los errores de los estudiantes son reforzados por la metodología utilizada por el docente o por las decisiones que toma sobre cómo enseñar los números enteros.

También se pone de manifiesto que los docentes desconocen la naturaleza dual del cero, los distintos sentidos del signo menos y los significados de la sustracción. Lo que hace ver la necesidad de que en la formación inicial los docentes aborden marcos teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de diferentes objetos matemáticos, en particular de los números enteros.

Se considera que una de las dificultades de la enseñanza de los números enteros es que se subestima el tema considerando que todos los docentes tienen dominio sobre el mismo, pero en realidad tienen dominio sobre la operatoria y reglas prácticas, no así sobre la construcción del sentido de los enteros, particularmente del cero y los números negativos.

Se cree que estos resultados están relacionados con dos aspectos fundamentales: el primero es la formación inicial de los docentes ya que no se aborda o es insuficiente el tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de los números enteros y de los obstáculos que provocan los errores que evidencian los estudiantes del nivel secundario. El segundo aspecto es la falta de momentos de reflexión sobre el cómo se enseña. No existen instancias para la reflexión del cómo y para qué se pretende enseñar desde una lógica diferente a la convencional. Los docentes, al momento de seleccionar los contenidos, hacen una opción por lo que conocen y dominan, además que sus concepciones y creencias sobre cómo y qué enseñar están sujetas a sus propias experiencias cuando aprendieron los números enteros en la escuela secundaria y seguramente que también en la formación como docentes. Es importante llegar a acuerdos a la luz de investigaciones en didáctica de la matemática sobre obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos particulares.

Respecto al uso de modelos concretos, los docentes reconocieron la utilidad de los mismos para motivar e interesar al estudiantado y concluyeron que cada uno de los recursos que se utilicen tiene ventajas y desventajas, pero que hay que animarse a utilizarlos sobre todo valorando los logros de aprendizaje que posibilitan.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.

Becerra, O.; Buitrago, M.; Calderón, S.; Gómez, R.; Cañadas, María C.; Gómez, P. (2012). *Adición y sustracción de números enteros*. En Gómez, Pedro (Ed.), Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1 (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes.

Bell, A. (1986). *Enseñanza por diagnóstico: algunos problemas sobre los números enteros*. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208

Brousseau, G. (1989). *Les obstacles épistémologuiques et la didactique des mathématiques*. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds), Construction des savoirs, (pp. 41-63). hal-00516581v1

Brousseau, G.; Davis, R. B. y Werner, T. (1986). *Observing Students at Work*. En B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds). Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht, D. Reidel Publishing Co.

Chamoso, J., Durán., García Sánchez, J., Martín, J. y Sánchez, M. (2004) *Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemática*. Recuperado de http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=00720073000328

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Cangas, España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm

Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, (2), 529-542

Cid, E. & Bolea, P. (2010*). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, (pp 576-582). Francia: Université de Montpellier

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Gallardo, A (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis doctoral. CINVESTAV. México.

Gallardo, A. & Hernandez, A (2007*) Emergencia de los números enteros*. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf

Gallardo, A., Santos, N., Hernández, J. A. (2010). *La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso*. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida: SEIEM. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(3), 303-346.

Hernández, A. y Gallardo, A. (2006). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vías los modelos concretos de bloques. *Educación Matemática, 18*(1), 73-97.

Janvier, C (1985). *Comparison of models aimed at teaching signed integers*. En: 9 Conference of the international group for the Psychology of Mathematics

Maca Díaz, A. (2016). *La enseñanza de los números enteros, un asunto sin resolver en las aulas*. Plumilla Educativa N° 17.

Martinand, J. (1989). Pratiques de reference, transposition didactique et savoires professionnels en sciences et techiques. *Les Sciences de l'Éducation, 2*, pp. 23-29.

Piaget, J. (1985): Seis estudios de Psicología. Origen/Planeta, México.

Schubring, G. (1988), 'Discussions ´epistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et fran¸cais de mathématiques entre 1795 et 1845'. En C. Laborde (ed.), Actes du premier Colloque Franco-allemand de 14 Didactique des Math´ematiques et de l'Informatique, (137-145). Grenoble. La Pens´ee Sauvage Editions.

Vergnaud, G. (1989), *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre*. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), Construction des savoirs. Obstacles et conflits, (pp. 76-86). Quebec. Les Editions Agence d'ARC.

Villarruel, F. (2009). *La práctica Educativa del maestro mediador*. *Revista Iberoamericana de Educación, 50(3)*, 1-12. Recuperado de http://www.rieoei. org/deloslectores/2957Fuentes.pdf

IDENTIFICACIÓN DE LAS SERIES DE FOURIER COMO COMBINACIONES LINEALES DE UNA BASE DE DIMENSIÓN INFINITA ORTOGONAL

IDENTIFICATION OF THE FOURIER SERIES AS LINEAR COMBINATIONS OF AN ORTHOGONAL-INFINITE-DIMENSION BASIS

José Isaac Sánchez Guerra, Carlos Oropeza Legorreta, José Juan Contreras Espinosa
Universidad Nacional Autónoma de México (México).
joejade@hotmail.com, coropeza96@hotmail.com, jjuancon2000@yahoo.com.mx

Resumen
En el presente trabajo se pretende identificar a las series de Fourier como combinaciones lineales de una base infinita de funciones trigonométricas, de manera que se puedan aplicar características propias de una combinación lineal a dichas series como una alternativa para su comprensión. El estudio de estas series es importante debido a que se ha reconocido que su uso en el análisis de señales es un requisito básico en la formación de un ingeniero que estudia temas relacionados con las telecomunicaciones, tópico de gran impacto en la actualidad, en los programas de algunas de las escuelas de ingeniería en México.

Palabras clave: series de Fourier, combinación lineal

Abstract
This research work seeks to identify Fourier series as linear combinations of an infinite base of trigonometric functions, so that linear combinations own characteristics can be applied to Fourier series as an alternative for their understanding. The study of these series is important due to the fact that their use has been recognized as a basic requisite in the training of an engineer who studies topics related to telecommunication, which has great impact in the syllabuses of some Mexican engineering schools at present.

Key words: Fourier series, linear combination

Introducción

En México, durante las últimas décadas, se ha vuelto una tradición interpretar la enseñanza de la matemática en las escuelas de ingeniería como la necesidad imperante relacionada con la capacidad del ingeniero para resolver problemas muy diversos. En este sentido, una buena parte de los problemas de ingeniería hacen uso de diferentes conceptos matemáticos; el caso que se presenta en este trabajo hace referencia a la combinación lineal y las series de Fourier.

Existen algunas asignaturas que utilizan como apoyo para su estudio la asociación de conocimientos basados en propiedades físicas, propiedades observadas en la naturaleza, situaciones relacionadas con el desarrollo económico de un país, crecimiento de una población, fenómenos periódicos, etc. Sin embargo, en el estudio del álgebra lineal, la mayor parte de los conceptos que se abordan en los libros de texto recomendados como bibliografía de consulta, al menos en los planes de estudio de las ingenierías impartidas en la Facultad donde laboran los autores (Anton y Rorres, 2011; Grossman y Flores, 2010; Kolman y Hill, 2006; Larson y Edwards, 2004; Lay, 2012; Poole, 2011; Strang, 2007; por mencionar algunos), es presentada a partir de definiciones formales. Dichas definiciones, en la mayoría de los casos, no parten de conocimientos previos ni de argumentos provenientes de la física o geometría, sino que se construyen preferentemente con formalidad axiomática. Esto hace, entre otras cosas, que muchos estudiantes perciban al álgebra lineal como demasiado abstracta y declaran que sus conceptos carecen de aplicación en la realidad. Por otra parte, el álgebra lineal es generalmente considerada uno de los prerrequisitos más importantes para muchos campos de matemáticas, ciencia e ingeniería.

Con base en la experiencia de los autores, éstos afirman que la asignatura de Álgebra Lineal es fundamental para la formación básica en matemáticas de un ingeniero. Uno de los conceptos más importantes que se aborda en esta asignatura es el de combinación lineal.

Possani, Trigueros, Preciado y Lozano (2010) mencionan que el álgebra lineal ha sido reconocido como un tema importante para una variedad de disciplinas, por lo que se ha convertido en un tema obligatorio en muchos programas de estudio. También se ha reconocido que el álgebra lineal es una materia difícil para la mayoría de los estudiantes. Carlson et al. (1997) han hecho investigaciones respecto a los principales obstáculos que enfrentan los estudiantes al aprender conceptos y herramientas del álgebra lineal. Su trabajo sugiere que es deseable usar problemas que vayan más allá de ejercicios simples, especialmente si provienen de otras áreas temáticas. En nuestro caso, se busca trabajar con el concepto de combinación lineal y con el de serie de Fourier para enriquecer la comprensión de ambos.

Por otra parte, el concepto de serie de Fourier es fundamental, en particular, para un alumno que cursa la Ingeniería en Telecomunicaciones, Sistemas y Electrónica (ITSE), que se ofrece en la Facultad de procedencia de los autores, principalmente para el análisis de señales. El presente trabajo promueve una aproximación a las series de Fourier desde el punto de vista de las combinaciones lineales.

Marco teórico

Conviene recordar algunos conceptos ligados a las combinaciones lineales, tales como: espacio vectorial, independencia lineal, base y producto interno, como están expuestos en Lay (2012), por ejemplo.

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones, llamadas suma y multiplicación por escalares (números reales), sujetas a diez axiomas (o reglas) que se dan a continuación (el número de axiomas puede cambiar según los autores que se citen) y que son válidos para todos los vectores u, v y w pertenecientes a V y para todos los escalares c y d:

1. La suma de u y v, denotada por $u + v$, pertenece a V.
2. $u + v = v + u$.
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. Existe un vector 0 perteneciente a V tal que $u + 0 = u$.
5. Para cada u perteneciente a V, existe un vector $-u$ perteneciente a V tal que $u + (-u) = 0$.
6. El múltiplo escalar de u por c, denotado por cu, pertenece a V.
7. $c(u + v) = cu + cv$.
8. $(c + d)u = cu + du$.
9. $c(du) = (cd)u$.
10. $1u = u$.

La definición de Grossman y Flores (2010) para la combinación lineal en un espacio vectorial es la siguiente: "sean $v_1, v_2, \dots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma $a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \sum_{i=1}^{n} a_iv_i$, donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares, se denomina combinación lineal de $v_1, v_2, \dots, v_n$" (p. 315).

Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente si la solución a la ecuación vectorial $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0$ tiene como solución $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Un conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ pertenecientes a un espacio vectorial V es una base para dicho espacio vectorial si B es un conjunto linealmente independiente y genera a V, es decir, cada vector v que pertenece a V se puede escribir como combinación lineal de los vectores de B.

Un producto interno dentro de un espacio vectorial V es una función que asocia a cada par de vectores u y v pertenecientes a V un número real $\langle u, v\rangle$ y que satisface los siguientes axiomas, para todos u, v y w pertenecientes a V y para todo escalar c:

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
2. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.
3. $\langle cu, v\rangle = c\langle u, v\rangle$.
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$ y $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$.

La definición de Hsu (1987) para una serie trigonométrica de Fourier es la siguiente: "sea la función $f(t)$ una función periódica de período T, la cual se puede representar por la serie trigonométrica $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots + b_1\operatorname{sen}(\omega_0 t) + b_2\operatorname{sen}(2\omega_0 t) + \cdots = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\operatorname{sen}(n\omega_0 t))$, donde $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Una serie representada de esta manera se llama serie trigonométrica de Fourier" (p. 4).

Se puede notar que la expresión matemática de una combinación lineal y una serie trigonométrica de Fourier es similar, por lo que se podría pensar en que el conjunto de las funciones que se pueden representar por una serie trigonométrica de Fourier forman un espacio vectorial, ya que también se pueden definir las operaciones suma y multiplicación por un escalar, de manera que se cumplan los axiomas que cumple un espacio vectorial.

Sobre el concepto de combinación lineal, se puede probar que el conjunto de funciones $\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \dots, \operatorname{sen}(\omega_0 t), \operatorname{sen}(2\omega_0 t), \dots\}$ es linealmente independiente y se podría considerar como una base del espacio de funciones que se pueden representar por una serie trigonométrica de Fourier, ya que dicho conjunto también genera este espacio.

Así mismo, se puede definir un producto interno para este espacio de la siguiente manera: $\langle u(t), v(t)\rangle = \int_0^T u(t)v(t)dt$, que está definido para el intervalo $[0, T]$. Bajo este producto interno, se puede mostrar que la base $\{1, \cos(\omega_0 t),\ \cos(2\omega_0 t), \dots, \text{sen}(\omega_0 t),\ \text{sen}(2\omega_0 t), \dots\}$ es ortogonal en dicho intervalo.

Tomando en cuenta el producto interno anterior, el conjunto de constantes únicas $\{a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots\}$ para cada función $f(t)$ en este espacio, están definidas por $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$ y $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}(n\omega_0 t)dt$, $n = 1, 2, \dots$

En la práctica, representar a una función $f(t)$ con una serie de Fourier es imposible, por lo que es común representarlas con un subconjunto de la base original de la forma $\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \dots, \cos(k\omega_0 t), \text{sen}(\omega_0 t),\ \text{sen}(2\omega_0 t), \dots, \text{sen}(k\omega_0 t)\}$, con k definida. Dichas representaciones se pueden denotar como $f_k(t)$.

También se puede probar que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son las sucesiones de los coeficientes de la representación en serie de Fourier de $f(t)$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Este resultado nos hace plantearnos las siguientes preguntas: ¿qué valor de k es conveniente tomar para que $f_k(t)$ sea una buena aproximación de $f(t)$? ¿Qué sucede con las series de Fourier cuyos coeficientes no cumplen con este resultado?

Desarrollo

A manera de posibles respuestas, se muestran los siguientes ejemplos tomados de Oppenheim, Willsky y Nawab (1998). El primero muestra aproximaciones a la función $f(t) = \begin{cases} 1 & -T_1 \le t \le T_1 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$, mediante funciones $x_N(t)$ (ver Figura 1). ¿Para qué valor de N se puede decir que $x_N(t)$ nos da una buena aproximación de $f(t)$? Cuando se trabaja en el análisis de señales, ¿es práctico trabajar con dicho valor de N?

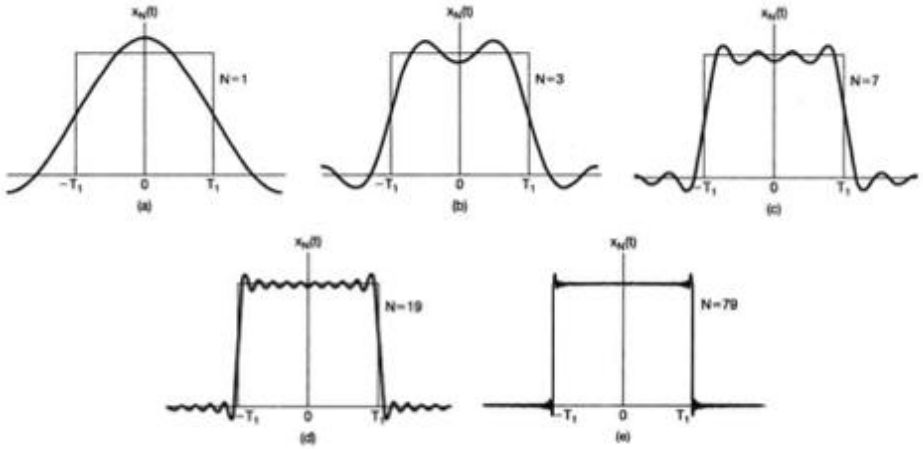


Figura 1. Aproximaciones por funciones $x_N(t)$ a una función $f(t)$.

El segundo ejemplo muestra la construcción de la serie de Fourier de una función $x(t)$ de período $T = 1$ cuyos coeficientes son $a_0 = 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{2}{3}$ y 0 para todos los demás (ver Figura 2). ¿Podría ser $x(t) = f_3(t)$ para alguna función $f(t)$ que se pueda representar mediante una serie de Fourier?

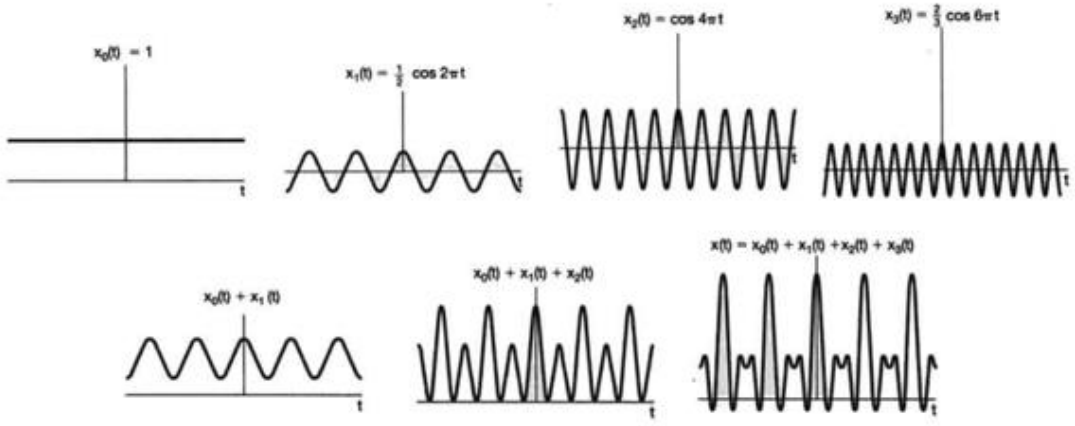


Figura 2. Construcción de la función $x(t)$.

En posteriores trabajos, se buscará dar respuesta a estas y a otras preguntas similares.

Por otra parte, la convergencia de una serie de Fourier a una función $f(t)$ se garantiza considerando las condiciones de Dirichlet, las cuales son (Hsu, 1987, p. 16):

a) La función $f(t)$ tiene un número finito de discontinuidades en un período.
b) La función $f(t)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en un período.
c) La integral del valor absoluto de $f(t)$ en un período es finita; es decir, $\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|dt < \infty$.

Como ejemplos de series de Fourier que convergen a una función, además del primer ejemplo de esta sección, se presentan los siguientes:

Sea $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$. Se puede verificar que esta función cumple con las condiciones de Dirichlet, por lo que la serie de Fourier que puede representar a esta función sí converge.

Los coeficientes a_n y b_n para dicha serie están dados por:

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}(1)dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)dt = 0,$

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}(1)\cos(n\omega_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)\cos(n\omega_0 t)dt = 0$ y

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2}(1)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}(-1)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)dt = \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi)),$ de donde $b_n = 0$ si n es par y $b_n = \frac{4}{n\pi}$ si n es impar.

Por lo que la serie de Fourier de la función $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ es

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\big((2n-1)\omega_0 t\big).$$

Se puede aproximar dicha serie para un valor finito de la suma:

$$f_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\big((2n-1)\omega_0 t\big).$$

Para graficar la función y algunas de sus aproximaciones, se ocupó un programa hecho por los autores en el software matemático Maple, se tomó $T = 2\pi$ y se graficaron 6 períodos (desde $-3T$ hasta $3T$) (Figura 3):

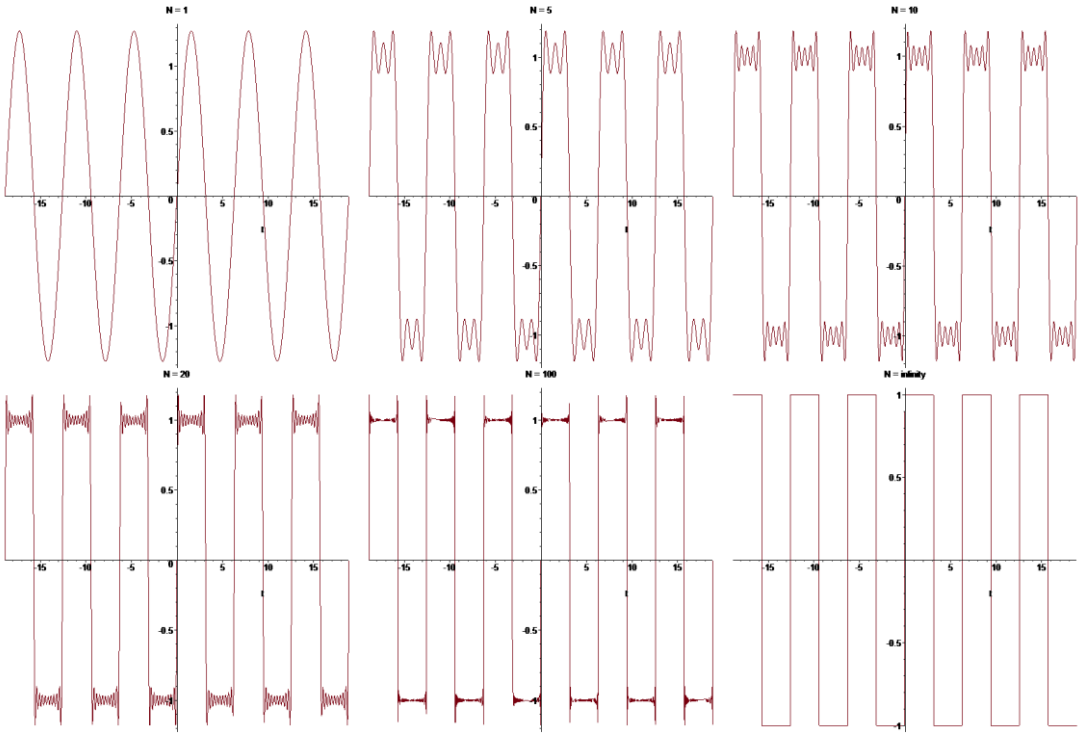


Figura 3. Aproximaciones de la función $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$ por su serie de Fourier para distintos valores de N.

Para la construcción de $f_5(t)$, por ejemplo, se necesitan 6 funciones del tipo $x_n(t) = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$, las correspondientes a los valores $n = 0,1,2,3,4,5$. Es decir,
$f_5(t)$ se puede ver como combinación lineal de las funciones $\{1, \cos(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \cos(3\omega_0 t), \cos(4\omega_0 t), \cos(5\omega_0 t), \operatorname{sen}(\omega_0 t), \operatorname{sen}(2\omega_0 t), \operatorname{sen}(3\omega_0 t), \operatorname{sen}(4\omega_0 t), \operatorname{sen}(5\omega_0 t),\}$ de la siguiente forma:

$$f_5(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t) =$$
$$a_0 + a_1\cos(\omega_0 t) + b_1\operatorname{sen}(\omega_0 t) + a_2\cos(2\omega_0 t) + b_2\operatorname{sen}(2\omega_0 t) + a_3\cos(3\omega_0 t) + b_3\operatorname{sen}(3\omega_0 t) +$$
$$a_4\cos(4\omega_0 t) + b_4\operatorname{sen}(4\omega_0 t) + a_5\cos(5\omega_0 t) + b_5\operatorname{sen}(5\omega_0 t).$$

Pero, para este caso, sólo b_1, b_3 y b_5 no son cero, por lo que $f_5(t)$ se depende sólo de $b_1\text{sen}(\omega_0 t)$, $b_3\text{sen}(3\omega_0 t)$ y $b_5\text{sen}(5\omega_0 t)$, con $b_1 = \frac{4}{\pi}$, $b_3 = \frac{4}{3\pi}$ y $b_5 = \frac{4}{5\pi}$, cuyas gráficas se muestran en la Figura 4:

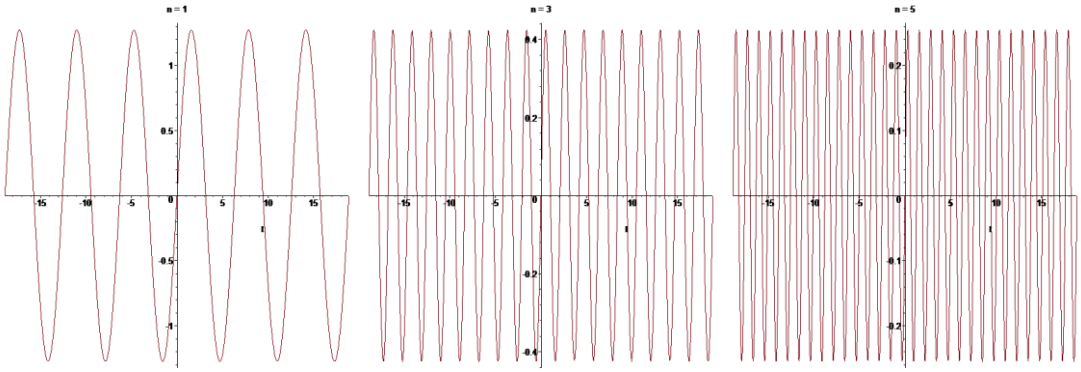


Figura 4. Componentes de $f_5(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$.

Ahora, sea $f(t) = e^t$ con período 2π en el intervalo $(-\pi, \pi)$. También esta función cumple con las condiciones de Dirichlet, por lo que la serie de Fourier que puede representar a esta función sí converge.

Los coeficientes a_n y b_n para dicha serie están dados por:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{2\text{senh}(\pi)}{\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\cos(nt)dt = \frac{(-1)^n 2\text{senh}(\pi)}{\pi(n^2+1)} \text{ y}$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\frac{2\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{2}} f(t)\,\text{sen}(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t\text{sen}(nt)dt = -\frac{(-1)^n 2n\text{senh}(\pi)}{\pi(n^2+1)}.$$

Por lo que la serie de Fourier de la función $f(t) = e^t$ es

$$f(t) = \frac{1}{2}\frac{2\text{senh}(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n 2\text{senh}(\pi)}{\pi(n^2+1)}\cos(nt) - \frac{(-1)^n 2n\text{senh}(\pi)}{\pi(n^2+1)}\text{sen}(nt)\right)$$
$$= \frac{2\text{senh}(\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}\big(\cos(nt) - n\text{sen}(nt)\big)\right].$$

Se puede aproximar dicha serie para un valor finito de la suma:

$$f_N(t) = \frac{2\text{senh}(\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}\big(\cos(nt) - n\text{sen}(nt)\big)\right].$$

Graficando 6 períodos de la función (desde -6π hasta 6π), se tiene (Figura 5):

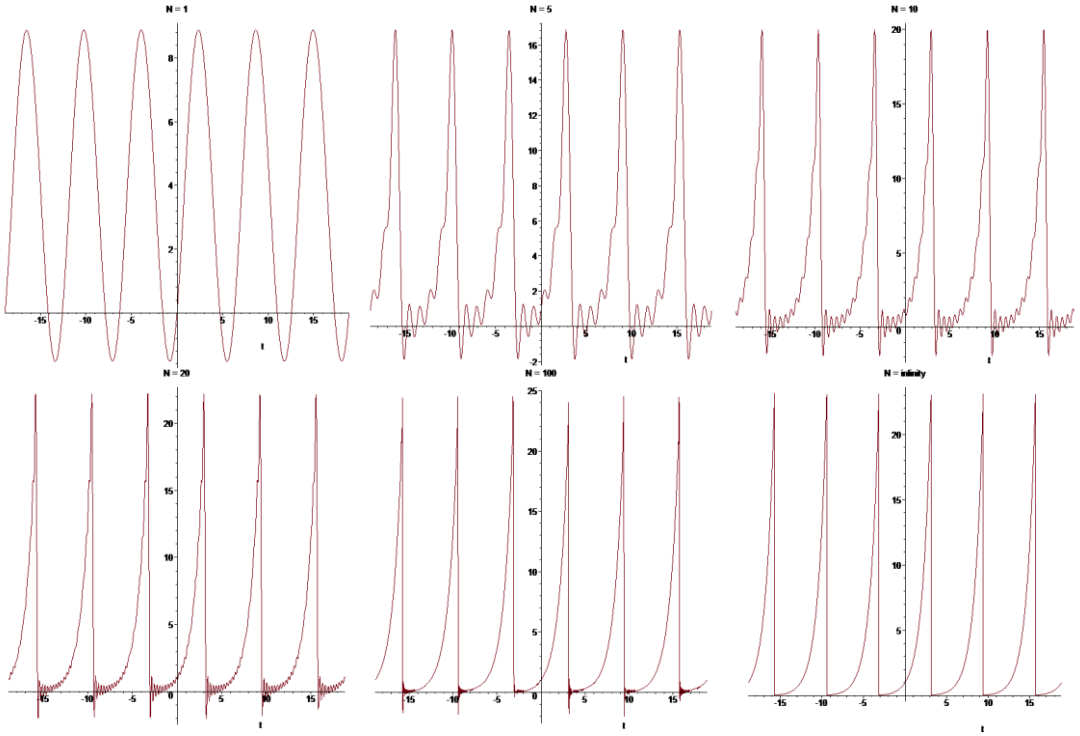


Figura 5. Aproximaciones de la función $f(t) = e^t$ por su serie de Fourier para distintos valores de N.

Para la construcción de $f_5(t)$ se necesitan 6 funciones del tipo $x_n(t) = a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$, las correspondientes a los valores $n = 0,1,2,3,4,5$. Es decir, $f_5(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t) + x_5(t)$, donde, para este caso,

$$x_0 = \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi},$$
$$x_1 = -\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\cos(t) + \frac{\operatorname{senh}(\pi)}{\pi}\operatorname{sen}(t),$$
$$x_2 = \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi}\cos(2t) - \frac{4\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi}\operatorname{sen}(2t),$$
$$x_3 = -\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi}\cos(3t) + \frac{3\operatorname{senh}(\pi)}{5\pi}\operatorname{sen}(3t),$$
$$x_4 = \frac{2\operatorname{senh}(\pi)}{17\pi}\cos(4t) - \frac{8\operatorname{senh}(\pi)}{17\pi}\operatorname{sen}(4t),$$
$$x_5 = -\frac{\operatorname{senh}(\pi)}{13\pi}\cos(5t) + \frac{5\operatorname{senh}(\pi)}{13\pi}\operatorname{sen}(5t).$$

Cuyas gráficas se muestran en la Figura 6:

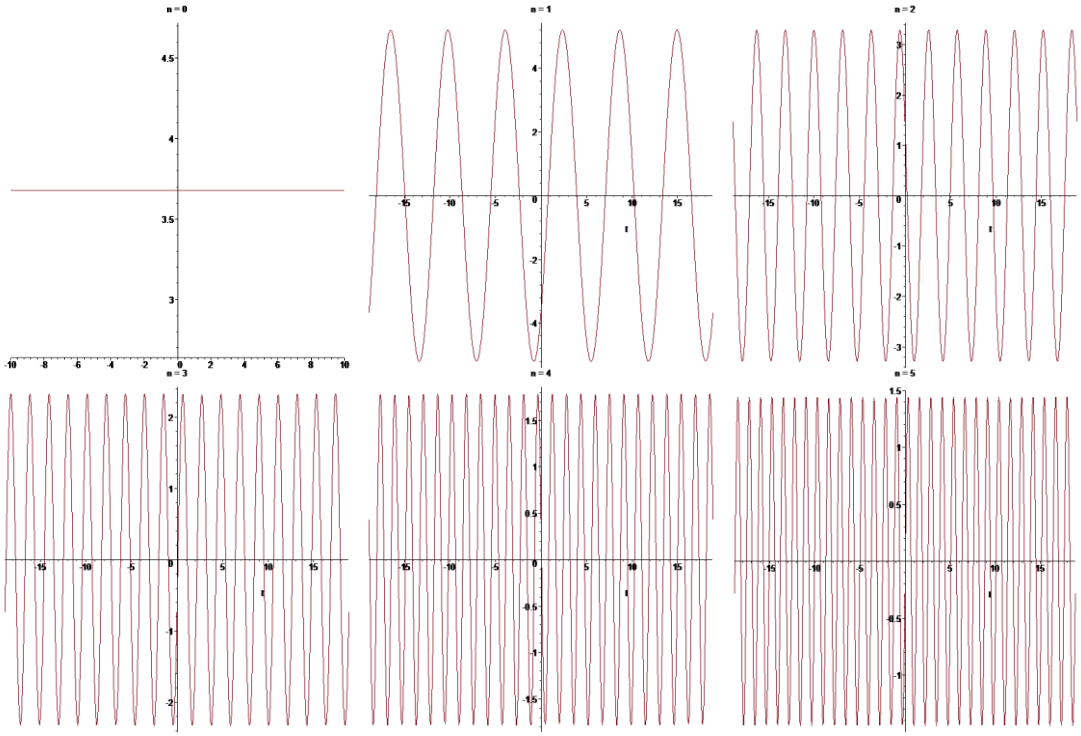


Figura 6. Componentes de $f_5(t) = e^t$.

Análisis y resultados

En este trabajo se contextualiza el concepto de combinación lineal relacionándolo con el análisis de las series de Fourier para aplicarlo, por ejemplo, al análisis de señales.

Asimismo, aunque no es el objetivo principal de este trabajo, se muestra el uso de software matemático para la graficación de funciones. En este caso, se graficaron algunas componentes x_n para una aproximación específica de $f(t)$ y su suma, lo que permite visualizar cómo las aproximaciones $f_N(t)$ son cada vez más parecidas a $f(t)$.

La serie de Fourier de una función periódica puede ser vista como un elemento de un espacio vectorial de dimensión infinita al ser una combinación lineal de una base infinita.

Referencias bibliográficas

Anton, H. y Rorres, C. (2011). *Introducción al álgebra lineal* (5ta ed.). México: Limusa.
Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., Porter, A. D., Watkins, A. y Watkins, W. (Eds.) (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra*. Washington DC: The Mathematical Association of America.
Grossman, S. I. y Flores, J. J. (2010). *Álgebra Lineal* (7ma ed.). México: McGraw Hill.
Hsu, H. P. (1987). *Análisis de Fourier*. México: Addison-Wesley Iberoamericana.
Kolman, B. y Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal* (8va ed.). México: Pearson Educación.
Larson, R. E. y Edwards, B. H. (2004). *Introducción al álgebra lineal*. México: Limusa.
Lay, D. C. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4ta ed.). México: Pearson Educación.
Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. y Nawab, S. H. (1998). *Señales y sistemas* (2da ed.). México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna* (3ra ed.). México: Cengage Learning.
Possani, E., Trigueros, M., Preciado, G. y Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications 432*(8), 2125–2140.
Strang, G. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (4ta ed.). México: Thomson Learning.

LA CONCEPCIÓN DE LA INTERDISCIPLINARIEDAD EN LA DISCIPLINA ANÁLISIS MATEMÁTICO, DE LA CARRERA LICENCIATURA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

THE CONCEPTION OF INTERDISCIPLINARITY IN THE DISCIPLINE MATHEMATICAL ANALYSIS OF THE CAREER DEGREE IN EDUCATION MATHEMATICS

Raúl Herrera García, Enma Leticia Ochoa Domínguez, Odiel Estrada Molina
Universidad de las Tunas, Universidad de las Ciencias Informáticas (Cuba).
raulhg@ult.edu.cu, enma@ult.edu.cu, oestrada@uci.cu

Resumen
El trabajo tiene como antecedentes una investigación implementada desde el 2014 en la carrera (en liquidación) Licenciatura en Educación: Matemática-Física. Surge ante la necesidad de una preparación efectiva de los docentes que imparten Análisis Matemático para formar un estudiante universitario capaz de solucionar problemas del proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura Matemática, mediante el desarrollo de una cultura matemática sustentada en la utilización de enfoques interdisciplinarios. El objetivo de la investigación es elaborar una metodología para el trabajo metodológico interdisciplinario en la disciplina Análisis Matemático, en la Licenciatura en Educación Matemática, que contribuya a la formación y desarrollo de un pensamiento interdisciplinario en los estudiantes. La aplicación de la metodología permitió un análisis integral del proceso formativo y se elevó la preparación de los docentes para el trabajo interdisciplinario.

Palabras clave: interdisciplinariedad, trabajo metodológico interdisciplinario, análisis matemático

Abstract
This work was preceded by a research implemented, since 2014, in the Bachelor's Degree in Mathematics and Physics Education (in closing stage). It arose under the need of an effective qualification of Mathematics Analysis teachers in order to train university students capable of solving problems of the mathematics teaching learning process, through the development of a mathematical culture supported by the use of interdisciplinary approaches. So, the aim of this research work is to devise a methodology for the interdisciplinary methodological work in the discipline Mathematics Analysis in the Mathematics Education Degree that contributes to the training and development of students' interdisciplinary thinking. Implementing this methodology allowed a comprehensive analysis of the educational process; and teachers' training for interdisciplinary work was also improved.

Key words: interdisciplinary, interdisciplinary methodological work, mathematical analysis

Introducción

La carrera Licenciatura en Educación, especialidad Matemática aporta de un modo peculiar al desarrollo del estudiante universitario. Los contenidos formativos contribuyen al reconocimiento de los procesos y fenómenos que han configurado el transcurso de la sociedad; esto permite comprender la necesidad social de redimensionar la formación inicial hacia un pensamiento interdisciplinario. Esto propicia asimilar los argumentos para resolver diferentes problemáticas que se manifiestan en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Disciplina de Análisis Matemático con el fin de apropiarse de las habilidades para intervenir en los adelantos científico-técnicos.

La definición de los problemas profesionales en la carrera de Licenciatura en Educación. Matemática se hace de acuerdo con las necesidades actuales y perspectivas del perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación. Estos son expresados en términos de contradicciones, que se producen entre la dirección grupal del proceso pedagógico en general, y del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, con un enfoque político-ideológico y científico-humanista e interdisciplinario y la necesidad del desarrollo de las potencialidades individuales de los estudiantes (Ministerio de Educación Superior de Cuba, 2016).

Para desarrollar los contenidos de la Educación de cada disciplina es necesario tener en cuenta las estrategias curriculares, consideradas como “marco referencial común”, las cuales deben interrelacionarse como objetivos y saberes esenciales de carácter interdisciplinario.

El plan de estudio “E” de la Licenciatura en Educación. Matemática, establece como uno de sus objetivos generales: “desarrollar, a través del aprendizaje del Análisis Matemático, una cultura matemática y formas de pensar y actuar, sustentadas en la utilización de procesos de pensamiento, métodos, enfoques interdisciplinarios, procedimientos y estrategias, tanto cognitivas como metacognitivas, y una conducta en correspondencia con los principios y normas de la ética profesional” (Ministerio de Educación Superior de Cuba, 2016).

Para contribuir al logro de este objetivo, el programa de la disciplina Análisis Matemático plantea el desarrollo de un modo de actuación profesional pedagógico a través de las diferentes formas organizativas del proceso educativo. Al sistematizar y profundizar los contenidos esenciales de la Matemática escolar y en particular los relativos al límite, la continuidad, la derivación y la integración de funciones reales de una variable real y la resolución de los diferentes tipos de ecuaciones y vincular la Matemática con la vida y otras disciplinas. De ahí la necesidad de perfeccionar la preparación del colectivo de disciplina Análisis Matemático, en lo relacionado con el trabajo interdisciplinario entre las asignaturas que la integran y sus interconexiones con la disciplina Física.

El acercamiento empírico al comportamiento de los elementos expuestos anteriormente, realizado a partir de un estudio exploratorio, como parte de las tareas investigativas del proyecto de investigación “La formación del profesional de la Educación en Ciencias Naturales y exactas”, en la línea “La influencia del contexto en la didáctica del siglo XXI”. Además de los análisis de las actividades metodológicas desarrolladas, reflejan dificultades en el diseño y ejecución del trabajo metodológico desde un enfoque interdisciplinario. Por otra parte, en ocasiones resulta insuficiente el abordaje de las estrategias curriculares a partir de las potencialidades que ofrecen los núcleos de contenidos de las asignaturas que integran la disciplina Análisis Matemático y sus interrelaciones para contribuir a la labor formativa.

Esta situación demuestra que los docentes tienen insuficiencias en el trabajo metodológico interdisciplinario y no siempre logran un diseño coherente del trabajo interdisciplinario a partir de un adecuado tratamiento a las estrategias curriculares como “marco referencial común”, lo que supone adentrase en esta problemática desde sus causas.

Desarrollo

El colectivo de disciplina de Análisis Matemático requiere que la concepción y realización del trabajo metodológico se desarrolle desde una perspectiva interdisciplinaria, de modo que se puedan cumplir los cuatro pilares básicos de la educación, que se plantean en el Informe de la Comisión Internacional de la UNESCO sobre la Educación en el siglo XXI, (Delors, 1996). Para cumplir tales propósitos se debe perfeccionar el trabajo metodológico. Ello supone, además, la necesidad de revisar críticamente el cuerpo teórico del trabajo metodológico y enriquecerlo con la teoría interdisciplinar. Al respecto se presentará una breve sistematización teórica sobre trabajo metodológico interdisciplinario (en lo adelante TMI), lo que requirió del abordaje de los conceptos: trabajo metodológico e interdisciplinariedad.

En el Reglamento de Trabajo Docente y Metodológico de la Educación Superior, el trabajo metodológico se define como "la labor que, apoyados en la Didáctica, realizan los sujetos que intervienen en el proceso docente educativo, con el propósito de alcanzar óptimos resultados en dicho proceso, jerarquizando la labor educativa desde la instrucción, para satisfacer plenamente los objetivos formulados en los planes de estudio" (Ministerio de Educación Superior de Cuba, 2018, p.5).

Los principales elementos concernientes al desarrollo teórico del trabajo metodológico, su "(…) núcleo teórico más estable (…)" (Mastrapa, 2016, p.48), están contenidos en los documentos normativos y metodológicos de los ministerios de Educación (MINED) y Educación Superior (MES) de Cuba. Desde tales documentos se han definido y actualizado sistemáticamente sus objetivos, contenido, direcciones principales, formas y niveles organizativos para su realización.

Se revisaron investigaciones dirigidas a la optimización de este proceso, al tratamiento a determinados contenidos, al modo de su realización mediante nuevos enfoques o al perfeccionamiento de las formas organizativas, métodos y procedimientos que lo dinamizan como indican varios estudios.

Como parte de la sistematización teórica se precisaron rasgos del trabajo metodológico, dada su importancia para abordar el TMI como contenido de la preparación de los docentes. Se reconoce la complementariedad entre el trabajo metodológico y el trabajo interdisciplinario. En diversas investigaciones se alude al TMI, distinguiéndolo como un enfoque del trabajo metodológico o un tipo particular que debe atender a ciertos requerimientos (Herrera, 2018).

Para comprender las particularidades del TMI resulta necesario asumir una posición teórica acerca de la interdisciplinariedad, concepto que ha sido indistintamente interpretado por numerosos especialistas (Chacón, 2013; Fernández, 2013; Fiallo, 2001; Mañalich, 2001; Perera 2000; Pereira, 2014; entre otros).

Para (Fiallo, 2001, p.18) la interdisciplinariedad constituye "(…) una filosofía de trabajo, una forma de pensar y de proceder para conocer la complejidad de la realidad objetiva y resolver cualquiera de los complejos problemas que esta plantea." Según Mañalich (2001): "En pedagogía, el concepto de interdisciplinariedad es opuesto al conocimiento fraccionado y en parcela, y se orienta hacia la integración y globalización de los conocimientos, en general, por lo que se puede considerar el resultado de una nueva pedagogía pluridisciplinar (…)" (p.18).

A partir de la perspectiva de esto autores se asume que, la interdisciplinariedad en el ámbito pedagógico supone un modo de pensar y actuar en la concepción y dirección del proceso educativo, que permite abordar desde una visión integrada los problemas y fenómenos complejos y cambiantes de la realidad; e interpretarlos, comprenderlos y explicarlos, a partir de la articulación e integración de los sistemas teóricos de las diversas disciplinas científicas que los estudian. Implica, por consiguiente, la concepción sistémica del conjunto de las actividades formativas que tienen lugar en las universidades cubanas, en función de alcanzar el fin de la Educación Superior.

Desde sus propuestas en relación con el TMI se puede inferir un conjunto de rasgos y exigencias que caracterizan al TMI. A partir del análisis se asume la definición de TMI, como un sistema de actividades que requiere de una unidad conceptual-metodológica de carácter interdisciplinario, asumida como una filosofía de trabajo por parte de directivos, funcionarios y docentes. Aborda la preparación político-ideológica, pedagógico-metodológica y científica-técnica, desde un enfoque formativo para el tratamiento a las exigencias devenidas del modelo curricular al trabajo interdisciplinario y las implicaciones que comportan a su actuación. Contribuye a la aprehensión de los componentes del contenido de la educación para la formación integral de los estudiantes, como "marco referencial común" y recurso metodológico que favorece el alcance del fin y los objetivos de la educación. Tiene como propósito que sus beneficiarios estén aptos para dirigir los procesos formativos de manera pertinente (Herrera, 2018, p. 58).

A continuación, se presenta la metodología para el TMI en la disciplina Análisis Matemático, en la formación inicial de la carrera Licenciatura en Educación. Matemática.

La metodología para la preparación de los docentes del colectivo de disciplina de Análisis Matemático para TMI constituye una secuencia sistémica de procedimientos, que a su vez se conforman por un conjunto de acciones, ambas organizadas secuencialmente. Su objetivo general es orientar la labor pedagógica de los docentes para el TMI en el colectivo de disciplina de Análisis Matemático en la formación inicial de la Carrera Licenciatura en Educación. Matemática.

Procedimiento 1:

Planificación del sistema de actividades metodológicas dirigidas a la preparación de los docentes para el TMI en el colectivo de disciplina de Análisis Matemático.

Objetivo: Diseñar el sistema de actividades metodológicas dirigidas a la preparación de los docentes, a partir de la determinación de los problemas y prioridades a atender, los objetivos y contenidos específicos a abordar, las actividades metodológicas colectivas a desarrollar, los contenidos y actividades a incluir en los planes individuales de superación y desarrollo, y la concepción que se empleará para la evaluación del aprendizaje.

Acciones a desarrollar:

1.1 Establecimiento de los principales problemas y prioridades que deben atenderse.
1.2 Precisión de los objetivos específicos que deben alcanzarse.
1.3 Definición de los contenidos específicos que serán abordados mediante el sistema de actividades metodológicas colectivas.
1.4 Definición de las actividades metodológicas colectivas a desarrollar.
1.5 Determinación de los contenidos y actividades a incluir en los planes de superación y desarrollo de los docentes.
1.6 Definición de la concepción para la evaluación de los aprendizajes adquiridos.

Sugerencias metodológicas:

- Determinar las exigencias devenidas del modelo de la Educación Superior y del modelo del profesional de la Licenciatura en Educación. Matemática al TMI.
- Definir las implicaciones a la actuación de los docentes del colectivo de disciplina Análisis Matemático que dimanan de las exigencias antes mencionadas.
- Determinar los nodos cognitivos y nexos interdisciplinarios entre los contenidos básicos de las asignaturas que integran la disciplina Análisis Matemático.
- Definir las vías y métodos comunes entre las asignaturas que integran la disciplina ante mencionada.

- Establecer las interconexiones entre los conceptos, proposiciones y procedimientos.
- Suministrar marcos de pensamientos interdisciplinarios, que permitan a los estudiantes situar los problemas y extender los vínculos que unen fenómenos menos aparentes inconexos.
- Definir el vocabulario operacional como nodo de cohesión interdisciplinar en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Matemática y la Física.
- Establecer las interacciones didácticas entre las disciplinas Análisis Matemático y Física que propician una organización interdisciplinaria eficiente para favorecer el tratamiento a los objetivos generales y contenidos instructivos y educativos de las asignaturas que la integran y sus interconexiones con las estrategias curriculares.
- Determinar las actividades formativas que contribuyan a que los estudiantes desarrollen habilidades en la resolución de tareas docentes en las que intervengan modelos sustentados en el Análisis Matemático, de carácter intramatemático e interdisciplinarios de forma manual y usando la computadora.
- Definir los nodos cognitivos, teniendo en cuenta los contenidos sobre: a) la cinemática, b) las leyes dinámicas, c) las leyes de conservación, y d) las oscilaciones mecánicas.
- Formular y resolver ejercicios y problemas relacionados con los contenidos correspondientes a la cinemática, la dinámica y las oscilaciones mecánicas, a partir de considerar los que favorecen el abordaje de las estrategias curriculares.
- Evaluar la pertinencia del sistema de actividades metodológicas diseñado en un taller de socialización con la participación de los docentes beneficiarios del mismo.

Procedimiento 2.

Implementación del sistema de actividades metodológicas dirigidas a la preparación de los docentes para el TMI en el colectivo de disciplina de Análisis Matemático.

Objetivo: Poner en práctica el sistema de actividades metodológicas; asegurando la valoración sistemática de su desarrollo y la realización de los ajustes que se requieran en función de garantizar el cumplimiento del objetivo general.

Acciones a desarrollar:

2.1 Ejecución de las actividades metodológicas colectivas.
2.2 Valoración sistemática del cumplimiento del sistema de actividades metodológicas.
2.3 Realización de adecuaciones al sistema de actividades metodológicas diseñado.

Sugerencias metodológicas:

- Emplear métodos que propicien el trabajo interdisciplinario a partir del abordaje de los conocimientos teóricos y el desarrollo de habilidades; que promuevan el trabajo en equipo y favorezcan el ejercicio reflexivo y crítico, la demostración y el intercambio de experiencias y contribuyan a perfeccionar los modos de actuación de los docentes en el proceso de enseñanza aprendizaje del Análisis Matemático.
- Diseñar las actividades metodológicas, a partir de considerar los siguientes pasos: 1) Determinación de las prioridades para impartir el nuevo contenido; 2) Presentación de los contenidos básicos a impartir por cada disciplina y asignatura; 3) Determinación de puntos de encuentros entre las exigencias devenidas de las orientaciones metodológicas de cada disciplina y asignatura y los requerimientos establecidos en el modelo del profesional de la carrera de Matemática; 4) Definición de nodos cognitivos, al tener en cuenta la relación (conceptos, proposiciones y procedimientos); 5) Definición de los ejercicios y tareas integradoras; 6) Definición de métodos y procedimientos comunes favorecedores del trabajo interdisciplinario; 7)

Definición de la evaluación o control del aprendizaje en todos los momentos del proceso; 8) Definición de la unidad conceptual-metodológica de carácter interdisciplinario entre las asignaturas y disciplinas.

- Demostrar los principales teoremas del cálculo diferencial de funciones definidas de R en R y proposiciones con cierto nivel de complejidad.
- Aplicar el concepto de derivada y diferencial de una función a solución de ejercicios y problemas de la vida práctica, el cálculo aproximado, la construcción de gráficos y el cálculo de límite a partir de considerar la instrumentación del programa heurístico general de la enseñanza de la Matemática.
- Establecer las interrelaciones entre la Matemática y Física en el cálculo diferencial de funciones definidas de R en R al abordar los siguientes temas: el problema directo e inverso de la Cinemática, las leyes de conservación, las ecuaciones de Maxwell, los principios de la termodinámica y en la solución de problemas aplicando el método dinámico y conservativo.

Procedimiento 3.

Evaluación del impacto del sistema de actividades metodológicas en el desempeño de los docentes en el TMI y los resultados que se alcanzan en el aprendizaje de los estudiantes de la Licenciatura en Educación, especialidad Matemática.

Objetivo: Producir información relevante sobre el efecto de la aplicación del sistema de actividades metodológicas diseñado, para ser utilizada como insumo en su mejoramiento.

Acciones a desarrollar:

3.1 Preparación del proceso de evaluación del impacto del sistema de actividades.
3.2 Aplicación de los métodos, técnicas, fuentes e instrumentos para la recogida de datos sobre el impacto del sistema de actividades metodológicas desarrollado.
3.3 Obtención de la información relativa a los indicadores definidos.
3.4 Elaboración de las conclusiones de los avances que se aprecian y las limitaciones que aún persisten; la precisión de nuevas necesidades educativas; así como propuestas para el rediseño del sistema de trabajo metodológico.

Sugerencias metodológicas:

- Considerar como dimensiones más generales para la evaluación: el desempeño de los docentes en el trabajo interdisciplinario.
- Utilizar entre las fuentes de información para su realización las memorias contentivas de la valoración sistemática del cumplimiento del sistema de actividades metodológicas.

Valoración de la factibilidad de la metodología, a partir del método estudio de caso

La valoración de la factibilidad de la metodología se concibió a partir de un estudio de caso, realizado en la Universidad Las Tunas, en el departamento de Matemática-Física desde el año 2016 hasta el 2018. La construcción del estudio se realizó según propuesta de Salazar (2008). Se desarrolló con cuatro docentes del colectivo de Análisis Matemático y 2 directivos (jefe de departamento y de carrera).

Se ejecutaron las siguientes actividades metodológicas: 1) reunión metodológica para analizar las causas derivadas del diagnóstico de la preparación de los docentes, así como de los estudiantes de la carrera, adoptar acuerdos que permitan proyectar el trabajo metodológico, 2) conferencia sobre los fundamentos teóricos generales de la interdisciplinariedad en el ámbito pedagógico y sus implicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático, 3) taller metodológico referido a las exigencias devenidas de la concepción curricular de la

Educación Superior que requieren de un TMI y las implicaciones a la actuación de los docentes en los niveles organizativos funcionales del trabajo metodológico, 4) clase metodológica instructiva sobre el cálculo diferencial de Funciones reales de una variable real en el proceso de enseñanza aprendizaje desde una perspectiva interdisciplinaria en la disciplina Análisis Matemático y Física, 5) seminario sobre el tratamiento a las estrategias curriculares como "marco referencial común" en el cálculo diferencial de Funciones reales de una variable real y 6) reunión metodológica para evaluar el estado resultante del TMI como cierre.

En consonancia con lo anterior, se puede colegir que la implementación de la metodología hizo viable la preparación de los docentes del colectivo de disciplina de Análisis Matemático en el contexto en que se llevó a cabo. Su realización constituyó una experiencia positiva. La puesta en práctica y contextualización de los procedimientos permitieron el enriquecimiento de la preparación de estos docentes para desarrollar el trabajo interdisciplinario con efectividad. Posibilitó validar y enriquecer la metodología. El TMI propició la introducción y generalización de la tesis de Maestría "Procedimiento didáctico para favorecer el aprendizaje de las funciones reales de una variable real en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina Análisis Matemático".

La evaluación parcial de la aplicación del sistema de actividades del TMI en la disciplina de Análisis Matemático permitió comprobar que la preparación de los docentes es favorable, lo que influye positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, expresado en la adquisición de los saberes esenciales que contribuyen a la formación de un pensamiento interdisciplinario. Además, contribuyó a elevar la calidad de la clase, fortaleció el trabajo sistemático con las estrategias curriculares y garantizó mayor calidad e impacto en la formación inicial de la carrera de Matemática. El sistema de TMI realizado permitió cumplir parcialmente los objetivos previstos en el plan de estudio "E", aunque se debe continuar profundizando en este sentido, para el logro de una concepción interdisciplinaria en la preparación de las asignaturas que integran esta disciplina.

La puesta en práctica de los procedimientos contribuyó a la Orientación Profesional Pedagógica a partir de los modelos y estrategia empleado por los docentes en el trabajo interdisciplinario como filosofía de trabajo, de manera particular del modo de actuación interdisciplinario en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Esto posibilita que los futuros egresados adquieran los saberes esenciales para dirigir este proceso en la institución educativa desde una perspectiva interdisciplinaria.

Por otra parte, favoreció la Formación Laboral Investigativa como la disciplina principal integradora, al ofrecer tratamiento desde el Análisis Matemático a los núcleos de contenidos de Práctica Laboral, Didáctica de la Matemática y Metodología de la Investigación Educativa, en las que se integraron a ella asignaturas del Currículo Propio y del Currículo Optativo/Electivo.

Conclusiones

En la sociedad cubana acontece la actualización del Modelo económico, que ha permitido el perfeccionamiento del Sistema Nacional de Educación. Este proceso ha generado nuevas exigencias a la actividad de los docentes universitarios y, en especial los de la disciplina Análisis Matemático. La Educación Superior proyecta transformaciones y declara como prioridad la preparación de estos docentes para un desempeño que permita cumplir con los requerimientos devenidos del plan de estudio "E". Esto implica actualizar y profundizar en el trabajo interdisciplinario en cuanto a los fundamentos y directrices organizativo-metodológicas que sustentan la preparación de los docentes.

Como resultado se logró la preparación de los docentes, mediante el trabajo cooperado y coordinado, el intercambio y la comunicación durante la actividad pedagógica profesional. Se alcanzó una organización más funcional e interdisciplinar de la práctica pedagógica, lo que favorece el alcance de las aspiraciones contenidas en los documentos rectores de la Educación Superior. Se privilegió el tratamiento a los contenidos formativos que

subyacen de las exigencias devenidas de las estrategias curriculares y los nodos cognitivos definidos durante la realización de las actividades metodológicas que en gran medida potencian la labor formativa e influyó positivamente en la formación inicial de los estudiantes de la carrera.

Referencias bibliográficas

Chacón, D.R. (2013). *Los procesos interdisciplinarios en las ciencias naturales de secundaria básica: una contribución a la formación del alumno* (Tesis doctoral). UCP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI*. Madrid: Santillana. Ediciones UNESCO.

Fernández, B. E. (2013). *Didáctica de la educación media. Una aproximación*. La Habana: Pueblo y Educación.

Fiallo, J. (2001). *La interdisciplinariedad en la escuela: un reto para la calidad de la educación*. La Habana: Pueblo y Educación.

Herrera, R. (2018). *La preparación de los directores escolares de secundaria básica para la dirección del trabajo metodológico interdisciplinario* (Tesis de doctorado). Universidad Las Tunas, Las Tunas.

Mañalich, R. (2001). *Interdisciplinariedad y didáctica: vías para la transformación del desempeño profesional de los docentes de humanidades*. Taller interdisciplinar con jefes de departamento de humanidades de los centros de referencia de La Habana. MINED. La Habana.

Mastrapa, R. (2016). *La orientación educativa en el trabajo metodológico para la estimulación del pensamiento reflexivo en escolares primarios* (Tesis de doctorado). Universidad de Holguín, Holguín.

Ministerio de educación superior de Cuba. (2016). *Modelo del Profesional. Plan de Estudio "E". Carrera: Licenciatura en Educación. Matemática*. La Habana. MES

_____. (2018). *Reglamento de Trabajo Docente y Metodológico de la Educación Superior.* Resolución Ministerial 02/2018. La Habana. MES.

Pereira, Y. (2014). *La preparación interdisciplinar de los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación, especialidad Biología-Química* (Tesis doctoral). UCP "Pepito Tey", Las Tunas.

Perera, F. (2000). *La formación interdisciplinar de los profesores de ciencias: un ejemplo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Física* (Tesis doctoral). ISPEJV, La Habana.

Salazar, M. (2008). *La investigación cualitativa en la pedagogía. Retos y perspectivas*. Tercera Jornada Científico-Metodológica del Centro de Estudios en Ciencias de la Educación. ISP "José de la Luz y Caballero", Holguín.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES PARA CONSTRUIR DEFINICIONES DE CONCEPTOS MATEMATICOS EN EL AULA

PROPOSAL OF ACTIVITIES TO BUILD DEFINITIONS OF MATHEMATICAL CONCEPTS IN THE CLASSROOM

Mabel Susana Chrestia
Universidad Nacional de Río Negro (Argentina).
mchrestia@unrn.edu.ar

Resumen
Este trabajo resume la experiencia de haber dictado el taller denominado "Propuesta de actividades para construir definiciones de conceptos matemáticos en el aula" en el contexto de la XXXIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 33), celebrada en la ciudad de La Habana (Cuba). Bajo un enfoque tradicional de enseñanza, las definiciones son dadas por el docente, como un producto cerrado y acabado, las cuales el estudiante normalmente acepta sin cuestionarlas. Este taller tiene como objetivo proponer ideas de actividades tendientes a transformar este aspecto, buscando que la definición sea el resultado de una construcción colectiva (docente y estudiantes). En RELME 31 brindé un taller de esta temática, que se centró en la propuesta de una estrategia para definir. Ahora, en el actual taller, el objetivo fue focalizarnos en actividades variadas, para realizar en el aula, con el propósito de que los estudiantes logren construir sus propias definiciones de conceptos matemáticos.

Palabras clave: definición de conceptos matemáticos, construcción del conocimiento, actividades en el aula

Abstract
This paper summarizes the experience of a workshop called:" *Proposal of activities to construct definitions of mathematical concepts in the classroom"* in the context of the Thirty-third Mathematics Education Latin-American Meeting (33rd RELME), held in Havana City, Cuba. Under a traditional teaching approach, definitions are given by the teacher, as a closed and ended product, which the students generally accept without questioning them. This workshop is aimed at suggesting ideas of activities addressed to change this aspect, seeking a definition resulting from a collective construction (teacher and students). In the 31st RELME, I provided a workshop on this topic, which focused on the proposal of a strategy for defining. Now, in the present workshop, the aim is to approach varied activities to be carried out in the classroom, in order that the students are able to construct their own definitions of mathematical concepts.

Key words: definition of mathematical concepts, construction of knowledge, classroom activities

Introducción

Bajo un enfoque tradicional de enseñanza, por lo general las definiciones ocupan el inicio del desarrollo de un tópico. Además, son dadas por el docente, como un producto cerrado y acabado. El estudiante normalmente las acepta sin cuestionarlas.

Un cambio de enfoque implica, por un lado, que las definiciones sean una construcción colectiva (docente y alumnos), y además que la definición aparezca en otro momento del proceso de enseñanza-aprendizaje, no al inicio, sino durante el desarrollo del tema, o bien al final.

En este proceso de definir, los conocimientos que ya posee el alumno se recuperan y se relacionan con la nueva información, para construir una definición. De esta manera, el nuevo concepto es asimilado en vez de solo memorizado, y es menos probable que sea olvidado. Nos acercamos más a un aprendizaje significativo que a uno mecánico y memorístico. En este Taller se propusieron variadas actividades para realizar en el salón de clase, tendientes a lograr que los estudiantes puedan construir definiciones de conceptos matemáticos.

Marco teórico

Varios autores trataron la temática de las definiciones de un concepto. Ferrater Mora (1994) utiliza la idea de *delimitar* para explicar qué es definir. "Desde un punto de vista muy general, la definición equivale a la delimitación, esto es, a la indicación de los fines o límites (conceptuales) de un ente con respecto a los demás." Es necesario entonces individualizar el concepto, marcar los límites, para poder diferenciarlo de los demás conceptos.

Tall & Vinner (1981) y Vinner (2002) distinguen entre la *definición de un concepto* y la *imagen del concepto*. Los autores señalan que, aunque la definición de un concepto sea conocida, al escuchar dicho concepto los estudiantes lo asocian con la imagen que tienen de él, y no con su definición. Esta imagen conceptual es "algo" no verbal asociado en la mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual de este, en caso de que la tenga; también puede ser una colección de impresiones o experiencias asociadas al concepto. Entonces, adquirir un concepto significa formar una imagen del mismo. Es por ello por lo que saber de memoria la definición de un concepto, no garantiza el entenderlo (Vinner, 2002).

Objetivos del taller

Los objetivos del taller fueron los siguientes: a) Introducir a los asistentes en la temática de las definiciones, reflexionando acerca de su uso en el proceso de enseñanza-aprendizaje; b) Conocer propuestas de actividades para desarrollar en el aula, a fin de que los alumnos puedan construir sus propias definiciones de conceptos matemáticos. El taller estaba dirigido a docentes de nivel medio y superior.

Metodología

El taller se desarrolló en dos sesiones de una hora y media cada una. En la primera sesión se realizó una introducción al tema, para luego comenzar a realizar las primeras actividades.

En la segunda sesión se continuó trabajando con las actividades, algunas incluidas en (Chrestia, 2015). Se pretendió mostrar cómo el proceso de definir puede lograr en los alumnos un aprendizaje más cercano al significativo que a uno mecánico y memorístico (Moreira, 1988). Por último, se realizó el cierre, realizando un balance de lo trabajado en las dos sesiones.

Las actividades propuestas fueron grupales y dinámicas. Es importante tener en cuenta que, en un taller, se prioriza la "práctica" sobre la "teoría", aunque no se descarta ninguno de estos dos aspectos, ya que se considera que son dos instancias necesarias en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Por otro lado, la idea fundamental es "aprender haciendo", es decir, los conocimientos adquiridos por cada asistente serán debidos a la propia producción personal y a la experiencia adquirida, ya sea en forma individual o grupal. (Kac, 2011)

Actividades propuestas

A continuación, se detallan las actividades propuestas, incluyendo en cada caso un relato de lo acontecido al momento de realizarse cada una.

Actividad 1: ¿Noción o definición?

Esta actividad fue introductoria, es decir, sirvió para comenzar a desarrollar la temática del taller. Se entregó una página a cada asistente conteniendo las respuestas dadas por estudiantes universitarios en una instancia de examen final de la asignatura "Razonamiento y Resolución de Problemas" de la Universidad Nacional de Río Negro (Argentina), al solicitarles que escriban la definición de *ecuación*.

Las respuestas incluidas eran las siguientes:

1) Una ecuación es la forma de expresar números e incógnitas (expresadas en letras) para resolver un problema. Se resuelve mediante una igualdad.
2) Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones donde puede haber una o más variables, para que se complete y verifique tal igualdad se tiene que hallar el valor de dichas incógnitas.
3) Una ecuación es una expresión en la cual se debe despejar la incógnita que se presente en ella.
4) Una ecuación es una fórmula con el fin de encontrar una incógnita.
5) Una ecuación es una operación algebraica con una o más incógnitas.
6) Las ecuaciones son cuentas que tienen una o varias incógnitas y necesitan una igualación para resolverse.

El propósito de esta actividad fue debatir acerca de la validez de las respuestas, para luego distinguir entre los vocablos *noción* y *definición*. Los asistentes usaron las palabras: *imprecisión*, *confusión*, *errónea*, *incompleta*, para evaluar algunas respuestas de los alumnos. Esto llevó a formalizar la idea de *noción* de un concepto, para diferenciar de la *definición* de este.

Para cerrar la actividad, se mostró un cuadro en el cual se comparan ambos términos, numerando sus diferencias y similitudes (Tabla 1), el cual fue tomado de (Chrestia, 2015).

Tabla 1. Comparación entre los términos NOCION y DEFINICION

NOCION	DEFINICION
Vaguedad, ambigüedad.	Exactitud, precisión.
Idea general, elemental, básica, incompleta.	Idea acabada, completa, en profundidad.
Lenguaje riguroso o no riguroso.	Lenguaje riguroso o no riguroso.
Características: una o varias.	Características: las necesarias y suficientes.
Subjetividad.	Objetividad.
No permite individualizar un concepto.	Permite individualizar un concepto.

Se puede enunciar utilizando lenguaje oral, escrito, gráfico.	Se puede enunciar utilizando lenguaje oral, escrito, gráfico.

Elaboración propia.

Actividad 2: Esquema para armar definiciones

La actividad se basó en la implementación de una propuesta para construir definiciones de conceptos matemáticos (Chrestia, 2018). En dicha propuesta, se ofrece un esquema básico para que los estudiantes puedan generar sus primeras definiciones. Se busca que construyan oraciones válidas en un sentido sintáctico y semántico, y correctas en un sentido matemático.
La actividad se desarrolló entre todos los asistentes junto con el coordinador del taller, buscando incluir el aporte de todos. En la figura 1 se incluyen algunas dispositivas que muestran el esquema aplicado para construir definiciones, y algunos ejemplos de definiciones construidas en el taller.

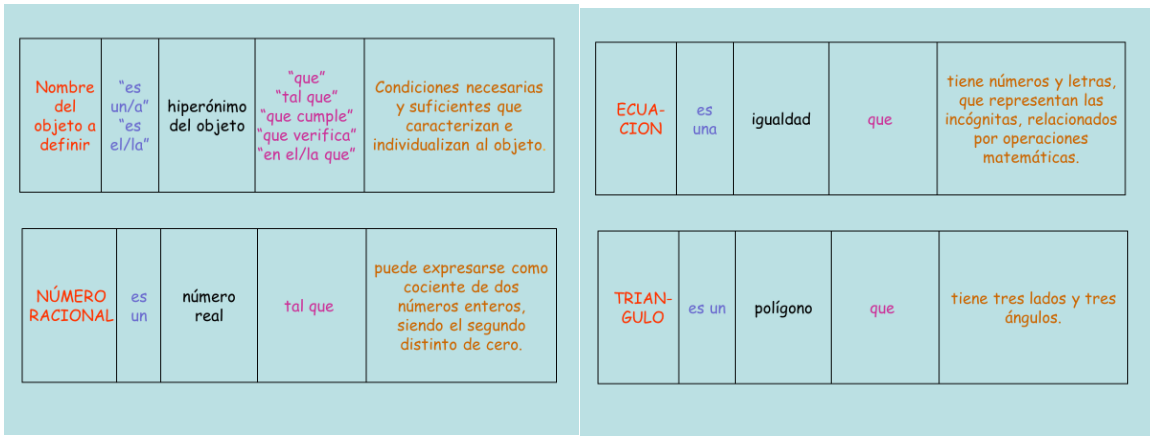


Figura 1. Diapositivas del taller de la actividad 2.

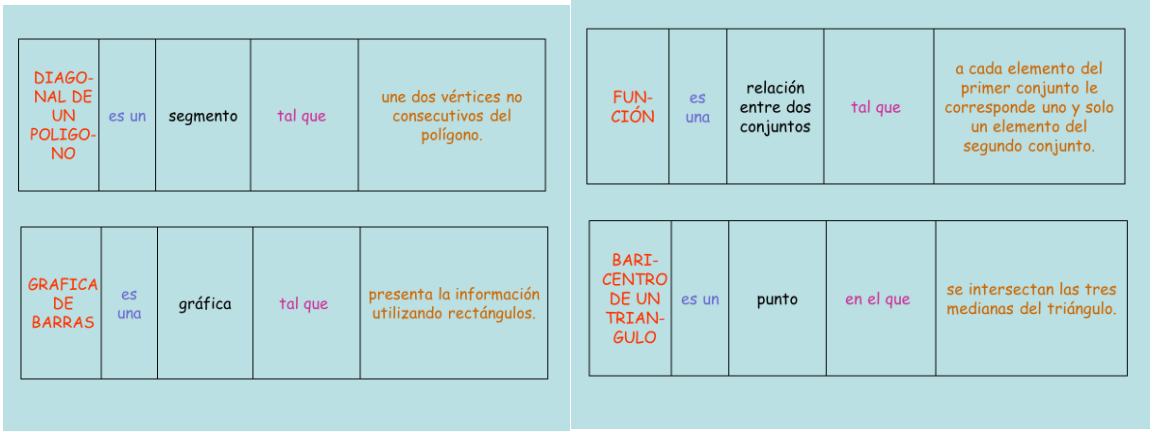


Figura 1 (continuación). Diapositivas del taller de la actividad 2.

Actividad 3: ¿Es válida esta definición?

Esta actividad se realizó en grupos de a 2 o 3 personas. Se les entregó una página en la cual se escribieron varias definiciones de dos conceptos matemáticos extraídas de diferentes libros de textos escolares, correspondientes a los niveles educativos medio y superior. Los conceptos trabajados fueron *ecuación* y *círculo*.

El objetivo de esta actividad fue, en primer lugar, conocer diferentes formas de definir a un mismo concepto, y luego debatir/cuestionar la validez de estas, y si son apropiadas o no para ciertos niveles escolares, teniendo en cuenta los conocimientos que poseen sus estudiantes.
El debate se concentró en los siguientes aspectos: palabras utilizadas en las definiciones, rigurosidad matemática, validez de la definición. También los asistentes se cuestionaron el hecho de que al brindar el docente una definición, o una forma de definir un concepto, se "pierden" otras definiciones o maneras de definirlo, limitando la posibilidad de creatividad por parte de los alumnos, y tendiendo a que memoricen la definición dada, la cual será considerada como la única válida para definir ese concepto.

En la figura 2 se muestran las dispositivas utilizadas en el taller en el desarrollo de esta actividad.

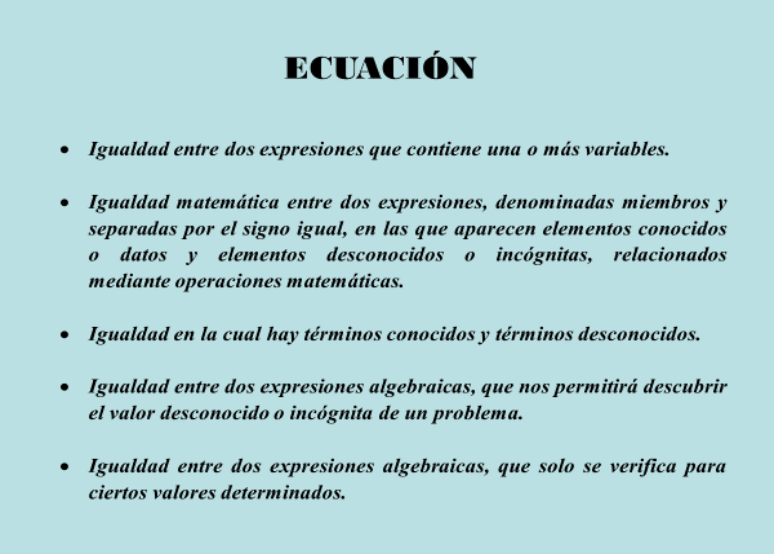


Figura 2. Diapositiva del taller de la actividad 3.

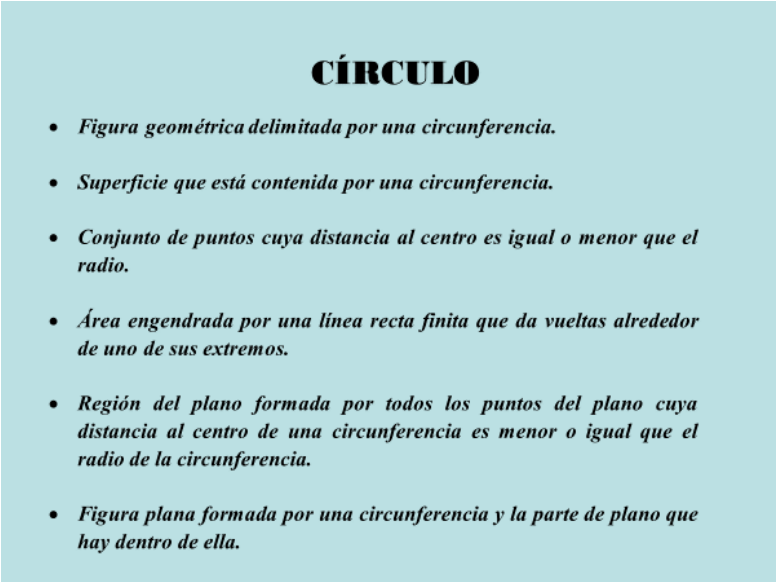


Figura 2 (continuación). Diapositiva del taller de la actividad 3.

Actividad 4: ¿De qué estoy hablando?

Esta actividad se basa en mostrar una definición para que los alumnos descubran de qué concepto se trata. En el taller se desarrolló de manera global, entre todos los asistentes y el coordinador juntos.

A medida que el coordinador mostraba definiciones, los asistentes debían levantar la mano y decir el nombre del término definido. Es una actividad ideal para evaluar, para hacer un repaso de temas vistos anteriormente, para romper la rutina de la clase, y para generar un buen clima en el aula, ya que la actividad se convierte en un juego.

En la figura 3 se muestra un ejemplo de las diapositivas utilizadas. La figura 3 (a) muestra la primera diapositiva, en la cual aparecen las definiciones sin los conceptos. La figura 3 (b) muestra la misma diapositiva una vez que fueron "descubiertos" los términos buscados.

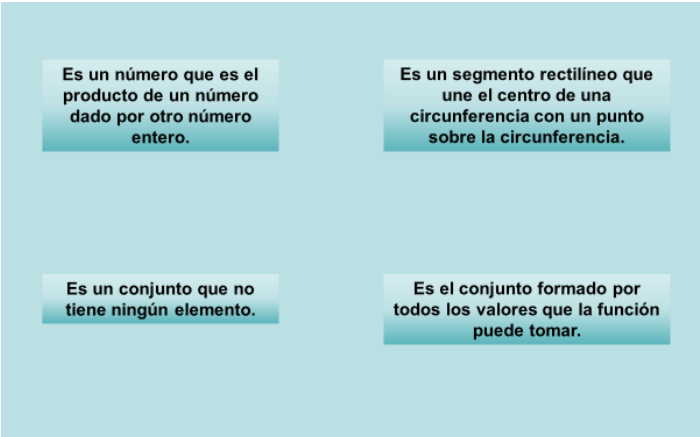


Figura 3 (a). Diapositiva del taller de la actividad 4.

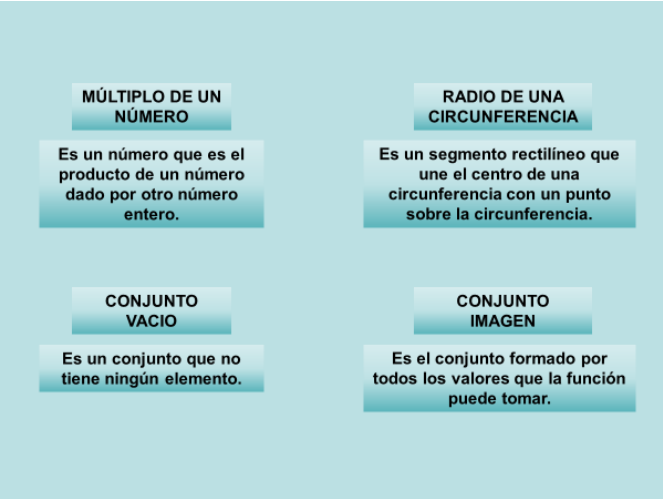


Figura 3 (b). Diapositiva del taller de la actividad 4.

Actividad 5: Uso de los mapas conceptuales (parte 1)

Los mapas conceptuales constituyen un instrumento muy eficaz que puede utilizarse en diferentes momentos del proceso de enseñanza–aprendizaje. Es posible implementar actividades que van desde la etapa de diagnóstico, para indagar acerca de los conocimientos previos de los alumnos, hasta la evaluación (Chrestia, M., Dondo- Bühler, M., Quijano, M., 2012). Ayudan a lograr un aprendizaje más cercano al significativo que a uno mecánico y memorístico. Se pueden utilizar en cualquier área del conocimiento y nivel educativo.

"Los mapas conceptuales tienen por objeto representar relaciones significativas entre conceptos en forma de proposiciones. Una *proposición* consta de dos o más términos conceptuales unidos por palabras para formar una unidad semántica." (Novak y Gowin, 1988).
Numerosas publicaciones relatan experiencias del uso de los mapas conceptuales en diversas asignaturas. Específicamente en matemática, muchos trabajos (Cuevas, A., 2003; Antomil Ibias, J., Arenas Parra, M., Bilbao Terol, A., Pérez Gladish, B. y Rodríguez Uría., M.V., 2006; Pérez Flores, R., 2006) muestran las ventajas de su utilización, tanto para el alumno como para el docente.

La actividad propuesta en el taller tuvo como finalidad presentar un recurso didáctico que puede ser aprovechado también como ayuda para la construcción de definiciones.
A modo de ejemplo se mostró un mapa conceptual cuyo concepto principal era "Figuras geométricas", y se lo utilizó para poder realizar un aporte en el armado de la definición del concepto de *triángulo*.

En primer lugar, se recorrió todo el mapa conceptual, distinguiendo sus niveles y sus "ramas". Los asistentes armaron oraciones a partir de este mapa. Algunas de ellas se transcriben a continuación: "las figuras geométricas se clasifican según su dimensión, pudiendo ser de dimensión cero, uno, dos, tres, etc."; "las figuras planas son figuras geométricas de dimensión dos, que pueden ser cónicas o poligonales"; "el cilindro y el cono son ejemplos de cuerpos redondos"; "las figuras geométricas de dimensión uno son llamadas lineales, y son, por ejemplo, la recta y el segmento".

Luego, se focalizaron en la ubicación del concepto *triángulo* en el mapa. Una vez ubicado, los asistentes debieron generar oraciones utilizando varios conceptos del mapa, incluido triángulo. Por ejemplo: "el triángulo es una figura geométrica plana"; "los triángulos son polígonos, al igual que los cuadriláteros, pentágonos y hexágonos"; "un triángulo es una figura geométrica de dimensión dos".

Se pudo concluir que el mapa conceptual, además de mostrar la ubicación de los triángulos en la clasificación de las figuras geométricas, permitió ayudar a construir la definición del *triángulo*. En la figura 4 se aprecia el mapa conceptual utilizado en esta actividad.

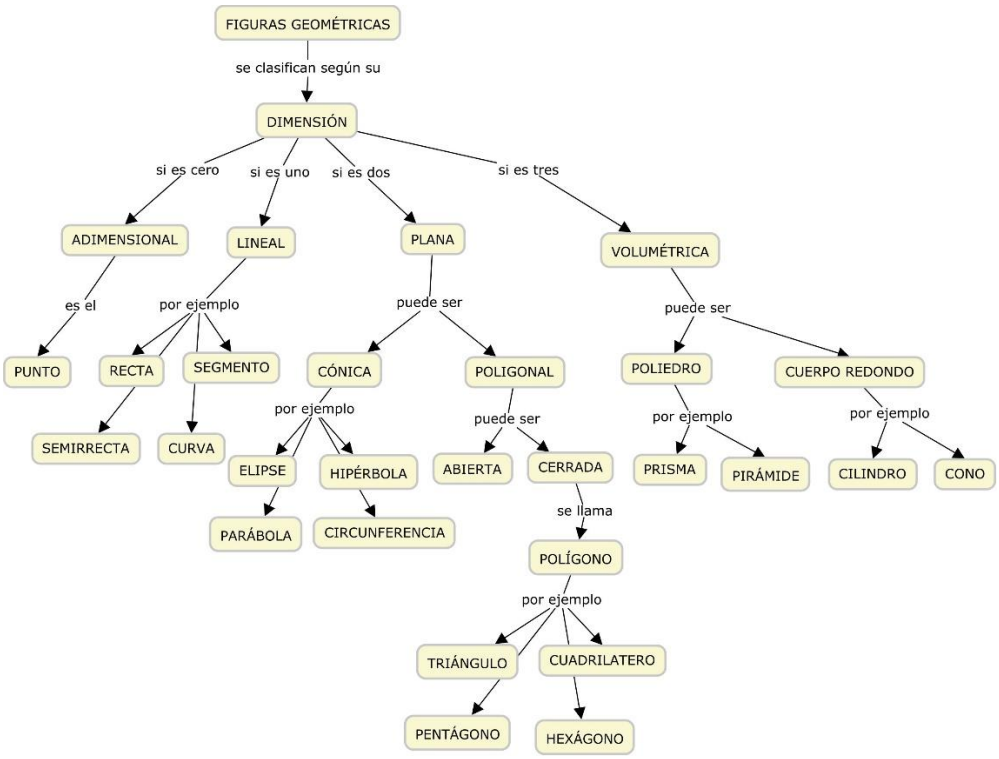


Figura 4. Mapa conceptual utilizado en la actividad 5 (elaboración propia).

Actividad 6: Uso de los mapas conceptuales (parte 2)

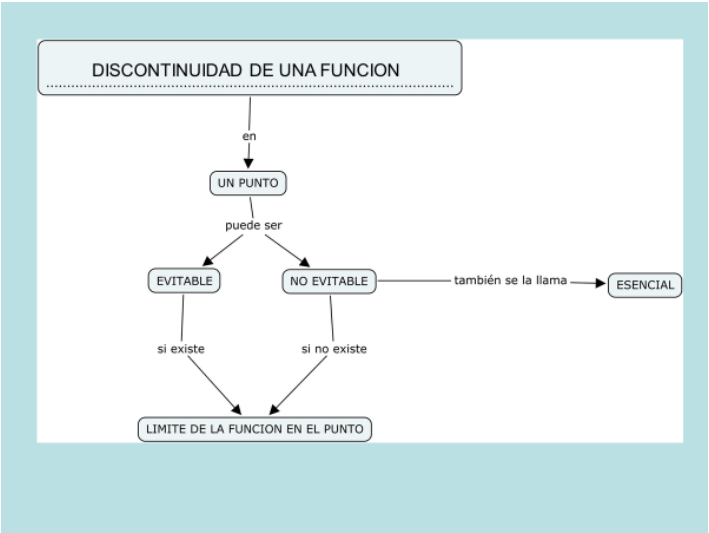


Figura 5. Diapositiva del taller de la actividad 6.

En la siguiente actividad también se utilizaron mapas conceptuales como medio para trabajar con definiciones de conceptos matemáticos.

Se mostraron diferentes mapas, cuyos conceptos principales estaban ocultos. Los asistentes debían encontrar cuál era ese concepto en cada mapa. Esta actividad es una variación de la actividad 4 relatada previamente, ya que también consiste en "adivinar" el concepto que se está describiendo. Pero en vez de proporcionar la definición en forma de un texto, se la muestra de manera gráfica, mediante un mapa conceptual.

En la figura 5 se muestran algunos mapas utilizados. En el desarrollo de la actividad el concepto principal estaba oculto y se hizo visible una vez que fue "descubierto" por los asistentes. Los conceptos por descubrir fueron *discontinuidad de una función*, *punto crítico* y *lugar geométrico*, entre otros.

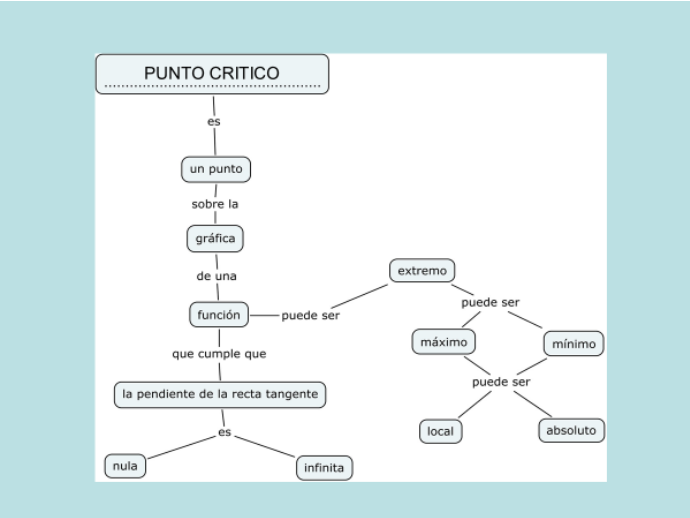


Figura 5 (continuación). Diapositiva del taller de la actividad 6.

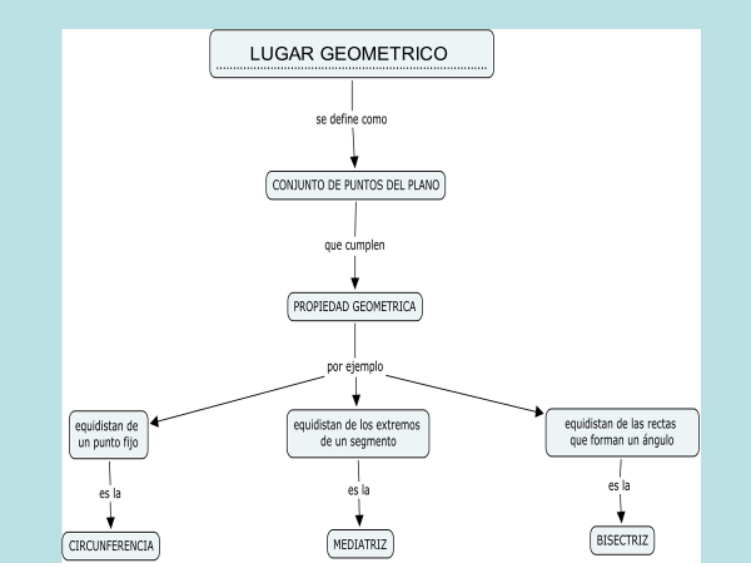


Figura 5 (continuación). Diapositiva del taller de la actividad 6.

Actividad 7: ¿es o no es?

Una manera de acercarnos a la idea de qué es algo, es pensar qué no es. En este sentido, el autor Ferrater Mora (1994, p.411) propone: "Por eso se ha concebido con frecuencia la definición como una negación; delimitamos un ente con respecto a otros porque negamos los otros hasta quedarnos mentalmente con el ente definido. Se supone que al llevar a cabo de un modo consecuente esta delimitación, alcanzamos la naturaleza esencial de la cosa definida." Pensemos en el concepto de número irracional. Generalmente se define primero número racional, como aquel número real que puede expresarse como cociente de dos números enteros, siendo el segundo distinto de cero. Entonces, un número irracional se define como aquel número real que no es racional, es decir, aquel que no puede expresarse de esa forma.

Siguiendo con esta idea, se propuso una actividad consistente en mostrar varios gráficos en los que se incluía una circunferencia y un segmento. Se explicó que la intención era deducir el concepto de *cuerda*. Al lado de cada gráfico se agrega la palabra "si" o "no" según ese gráfico muestra o no una cuerda. Los asistentes al taller ya conocían el concepto de cuerda, por lo cual se les pidió que piensen en la utilidad de esta actividad en el aula, con alumnos que no saben qué es una cuerda en el sentido geométrico. Por lo cual debían indicar a los alumnos que de todos los segmentos mostrados algunos son cuerdas y otros no.

El objetivo de esta actividad es que los mismos alumnos encuentren cuál es la propiedad que esos segmentos cumplen, para luego construir la definición de cuerda.

En la figura 6 se muestra la diapositiva utilizada en esta actividad. Se repitió la actividad para definir el término *trapecio*.

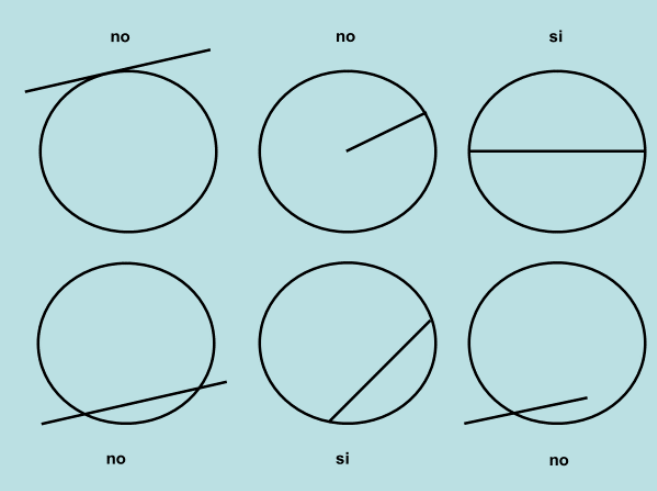


Figura 6. Diapositiva del taller de la actividad 7.

Conclusiones

El taller realizado permitió a los asistentes introducirse en la temática de la construcción de definiciones de conceptos matemáticos, y proporcionó ideas de actividades para que los docentes puedan desarrollar esta temática en el aula.

La finalidad del taller fue, además de mostrar diferentes propuestas de actividades, que los docentes reflexionen acerca de los beneficios de construir definiciones de conceptos matemáticos, en vez de enseñar las definiciones como un producto acabado, sin posibilidad de modificarse.

Los docentes que estuvieron presentes en el taller se mostraron satisfechos y motivados para seguir indagando acerca de la temática. Al finalizar el taller cada uno dio su opinión al respecto, dando una primera idea de cómo insertar la temática en sus clases.

Referencias bibliográficas

Antomil Ibias, J., Arenas Parra, M., Bilbao Terol, A., Pérez Gladish, B. y Rodríguez Uría., M.V. (2006). *La utilización de mapas conceptuales en las asignaturas de matemáticas para la economía en el marco del espacio europeo de educación superior*. Recuperado el 10 de marzo de 2012 de http://www.uv.es/asepuma/XIV/comunica/110NUEVO.pdf

Chrestia, M., Dondo-Bühler, M., Quijano, M.T. (2012). La incorporación de los mapas conceptuales como medio para aprender y evaluar. Libro de Actas de la IV Reunión Pampeana de Educación Matemática (IV REPEM). ISSN 978-950-863-176-3.

Chrestia, M. (2015). De la noción a la definición en matemática: una propuesta para construir definiciones. *Novedades Educativas*, *Agosto* (296): 70-76. ISSN: 0328-3534.

Chrestia, M. (2018). Una herramienta didáctica para ayudar a construir definiciones de conceptos matemáticos. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), volumen 31(2): 1308-1314. México. ISSN: 2448-6469.

Cuevas, A. (2003). Propuesta de aplicación de los mapas conceptuales en un modelo pedagógico semipresencial. *Revista Iberoamericana de Educación.* Recuperado el 15 de marzo de 2012 de http://www.rieoei.org/deloslectores/493Cuevas.PDF

Ferrater Mora, J. (1994). Diccionario de filosofía. Vol.1: A-D. Editorial Ariel. Barcelona.

Kac, M (2011). El taller como estrategia metodológica del trabajo grupal. Recuperado de https://es.scribd.com/doc/79871324/El-taller-como-estrategia-metodologica.

Moreira, M. (1988). Mapas conceptuales y aprendizaje significativo. *Revista O ENSINO. Pontevedra/Galicia/España y Braga/Portugal,* (23 a 28), 87-95.

Novak, J., Gowin, D. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Barcelona: Ediciones Roca.

Pérez Flores, R. (2006) *Mapas conceptuales y aprendizaje de matemáticas*. Recuperado el 15 de marzo de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/533/525

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational studies in Mathematics, 12, 151-169.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). New York: Kluwer.

EL TRABAJO INDEPENDIENTE EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA CON UN ENFOQUE ÉTICO, AXIOLÓGICO Y HUMANISTA

INDEPENDENT WORK IN THE TEACHING AND LEARNING PROCESS OF MATHEMATICS WITH AN ETHICAL, AXIOLOGICAL AND HUMANIST APPROACH

Reina Altagracia Taveras
Universidad Autónoma de Santo Domingo (República dominicana).
reinaaltagracia@gmail.com

Resumen
Se presenta una propuesta didáctica con el objetivo de potenciar el trabajo independiente de los estudiantes de la Carrera de Licenciatura en Educación Mención Matemática, en el Centro Nagua de la Universidad Autónoma de Santo Domingo en República Dominicana. El marco teórico descansa en el enfoque ético, axiológico y humanista, desde el que se precisan las dimensiones que debe tener el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática: motivación-regulación moral, significatividad lógica-reflexiva y significación axiológica-valorativa. La metodología seguida se basó en tres etapas: 1) Desarrollo de proyectos de investigación, 2) Presentación de los resultados del proyecto en una Feria Científica y 3) Valoración de la calidad del trabajo independiente de los estudiantes, atendiendo a las dimensiones precisadas anteriormente. Se ejemplifica en el contenido de Geometría y los resultados de la etapa 3 muestran que se cumplió el objetivo de la investigación en las tres dimensiones definidas con transformaciones positivas en los estudiantes.

Palabras clave: matemática, trabajo independiente, ético, axiológico, humanista

Abstract
This paper presents a didactic proposal with the aim of fostering students' independent work in the Bachelor's Degree in Mathematics Education, in Nagua campus from the Autonomous University of Santo Domingo, in Dominican Republic. The theoretical framework is based on the ethic, axiological and humanist approach, from which the dimensions that mathematics teaching-learning process must have are specified: moral regulation-motivation, logical-reflexive significance and axiological-evaluative meaning. The methodology used was based on three stages: 1) development of research projects, 2) presentation of the project outcomes in a scientific fair, 3) Assessment of students' independent work quality, according to the previously specified dimensions. Examples are given in Geometry content, and the results of the third stage show the research objective was fulfilled in the three defined dimensions, leading to students' positive changes.

Key words: mathematics, independent work, ethic, axiological and humanist approach

Planteamiento del problema

Las políticas y transformaciones educativas en República Dominicana (RD), tienen su base en la "Ley Orgánica de Educación 66/97". Esta ley enfatiza en su artículo cuatro que la educación dominicana ha de basarse en valores cristianos, éticos, estéticos, comunitarios, patrióticos, participativos y democráticos (Ley Orgánica de Educación, 1997, p.4), por lo que el proceso formativo, y en específico, en el proceso enseñanza y aprendizaje de la ética, aprender a ser seres humanos y a vivir armónicamente en familia ; dentro de su Matemática ha de cumplir lo planteado por Chacón (2016) con respecto a que se debe considerar la dimensión contexto social; aprendiendo así, conocimientos, habilidades, afectos, sentimientos, cualidades y formas de comportamiento, entre otras cualidades.

En relación a lo anterior, Taveras (2018), muestra en su investigación doctoral, que la educación en valores morales en los centros educativos de RD carece de una concepción integradora, con limitaciones en la práctica educativa de los docentes en cuanto a formar valores morales, aspectos estos que también están presentes en las instituciones de Educación Superior; donde se forman los profesionales del país, en particular, en la formación de docentes en la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).

Esta situación se evidencia en la formación de docentes de Matemática de RD, específicamente en el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) de las materias de Matemática, lo cual se agudiza por las tendencias tecnocráticas en la que se absolutiza el desarrollo de competencias, y la competitividad, contradictoriamente, se descuidan aspectos cualitativos importantes del PEA como son: lo ético, la formación en valores, el humanismo, la educación medio-ambientalista, con tendencias a disminuir, cada vez más el trabajo independiente de estos futuros docentes (Taveras, 2018).

Esta problemática ha sido investigada en RD, a nivel de estudios doctorales, desde diferentes perspectivas, por ejemplo, Matos (2006) investigó sobre la formación del patriotismo en las escuelas, Matías (2010) sobre la capacitación en contexto para los maestros que imparten la asignatura Matemática en la Educación Básica y Pimentel (2011) sobre la formación y desarrollo de la conciencia moral , ética y ciudadana de los estudiantes de los centros del nivel medio, sin embargo, la relación entre lo ético, axiológico y humanista con el trabajo independiente, en el PEA de la Matemática sigue constituyendo una problemática.

Un estudio exploratorio realizado por Taveras (2018), desde el año 2013 hasta el 2015, en la Carrera de Licenciatura en Educación Mención Matemática, en la que se forman como futuros docentes en la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD), centro Nagua, para diagnosticar la problemática planteada anteriormente, permitió identificar que:

- Los programas de las asignaturas de Matemática se caracterizan por estilos de aprendizaje conductista-estructuralistas por lo que carecen de un enfoque ético, axiológico y humanista y no revelan todos los componentes didácticos del PEA de la Matemática.
- Existen limitaciones en la preparación teórico- metodológica de los docentes en la didáctica para dirigir el PEA de la Matemática, lo que propicia el aprendizaje memorístico y reproductivo de los conocimientos, en detrimento de la flexibilidad del pensamiento para buscar vías de solución en las tareas que deben realizar,
- Los estudiantes muestran insuficiente dominio de los contenidos matemáticos, lo que unido a la falta de motivación, significatividad y limitada independencia cognoscitiva les restringe el desarrollo del pensamiento lógico-reflexivo y la significación axiológica de los conocimientos matemáticos.
- Se limita el trabajo independiente, y su perspectiva ética, axiológico y humanista, el desarrollo de capacidades, habilidades, valores y la vinculación de la matemática con la vida.
- Se limita el uso de las tecnologías de la información y la comunicación en el PEA de la Matemática, así como las influencias que reciben los estudiantes en cuanto a los modos de actuación profesional para su labor como futuros docentes de Matemática.

El objetivo de la investigación está orientado a la implementación de una propuesta didáctica que potencie el trabajo independiente en el PEA de la Matemática, con un enfoque ético, axiológico y humanista.

Enfoque ético, axiológico y humanista de la educación y el trabajo independiente en el PEA de la Matemática

El enfoque ético, axiológico y humanista de la educación está orientado al análisis de la profesionalidad pedagógica al hilo de la ética profesional, exaltándolos valores y cualidades morales que caracterizan la esencia humana del docente y el dominio de la ciencia que enseña, de los métodos y sus habilidades profesionales, siendo su principal exponente Chacón (1999), Chacón (2016) y Chacón (2018).

Desde esta perspectiva Taveras (2018) explica el PEA de la Matemática, donde:

- El futuro docente se forma, desde lo instructivo y lo educativo, como un ser humano que tiene necesidades e intereses específicos, desde lo individual y lo social.
- La moral y los valores, se constituyen en reguladores del comportamiento humano, entes movilizadores y en los elementos dinamizadores del papel activo del futuro docente de su propio aprendizaje.

Desde esta perspectiva, el enfoque ético, axiológico y humanista se vincula con la comprensión vigotskiana de la educación en la interacción del sujeto con el contexto histórico-social, por lo que permite profundizar en las potencialidades humanas de la zona de desarrollo actual y zona de desarrollo próxima (ZDP), puesto que la moral y los valores forman parte, tanto del contexto social en el que vive y se educa el sujeto, como de su mundo interior, por lo que en la ZDP están presentes el modelo del deber ser y del ideal moral, que son representaciones morales y axiológicas vinculadas a las necesidades e intereses de los estudiantes con una función autorreguladora.

En coherencia con estos postulados, Chacón (2018) precisan que el PEA de la Matemática, con enfoque ético, axiológico y humanista, que potencie el trabajo independiente en los docentes en formación, es una actividad compleja e interactiva entre el estudiante, los componentes didácticos y la base orientadora que le aporta el docente para la solución de las tareas matemáticas, según los propósitos del aprendizaje propuestos; propiciando su participación activa, a través de la vinculación de los contenidos matemáticos en la práctica y para la vida cotidiana y en las interacciones que se manifiestan entre las siguientes dimensiones:

- Motivación-regulación moral.
- Significatividad lógica-reflexiva del contenido matemático.
- Significación axiológica-valorativa

Estas tres dimensiones, propuestas y argumentadas por Taveras (2018) constituyen el sustento teórico para la acción práctica del trabajo independiente en el PEA de la Matemática con un enfoque ético, axiológico y humanista, concibiéndolas desde la didáctica de la siguiente forma:

Motivación-regulación moral

Se expresa cuando se favorece la motivación extramatemática e intramatemática, en íntima conexión con los intereses, necesidades, motivos y valores de los estudiantes de manera que identifiquen contradicciones, carencias, insuficiencias, necesidades internas de la matemática, y de la práctica que los conlleven a plantearse metas personales y colectivas de aprendizaje, con responsabilidad y compromiso moral, a partir del conocimiento de sí mismo, y la seguridad necesaria para esforzarse y perseverar a pesar de los obstáculos que puedan surgir en las tareas de aprendizaje.

Esta dimensión incluye las influencias que en la clase ejerce el docente desde un enfoque ético, axiológico y humanista para crear motivaciones intrínsecas en los estudiantes hacia el aprendizaje de la Matemática y sus aplicaciones, para estimular el trabajo independiente y la formación en valores mediante la realización de tareas que respondan a sus necesidades e intereses cognoscitivos y exijan responsabilidad moral en su cumplimiento lo que, consecuentemente, se revela en el estudiante cuando demuestra interés por el aprendizaje de los contenidos de la asignatura y sus aplicaciones en la clase, al participar de forma activa en la búsqueda de los conocimientos, y en la resolución de tareas, aplicando alternativas, estrategias para su solución de manera independiente, con responsabilidad moral y sentido del deber.

Significatividad lógica-reflexiva

Desempeña un rol fundamental, dado que favorece el desarrollo de la actividad intelectual productiva y creadora de los estudiantes en el aprendizaje del contenido matemático de forma lógica y reflexiva.

Se expresa en la posibilidad del estudiante para establecer relaciones entre los nuevos conocimientos con los anteriores, con los de otras asignaturas del currículo, con sus experiencias prácticas y con su mundo afectivo motivacional, también en la reconstrucción de las formas de pensar y actuar que le permitan aprender a aprender matemática en diferentes contextos de aprendizaje, en la actividad intelectual productiva y creadora, en el aprendizaje del contenido matemático de forma lógica y reflexiva en la realización de las tareas de aprendizaje y en la aplicación las estrategias que le permitan aprender y aprender a aprender matemática, en la que se despliega la lógica y reflexión del contenido matemático para la participación, comprensión y significación en la realización tareas y para el trabajo independiente de los estudiantes.

Esta dimensión posibilita que los estudiantes participen de forma reflexiva en la adquisición de los conocimientos, estableciendo relaciones con contenidos anteriormente aprendidos y con otras asignaturas del currículo, y en la orientación de las bases que ofrece para la realización del trabajo independiente.

Significación axiológica – valorativa

Se expresa en el valor de la vinculación de los contenidos matemáticos con la vida cotidiana, dadas sus múltiples aplicaciones en diferentes esferas de la vida económica, cultural y social, lo que contribuye a comprender la necesidad de su empleo en el bien de la sociedad, donde la naturaleza misma de sus aplicaciones (vinculada a procesos productivos y otras ciencias) puede contribuir, mediante el enfoque y planteamiento de los problemas de aplicación, a fomentar la conciencia de producir y trabajar eficientemente para construir un mundo mejor, incidiendo en la formación en valores de los estudiantes.

Metodología

La metodología realizada fue mixta, donde lo cualitativo y lo cuantitativo se articularon para valorar los efectos de la propuesta didáctica en la potenciación del trabajo independiente, como una vía para la formación ética, axiológica y humanista de los estudiantes de la carrera de Licenciatura en Educación Mención Matemática, de la UASD, Centro Nagua, en la República Dominicana.

Se aplicó en los cursos de Geometría, Análisis Matemático e Historia de la Matemática, haciendo énfasis en el estudio de los contenidos referentes a las figuras geométricas, cuerpos geométricos, perímetro, área de superficies planas, volumen, relaciones, funciones, simetría, continuidad, discontinuidad, entornos, vecindad en el campo de los números reales y los aspectos históricos relacionados con los contenidos abordados.

La implementación de la propuesta didáctica tiene una duración de un semestre y se desarrolla en correspondencia con el tratamiento de los contenidos del programa de la asignatura que se imparte durante este período de tiempo.

Los docentes que se forman en estas carreras imparten clases en el nivel secundario, es por eso que las tareas orientadas tuvieron como requerimiento que se relacionaran con el cuidado ecológico, el uso de la matemática en el hogar, en las artes plásticas, y otras aristas.

La propuesta didáctica se basó en tres etapas:

Etapa 1: Desarrollo de proyectos de investigación.
Epata 2: Presentación de los resultados del proyecto en una Feria Científica organizada en el curso.
Etapa 3: Valoración de la calidad del trabajo independiente de los estudiantes, atendiendo a las dimensiones del PEA de la Matemática: motivación-regulación moral, significatividad lógica-reflexiva del contenido matemático y significación axiológica-valorativa.

Para la etapa 3, se aplicaron encuestas a los estudiantes y docentes las cuales cada indicador se valoró según las respuestas a siempre, casi siempre, a veces, casi nunca y nunca. Además, se hizo revisión documental, entrevistas a los docentes, y se les solicitó un diario reflexivo a los estudiantes, en relación al proyecto y la feria científica. Todos estos instrumentos se elaboraron sobre la base de los siguientes indicadores definidos, y validados, por Tavera (2018).

Indicadores para valorar la motivación-regulación moral

A. Demuestra interés y compromiso moral por el aprendizaje de los contenidos matemáticos y sus aplicaciones para resolver las tareas que se le asignan.
B. Muestra disposición para resolver de forma independiente las tareas asignadas con responsabilidad moral y cumplimiento del deber.

Indicadores para valorar la significatividad lógica-reflexiva del contenido matemático

C. Participa de forma activa en la adquisición del contenido matemático estableciendo relaciones con contenidos anteriores, con el de otras asignaturas y con sus vivencias personales.
D. Despliega la reflexión lógica del pensamiento matemático en la solución de tareas.
E. Crea su propia estrategia de trabajo independiente.

Indicadores para valorar la significación axiológica-valorativa Significación axiológica-valorativa en la vinculación de los contenidos matemáticos en la práctica para la vida cotidiana.

F. Aplica el contenido matemático a la resolución de tareas vinculadas a la vida y a otras ciencias.
G. Establece mediante el trabajo independiente relaciones con situaciones de lo cotidiano, demostrando la contextualización de sus saberes y la significación del contenido matemático aprendido.
H. Utiliza convenientemente las tecnologías en el aprendizaje de los contenidos matemáticos y en la gestión del conocimiento.

Ejemplificación de la propuesta didáctica

Se implementó en el programa denominado Mat 081 de la carrera de Carrera de Licenciatura en Educación Mención Matemática, de la UASD, en el primer semestre. Se seleccionó el curso de Geometría I (Mat. 081), en la unidad didáctica de “Áreas y perímetros de superficies planas” de 10 horas clases.

Los contenidos tratados fueron: Aspectos históricos sobre la geometría plana. Superficies planas. Clasificación. Perímetros y áreas de figuras planas simples y compuestas. Aplicación del contenido mediante la resolución y formulación de problemas de cálculo de áreas y perímetros.

Se precisaron los siguientes objetivos:

1- Demostrar mediante la modelación, la argumentación y la aplicación de los conocimientos geométricos las potencialidades del contenido matemático en la formación de convicciones, valores, actitudes, normas de conducta y cualidades morales.
2- Desarrollar formas de pensamiento geométrico que requieran flexibilidad mental, reflexión crítica y valorativa, tenacidad y perseverancia, del establecimiento de relaciones interdisciplinarias y con la vida mediante la aplicación de conceptos, relaciones y procedimientos (algorítmicos y heurísticos) de la geometría plana.
3- Profundizar en los conocimientos y habilidades de los contenidos geométricos que aseguren una formación matemática para continuar estudios en la carrera y como parte de su preparación como futuros docentes.
4- Formular y resolver problemas matemáticos y extramatemáticos relacionados con fenómenos y procesos económicos, sociales y científico-ambientales que se modelen desde la geometría plana mediante la aplicación integrada y consciente de recursos cognitivos, algorítmicos, heurísticos, metacognitivos y el uso de las TIC, donde se revele la significación de la ciencia matemática y las experiencias de la actividad creadora.

La intención general estuvo orientada a potenciar el trabajo independiente de los estudiantes desarrollando hábitos de estudio que le permitan orientarse adecuadamente, para la ejecución de las tareas de manera independiente y cooperada, en un clima afectivo de autocontrol, que le permita valorar sus resultados y adquirir un aprendizaje sólido y significativo de los contenidos geométricos y la racionalización eficiente del trabajo mental, utilizando objetos de la naturaleza, modelos de figuras geométricas, instrumentos geométricos (regla, cartabones, compás, semicírculos); tecnologías (computadora, celulares, plataformas tecnológicas, plataforma Edmodo, aulas virtuales Khan Academy, video ven, videos tutoriales, GeoGebra, entre otros), así como papel, tijeras, cinta métrica, madera, cartón, chinchetas, clavos, pinturas, martillo, cuadrículas, cartón, periódicos, empapelados, libros de Geometría con aplicación y solución de problemas y artículos científicos.

En esta unidad los proyectos estuvieron orientados a la investigación del tema: *"Lo que podemos crear utilizando los conocimientos geométricos y los materiales reciclables",* enfatizando en el desarrollo de la motivación-regulación moral, significatividad lógica-reflexiva del contenido geométrico y significación axiológica-valorativa *de los contenidos geométricos en la práctica para la vida cotidiana*.

Los equipos trabajaron en las temáticas de matemática en el hogar, círculos y circunferencias, figuras geométricas, matemática en la naturaleza, juegos matemáticos, recursos didácticos, origami, ingeniería y arquitectura.

En estos proyectos los futuros docentes trabajaron durante toda la unidad, investigaron y elaboraron ponencias para presentar en la Feria Científica de Matemática que se desarrolló en el auditorio de la UASD, centro Nagua, en la que participaron los estudiantes de los seis grupos organizados en equipos.

En la feria, ellos explicaron sus proyectos a los visitantes, les demostraron cómo el contenido matemático tiene sus aplicaciones en las piezas de manualidad, maquetas, recursos didácticos o juegos elaborados por ellos resaltando los contenidos matemáticos presentes, así como sus posibilidades de aplicación a otras ciencias y esferas de la vida.

Las ilustraciones 1, 2 y 3 son evidencias del trabajo realizado en la feria científica.

Ilustración 1 Trabajo presentado en la feria por el equipo que trabajó la temática de Hologramas

Ilustración 2 Trabajo presentado en la feria por el equipo que trabajó la temática de Hiloramas

Ilustración 3 Trabajo presentado en la feria por el equipo que trabajó la temática área aplicada a la Arquitectura e Ingeniería

Resultados

Al valorar el estado final de los indicadores precisados anteriormente se pudo sintetizar que la dimensión motivación –regulación afectiva, tuvo un nivel alto según el comportamiento de la mediana, apreciándose una tendencia al mejoramiento del estado de los tres indicadores. Los A y B fueron valorados con un nivel alto dado que la tendencia fue manifestar que casi siempre se cumple el requerimiento del indicador, aunque hubo algunos docentes y estudiantes que lo ubicaron en la categoría, a veces.

La dimensión significatividad lógica reflexiva del contenido matemático, también fue valorada con un nivel alto según el comportamiento de la mediana, evidenciándose, también, resultados cualitativo en el comportamiento de los indicadores C, D y E.

El indicador C fue valorado con un nivel alto, se manifiesta en este que casi siempre se cumple y los indicadores D y E se valoraron con un nivel medio, ya que se manifestó que a veces se cumple lo que plantea el indicador lo que indica que se pueden perfeccionar estos indicadores.

Con relación a la dimensión significación axiológica-valorativa en la vinculación de los contenidos matemáticos en la práctica para la vida cotidiana, se valoró de muy alto, según el comportamiento de la mediana. El indicador H fue valorado con un nivel alto, dado que casi siempre se cumple con las exigencias, y los indicadores F y G fueron evaluados en un nivel medio dado que la tendencia fue manifestar que a veces se cumple.

Los resultados obtenidos se asemejan a los obtenidos por otros autores como son Duardo, González y Rubén (2018) quienes investigan sobre el trabajo independiente de los estudiantes de la Licenciatura en Educación Matemática, aunque estos autores lo consideran como medio de inclusión de los estudiantes en la actividad cognoscitiva independiente mediante la apropiación y desarrollo de habilidades en la resolución de problemas, lo cual se corresponden a los resultados obtenidos.

Conclusiones

En correspondencia con el estado de las tres dimensiones, se valoró que se potenció el trabajo independiente en el PEA de la Matemática, con un enfoque ético, axiológico y humanista, con un nivel ALTO lo que evidenció una tendencia a cambios cualitativamente positivos puesto que:

- El PEA de la Matemática evidenció la transformación desde lo ético, axiológico y humanista que lo debe caracterizar la motivación y el trabajo independiente en los estudiantes.
- Los resultados en el aprendizaje de los estudiantes mejoraron notablemente, evidenciado en las evaluaciones sistemáticas realizadas y en los resultados del examen final de semestre.
- Se logró comprensión de la significatividad-lógica reflexiva en el contenido matemático, así como de su significación axiológica valorativa.

No obstante, a los avances obtenidos se aprecian aun algunos aspectos en los cuales se debe continuar profundizando tales como:

- El despliegue de la reflexión lógica del pensamiento matemático de los estudiantes en la solución de tareas.
- Las posibilidades de los estudiantes para crear su propia estrategia de trabajo independiente
- La aplicación del contenido matemático a la resolución de tareas vinculadas a la vida y a otras ciencias.
- El establecimiento mediante el trabajo independiente de relaciones con situaciones de lo cotidiano, la demostración contextualizada de sus saberes y la significación del contenido matemático aprendido.

De forma general, la propuesta contribuyó a fortalecer en los estudiantes su formación como futuros docentes de Matemática al reconocer la importancia de esta ciencia en su formación integral, el desarrollo del pensamiento lógico deductivo, la capacidad de reflexión, el desarrollo, de la independencia cognoscitiva, la formación en valores y el carácter humanista del proceso, así como el desarrollo de la responsabilidad, la perseverancia, la solidaridad, y la constancia en el esfuerzo entre otros valores.

Contribuyó, además, a consolidar las relaciones interpersonales en el grupo, lo que se evidenció en un mayor intercambio y espíritu de trabajo en equipo, favoreciendo el espíritu de solidaridad y de respeto entre todos, así como el trabajo cooperado.

Referencias bibliográficas

Chacón, N. (1999). Ética y profesionalidad en la formación de maestros. interuniversitaria de formación del profesorado, (35), p. 41-50.

Chacón, N. (2016). La mediación de conflictos en la labor educativa del docente desde un enfoque ético, axiológico y humanista. *Redipe*, 5(3), p. 50-56.

Chacón, N. (2018). Dimensión Ética de la Educación y un enfoque para la Pedagogía. Interfaces da Educação, 9(27), p. 08-25.

Duardo, C., González, G., y Rubén, F. (2018). El trabajo independiente en la formación del Licenciado en Educación, especialidad matemática. Amazonia Investiga, 7(14), p. 274-281.

Matías, C. (2010). Reflexiones pedagógicas y educativas para el debate actual. Computhen. República Dominicana.

Matos, C. E. (2006). *Estrategia de capacitación docente para contribuir a la formación del patriotismo en las escuelas de la República Dominicana* (Tesis doctoral). UCP "Enrique José Varona", La Habana, Cuba.

Pimentel, F. (2011). *Estrategia pedagógica integradora para la formación y desarrollo de la conciencia moral, ética y ciudadana de los estudiantes de los centros del nivel medio, modalidad. Técnico Profesional del sistema de educación dominicano*. (Tesis doctoral), La Habana, Cuba.

Secretaría de Educación (1997). Ley Orgánica de Educación de la República Dominicana. Ley No. 66-97.

Taveras, R. (2018). *El proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática con enfoque ético, axiológico y humanista que potencie el trabajo independiente en los estudiantes de Licenciatura en Educación Mención Matemática* (Tesis doctoral) UCP "Enrique José Varona", La Habana, Cuba.

CARACTERÍSTICAS Y CONCEPCIONES ACERCA DE LA NOCIÓN DE DISTRIBUCIÓN EN EL RAZONAMIENTO SOBRE LA COMPARACION DE CONJUNTOS DE DATOS: EL CASO DE UN ESTUDIANTE

CHARACTERISTICS AND CONCEPTIONS ABOUT THE NOTION OF DISTRIBUTION IN THE REASON ON THE COMPARISON OF DATA SETS: THE CASE OF A STUDENT

Vivian Yulieth Marulanda Aroca, Maritza Méndez Reina
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).
vymarulandaa@upn.edu.co, mmendezr@pedagogica.edu.co

Resumen
Esta comunicación es producto de un trabajo de grado desarrollado en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, en particular, expone el análisis de los razonamientos que un estudiante de grado séptimo exhibe cuando compara distribuciones de datos a partir del trabajo con una tarea mediada por tecnología digital, considerando elementos teóricos centrados en características y concepciones acerca de la noción de distribución. La estrategia investigativa empleada fue la entrevista basada en tareas, los resultados sugieren que el estudiante considera aspectos de la noción de distribución de manera informal cuando hace comparaciones de distribuciones.

Palabras clave: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística, entrevista basada en tareas

Abstract
This report is the result of a thesis developed in the Mathematics Teaching Master's Degree Program at the National Teacher Training University. In particular, it presents the reasoning analysis that a seventh-grade student shows when comparing data distributions from the work with a digital technology-mediated-task; considering theoretical elements based on characteristics and conceptions concerning the distribution notion. The research strategy used was the task-based interview. The results suggest that the student considers distribution notion aspects informally when making distribution comparisons.

Key words: probability-related thinking, statistics, task-based interview

Introducción

La propuesta de trabajo de grado que se encuentra en curso, tiene como aspecto central el identificar los diversos razonamientos y concepciones que los estudiantes exhiben cuando comparan conjuntos de datos a partir del trabajo con una tarea mediada por tecnología digital, para dicho propósito la idea de distribución es medular. En este sentido, esta propuesta parte del supuesto que los estudiantes haciendo uso de sus conocimientos iniciales y de una herramienta digital diseñada en GeoGebra, son influenciados en sus razonamientos respecto a las características y concepciones de la distribución, lo cual contribuirá al desarrollo del pensamiento aleatorio y a la formación de ciudadanos estadísticamente cultos.

La cultura estadística, como lo propone Batanero, Diaz, Contreras y Roa (2013) involucra la interpretación de la información estadística que se puede encontrar en diferentes contextos, esta interpretación no puede darse correctamente si no se han desarrollado ideas estadísticas fundamentales, específicamente la de distribución de frecuencias. En este sentido, Ben-Zvi y Arcavi (2001) citados en Garfield y Ben-Zvi (2008) encontraron que las tareas cuidadosamente diseñadas (por ejemplo, comparar distribuciones, manejar valores atípicos), la orientación de los docentes y preguntas desafiantes, junto con conjuntos de datos motivadores y herramientas tecnológicas apropiadas ayudan a los estudiantes a hacer la transición del razonamiento local al global.

El conjunto de tareas que contempla la propuesta, se vale de preguntas orientadas a la comparación de conjuntos de datos para promover la noción de distribución, ya que:

1. Comparar dos o más conjuntos de datos puede estructurarse como una versión inicial e informal de inferencia estadística.
2. Los problemas que involucran comparaciones de conjuntos de datos son a menudo más interesantes que los que involucran a un solo conjunto.
3. Estudiantes de cualquier nivel requieren desarrollar estrategias para comparar conjuntos de datos.
4. En la comparación de conjuntos de datos es importante realizar representaciones gráficas y obtener resúmenes (centro y dispersión) de los datos. Sánchez y Orta (2013, p. 68)

Para efectos de esta comunicación se mostrará parte del marco referencial que orienta la propuesta, la metodología seguida, un episodio de la entrevista basada en la tarea propuesta, y su correspondiente análisis.

Marco referencial

Para Batanero y Godino (2001) la distribución proporciona información para analizar una variable, en particular aspectos como saber cuántos datos hay en total, con qué frecuencia aparecen los diferentes valores de la variable y el comportamiento de los datos, sin embargo, no señalan una definición clara sobre esta noción. Algunos autores se han interesado por investigar acerca de la noción de distribución, al respecto Wild (2006) indica que la distribución son los lentes a través de los cuales se observa como varían los datos, por lo que comprender la idea de variabilidad de los datos es un componente clave para comprender el concepto de distribución.

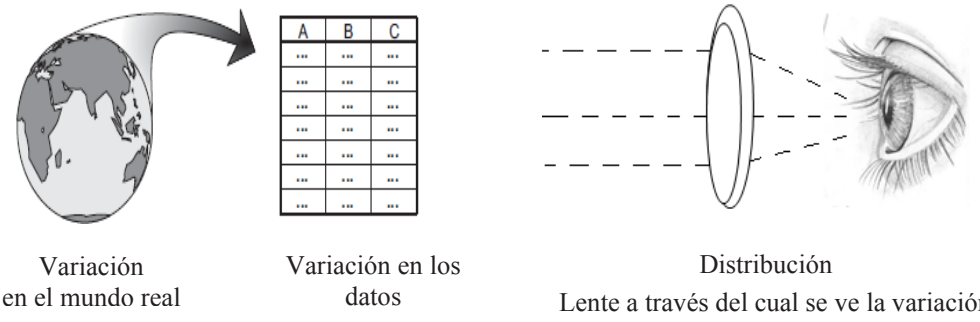


Figura 1. Distribución como lente.
Fuente: Wild (2006).

En línea con estas perspectivas, Wild (2006) hace una distinción entre dos tipos de distribuciones, las empíricas y las teóricas. Las distribuciones empíricas, son aquellas en las que se explica la variación de los datos mediante la observación directa de diferentes representaciones del conjunto de datos, dicha observación permite describir la variabilidad existente en los datos, por ello, este tipo de distribuciones no tienen un componente inferencial. Las distribuciones teóricas por su parte, hacen alusión a las distribuciones que explican la variación de los datos de variables aleatorias bajo modelos paramétricos como la distribución normal, binomial, etc., es decir, se refiere a modelos de probabilidad.

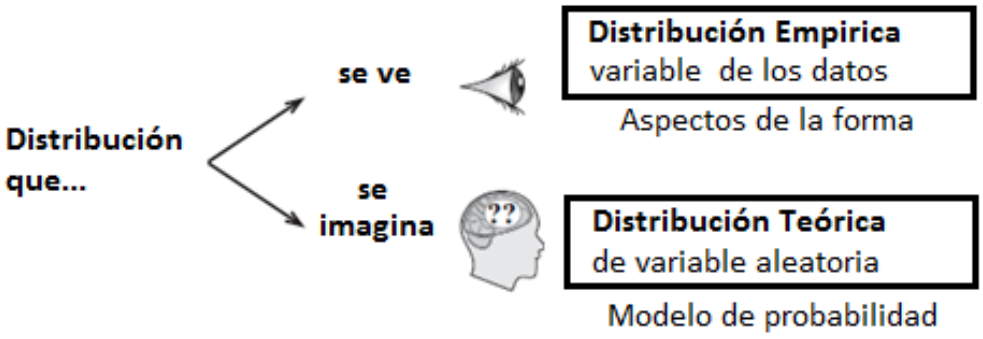


Figura 2. Distribución Empírica vs. Distribución Teórica.
Fuente: Wild (2006).

Las tareas planteadas en la propuesta, y en particular la mostrada en esta comunicación, centra su atención en las distribuciones de tipo empírico, dado que, lo que busca principalmente es favorecer la visualización gráfica, aprovechando las posibilidades que brindan los recursos tecnológicos. Así mismo se busca promover el aprendizaje de la estadística particularmente la distribución de frecuencias mediante la exploración dinámica. A continuación, se presentan las características de la distribución basadas en las investigaciones de algunos autores expertos en el tema.

Distribución y variabilidad

Antes de describir aspectos importantes acerca de la variabilidad, es necesario abordar la cuestión de la terminología que se usará a partir de este momento. Algunos autores usan el término "variación" y "variabilidad" para referirse al mismo concepto, sin embargo, hay quienes hacen distinción de los términos. Reading y Shaughnessy (2004;

citado en Garfield y Ben-Zvi 2008) hacen las siguientes distinciones entre "variación" y "variabilidad": variación es el nombre que se usa para describir el acto de variar, mientras que variabilidad es el nombre del adjetivo "variable", lo que significa que es probable que algo varíe o cambie. Teniendo en cuenta que esta distinción no ha sido acordada en la comunidad de la investigación en educación estadística, para este trabajo se tomara el argumento de los autores mencionados y se usara el término variabilidad para las ideas descritas y desarrolladas en este apartado.

Un requisito para comprender la distribución es la idea de variabilidad, que según Wild (2006) está siempre presente en la distribución de frecuencias. Por lo tanto, es importante que los estudiantes perciban la variabilidad en los conjuntos de datos.

Sobre la variabilidad

Según Garfield y Ben-Zvi (2008), es importante que los estudiantes perciban la presencia de la variabilidad en las distribuciones, aun cuando no se hable de ella, por lo que es necesario mostrarles que la variabilidad es una medida que puede ser explicada mediante una comprensión profunda que puede ser guiada como se muestra a continuación:

1. Desarrollando ideas intuitivas de variabilidad
2. Describiendo y representando la variabilidad con medidas numéricas
3. Usando la variabilidad para hacer comparaciones
4. Reconociendo la variabilidad en tipos especiales de distribuciones
5. Identificando patrones de variabilidad en los modelos de adaptación
6. Usando la variabilidad para predecir muestras aleatorias o resultados
7. Considerando la variabilidad como parte del pensamiento estadístico

Otro requisito para concebir la noción de distribución según Bakker y Gravemeijer (2004) es enfocarse en los aspectos de la forma. La forma de una distribución está influenciada por varios aspectos estadísticos como la centralidad, la dispersión de los datos, la densidad y la simetría.

Características de la distribución

Tabla 1. Características de la distribución de datos.

DISTRIBUCIÓN (Entidad conceptual)			
Centralidad	Dispersión	Densidad	Simetría
Media y Mediana	Desviación estándar y Rango	Frecuencia relativa y Cuartiles	Posición de la mayoría de los datos
Datos (Valores individuales)			

Fuente: Bakker y Gravemeijer (2004)

Esta estructura se puede leer de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba. La lectura en forma descendente según Bakker y Gravemeijer (2004) indica el centro, la dispersión, la densidad y la simetría como características de una distribución. En la lectura en ascendente según Mokros y Russell (1995) citados en Bakker y Gravemeijer (2004), se conciben los datos como valores individuales, que se pueden usar para calcular, por ejemplo, la media, la mediana, la desviación estándar y el rango. Esto no implica que se vea la media o la mediana como medida de centralidad o como representante de un conjunto de datos, no obstante, esta perspectiva puede conducir a la comprensión de la noción de distribución.

En Andrade, Fernández y Méndez (2018) se presenta una caracterización de la variabilidad ligada a la noción de distribución que amplía la conceptualización propuesta por Bakker y Gravemeijer (2004) (Tabla 2). Estas características se tienen en cuenta para analizar los razonamientos de los estudiantes y se adaptarán orientadas a la comparación de distribuciones de datos.

Tabla 2. Características de la variabilidad ligadas a la noción de distribución.

Dispersión
Ver la necesidad de organizar u ordenar los datos
Identificar valores máximo y mínimo
Determinar el rango
Establecer relaciones cualitativas entre los datos, y/o relaciones cuantitativas como distancias
Apreciar de manera general la variabilidad
Reconocer valores atípicos
Estimar varianza, desviación estándar
Densidad
Apreciar de forma cualitativa la variación de las frecuencias
Agrupar datos por valores de la frecuencia, es decir, determinar grupos para la frecuencia y asignar a estos los valores de la variable correspondientes
Agrupar datos por valores de la variable, es decir, determinar grupos para la variable y asignar a estos las frecuencias correspondientes
Referirse a la colección de datos por frecuencias relativas o porcentajes de valores particulares de la variable
Apreciar variación entre las longitudes de los intervalos o clases de una o más tablas de frecuencias
Apreciar de forma cualitativa la variación en la relación entre la variable y la frecuencia, determinar si la gráfica es ascendente, descendente, creciente, decreciente, describir curvas, inflexiones de las curvas, prolongaciones, colas
Apreciar de forma cuantitativa la variación en la relación entre la variable y la frecuencia
Describir relaciones de cercanía o lejanía entre las barras, reconocer condensaciones, aglomeraciones
Reconocer valores faltantes, frecuencias nulas, valles, llanos
Describir relaciones de altura entre las barras, reconocer picos, apuntamientos
Reconocer el valor de la variable que corresponde a la mayoría de los datos
Comparar partes con el todo
Centro
Reconocer el valor de la frecuencia más alta, moda
Calcular mediana, media (promedio)
Simetría y asimetría
Reconocer simetría o asimetría
Modelos teóricos
Relacionar con modelos teóricos

Fuente: Andrade, Fernández y Méndez (En prensa)

Concepciones acerca de la noción de distribución

El estudio acerca del razonamiento de los estudiantes sobre los datos de Konold, Higgins, Russell y Khalil (2003), sugiere un marco para describir los niveles en la forma en que las personas entienden los datos, centrándose en cómo las distintas representaciones y el uso de estas resaltan o le quitan énfasis a las características de los datos, se considera necesario describir a continuación estos niveles, ya que es una forma para clasificar la manera en que cada estudiante percibe un conjunto de datos:

1. *Datos como apuntadores:* Esta manera de ver los datos se percibe usualmente en estudiantes muy jóvenes que han recolectado datos por sí mismos. En estos casos los estudiantes tratan la representación de los datos como una imagen que le recuerda lo que sea sobresaliente del evento, por ejemplo: se realiza con los estudiantes una encuesta acerca del juego mecánico que más les gusto en una salida al parque mundo aventura de Bogotá, luego de la recolección de datos, la profesora les pide que den una conclusión acerca de los datos recolectados, a lo que Juan contesta que todos subieron a muchas atracciones mecánicas, lo que hace pensar que Juan ve la representación como una imagen para recordar la salida pedagógica a mundo aventura.
2. *Datos como valores de cada caso:* El estudiante proporciona información sobre el valor de algún atributo para cada caso individual, es decir el estudiante ve los datos como códigos de aspectos particulares de un evento. Este aspecto es a menudo evidente en niños pequeños que tienden a centrarse en la identidad de cada pieza individual de datos, especialmente los valores de datos que les pertenecen, por ejemplo, la profesora le preguntó a Jaime qué podía decir de los datos recolectados acerca de la salida pedagógica a mundo aventura, a lo que Jaime contesta que la atracción mecánica que más le gustó es el martillo, lo que muestra que el estudiante aunque reconoce que los datos pertenecen a un evento especifico no es capaz de concluir acerca de los datos sino que lo hace desde su experiencia.
3. *Datos como clasificadores:* El estudiante da información teniendo en cuenta la frecuencia de los datos, es decir da conclusiones de los datos fijándose en el número de veces que aparece un dato. Siguiendo con el mismo ejemplo, la profesora le pregunta a Valentina qué puede decir acerca de los datos recolectados, a lo que Valentina, dice que cinco niños prefieren la montaña rusa, con lo que se observa que la niña dio este tipo de información remitiéndose a la frecuencia de los casos (atracción mecánica).
4. *La distribución como un agregado:* El estudiante emite conclusiones atendiendo a características que no son evidentes en ninguno de los valores de los datos individuales, es decir hace uso de aspectos como la centralidad (media, mediana y rango medio), densidad (frecuencia relativa, mayoría de datos y cuartiles) y asimetría (posición de la mayoría de los datos) para hablar acerca del conjunto de datos. Siguiendo con el ejemplo inicial, la profesora le pregunta a Milena qué puede decir acerca de los datos recolectados, a lo que contesta que la mayoría de los niños no prefieren la atracción mecánica de la araña.

Herramientas tecnológicas para desarrollar el concepto de distribución

Según Garfield y Ben-Zvi (2008) la tecnología puede desempeñar un papel importante en el desarrollo de la noción de distribución al proporcionar un acceso fácil a múltiples representaciones y oportunidades infinitas para manipular y comparar simultáneamente las representaciones del mismo conjunto de datos. Sin embargo, esta no es una tarea simple. Biehler (1997) informa que, a pesar de usar una innovadora herramienta de software para generar y moverse entre diferentes gráficos de datos, la interpretación y la descripción verbal de estos gráficos fueron profundamente difíciles para los estudiantes de secundaria y universitarios, a menos que tuvieran una comprensión conceptual de los conceptos fundamentales.

Garfield y Ben-Zvi (2008), la tecnología puede usarse para ayudar a los estudiantes a ver las conexiones entre las diferentes representaciones gráficas de datos, ayudando a los estudiantes a construir la idea de la distribución como una entidad. Tres usos importantes de la tecnología según los mismos autores son:

1. Permite visualizar la transición de gráficos de casos y argumentos a gráficos de puntos a histogramas, todos basados en el mismo conjunto de datos.
2. Permite ilustrar las formas en que diferentes gráficos de los mismos datos revelan diferentes aspectos de los datos, al tener de manera flexible múltiples representaciones en la pantalla al mismo tiempo, lo que permite a los estudiantes identificar dónde se encuentran uno o más casos en un gráfico.
3. Permite cambiar de manera flexible un gráfico (por ejemplo, hacer que los contenedores sean más anchos o estrechos para los histogramas) para que un patrón o forma sea más clara, o para agregar y eliminar valores para ver el efecto en el gráfico resultante.

Metodología

El enfoque que se sigue en este estudio es de tipo fenomenológico, pues se describen y comprenden los aspectos relevantes que se presentan a medida que se dan las diferentes interacciones entre los estudiantes, profesora y la tarea planteada. En consonancia, se opta por la estrategia investigativa entrevista basada en tareas con una aproximación interpretativa, dado que busca rastrear los diversos razonamientos que los estudiantes puedan construir cuando comparan distribuciones de datos a partir del trabajo con una tarea mediada con un applet de GeoGebra. Se parte de la hipótesis de que este estudio posibilita la evolución del pensamiento de los estudiantes hacia la idea de distribución más complejizada.

Para llevar a cabo el estudio, se realizó una entrevista basada en una tarea mediada con un applet de GeoGebra. A continuación, se describe el contexto de ésta y se da cuenta de las preguntas propuestas a los estudiantes:

- Los participantes de la entrevista fueron dos estudiantes de grado séptimo y la profesora de matemáticas quien asumió el rol de entrevistadora e investigadora. Ella diseño con antelación la tarea y pregunta contingentes que fueron aplicadas en la entrevista.
- La elección de los estudiantes se hizo de forma aleatoria entre los estudiantes del curso 701 de la jornada mañana del colegio Kimy Pernía Domico IED que mostraron interés por participar de la entrevista. Se seleccionaron dos estudiantes, un niño y una niña que demuestran gusto por las clases donde se incluyen herramientas tecnológicas.
- Al observar el plan de estudios se presume que los estudiantes que participaron en la entrevista cuentan con un proceso de instrucción previo de estadística, pues en el grado anterior se dedica un periodo de 13 semanas al componente de formación estadística, en las que se señala de manera explícita el trabajo con tablas y gráficos de barras, y en torno a las medidas de tendencia central.
- La entrevista se aplicó en una sesión de 110 minutos, esta se registró con videos tanto de los estudiantes como de lo que acontecía en la pantalla del computador. Adicionalmente, la investigadora recolectó material escrito de los estudiantes, tomó capturas de pantalla y realizó la transcripción de la entrevista.
- Una vez recogida la información, se organizó en dos tipos de archivos: físico y digital. En el archivo físico se organizaron los escritos de los estudiantes. En el archivo digital se organizó el material registrado en capturas de pantalla, transcripciones y en grabaciones de video.
- Los archivos con la información en bruto fueron el punto de partida para la obtención de los datos investigativos. Se seleccionó la información que fue empleada en el análisis y se descartó la información irrelevante. Se generaron nuevos archivos con la información que se utilizó, especificando de manera escrita: el material registrado, el informante, la fecha, el tiempo empleado, el escenario donde se desarrolló la entrevista, la información que se registró, los dispositivos de registro que se emplearon y la ruta de ubicación del material.

Análisis de resultados

A continuación, se muestra un fragmento que constituye un dato representativo del trabajo de grado, este ilustra el dialogo entre la profesora y el estudiante en torno a una tarea que requería que el estudiante observara y manipulara gráficos de dos distribuciones (Figura. 3) presentados en un applet de GeoGebra para dar respuesta a la pregunta: ¿Qué puedes decir de los gráficos?

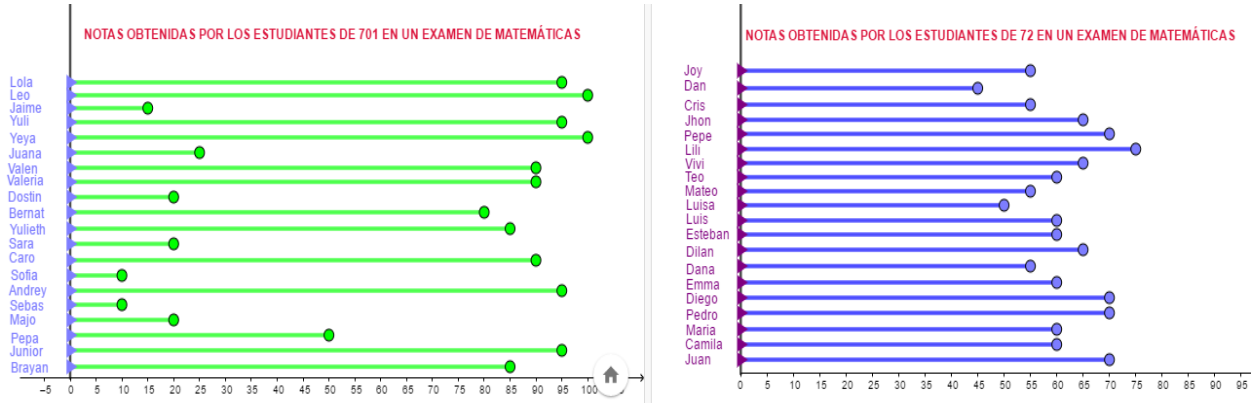


Figura 5. Comparación de distribuciones a partir de gráficos de barras de datos individuales propuesta en la Tarea 1.
Fuente: Elaboración propia

1	Richard:	Lo que podemos decir de los gráficos de 702 y 701 es que hay diferencia entre los gráficos. Es decir, en 701 hay mayor puntaje, mayor elevación de las notas. Los de 701 tuvieron un puntaje muy elevado. […]
2	Profesora:	¿Pueden organizar los datos de otra manera?
3	Richard:	Vamos a mover las gráficas. Los que fueron de menor porcentaje [puntaje]. Toca mirar el menor. […]
4	Profesora:	¿Por qué los organizaron así? [figura 5]
5	Richard:	Por el porcentaje [puntaje] de los cursos en el examen de matemáticas. En 702 solo hay un disparejo que fue la estudiante Lili, que tuvo el mayor porcentaje [puntaje] de ese curso.
6	Profesora:	Y ¿en 701?
7	Richard:	En 701 también hubo estudiantes que sacaron desde el 95 al 100
8	Profesora:	Listo ¿Qué más pueden decir de esos gráficos?... ¿Se ve mejor así [figura 6] o como estaba antes [figura 5]?
9	Richard:	Se ve mejor así, porque se puede notar cuantos estudiantes sacaron el mismo porcentaje [puntaje] y no confundirse colocando notas a otros.

Figura 6. Comparación de distribuciones a partir de gráficos de barras de datos individuales organizado por los estudiantes. **Fuente:** Elaboración propia

El análisis de la intervención realizada por Richard en [1] permite evidenciar que su atención estaba centrada en describir relaciones de altura entre las barras; y en reconocer picos y apuntamientos. Esta manifestación permite afirmar que su razonamiento estaba centrado en características de la densidad de los datos. En [3], surge en el estudiante la necesidad de encontrar el valor mínimo para a partir de él, organizar los datos. También, de [5-7] gracias a la organización de los datos, el estudiante, además de ver los datos como valores individuales de cada caso, reconoce valores atípicos. Estos indicios muestran que el razonamiento del estudiante estaba centrado en las concepciones de la noción de distribución y en las características de la dispersión de los datos. La intervención del estudiante en [9] permite vislumbrar que prestó especial atención a la agrupación de los datos por valores de la variable, es decir, aunque no brinda información cuantitativa de la frecuencia de los datos, se evidencia que la considera importante para brindar información sobre una variable. Lo anterior, permite inferir que el razonamiento del estudiante estaba centrado en las características de la densidad de los datos.

Conclusiones

En el episodio acá mostrado, se aprecia que la secuencia instruccional que se propone en el trabajo contribuye a que el estudiante razone sobre la distribución de los datos a medida que se dan las distintas interacciones con la tarea mediada por tecnología digital. Es así como en el trabajo inicial de exploración de datos presentados en una hoja de GeoGebra de manera estática, el estudiante exhibió razonamientos relacionados con las formas de las distribuciones, en tanto comparó que en uno de los conjuntos de datos tienen valores superiores en comparación con la otra distribución, empleando las observaciones de altura de las barras individuales de cada caso.

Es necesario señalar que cuando el estudiante usó la herramienta de "arrastre" en GeoGebra para organizar los datos lo movilizó a usar otros elementos importantes para comparar distribuciones de datos como la necesidad de identificar el valor mínimo, el reconocimiento de datos atípicos y la agrupación de los datos por valores de la variable. En general, el estudiante señaló elementos que tienen que ver primordialmente con la densidad y la dispersión de los datos mientras que la simetría y la centralidad no fueron nombrados.

Referencias bibliográficas

Andrade, L.; Fernández, F. y Méndez, M. (En prensa). Exploración de la noción de distribución desde la variabilidad.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht, The Nertherlands: Kluwer Academic Publishers.

Batanero, C. y Godino, Juan. (2001). Análisis de datos y su didáctica.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. y Roa,. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. 83*. 7-18.

Biehler, R. (1997). Software for Learning and for Doing Statistics. Interntlt~onol Srotrst. 65. 167-189. 10.2307/1403342.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer Science & Business Media.

Konold, C. Higgins, T. Russell, S. y Khalil, K. (2014). Data seen through different lenses. Educational Studies in Mathematics. 10.1007/s10649-013-9529-8.

Sánchez, E. y Orta, J. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números. 83*. 65-77.

Wild, C.J. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, *5* (2), 10-26. http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DEL TEMA, "ÁREA DE FIGURAS COMPUESTAS", DIRIGIDO A FUTUROS PROFESORES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA DE LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

DESIGN OF ACTIVITIES FOR THE STUDY OF THE SUBJECT, "AREA OF COMPOSITE SHAPES", ADDRESSED TO PROSPECTIVE SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS

Mónica Paola Rivas Jiménez, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora (México).
rivasj-mp@hotmail.com, maurr@mat.uson.mx

Resumen
Promover el desarrollo de aprendizajes no aislados en los estudiantes, en el sentido de tener claridad sobre los aspectos involucrados en el significado de un objeto matemático, es tarea del docente, quien debe cumplir con ciertas características, como es el dominio de contenidos disciplinares, así como las habilidades necesarias para implementar estrategias apropiadas en el aula. Por ello, debido a la experiencia en el aula y los resultados de las evaluaciones tanto de los alumnos específicamente en Geometría, como de los futuros profesores, consideramos importante crear un diseño de actividades para promover el estudio de "área de figuras compuestas", con el propósito de enriquecer sus significados y reflexionar sobre las estrategias didácticas utilizadas.

Palabras clave: diseño, actividades, aprendizaje, geometría, profesor

Abstract
Promoting the development of non-isolated learning in the students, in the sense of being clear about the aspects involved in the meaning of a mathematical object, is a task of the teacher, who must comply with certain characteristics, such as the mastery of discipline contents, as well as the skills needed to implement appropriate strategies in the classroom. Therefore, due to the experience in the classroom and the results of the evaluations of both, students, specifically in Geometry, and prospective teachers, we consider it important to create a design of activities to foster the study of "area of composite shapes", with the purpose of enriching their meanings, and reflecting on the didactic strategies used.

Key words: design, activities, learning, geometry, teacher

Introducción

Durante los niveles educativos en la educación básica los estudiantes deben ir construyendo los aprendizajes propuestos en el currículo. Es importante que estos, lleguen a los niveles de aprendizaje que se requieren para poder seguir adaptándose a nuevos contenidos, sin tantas dificultades. Por ello, el docente es una pieza fundamental dentro del aula de clases, ya que es quien se encarga de poder plantear situaciones que promuevan activar al estudiante para que logre construir su conocimiento, a través de las mejores estrategias didácticas, como: trabajo individual, trabajo en equipo y trabajo grupal, donde se promueva la reflexión.

En las prácticas profesionales como estudiante de la Escuela Normal Superior de Hermosillo, pude percatarme de las dificultades que presentaban los estudiantes de segundo de secundaria, al abordar los temas matemáticos. Específicamente, al tratar el tema de "área de figuras compuestas", pude observar dificultades para aplicar de manera correcta las fórmulas y para visualizar las figuras geométricas en las que se puede descomponer una figura compuesta.

Lo antes señalado motivó el interés por realizar un trabajo que permita profundizar sobre la problemática de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ya que como mencionan García y López (2008) "*muchas de las limitaciones que nuestros alumnos manifiestan sobre su comprensión acerca de temas de Geometría se deben al tipo de enseñanza que han tenido*". Por ello, surgió el interés por sobre y cómo es que los profesores deben enseñar a los estudiantes de educación secundaria, según los planes y programas de estudio (2011) de educación básica, en el área de Geometría. De acuerdo a los Planes y programas de estudio de educación básica de la Secretaria de Educación Pública (SEP) de México, la matemática escolar en Educación Básica está organizada en tres ejes curriculares: Número, álgebra y variación, Forma espacio y medida, y Análisis de datos. En el eje curricular Forma, espacio y medida, se ubican los contenidos relacionados con geometría, los cuales aparecen en los Planes y programas de estudios desde educación preescolar.

En educación preescolar se inicia el estudio del contenido geométrico, primero mediante acercamientos que promueven la visualización e identificación de objetos y las figuras geométricas relacionadas con ellos, siendo estas habilidades algunas de las que debe poseer un estudiante al concluir su educación básica. En primaria se continúa promoviendo el desarrollo de estas habilidades, así como la identificación de propiedades y fórmulas (para calcular áreas y perímetros) asociadas a las figuras geométricas. En secundaria, además, en primero se continúa trabajando con las fórmulas de las figuras geométricas; en segundo se inicia el trabajo para determinar el área de figuras compuestas y en tercero se incorpora el uso de expresiones algebraicas que representen el área de una figura geométrica, cuyos lados están representados con variables y/o expresiones algebraicas.

Como podemos observar, durante la educación básica, desde preescolar el contenido geométrico se hace presente a los estudiantes, es por ello que resulta preocupante que, al llegar a segundo grado en educación secundaria, aún sigan presentando dificultades de temas que ya han visto en niveles anteriores. Dicho esto, consideremos importante no solo en qué deben aprender los estudiantes, sino también en la forma en que los temas son planteados por el profesor de matemáticas dentro del aula, a partir del contenido que se le presenta en los libros de texto. Sabemos que el profesor es pieza fundamental dentro del salón de clases, ya que es quien promueve las acciones que debe realizar el estudiante para que pueda construir su aprendizaje, por ello es importante que esté preparado tanto en sus conocimientos disciplinares como didácticos, al momento de abordar cualquier temática. Además, algunas investigaciones han demostrado que la rama de la geometría es un espacio muy poco explorado en los salones de clase por parte de los profesores.

De acuerdo a la problemática que se está presentando, se considera importante poder realizar un trabajo que aporte a la formación de los futuros profesores en cuanto a enriquecer sus significados matemáticos, y así poder generar reflexiones en ellos con la expectativa de que dichos aprendizajes los tomen en cuenta para enriquecer sus estrategias didácticas cuando organizan el trabajo con sus estudiantes, ya que como se ha mostrado, los estudiantes de

secundaria tienen dificultades para poder abordar los temas en geometría, específicamente en área de figuras compuestas y esto puede deberse a la enseñanza que reciben de sus maestros.

Para tener información respecto a la formación que tienen los futuros profesores de matemáticas de secundaria, se revisaron las evaluaciones que realiza la Coordinación Nacional de Servicio Profesional Docente, dentro del concurso de oposición para el ingreso a la educación básica ciclo escolar 2018-2019. Dentro del cual menciona que la evaluación de los docentes se lleva a cabo mediante un examen y a partir de estos resultados se colocan en un grupo de desempeño, siendo desde el grupo A al D, donde el A es el grupo de desempeño mayor y siendo el D, el menor. Además, brinda información de los docentes que no pasaron el examen, los cuales los clasifican en "no idóneos". Al revisar la información, específicamente en el examen de educación secundaria dentro de la especialidad de matemáticas, podemos observar que un 44.5 % de los docentes a ingresar, fueron no idóneos, es decir un total de 2415 docentes. Lo cual nos dice que casi la mitad de los docentes de matemáticas no cuenta con los conocimientos matemáticos necesarios y además disciplinares, para poder estar frente al aula, según las evaluaciones del CNSPD.

Ruiz (2008), menciona que el papel del docente es de vital importancia y por tanto se necesitan de docentes preparados para poder impartir las temáticas a los estudiantes, ya que en su documento concluye que la competencia del profesor de matemáticas es un aspecto esencial en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina, no solo es necesario el dominio del contenido matemático sino también el aspecto de la didáctica de la matemática. Por lo anterior, es importante que los futuros profesores se encuentren preparados para trabajar con sus estudiantes de manera que puedan lograr significados matemáticos más ricos.

Elementos teóricos

Para poder abordar una problemática en educación matemática dentro del aula, sabemos que es importante adoptar los elementos necesarios de un marco teórico, que guíe en la toma de decisiones al momento de diseñar, implementar y evaluar una tarea matemática, además de poder lograr cada una de las acciones planteadas.

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), es un sistema teórico para la investigación en educación matemática, cuyas categorías de análisis se pueden usar como herramientas para identificar y clasificar los conocimientos requeridos para la enseñanza de las matemáticas, y por tanto, para analizar los conocimientos puestos en juego por el profesor, (Godino, 2009).

Los elementos teóricos que se utilizan para el diseño, implementación y análisis de la propuesta, son retomados del EOS. En este trabajo consideramos algunos elementos teóricos que el EOS aporta, uno de ellos es el nivel de análisis sistema de prácticas, ya que en este trabajo es importante conocer las prácticas matemáticas que ponen de manifiesto los futuros profesores de educación secundaria en el tema de área de figuras compuesta al resolver situaciones problemas; del cual se deriva otra herramienta que utilizaremos del EOS, es decir el significado institucional de referencia, el cual a partir de lo que se promueve en el currículo y los libros de texto, se crea un significado sobre el objeto matemático que se está trabajando, en este caso área de figuras compuestas.

Otro elemento que se considera es el significado institucional pretendido**,** que es entendido por Godino, Batanero y Font (2009), como *"sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio"*, es decir las tareas que el docente considera dentro de su planeación en las actividades para enseñar a los alumnos el objeto matemático. Se considera también el nivel de configuración de objetos y procesos, ya que en él se centran los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas y también que emergen de ellas.

Y, por último, el EOS proporciona una herramienta para valorar la pertinencia de procesos de instrucción, desde su diseño, hasta su implementación, esta herramienta es la idoneidad didáctica, que se define como la articulación de

seis idoneidades parciales: epistémica, cognitiva, mediacional, afectiva, interaccional y ecológica (Godino, 2011), las cuales se explicaran a continuación, así como también la relación que tendrán a este trabajo:La idoneidad epistémica ayuda a saber que tanto se conoce respecto al significado del objeto matemático, es decir el conocimiento específicamente del tema "área de figuras compuestas", con respecto a lo que menciona el currículo.

La idoneidad cognitiva permite situar el conocimiento que tiene el estudiante con respecto al objeto matemático, así como también a donde debe dirigirse dicho conocimiento.

La idoneidad interaccional considera durante el proceso de llevar a cabo una tarea matemática, la interacción que se tienen entre alumnos-profesor y alumno-alumno para clarificar significados o bien para resolver la tarea matemática.

La idoneidad mediacional permite adecuar recursos para llevarse a cabo en el aula al momento de abordar una tarea, en este caso hablamos específicamente de juego geométrico, tangram y el uso de la herramienta GeoGebra.

Mediante la idoneidad afectiva, se puede llegar a interesar a los alumnos hacia las matemáticas, por ejemplo, mediante el uso de diferentes contextos, para así lograr captar la atención de los estudiantes, y la actitud hacia la materia pueda cambiar en esa tarea.

La idoneidad ecológica permite la relación con otros contextos extra matemáticos, así como también la relación que tiene el objeto con el currículo en este caso en el nivel de educación básica.

La idoneidad didáctica basada en el enfoque ontosemiótico, permite la elaboración del diseño de actividades que se pretenden realizar para la aportación del tema de área de figuras compuestas dirigido a estudiantes normalistas, a su vez, algunas idoneidades permiten un análisis para la evaluación mediante la implementación del diseño, que considera los indicadores propuestos por las mismas idoneidades.

Considerando el marco teórico presentado, se ha iniciado con la implementación de ciertas acciones metodológicas planteadas, con la finalidad de analizar e iniciar el diseño de actividades a partir de las herramientas que proporciona el EOS.

Acciones metodológicas

Con los objetivos planteados para este trabajo se pretende cumplir con la aportación de poder enriquecer las prácticas de los futuros profesores en educación secundaria en la especialidad de matemáticas. Para el logro de estos objetivos es importante plantear las tareas precisas que se deben realizar, es decir acciones metodológicas las cuales se presentan a continuación:

- Revisar el currículo y libros de texto de educación secundaria en matemáticas para conocer el significado que brindan sobre el tema área de figuras compuestas.
- Revisar libros, artículos o tesis para identificar definiciones, propiedades, procedimientos, problemas, argumentos, etc., apropiadas para estudiarse en el nivel de educación secundaria
- Revisar textos o documentos para identificar problemas que se puedan adaptar.
- Formular situaciones problema y tareas que sean apropiadas al nivel educativo de los futuros profesores y que para su solución se requiera de herramientas matemáticas relacionadas con el tema de interés.
- Seleccionar o diseñar material manipulable o applets necesarios para el desarrollo de las actividades planteadas, que permitan enriquecer la reflexión sobre los objetos matemáticos involucrados y la forma en cómo se relacionan.

- Realizar un análisis a priori de las actividades diseñadas
- Planificar la puesta en escena con los estudiantes normalistas.
    - Seleccionar y definir a los sujetos de estudio.
    - Diseñar instrumentos o recursos de apoyo para recabar datos.
- Implementar la propuesta
- Analizar los datos obtenidos de la implementación mediante herramientas adecuadas.

Avance de las actividades

Objetivo general: Promover la conservación de área para significar el tema de área de figuras compuestas.

Entendemos en este trabajo por conservación de área a la *"transformación que deja sin cambios la medida del área de una región. Significa que la medida de un área permanece sin cambios mientras las regiones de área correspondientes en el plano, pueden ser transformadas a otras cualitativamente nuevas…"* (Cabañas, 2011). La conservación de área puede presentarse de las siguientes maneras:

1. A partir del cambio de la posición de una figura sin modificar su forma
2. Movimientos de traslación, rotación y reflexión
3. Modificando una figura partiéndola y reacomodando sus partes
4. Mediante transformaciones analíticas y geométricas (Cabañas M., Cantoral R., 2005).

Del objetivo general de la propuesta, se derivan dos objetivos específicos, el primero; promover la habilidad de visualización a través de las situaciones.

Duval (2003), citado en Marmolejo y Vega (2005), menciona que, "la visualización es una actividad cognitiva compuesta por dos maneras de proceder sobre las figuras geométricas: una, la acción de discernir en una figura geométrica inicial (figura de partida) las transformaciones que permiten modificarla en otra (figura de llegada)".

Además, Gonzato, Godino y Contreras (2010), han mencionado que considerar esta habilidad dentro de las tareas matemáticas es muy importante, ya que en los libros de texto y en general en la enseñanza de la geometría, es una tarea frecuentemente omitida.

Y el segundo objetivo específico; promover el uso de las transformaciones geométricas en figuras compuestas. Es importante mencionar que en este trabajo se entiende por transformaciones geométricas a las que resultan de una o más operaciones sobre un polígono cualquiera, de las que se deriva uno nuevo (Cabañas 2011).

Las situaciones son presentadas mediante una secuencia didáctica la cual está organizada en tres etapas inicio, desarrollo y cierre. Además, se brindan espacios donde los estudiantes deben interactuar con el juego geométrico, el tangram y la herramienta de GeoGebra, para lograr una mejor reflexión de las situaciones problema. Para aportar a dicha secuencia, se consideran algunas estrategias didácticas como el trabajo en pares y de manera grupal, para retomar las conclusiones de las situaciones.

En las situaciones de inicio se pretende que el estudiante tenga un primer acercamiento con el objeto matemático de figuras geométricas compuestas, además de que construya la siguiente proposición, "la suma del área de las partes es igual al área de la figura total", siendo esta una característica del concepto de conservación de área que se está trabajando en esta secuencia.

En las situaciones de desarrollo el objetivo es promover la interacción con las figuras geométricas mediante transformaciones, donde la descomposición y la composición son procedimientos para la solución de situaciones problema de área de figuras compuestas.
Por último, en las situaciones de cierre el objetivo es promover la reflexión para la institucionalización del objeto matemático de área de figuras compuestas, mediante las siguientes proposiciones:

1. La suma del área de los polígonos que resultan de una descomposición, es igual al área de la figura total.
2. Bajo ciertas transformaciones geométricas dos figuras conservan su área.

A continuación, se muestra el avance de una de las situaciones problema, de la etapa de cierre.

El director de la escuela secundaria técnica 41 "Prof. Heriberto López", explicó a los estudiantes, que después de observar el terreno y asegurarse con el ayuntamiento para saber si es apropiado para un huerto cerca de la institución, se decidió iniciar con el plan, para futuras cosechas. Explicó además que un huerto en la escuela les permitirá aprender muchas cosas de un modo activo y agradable, por ello mostró a los estudiantes de la escuela el terreno que será dedicado para la huerta.

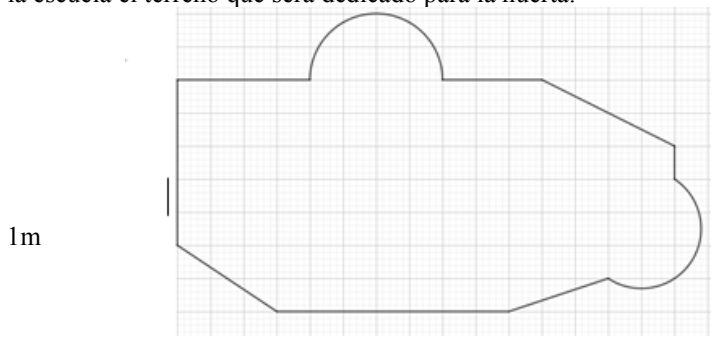


Figura 1. Terreno destinado para la huerta (Rivas, 2019)

La pregunta anterior, se presenta a los estudiantes con la finalidad de que brinden una estrategia para poder determinar la superficie total del huerto, utilizando la que consideraran más pertinente (donde se observa que interviene el concepto de área).

El director solicitó a los estudiantes que determinaran la cantidad de superficie que será utilizada para el huerto.

1. ¿Qué estrategia utilizaría usted para determinar el área del terreno? Explique detalladamente tu respuesta.

Además, para conocer, de qué manera están logrando visualizar la figura que representa el terreno, también que figuras logran identificar dentro de él, si es que lo realizan descomponiendo en otras figuras.

Para el siguiente punto, donde intervienen los procedimientos, se pretende que el alumno realice los cálculos pertinentes para poner en práctica su estrategia y brindar una solución.

2. A partir de la estrategia que propuso, determine el área del terreno para la huerta de la escuela (anota todos los procedimientos)".

Al encontrar la solución a partir de la estrategia que ellos propongan, se pretende que dichos procedimientos se compartan, con la finalidad de enriquecer la actividad.

3. Reúnete con otro compañero, para compartir los resultados que obtuvieron, así como las estrategias que utilizaron.
   a) ¿Qué figuras geométricas le resultaron a cada uno?
   b) ¿Qué dificultades enfrentaron?

Para poder responder las siguientes preguntas, se espera que el estudiante realice una reflexión de lo trabajado hasta el momento y logré argumentar sus respuestas.

4. Para las siguientes preguntas, responde de manera individual.
   a) Al comparar sus resultados, ¿coincidieron en la misma área del terreno? ¿Utilizaron la misma estrategia?
   b) ¿Obtuvieron las mismas figuras al calcular el área del terreno? Si no fue así, ¿a qué crees que se debe?

La siguiente pregunta pretende que el estudiante llegue a la proposición “la suma del área de los polígonos que resultan de una descomposición, es igual al área de la figura total”.

5. A partir de lo que realizaste y compartiste, ¿qué conclusión podrías brindar sobre la actividad?
   - Al concluir la actividad, compartan sus respuestas de manera grupal.

Por último, se incorporan cinco preguntas las cuales encaminan a una reflexión didáctica de la actividad.

Preguntas de reflexión:

- **Contesta de manera individual las siguientes preguntas:**

1. ¿Qué habilidades del área de Geometría, identifica que se están promoviendo?
   R: _____
2. ¿Qué dificultades considera se pueden presentar a un estudiante de secundaria al momento de tratar realizar la actividad?
   R: _____
3. Cómo profesor, ¿cómo ayudaría al estudiante para tratar de superar esas dificultades?
   R: _____
4. ¿Qué tipo de conclusiones crees que generarán los estudiantes de secundaria sobre la Actividad?
   R: _____
5. ¿Qué recomendarías para mejorar la actividad?
   R: _____

- **Al concluir, compartan de manera grupal sus respuestas.**

(Rivas, 2019)

Reflexiones

El proyecto se encuentra en la etapa de diseño de las actividades, la siguiente etapa corresponde a implementar dichas actividades con los futuros profesores de matemáticas, ya que como hemos mencionado es de suma importancia promover en ellos el estudio de los objetos matemáticos además de la reflexión didáctica, debido a que son ellos quienes van y promueven a las aulas de clase el aprendizaje a los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Cabañas, M. (2011). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico.

Cantoral R. y Cabañas M. (2005). Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas: el papel de la noción de conservación de área en la explicación escolar del concepto de integral. Recuperado de: http://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposIX/gidam/cabanascantoral.pdf

García y López (2008). La enseñanza de la geometría. Materiales para apoyar la práctica educativa. Instituto nacional para la evaluación de la educación (INEE). http://www.inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/Documentos/mapes/geometriacompletoa.pdf

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana De Educación Matemática, 11* (20), 13-31.

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Recuperado de:
https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf?fbclid=IwAR2Oj9mCA_J-FRNer7WaE0ciYJ-SD85cGlZgt5fCHzX0NSCzjzzojZr9

Godino, J., Batanero, C. y Font V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Recuperado de:
https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Gonzato, M., Godino, J., y Contreras, J. (2010). Análisis de los conocimientos puestos en juego en la resolución de tareas de visualización y orientación de cuerpos tridimensionales. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/geometria.html

Marmolejo, Gustavo; Vega, Myriam (2005). *Geometría desde una perspectiva semiótica: visualización, figuras y áreas*. En Luque, Carlos Julio (Ed.), Memorias XV Encuentro de Geometría y III encuentro de Aritmética (pp. 661-693). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Ruiz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. Revista Iberoamericana de Educación. Recupero de: file:///C:/Users/Downloads/2359Socarras-Maq%20(1).pdf

Secretaria de Educación Pública (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. México.

Secretaria de Educación Pública (2018). Coordinación Nacional del Servicio Profesional Docente. Recuperado de: http://servicioprofesionaldocente.sep.gob.mx/portal-docente-2014-2018/estadisticas/ingreso_ba_2018-2019_estadisticas_2.png

FACTORES DETERMINANTES DEL DESEMPEÑO DE LOS ALUMNOS EXTRANJEROS EN LAS CARRERAS DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ ARICA- CHILE

DETERMINING FACTORS OF FOREIGN STUDENTS` PERFORMANCE IN THE ENGINEERING DEGREES OF THE UNIVERSITY OF TARAPACÁ ARICA- CHILE

Norma Frisancho Quenta, Andrea Jiménez Veramendi, Álvaro Cortínez Pontoni
Universidad de Tarapacá (Chile).
normi981706@gmail.com, andrea09.carmenjv@gmail.com, acortinezp@academicos.uta.cl

Resumen
La Universidad de Tarapacá ha recibido en sus diferentes carreras a un total de aproximadamente 500 estudiantes extranjeros en los últimos 5 años. Ellos provienen principalmente de los países fronterizos, Perú y Bolivia. La percepción de parte de los profesores e, incluso, estudiantes, es que ellos vienen con una mejor preparación académica y obtienen mejores resultados. Sin embargo, al no existir estudios previos, no se ha hecho un seguimiento tanto de dichos resultados como de los factores que los determinan. El presente trabajo se centrará en los estudiantes de origen peruano que estudian alguna carrera de Ingeniería. Se tomarán como referencia las asignaturas de matemática. Se realizará un estudio exploratorio que pretende, en primer lugar, analizar si es cierta la premisa de que dichos estudiantes sobresalen en sus resultados académicos y, a continuación, busca los factores que inciden en su desempeño durante la carrera.

Palabras clave: estudiantes extranjeros, resultados académicos, ingenierías

Abstract
The University of Tarapacá has received in its different degree courses about five hundred foreign students in the last five years. They come mainly from Peru and Bolivia border countries. Teachers, and even students think they enter with a better academic training and obtain better results. However, in the absence of previous research, there has been no follow-up of both, the already mentioned results and the factors that determine them. The present work will focus on students of Peruvian origin who are studying a degree in Engineering. Mathematics subjects will be taken as reference. This paper will carry out an exploratory study aimed at analyzing first, if the premise that these students are very good in their academic results, is true; and then, looking for the factors that affect their performance during their engineering studies.

Key words: foreign students, academic results, engineering

Introducción

El mundo y su diversidad, es mucho más grande de lo que se dimensiona: conocer otras culturas, intercambiarlas y ser embajadores de su país, son experiencias enriquecedoras. Especialmente si se enmarcan en instancias de estudio, donde está la posibilidad de conocer otro ambiente académico, otra forma de organizarse e insertarse en otro sistema de educación.

La Universidad de Tarapacá está situada en una zona fronteriza desde Chile hacia Perú y Bolivia. Esto permite que haya tránsito continuo entre los tres países. En particular, la Universidad recibe estudiantes extranjeros en aproximadamente un 10% del total de estudiantes que ingresan anualmente, la mayoría de ellos desde la ciudad de Tacna, Perú. Dichos estudiantes se matriculan en las diferentes carreras que imparte la Universidad. Se ha observado que estos estudiantes suelen tener un mejor rendimiento académico, por encima de los estudiantes locales.

Por otra parte, son escasos los estudios relacionados que avalen cuales son los factores determinantes del buen desempeño de alumnos extranjeros que realizan sus estudios superiores. Los registros oficiales de la Universidad indican que el número de estudiantes extranjeros ha ido aumentando en los últimos años y, muy posiblemente, se mantenga esta tendencia, especialmente debido a los sistemas de becas e intercambios que hay en la actualidad.

Se ha realizado un estudio preliminar con los estudiantes de la Facultad de Administración y Economía, que cursan la carrera de Ingeniería Comercial, poniendo en el centro los resultados de las asignaturas de matemática y estadística de los últimos 5 procesos de admisión (2014-2018). Los primeros estudios destacan los excelentes resultados que los estudiantes extranjeros obtienen en su carrera, especialmente los provenientes de Perú. Se hace necesario, por lo tanto, ampliar el estudio a todos los estudiantes de ingeniería.

En este contexto, la investigación realizó un análisis exploratorio de los estudiantes extranjeros regulares desde las perspectivas de los mismos alumnos y desde el punto de vista de los profesores que les imparten las clases matemáticas, a través de una encuesta y focus group respectivamente. Para ello, fue importante evaluar su desempeño en base a sus notas de las asignaturas matemáticas y contrastarlo con las notas oficiales de los estudiantes locatarios. Todo ello, con el fin, de identificar los factores determinantes del desempeño de los extranjeros.

Indagación bibliográfica

En la investigación de las fuentes bibliográficas para el presente estudio son muy escasas las investigaciones que hacen referencias a los factores dentro de la etapa universitaria en Chile, a diferencia de las investigaciones en la etapa escolar. Por lo que se toma como revisión de la literatura a la recopilación de distintos estudios que hacen referencia a cada uno de los factores a estudiar, tales como: El factor aculturación, en el cual se analizan las estrategias aculturativas empleadas por un grupo de estudiantes extranjeros que habían migrado para realizar estudios universitarios en Argentina, cuyas variables a estudiar fueron adaptación psicológica, sociocultural, académica, la satisfacción vital y la discriminación percibida. Dicho estudio se realizó sobre la base del modelo Berry (Castro, 2011).

El factor "entorno académico" se presenta en el análisis de diversas variables entre ellas tenemos antecedentes académicos, género, beca, trabajo, opción en que se estudia una carrera, dificultad percibida, horas de estudio y motivación, entre otras. Las cuales se busca identificar qué tanto impactan en el rendimiento académico del estudiantado, en esta investigación se utilizaron datos recopilados de una encuesta realizados a 168 alumnos de la materia "Contabilidad financiera I" que se imparte en la Universidad de Santiago de Compostela. (Durán, P., Maside, J. M., Rodeiro, D., Cantorna, S., 2016) .

Dentro de este estudio, es necesario definir ciertos conceptos que serán utilizados, entre ellos tenemos:

1. Aculturación: Es el fenómeno psicológico primordial que tiene que enfrentar un estudiante extranjero. También es el proceso de cambio psicológico y cultural como resultado del contacto intercultural (Berry, 2003)
2. Cambios Culturales: Incluyen alteraciones en las costumbres y en la vida económica y política de los grupos en contacto.
3. Alumnos extranjeros regulares: El estudiante extranjero regular es aquel estudiante cuya nacionalidad (o nacionalidades) es distinta a la chilena, que está oficialmente registrado en un programa de estudio de pregrado, posgrado y/o postítulo impartido por una institución de Educación Superior en Chile, con el fin de obtener el título, grado o certificación correspondiente al programa que está cursando; diferenciando de aquellos que vienen de intercambio por un periodo de 6 meses a 1 año.

Contextualización de la investigación

Los países pertenecientes a la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo del Comercio) reciben aproximadamente 1.500.000 de estudiantes universitarios extranjeros que cursan una carrera de educación superior, entre ellos Estados Unidos ocupa el primer lugar, a este ranking le siguen en proporción Inglaterra, Alemania, Francia y Australia (Rodríguez, 2005).

En América Latina se recibe un flujo menor de estudiantes extranjeros a comparación con los otros países mencionados, dentro de los cuales Chile cuenta con 20.159 de los 1.247.746 del total de estudiantes matriculados en el 2017, también se ve evidenciado que los alumnos extranjeros tienen una variación al alza desde el 2014 al 2017, según el estudio realizado por el Servicio de Información de Educación Superior (SIES), de MINEDUC.

Año	2014	2015	2016	2017
Chilenos (as)	1.106.789	1.134.660	1.149.925	1.227.596
Extranjeros (as)	19.450	18.540	19.128	20.150
Matrícula total	1.126.239	1.153.200	1.169.053	1.247.746

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del informe extranjeros en Educación Superior, MINEDUC 2014, 2015, 2016 y 2017a.

En relación con el origen geográfico de los estudiantes extranjeros regulares, la mayoría de los matriculados en instituciones de educación superior (IES) en Chile provienen de América del Sur (76,5%). En esa línea, los estudiantes extranjeros vienen mayoritariamente de Perú (28,4%), Colombia (19,7%) y Ecuador (9,7%) (Guzmán y Muñoz, 2015).

En los niveles regionales de Chile, la Región Metropolitana es la que cuenta con más extranjeros matriculados en la Educación Superior, sin embargo, cabe destacar que las regiones Arica y Parinacota, Tarapacá, Antofagasta, Biobío y Valparaíso concentran el 22,8% del total de estudiantes extranjeros. (Ministerio de Educación, 2018).
En marco del presente estudio, la Universidad de Tarapacá ubicada en la Región de Arica y Parinacota, cuenta con 458 estudiantes extranjeros regulares, que en su mayoría son de procedencia Peruana representando un 57% del total de extranjeros.

Los estudiantes extranjeros regulares matriculados sólo en las carreras de Ingenierías durante el periodo 2014 al 2018 suman un total de 100 alumnos, los cuales son detallados en la tabla 2 según el país de origen:

País	2014	2015	2016	2017	2018	Total
Bolivia	7	2	11	7	9	36
Perú	6	6	15	9	17	53
Colombia	1	1			1	3
Ecuador	1			1	1	3
España		1				1
Argentina	1		1			2
Venezuela			1			1
Brasil				1		1
Total	16	10	28	18	28	100

Fuente: Elaboración propia a partir de la base de datos brindada por la Universidad de Tarapacá.

La Universidad de Tarapacá cuenta con un total de 7770 estudiantes matriculados (Índice de estudiantes matriculados en educación superior), de los cuales 458 son estudiantes extranjeros regulares.

En el ámbito de las asignaturas matemáticas, se presentan en Álgebra (9%), Álgebra I (11%), Álgebra II (5%), Álgebra lineal (4%), Cálculo I (18%), Cálculo II (9%), Cálculo III (3%), Estadística y Probabilidad (5%), Introducción al Álgebra (18%), Introducción al cálculo (17%).

Objetivos e hipótesis

En primer lugar, se quiere demostrar la Hipótesis 1 “Los estudiantes extranjeros tienen un mejor desempeño en las asignaturas matemáticas que los locatarios” Sabiendo que vienen con el fin de obtener el título, grado o certificación correspondiente al programa que está cursando.

En segundo lugar, una vez identificada la población total de los estudiantes extranjeros en las carreras de Ingeniería, se toma una muestra para identificar los factores que determinan el desempeño en las asignaturas de matemáticas.

Según la literatura investigada, se formularon las siguientes hipótesis:

1. Los Antecedentes Académicos son uno de los factores determinantes en el desempeño del estudiante extranjero.
2. El Entorno Familiar es uno de los factores determinantes en el desempeño del estudiante extranjero
3. La Aculturación es uno de los factores determinantes en el desempeño del estudiante extranjero.

Método

Se consideró realizar tres tipos de métodos para llegar al contraste de las hipótesis y la obtención de una conclusión general. Los procedimientos que se realizaron fueron la comparación de notas finales de los alumnos extranjeros y locatarios, respuestas subjetivas de los estudiantes extranjeros y la percepción de los profesores que imparten asignaturas matemáticas, sobre los alumnos extranjeros. A continuación, se presenta cada procedimiento:
Comparación de notas.

En este apartado, se recopiló de la base de datos de la Universidad de Tarapacá las notas de los alumnos de ingeniería que realizaron sus estudios en el periodo 2014 al 2018, analizando las notas de las asignaturas matemáticas de los estudiantes chilenos y peruanos, haciendo una comparación total de 7575 datos. En este sentido, el análisis está integrado por un total de 262 notas de peruanos y 7313 notas de estudiantes locatarios (chilenos).

De lo anterior, se analizaron las notas finales de cada grupo y el número de veces que necesitaron para aprobar (oportunidad de aprobación). Todo ello con el fin de evaluar su desempeño frente a los locatarios, para así confirmar o rechazar la premisa de que los estudiantes peruanos tienen un mejor desempeño académico que los estudiantes locatarios.

Encuesta a estudiantes peruanos

Según la base datos, la Universidad de Tarapacá cuenta con 53 estudiantes extranjeros de procedencia peruana que realizan un programa de ingeniería. Por lo que, se aplicó una encuesta a 28 estudiantes que contaban con las características pertinentes para este estudio.

a) Muestra

Se consideraron a 28 estudiantes extranjeros que provienen de Perú, que se encuentran cursando alguna de las carreras de Ingeniería de la Universidad de Tarapacá, en la Sede de Arica, Chile. Tomando en cuenta aquellos que terminaron la secundaria en alguna institución peruana y luego se trasladan a Arica, para realizar los estudios universitarios en el período del 2014 al 2018.

b) Variables

Asimismo, en la encuesta se consideraron las siguientes variables organizadas en 4 dimensiones: La primera corresponde a los antecedentes personales en donde se encuentra la variable demográfica, la segunda dimensión relaciona el entorno académico donde se encuentran las variables de conocimientos previos, alumnos con asignaturas reprobadas, beca BIT, satisfacción de la carrera, carga académica, asistencia a clases, dificultad percibida, horas de estudio, motivación y desempeño actual en la universidad; la tercera dimensión es sobre el apoyo familiar donde se posicionó las variables de interés familiar y formación académica de los padres, y por último se tiene la cuarta dimensión llamada aculturación que contempla las variables relaciones sociales en clase y cambios culturales.

Focus group

En este último apartado se consideró a los profesores de las asignaturas matemáticas como referentes para apoyar los resultados de la encuesta, ya que estos son los que interactúan con los estudiantes extranjeros regulares.

Se reunió a 5 profesores de la Facultad de Ciencias para saber sus percepciones sobre las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué piensan ustedes sobre el desempeño de los estudiantes de procedencia peruana? ¿Cómo lo calificaría? (Del 1 al 10)
b) Según sus calificaciones ¿Qué factores piensan que determinan el desempeño de dichos estudiantes?
c) ¿Ha percibido que algún estudiante de origen peruano no se adapta al sistema chileno? Si o no ¿Por qué?

Tipo de Estudio: Análisis mixto (cualitativo y cuantitativo) exploratorio.

Resultados

Comparación de notas.

Se realizó un análisis comparativo entre las notas finales de los estudiantes peruanos y chilenos, haciendo un análisis estadístico basándonos en el modelo t-student para comparar muestras independientes, el cual arrojó una significancia bilateral de 0.004. Esto indica que hay diferencia significativa entre los resultados académicos de los estudiantes peruanos y los locales. Cabe señalar, además, que la prueba de Levene indicó que las variabilidades de notas en ambos grupos son significativamente diferentes.

En cuanto a la comparación de medias de la "oportunidad de aprobación" de las asignaturas, se obtuvo que las medias no tienen una diferencia significativa a un nivel del 5%, es decir son iguales, pero sí al 6%.

Encuesta a estudiantes peruanos

Después de la recopilación de las encuestas, se analizó en cada dimensión cuales son las variables que destacaron e impactaron. A continuación, se mostrarán cada una de ellas con su frecuencia e interpretación.

Dimensión 1: antecedentes personales
a) Variable demográfica:

Tabla 1.

EDAD CON LA QUE INGRESA A LA UNIVERSIDAD				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	16,0	8	28,6	28,6
	17,0	14	50,0	78,6
	18,0	3	10,7	89,3
	19,0	2	7,1	96,4
	22,0	1	3,6	100,0
	Total	28	100,0	

La edad promedio con la que ingresaron a la universidad es de 17.14 equivalente a 17 años, además que según la tabla se visualiza que el 50% ingresó a la universidad con 17 años. De hecho, la gran mayoría (78.6%) de los estudiantes peruanos ingresó a la universidad siendo menores de edad.

Dimensión 2: Entorno Académico
a) Variable Conocimientos previos (Usted, siente que la formación académica que recibió en el colegio le ha ayudado a enfrentar la exigencia académica de la universidad).

Tabla 2

CONOCIMIENTOS PREVIOS PARA LA UNIVERSIDAD				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	De acuerdo	9	32,1	32,1
	En desacuerdo	2	7,1	39,3
	Ni de acuerdo ni en desacuerdo	4	14,3	53,6
	Totalmente de acuerdo	13	46,4	100,0
	Total	28	100,0	

En esta variable podemos observar que 22 alumnos están de acuerdo y totalmente de acuerdo (estas dos respuestas concentran el 78,5% del total) en que la formación académica que recibieron en el colegio les ayudó a enfrentar la exigencia académica de los estudios superiores. Se afirma, así, lo importante que es la formación académica que se les impartió en Perú sobre su buen desempeño universitario.

b) Variable beca BIT (¿Usted cuenta con la Beca de Integración Transfronteriza?

Tabla 3

BECA DE INTEGRACIÓN TRANSFRONTERIZA				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	No	12	42,9	42,9
	Si	16	57,1	100,0
	Total	28	100,0	

Con esta tabla podemos observar que 16 encuestados cuentan con la Beca de Integración Transfronteriza, la cual reafirma que tuvo un muy buen desempeño en el colegio. Por ende, ésta impacta en el buen desempeño de su desarrollo universitario.

c) Variable Dificultad percibida (¿Tuvo dificultad para aprobar las asignaturas matemáticas?)

Tabla 4

DIFICULTAD PERCIBIDA				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	No	17	60,7	60,7
	Si	11	39,3	100,0
	Total	28	100,0	

d) Variable Alumnos con asignaturas reprobadas

Tabla 5

ASIGNATURAS REPROBADAS				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	No	19	67,9	67,9
	Si	9	32,1	100,0
	Total	28	100,0	

e) Tabla de contingencia de las variables "Alumnos que reprobaron la asignatura de matemática y dificultad percibida"

Tabla 6

Tabla de contingencia DIFICULTAPRO * REPROBADOASIG				
Recuento				
		ASIGNATURA REPROBADA		Total
		No	Si	
DIFICULTAD PARA APROBAR	No	16	1	17
	Si	3	8	11
Total		19	9	28

Según los alumnos encuestados, la mayoría no tuvo dificultad en aprobar las asignaturas matemáticas. Sin embargo, vemos que a pesar de que no tienen dificultad se muestra que uno de ellos reprueba la asignatura.

Dimensión 3: APOYO FAMILIAR

a) Variable Interés familiar (Cuando usted se encontraba estudiando en su etapa escolar ¿Recibió apoyo u orientación de sus padres?)

Tabla 7

INTERÉS FAMILIAR				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	No	6	21,4	21,4
	Si	22	78,6	100,0
	Total	28	100,0	

Se observa que el 79% de los estudiantes tuvieron apoyo y orientación en sus estudios dentro de su etapa escolar, destacando la formación familiar que esta variable aporta a los alumnos.

Dimensión 4: ACULTURACIÓN

a) Variable Cambios culturales (¿Cuánto siente que se ha adaptado al sistema de enseñanza chileno?)

Tabla 8

NIVEL DE ADAPTACIÓN				
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Válidos	Medianamente suficiente	2	7,1	7,1
	Mucho	7	25,0	32,1
	Poco	2	7,1	39,3
	Suficiente	17	60,7	100,0
	Total	28	100,0	

Tabla 9

Tabla de contingencia CUANTOADAP * REPROBADOASIG				
Recuento				
		ASIGNATURAS REPROBADAS		Total
		No	Si	
NIVEL DE ADAPTACIÓN	Medianamente suficiente	2	0	2
	Mucho	6	1	7
	Poco	2	0	2
	Suficiente	9	8	17
Total		19	9	28

Se puede comprobar que el 85% de estudiantes se adapta de mucho a suficiente, al sistema de enseñanza chileno, sin embargo, al relacionarlo con las asignaturas matemáticas reprobadas se ve que existen 32% de alumnos reprobados a pesar de estar "suficientemente adaptados". Por lo tanto, el factor aculturación no es un factor influyente en el desempeño universitario de alumnos extranjero.

Focus group

Como resultados más relevantes del Focus Group, se observa que hay un consenso de que los estudiantes peruanos presentan un "buen y sobresaliente" desempeño, otorgándoles una calificación en promedio de 8, además de coincidir en que la formación escolar de Perú les brinda una "buena base". Señalaron que, el factor principal que determina el desempeño académico de los alumnos extranjeros son los Conocimientos previos o de la escolaridad.

Sin embargo, cada uno de ellos incluyó más factores diferentes que junto al primero promueven el buen desempeño académico. Algunos de ellos son:

a) "Desde mi opinión personal otro factor que influye es la formación de casa, ya que los hábitos de estudios se inician en el hogar orientado por los padres" (Susana Arela Pérez, profesora de matemática).
b) "En mi opinión, el desempeño de los alumnos extranjeros es sobresaliente. pienso que se debe a la formación previa, la responsabilidad dado por la formación familiar y la Motivación, con la que vienen a aprender, obtener buenas calificaciones y destacarse del resto del curso" (Hugo Bravo Azlan, Decano de la facultad). Él por su parte, nos acota el factor Motivación, que va acorde a la personalidad que posee cada uno de los estudiantes, manifestando que este es otro factor que impacta en el desempeño universitario.

Discusión

Como resultado preliminar, para comenzar el estudio, se evidencia que las notas finales de los extranjeros presentan una ligera diferencia, pero no lo suficientemente significativa. Sin embargo, es necesario resaltar que los estudiantes extranjeros que vienen a realizar sus estudios superiores a otro país, atraviesan distintos cambios como, por ejemplo, el salir de su "zona de confort", salir del núcleo familiar y social. Además, la mayoría de ellos ingresan aun siendo menores de edad, pero a pesar de dichos cambios, ellos no presentan un menor desempeño, sino todo lo contrario es similar a la de un locatario e incluso en algunos casos mejor y destacado.

Es una observación común de parte de los profesores de matemática que los estudiantes extranjeros, en particular los de origen peruano, tienen una formación preuniversitaria mucho más sólida que los chilenos. De hecho, no es raro observar que al realizar la Prueba de Diagnóstico de cada año destaquen precisamente los alumnos peruanos, lo cual les permite incluso convalidar las dos primeras asignaturas: Introducción al Álgebra e Introducción al Cálculo.

La mayoría de los estudiantes peruanos ingresan a la universidad siendo menores de edad. Por lo tanto, el apoyo familiar tiene un gran impacto en su desempeño académico en la Universidad de Tarapacá. A eso se suman los antecedentes académicos, los cuales de hecho los hacen elegibles para posibles becas o programas de cooperación. Sin embargo, el factor de aculturación no influye en la misma medida que los anteriores, a pesar de manifestar que están muy bien adaptados al sistema chileno y de esta Universidad.

Conclusiones

A la luz de los resultados obtenidos, los estudiantes extranjeros regulares presentan un promedio similar al de los locatarios, donde, además, se destaca que no se encuentran bajo la media del desempeño total universitario.

En cuanto a los factores, se evidencia que la formación académica escolar es la base para el buen desarrollo de su desempeño universitario, el hecho de pertenecer a una beca, brinda información anticipada de su buen desempeño; por otro lado, el factor apoyo familiar se manifiesta en la gran mayoría de estos estudiantes comprobando lo importante que es la orientación en la etapa escolar, que a largo plazo impacta en su desarrollo universitario.

Además, este resultado se complementa con la percepción de los profesores que interactúan con ellos en las asignaturas de matemáticas, que según sus apreciaciones manifiestan el desempeño destacable de los alumnos extranjeros.

Es importante realizar estudios de esta naturaleza, pues la cooperación entre países vecinos puede ser justificada e, incluso, incrementada, en base a los seguimientos de los programas que entre ellos existan.

El apoyo de organismos oficiales, en particular de la Agencia Chilena de Cooperación Internacional para el Desarrollo, para que estudiantes extranjeros de buen nivel académico puedan estudiar en la Universidad de Tarapacá ha sido un pilar fundamental en la captación de los mejores estudiantes asegurando su éxito en los estudios y futuro profesional.

Agradecimientos

El presente trabajo fue gracias a la colaboración financiera de la Agencia Chilena de Cooperación Internacional para el Desarrollo (AGCID), sin los cuales habría sido muy difícil su difusión.

Referencias bibliográficas

Berry, J.W. (2003). Conceptual approaches to acculturation. En K. Chun, P. BallsOrganista & G. Marin (Eds.), Acculturation: Advances in theory, measurement and applied research (pp. 17-37). Washington. DC: APA Press.

Castro, A. (2011). Estrategias de aculturación y adaptación psicológica y sociocultural de estudiantes extranjeros en la Argentina. *Interdisciplinaria*, 28(1), 115-130.

Durán, P., Maside, J. M., Rodeiro, D., Cantorna, S. (2016). Determinantes del rendimiento académico del alumnado de una asignatura de Contabilidad: el caso de la USC. REDURevista de Docencia Universitaria, 14(1), 151-178

Guzmán, F. Muñoz, D (2015) En Chile hay más de 26.000 extranjeros en la educación superior. La tercera. Recuperado el 21 de septiembre de 2015 de https://www.latercera.com/noticia/en-chile-hay-mas-de-26000-extranjeros-en-la-educacion-superior/

Índice de estudiantes matriculados en educación superior (sf) Recuperado de 23 de mayo de 2019 https://www.cned.cl/indices/matricula-sistema-de-educacion-superior

Ministerio de Educación (2018). *Informe Matrícula de estudiantes extranjeros en Educación superior en Chile.* Recuperado del Servicio de Información de Educación Superior: https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/1954/mono-703.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Rodríguez, R. (2005). Migración de estudiantes: un aspecto del comercio internacional de servicios de educación superior. Papeles de población, 11(44), 221-238.

PRAXEOLOGIAS QUE VIVEM ATUALMENTE NA EDUCAÇÃO BÁSICA NO BRASIL

PRAXEOLOGIES CURRENTLY PRESENT IN BASIC EDUCATION IN BRAZIL

José Valério Gomes da Silva; Marianna Bosch i Casabò; Marlene Alves Dias
Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco – SEE/PE (Brasil). Universitat Ramon Llull (España). Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN/SP (Brasil).
valerio.gomes@yahoo.com.br, marianna.bosch@iqs.edu, maralvesdias@gmail.com

Resumo
Trata-se de parte de pesquisa para a construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa. As relações institucionais foram analisadas por meio de uma grade fundamentada na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e no referencial teórico complementar da pesquisa. Apresentamos, neste extrato, praxeologias que vivem em uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental (6 -14 anos) no Brasil, envolvendo três tipos de tarefa em torno da relação entre as noções de área e de perímetro. Os resultados mostram que os tipos de tarefa identificados são insuficientes no sentido de garantir que os estudantes do nono ano compreendam a independência e a dissociação dessas duas grandezas.

Palavras-chave: área, perímetro, libro didáctico, Teoría Antropológica do Didáctico

Abstract
This is part of an investigation to build a study and research path. Institutional relations were analyzed through a grid based on the Anthropological Theory of Didactics, and on the complementary theoretical framework of the research. In this report, we show praxeologies included in a collection of Mathematics textbooks of basic education (6 -14 years old) in Brazil, which involves three types of tasks about the relation between the notions of area and perimeter. The results of this research show that the types of tasks identified are insufficient to ensure that ninth-grade students understand the independence and dissociation of these two concepts.

Key words: area, perimeter, textbooks, Anthropological Theory of Didactics

Introdução

Este estudo é parte da tese de doutorado de Silva (2016), mais especificamente, de um tópico do capítulo que reportou análises dos livros didáticos e de documentos oficiais envolvendo as noções de área, perímetro e suas relações em superfícies planas.

O objetivo deste artigo é apresentar praxeologias que vivem em duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental (6 -14 anos), sendo uma coleção dos anos iniciais (6 – 10 anos) e a outra dos anos finais (11 – 14 anos), envolvendo tipos de tarefa relativos à relação entre as noções de área e de perímetro.

Consideramos, neste estudo, como referencial teórico, as noções de relação institucional, segundo Chevallard (2007); de praxeologias a partir de Chevallard; Grenier (1997); as noções de ostensivos e não ostensivos, conforme Chevallard (1994); as noções de quadro e de mudança de quadro, segundo Douady (1992); e a noção de níveis de conceituação, conforme Robert (1997) e níveis de conhecimento esperado dos estudantes, à luz da definição de Robert (1998).

Na sequência, apresentamos brevemente elementos desses referenciais que nos auxiliaram no desenvolvimento da pesquisa.

Referencial teórico

Iniciamos observando que, segundo Chevallard (2007), a partir do momento em que um indivíduo X passa a ocupar determinadas posições nas instituições, ele se torna sujeito dessas instituições. Assim, ao se sujeitar a uma instituição I, o indivíduo X passa a ser sujeito dessa instituição, ou seja, ele irá manter, com determinado objeto O, a relação existente em I, e dessa maneira, o objeto O existirá para X sob a exigência da relação institucional R_I (O). Assim, para observar o nascimento ou a evolução de uma relação a um objeto, seja ela institucional ou pessoal, devemos observar o indivíduo ou a instituição em atividades nas quais eles ativam esse objeto, o que gera progressivamente as noções de tipo de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

A partir da consideração anterior, Chevallard (1997) buscou uma ferramenta que permitisse modelar com maior detalhe as práticas matemáticas, incluindo sua dimensão material, de forma que os saberes matemáticos fossem abordados como componentes inseparáveis das práticas.

Essa busca deu lugar à noção de organização praxeológica ou praxeologia, que corresponde a um marco no interior da Teoria Antropológica do Didático. A palavra "praxeologia" vem de *práxis,* que significa o bloco do saber fazer, composto pelo tipo de tarefa e a técnica, indicado por [T, □], e *logos,* que significa o bloco do saber, composto pela tecnologia e pela teoria, indicado por [□, □].

Assim, para o autor, uma das tarefas essenciais dos professores consiste em determinar, a partir das indicações fornecidas pelos programas oficiais, as organizações matemáticas a estudar, especificando, para cada uma delas, seu conteúdo preciso, a base dos tipos de tarefas matemáticas que elas contêm, assim como o grau de desenvolvimento a ser dado às componentes técnica, tecnológica e teórica.

Dizemos que uma tarefa (t) pertence a um tipo de tarefa (T), quando t faz parte de T. Uma tarefa ou um tipo de tarefa exprime-se por um verbo, o qual nos indica o gênero da tarefa. De acordo com Chevallard (1997), tarefas, tipos de tarefas, gêneros de tarefas são elementos que são reconstruídos em cada instituição específica, não sendo assim criados pela natureza.
Após expor as noções de tarefa, gênero de tarefa e tipo de tarefa, Chevallard (1997) ressalta que, para resolver uma tarefa (t) pertencente ao tipo de tarefa T, incluindo as problemáticas, é preciso construir uma técnica □□que

possibilite cumprir, realizar, efetuar, conduzir bem, sendo esta técnica reconhecida por uma determinada instituição. Desse modo, uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T contém, em princípio, pelo menos uma técnica relativa à T. Ela compõe o bloco chamado prático-teórico, que é uma maneira genérica de nomearmos o saber fazer formado pelo par [T, □].

A tecnologia □□tem a importante função de trazer elementos para modificar a técnica e ampliar seu alcance, superando suas limitações e possibilitando, em alguns casos, a produção de uma nova técnica. As tecnologias são afirmações mais ou menos explícitas, que precisam ser justificadas e explicitadas da mesma maneira que as técnicas, exigindo assim uma tecnologia da tecnologia, denominada por Chevallard (1997) de teoria, representada por □.

Chevallard (1994) esclarece ainda que toda atividade humana pode ser decomposta em determinado número de tarefas. Dessa forma, uma tarefa de determinado tipo pode apresentar-se como rotineira para aquele que a realiza, assim como a utilização de uma determinada técnica para executá-la. Mas essa técnica só será viável se for compreensível e justificável, o que necessita de um discurso específico, denominado tecnologia da técnica. Do mesmo modo, essa tecnologia deve ser compreensível e justificável, daí falar-se em tecnologia da tecnologia. Assim, a hierarquia técnica-tecnologia-teoria é relativa ao tipo de tarefa considerada.

Após revisitar a noção de praxeologia e mostrar a importância da técnica para o desenvolvimento de tarefas problemáticas, Chevallard (1994) apresenta as seguintes questões: de que é feita uma determinada técnica? De quais "ingredientes" ela é composta? Em que consiste a utilização de uma técnica? Para responder a estas questões, o pesquisador faz uma reflexão no sentido de que a observação da atividade humana leva a considerar uma distinção fundamental entre dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos.

Sob o prisma dessa reflexão, o pesquisador define os objetos ostensivos como aqueles que têm para nós uma forma material, sensível, mas também são considerados objetos ostensivos os gestos, as palavras, os esquemas e os formalismos. Como exemplos de ostensivos, o pesquisador apresenta:

- os *objetos materiais* (um lápis, um compasso, um *software*, entre outros);
- *os gestos*: ostensivos gestuais (por exemplo, quando resolvemos uma equaçãodo primeiro grau e isolamos x e as constantes de modo que cada um deles deve ficar num determinado membro em relação à igualdade);
- *as palavras*, e mais genericamente, o discurso: ostensivos discursivos;
- *os esquemas*, desenhos, grafismos: ostensivos gráficos;
- *as escritas e formalismos*: ostensivos escriturais.

Chevallard (1994) introduz ainda a noção de objetos não ostensivos, que equivalem ao que usualmente denominamos noções, conceitos, ideias etc. Em função de sua definição, os objetos não ostensivos não podem ser manipulados, eles somente podem ser evocados por meio da manipulação dos objetos ostensivos que lhes são associados. Como exemplo, podemos considerar que dado um retângulo, ao determinar o seu perímetro, dizemos que o mesmo corresponde à medida do contorno da figura ou que dadas as medidas de seus lados, basta somá-las. Só podemos compreender o que se pede, se dispusermos do objeto ostensivo linguajar perímetro. Além disso, para executar a ação correspondente, é preciso dispor de objetos ostensivos escriturais adequados e efetuar as ações indicadas. Assim, para resolver a tarefa proposta, é necessário dispor de certo número de objetos não ostensivos (entre eles, a noção de perímetro) e de um sistema de objetos ostensivos articulados a estes objetos não ostensivos.

Após essa breve apresentação das noções da TAD que utilizamos para este extrato de pesquisa, consideramos as noções de quadro e mudança de quadros, segundo definição de Douady (1992). Observamos inicialmente que a autora define objeto matemático como parte de um edifício mais amplo, que é o saber matemático, sendo estes objetos que constituem o que ela denomina quadro, a saber:

> [...] um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas (Douady, 1992, p.135).

A partir da definição de quadro, salientamos que os quadros considerados nesta pesquisa são: o quadro geométrico, o quadro das grandezas e o quadro numérico, definidos por Douady e Perrin-Glorian (1989), ou seja, o quadro numérico é aquele que contém os números reais não negativos decorrentes das medidas de comprimento (contornos) e de área, por exemplo: o resultado numérico da contagem de quadrados que contém uma região retangular, o quadro geométrico é aquele para o qual é dada a figura por meio do objeto ostensivo figural ou do objeto ostensivo escritural (nome da figura), por exemplo: na representação de uma região retangular numa malha quadriculada, o quadro das grandezas é aquele que contém as grandezas comprimento (contornos das figuras planas), área e suas relações, as quais serão expressas pelo par (número, unidade de medida), por exemplo: o resultado do cálculo da área de uma região retangular de 3 metros de comprimento e 6 metros de largura que é 3 m x 6m = 18 m^2. Enfatizamos ainda que foi necessário, para a identificação das praxeologias existentes e para as análises, considerar também o quadro algébrico: o que contém as fórmulas para os cálculos de área e de perímetro.

Ao considerar os quadros acima, parece-nos importante pontuar que Douady (1992), ao propor a abordagem teórica em termos de quadros e mudanças de quadros, transpõe para a Didática da Matemática a forma de trabalho dos matemáticos. Para tanto, ela explicita que a mudança de quadros é uma maneira de obter diferentes formulações de um problema que não são necessariamente equivalentes, propiciando um novo acesso às dificuldades encontradas e à implementação de ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação. A autora explica ainda que quaisquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas conduzem quase sempre a resultados desconhecidos, a novas técnicas, à criação de novos objetos matemáticos, ou seja, conduzem ao enriquecimento do quadro original e de quadros auxiliares de trabalho.

A noção de mudança de quadros é transposta para a didática por meio dos jogos de quadros que são organizados pelos professores como meios privilegiados de suscitar, ao mesmo tempo, desequilíbrios cognitivos e possibilitar a ultrapassagem desses desequilíbrios por meio de reequilibrações de nível superior.

Apresentamos, a seguir, as noções de níveis de conceituação e níveis de conhecimento esperados dos estudantes, conforme definição de Robert (1997, 1998). Essas noções auxiliaram-nos a compreender quais os níveis indicados para serem desenvolvidos no Ensino Fundamental, uma vez que os níveis de conhecimentos são relativos ao nível de conceituação escolhido para a apresentação do campo conceitual das grandezas e medidas, pois, de acordo com Robert (1997), os níveis de conceituação são os marcos a serem identificados ao longo do ensino de determinado campo conceitual, o que conduz a diferentes escolhas para a apresentação dos objetos desse campo.

À luz dessas noções, compreende-se melhor a questão do ensino, da utilização e da transposição institucional proposta para o desenvolvimento do saber associado às noções de área, perímetro e suas relações, em particular, quando se consideram as duas coleções de livros didáticos do mesmo autor, avaliados e indicados pelo Ministério da Educação do Brasil para serem utilizados no Ensino Fundamental - anos iniciais (alunos de 6 – 10 anos) e Ensino Fundamental - anos finais (alunos de 11 – 14 anos) nas escolas brasileiras e que foram analisadas nesta pesquisa para a identificação das praxeologias existentes.

O estudo dos níveis de conhecimento esperados dos estudantes em torno das noções de área, perímetro e suas relações, concorreu para a compreensão das propostas institucionais e, consequentemente, para identificar os conhecimentos sobre essas noções que os estudantes poderiam mobilizar.

Robert (1998) estabelece os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, a saber: o nível técnico, o nível mobilizável e o nível disponível.

A autora considera que essa classificação é uma ferramenta de análise útil para dimensionar as possibilidades de os estudantes desenvolverem determinadas tarefas matemáticas em função do ensino que seguiram ou que se espera que tenham seguido.

O *nível técnico* é aquele em que é possível funcionar de maneira isolada, local e concreta, ou seja, aquele em que se utilizam as ferramentas implícitas e explícitas, em particular, as definições. Consoante a pesquisadora, esse nível, em geral, corresponde ao que é exigido no *collège* (estudantes de 11 a 14 anos) na França, equivalente ao nosso Ensino Fundamental - anos finais no Brasil. Como exemplo, consideramos a tarefa: Calcular a área de um quadrado de lado 3m por meio da fórmula $A = l^2$.

O *nível mobilizável* refere-se a um início de justaposição de saberes de determinado quadro, onde vários métodos podem ser mobilizados. Por exemplo, se um saber é identificado, ele é considerado mobilizável se ele é acessível, isto é, se o estudante o utiliza corretamente. Nesse nível, o conhecimento em jogo é explicitado no enunciado. Exemplo: Determinar a área de um quadrado de lado 3m por ladrilhamento, com ladrilhos quadrados de lado 1m.

O *nível disponível* é muito próximo do nível mobilizável; a diferenciação entre eles é o fato de que, nesse nível, é preciso saber resolver o que é proposto sem indicações, de poder, por exemplo, dar contraexemplos (encontrar ou inventar), mudar de quadros (relacionar), aplicar métodos não previstos. O estudante, neste nível, resolve um problema proposto sem nenhuma sugestão do professor, isto é, são atividades que, em geral, podem solicitar a procura de contraexemplos ou mudanças de quadro sem indicação do professor.

Esse nível está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, que o estudante sabe que detém, ou seja, elas servem de terreno de experimentação. Essas situações de referência devem favorecer a que o estudante questione o que está sendo proposto, organize seus conhecimentos de modo a poder utilizá-los quando necessário, ou ainda, possa propor para si novos problemas ou fazer resumos. Exemplo: Uma piscina tem 8 m de comprimento, 4 m de largura e 1,2 m de profundidade. Deseja-se colocar azulejos quadrados de 0,2 m de lado nas paredes laterais e no fundo da piscina. Quantos azulejos serão necessários? (disponível em http://docentes.ifrn.edu.br/marcelosilva/disciplinas/ matemática).

Metodologia da pesquisa

Coerentemente com seu quadro teórico e objetivo, a metodologia está centrada na análise da abordagem institucional por meio do estudo de duas coleções de livros didáticos do mesmo autor, um para cada etapa escolar, isto é, um para o Ensino Fundamental - anos iniciais (alunos de 6 a 10 anos) e outro para o Ensino Fundamental - anos finais (estudantes de 11 a 14 anos). A escolha dos livros deve-se ao fato de que eles foram avaliados e indicados pelo Ministério da Educação do Brasil e que, por serem do mesmo autor, seguem uma apresentação coerente entre as duas etapas escolares consideradas. Além disso, são utilizados em diversas escolas brasileiras.

Trata-se, portanto, de uma pesquisa qualitativa segundo Lüdke e André (2013), cuja técnica é a da pesquisa documental, uma vez que analisa fontes escritas como base da investigação, considerando documentos contemporâneos cientificamente autênticos.

Neste extrato de pesquisa, consideramos os seguintes documentos: as coleções de livros didáticos de Dante (2011, 2012), destinados aos cinco anos do Ensino Fundamental - anos iniciais e aos quatro anos do EnsinoFundamental - anos finais, respectivamente. Trata-se de documentos contemporâneos cientificamente autênticos, que foram escolhidos por terem sido as mais adotados em todo o Brasil, segundos dados do Ministério da Educação.

Na análise dos nove livros de Dante, que abrangem os nove anos do Ensino Fundamental (alunos de 6 a 14 anos), buscamos identificar três tipos de tarefa envolvendo a relação entre a noção de área e de perímetro: (T_1) - Calcular o perímetro de uma região plana quadrada, sabendo sua área e vice-versa; (T_2) - Estimar a medida dos lados, e/ou da altura, e/ou das diagonais de figuras planas para que tenham a mesma área e perímetro diferentes e vice-versa; (T_3) - Comparar os perímetros e as áreas de figuras planas, por serem os tipos de tarefa mais comuns em outras coleções de livros didáticos no Brasil.

Para a análise desses livros didáticos, construímos uma grade de análise seguindo o modelo de Dias (1998). Nessa grade, utilizamos a noção de praxeologia, identificando o tipo de tarefa e as tarefas associadas a esse tipo para, na sequência, coligar com as técnicas e tecnologias apresentadas nos livros analisados, observando ainda quais as teorias que justificavam as tecnologias observadas. Analisamos ainda os objetos ostensivos e não ostensivos necessários para a resolução da cada tarefa, assim como os quadros em que a tarefa é enunciada e resolvida, o que indica a necessidade ou não de mudança de quadros e, finalmente, consideramos ainda o nível de conhecimento esperado dos estudantes em relação aos seus conhecimentos prévios e aos novos conhecimentos. Exemplos da aplicação da grade de análise são apresentados na seção dos resultados para as três tarefas consideradas.

Para as praxeologias identificadas, construímos uma tabela para cada livro da coleção, identificando, para cada ano, quais tipos de tarefa eram tratados e para qual(ais) desses tipos de tarefa era dada ênfase, observando aqui que, nessa contagem, estão incluídas as tarefas resolvidas e propostas. Neste extrato, apresentamos nos resultados parte da tabela, considerando apenas os três tipos de tarefas anteriormente anunciados.

Nos resultados apresentados a seguir, como já ressaltado, encontramos exemplos que mostram como os dados foram obtidos, assim como da forma como foram analisados.

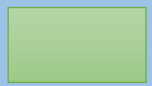
Resultados

Como já anunciado, a organização das análises deu-se a partir do modelo de grade de análise, segundo modelo de Dias (1998), com o objetivo de ser uma ferramenta que possibilitasse a identificação das relações institucionais existentes nos livros analisados.Nos exemplos das figuras de 1 e 3, encontramos tarefas que atendiamàs nossas expectativas e optamos por apresentar a tratada no 9° ano para o tipo de tarefa T_1 e no 6° ano para a tarefa T_2, encontradas no livro de Dante (2012). Na figura 2, apresentamos o tipo de tarefa esperada que nãofoiidentificada nas obras analisadas, o que parece indicar que se trata de uma tarefa problemática que coloca dificuldades para os estudantes, uma vez que é preciso utilizar um método, em geral, pouco aplicado na escola brasileira, que é o da tentativa, pois, para o estudo das grandezas e medidas, a ênfase ainda é dada à aplicação das fórmulas.

Tipo de Tarefa 1 (T_1): Calcular o perímetro de uma região plana quadrada, sabendo sua área e vice-versa.	
Exemplo (Dante (2012), 9º ano, p. 302, questão 26 a)): Calcule e responda em seu caderno: a) se uma região quadrada tem área de 36 cm^2, qual é o seu perímetro?	
Técnicas (τ):	τ_{11}: encontrar a medida do lado do quadrado, utilizando a fórmula do cálculo da área do quadrado e determinar seu perímetro por adição dos quatro lados ou pela multiplicação por quatro, ou seja, utilizando a definição de perímetro.

	τ_{12}: encontrar a medida do lado do quadrado, utilizando a fórmula do cálculo da área do quadrado, em seguida utilizar a fórmula para determinar o perímetro do quadrado dado.
Tecnologia (θ):	(τ_{11}) noção de área do quadrado por meio de sua representação algébrica (fórmula) enoção de perímetro do quadrado por meio de sua definição. (τ_{12}) noção de área do quadrado por meio de sua representação algébrica (fórmula) enoção de perímetro do quadrado por meio de sua representação algébrica (fórmula).
Teoria (Θ):	domínio das grandezas e medidas, dos números e da geometria plana.
Objetos Ostensivos:	- dados no enunciado da tarefa: ostensivos discursivo, escritural e numérico. - manipulados na solução da tarefa: algébrico e numérico.
Objetos Não Ostensivos:	evocados na solução da tarefa: (τ_{11}) noção de área do quadrado por meio de suarepresentação algébrica (fórmula) e noção de perímetro do quadrado por meio desua definição. (τ_{12}) noção de área do quadrado por meio de sua representação algébrica (fórmula) enoção de perímetro do quadrado por meio de sua representação algébrica (fórmula).
Quadro(s):	- em que a tarefa é enunciada: quadro geométrico e numérico. - em que a tarefa é resolvida: quadro geométrico, numérico e algébrico.
Níveis de conhecimento esperados dos estudantes:	- mobilizável em relação às noções de perímetro e de área, suas respectivasrepresentações algébricas e a definição de perímetro. - disponível para as noções de números reais, suas operações e propriedades.

Figura1: Exemplo da Grade de Análise para T_1.
Fonte: Silva (2016).

Tipo de Tarefa 2 (T_2): Estimar a medida dos lados, e/ou da altura, e/ou das diagonais de figuras planas para que tenham a mesma área e perímetro diferentes e vice-versa.	
Exemplo (Silva (2016)): Estime as medidas dos lados de um quadrado e de um retângulo de forma que tenham a mesma área e perímetros diferentes. Área = a cm^2 Perímetro = b cm Área = a cm^2 Perímetro = c cm 	
Técnicas (τ):	τ_{21}: construir uma tabela com medida de comprimento, largura, área e perímetro para identificar os que satisfazem as condições da questão. Calcular o perímetro e a área por meio de suas respectivas fórmulas. Comparar os resultados.
	τ_{22}:construir uma tabela com medida de comprimento, largura, área e perímetro para identificar os que satisfazem as condições da questão. O cálculo da área é realizado por meio de sua fórmula e o cálculo do perímetro por meio da definição

	(contorno). Comparar os resultados.
Tecnologia (θ)::	(τ_{21}) noções de comprimento, largura e sobre as fórmulas de área e perímetro de quadrados e retângulo; noções de números reais, suas operações e propriedades. (τ_{22}) noções de comprimento, largura, sobre a fórmula de área de quadrados e retângulos e sobre a definição perímetro de quadrados e retângulos; noções de números reais, suas operações e propriedades.
Teoria (Θ):	domínio das grandezas e medidas, da geometria plana e dos números.
Objetos Ostensivos:	- dados no enunciado da tarefa: ostensivos discursivo, escritural e numérico. - manipulados na solução da tarefa: ostensivos gráfico, algébrico e numérico.
Objetos Não Ostensivos:	evocados na solução da tarefa: (τ_{21}) noções de comprimento, largura e sobre as fórmulas de área e perímetro de quadrados e retângulos; noções de números reais, suas operações e propriedades. (τ_{22}) noções de comprimento, largura, sobre a fórmula de área de quadrados e retângulo e sobre a definição perímetro de quadrados e retângulos; noções de números reais, suas operações e propriedades.
Quadro(s):	- em que a tarefa é enunciada: quadro numérico. - em que a tarefa é resolvida: quadro geométrico, numérico e algébrico.
Níveis de conhecimento esperados dos estudantes:	- mobilizável em relação às noções de comprimento, largura, perímetro e área de quadrados e retângulos e suas respectivas representações. - disponível em relação aos números reais, suas operações e propriedades.

Figura 2: Exemplo da Grade de Análise para T_2.
Fonte: Silva (2016).

Tipo de Tarefa 3 (T_3): Comparar os perímetros e as áreas de figuras planas.	
Exemplo (Dante (2012), 6º ano, questão 45, p.265): Em seu caderno, construa e pinte de azul uma região retangular de 10 cm por 4 cm. Em seguida, desenhe e pinte de amarelo uma região retangular com as seguintes características: sua área corresponde a 60% da região azul e seu perímetro é igual ao da região azul.	
Técnicas (τ):	τ_{31}: representar por um desenho a região retangular azul indicada no enunciado e determinar sua área e seu perímetro. Na sequência, calcular 60% da área encontrada e utilizar o perímetro do retângulo azul. Determinar os lados do retângulo amarelo por tentativas, partindo de um determinado valor para os lados, utilizando a fórmula para o cálculo da área e a definição para o cálculo do perímetro. (6º ano)
	τ_{32}: representar, por um desenho, a região retangular azul indicada no enunciado e determinar sua área e seu perímetro. Na sequência, calcular 60% da área encontrada e utilizar o perímetro do retângulo azul. Determinar os lados do retângulo amarelo por tentativas, utilizando suas fórmulas. (6º ano)

	τ_{33}: representar por um desenho a região retangular azul indicada no enunciado e determinar sua área e seu perímetro por meio da fórmula. Na sequência, calcular 60% da área encontrada e utilizar o perímetro do retângulo azul. Construir um sistema não linear de duas equações e duas incógnitas e resolvê-lo. (9º ano)
Tecnologia (θ):	τ_{31}: noções de retângulo, de área de retângulo e sua fórmula, da definição de perímetro de retângulo, de porcentagem, de números reais, suas operações e propriedades. τ_{32}: noções de retângulo, de área de retângulo e de perímetro de retângulo e suas fórmulas, de porcentagem, de números reais, suas operações e propriedades. τ_{33}: noções de retângulo, de área de retângulo e de perímetro de retângulo e suas fórmulas, de porcentagem, de números reais, suas operações e propriedades, de sistemas não lineares com um método de resolução do mesmo.
Teoria (Θ):	domínio das grandezas e medidas, dos números, da álgebra e da geometria plana.
Objetos Ostensivos:	- dados no enunciado da tarefa: ostensivos discursivo, escritural e numérico. - manipulados na solução da tarefa: ostensivos algébrico, numérico e geométrico.
Objetos Não Ostensivos:	Evocados na solução da tarefa: τ_{31}: noções de retângulo, de área de retângulo e sua fórmula, da definição de perímetro de retângulo, de porcentagem, de números reais, suas operações e propriedades. τ_{32}: noções de retângulo, de área de retângulo e de perímetro de retângulo e suas fórmulas, de porcentagem, de números reais, suas operações e propriedades. τ_{33}: noções de retângulo, de área de retângulo e de perímetro de retângulo e suas fórmulas, de porcentagem, de números reais, suas operações e propriedades, de sistemas não lineares com um método de resolução do mesmo.
Quadro(s):	- em que a tarefa é enunciada: quadro numérico. - em que a tarefa é resolvida: quadro geométrico, numérico e algébrico.
Níveis de conhecimento esperado dos estudantes:	- mobilizável em relação às noções de perímetro e de área e suas respectivas fórmulas, de porcentagem e de números reais, suas operações e propriedades para as três técnicas. Para τ_{31},é preciso ainda considerar a definição de perímetro. Para τ_{33},é preciso ainda considerar a noção de sistema não linear e um método de resolução para esse sistema. - disponível em relação aos números reais, suas operações e propriedades e, para τ_{33},é preciso dispor da noção de sistema não linear e de um método para sua resolução.

Figura 3: Exemplo da Grade de Análise para T_3.
Fonte: Silva (2016).

Neste artigo, apresentamos apenas os resultados associados aos três tipos de tarefas anteriormente descritas. Essa escolha está conectada aos tipos de tarefa usuais associadas à relação entre a noção de perímetro e a noção de área, em queessas noções são tratadas como objeto de estudo, no sentido de Douady (1992), segundo característica da abordagem indicada pelo autor do livro didático considerado. Mesmo sabendo que se trata de duas noções dissociadas, identificar tipos de tarefas que expressem a relação entre elas pode contribuir na construção da independência entre as noções de área e perímetro, pois muitos estudantes consideram que aumentar ou diminuir uma corresponde ao mesmo efeito na outra, o que constatamos por meio de pesquisas publicadas envolvendo essas noções.

Ressaltamos ainda que os três tipos de tarefa identificados e apresentados anteriormente não estavam distribuídos nos nove anos do Ensino Fundamental (EF) da Educação Básica no Brasil (6 – 14 anos), como mostra a figura 4.

LIVRO DIDÁTICO (LD)	TIPOS DE TAREFA (T)		
	T_1	T_2	T_3
1º ano	-	-	-
2º ano	-	-	-
3º ano	-	-	-
4º ano	01	-	01
5º ano	-	-	-
6º ano	03	-	01
7º ano	-	-	-
8º ano	01	-	06
9º ano	01	-	01
Total	06	00	09

Figura 4: Distribuição dos Tipos de Tarefa em Dante (2011, 2012).
Fonte: Silva (2016).

Observando a distribuição dos tipos de tarefas nos nove anos do Ensino Fundamental exposta na figura 4, verificamos que ela se apresenta de forma insuficiente no sentido de garantir que os estudantes do 9º ano (final do Ensino Fundamental) compreendam a independência das grandezas área e perímetro, uma vez que no 1º, 2º, 3º, 5º e 7º anos não identificamos o tipo de tarefa de relação entre área e perímetro; já nos 4º, 6º, 8º e 9º anos, identificamos apenas 15 tipos de tarefas que foram classificadas como T_1 ou T_3; enquanto o tipo de tarefa que envolve o gênero de tarefa "Estimar" representado por (T_2) não foi discutido pelo autor nos livros didáticos analisados, como já havíamos exposto anteriormente.

Mesmo as tarefas de tipo T_1 e T_3 são pouco trabalhadas.Ao observarmosos dados da figura 4, apenas no 6º ano são tratadas três tarefas de tipo T_1, que são revisitadas brevemente no 8º ano, o que acreditamos ser insuficiente para compreender as situações de medida e comparação apresentadas por Baltar (1996). O mesmo ocorre para o tipo de tarefa T_3, cujo tratamento inicia-se no 4º e 6º anos, voltando a ser considerada importante no 8º ano, mas sendo praticamente abandonada no 9º ano, uma vez que encontramos apenas uma tarefa, ou seja, uma rápida revisita,que pode não indicar a importância de seu estudo.

Nos livros do 1º ao 3º ano, não foram encontrados tipos de tarefas T_1, T_2 e T_3. As situações envolvendo a relação entre as grandezas área e perímetro no livro didático do 4º ano (alunos de nove anos) não são representativas, concentrando o trabalho em situações de medida e de comparação no sentido de Baltar (1996), mas podemos considerar como um início do trabalho a ser desenvolvido, ou seja, que nesselivro didático é valorizada a importância da independência entre as duas grandezas.Não identificamos situações de produção, no sentido de Baltar (1996), envolvendo a relação entre as grandezas área e o perímetro neste mesmo livro. Nesta ocasião, já seria possível propor o tipo de tarefa: construir, em uma malha quadriculada, uma figura plana com a mesma área da figura dada e com o perímetro maior que o perímetro desta figura.

Ainda nesse livro didático, as técnicas que prevaleceram nas situações envolvendo as grandezas área e/ou perímetro são: ladrilhamento de figuras, determinação da área ou do perímetro a partir de malhas, utilizando contagem de quadrados ou dos lados do quadrado, sendo justificadas pelos seguintes elementos tecnológico-teóricos: características e propriedades das figuras planas, operações com números racionais e a medição das grandezas inseridas nos domínios das grandezas e medidas; da geometria plana e dos números racionais. As situações que nos interessam apresentaram-se, em sua maioria, por meio dos objetos ostensivos discursivo e figural e, para a solução das mesmas, era necessária uma articulação entre os quadros numérico, geométrico e das grandezas. Por se tratar da etapa de introdução dos primeiros conceitos e de noções matemáticas, assumimos que as tarefas propostas se encontram no nível mobilizável, já que é preciso pedir explicitamente o que deve ser calculado, o que consideramos adequado.

No 5º ano, não foram encontrados tipos de tarefasT_1, T_2, T_3 e as tarefas associadas à relação entre as noções de área e perímetro identificadas na obra de Dante (2012) do 6º ano (alunos de 11 anos) estão presentes em apenas quatro atividades propostas aos estudantes, ou seja, esta relação, apesar de se mostrar agregada àocasião do primeiro encontro, é deixada sob a responsabilidade do professor e dos estudantes.

O livro didático analisado não tem como foco as situações que propõem a relação entre as noções de área e de perímetro; talvez esta relação seja desenvolvida nos anos posteriores ao sexto ano, o que justificaria delegar aos estudantes a exploração do tipo de tarefa e de elaboração de uma técnica. Estas situações sãotrabalhadas de forma tímida apenas no 4º ano do EF - anos iniciais.

É importante sublinhar que o estudo dessa relação, considerando as diferentes possibilidades de estudo, em particular, a institucionalização, pode auxiliar os estudantes na dissociação entre as noções de área e perímetro, que equivale a uma dificuldade já apontada pelos estudos de Melo (2003), Barros (2006), Ferreira (2010), entre outras pesquisas.

No 7º ano, não foram encontrados tipos de tarefas T_1, T_2,T_3 e, no livro didático do 8º ano (alunos de 13 anos), foram identificados sete tipos de tarefa envolvendo a relação de área e de perímetro, nos quais o foco continua sendo direcionado a situações de medida e de comparação. Não encontramos nesse livro, Dante (2012), situações deprodução envolvendo as grandezas área e perímetro em um único objeto, por exemplo, *construir uma figura plana numa malha quadriculada com a mesma área e perímetro menor que a figura dada em uma malha com o mesmo quadriculado.* Observamos aqui que esta proposta poderia favorecer a distinção entre as duas grandezas geométricas.

Constatamos também que o livro didático do 9º ano (alunos de 14 anos) não amplia a apresentação de situações envolvendo a relação das grandezas em estudo, delegando ao professor a complementação do ensino desse conteúdo com outras situações. Já que o 9º ano é o último ano do Ensino Fundamental, entendemos que os estudantes teriam condições de compreender as noções de área e perímetro, podendo aplicá-laspor meio de tipos de tarefas mais amplos, que considerassem situações de relação entre as duas grandezas. Contudo, ao longo do livro do 9º ano, constamapenas duas situações condizentes com essa abordagem.

Algumas considerações

Acreditamos que um estudo mais intenso em torno da relação entre as noções de área e de perímetro nosseis anos do Ensino Fundamentalfavoreceria a compreensão da independência dessas grandezas, uma vez que iniciar o estudo dessa relação no 4º ano é considerado adequado.

A análise dos livros de Dante (2011, 2012) nos leva a refletir que, como sabemos, nas escolas brasileiras, o livro didático tem um papel muito importante, posto que é avaliado e distribuído pelo Ministério da Educação do Brasil. Sendo assim, podemos supor que muitos professores sintam segurança em propor seus planos de curso seguindo o livro adotado, o que lhes possibilita desenvolver suas aulas discutindo apenas o que é apresentado no livro didático, sem se questionar sobre a importância da relação entre área e perímetro. Daí pode decorrer o fato de, por vezes, não compreenderem as dificuldades de seus alunos eestudantes.

Sendo assim, é preciso que o professor fique atento e considere os conhecimentos prévios de seus alunos e estudantes, de modo a propor novas organizações matemáticas e didáticas que auxiliem a articulação dos conhecimentos matemáticos. Quando nos referimos mais especificamente às noções de perímetro e de área, é preciso que os estudantes possam considerar as mudanças de quadros e os diferentes tipos de situações, que podem contribuirna introdução e desenvolvimento de novos tipos de tarefas que podem auxiliar na compreensão da independência e da dissociação dessas duas grandezas.

Referências bibliograficas

Baltar, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surface planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège.* Tese de Doutorado na Université Joseph Fourier. Grenoble, França.

Chevallard, Y. (2007). *Le développement actuel de la TAD: pistes et jalons*. Recuperado em 04 de abril de 2020 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/TAD_-_Pistes_Jalons_-_Didirem.pdf

Chevallard, Y; Grenier, D. (1997). *Le topos de l' élève*. Actes de la IX école d' été de didactique des mathématiques. Houlgate: França

Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique.* Recuperado em 04 de abril de 2020 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifs_et_non-ostensifs.pdf

Dante, L. R. (2012). *Projeto Teláris:* Matemática. São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2011). *Ápis:* Alfabetização Matemática. São Paulo: Ática.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

Dias, M. A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Recuperado em 04 de abril de 2020 de https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252758

Lüdke, M.; André, M. E. A. (2013). *Pesquisa em educação:* abordagens qualitativas. São Paulo: EPU.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

Robert, A. (1997). Niveaux de conceptualization et enseignement secondaire. En J.L. Dorier, G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et al. (Eds), *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp.149-157), Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Silva, J. V. G. (2016). *Grandezas e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional.* Tese de Doutorado da Universidade Anhanguera de São Paulo. Brasil.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

FACTORIZATION OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS

Nelsy Rocío González Gutiérrez, Laura Ximena Casas Rodríguez
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Colombia).
nelsy.gonzalez@uptc.edu.co, laura.casas@uptc.edu.co

Resumen
En las últimas décadas se ha fortalecido el estudio sobre didáctica de la matemática surgiendo consigo grandes teorías enfocadas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de esta rama. Desde esta perspectiva, surge esta investigación, cuyo propósito es identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas. Se busca analizar empleando la metodología de tipo cualitativo los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan estudiantes de grado octavo. De igual manera, describir el papel que juega la comunicación como mediador en el paso de un registro de representación a otro.

Palabras clave: expresiones algebraicas, representaciones semióticas, formación, tratamiento, conversión

Abstract
The study of mathematics didactics has been improved during the last decades what has led to the emergence of great theories focused on enhancing mathematics teaching and learning. From this prospect, this research arises. It is aimed at identifying and implementing different semiotic representations, present in the factorization of algebraic expressions, in the classroom. By using a qualitative-type methodology, it seeks to analyze the treatment-and-conversion cognitive processes carried out by eight-grade students. Likewise, it seeks to describe the role of communication as a mediator in the conversion of a representation register into another

Key words: algebraic expressions, semiotic representations, formation, treatment, conversion

Introducción

Esta investigación surge en el 2019 como resultado del estudio de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y la participación en el grupo colaborativo de investigación Somos Maestr@s. Además, de la constante reflexión sobre la labor docente y pedagógica, y las dificultades de los estudiantes de grado octavo al enfrentarse al álgebra elemental, las cogniciones, ideas, herencias y diferentes puntos de vista que se tiene de ésta, teniendo en cuenta lo propuesto por Mason, Graham, Pimm & Gower (1999) al considerar que "el álgebra no se puede considerar ni enseñarse como un paquete separado que se inicia una vez que se haya terminado una serie de contenidos que (supuestamente) corresponden al programa de aritmética o geometría" (p.3).

A lo largo del escrito se describen aspectos importantes respecto a la teoría de las representaciones semióticas propuesta por el filósofo y psicólogo en formación Raymond Duval, quien ha centrado gran parte de sus estudios e investigaciones en la indagación interdisciplinaria de Didáctica de la Matemática y Ciencias Cognitivas. Por otro lado, se abordan temas relacionados con el álgebra elemental específicamente la factorización de expresiones algebraicas.

Marco teórico

La investigación se apoya en el estudio de representaciones semióticas presentes en la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático; y dado que "las representaciones semióticas incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir conocimiento" (Duval & Sáenz, 2016, p. 62), aquí esta teoría será fundamental. Así pues, las representaciones juegan un papel fundamental en el proceso de comunicación y en la construcción de objetos matemáticos (Duval, 2004).

Para Tamayo (2006) "desde la perspectiva de las ciencias cognitivas las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior" (p.39). En otras palabras, las representaciones pueden ser estimadas como la imagen que aparezca en el cerebro y la proyección de esta plasmada en el diario vivir. Estos conjuntos de signos o símbolos pueden ser internos o externos, los diagramas, las figuras, los dibujos son representaciones externas con propósitos comunicativos y se emplean consciente o inconscientemente en la cotidianidad, estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas (Tamayo, 2006).

Ahora bien, es importante destacar que las representaciones semióticas juegan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones permiten el acceso a los objetos matemáticos, esto se fundamenta en que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (Duval & Sáenz, 2006). De ahí, se resalta la importancia de emplear las representaciones semióticas con el objetivo de lograr un aprendizaje con mayor significado para los estudiantes.

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante, se emplean distintos registros de representación aparte del lenguaje natural y los símbolos. Las transformaciones del registro de representación que se realizan son el *tratamiento* y la *conversión*. Así pues, se hace referencia al tratamiento como "la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad" (Duval, 1999, p.42). Es decir, al hablar de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro y al realizar la conversión "la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de la misma información en otro registro" (Duval, 1999, p.44). En efecto, la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto.

Por otra parte, es importante destacar que el álgebra no puede considerarse como un proceso aparte o separado de los conocimientos presentes en la aritmética o la geometría, sino que ésta involucra los pensamientos numérico y métrico respectivamente, concluyendo en una formación conjunta. Mason *et al* (1999) destacan que la parte formal del álgebra es indiscutible, que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro de un trabajo de actividades aritméticas y geométricas.

Por otra parte, la clase de matemáticas desde generaciones anteriores ha sido designada como difícil y aburridora, por tal razón el profesor tiene la tarea de cambiar ese paradigma (Mason *et al,* 1999). Por su parte Jiménez, Suárez & Galindo (2010) hacen referencia a que "convertir la clase de matemáticas en algo significativo es, sin lugar a dudas, uno de los grandes desafíos de los profesores y de los investigadores en educación matemática" (p.177). De ahí, que la interacción con los estudiantes es parte fundamental del proceso comunicativo e investigativo que se debe generar en el aula de clase.

De lo anterior, se destaca que la comunicación es indispensable para entablar lazos de afinidad con las personas y también se hace necesaria en la orientación de un conocimiento matemático. Ahora bien, se deben tener en cuenta las prácticas culturales, el contexto, y en sí la actividad que realiza la comunidad en general para captar lo que se quiere transmitir. Esta idea se sustenta con la afirmación que realizan Jiménez, Suárez & Galindo (2010) ya que "La influencia del contexto está relacionada con el ambiente de trabajo escolar y social, la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad" (p.177).

La comunicación es considerada como un proceso de interacción social, en esta, los consensos, el diálogo o los debates siempre están presentes, según Ponte *et al* (1997, citado por Jiménez, Suárez & Galindo, 2010), la comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando un lenguaje propio, que es una mezcla del lenguaje cotidiano y del matemático. (p.180).

De ahí, que cuando hay interacción comunicativa y existen buenos comunicadores, "la negociación de significados aparece de manera natural, la cual se refiere al modo en que los alumnos y el profesor exponen unos a otros su forma de entender los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático" (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010, p.179). Así mismo, cuando se presenta un buen ejercicio de comunicación, permite fortalecer la argumentación pues, "es preciso reflexionar sobre cómo contribuyen las estrategias de comunicación centradas en el trabajo en grupo y la heurística del solucionar-escucha en el desarrollo de la argumentación en clase de matemáticas" (Jiménez & Pineda, 2013, p.104).

Metodología

El desarrollo de este estudio se centró en el paradigma de la investigación de corte cualitativo, de tipo interpretativo y específicamente en la investigación en el aula. Partiendo del hecho que ésta es una acción efectuada por los profesores, que incluyen dentro de su trabajo diario una indagación acompañada de una auto reflexión crítica sobre su actividad dentro del aula de clase, con la finalidad de mejorar la enseñanza y generar en los estudiantes interacción con el aprendizaje.

> El propósito de esta investigación es doble: la retroalimentación o información de retorno que el docente da al estudiante sobre su progreso en el aprendizaje, y las acciones de transformación de la metodología de la materia o área de conocimiento, para llegar con mayor efectividad a los estudiantes (Restrepo, 2009, p.108)

De esta manera, al realizar un proceso de reflexión sobre sí mismo, teniendo en cuenta actuaciones dentro del aula de clase y al analizar lo que se observa, sirve como instrumento para la toma de decisiones de realimentación y búsqueda del mejoramiento continuo en la labor pedagógica que se desempeña.

En esta investigación se elaboró un diseño que incluyera la teoría de representación semiótica, en especial los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que los estudiantes construyen o deducen al realizar la factorización de expresiones algebraicas, así como la relación que existe entre las bases teóricas y lo que el estudiante quiere dar a conocer.

Inicialmente se parte de la temática que se desarrolla, que corresponde a la factorización de expresiones algebraicas relacionada con la teoría de representaciones semióticas. A partir de esta relación se realiza la secuencia didáctica y ésta a su vez está conformada por cuatro situaciones didácticas. A partir de la implementación de las situaciones didácticas se pretende realizar la concepción, experimentación, formulación y validación e institucionalización del conocimiento y finalmente evaluar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes.

Resultados

Para hacer análisis de la información generada por parte de los estudiantes, al enfrentarse a una secuencia didáctica acerca de la factorización del trinomio cuadrado perfecto se hace necesario tener en cuenta las categorías de análisis previamente establecidas como lo son la correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden de aprehensión, esto para determinar la congruencia o no congruencia de una representación y verificar que el proceso cognitivo de conversión sea adecuado. De igual manera, analizar las reglas de tratamiento, los procedimientos que se realizan al interior de cada registro de representación y el papel de la comunicación en cada proceso cognitivo, las tareas de producción y las tareas de comprensión.

A continuación, se describen los resultados obtenidos, al realizar explorar una situación contextualizada para la factorización trinomio cuadrado perfecto y efectuar la expansión del binomio elevado al cuadrado.

Ítem 1.
Representación de partida lenguaje natural – representación de llegada gráfica.

Una finca, cuya forma semeja una figura geométrica que tiene todos los lados congruentes, y se ha parcelado en cuatro partes, con el objetivo de sembrar tres productos agrícolas distintos. La parcela más grande y la más pequeña se pueden representar por medio cuadrados, y las otras dos parcelas se representan por medio de rectángulos congruentes.

Dibuje y describa las figuras geométricas que considere cumplen las condiciones y representen adecuadamente la figura de la finca.

Los estudiantes lograron generar representaciones mentales realizando el proceso de formación.

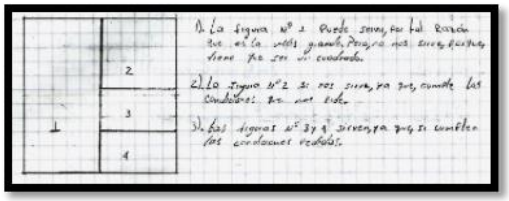


Figura 1. *Construcción geométrica realizada por E13.*

El estudiante E13, realiza la representación indicando que la figura que denominó 1, no cumple la condición, pero las figuras 2,3 y 4 sí. Por tanto, la representación producida tiene aceptabilidad respecto al registro inicial. El registro

es no congruente al no cumplir la correspondencia semántica, pues la representación de la parcela más grande no es cuadrada.

La representación anterior no cumple el criterio de transformabilidad, que consiste en mantener las características de lo que se quiere representar. El estudiante no tiene claridad al realizar la representación gráfica, hay ausencia de nociones básicas de geometría.

Por otro lado, algunos estudiantes logran concretar los procesos cognitivos de formación, conversión y tratamiento, enunciados a continuación.

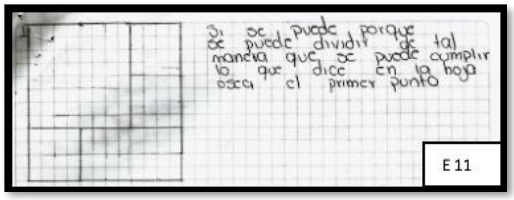


Figura 2: Construcción geométrica y descripción realizada por E11.

El estudiante E11 realiza el proceso de conversión, existe congruencia con el registro de salida. Al hacer el tratamiento, la interpretación textual de lo propuesto y del gráfico, la paráfrasis que realiza corresponde con el registro de llegada.

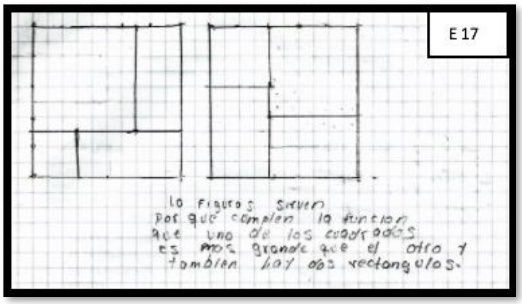


Figura 3: Construcción geométrica y descripción realizada por E17.

El estudiante E17, realiza dos representaciones congruentes a lo indicado en la representación del lenguaje natural. Además, la descripción textual coincide con la representación elaborada, realiza paráfrasis del registro inicial. Por lo tanto, se concluye que logra las tres actividades cognitivas.

Las representaciones son adecuadas, los estudiantes logran realizar la conversión de los enunciados del lenguaje natural a representación geométrica. De lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes realizan transformaciones intencionales pues "toman al menos el tiempo de un control consiente y que se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados" (Duval, 1999, p. 39). Además, los estudiantes forman representaciones semióticas al recurrir a signos de representación, para distinguir, incorporar y construir los registros finales.

Ítem 2.
Representación de partida lenguaje natural – representación de llegada gráfica.
La siembra de los productos se distribuye en las cuatro parcelas de la siguiente manera: El área que ocupa el cultivo de tomate, está divida en dos partes iguales, estas son equivalentes al área que ocupa el cultivo de papa que

corresponde a la parcela más grande. Un cuarto del área de la parcela del cultivo de papa o la mitad de una parcela del cultivo de tomate, es equivalente al área de la parcela del cultivo de lulo, que es la parcela más pequeña y se representa por medio de una figura geométrica que tiene todos lados congruentes. Realice la representación gráfica teniendo en cuenta las características anteriores y realice la descripción de la representación que ha realizado de cada una de las parcelas.

Al realizar la descripción de cada una de las parcelas el estudiante muestra más claridad para elaborar la representación, tienen criterios para aceptar o rechazar el cambio de registro. Algunas gráficas construidas por los estudiantes son las siguientes:

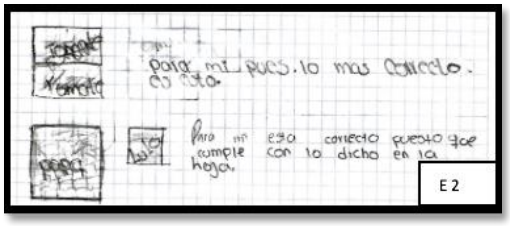


Figura 4: Representación geométrica realizada por E2.

El estudiante E2 realiza el proceso cognitivo de conversión, pues las condiciones del registro inicial se mantienen en el registro final, existe congruencia entre los registros de representación, el tratamiento interno al lenguaje natural, es decir, la paráfrasis es correcta, realiza comprensión y análisis de las representaciones geométricas.

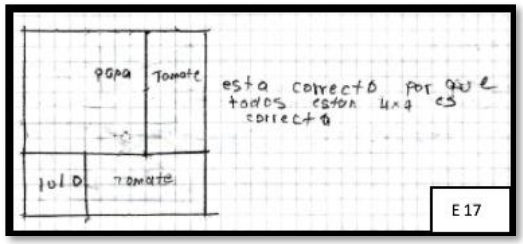


Figura 5: Representación geométrica realizada por E17.

El estudiante E17 realiza el proceso la conversión, el paso de registros es correcto. Además, la transformabilidad en la representación se conserva, realizando una descripción análoga empleando valores numéricos, el tratamiento interno corresponde a lo que visualiza en la representación geométrica.

Los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión son evidentes, los estudiantes logran el paso de registros de representación. Respecto a la formación, ellos recurren a signos para revelar la visón o imagen mental que tiene del objeto, realizan la producción de lo percibido y relacionan las condiciones dadas. El tratamiento se evidencia al sustituir el registro de escritura de partida denominado paráfrasis al hacer la trasformación interna del lenguaje natural y la anamórfosis al formar nuevas representaciones gráficas a partir del registro figural. Finalmente, se resalta que los estudiantes realizan las tareas de producción y comprensión, pues movilizan la formación de representaciones semióticas su tratamiento y conversión.

Ítem 3.
Reúnase con un compañero, comparen las representaciones gráficas que cada uno realizó y argumenten por qué las consideran adecuadas, recuerde que todo debe quedar escrito. Luego, consoliden una sola representación, en la que describan las características de cada parcela.

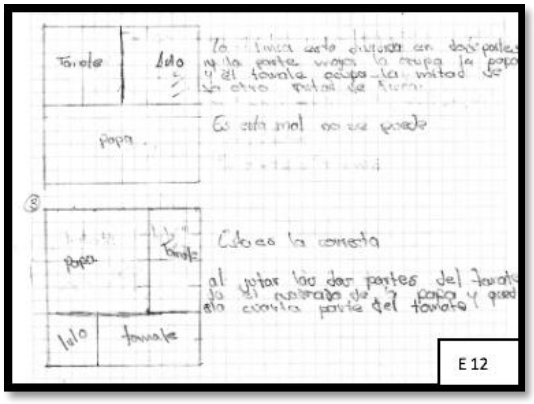


Figura 6: Consolidado representación gráfica y lenguaje natural realizada por E12.

El estudiante E12, luego de reunirse con su compañero detecta errores que presentó en la representación del punto anterior, describe la nueva representación y rechaza la anterior diciendo "no se puede". Se evidencia que el estudiante supera el obstáculo que se presenta en la conversión y hay una producción discursiva de texto por parte del alumno. En este caso articular, el alumno realiza de manera acertada los procesos cognitivos de tratamiento y conversión luego de evidenciar los errores cometidos, replanteando la idea y construyendo las representaciones correctas, finalmente logra la movilización de los sistemas semióticos de representación.

El paso de un registro de representación a otro es sin duda "la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir por los alumnos" (Duval, 1999, p. 46). Se requiere de concentración para que el cambio de registro no genere obstáculos ya que las tareas de construcción de figuras solicitan concentración entre el registro discursivo, las características del registro, las representaciones mentales y el objeto. Se evidencia que los estudiantes al interactuar con su par logran generar la conversión al registro gráfico, aclaran las dudas, realizan conjeturas y finalmente realizan la representación gráfica incluyendo algunas descripciones y justificaciones de lo escrito realizando el proceso cognitivo de tratamiento.

Ítem 4.
Representación lenguaje natural - representación gráfica - representación algebraica.

Tenga en cuenta las siguientes afirmaciones para luego solucionar las preguntas.

- La medida de un lado de la parcela del cultivo de papa es (p). Además, la parcela está representada por un cuadrado.
- Un lado del cuadrado donde está sembrado el lulo mide (l).

1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la parcela del cultivo de papa?
2. ¿Cuál es la expresión que representa el valor del lado de la finca?
3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la finca?

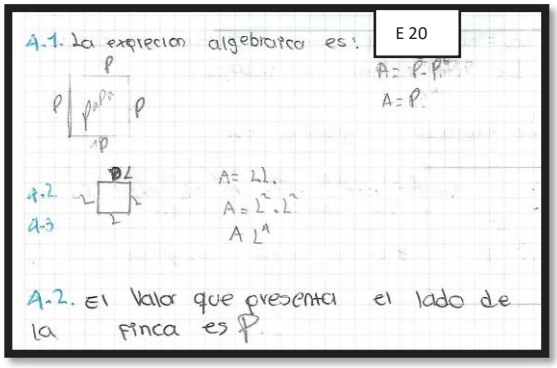


Figura 7: Conversión al registro algebraico realizada por E20.

El estudiante E20 realiza la representación gráfica que cumple las características dadas en el registro del lenguaje natural, es decir las representaciones son congruentes en la conversión al registro gráfico. En el registro algebraico presenta dificultad, pues no hay congruencia entre los registros, además de realizar cálculos no apropiados. El proceso de tratamiento que el estudiante realiza no es apropiado.

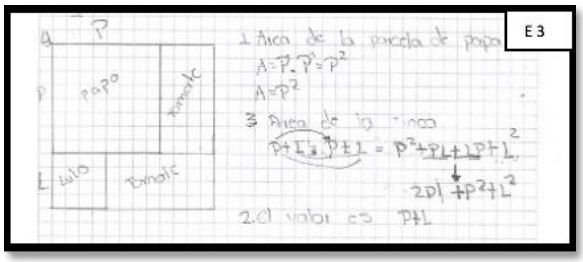


Figura 8: *Conversión al registro algebraico realizada por E3*

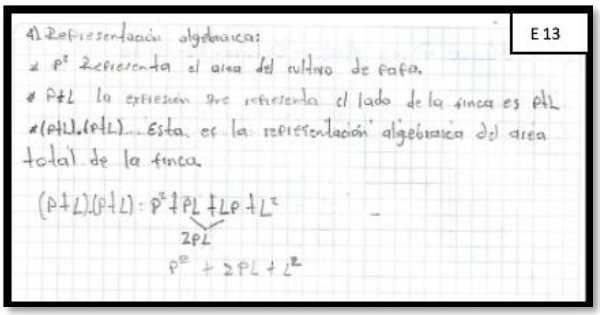


Figura 9: *Conversión al registro algebraico realizado por E13*

En estas últimas representaciones, los estudiantes E3 y E13 en conjunto realizan las tres actividades cognitivas posibles. Pasan del registro del lenguaje natural al geométrico y luego al algebraico. Realizan el tratamiento al interior del registro algebraico para lograr concluir el área total representada por el trinomio cuadrado perfecto, partiendo de nociones básicas de geometría. Finalmente, la formación es la primera que debe surgir en la mente del estudiante para realizar los diferentes registros de representación semiótica, logrando con ello la movilización de los registros.

Los estudiantes logran realizar y concretar los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión. Al inicio se presenta cierto grado de dificultad, los estudiantes generan representaciones carentes de las características

iniciales, no interiorizan la información para hacer el transformabilidad de registros, al comparación y visualización con el compañero, el estudiante debe dar a conocer las razones por las cuales realizó la representación, justificar cada característica y respaldar con argumentos su idea, en ese momento ellos logran evidenciar los errores que han cometido, pero es a partir de ahí que generan nuevas ideas mentales que se representan por medio del registro gráfico y que son congruentes con el registro de salida, logrando acercarse a lo que se quiere que aprendan la factorización de trinomio cuadrado perfecto teniendo en cuenta el contexto, saberes previos y análisis e interpretación de situaciones. A partir de aplicar esta situación de enseñanza, se evidencia la movilización de registros de representación y la transformabilidad de los sistemas semióticos.

Conclusiones

Algunos estudiantes muestran temor y apatía con la ejecución de nuevas metodologías, pues siempre la clase se había tornado similar. Al realizar las secuencias de enseñanza los estudiantes sienten duda de escribir sus propias consideraciones y temen cometer errores. Luego de generar confianza en ellos se logra familiarizarse y concretar ideas, consideraciones y aportes muy importantes para el proceso investigativo.

Las representaciones semióticas son un instrumento fundamental para el desarrollo de actividades matemáticas, de esta manera, se pretende que los estudiantes por medio de diversos registros de representación consigan comprender, analizar y aprender temas que para ellos son confusos, complicados y abstractos como lo es el álgebra elemental para el grado octavo, lo anterior, concordando con lo escrito por Duval (1999) “toda actividad cognitiva humana, se basa en la complementariedad de estas dos representaciones” (p. 39), al hacer referencia a las transformaciones intencionales y cuasi-instantáneas que realizan los estudiantes cuando emplean diversas representaciones.

La interacción que existe entre el estudiante y su par es de gran ayuda, pues los estudiantes deben realizar la justificación de cada una de las representaciones construidas. Al realizar este ejercicio se debe evidenciar una coherencia entre las representaciones y la argumentación dada, de esta manera se logra evidenciar la existencia de algunos errores cometidos, pero de igual manera la enmienda inmediata de estos, consolidando representaciones acordes con las condiciones iniciales.

Los estudiantes desarrollan el tratamiento dentro de cada registro de representación, realizan trasformaciones internas ya sea del registro gráfico o geométrico (anamórfosis) del lenguaje natural (paráfrasis) y del algebraico (cálculos con expresiones algebraicas).

La argumentación, la descripción y la socialización como parte del proceso comunicativo es destacable. Inicialmente los estudiantes no logran generar ni consolidar aportes coherentes con los registros, pero finalmente, se alcanzan aportes significativos en la consolidación de representaciones empleando el registro de lenguaje natural, destacando que en la expansión informacional que realizan algunos de ellos revelan la “movilidad simultánea de la red semántica de un lenguaje natural y los conocimientos pragmáticos del medio sociocultural” (Duval, 1999, p. 113).

Referencias bibliográficas

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, IX*(1), 177-197.

Duval , R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Register of Semiotic Representations.* (T. M. Campos, Ed.) Dunkerque, Francie: Proem.

Duval, R., & Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval , R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano:Resgistros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Segunda ed.). (P. Lang, Ed., & M. Vega Restrepo, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y prendizaje intelectual.* (M. V. Restrepo, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Jiménez, A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010). La comunucación: Eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber, I*(2), 173-202.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Rutas y raice del y hacia el álgebra.* (L. Acebedo, Ed., & C. Agudelo Valderrama, Trad.) Tunja: UPTC.

Restrepo, B. (2009). Investigación de aula: Formas y actores. *Revista educación y pedagogía, XXI*(53), 103 -112.

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y la evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía, XVIII*(45), 37-49.

COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN Y DE SUS SIGNIFICADOS EN ESTUDIANTES PERUANOS DE SEGUNDO DE SECUNDARIA SEGÚN LA EVALUACIÓN CENSAL 2015 Y 2016

UNDERSTANDING THE CONCEPT OF FRACTION AND ITS MEANINGS BY PERUVIAN SECONDARY SCHOOL STUDENTS; ACCORDING TO THE 2015 AND 2016 EVALUATION STATISTICAL RECORD

Olimpia Rosa Castro Mora
Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes. Ministerio de Educación (Perú).
olimpiacastro@hotmail.com

Resumen
El aprendizaje del concepto de fracción es uno de los aspectos más importantes en la escolaridad y a la vez uno de los de mayor dificultad. Esta investigación se centra en el análisis de las tareas de la Evaluación Censal (ECE) de los años 2015 y 2016, aplicada a estudiantes peruanos de segundo de secundaria (de 14 o 15 años de edad) para conocer la comprensión que tienen los estudiantes acerca del concepto de fracción. Se busca establecer una relación entre las respuestas de los estudiantes y la comprensión que tienen del concepto de fracción y sus significados. Concepto fundamental para construir el conjunto de números racionales. Se tomó como referente teórico la teoría de campos conceptuales de Gerard Vergnaud y los significados de fracciones de Thomas Kieren. Como resultado, se evidenció que los estudiantes tienen dificultad para resolver situaciones problemáticas que involucran el concepto de fracción al no comprender sus significados ni interpretar sus diferentes representaciones.

Palabras clave: significado de fracción, campos conceptuales, situaciones

Abstract
Learning the concept of fraction is one of the most important aspects in schooling, and at the same time, it is one of the most difficult aspects. This research focuses on the analysis of some tasks of the Census evaluation of the years 2015 and 2016, applied to Peruvian secondary- school students (aged 14 or 15) to know their understanding of the concept of fraction. It seeks to establish the relationship between the students' response and their understanding of the concept of fraction and its meanings. The concept of fraction is essential to construct the set of rational numbers. Both, Gerard Vergnaud's theory of conceptual fields and Thomas Kieren's meanings of fractions were considered as theoretical referents. The results showed that students have difficulties solving problematic situations that involve the concept of fraction by not understanding their meanings nor interpreting their different representations.

Key words: Meaning of fraction, conceptual fields, situations

Introducción

Diversas investigaciones sirven de sustento científico para abordar el concepto de fracción según sus significados, tanto en el aprendizaje de los estudiantes durante la escolaridad, de los docentes en el proceso de enseñanza, de futuros docentes en su periodo de formación, como también, la manera cómo se aborda este concepto en algunos materiales de trabajo. Investigaciones como la de Silva (2005) pone de manifiesto que trabajar solo algunos significados de la fracción puede obstaculizar la construcción del concepto de fracción. De León y Fuenlabrada (1996), Perera y Valdemoros (2007), también señalan que parte de este fracaso en el aprendizaje de las fracciones se debe al desconocimiento de sus significados por parte de los docentes, llevando a plantear en las clases, de manera prematura, el uso del lenguaje convencional y los algoritmos lo que impide su comprensión del significado. Así mismo, Castro (2017) señala que algunos docentes en formación inicial no logran la comprensión del concepto de fracción dificultando su aplicación en la resolución de problemas. Las investigaciones mencionadas, resaltan la importancia de construir los distintos significados de fracción para alcanzar mayor comprensión y consolidar este concepto, el cual le permitirá resolver diversas situaciones problemáticas y sentar las bases para la construcción del campo de los números racionales.

En Perú, el currículo nacional señala que el concepto de fracción se construye a lo largo de la educación primaria a través de sus distintos significados, de manera que en segundo de secundaria se debería consolidar este concepto con el conjunto de números racionales. Evidencias recogidas en Evaluaciones Censales de Estudiantes (ECE) muestran que los estudiantes, incluso los de secundaria, presentan dificultades en el aprendizaje de las fracciones y su aplicación en la resolución de problemas (Minedu, 2016). Esta investigación surge con la finalidad de conocer los niveles de logro de aprendizaje que han alcanzado los estudiantes peruanos con respecto a las nociones de fracción. Por ello, el problema general de investigación es: ¿Cómo se relaciona la comprensión del concepto de fracción y sus significados en los estudiantes de segundo grado de secundaria en la Evaluación Censal, 2015 y 2016?

Para abordar este tema de investigación se requiere conocer los significados de las fracciones implicados en las tareas de la ECE y profundizar en los elementos que constituyen la conceptualización de la fracción en dichas tareas. Con estos elementos se puede comprender los conceptos de fracción que el estudiante utiliza al resolver las tareas propuestas en la evaluación censal. Es a partir del análisis de algunas tareas de la ECE de segundo de secundaria que involucran fracciones y del análisis de los resultados psicométricos de dichas tareas, que se establece la relación entre la respuesta de los estudiantes y la comprensión del concepto de fracción y sus significados implicados en su solución, especialmente en este grado que se debe consolidar el concepto de fracción y construir el conjunto de números racionales.

Marco teórico

La teoría de campos conceptuales creada por Gerard Vergnaud tiene como fin principal el estudio del proceso de conceptualización. Esta teoría se basa en analizar la construcción de conceptos por parte del estudiante estableciendo relación con otros conceptos involucrados, sus sistemas y sus rupturas que se van presentando a lo largo del proceso de adquisición.

Se define el campo conceptual (Moreira, 2002) como un conjunto espontáneo y diverso de problemas o situaciones cuyo tratamiento implica relacionar conceptos, procedimientos y representaciones de distintas maneras, pero todos conectados entre sí. De esta manera, se considera el campo conceptual como una unidad de estudio que permite dar sentido a los problemas de adquisición y a las observaciones hechas en relación a la conceptualización. En este proceso, se considera que es la situación la primera entrada de un campo conceptual y como segunda entrada estarían los conceptos y los teoremas.

De los aportes de Vergnaud (1990) acerca de los campos conceptuales, se sabe que en el proceso de conceptualización intervienen los siguientes elementos:

- Las situaciones que son las que le dan sentido al concepto.
- El conjunto de invariantes (objetos, propiedades, teoremas, relaciones, etc.) son los que se ponen en juego para resolver las situaciones.
- Las diferentes representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos, sentencias formales, etc.) son las que se usan para representar los invariantes, situaciones y procedimientos.
- Los esquemas vienen a ser la forma cómo el individuo interactúa con los conceptos, las situaciones y las representaciones.

La relación entre estos elementos se muestra en la figura 1.

Figura 1. Elementos sobre los que se desarrolla la conceptualización. Por Castro (2018, p.24).

Con esta teoría se puede relacionar la construcción del concepto de fracción a partir de conocimientos básicos de herramientas intuitivas hasta la partición, equivalencia y la formación de la unidad, conectando con las estructuras multiplicativas y las diversas situaciones y representaciones que dan sentido a los conceptos de fracción (Vergnaud, 2007).

Consideramos como referencia teórica para los significados de fracción los presentados en Matute (2010) que menciona los significados de Thomas Kieren, quien ha realizado diversos estudios acerca de la construcción de estos números. Señala que Kieren reconoce varios constructos intuitivos (medida, cociente, operador multiplicativo y razón) que son los que permite construir el conocimiento de la fracción. Además, identifica un quinto constructo intuitivo: la relación parte-todo que sirve de base para la construcción de los otros cuatro mencionados anteriormente. Son estos significados los que dan sentido y conexión a las equivalencias de razones, operaciones con fracciones y su resolución de diversos problemas que los involucra. La siguiente figura presenta la relación de la naturaleza básica de cada uno de ellos.

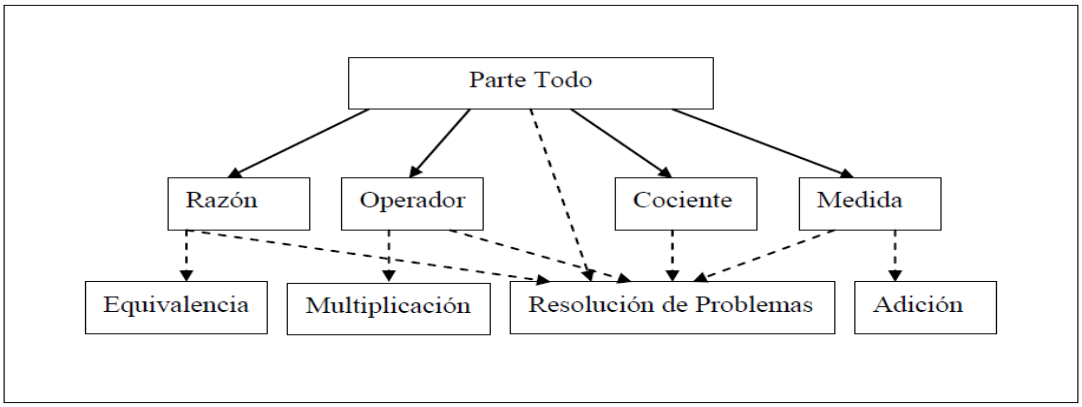


Figura 2. El esquema muestra el modelo teórico de las interpretaciones del concepto de fracción. Por Matute (2010, p.18).

A su vez, se muestran ejemplos representativos de cada uno de estos constructos que permite graficar las situaciones que le dan sentido a cada significado de la fracción y contribuye b a la construcción del concepto de fracción, como se aprecia en la figura 3.

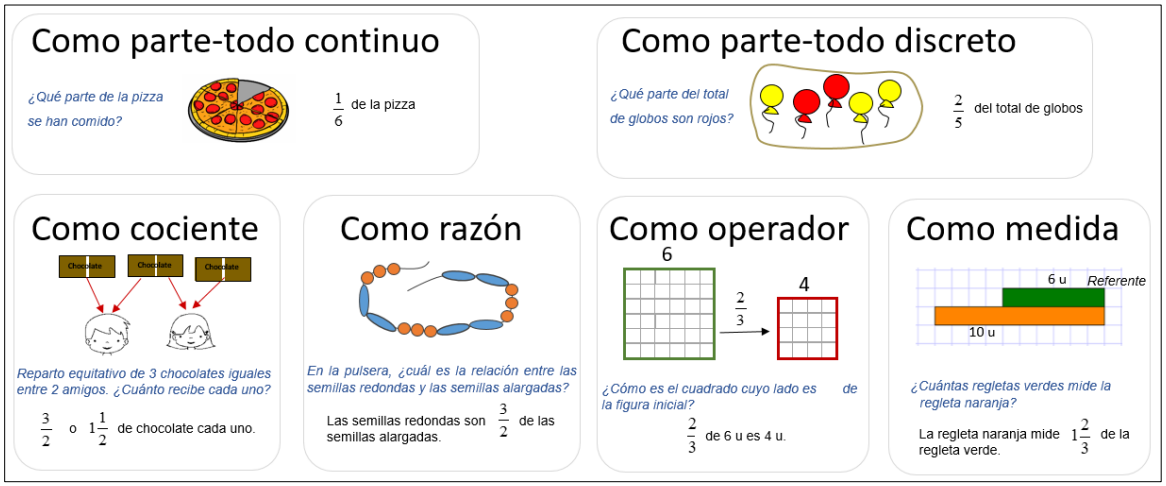


Figura 3. La figura muestra ejemplos de los significados de las fracciones. Adaptado de Castro (2018)

Desarrollando el concepto de fracción a partir de situaciones reales que aborden sus distintos significados, será posible alcanzar un conocimiento racional y funcional que permita realizar con éxito actividades operatorias tanto en situaciones cotidianas como en aquellas que exijan mayor reflexión, exploración y abstracción por parte del estudiante. De esta manera, según los aportes de Vergnaud (1990) se puede señalar que se alcanza el dominio de las fracciones como campo conceptual, cuando está conformado por tres aspectos: las situaciones que dan sentido (reparto de tortas, medida de regletas, comparación de tamaños en un logo), los conceptos que son el conjunto de invariantes, propiedades y relaciones (significados de medida, operador, razón, cociente, parte-todo vinculado a situaciones), y las representaciones (lenguaje oral, gráficos, sentencias formales, diagramas, material concreto), todos en estrecha relación.

Metodología

Esta investigación se desarrolló mediante un enfoque cualitativo donde se busca explorar la relación de la comprensión del concepto de fracción con sus significados, en los estudiantes peruanos de segundo grado de secundaria cuyas edades oscilan entre 13 y 15 años, a partir de las evidencias en la Evaluación Censal 2015 y 2016. La investigación es no experimental, de corte transversal y de alcance descriptivo. El propósito de la investigación se centra en el análisis de algunas tareas que involucran la noción de fracción en la evaluación estandarizada, presentadas en diferentes contextos y representaciones. Se busca comprender en cada tarea la relación entre significado y concepto para poder realizar una descripción pedagógica de los hallazgos en los resultados de los estudiantes. Es a través de este enfoque que se puede describir de manera directa las nociones y representaciones que tienen los estudiantes respecto a las fracciones, como también realizar una descripción de los errores encontrados al aplicar estas nociones y poder dar pautas de sus posibles causas.

Los datos para el estudio se obtuvieron solicitando a la Oficina de Medición de la Calidad de los Aprendizajes (UMC) del Ministerio de Educación información acerca de 15 ítems de la competencia de cantidad referente a fracciones, aplicadas en la ECE 2015 y 2016 a estudiantes de segundo grado de secundaria. Los resultados brindados corresponden a respuestas de aproximadamente 500 000 estudiantes evaluados en cada año. Esta información fue organizada en una tabla como la que se muestra a continuación.

Tabla 1. Ítems que involucran el concepto de fracción en la ECE 2015 – 2016 de 2. ° secundaria

Código del ítem	Capacidad					Significado de fracción					Rep	% Acierto				
	MA	CR	EE	RA	PTC	PTD	MED	COC	OPE	RAZ	G/S/T	[0–20]	[20–40]	[40–60]	[60-80]	[80–100]
MA2S00206				X					X		T/S	X				
MA5S00342			X		X						G/S	X				
MA2S00030		X								X	G/S		X			
MA2S00028				X	X						S		X			
MA2S00211	X							X			S/T		X			
MA2S00056		X			X						S/G		X			
MA2S00094			X				X				T		X			
MA2S00160				X	X						S/T		X			
MA2S00002	X						X				S/T		X			
MA2S00105	X								X		S/T		X			
MA5S00283	X									X	T/S			X		
MA6P00557		X			X						S/T			X		
MA6P00479		X				X					G			X		
MA6P00507		X			X						G			X		
MA5S00280	X								X		G/S			X		

Nota: Por cada ítem la tabla específica la capacidad evaluada, el significado de fracción involucrado, el tipo de representación de la fracción y finalmente el porcentaje de acierto. Castro (2018, p.136)

Los datos analizados fueron los siguientes:

- *Código del ítem:* Con lo que se identifica el ítem en la relación de datos sicométricos dentro de toda la escala.

- *Capacidad:* Esto explica las habilidades puestas en juego por el estudiante al resolver la tarea propuesta. Estas son: Matematiza MA, comunica y representa CR, elabora y usa estrategias EE y, razona y argumenta RA (Según Currículo Nacional).
- *Significado de la fracción:* Clasificación tomada según Thomas Kieren y están especificados en los estándares del Currículo Nacional. Estos son: Parte todo continuo, parte todo discreto, medida, cociente, operador y razón.
- *Representación:* Muestra el formato de presentación empleado para expresar e interpretar el concepto de fracción según la situación planteada. Estas son: Gráfica G, simbólica o numérica N y en texto continuo T; también se pueden combinar entre ellas.
- *Porcentaje de acierto:* Es la medida porcentual que indica la cantidad de estudiantes evaluados que lograron dar como respuesta la alternativa mencionada. Esta se da para la respuesta correcta de la tarea (tasa de acierto) y también para cada distractor. La tabla solo muestra el dato de tasa de acierto.

Para los propósitos de esta investigación, se realizó el análisis de cada pregunta seleccionada de la ECE, mostrando primero la tarea propuesta junto con los datos generales del ítem que permitirá comprender la intención a evaluar. Luego, se procedió a identificar el significado de fracción que está involucrado en la tarea, base del concepto que se construye y finalmente, se presentó el análisis de los distractores que permitirá generar supuestos o encontrar explicaciones a las causas que generan los errores en los estudiantes. Cabe resaltar que, si el ítem había sido liberado anteriormente en algún reporte de difusión, fue posible mostrar el original en esta investigación, de lo contrario, por motivos de salvaguardar la confidencialidad de las pruebas, se mostró un ejemplo que permita explicar el sentido del análisis.

Algunos ejemplos de análisis de las tareas propuestas en la ECE

Se presentan algunas tareas analizadas en la investigación que permiten observar aspectos que evidencian hallazgos respecto a la comprensión del concepto de fracción, tanto en sus logros como en sus dificultades. Cabe señalar que el análisis de las alternativas se realiza considerando su tasa de respuesta como también, conjeturas que orientan las distintas causas que originan el error.

Ejemplo 1.

Figura 4. La figura muestra una pregunta de fracciones de la ECE 2015. Por Minedu (2016).

A continuación, describimos las características del ejemplo mostrado:

- Código del ítem: MA2S00028
- Competencia: Cantidad
- Capacidad: Razona y argumenta
- Indicador: Identifica números racionales, en su forma fraccionaria, comprendida entre dos números racionales cualquiera
- Significado de fracción: Parte todo continuo
- Representación utilizada: gráfico – simbólico

Análisis de la tarea

El 24,29% de los estudiantes respondió correctamente la alternativa c que implica establecer una relación de orden entre las dos fracciones dadas, en su concepto parte todo continuo. Ya el formato gráfico del estímulo aporta a la tarea una confirmación de la relación de orden, es decir, que $\frac{1}{4}$ al estar en caja más pequeña es menor que $\frac{1}{2}$. Estos estudiantes pueden haber resuelto la tarea con procedimiento gráfico o simbólico.

Cabe resaltar que en este grado de escolaridad, los estudiantes ya están en inicios de la comprensión de la propiedad de densidad de los racionales, lo que los lleva a suponer que hay más de una fracción que cumpla las condiciones mencionadas.

Sin embargo, es alarmante ver que en esta tarea de comparación de fracciones el 39,83% de los estudiantes marca la alternativa "a" quizás asociado a algún algoritmo aprendido sin discriminar su pertinencia de aplicación. Es decir, buscan operar en el denominador, y en este caso realizan 4 x 2 = 8 y, colocan el mismo numerador 1. Esto refleja el aprendizaje de reglas incomprendidas y la certeza de no considerar la fracción como un número que expresa en sí una sola cantidad.

Otra probabilidad de no comprender el concepto de fracción está en el 27,30% de los estudiantes que señala la alternativa b. No interpretan la fracción como una sola cantidad sino como una composición de dos números naturales independientes entre sí y atendiendo solo al denominador para establecer orden entre ellos, es decir, entre 4 y 2 está 3.

Es necesario trabajar la construcción de nociones manipulando objetos reales y abstractos, como los gráficos, para aprender nuevos conceptos de forma razonada y no centrar todo en manejo de procedimientos que finalmente se convierte en algo mecánico e incomprendido. Hincapié (2011) confirma la necesidad de construir conceptos nuevos manejando los tres elementos propuestos en los campos conceptuales como son las situaciones, los invariantes y las representaciones. De esta manera se alcanzan aprendizajes significativos y propicios para aplicarlos en diferentes situaciones.

Ejemplo 2.

Figura 5. La figura muestra una pregunta de fracciones de la ECE 2015. Por Minedu (2016)

A continuación, describimos las características del ejemplo mostrado:

- Código del ítem: MA6P00479
- Competencia: Cantidad
- Capacidad: Comunica y representa
- Indicador: Interpreta el uso de los números racionales en sus diferentes significados y representaciones.
- Significado de fracción: Parte todo discreto
- Representación utilizada: gráfico – simbólico

Análisis de la tarea

Solo el 43,10% de los estudiantes respondió correctamente la alternativa d.
Estos estudiantes lograron reconocer que en esta situación hay una categoría involucrante que son las frutas, y que cada una de ellas es una parte de ese todo o conjunto. Aquí radica la comprensión del concepto de fracción como parte todo discreto, considerando el "todo" que son tres frutas donde cada manzana es $\frac{1}{3}$ del conjunto de frutas, así como un plátano también es $\frac{1}{3}$ del conjunto de frutas. Por tanto, para recodificar del gráfico que $\frac{2}{3}$ de las frutas son manzanas implica buscar el frutero donde hay tres frutas y solo dos de ellas son manzanas.
Por otro lado, el 54,8% de los estudiantes (22,87% responde b y 31,93% responde c) interpretan de forma equivocada la notación de fracción, puede ser que consideren la fracción como la composición de dos números naturales de manera separada, lo que hace que busquen el frutero en donde se encuentren dos de una fruta y tres de otra. Esto evidencia la dificultad de no comprender la fracción como una cantidad sino como la composición de dos partes separadas entre sí.

Estos errores pueden ser generados, como señala Castro (2017), por haber trabajado en las actividades de clase solo las fracciones en representaciones continuas y, enfrentan con extrañeza situaciones como esta, donde se aborda la unidad o todo como un conjunto de elementos. Esto es lo que Fandiño (2009) señala como dificultades en el reconocimiento de esquemas, es decir, formas distintas de presentar situaciones, sobre todo cuando se trata de cantidades discretas y con representaciones gráficas.

Resultados

A partir del análisis de tareas de fracciones de la ECE, los principales resultados fueron:

- Los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de la noción de fracción al observarse baja tasa de acierto en estas tareas de la ECE.
- Los estudiantes resuelven mejor las tareas de fracción parte todo continuo, puede deberse por ser el significado más trabajado en las aulas y presentado en los textos escolares nacionales.
- Trabajar en clases solo el significado de fracción parte todo, no permite alcanzar la comprensión total del concepto de fracción y les impide resolver las tareas que involucran estos otros significados.
- Las fracciones presentadas de manera descontextualizada generan mayor posibilidad de error al ser trabajadas, por lo general, de manera mecánica.
- Enfatizar solo la representación simbólica de las fracciones no contribuye a la comprensión y flexibilidad en el uso de estas nociones.

Conclusiones

En coherencia a los objetivos propuestos en este estudio, presentamos a continuación las conclusiones específicas obtenidas en esta investigación.

1. Las tareas referidas a fracciones, de la ECE 2015 y 2016 de segundo grado de secundaria, abordan los diferentes significados de fracción como parte todo, cociente, medida, operador y razón como se ha presentado en las tareas analizadas en esta investigación. En ellas se pudo apreciar que los estudiantes no logran identificar dichos significados trabajándolos con dificultad y poco acierto, lo que se evidencia teniendo entre 43 y 8% de tasa de acierto en estas tareas.
2. Al analizar los elementos que constituyen la conceptualización: situación, invariante y representación, estos elementos generan distintos niveles de complejidad en las tareas. Las tareas referidas al concepto de fracción como parte-todo representadas gráficamente y en situaciones sencillas, son las que mejor desarrolla el estudiante.
3. A partir del análisis de los ítems basados en las concepciones de fracción, las tareas de mayor dificultad para el estudiante son los otros significados de fracción, como operador, cociente y como razón. Los estudiantes suelen aplicar en estas situaciones los significados que más conocen, como es parte-todo, aun sin corresponder y llevándolos a presentar errores en sus respuestas.
4. El análisis evidencia la dificultad de los estudiantes respecto a la comprensión de los conceptos de fracción cuando este tiene que vincular diferentes representaciones del mismo, es decir, vincular la representación simbólica, gráfica y de lenguaje coloquial.

Referencias bibliográficas

Castro, O. (2017) *Comprensión del concepto de fracción en los estudiantes en formación inicial de educación primaria. Una mirada desde la teoría de campos conceptuales*. (Tesis de pregrado). Universidad Antonio Ruiz de Montoya, Lima, Perú.

Castro, O. (2018) *Comprensión del concepto de fracción y de sus significados de los estudiantes de segundo grado de secundaria en la Evaluación Censal 2015 y 2016* (Tesis de maestría). Universidad César Vallejo, Lima, Perú.

De León, H. y Fuenlabrada, I. (1996). Procedimientos de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *1*(2), 268-282.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Didáctica Magisterio.

Hincapié, C. (2011). *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados, con los docentes de primaria de la Institución Educativa San Andrés de Girardota.*(Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Matute, K. (2010*). Concepciones Matemáticas en los estudiantes de Séptimo Grado de la Escuela Normal Mixta "Pedro Nufio" acerca de las fracciones y sus diferentes interpretaciones*. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Tegucigalpa, Honduras.

Ministerio de Educación [Minedu]. (2016). *¿Qué logran los estudiantes en Matemática?. 2.° grado de secundaria.* Recuperado de http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2016/03/Informe-para-el-docente-Matem%C3%A1tica_ECE-2015.pdf

Moreira, M. (2002). *Vergnaud's conceptual fields theory, science education, and research in this area* [La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área] (I. Iglesias, trad.). Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Perera, P. y Valdemoros, M. (2007). Propuesta Didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 209-218).

Silva, M. (2005). *Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série* (tesis de doctorado). Pontificia Universidad Católica de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales (J. D. Godino, trad.). *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, *10*(2), 133-170.

Vergnaud, G. (2007). In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning? [¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?] (C. Caballero, trad.). *Investigações em Ensino de Ciências*, 12(2), 285-302.

INCIDENCIA DE LA TEORÍA DE INTELIGENCIAS MÚLTIPLES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS DESDE LA EMOCIONALIDAD DE LOS ESTUDIANTES

THE MULTIPLE-INTELLIGENCE THEORY INCIDENCE IN MATHEMATICS CLASS FROM THE STUDENTS' EMOTIONALITY

Natalia Klein Vergara
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile).
nklein.vergara@gmail.com

Resumen
El presente trabajo, tiene como objetivo mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en los ejes: motivación, participación, internalización y aprendizaje significativo, utilizando una metodología basada en la teoría de inteligencias múltiples de Gardner en una clase de matemática en dos cursos de séptimo grado de educación básica en el Colegio San Juan Bautista de la comuna de Ñuñoa, Santiago de Chile. Esta investigación es de tipo cuantitativa y su metodología es descriptiva. La técnica utilizada fue la aplicación de un pre-test y post-test. Los resultados obtenidos validan que la teoría de inteligencias múltiples posee un efecto positivo en el aprendizaje de las estudiantes respecto a su emocionalidad. Esta investigación utilizó el contenido de plano cartesiano, utilizando estaciones de trabajo para evidenciar un impacto en los ejes que abarca esta investigación.

Palabras clave: Inteligencias múltiples, emocionalidad, didáctica

Abstract
The present paper is aimed at enhancing the teaching-learning process on the axes: motivation, participation, internalization and meaningful learning. A methodology based on Gardner's multiple intelligence theory was used in a mathematics class, in two seventh-year courses of basic education at San Juan Bautista School, from the commune of Ñuñoa, in Santiago of Chile. This research is of quantitative nature, and its methodology is descriptive. The technique used was the application of a pre-test and a post-test. The results obtained validate that the theory of multiple intelligences has a positive effect on students' learning regarding their emotionality. This research used the Cartesian plane content; using workstations to show an impact in the axes this research covers.

Key words: multiple intelligences, emotionality, didactics

Introducción

El objetivo de esta investigación es mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en los ejes de motivación, participación, internalización y aprendizaje significativo, utilizando una metodología basada en la teoría de inteligencias múltiples en una clase de matemática. Según Prado, Navarro, Berguido y De la Cruz (2013), la clase de matemática es aburrida y agobiante para algunos estudiantes, generando un motivo de frustración y fracaso. Además, esta clase no genera interés en los estudiantes debido a que su enseñanza es monótona y sin juegos, lo que genera una apatía, niveles bajos de comprensión y dificultades de aprendizaje. Por otra parte, la valoración del razonamiento lógico-matemático de los niños de Educación Primaria ha estado tradicionalmente ligada a las medidas psicométricas tradicionales, que miden solo el contenido que aprendió en la clase (Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando, y Prieto, 2008) y por tanto no se aborda en ellas lo emocional y vivencias de los estudiantes.

Esto conforma una problemática en cuanto a que no responde a la diversidad de las inteligencias múltiples que existen en el aula, contribuyendo a las dificultades de aprendizaje en matemáticas. Además, estas dificultades prevalecen en todos los niveles educativos, lo que puede conllevar a un rendimiento más lento e incluso al fracaso escolar (Arbones, 2005). Más aún si consideramos que los aprendizajes matemáticos conforman una sucesión de conocimientos que se enlazan con conocimientos anteriores, por lo que las dificultades que se presentan al inicio se pueden llevar con posterioridad volviéndose aún más complejas (Fernández, 2013). En los últimos años distintas investigaciones han contribuido en cuantificar la relación que tiene la teoría de inteligencias múltiples con el mejoramiento de los aprendizajes (Abdi, Laei, y Ahmadyan, 2013; Othman, 2013; Widiana y Jampel, 2016; Winarti, Yuanita y Nur, 2019). Sin embargo, estas no abordan la emocionalidad en los estudiantes.

La emocionalidad posee un rol fundamental en los aprendizajes que adquieren los estudiantes y en las acciones que se emprenden para ello, debido a que cuando la enseñanza considera las emociones, los resultados son muy superiores a cuando la enseñanza es impersonal y alejada de un acercamiento afectivo (Pacheco, Villagrán, y Guzmán, 2015). Debido a esto, en esta investigación se pretende incorporar cada una de las inteligencias múltiples en el proceso de enseñanza-aprendizaje del estudiante, con énfasis en la emocionalidad, con el fin de contribuir para que el clima del aula sea desafiante tanto para los estudiantes como para el docente. La problemática que aborda esta investigación de carácter exploratorio refiere al efecto que tiene la metodología basada en inteligencias múltiples en los factores que aborda esta investigación que inciden dentro de una clase de matemática.

Considerando que los estudiantes presentan ante el trabajo matemático distintas dificultades de aprendizaje, tales como: la auto-monitorización, que lleva a los estudiantes a no planificar y no revisar su trabajo, y por lo tanto, no conocen sus falencias; la impulsividad, vista como la búsqueda rápida de respuestas que conduce a cometer múltiples errores en el proceso y que probablemente se relacionen con la falta de atención y la dificultad referida a la memoria, que se manifiesta en problemas para memorizar contenidos como tablas de multiplicar, estrategias para almacenamiento de información, rotación e inversiones de números y letras como, por ejemplo: olvido de secuencias de algoritmos o pasos para llevar a cabo una operación (Castejón y Navas, 2011; García y Pacheco, 2011; Semenza, Miceli y Girelli, 1997).

La investigación que se reporta en este artículo propone un diseño que se orienta en torno a cuatro ejes fundamentales: motivación, participación, internalización del aprendizaje y aprendizaje significativo para analizar y determinar la relación que existe entre las inteligencias múltiples y la enseñanza de algún contenido en específico en matemática, en este caso la noción de plano cartesiano.

Marco teórico

En la antigüedad, se hizo referencia al concepto de inteligencia a los sabios o personas que poseían una gran cantidad de conocimientos, en su mayoría prácticos, legales, y sobre actividades que desarrollaban en su cotidianidad dentro

del contexto social que vivían. Luego, a través de los años, las sociedades fueron evolucionando y con ello, el conocimiento respecto del concepto de inteligencia también (Chavarría, 2015).

A partir del siglo XVIII, junto con el desarrollo de la sociedad moderna y de las industrias, el conocimiento se expandió a un sector más amplio de la población, de esta forma la inteligencia se vinculó con las habilidades en el ámbito lingüístico como leer, escribir o recopilar información y en el ámbito lógico-matemático con actividades relacionadas directamente con el comercio tales como, contar, calcular, medir, entre otras (Chavarría, 2015). Prevaleciendo esta forma de visualizar la inteligencia hasta la actualidad. Posteriormente, Gardner (2017), propone en la teoría de inteligencias múltiples que no solamente existe la inteligencia lógico-matemático y lingüística, sino que existen ocho tipos de inteligencias. Las inteligencias específicas que incluye Gardner en su teoría son aptitudes subjetivas de acción en el medio, por lo que las inteligencias no son cuantificables, sino que se expresan en ciertas habilidades y comportamientos, que destacan en el entorno social (Mora y Martín, 2007).

Varias investigaciones como (Casado, 2016; Chavarría, 2015; Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto, 2008; Lastra, 2017) relacionan la enseñanza de la matemática con el uso de la teoría de inteligencias múltiples para la realización de una clase o proyectos educativos.

En este sentido Ferrándiz, et al. (2008), propone varios pasos a seguir para la enseñanza desde las inteligencias múltiples. Primero considera necesario tener en cuenta el ritmo de aprendizaje y la capacidad para aprender que tiene cada estudiante de forma específica. En segundo lugar, a partir de cada inteligencia que posea el estudiante, se busca sacar el máximo provecho para poder suplir las deficiencias con relación a las demás inteligencias y llegar así a una superación personal. En tercer lugar, se debe desarrollar en el estudiante la habilidad de aplicar de forma transversal los conocimientos y habilidades adquiridas en las diferentes áreas de aprendizaje, como también su contextualización, y, por último, los estudiantes son protagonistas de su propio aprendizaje. La investigación de Ferrándiz evidencia que el uso de las inteligencias múltiples es un aporte para la enseñanza y el aprendizaje de un contenido específico.

El eje de motivación, en esta investigación se describe específicamente como la activación de recursos cognitivos para aprender aquello que la escuela propone como aprendizaje, donde el docente debe guiar al estudiante en el aprendizaje de manera que éste represente los objetivos y los motivos por los cuales debe realizar una cierta actividad (Valenzuela, 2007). Además, el aprendizaje y el objetivo debe estar coherentemente vinculados (Sole, 2001).

El eje participación en esta investigación, se comprende como un proceso indispensable para el aprendizaje del estudiante, resultando en un aprendizaje infructuoso si este no participa, ya sea en forma grupal o individual para poder incorporar los nuevos conocimientos, y hacerlos propios (Ferreiro, 2005). Además, debido a la importancia de la participación y la estrecha relación que tiene con el proceso de formación de los estudiantes, se observa que, a mayor vinculación exista en el estudiante en su proceso de aprendizaje, más son las oportunidades de generar un aprendizaje significativo, por lo mismo, una enseñanza centrada en lo memorístico y en el conocimiento se relaciona con una baja calidad educativa (Marzano, 1992).

Al definir el tercer eje de esta investigación, el aprendizaje significativo, se explica como la interiorización de nuevos conocimientos por medio de la interacción de las estructuras cognoscitivas presentes en el sujeto con la nueva información, de esta forma el nuevo conocimiento adquirido toma sentido al articularse con los conocimientos preexistentes, dándole un significado a quien aprende. Esto es fundamental dentro del área de la didáctica para que los docentes puedan generar el conocimiento como un pensamiento crítico y reflexivo, de ahí que la relación entre la estructura cognoscitiva y el material a aprender no debe ser arbitraria ni sustancial (Ausubel, Novak y Hanesian, 1983).

Y, por último, el eje de internalización del aprendizaje vista como la reconstrucción interna de una operación externa (Vigotsky, 1979). De esta definición son destacables al menos dos aspectos: primero, que los procesos tradicionalmente atribuidos a los individuos puedan ser atribuidos a la interacción entre personas en contextos grupales y, segundo, la relación de inherencia entre procesos externos (sociales) e internos (Wertsch, 1988), que adopta la manera de una relación genética entre ambos planos (Vygotski, 1979).

En síntesis, el concepto de inteligencia se ha abordado de diferentes formas a lo largo de la historia, dándole un énfasis exclusivamente a la inteligencia lingüística e inteligencia lógico-matemático, siendo está concepción la más aceptada y repetida hasta la actualidad en el ámbito escolar, desentendiendo a la diversidad que existe en el aula. Sin embargo, la teoría de inteligencias múltiples incorpora la gran diversidad que existe en este contexto, dando buenos resultados en el ámbito escolar. Asimismo, la motivación, la participación, la internalización del aprendizaje y un aprendizaje significativo se configuran como ejes fundamentales para abordar la relación que existe entre la teoría de inteligencias múltiples y la enseñanza de la matemática, constituyéndose en el desarrollo y el resultado de esta investigación.

Método

Se aplicó una investigación cuantitativa, de metodología descriptiva, utilizando la técnica de aplicación pre-test y pos-test mencionada por Hernández, Fernández y Baptista (2014), que considera la implementación de una situación experimental referida a un contenido en específico que corresponde a un objetivo de aprendizaje del currículum de séptimo básico en Chile. Es una investigación que se hace en el marco de la asignatura de matemática.

La muestra la componen 57 estudiantes mujeres que cursan séptimo año básico del colegio San Juan Bautista de la comuna de Ñuñoa de Chile, en dos grupos de alrededor de 27 estudiantes aproximadamente. El diseño fue cuasi experimental con un pre-test y post-test que constó de 23 preguntas cada uno, ambos del tipo escala de Likert. Mediante el cual se buscó conocer y cuantificar la experiencia y emocionalidad de las estudiantes en los ejes que abarca esta investigación.

El pre-test y el pos-test tuvo una validación mediante una jueza, y no utilicé la validación estadística debido a la acotada muestra de estudiantes participantes de la investigación. La validación proviene de una fuente especialista en didáctica de la matemática, y formación de profesores. Esta fuente hizo correcciones de redacción de los enunciados, modificando el material original de este trabajo.

Las preguntas pre-test aplicadas a las estudiantes, se clasificaron en los cuatro ejes que abarca esta investigación.

El eje de motivación abarca nueve preguntas, las cuales son:

1. La clase de matemática es monótona y aburrida
2. La clase de matemática es entretenida
3. El profesor de matemática es agradable en la clase de matemática
4. El profesor consigue mantener mi atención durante las clases
5. Me gustaría seguir teniendo clase de matemática con este profesor
6. El profesor considera cada una de mis habilidades en la clase de matemática
7. El profesor me ha motivado a trabajar al máximo con cada una de mis habilidades
8. La asignatura cubre mis expectativas

El eje de aprendizaje significativo abarca cuatro preguntas, las cuales son:

1. El profesor muestra para qué sirve lo que estoy aprendiendo
2. Lo que aprendo en matemática lo podré aplicar a mi vida diaria
3. Lo que aprendo en matemática lo recuerdo fácilmente cada vez que me lo preguntan

4. Lo que aprendo en matemática es significativo para mi

El eje de internalización del aprendizaje abarca seis preguntas, las cuales son:

1. Es fácil aprender el contenido de la clase de matemática
2. El profesor resuelve mis dudas con exactitud
3. El profesor se muestra dispuesto a ayudar a los estudiantes que tienen dificultades
4. Puedo realizar de forma autónoma cualquier actividad en la clase de matemática
5. El contenido de la asignatura se adapta a mis necesidades
6. Lo que aprendo en matemática se involucra con mis habilidades

Y en el eje de participación abarca cinco preguntas, las cuales son:

1. El clima que existe en el aula es adecuado para yo poder aprender
2. El clima de la sala de clase es adecuado para poder decir mi opinión
3. El profesor consigue que yo participe activamente en sus clases
4. El profesor introduce temas de discusión y me anima a participar
5. En la asignatura de matemática puedo trabajar en grupo

Luego, en el post-test se incluyeron las mismas preguntas, cambiando la temporalidad de la pregunta. Por ejemplo, la clase de matemática de hoy fue monótona y aburrida.

La situación experimental se basó en la serie de eventos instruccionales por Gagné (1977). (a) Obtener la atención de las estudiantes, modificando el orden del aula. (b) Introducción de los profesores respecto a la secuencia y planificación de la clase. (c) Conocimiento previos, donde las estudiantes reflejaban sus pensamientos y conocimientos sobre plano cartesiano. (d) Presentar el objetivo de aprendizaje y dar las instrucciones mencionando cómo funcionará la dinámica con el material instructivo. (e) Las estudiantes realizan la dinámica de la clase. (f) Se concluye con reflexiones y retroalimentación con las estudiantes.

Las actividades del evento (e), fueron desarrolladas por las alumnas agrupadas de cuatro a cinco estudiantes, y cada estación de trabajo se basó en una inteligencia múltiple. En esta experiencia pedagógica participaron tres docentes en el aula, una de ellas, docente de matemática del establecimiento, y las otras dos, docentes de pasantía. Las actividades de las estaciones de aprendizaje fueron entregadas previamente a las docentes.

- *Estación uno*, inteligencia kinestésica-corporal, las estudiantes tenían que obtener de manera aleatoria un papel de una caja que contenía coordenadas, y otro papel de una caja que contenía la acción que debían hacer. Luego, las estudiantes debían realizar la acción identificando la posición correcta en los cuadrantes del plano cartesiano ubicado en el suelo.

- *Estación dos*, inteligencia interpersonal, las estudiantes sacaban una coordenada al azar de una caja, y tenían que ubicar el punto en un plano cartesiano, luego seguía el turno de otra compañera que debía realizar la misma acción. Al terminar el turno de todas las compañeras, tenían que unir los puntos y ver la figura que se formaba, se tenía que repetir esta acción hasta que no quedarán coordenadas y lograr formar en conjunto la figura correcta en el plano cartesiano.

- *Estación tres*, inteligencia espacial, el orden de las estudiantes se daba de manera previa con una hoja de instrucciones, luego debían lanzar dos dados de 6 caras, uno rojo que representaba números negativos, y uno azul que representaba números positivos, el primer lanzamiento correspondía al eje “x” y el segundo lanzamiento al eje “y”. Cada jugadora tenía seis fichas de un color diferente, estas fichas se utilizaban para marcar aquellas coordenadas que daban los dados, si las coordenadas ya se encontraban marcadas en el tablero perdían su turno, ganaba el juego quien completaba el tablero con sus fichas.

- *Estación cuatro*, inteligencia intrapersonal, las estudiantes tenían que ubicar coordenadas en un plano cartesiano para ayudar a los turistas a encontrar lugares de intereses.

- *Estación cinco*, inteligencia lingüística, las estudiantes tenían que descubrir una palabra secreta, que estaba dada por coordenadas que tenían que sacar de una caja, cada coordenada correspondía a una letra la cual se encontraba previamente ordenada y asignada en una hoja de instrucciones para formar una palabra coherente.

- *Estación seis*, inteligencia naturalista, las estudiantes debían dibujar en un plano cartesiano un cuerpo humano para luego descubrir las coordenadas donde se encontraba cada parte del cuerpo.

- *Estación siete*, inteligencia musical, las estudiantes sacaban una coordenada al azar dentro una caja y dependiendo de la coordenada, debían interpretar un ritmo indicado en la posición del plano cartesiano.

- *Estación ocho*, inteligencia lógico-matemático, las estudiantes tenían una hoja de instrucciones con un plano cartesiano donde debían entregar coordenadas de puntos previamente asignados y localizar puntos en posiciones correctas.

Al finalizar el evento (e) y comenzar el evento (f), las estudiantes comentaron que la actividad de la clase había estado muy buena, que ahora si le gustaba la matemática, y comprendían para que se podía utilizar el plano cartesiano en la vida cotidiana.

Resultados

Producto de esta experiencia, los resultados se obtuvieron mediante las preguntas aplicadas en el pre-test y post-test. Estas preguntas se basaron en los cuatro ejes que abarca esta investigación.

La percepción de las estudiantes en la clase de matemática fue medida mediante su valoración con respecto al tipo de respuestas en ambos test aplicados. Para ello se clasificó en los ejes que abarca esta investigación. Las estudiantes se cuantifican según la tabla 1.

Tabla 1. Número de estudiantes en cada curso

Alumnos		
	7°A	7°B
Pre-Test	29	28
Post-Test	29	27

El análisis de los datos se presenta separados por los ejes asumidos en la investigación. La preparación incluye la unificación de los puntajes asociados a las respuestas considerando aquellos enunciados positivos en que lo favorable era estar de acuerdo, y aquellas negativas en que lo favorable era estar en desacuerdo. Se agruparon las respuestas “completamente de acuerdo” y “muy de acuerdo” de cada enunciado con la cantidad de estudiantes que consideraron esas preferencias, y el porcentaje representa la cantidad de respuestas positivas con respecto al total.

En el eje de motivación se aprecia la tabla 2 con los resultados positivos de las preguntas del pre-test y post-test de las estudiantes de los cursos 7°A y 7°B.

Tabla 2. Percepción de las estudiantes en el eje motivación

Eje de Motivación								
	7°A				7°B			
Preguntas	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**
Pregunta 1	16	26	55%	90%	15	20	54%	74%
Pregunta 2	10	27	34%	93%	6	19	21%	70%
Pregunta 3	23	26	79%	90%	19	20	68%	74%
Pregunta 4	12	26	41%	90%	11	17	39%	63%
Pregunta 5	21	25	72%	86%	15	19	54%	70%
Pregunta 6	16	25	55%	86%	12	17	43%	63%
Pregunta 7	18	25	62%	86%	13	18	46%	67%
Pregunta 8	12	28	41%	97%	10	19	36%	70%
Pregunta 9	14	26	48%	90%	14	17	50%	63%

En este eje se puede concluir que el curso 7°A tuvo una variación porcentual del 65% y el curso 7°B del 44% respecto a los resultados positivos en pre-test y post-test. Esto significa que las estudiantes involucradas respondieron positivamente a la clase basada en la teoría de inteligencias múltiples, debido a que su autopercepción con respecto a la motivación dentro de la propuesta mejoró en comparación a una clase tradicional. Este mejoramiento también logró verse respectivamente en los demás ejes.

En el eje de internalización del aprendizaje se aprecia la tabla 3 con los resultados positivos de las preguntas del pre-test y post-test de las estudiantes de los cursos 7°A y 7°B.

Tabla 3. Percepción de las estudiantes en el eje internalización del aprendizaje

Eje Internalización del Aprendizaje								
	7°A				7°B			
Preguntas	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**
Pregunta 1	9	25	31%	86%	5	17	18%	63%
Pregunta 2	21	25	72%	86%	16	17	57%	63%
Pregunta 3	23	26	79%	90%	20	18	71%	67%
Pregunta 4	17	22	59%	76%	6	19	21%	70%
Pregunta 5	11	25	38%	86%	10	13	36%	48%

Pregunta 6	12	22	41%	76%	10	15	36%	56%

En este eje, se puede concluir el curso 7°A tuvo una variación porcentual del 56% y el curso 7°B del 48%.

En el eje de aprendizaje significativo se aprecia la tabla 4 con los resultados positivos de las preguntas del pre-test y post-test de las estudiantes de los cursos 7°A y 7°B.

Tabla 4. Percepción de las estudiantes en el eje aprendizaje significativo

Eje Aprendizaje Significativo								
	7°A				7°B			
Preguntas	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**
Pregunta 1	19	24	66%	83%	13	16	46%	59%
Pregunta 2	17	21	59%	72%	7	10	25%	37%
Pregunta 3	11	23	38%	79%	6	15	21%	56%
Pregunta 4	10	18	34%	62%	8	15	29%	56%

En este eje, se puede concluir que el curso 7°A tuvo una variación porcentual del 51% y el curso 7°B del 65%.

Por último, en el eje de participación se aprecia la tabla 5 con los resultados positivos de las preguntas del pre-test y post-test de las estudiantes de los cursos 7°A y 7°B.

Tabla 5. Percepción de las estudiantes en el eje participación

Eje de Participación								
	7°A				7°B			
Preguntas	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**	**Pre-test**	**Post-test**	**Pre-test %**	**Post-test %**
Pregunta 1	19	26	66%	90%	4	13	14%	48%
Pregunta 2	14	26	48%	90%	6	12	21%	44%
Pregunta 3	12	29	41%	100%	9	21	32%	78%
Pregunta 4	13	24	45%	83%	11	18	39%	67%

Luego, en el eje de participación se puede concluir que el curso 7°A hubo una variación porcentual del 40% y el curso 7°B del 39%.

En síntesis, los resultados muestran que se podría considerar los siguientes aspectos en una clase basada en inteligencias múltiples:

a) El profesor debe considerar cada una de las habilidades de sus estudiantes
b) El profesor debe crear un ambiente propicio para que cada estudiante pueda opinar y participar durante la clase
c) La clase debe ser favorable para que los estudiantes puedan aprender matemática a través de sus propios tipos de inteligencias
d) El profesor y los estudiantes deben contextualizar cada aprendizaje
e) Los estudiantes deben aplicar el aprendizaje en diferentes contextos
f) El profesor debe potenciar la autonomía y el trabajo en grupo

Conclusiones

Este estudio mostró que existe una relación positiva entre la clase de matemática desarrollada con el contenido de plano cartesiano y la teoría de inteligencias múltiples. Si bien, este trabajo no se basó en la medición de los conocimientos adquiridos en la clase de plano cartesiano, si consideró la emocionalidad que tienen las estudiantes al momento de enfrentar una clase de matemática tradicional y una clase de matemática basada en la teoría de inteligencias múltiples.

Finalmente, la relevancia de esta investigación apunta principalmente a la contribución de la mejora de la emocionalidad de las estudiantes. En esta investigación, se desprende que la teoría de inteligencias múltiples posee el potencial para convertirse en una herramienta pedagógica fundamental para el desarrollo integral del estudiante, abordándolo desde todas sus capacidades y potenciando aquellas en que se destacan y reforzando las más débiles sin un carácter punitivo, lo que permitió un trabajo integral y positivo en el contenido de plano cartesiano. Además, se desprende que el trabajo con las inteligencias múltiples contribuye a la mejora en los ejes que aborda esta investigación. Por último, el desafío está en la aplicación de esta metodología a distintos contextos y a una mayor escala, debido a que los resultados son solo de un contexto predeterminado y la muestra es acotada para poder hacer conjeturas generales. Además, la metodología podría ser aplicada en distintos contenidos de matemática y otras asignaturas.

Referencias bibliográficas

Abdi, A., Laei, S. y Ahmadyan, H. (2013). The effect of teaching strategy based on multiple intelligences on students' academic achievement in science course. *Universal Journal of Educational Research*, *1*(4), 281-284.

Arbones, B. (2005). *Cómo descubrir, tratar y prevenir los problemas en la escuela*. Detección, prevención y tratamiento de dificultades del aprendizaje. Vigo: Ideas propias Editorial.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (2ª ed.). México: Trillas.

Casado, M. (2016). *El programa ENTUSIASMAT en educación primaria.* (Tesis de Grado). Universidad de Jaén, Andalucía, España.

Castejón, J. y Navas, L. (2011). *Dificultades y trastornos del aprendizaje y del desarrollo en infantil y primaria*. Alicante: Editorial Club Universitario.

Chavarría, C. (2015). *Aplicación de las Inteligencias Múltiples a las matemáticas en educación primaria: La evaluación de los estándares de aprendizaje.* (Tesis de Doctorado). Universidad Rey Juan Carlos, Madrid, España.

Fernández, C. (2013). *Principales dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. Pautas para maestros de Educación Primaria*. (Tesis de Grado). Universidad Internacional de la Rioja, Barcelona, España).

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M. y Prieto, M. (2008). A study of logical-mathematical thinking from multiple intelligences framework. *Annals of Psychology*, *24*(2), 213-222.

Ferreiro, R. (2005). La participación en clase. *Rompan Filas, 76*, 3-7.

Gagne, R. (1977). *The Conditions of Learning Third Edition*. New York: Holt Saunders International Editions.

García, J. y Pacheco, D. (2012). *Intervención psicopedagógica en las dificultades de aprendizaje de las matemáticas.* Trabajo presentado en el V Congresso Internacional de Trastorno e Dificuldade de Aprendizagem, Belo Horizonte, Brasil.

Gardner, H. (2017). *Estructuras de la Mente. La Teoría de las Inteligencias Múltiples.* 3ª ed. México: Fondo de la Cultura Económica

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* 5ª ed. México: Mc Graw Hill

Lastra, C. (2017). *Inteligencias múltiples y aprendizaje de matemática en estudiantes de primer grado de la institución educativa "José Quiñones" La Molina.* (Tesis de maestría). Universidad César Vallejo, Trujillo, Perú.

López, L. (2004). La motivación en el aula. *Pulso, 27*, 95-107.

Luz, S. (2009). El docente y las inteligencias múltiples. *Revista Iberoamericana de Educación*, *34*(1), 1-12.

Marzano, R. (1992). *Dimensiones del Aprendizaje*. 2ª ed. México: Iteso.

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005*). Investigación educativa: una introducción conceptual.* Madrid: Pearson Addison Wesley.

Ministerio de educación de Chile. (2011). *Reformulación política nacional de convivencia escolar*. Autor.

Molero, C., Saiz, V. y Esteban, C. (1998). Revisión histórica del concepto de inteligencia: una aproximación a la inteligencia emocional. *Revista latinoamericana de psicología*, *30*(1), 11-30.

Mora, J. y Martín, M. (2007). Relación entre Inteligencia Emocional y personalidad en sus distintas concepciones teóricas. En Fernández, P., *Avances en el estudio de la inteligencia emocional* (pp.91-96). España: Fundación Marcelino Botín

Muñoz, G. (2011). La democracia y la participación en la escuela: ¿cuánto se ha avanzado desde la normativa para promover la participación escolar? *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, *10*(19), 107-129.

Ospina, L. (2011). *Principales dificultades cognitivas para el aprendizaje de matemática en primaria*. (Tesis de Grado). Universidad Católica Luis Amigó, Medellín, Colombia.

Othman., I. (2013). Elements of multiple intelligences in teaching and learning activities and the effect on students' achievement based on gender. *IOSR Journal of Research & Method in Education, 2*(3), 28-32.

Pacheco, P., Villagrán, S. y Guzmán, C. (2015). Estudio del campo emocional en el aula y simulación de su evolución durante un proceso de enseñanza-aprendizaje para cursos de ciencias. *Estudios pedagógicos (Valdivia)*, *41*(1), 199-217.

Pozo, M. (2011). *Inteligencias Múltiples en acción.* Tekman Books.

Prado, M., Navarro, Berguido, S. y De la Cruz, J. (2013). *El por qué de la apatía a la matemática.* (Tesis de Maestría). Universidad de Panamá, Panamá.

Prieto. (2005). La participación estudiantil: ¿Un camino hacia su emancipación? *Theoria,* 14 (1), 27-36.

Rodríguez, M., Greca I. y Moreira, M. (2010). *La teoría del aprendizaje significativo en la perspectiva de la psicología cognitiva.* Barcelona: Octaedro.

Rosas, R. y Sebastián, C. (2001). *Piaget, Vygotski y Maturana.* Buenos Aires: Aique.

Semenza, C., Miceli, L. y Girelli, L. (1997). A deficit for arithmetical procedures: Lack of knowledge or lack of monitoring? *Cortex*, *33*, 483-498.

Sole, I. (2001). El apoyo del profesor. *Revista aula de innovación educativa, 101,* 54-57.

Tojo, C. (2003). Una revisión sobre el tema de la inteligencia desde la perspectiva educativa: Teoría e investigación. *Faisca: Revista De Altas Capacidades, 10*, 62-95.

Valenzuela, J. (2007). Más allá de la tarea: Pistas para una redefinición del concepto de motivación escolar. *Educaçao e Pesquisa, 3*, 409-426.

Vygotski, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica.

Vygotsky, L. (2003). *Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas.* México: Quinto Sol.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.

Widiana, W. y Jampel, N. (2016). Improving students creative thinking and achievement through the implementation of multiple intelligence approach with mind mapping. *International Journal of Evaluation and Research in Education, 5*(3), 246-254.

Winarti, A., Yuanita, L. y Nur, M. (2019). The effectiveness of multiple intelligences based teaching strategy in enhancing the multiple intelligences and Science Process Skills of junior high school students. *Journal of Technology and Science Education*, *9*(2), 122-135.

Woolfolk, A. (1990). *Psicología Educativa*. México: Prentice Hall.

Zilberstein, J. y Valdés, V. (2001). *Aprendizaje escolar, diagnóstico y calidad educativa* (2ªed.). México: Ediciones Ceides.

LAS CREENCIAS DE AUTOEFICACIA Y SU IMPACTO EN EL DESEMPEÑO Y PERMANENCIA EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

THE BELIEFS OF SELF-EFFICIENCY AND ITS IMPACT ON STUDENTS' PERFORMANCE AND PERMANENCE IN THE BACHELOR'S DEGREE IN MATHEMATICS

Lorena Jiménez Sandoval, Isai Francisco Carmona Borjón
Universidad Autónoma de Zacatecas (México)
lorenajimenez@uaz.edu.mx, isaiborjon9@gmail.com

Resumen
Se presenta el marco teórico y metodológico de una investigación sobre los cambios en las creencias de autoeficacia de 29 estudiantes de una Licenciatura en Matemáticas transcurridos 18 meses luego de su ingreso, y el impacto que estos tienen en su desempeño académico. Caracterizaremos las creencias de autoeficacia en términos de las fuentes descritas en la teoría cognitiva social empleando el análisis temático, analizaremos el desempeño dando un seguimiento a sus calificaciones y mediremos el logro con los resultados de sus cursos y las escalas de autoeficacia que aplicaremos junto con la solución de problemas propuestos. Hasta este momento se tiene la primera fase del análisis temático de las entrevistas iniciales y un primer acercamiento a las respuestas de los estudiantes a la primera escala de autoeficacia general aplicada, estos muestran que los estudiantes ingresan con un alto sentido de eficacia que se ve afectado por los fracasos escolares de inicio de semestre y que este decaerá dependiendo de la fuente que las origina.

Palabras clave: autoeficacia, rendimiento académico**,** licenciatura en matemáticas

Abstract
This paper presents the theoretical and methodological framework of an investigation on the changes of self-efficiency beliefs of 29 students of a Bachelor's Degree in Mathematics after the first 18 months of their admission; and the impact that these changes have on their academic performance. We will characterize the beliefs of self-efficiency in terms of the sources described in social cognitive theory, using thematic analysis. We will analyze the performance monitoring their marks, and we will measure the achievement with the final results of their courses and the self-efficiency scales that we will apply together with the solution of proposed problems. Up to now, the first phase of the thematic analysis of the interviews and a first approach to the students' answers to the first general self-efficiency scales applied shows that students enter with a high sense of efficiency that is affected by school failures at the beginning of the semester and that it will gradually decline depending on the source that originates it.

Key words: self-efficiency, academic performance, bachelor's degree in mathematics

Introducción

En la Licenciatura en Matemáticas que se ofrece en la Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ), a pesar de los esfuerzos hechos por la planta docente, existe un alto índice de deserción de estudiantes en los primeros semestres. Los estudiantes que ingresan lo hacen despues de haber obtenido excelentes calificaciones en las matemáticas del bachillerato y éstas se ven disminuidas significativamente en los primeros meses luego de su ingreso a la licenciatura (Borjon, E, Torres, M. R. y Jiménez, L., 2015).

Desde el 2014 se han explorado alternativas para mejorar los procesos de selección y hacer menos abrupta la transición que viven los estudiantes al transitar del bachillerato al nivel superior, porque se cree que esta es uno de los aspectos que afectan el desempeño inicial de los estudiantes en la carrera de matemáticas. Entre estas alternativas estan los análisis de aspectos cognitivos y afectivos de los aspirantes a la licenciatura que se han ido ampliando y profundizando año con año. Algunos de los resultados de dichos análisis que se han hecho en el marco del dominio afectivo de las generaciones de ingreso del 2014 al 2017, muestran que las creencias de autoeficacia resultan determinantes en las desiciones que toman los estudiantes durante el primer semestre en torno a continuar o abandonar la carrera de matemáticas y en la actitud con la que enfrentan las dificultades si deciden continuar.

Investigaciones como la de Contreras et al (2005) reporta que en estudiantes de secundaria, la autoeficacia es el mejor predictor del rendimiento académico en las áreas artísticas, sociales y matemáticas. Dimarakis, Bobis, Way & Anderson (2014) reportan la existencia de una implicación estadística entre las creencias de autoeficacia y el desempeño académico en estudiantes de 7° año de una *High School* (12 a 15 años de edad) en Australia. Sus resultados indican que las creencias de autoeficacia juegan un papel importante en las disposiciones individuales de los estudiantes, particularmente en la persistencia, y que son las experiencias personales y los resultados obtenidos con anterioridad los que impactan sobre su voluntad de persistir cuando se enfrentan a dificultades.

Según De Corte, Verschaffel, y Op ‘t Eynde, (2000); Schoenfeld, (2002) y De Corte, (2004), citados por Gómez-Chacón, Op´t Eynde & Corte (2006), hay 5 aptitudes que todos los estudiantes deberían adquirir para tener una buena disposición matemática: conocimiento matemático, métodos heurísticos, meta-conocimientos, habilidades de autorregulación y creencias positivas sobre la matemática y su aprendizaje. La investigación reporta una descripción del sistema de creencias de estudiantes de tercer año de secundaria y establece relaciones entre creencias, género, contexto sociocultural, rendimiento y la opción de estudio que eligen los estudiantes para su futuro académico.

Lester, Garofano & Lambdin, (1989) realizaron un estudio con estudiantes del séptimo grado en dos clases de matemáticas. En dicho estudio se describió, entre otros aspectos, la relación existente entre la resolución de problemas y las cuestiones de confianza en sí mismo, motivación y perseverancia. Los autores postulan que los errores que puede cometer una persona al intentar resolver un problema exitosamente, cuando esta posee los conocimientos necesarios, se deriva de la presencia de factores no cognitivos y meta cognitivos que inhiben la adecuada utilización de este conocimiento, estos factores son al menos de cuatro tipos: afectos y actitudes, creencias, control y factores contextuales.

Una de las conjeturas que plantean luego del análisis de sus datos es que las creencias de un individuo sobre sí mismo, las matemáticas y sobre la resolución de problemas juegan un papel dominante, a menudo abrumador, en su comportamiento en la resolución de problemas. Estos autores están convencidos de que las creencias afectan el comportamiento, particularmente el comportamiento asociado con el aprendizaje y la matemática; y que sin embargo, las creencias se han ignorado en los estudios sobre el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas. Consideran que las creencias que una persona tiene sobre su capacidad para hacer matemáticas, sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre la resolución de problemas son fuerzas dominantes en la configuración del comportamiento de esa persona mientras está comprometido con una tarea matemática.

Los estudios sobre el impacto de las creencias de autoeficacia en el desempeño de los estudiantes encontrados hasta el momento se han realizado en niveles previos al nivel superior y son, en su mayoría, estudios cuantitativos. La investigación que emprendimos es en el nivel superior y es de carácter cualitativo. Se busca caracterizar las creencias de autoeficacia de los 29 estudiantes que ingresaron a la Licenciatura en Matemáticas de la UAZ en agosto del 2018, los cambios que estas sufren y el impacto que tienen en el desempeño académico y su permanencia en el programa. En el presente documento se reporta el marco referencial, los instrumentos que se diseñaron para el levantamiento de la información y la metodología que emplearemos para el análisis.

Marco teórico

En Bandura (1989) se establece la importancia las creencias de autoeficacia para la motivación y para la acción, se explica que estas operan en las acciones a través de la motivación y de los procesos cognitivos y afectivos. Las creencias de autoeficacia afectan a los patrones de pensamiento y pueden ser empleadas para la autoayuda o servir de auto-obstaculización, es decir, las creencias de autoeficacia pueden servir como impulso para el desarrollo cognitivo, pero también pueden causar obstáculos cognitivos.

Según este autor, las personas que creen firmemente en su capacidad para la resolución de problemas son altamente eficaces en su análisis para enfrentar situaciones complejas y de toma de decisiones. En el caso contrario, las personas que están llenas de dudas sobre su capacidad, son erráticas en su pensamiento analítico y la calidad de este afecta a su vez los logros de rendimiento. Las preocupaciones de las personas sobre su eficacia influyen en los tipos de escenario anticipatorio, esto es, las personas con alto sentido de eficacia se visualizan en escenarios de éxito, en cambio, las personas que se ven en escenarios de fallas, tienen más bien un alto sentido de ineficacia. La autoeficacia percibida y simulación cognitiva son bidireccionalmente afectadas. Un alto sentido de eficacia fomenta la construcción cognitiva de acciones efectivas y la reiteración cognitiva de cursos de acción efectiva fortalece la autopercepción de eficacia.

Bandura (1994) define las creencias de autoeficacia como las creencias de las personas sobre sus capacidades para producir niveles designados de desempeño que ejercen influencia sobre eventos que afectan sus vidas y explica, que son cuatro tipos de experiencias las que originan:

Experiencias de dominio: los éxitos construyen una sólida creencia en la eficacia personal, mientras que las fallas la socavan, especialmente si ocurren fallas antes de que se establezca firmemente un sentido de eficacia. Si las personas experimentan solo éxitos fáciles, esperan resultados rápidos y el fracaso los desalienta fácilmente. Un sentido de eficacia flexible requiere de experiencia para superar obstáculos mediante un esfuerzo perseverante. Algunos contratiempos y dificultades en las actividades humanas tienen el propósito útil de enseñar a los individuos que el éxito generalmente requiere un esfuerzo sostenido. Una vez que las personas se convencen de que tienen lo necesario para triunfar, perseveran frente a la adversidad y se recuperan rápidamente de los contratiempos. Al resistirlo en tiempos difíciles, emergen más fuertes que la adversidad (Bandura 1994).

Experiencias vicarias: son experiencias indirectas proporcionadas por modelos sociales. Ver a gente similar a sí mismo tener éxito por el esfuerzo constante eleva las creencias de los observadores haciéndolos creer que ellos también poseen la capacidad de dominar actividades comparables y tener éxito. De igual manera, observar el fracaso de otros a pesar del alto esfuerzo, disminuye los juicios de los observadores sobre su propia eficacia y socavan sus esfuerzos. El impacto de los modelos en la autoeficacia percibida está fuertemente influenciado por la similitud personal percibida con los modelos. Entre más es la similitud asumida, más convincentes son los éxitos y los fracasos de los modelos. Si las personas consideran que los modelos son muy diferentes de sí mismos, su autoeficacia percibida no está muy influenciada por el comportamiento de estos ni por los resultados que produce (Bandura 1994).

Las influencias de modelado hacen más que proporcionar un estándar social contra el cual juzgar las propias capacidades. Las personas buscan modelos competentes que poseen las competencias a las que aspiran. A través de su comportamiento y formas de pensar expresadas, los modelos competentes transmiten conocimiento y enseñan a los observadores habilidades y estrategias efectivas para manejar las demandas del entorno. La adquisición de mejores medios, aumenta la autoeficacia percibida (Bandura 1994).

La persuasión social: La persuasión social es una tercera forma de fortalecer las creencias de las personas de que tienen lo necesario para tener éxito. Las personas que están convencidas verbalmente de que poseen la capacidad de dominar determinadas actividades probablemente movilicen un mayor esfuerzo y lo mantengan a diferencia de aquellas que albergan dudas sobre sí mismas y se apoyan en las deficiencias personales cuando surgen problemas. En la medida en que los aumentos persuasivos en la autoeficacia percibida llevan a las personas a esforzarse lo suficiente para tener éxito, promueven el desarrollo de habilidades y un sentido de eficacia personal (Bandura 1994).

Es más difícil inculcar altas creencias de eficacia personal solo con la persuasión social que socavarlas. Los aumentos de la eficacia poco realistas se confirman rápidamente por los resultados decepcionantes de nuestros esfuerzos. Pero las personas que han sido persuadidas de que carecen de capacidades tienden a evitar actividades desafiantes que cultivan potencialidades y se rinden rápidamente incluso antes de enfrentarse a las dificultades (Bandura 1994). Al restringir las actividades y socavar la motivación, la incredulidad en las capacidades de uno mismo crea su propia validación de comportamiento.

Reacciones al estrés: Las personas también dependen en buena medida de sus estados somáticos y emocionales para juzgar sus capacidades. Interpretan sus reacciones al estrés y la tensión como signos de vulnerabilidad a un desempeño deficiente. En actividades que involucran fuerza y resistencia, las personas juzgan su fatiga, dolores y molestias como signos de debilidad física. El estado de ánimo positivo aumenta la autoeficacia percibida, el estado de ánimo abatido, lo disminuye. El reducir el estrés de las personas y alterar sus emociones negativas, exclusiones y malas interpretaciones de sus estados físicos, ayuda en la conformación de las creencias positivas de autoeficacia. No es solo la intensidad de las reacciones emocionales y físicas lo que importa, sino cómo se perciben e interpretan. Es probable que las personas que tienen un alto sentido de la eficacia vean su estado de excitación afectiva como un facilitador energizante del desempeño, mientras que las personas acosadas por las dudas sobre sí mismas consideran que su excitación es un debilitador. Los indicadores fisiológicos de eficacia desempeñan un papel especialmente influyente en el funcionamiento de la salud y en las actividades deportivas y físicas (Bandura 1994).

En la investigación que se reporta se busca caracterizar las creencias de autoeficacia identificando la fuente que pudo producirlas y determinar cómo estas impactan en el desempeño académico. Chen (2003) considera que, si se quiere emplear las creencias de autoeficacia de los estudiantes para guiar su instrucción o predecir resultados de rendimiento, es necesario saber qué tan bien "calibradas" son estas creencias, es decir que tan cercanas a la realidad son, ya que las creencias optimistas sobre la capacidad académica pueden tener beneficios motivacionales, impulsando a las personas a continuar aprendiendo incluso cuando su desempeño es deficiente, sin embargo, los estudiantes con un sentido de autoeficacia demasiado alto están poco dispuestos a cambiar sus métodos de estudio debido justamente a este exceso de confianza (Zimmerman, Bonner y Kovach, 1996, citado por Chen, 2003), esto puede significar que no son capaces de superar ciertos obstáculos por el simple hecho de "despreciarlos" al sentirse altamente eficaces.

El desempeño académico en nuestro estudio se conceptualiza por el proceso de aprendizaje entorno a los esfuerzos en la labor de aprendizaje de la matemática, como lo menciona Lester et al (1989) y Chen (2003), este se pude ver reflejado en el tiempo de estudio efectivo, la realización de tareas en tiempo y forma, la atención y participación en clases, o bien, en las calificaciones parciales de un curso de matemáticas. En nuestro caso, consideraremos las calificaciones obtenidas por los estudiantes al egresar del bachillerato ya que según Pajares y Graham (1999) los estudiantes que han tenido altos logros con anterioridad pueden ser mejores al estimar su capacidad para resolver un problema matemático que aquellos cuyos logros han sido, más bien, limitados. Para el contraste también forman

parte del desempeño académico las calificaciones obtenidas en las materias de Álgebra (Álgebra Superior I, Álgebra Superior II y Álgebra Lineal I) que cursan ya siendo alumnos de la Licenciatura, por ser consideradas las de mayores índices de reprobación, y los resultados obtenidos en la solución de problemas propuestos y que se aplicarán inmediatamente después de cada una de las aplicaciones de las escalas de autoeficacia como parte de la calibración.

Método

Para la recolección de la información aplicaremos tres tipos de instrumentos; entrevistas videograbadas para las cuales diseñamos "protocolos" de preguntas. La primera entrevista incluye preguntas que nos permitirán identificar qué es lo que los estudiantes creen que es la matemática, cómo se enseña y cómo se aprende, qué tanto cree que sabe de matemáticas y cuáles son las experiencias que lo han llevado a conformar estas creencias. Esta entrevista fue aplicada en agosto del 2018, justo en la fecha del ingreso de los estudiantes a la Licenciatura. Aplicaremos una segunda entrevista a mediados del tercer semestre, en octubre del presente año, que nos permita identificar si hubo un cambio en sus creencias de autoeficacia. De acuerdo con Schöber, Schütte, Köller, McElvany, & Gebauer (2018), el impacto de las creencias de autoeficacia sobre el rendimiento ha sido consistentemente sustentado y se considera que puede identificarse incluso en un plazo inmediato, pero no ha sido así en la prueba de la influencia que ejerce el rendimiento en el cambio de las creencias de autoeficacia ya que éstas son más estables en el tiempo, estos autores explican que quizá se debe a que los estudios que se han realizado han considerado periodos de tiempo no más allá de un año, en nuestra investigación, superaremos esto plazo.

Un segundo instrumento es la Escala de Autoeficacia General (EAG) adaptada, es una escala tipo likert conformada originalmente de 24 items con cuatro niveles de respuesta que van desde "muy confiado" a "nada confiado" en sus capacidades para enfrentar situaciones escolares sobre el aprendizaje de la matemática y para resolver problemas específicos. Una vez adaptado nuestro instrumento quedo conformado de 23 items con los mismos cuatro niveles de respuesta. Este instrumento incluye dos items que se refieren a dos problemas específicos de la materia de algebra superior, uno sobre inducción matemática y otro sobre el cálculo de la inversa de una matríz de tres por tres. Este instrumento lo aplicamos en el mes de mayo del presente año, justo antes de concluir el segundo semestre. Aplicaremos un segundo instrumento a finales del tercer semestre en el que incluiremos ítems sobre la confianza de los estudiantes en capacidades específicas del aprendizaje de la matemática, particularmente en la solución de problemas de materias de Álgebra Superior II y Álgebra lineal.

El tercer instrumento es un problemario que se aplica como complementario y posterior las escalas de autoeficacia. Los problemas que se incluyen, y que se les pide a los estudiantes que resuelvan, son respecto de temas específicos sobre los que los estudiantes respondieron en la escala sobre su creencia de poder resolverlos. Con este instrumento se busca calibrar las creencias de autoeficcia de los estudiantes. La primera versión fue aplicada tambien en mayo del 2019 y aplicaremos una segunda versión posterior a la aplicación de la segunda escala de autoeficacia, en noviembre del 2019.

Para tener información sobre el desempeño reuniremos las calificaciones de los estudientes obtenidas en el bachillerato y las obtenidas en los primeros tres semestres en las materias de Álgebra, además de las opiniones sobre el desempeño de los estudiantes de los profesores que les han impartido clase durante estos mismos tres semestres.

Para el análisis de la información recabada, la identificación y caracterización de las creencias de autoeficacia así como la caracterización de la relación que ocurre con el rendimiento académico, emplearemos el método cualitativo del análisis temático, propuesto por Braun & Clarke (2006) en sus seis fases (Braun & Clarke, 2012); 1) Familiarización con los datos 2) Generación de códigos iniciales, 3) Busqueda de temas, 4) Revisión de temas potenciales, 5) Delimitación y definición de los temas y 6) Producción del informe final.

La Familiarización con los datos consiste en leer y releer los datos, en nuestro caso la videograbación y transcripción de las entrevistas permite empaparse de los datos conocerlos a profundidad, al tiempo que se generan notas que apoyen el conocimiento y comprensión de los mismos. Se trata de varias lecturas analíticas, activas y críticas que den significado a la información. Para esta fase es apropiado intentar responder preguntas como: ¿Cómo este participante da sentido a sus experiencias? ¿Qué supuestos hacen al interpretar su experiencia? ¿Qué clase de mundo se revela a través de sus respuestas? Entre otras más que ayuden a una mejor comprensión de los datos.

La Generación de códigos iniciales Los códigos son como los ladrillos que ayuda a la construcción de los temas, estos códigos identifican y proporcionan una etiqueta para una característica de los datos que es potencialmente relevante para la pregunta de investigación. Los códigos pueden ser semánticos o descriptivos y pueden ir más allá de los significados de los participantes y proporcionan una interpretación sobre el contenido de los datos. Los códigos interpretativos o latentes identifican significados que se encuentran debajo de la superficie semántica de los datos. Dentro del proceso de codificación se deben considerar los siguientes aspectos:

a) se codifica la mayor cantidad posible de patrones en la información; b) se incorpora en cada código la suficiente información como para no perder la perspectiva del contexto; c) se considera que un mismo extracto de datos puede codificarse más de una vez. Existen dos formas de codificación: inductiva, que se hace partiendo de los datos, sin codificación previa; y la codificación teórica, que va desde los intereses teóricos específicos del investigador. (Mieles, Tonon y Alvarado, 2012, p. 219)

La Búsqueda de temas: es una fase en la que el análisis comienza a tomar forma a medida que se pasa de los códigos a los temas. Un tema captura algo importante sobre los datos en relación con la o las preguntas de investigación, y representa algún nivel de respuesta o significado con patrón dentro del conjunto de datos (Braun & Clarke, 2006). La búsqueda de temas es un proceso activo, lo que significa que se generan o construyen temas en lugar de descubrirlos. Aunque se dice que en esta fase se "buscan temas", no es tal cual un descubrimiento, es más bien una construcción detallada y especifica de los temas.

Esta tercera fase implica la revisión de los datos codificados para identificar áreas de similitud y superposición entre los códigos, se pueden identificar temas generales o problemas sobre los cuales se agrupan los códigos. El proceso básico de generación de temas y subtemas, que son los subcomponentes de un tema, implica la agrupación de códigos que parecen compartir alguna característica unificadora, de modo que reflejen y describan un patrón coherente y significativo en los datos.

La Revisión de temas potenciales: esta fase implica un proceso recursivo en el que los temas en desarrollo se revisan en relación con los datos codificados y el conjunto de datos completo. El primer paso es comparar sus temas con los extractos de datos recopilados y explorar si el tema funciona en relación con los datos. Si no es así, es posible que se deban descartar algunos códigos o reubicarlos bajo otro tema, cabe destacar que no se debe forzar el análisis para que sea coherente. Entre las preguntas clave que se pueden hacer para llevar a cabo esta fase se encuentran:

- ¿Es este un tema podría ser solo un código?
- ¿Cuál es la calidad de este tema, dice algo útil sobre el conjunto de datos y la o las preguntas de investigación?
- ¿Cuáles son los límites de este tema, qué incluye y que excluye?
- ¿Hay suficientes datos significativos para apoyar este tema?
- ¿Los datos son demasiado diversos y amplios, el tema carece de coherencia?

Puede ocurrir un colapso de una serie de temas potenciales o una división de un tema grande y amplio en una cantidad de temas más específicos o coherentes.

Una vez que se tenga un conjunto de temas distintivo y coherente que funcione en relación con los extractos de datos codificados, se debe realizar la segunda etapa del proceso de revisión: revisar los temas en relación con todo el conjunto de datos, esto implica una última lectura de todos sus datos para determinar si los temas capturan de manera significativa todo el conjunto de datos los aspectos importantes de los mismos. Lo que se busca es que el conjunto de temas final, capturen los elementos más importantes y relevantes de los datos y el tono general de los datos en relación con la o las preguntas de investigación. Si el mapa temático y el conjunto de temas logran esto, se puede pasar a la siguiente fase. De lo contrario, será necesario seguir refinando y revisando para capturar adecuadamente los datos en temas. La revisión en esta etapa puede implicar la creación de temas adicionales o la modificación o el descarte de temas existentes.

La Delimitación y definición de los temas: es útil para que los temas tengan un enfoque singular más que uno demasiado general, que estén relacionados, pero no se superpongan y que aborden directamente las preguntas de investigación.

Cada tema identificado debe tener un enfoque, alcance y propósito claro; cada uno, a su vez, construye y desarrolla los temas anteriores; y juntos proporcionan una historia general coherente sobre los datos. En algunos casos, es posible que de desee tener subtemas dentro de un tema. Estos temas son útiles en los casos en los que hay uno o dos patrones generales dentro de los datos en relación con las preguntas, pero cada uno se presenta de diferentes maneras.

Se debe tener en cuenta que el análisis de los datos se usará para contar una historia. Existen dos estilos de análisis temático: a) descriptivo; en el que los datos tienden a utilizarse de manera ilustrativa, y b) conceptual e interpretativo; en el que los extractos tienden a analizarse con más detalle.

En el caso que nos ocupa emplearemos el estilo b) dado que, basándonos en los conceptos del marco teórico, analizaremos a profundidad las fuentes de autoeficacia y la relación que surge de estas con el desempeño académico de los estudiantes.

La Producción del informe final. Si bien la fase final del análisis temático puede ser la producción de un informe como un artículo de investigación, no es una fase se haga al final. A diferencia de la investigación cuantitativa, la escritura y el análisis están íntimamente relacionados con la investigación cualitativa, desde la escritura informal de notas y remembransas hasta los procesos más formales de análisis y redacción de informes. El propósito del informe es proporcionar una historia convincente sobre los datos en función de su análisis. Esta historia debe ser convincente y clara, pero compleja, e incrustada en un campo académico. Incluso la descripción debe ir más allá de simplemente presentar un argumento que responde a la pregunta de investigación.

Reflexiones finales

En este momento lo que se puede reportar como parte de resultados de la investigación que está en proceso, es la necesidad de pasar de los análisis cuantitativos que se han reportado en las investigaciones citadas en el presente escrito y que han proporcionado elementos importantes para establecer y explicar la relación entre las creencias de autoeficacia y el desempeño académico, a análisis cualitativos que permitan visualizar, más allá de datos numéricos, cuáles han sido las experiencias que formaron y consolidaron sus creencias de autoeficacia de forma tal que podamos usar esta información para adelantarnos a las reacciones de los estudiantes ante las nuevas experiencias que vivirán durante su formación escolar en el nivel superior.

La entrevista inicial incluía preguntas que buscaban identificar a que tipo de fuente podríamos atribuir sus creencias de autoeficacia, por ejemplo, las respuestas a las preguntas ¿Me podrías describir cómo está integrada tu familia? ¿cuántos y quiénes son y a que se dedica cada uno de ellos?, esperamos nos permitan identificar experiencias de

persuasión social o bien experiencias vicarias dentro de su núcleo familiar. Entre las respuestas que hemos encontrado citamos:

> *Pues, principalmente en mi familia somos 7, cuatro hermanos mis, papás y yo, pero mis dos hermanos mayores y mi hermana están viviendo en Durango con mi papá y aquí en Calera estamos solo mi hermano, mi mamá y yo. Mi mamá trabaja en vip haciendo los asientos para auto, y mi hermano está haciendo su maestría aquí en mate, Omar (le dicen verde).*

Este estudiante resalta que tiene un hermano que está estudiando la maestría en matemáticas así que es muy posible que su sentido de autoeficacia pueda asociarse a experiencias vicarias y/o de persuasión social.

> *Okay, pues somos seis hijos incluyéndome a mí, yo soy la única soltera ya todos están casados, son 4 hombres, mi hermana y yo, Y pues todos tienen su profesión, ahora sí que soy la, única, la última que no la tiene. Pues mi padre es jornalero ahí en el rancho, ahí en el campo, y mi madre se dedica al hogar.*

Esta estudiante resalta que es la única y última que no tiene profesión de modo que es posible que su sentido de autoeficacia se pueda asociar también a experiencias vicarias.

Estas solo son reflexiones iniciales ya que es claro que se requiere de los resultados de los otros análisis de la información para establecer una conclusión.

Otra pregunta que nos ayuda en la interpretación de la información, en tanto que nos proporciona datos importantes sobre cómo es que a través de sus experiencias han asignado un valor a la matemática, es: ¿Por qué y para qué quieres estudiar matemáticas?

La respuesta de un tercer y un cuarto estudiante a esta pregunta:

> *Lo quise para ser maestro, porque he tenido maestros de matemáticas muy malos, entonces quiero ser mejor maestro, no como los que tuve.*

> *Quiero estudiar matemáticas para enseñar a las demás personas a los que se les dificulta, y enseñarles porque es divertido, no es, que digamos tan complicado, sino que las personas lo hacen ver complicado.*

Sus respuestas ayudan a asociar o reforzar la idea de que su sentido de autoeficacia puede tener su origen en experiencias vicarias.

La primera EAG se aplicó únicamente a 15 estudiantes, 14 de los 29 ya habían desertado de la Licenciatura en ese momento, ¿por qué?, otra pregunta que esperamos responder con nuestra investigación. Como ejemplo de los resultados de esta aplicación podemos decir que: al ítem 5 que los estudiantes leen como: *Puedo oobtener excelentes calificaciones en los exámenes, aunque sean difíciles.* 8 estudiantes responden *"casi nunca"* 6 responden "casi siempre" y sólo uno responde *"siempre",* esta, junto con las demás respuestas, nos permiten decir en este momento que el sentido de autoeficacia se ve ligeramente disminuido respecto del sentido manifestado en la entrevista inicial, en la que establecimos un alto sentido de eficacia en los 29 estudiantes.

Por los ítems en los que les preguntamos si podían resolver problemas específicos de temas que abordaron en la materia de Álgebra Superior I:

Puedo demostrar, usando inducción matemática, que la siguiente igualdad es cierta para todo número natural.

$$2 + 6 + 10 + \cdots + 2(2n + 1) = 2(n + 1)^2$$

Y

Puedo calcular la inversa de la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Uno de ellos responde *"casi nunca"*, 7 responden *"casi siempre"* y 7 responden *"siempre",* a la primera de estas y *12* responden *"siempre"* y *3 "casi siempre"* a la segunda pregunta.

Estos resultados junto con el hecho de que 9 de los 15 estudiantes resuelven bien ambos problemas, 11 en total resuelven bien al menos uno de estos, se interpreta como que su sentido de autoeficacia está bien calibrado, es decir su sentido de autoeficacia se corresponde con lo que pueden hacer en la realidad.

En este momento se trabaja en la tematización de las fuentes de autoeficacia considerando las respuestas de la entrevista inicial, en el análisis de las escalas y revisión exhaustiva de la solución de los problemas propuestos. Se cuenta ya con todos los datos sobre calificaciones obtenidas en el bachillerato y las obtenidas en los primeros tres semestres en las materias de Álgebra y se valora la necesidad o no de recabar las opiniones sobre el desempeño de los estudiantes de los profesores que les han impartido clase durante estos mismos tres semestres.

Referencias bibliográficas

Bandura, A. (1989). Human agency in social cognitive theory. *American Psychological Asssociation*, 44 (9), 1175-1184.

Bandura, A. (1994). Self-efficacy. En V. S. Ramachaudran (Ed.), Encyclopedia of human behavior (4, 71-81). New York: Academic Press.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, (3), 77 101.

Braun, V. & Clarke, V. (2012). Thematic analysis. En Cooper, H. (Ed.), *Handbook of Research Methods in Psychology*, (2), 57-71. Washington: American Psychological Association.

Borjón, E., Torres, M. R. y Jiménez L. (2015). Licenciatura en matemáticas plan de estudios E. Recuperado de http://matematicas.reduaz.mx/edu/

Contreras, F., Espinosa, J., Esguerra, J.C., Haikal, A., Polanía, A. y Rodríguez, A. (2005). Autoeficacia, ansiedad y rendimiento académico en adolescentes. *Diversitas: Perspectivas en Psicología*. 1(2), 183-194.

Chen, P. (2003). Exploring the accuracy and predictability of the self-efficacy beliefs of seventh-grade mathematics students. *Learning and Individual Differences*, (14) 79–92.

Dimarakis, N., Bobis, J., Way, J. & Anderson, J. (2014). "I just need to believe in myself more": The Mathematical Self-belief of Year 7 Students. En Anderson. J., Cavanagh, M. & Prescott. A. (Ed.), *Curriculum in focus: Research guided practice (Proceedings of the 37 annual conference of the mathematics education research group of Australasia)* (183-190). Sydney: Merga.

Gómez-Chacón, I., Op't Eynde, P. & Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas: la influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (3), 309-324.

Lester, F., Garofalo J. & Kroll. D. (1989) Self-Confidence, Interest, Beliefs, and Metacognition: Key Influences on Problem-Solving Behavior. En McLeod D.B., Adams V.M. (Ed.) *Affect and Mathematical Problem Solving* (75-88). New York: Springer.

Mieles, M., Tonon, G. & Alvarado, S. (2012). Investigación cualitativa: el análisis temático para el tratamiento de la información desde el enfoque de la fenomenología social. *Universitas Humanística*, (74), 195-225.

Pajares, F. & Graham, L. (1999). Self-Efficacy, Motivation Constructs, and Mathematics Performance of Entering Middle School Students. *Contemporary Educational Psychology*, (24), 124–139.

Schöber, Ch., Schütte, K., Köller, O., McElvany, N., & Gebauer, M. (2018). Reciprocal effects between self-efficacy and achievement in mathematics and reading. *Learning and Individual Differences*, (63), 1–11.

PERCEPCIONES DE ADOLESCENTES TAMAULIPECAS SOBRESALIENTES EN MATEMÁTICAS Y LOS ESTEREOTIPOS DE GÉNERO COMO ELEMENTO DE LA FAMILIA EN SUS FORMACIONES

PERCEPTIONS OF MATHEMATICAL EXCELLENT TAMAULIPAN TEENAGERS AND GENDER STEREOTYPES AS A FAMILY ELEMENT IN THEIR EDUCATION

Govedela González Aguirre; María Guadalupe Simón Ramos
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México).
govedela@hotmail.com; gsimon@docentes.uat.edu.mx

Resumen
La investigación se está desarrollando en nivel secundaria en Ciudad Victoria Tamaulipas, México, en Olimpiadas de Matemáticas. La metodología empleada es de índole cuantitativa tipo descriptiva, la cual se toma como estudio las percepciones de las adolescentes en matemáticas y los estereotipos de género de sus familias. No se tiene como finalidad hacer una comparación entre hombres y mujeres, su objetivo es reconocer el trabajo de adolescentes en el ámbito matemático, sus planes a futuro y proyectos académicos y como es el ambiente sociocultural en el que viven.

Palabras clave: estereotipos de género, familia, adolescentes, percepciones

Abstract
This is an ongoing research that takes place in Mathematics Olympiads, at secondary education in Victoria Tamaulipas City, México. This study focuses on the mathematical perceptions of the female teenagers, as well as gender stereotypes of their families, by implementing a descriptive-type quantitative-nature methodology The aim of this research is not to make a comparison between men and women; but to recognize the work of these teenagers in the mathematical field, their future plans and academic projects, as well as, the socio-cultural environment in which they live.

Key words: gender stereotypes, family, teenagers, perceptions

Introducción

México es un país multicultural, donde los estereotipos, las creencias y los prejuicios están presentes en todo momento. En esta investigación partimos del problema que se forma al tomar al género y el sexo como sinónimos dentro del entorno sociocultural. A raíz de estas relaciones tan utilizadas, pero si bien mal empleadas en la sociedad, surgen nuestras principales interrogantes.

Es importante recalcar que género y sexo no son sinónimos, sino que mientras el sexo de un ser humano es una característica biológica, el género es una construcción sociocultural, elaborada a partir de las diferencias biológicas (Ursini y Ramírez, 2017).

La dicotomía hombre/mujer es, más que una realidad biológica, una realidad simbólica y cultural históricamente construida, que articula una lógica de poder y dominación del orden social masculino profundamente arraigado en estructuras sociales tales como la organización del tiempo y el espacio, la división sexual del trabajo y las estructuras cognitivas inscritas en los cuerpos y en las mentes (Evangelista, Tinoco y Tuñón, 2012).

En la multiculturalidad que se vive en nuestro país, las mujeres y los hombres se van desarrollando de maneras diferentes, creando desequilibrios en su formación como individuos, cada uno lleva a cabo patrones que son construidos por el contexto sociocultural en el que se vive, los cuales son dados en el hogar, grupos de amistad, grupos religiosos, trabajo y el más investigado en estos últimos años es el ámbito educativo.

Y ¿por qué la inquietud de realizar una investigación enfocada en las jóvenes adolescentes? Como mencionan Rojo, Villarroel y Madariaga (2018) en la educación secundaria, los estudiantes han convertido la educación matemática en un motivo de preocupación. El rol de la mujer en el currículo escolar es desvalorizado de manera explícita y simbólica haciendo referencia al poco valor representativo hacia una mujer, tomándola como proveedora de afecto en cualquier ámbito y no como una creadora, inteligente y capaz en el ámbito sociocultural, lo cual tendrán un impacto en las posteriores expectativas y aspiraciones de cada una (González,2018).

Asimismo, UNESCO (2019) proporciona datos sobre desigualdades de género en regiones y poblaciones diversas, contando con notables diferencias en distintas regiones. Ya desde 2015 González mencionaba que las adolescentes mujeres que presentan bajos rendimientos en los tres grados a cursar en secundaria, en comparación con el resto de las demás asignaturas, se mantienen con bajo interés en aprender matemáticas.

Existen investigaciones que analizan el bajo desempeño de las adolescentes en matemáticas en nivel de secundaria, sin embargo, pocas mencionan mujeres sobresalientes en matemáticas, la percepción sobre su habilidad en matemáticas y la relación de la familia en su acompañamiento académico.

Los autores Lee y Sriraman (2012) al realizar un análisis con estudiantes sobresalientes en matemáticas, identificaron que las diferencias culturales, como las expectativas de género y los modelos de rol, pueden ejercer una fuerte influencia en el estatus de cada persona dentro de la comunidad matemática. Dentro de esta, un aspecto muy notable es la distribución sesgada por género entre los altamente sobresalientes a nivel internacional.

Sin embargo, las investigaciones tienen nuevos puntos de vista, la autora Simón (2016) nos alude que las mujeres no están en desventaja académica con los hombres, sino que diversas situaciones de su entorno las llevan a desestimar sus habilidades y a desistir de buscar carreras relacionadas con matemáticas y otros campos relacionados.

A pesar de los grandes cambios y la inserción de las mujeres en áreas profesionales anteriormente consideradas masculinas, la discriminación por género en el ámbito educativo, específicamente en matemáticas, se sigue identificado prácticas relacionadas al ambiente de aula, a la falta de identificación de las adolescentes con sus

instructores en matemáticas (en su mayoría varones), al lenguaje sexista en los libros de texto, el profesor y el denominado currículo oculto de género etc. (Farfán y Simón, 2018).

Marco referencial

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo proporcionar un análisis del entorno sociocultural en el que se desenvuelven las adolescentes sobresalientes en matemáticas. Con una metodología sustentada bajo las premisas de Luxán y Azpiazu (s.f.) quienes se han encargado de reunir métodos utilizados por la epistemología feminista. Las cuales reconoce la necesidad de aumentar la presencia de mujeres y de otros sujetos minorizados en los espacios de producción de conocimiento, pero no como aquellas que son portadoras de un saber menos corrompido, sino como voces necesarias en el debate colectivo en el que debiera sustentarse la producción de saberes. Ellas afirman que la misma construcción de la ciencia se ha realizado con base en doctrinas masculinizadas y, por tanto, reproduce valores sexistas y naturaliza las desigualdades producto de las relaciones de género.

Por consiguiente, otro de los intereses por realizar la investigación, surge a partir de los puntajes que nos da la prueba estandarizada PLANEA (2017) lo cual nos menciona que existen diferencias de promedio en matemáticas de los estudiantes según su sexo, los hombres tienen 500 puntos y las mujeres cuentan con 494. En México los puntajes en el rendimiento en ciencias y matemáticas entre adolescentes de 15 años, los hombres superan a las mujeres en aproximadamente el 60% de los municipios. A pesar de ello, hoy en día se ven menores diferencias en los puntajes en general, en matemáticas más que en ciencias, en nivel de secundaria. Cabe mencionar, que, mediante estos desequilibrios educativos, en la actualidad las brechas se vuelven más visibles al concluir nivel de secundaria e ingresar a nivel medio superior donde las jóvenes representan solo el 35% de todos los estudiantes matriculados en el mundo, según el estudio de materias Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) a este nivel (UNESCO, 2019).

Mediante ello, al contar con información del país, es momento de crear reflexiones y recopilar información que nos hablen sobre temas relacionados al estado donde se realiza el presente trabajo de investigación. El Estado de Tamaulipas cuenta con pocos trabajos e iniciativas relacionadas con género y matemáticas. Uno de los principales es Hernández (2012), el cual en su libro Masculinidades en Tamaulipas: una historia antropológica, da a conocer términos como materfamilia y paterfamilia, analiza los estereotipos que rigen a las familias en el Estado de Tamaulipas, menciona que desde periodos de gobiernos pos-revolucionarios (años 20´s) situaban a los hombres como los únicos representantes de la familia y de la comunidad, determinando por consiguiente la autoridad, especialmente con sus esposas, hijos e hijas. Los hijos varones representaban la fuerza para trabajar mientras que las hijas se las tiene que cuidar y preocuparse por sus movimientos y sexualidad, dando así atribuciones tan solo del hogar. Por lo regular, sus trabajos son basados en el desarrollo y crecimiento de la familia tamaulipeca y los estereotipos con los que se cuenta en la región. De este y otros trabajos nacionales e internacionales podemos concluir que, los estereotipos de género conllevan importantes consecuencias negativas pues limitan el desarrollo integral de las personas, influyendo sobre sus preferencias, desarrollo de habilidades, aspiraciones, emociones, estado físico, rendimiento, etc. Estas consecuencias recaen indudablemente en mayor medida sobre las mujeres, favoreciendo, además, su vulnerabilidad para ser víctimas de violencia (Castillo y Montes, 2014).

Los autores Carrasco y Sánchez (2016) citando a Kleanthous y Williams (2013) dan a conocer que la influencia de los padres es estadísticamente significativa para predecir la elección de cursos matemáticos y para la elección de carrera, al igual consideran que la influencia se manifiesta de forma importante mediante los estímulos, las expectativas y las actitudes de los padres hacia las matemáticas.

Por lo tanto, la importancia de hablar de las mujeres está en el talento que tienen, lo cual es necesario para el futuro desarrollo de la sociedad, ya que la segregación ocupacional y los estereotipos de género son reproducidos en gran parte durante la formación escolar, etapa donde existen importantes diferencias en la estimulación y los resultados

obtenidos en ciencias y matemáticas por parte de niños y niñas, haciendo que ellas se vean menos atraídas por estas disciplinas al momento de elegir una carrera técnica o profesional (Comunidad Mujer,2017). Asimismo, y dadas las condiciones actuales se tiene el interés de exteriorizar tal situación dando a conocer a mujeres adolescentes que sobresalen en las matemáticas desde tempranas edades, puesto que, se ha naturalizado el hecho de ser mujer y vista como una figura minimizada. Este tipo de actos están normalizados por la sociedad y obliga tanto a hombres como mujeres seguir reproduciendo creencias y concepciones de género (González, 2018).

A pesar de los trabajos constantes que se han desarrollado para la inclusión de las mujeres en los ámbitos matemáticos se siguen permeando desequilibrios marcados por el género. A través de lo mencionado, Nurlu (2017) quien cita a varios investigadores europeos que han desarrollado investigación sobre estereotipos de género en educación matemática como parte de la cultura, identificaron que tanto los estereotipos de género como las creencias, se transmiten de una generación a la siguiente a través de libros infantiles, lenguaje, padres y maestros.

También, la escuela tiene un papel fundamental en la conformación de lo masculino y lo femenino, ya que es uno de los espacios donde se refuerzan, fomentan y mantienen los valores y ejemplos de comportamiento socialmente aceptados.

Incorporar la perspectiva de género constituye la mejor alternativa para inculcar pautas de convivencia que contribuyan a la erradicación de la violencia (Secretaria de Educación Pública ,2010). En la escuela, casi siempre sin ningún cuestionamiento, y como una condición "normal y natural", se reproduce la desigualdad y se refleja la hegemonía masculina y su poder simbólico; sin embargo, se presenta como un espacio neutral al que acceden hombres y mujeres en condiciones de "igualdad" sin reconocer que se promueve una socialización diferenciada para hombres y mujeres, que parte desde los primeros años de instrucción escolar (Mora, 2010).

Cabe indicar, en el siglo XIX los planes de estudio estaban dirigidos al papel que uno y otro sexo desempeñaban en la sociedad: así la mujer se preparaba para hacer un mejor papel dentro del hogar (Córdova, s.f). La educación de las mujeres en el pasado, no se consideraba una inversión de primera necesidad, durante el gobierno de Benito Juárez, las niñas tuvieron acceso por primera vez a la educación de manera sistemática, con el paso del tiempo, la educación de los varones fue enriqueciéndose en áreas que se consideraban importantes para su futuro desempeño en el área laboral (Farfán y Simón, 2016). No es sino hasta a mediados del siglo XX que la mujer en México empieza a tener acceso al Sistema Nacional Educativo en todos sus niveles, incluyendo la enseñanza superior, y es apenas en los últimos cincuenta años que la población escolar universitaria de mujeres se ha incrementado, en términos absolutos y relativos, más aceleradamente que la de hombres (Zubieta, 2011).

Como menciona Farfán (2017) mediante la comunidad educativa, se ve arraigado la invisibilidad de las mujeres académica, tal se puede observar en los libros de texto, planes y programas de estudio y en el propio discurso retorico.

A través de ello, es a partir del nivel de secundaria donde la distinción de brechas de desigualdad se da en las clases de matemáticas. Si bien, se cree que las escuelas mixtas tal menciona Ursini y Ramírez (2017) proporcionan mismas oportunidades dentro del aula. Sin embargo, se sigue señalando como principal contribuyente en las matemáticas a los hombres, mientras que las mujeres, se muestran sin capacidad para dicha materia, (Ramírez, 2006).
INMujeres (2010) citando a Meece 1982, menciona que desde las primeras investigaciones realizadas con mujeres y niñas arrojaban datos relativamente consistentes, en las cuáles las mujeres manifestaban más bajo autoconcepto y mayor ansiedad hacia las Matemáticas que los hombres, por lo cual, la percepción que un sujeto tiene de su capacidad afecta a una variedad de comportamientos incluyendo la actuación académica, nivel de persistencia y elección de carreras.

Cabe mencionar que, las áreas del conocimiento donde se encuentra la mayor población femenina son las ciencias sociales, enfermería, la educación y las humanidades, mientras que las ciencias agropecuarias, las físico-matemáticas y las ingenierías siguen siendo los campos con mayor población masculina (Blazquez, 2012).

En suma, se pretende visibilizar a las adolescentes que son sobresalientes y así apoyar a la inclusión de las mujeres en las matemáticas, que si bien, aún sigue existiendo gran diferencia dentro de las instituciones por motivos de género, tanto por profesores y entre los mismos estudiantes.

Metodología

Para la creación de este marco metodológico se utilizó el enfoque cuantitativo de tipo descriptivo, en la cual se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis (Sampieri, 2010).

La población muestra es obtenida mediante Olimpiadas en Matemáticas que se realizan en Ciudad Victoria, Tamaulipas, donde todas las mujeres y hombres en nivel primaria, secundaria y preparatoria pueden participar junto a sus profesoras y profesores en su preparación para las distintas fases. Para tener información más concreta y detallada de la investigación, la familia es tomada en cuenta. Para ello, nuestra muestra base han sido mujeres adolescentes de los tres años de secundaria, contando así una muestra de 36 y 20 familiares quienes acompañan a las adolescentes sobresalientes en matemáticas. Mediante esto, se procuró identificar estereotipos de género pertenecientes a su cultura, puesto que, la familia son los principales en apoyar y tener seguimiento en el desarrollo de esta en su participación en dichas olimpiadas.

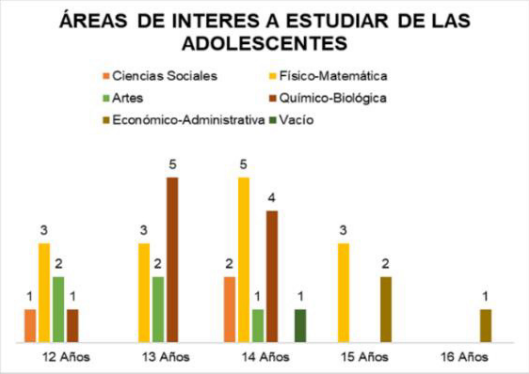
Se recopilaron datos mediante un cuestionario, que contiene aspectos que van desde los gustos de las adolescentes, nivel educativo que les gustaría llegar a futuro, actividades en familia, por qué participan en las olimpiadas, entre otras cosas que se analizan con más detalle a continuación. Cabe mencionar, que el cuestionario de los familiares contiene, nivel académico de quien contesta la encuesta, que les gustaría que estudiaran las adolescentes a futuro, entre otras cosas.

Se tiene como finalidad recuperar la idea de que investigar las experiencias y vivencias es una manera de confrontar con el ideal androcéntrico de la ciencia, al menos en lo que respecta al foco de interés (Luxan y Azpaziu, s.f.).

Resultados

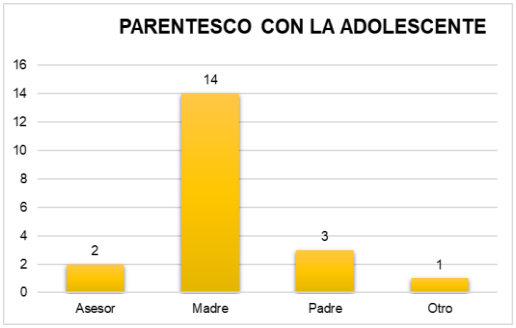
A través del cuestionario realizado tanto a mujeres adolescentes participantes en Olimpiadas de Matemáticas como de los familiares quienes las acompañan, se muestra a continuación gráficas obtenidas mediante los resultados.

En primera estancia tenemos que mientras más edad van teniendo las adolescentes mayor interés muestran en el área de físico- matemática. Sin embargo, lo administrativo y social sigue permeando en las estadísticas de intereses o bien gusto en las participantes. El área química-biológica es muy mencionada y esto está asociado a estereotipos de género, según los cuáles las mujeres deben encargarse del área de cuidados. Podría ser en este caso que se tiene mayor inclinación al área de matemáticas por el hecho que las adolescentes son participantes en olimpiadas y han pasado por filtros en donde su gusto a permanecido y han crecido a lo largo de sus años dentro de esta área (gráfica 1).



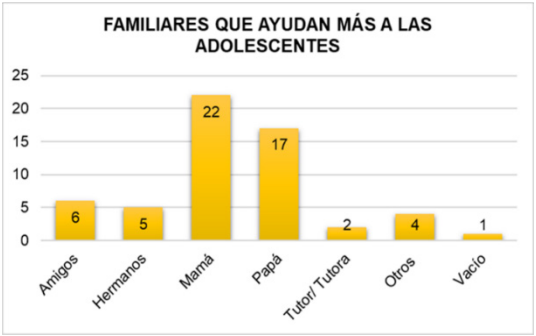
Gráfica 1. Área de interés a estudiar de las adolescentes participantes en Olimpiadas de Matemáticas.

A continuación, se hace una correlación de información sobre los familiares y las adolescentes, mediante dos gráficas. Lo cual, al contar con datos de 20 familiares que contestaron el cuestionario, 14 han sido madres de familia, 3 padres, 2 tutores y 1 sin contestar, así pues, las adolescentes contestaron la pregunta sobre quien o quienes en sus familias les ayudan más académico, cabe mencionar que, ellas podían seleccionar hasta cuatro opciones si ellas lo considerasen (gráfica 2).



Gráfica 2. Pregunta dirigida a familiares sobre el parentesco con las adolescentes.

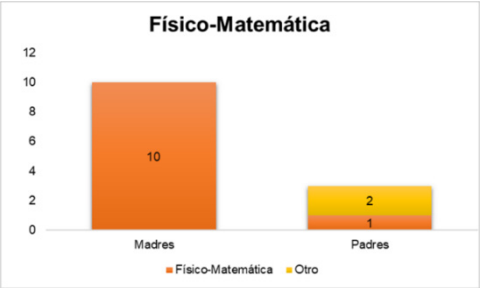
Es esencial comentar que la familia es el primer agente socializador de los niños/as adolescentes de nuestra sociedad. Como menciona Ruiz (2001) citando a García (1990) la familia, que a pesar de los cambios sociales producidos en los últimos tiempos sigue siendo hoy la comunidad de afecto fundamental entre los seres humanos, así como una de las instituciones que más importancia tiene en la educación, representa un papel crucial como unión entre la sociedad y la personalidad de cada uno de sus miembros (gráfica 3).



Gráfica 3. Familiares que ayudan más en lo académico.

De la misma forma como lo menciona la UNESCO (2019) las madres, más que los padres, tienen mayor influencia en la educación de sus hijas y en su selección de la carrera a estudiar, posiblemente debido a su función de modelo de rol y acompañamiento en las actividades escolares.

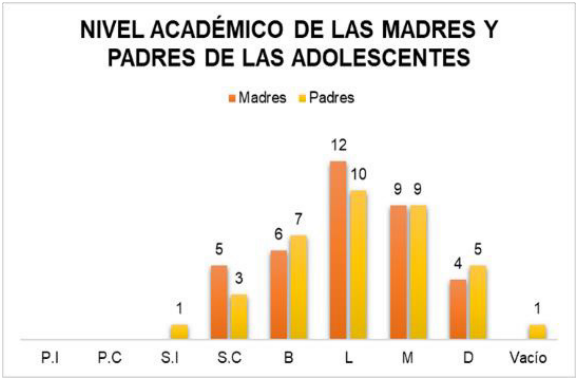
Posteriormente se obtuvo mediante el cuestionario que las madres de las chicas suelen ser quienes consideran el área de físico-matemático como principal gusto a estudiaran en el futuro para sus hijas, mientras que los padres, a pesar de que son menos que las madres no han elegido esa área para sus hijas, dos de ellos han elegido químico - biológicas para las adolescentes, los restantes han elegido diferentes áreas (gráfica 4).



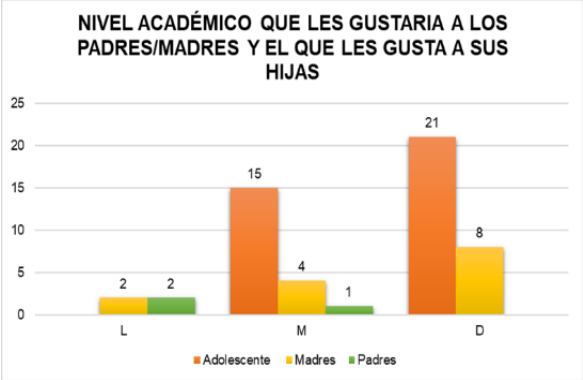
Gráfica 4. Familiares respondiendo que área les gustaría que estudiaran las adolescentes.

Continuación, se hace correlación sobre el nivel académico de las madres y los padres generando así una correlación con lo que aspiran las adolescentes a futuro.

Se puede observar que, a pesar de que los padres suelen tener un nivel de doctorado más que las madres, ninguno de los que participaron en la encuesta ha mencionado que les gustaría que sus hijas estudiaran hasta el nivel de doctorado, sin embargo, las hijas si eligieran nivel alto de superación personal.



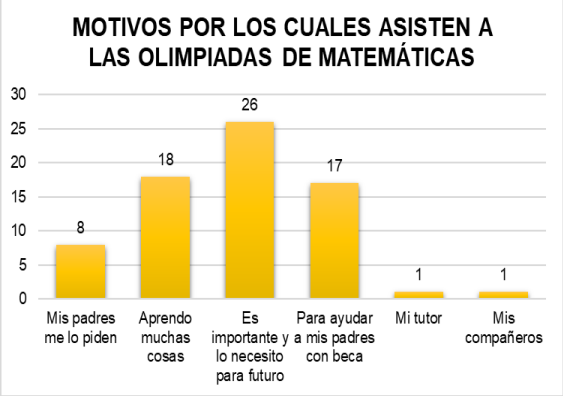
Gráfica 5. Nivel académico de las madres-padres de las adolescentes sobresalientes en matemáticas.
P.I (Primaria incompleta) P.C (Primaria Completa) S.I(Secundaria Incompleta) S.C (Secundaria Completa) B(Bachillerato) L (Licenciatura) M (Maestría) D(Doctorado).



Gráfica 6. Nivel académico que les gustaría que estudiara su hija y gusto de la adolescente. L(Licenciatura) M (Maestría) D(Doctorado)

Observando las gráficas, las madres son las que más alientan a las hijas a que sigan estudiando, ellas contribuyen a que tengan un nivel más alto que el de ellas (gráfica 6). Más aún, se ha reconocido que el modelaje es uno de los medios más poderosos de transmisión de patrones de pensamiento, conducta, valores y actitudes. Es por esto por lo que, las personas de la familia o cercanas a ella ejercen una enorme influencia en la actitud que asumen los niños frente al aprendizaje, la escuela y la valoración de la educación en un sentido amplio (Romagnoli y Cortese, 2016).

Como se ha observado, las adolescentes se mantienen con percepciones de superación personal altas, puesto que cuentan con apoyo de sus familiares para participar en olimpiadas de matemáticas, contando así, con aspiraciones para seguir estudiando. Por ello, se les pidió contestar los motivos por los cuales asisten a las olimpiadas, teniendo como opción de seleccionar hasta cuatro opciones (gráfica 7).



Gráfica 7. Motivos por los cuales las adolescentes asiste a las olimpiadas de matemáticas.

Las adolescentes han elegido 26 veces que asistir a las olimpiadas de matemáticas son importantes y necesarias para la familia, como segundo lugar con 18 menciones ha sido que aprenden muchas cosas en las olimpiadas, después tenemos con 17 menciones que ayudan a sus padres con una beca, después contamos con 8 los cuales dicen que sus padres se lo piden, después con 1 motivo por parte de los tutores y otro que por sus compañeros.

Por otra parte, los modelos a seguir, los gusto y el apoyo que se puede brindar a una adolescente, puede representar algo significativo y positivo para cada una de ellas en la adolescencia.

Conclusiones

A través de esta investigación, se ha podido identificar estereotipos de género por parte de los familiares, que en nuestro caso han sido más madres de familia quienes apoyan a las chicas en su desarrollo académico, alentándolas a participar en las olimpiadas. Al igual, el factor presente en todo este trabajo fue la motivación por parte de la familia hacia las participantes, lo cual se reflejaba en las respuestas de las adolescentes en su cuestionario, dado que, están interesadas en realizar posgrados y seguir en las áreas de conocimiento referentes a las matemáticas.

Los estereotipos de género por parte de la familia contribuyen en la construcción de algunas percepciones, sobre sí mismas, sin embargo, ellas buscan superar y romper algunos de los roles establecidos para las adolescentes. Al mismo tiempo Sánchez y Silió (2010) hablan sobre los cambios que son producidos por la llegada de la adolescencia en cada hogar, los cuales, hacen necesario que la familia continúe con su función de apoyar el crecimiento de la chica, estar presente en el desarrollo de su autonomía, entender e intentar adaptarse a los nuevos cambios que son producidos en cada una de las adolescentes y en los contextos sociales, familiares e histórico.

Con lo obtenido, se puede mostrar a la sociedad que las matemáticas no son, ni serán solo del dominio de hombres, que realmente las mujeres tienen gustos, son sobresalientes, dominan las matemáticas, asimismo están interesadas más de sí mismas.

Por ello, las olimpiadas de matemáticas en el Estado de Tamaulipas son factores positivos para el surgimiento de más mujeres en el área, aunque no sean del todo propicias según algunas investigaciones, hasta el momento han sido espacios que han apoyado a las adolescentes para estructurar y definir objetivos propios.

Referencias bibliográficas

Blazquez, N. (2012). La segregación de las mujeres en las ciencias de la salud. *Ciencia* 63 (3), 72-78.

Carrasco, L., y Sánchez, M. (2016). Factores que favorecen la elección de las matemáticas como profesión entre mujeres estudiantes de la Universidad Veracruzana. *Perfiles Educativos* 38(15), 123-138.

Castillo, R. y Montes, B. (2014). Análisis de los estereotipos de género actuales. *Anales de psicología*, 30(3), 1044-1060.

Córdova, M. (s.f). *La mujer mexicana como estudiante de educación superior.* Recuperado el 30 de diciembre de 2019 de https://psicolatina.org/Cuatro/mexicana.html

Comunidad Mujeres. (2017) *Mujer y trabajo*: Brecha de género en STEM la ausencia de mujeres en ingenierías y matemáticas. Recuperado el 30 de diciembre de 2019 de http://www.comunidadmujer.cl/biblioteca-publicaciones/wp-content/uploads/2017/12/BOLETIN-42-DIC-2017-url_vf.pdf

Evangelista, A., Tinoco, R. y Tuñón, E. (2012). Género y Ciencia en México. *Ciencia,* 63 (3), 8 – 15.

Farfán, C. (2017). *Mirada educativa y (perspectiva de) género en la resolución de problemas, una mirada socioepistemologica.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México D.F

Farfán, M. y Simón, M. (2018). El Desarrollo del Talento de las Mujeres en Matemáticas desde la Socioepistemología y la Perspectiva de Género: un Estudio de Biografías, *Bolema, Rio Claro* (SP) 32 (62), 946-966

Farfán, R. y Simón, M. (2016). *La construcción social del conocimiento: el caso de género y matemáticas*. Gedisa. México.

González, G. (2018). Creencias y prejuicios de profesores en nivel secundaria: desempeño académico de mujeres en matemáticas. En R. Flores (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31 (2),* 1054-1061.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

González, R. (2005). Un modelo explicativo del interés hacia las matemáticas de las y los estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*. 17 (1), 107-128.

Hernández, O. (2012). *Masculinidades en Tamaulipas:* Una historia antropología. México: Universidad Autónoma de Tamaulipas.

INMujeres. (2010). Actitudes y creencias acerca de las matemáticas: *Intervención con perspectiva de género en escuelas secundarias.*

Lee, H. y Sriraman, B. (2012) Gifted Girls and Nonmathematical Aspirations: A Longitudinal Case Study of Two Gifted Korean Girls. *Gifted Child Quarterly*, 56(1) 3–14.

Luxán, M. y Azpiazu J. (s.f). Metodología para la implementación de la igualdad: Metodologías de Investigación Feminista. Recuperado el 28 de diciembre de 2019 de https://www.ehu.eus/documents/1734204/6145705/Metodolog%C3%ADas+de+Investigaci%C3%B3n+Feminista/54172098-3058-1d47-df68-780965fa8f46

Mora, A. (2010). Violencia y desigualdad de género en el aula: Del contrato sexual al contrato escolar. *Violencia y desigualdad,* 37-41.

Nurlu, Ö. (2017). Developing a Teachers' Gender Stereotype Scale toward Mathematics. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 10(2) 287-289.

Planea. (2017). Resultados Nacionales 2017: *3° de secundaria*. Instituto nacional para la evaluación de la educación. Recuperado el 20 de mayo del 2019 de http://planea.sep.gob.mx/content/general/docs/2017/RESULTADOS_NACIONALES_PLANEA2017.pdf

Ramírez, M. (2006). *Influencia de la visión de género de las docentes en las interacciones que establecen con el alumnado en las clases de matemáticas*. Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rojo, V, Villarroel, J. y Madariaga, J. (2018). The affective domain in learning mathematics according to students' gender. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21 (2), 183 - 202.

Romagnoli, C. y Cortese, I. (2016). ¿Cómo la familia influye en el aprendizaje y rendimiento escolar? *Valoras,* 1-9.

Ruiz, C. (2001). Factores familiares vinculados al bajo rendimiento. *Revista Complutense de Educación.* 12(1). 81-113.

Sánchez, J., y Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4), 303-318

Sampieri, R. (2010). *Metodología de la investigación*: Quinta edición. México: McGRAW-HILL.

Sánchez, B. y Silió, G. (2010). La familia: Papel que desempeña en la educación de sus hijos/as y posibles consecuencias en la forma de interaccionar de los adolescentes con sus iguales. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 1 (1), 327-333.

Secretaria de Educación Pública. (2010). *Equidad de Género y prevención de la violencia en primaria*. Recuperado el 27 de diciembre de 2019 de http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/1039/1/images/equidad.pdf

Simón, G. (2016) Vertientes actuales de investigación en género y talento en matemáticas. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades SOCIOTAM*, 24 (2), 109-135.

UNESCO. (2019). Descifrar el código: la educación de las niñas y las mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM): Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Paris, Francia.

Ursini, S. y Ramírez, M. (2017). Equidad, género y matemáticas en la escuela mexicana. *Revista Colombiana de Educación*, (73), 211-232.

Zubieta, J . (2011). La educación, la ciencia y la tecnología no parecen ser muy femeninas. *Revista Digital Universitaria*, 12(10), 3-14.

CARACTERÍSTICAS DEL PENSAMIENTO RELACIONAL DE NIÑOS CON DISCAPACIDAD INTELECTUAL

CHARACTERISTICS OF RELATIONAL THOUGHT IN CHILDREN WITH INTELLECTUAL DISABILITIES

Paulina Romero Montes Oca, Carolina Carrillo García, J. Marcos López-Mojica
Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma de Guerrero (México).
pauu.montes.de.oca@gmail.com, cgcarolin@hotmail.com, mojicajm@gmail.com

Resumen
El presente trabajo tuvo la finalidad de promover un pensamiento relacional por medio de los patrones figurales lineales. Para lo anterior, se caracterizaron los desempeños que mostraron los alumnos (con discapacidad intelectual en nivel moderado y leve): formas de pensamiento y uso de esquemas compensatorios para establecer tipos y niveles de compresión matemática. Los resultados de esta investigación cualitativa pretenden ser un apoyo para el docente frente a grupo que tenga en su aula alumnos con estas características y así aportar estrategias didácticas para potenciar las capacidades de los niños.

Palabras clave: discapacidad intelectual, pensamiento relacional, esquemas compensatorios

Abstract
This paper was aimed at promoting a relational thought through linear shape patterns. With this aim in mind, the performance of low- and -moderate level of intellectual disability students were characterized, as well as their ways of thinking and the use of compensatory schemes, in order to establish types and levels of mathematics understanding. The results of this qualitative research are intended to be a support for teachers who work with students with these characteristics, and so, to provide didactic strategies for enhancing students' abilities.

Key words: Intellectual disability, relational thought, compensatory schemes

Introducción

En la actualidad, a pesar de los esfuerzos que se han realizado en la educación básica en México (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2010), aún se percibe una inadecuada o escasa atención a los alumnos con algún tipo de discapacidad. Esto puede deberse, entre otros aspectos, a que los docentes frente a grupo, en ocasiones no tienen los conocimientos ni las estrategias necesarias para poder trabajar con esta población. Lo anterior lleva a contribuir involuntariamente en el rezago o deserción por parte de los alumnos. (Acle, Roque, Zacatelco, Lozada y Martínez, 2007).

En ese sentido, a partir de la experiencia docente de la primera autora, surgió la necesidad de implementar actividades favorecedoras para la inclusión de niños con Discapacidad Intelectual (DI) en el aula regular. Dado que actualmente en México se está viviendo un movimiento en el que, según instancias institucionales, los niños con discapacidad deben ser incorporados en las aulas regulares de la educación básica (SEP, 2010). Sin embargo, se carece de estrategias de enseñanza que promuevan un pensamiento matemático.

Los aportes presentados en esta investigación tienen la finalidad de ser un apoyo para el docente frente a grupo que tenga en su aula alumnos con estas características, de tal manera que pueda diseñar estrategias didácticas para potenciar las capacidades de esta población y así desarrollar un pensamiento matemático dada la naturaleza de la discapacidad.

Planteamiento del problema

Indagar sobre el pensamiento algebraico de personas con discapacidad es un reto actual para la Matemática Educativa. Más aun, el enfoque de la educación inclusiva es relativamente joven con muchos campos posibles de actuación. Quizá debido a ello, el establecimiento de marcos de referencia para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de tópicos matemáticos son objeto de estudio de escasas investigaciones en nuestra disciplina (López-Mojica, 2013). En ese sentido, la problemática atendida desde este proyecto de investigación recae en el poco énfasis que hay en el campo de la Educación Especial y, por consiguiente, en la falta de atención en el ámbito educativo hacia personas con DI.

Por otro lado, diversos resultados de investigación en torno a la enseñanza del álgebra han reconocido la transición de la aritmética al álgebra (Gallardo y Rojano, 1988; Aké, 2013) como un factor determinante que puede provocar errores en el pensamiento algebraico (dentro del cual se encuentra el pensamiento relacional), y produce no sólo frustración y rechazo por parte de los alumnos, sino también poca comprensión.

Kaput y Blanton (2001) argumentan la importancia de enseñar los conceptos algebraicos en el sistema educativo básico ya que el pensamiento algebraico se encamina a desarrollar habilidades de generalización, expresión y justificación. Por ello, existen diversas investigaciones que aportan avances para determinar qué tratamiento didáctico se le puede dar a esta problemática tratando siempre de que los alumnos sean los principales beneficiados y que sea menos enfática la ruptura entre la aritmética y el álgebra. Derivado de ello, ha resultado una tendencia curricular llamada *Early Algebra*, en la que se propone un cambio en el currículo escolar a nivel primaria, implementando el álgebra en este nivel educativo con la finalidad de que desde la primaria se comiencen a trabajar sus principios básicos; y así, en el momento en que los alumnos lleguen a la secundaria, tengan una mayor movilidad de saberes algebraicos y puedan comprender mejor sus conceptos y principios (Socas, 2011).

Entre los ejemplos de investigadores que apoyan esta propuesta podemos señalar, por ejemplo, a Empson, Levi, y Carpenter (2011) quienes señalan la importancia de llevar a cabo un enfoque del pensamiento relacional en el currículo elemental, ya que a través de él es posible llegar al pensamiento algebraico. La comprensión relacional se traduce en una eficiencia en el aprendizaje de las matemáticas avanzadas, tales como el álgebra (Empson, Levi, y

Carpenter, 2011), lo cual es un objetivo dentro de la propuesta *Early Algebra*. Molina (2009) señala al respecto que la introducción del pensamiento algebraico en la matemática escolar desde los primeros cursos se da mediante la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Por su parte, Socas (2011) argumenta que una parte de esta transición recae en la idea de desarrollar el pensamiento relacional a través de patrones (Zapatera, 2016). Lo anterior concuerda con lo señalado por Godino y Font (2003) cuando explican que el álgebra es la ciencia de los patrones y el orden.

Señalando estas dos vertientes: la poca atención que existe hacia los alumnos con discapacidad y la dificultad que provoca la transición de la aritmética al álgebra, la presente investigación se interesó en desarrollar estrategias para disminuir las dificultades a las que se enfrentarían los alumnos con DI y así poder ofrecerles una matemática básica integral. Se conjetura que un medio que permitiría el acercamiento entre el *Early Algebra* y la DI son los materiales didácticos, dada la oportunidad que brindan para interactuar con ellos, además de ser un medio para mantener la atención y la motivación en esta población.

Por lo tanto, el problema radica en la deficiente atención escolar a los niños con DI para desarrollar un pensamiento matemático con sus propias características y propios medios (Vigotsky, 1997). Es decir, es necesario conocer sus capacidades de manera más precisa o que los profesores traten de desarrollarlas, ya que los docentes que nos desempeñamos en la educación regular generalmente no tenemos la suficiente preparación para trabajar con alumnos con discapacidad.

De lo anterior se planteó la pregunta ¿Qué caracteriza el pensamiento relacional de niños con DI al resolver tareas sobre patrones figurales lineales? Para dar una respuesta se estableció el siguiente objetivo caracterizar la construcción del pensamiento relacional de niños con DI al resolver problemas de patrones lineales.

Una primera pista para abordar esta tarea fue la consideración los esquemas compensatorios (López-Mojica, 2009) que los niños utilizan para generar aprendizaje ante tareas sobre patrones figurales lineales, en las cuales se empleen materiales didácticos, además de someter a escrutinio el desempeño de los niños (Inhelder, 1971).

Fundamento teórico

Dada la naturaleza del proyecto de investigación, se consideró una perspectiva teórica que permite el análisis de los fenómenos que surgen de la enseñanza de las matemáticas a personas con discapacidad. En ésta se consideran tres elementos, organizados en tres ejes rectores: eje epistemológico, eje cognitivo y eje didáctico (López-Mojica, 2013).

Eje epistemológico. Interesó la tendencia del *Early Algebra* (Socas, 2011), que establece la introducción de nociones matemáticas lo más temprano posible en el currículo y que permitan el desarrollo del pensamiento algebraico. En particular el interés al pensamiento relacional a través de patrones figurales lineales, entendido como "actividad o acción intelectual de examinar y buscar relaciones entre objetos matemáticos, reflexionar y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados" (Molina y Castro, 2006, p. 4).

> El pensamiento relacional es un precursor crítico (quizás el más crítico) del álgebra, porque si los niños comprenden la arquitectura matemática que aprenden, entonces están mejor preparados para resolver problemáticas y generan nuevas ideas en el dominio del álgebra (Empson, Levi, y Carpenter, 2011, p. 17).

El pensamiento relacional consta de tres partes importantes: la correspondencia, la relación uno a uno y la seriación:

Correspondencia: "Es la capacidad del niño de establecer relaciones simétricas (de igualdad) entre un objeto y otro; es decir cuando se le presenta al niño un grupo de objetos el niño elige uno y luego busca a través de comparaciones encontrar ciertas equivalencias o igualdades en cuanto a sus riesgos característicos entre un objeto y otro" (Bautista, 2013, p. 5).

Relación uno a uno: "La correspondencia uno a uno consiste en la asignación de una sola etiqueta o rótulo verbal a cada ítem de la colección. De esta manera, para contar la totalidad de sus elementos, es necesario que a cada uno de ellos se le asigne una sola palabra de la secuencia numérica convencional" (Orozco, 2008, p. 1).

Seriación: "Es la capacidad que tiene el niño para ordenar objetos según un determinado criterio común a todos, este proceso lo hace comparando un objeto con otro y encontrando al mismo tiempo su diferencia, para ejecutar esto el niño establece relaciones asimétricas. Por ejemplo: criterio común palos a los cuales los ordena comparando uno con otro según su tamaño" (Bautista, 2013, p. 18).

Para esta investigación se consideró que un patrón es "una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia" (Orozco, 2016, p, 2).

Eje cognitivo. Según Vigotsky (1997), la peculiaridad positiva del niño con discapacidad no se debe al hecho de que en él desaparezcan funciones observables en un niño normal, sino a que la desaparición de funciones hace nacer *nuevas formaciones* que representan en su unidad la reacción de la personalidad de la discapacidad. Los procesos cognitivos de memoria de trabajo, atención y percepción están íntimamente relacionados con el esquema visual y en conjunto desarrollan un esquema compensatorio que superan las dificultades del pensamiento en las personas con discapacidad intelectual (López-Mojica, 2013).

Eje didáctico. Se tomó en cuenta la definición de materiales didácticos propuesta por Alsina, Burgués y Fortuny (1998) como "objetos, aparatos o medios de comunicación que pueden ayudar a describir, entender y consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases de aprendizaje" (p. 13). En cuanto a la relevancia del material didáctico, esta investigación se orienta por la propuesta de Empson, Levi y Carpenter (2011), quienes destacan que los materiales concretos se utilizan para apoyar el desarrollo del pensamiento relacional, ya que éste ayuda a generar relaciones, a crear estrategias y ayuda a los estudiantes a generar operaciones más eficientes para simplificar sus procesos.

Metodología

La investigación de tipo cualitativa (Vasilachis, 2009) se desarrolló en cuatro fases que se muestran en la Figura 1. De manera particular interesaron los desempeños de los estudiantes en las tareas de patrones figurales lineales para poder identificar indicios de su pensamiento relacional.

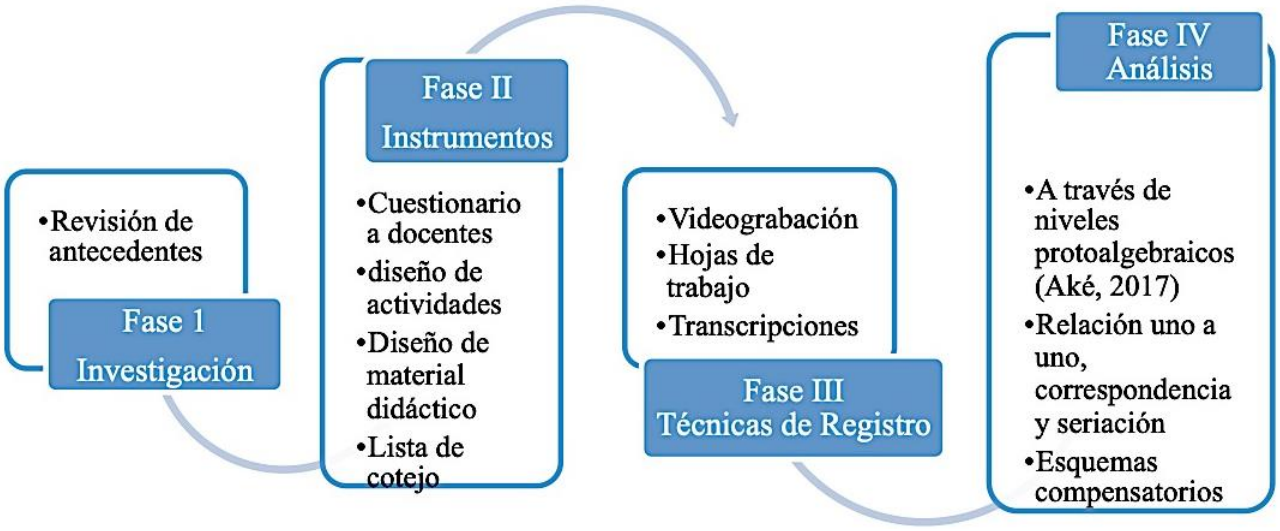


Figura 1. Esquema del procedimiento de la investigación.

Indagaciones bibliográficas. Se llevó a cabo un análisis de distintas fuentes de información, artículos, revistas, libros y tesis de posgrado. Para establecer el orden de esta indagación, y dada la naturaleza de la misma, el análisis bibliográfico se estructuró en torno a tres orientaciones: contenido algebraico, educación especial y materiales didácticos.

Diseño de actividades. Después de realizar la indagación bibliográfica se diseñaron 24 actividades, algunas fueron modificadas de artículos, libros de texto, y otras fueron diseñadas con base en los resultados reportados por otros autores, la experiencia como docente y datos obtenidos en el cuestionario aplicado a docentes. Cada una de estas actividades contó con un material específico para su realización, ello con la finalidad de que éste apoyara su acercamiento al concepto matemático y a su vez para mantener la motivación en los estudiantes.

Las actividades se organizaron en cuatro niveles de complejidad, de tal forma que la secuencia de cada nivel fuera aumentando su grado de dificultad de manera gradual, ello para observar el desempeño de los alumnos en las actividades de cada nivel y su manera de ir creando nociones en su pensamiento relacional.

Para validar las actividades se aplicó un cuestionario de tipo jueceo a seis docentes de una USAER (Unidad de Servicio de Apoyo a la Educación Regular). El objetivo de este instrumento fue recopilar información en torno a la metodología que los profesores consideraban más adecuada para trabajar con alumnos con DI, además de retroalimentar las actividades propuestas y hacer las modificaciones pertinentes.

En la Tabla 1 se muestran las actividades que se llevaron a cabo con los estudiantes, exponiendo cuál era la noción matemática en ella, la situación planteada para cada una, además de identificar los términos que se emplearon durante la aplicación debido al lenguaje de los participantes, caracterizando así cada una de las actividades propuestas.

Tabla 1. Caracterización de las actividades.

Actividad	Noción matemática	Términos empleados
Mariposas	Seriación, orden, tamaño.	Grande, chico, mediano
Gusano de colores	Relación uno a uno, correspondencia.	Colores, seguido de, orden.
Regletas Cuisinaire	Seriación, orden, tamaño.	Grande, chico, mediano, después de, antes, formar, fila.
Completar gusanos	Relación uno a uno, correspondencia.	Después, uno y uno, ordenar.
Triángulos y hexágonos	Relación uno a uno, correspondencia, seriación.	Abajo, arriba, a un lado, iguales, colores.
Estrellas	Relación uno a uno, conteo de números naturales.	Números, después.
Pinta gusanos	Relación uno a uno correspondencia, conteo de números naturales.	Números, sigue, después.
M &M	Relación uno a uno, correspondencia, seriación.	Rojo, amarillo, formar, fila, iguales.

Cabe aclarar que estas actividades fueron seleccionadas para aplicarse de entre el total de actividades propuestas, su elección se decidió en el momento mismo de la aplicación, debido al desempeño observado en los estudiantes.

Aplicación. Las actividades se realizaron con tres estudiantes de una escuela primaria de Zacatecas, México, en una escuela de jornada completa, con el permiso y apoyo de la USAER y padres de familia. Los alumnos participantes contaban con las siguientes características en el momento de la aplicación:

Tabla 2. Características de los participantes.

Nombre	Grado de la DI	Edad	Grado escolar
Pedro	Leve	7 años	Segundo de primaria
Mary	Moderada	8 años	Cuarto de primaria
Diana	Leve	12 años	Sexto de primaria

La aplicación se realizó acorde a cuatro niveles de complejidad, previamente propuestos para la organización de las actividades, de tal manera que se trabajaba con las propuestas para el primer nivel y, si las condiciones y los estudiantes lo permitían, se avanzaba al siguiente de manera gradual, de lo contrario se detenía la aplicación. Se realizaron videograbaciones en cada una de las actividades y con cada uno de los estudiantes, además de obtener evidencias escritas.

Análisis. Para el análisis se revisaron las videograbaciones y las evidencias de los estudiantes, observando cuáles fueron los esquemas compensatorios (atención, memoria y percepción) utilizados por los niños para poder crear nociones sobre el concepto de *patrón*, además se utilizó una lista de cotejo que permitiera hacer anotaciones inmediatas respecto a esquemas compensatorios.

Es necesario establecer que, para poder analizar el tipo de respuestas y desempeños de los estudiantes con DI en tareas sobre el pensamiento relacional, se establecieron los siguientes criterios de análisis:

- Nociones matemáticas: aquí fue de interés señalar si el estudiante llega a la generalidad del patrón figural lineal. Si había en las respuestas nociones de *relación uno a uno*, *correspondencia* y *seriación*.
- Niveles de algebrización (Aké, 2017) correspondientes al objeto matemático de *patrón*, incluidos dentro de los niveles protoalgebraicos, entendidos como niveles de pre-álgebra.

Los niveles para plantear las actividades estuvieron planteados de la siguiente manera:

Tabla 3. Características de los niveles de complejidad en las actividades.

Nivel	Objetivo	Actividades
Nivel 1	Establecer un orden al material didáctico que se les presentara, ya sea de menor a mayor, o a la inversa.	Mariposas, regletas Cuisinare, gusano de colores, las estrellas, flores, puntos.
Nivel 2	Pudieran continuar el patrón figural de manera oral. Identificar el orden establecido por las figuras que se les presentaba en el material didáctico.	Completar gusanos, triángulos y hexágonos, M&M, sandías, pizzas, medusas.
Nivel 3	Continuar y completar el patrón que se les presentaba, siendo entonces capaces de identificar la regularidad que cada uno de los patrones.	Estrellas, pinta gusanos, M&M, bloques figuras geométricas, fichas de dominó.
Nivel 4	Identificar una generalidad en cada uno de los patrones.	Óvalos, cuadrados, mariquitas, bastones, líneas y cuadrados, domino.

Análisis de los resultados

En este apartado, a través de las actividades aplicadas, los niños mostraron nociones de correspondencia, seriación y relación uno a uno, para ello hicieron uso de su memoria, atención, percepción y de sus sentidos.

Actividad de las mariposas (Nivel 1)

Una de las actividades propuestas fue “Las mariposas”, en la cual se pretendía trabajar con los conceptos de seriación, orden y tamaño. La indicación consistió en que los estudiantes dieran un orden a las mariposas presentadas. Según el criterio que ellos usaron, posteriormente se les hicieron preguntas con la finalidad de que

explicaran y justificaran sus respuestas, de este modo a partir de su desempeño analizar las nociones en cuanto a su pensamiento relacional a partir del concepto *patrón*.

En la aplicación con una de las estudiantes, que nombraremos Mary, se apreció que mostraba interés; el material que se utilizó llamó su atención, lo que permitía que fuera una actividad más llevadera dada la hora y la situación en la que se estaba aplicando, pero también era notorio que le costaba mucho trabajo poder concentrarse y comprender las indicaciones que se le estaban dando.

> *Maestra:* -Mira, te voy a dar estas mariposas y quiero que me las ordenes. ¿Cómo las puedes ordenar?
> *Mary:* -Mariposas… ésta va aquí, con su mamá y ésta también aquí con su mamá.
> *Maestra:* (señalando una mariposa pequeña) ¿Por qué pusiste ésta aquí? (Mary la mueve de lugar).
> *Maestra:* ¿Ahora por qué la acomodas ahí?
> *Mary:* Es que debe estar con su mamá.

Imagen 13. Seriación con mariposas según Mary

En esta parte es importante rescatar que Mary relaciona los tamaños de las mariposas con la edad de las personas, lo cual sugiere un principio de su pensamiento relacional, en cuanto a la seriación, ya que Beard (1971) explica que el niño desarrolla la capacidad de agrupar cuando visualiza como un todo a la familia y pone en juego su capacidad de seriar cuando necesita, por ejemplo, ordenar a sus hermanos por edades.

Conclusiones y aportes

Se puede concluir que la secuencia de tareas diseñadas sobre el concepto de patrón figural lineal fue favorable para los participantes, ya que gracias a la colaboración de los docentes que trabajan a diario con esta población, se ayudó a organizar estas actividades de manera gradual, con la finalidad de observar y analizar el desarrollo procesual de los tres estudiantes en escena.

Los resultados fueron interesantes, ya que nos proveen muchas áreas posibles de actuación, entre ellas el uso y la importancia de implementar materiales didácticos acorde al contenido matemático, en donde se deberán considerar las características y necesidades de los estudiantes. A su vez es indispensable tomar en cuenta los esquemas compensatorios que los niños priorizan para, con base en ello, diseñar el material didáctico que potencie las habilidades que tienen los estudiantes, lo cual nos ayudará a mantener su esquema de atención en una mayor cantidad de tiempo, favoreciendo así su aprendizaje.

También es importante rescatar la viabilidad de implementar actividades con nociones matemáticas para adentrarnos en la propuesta de *Early Algebra.* Lo anterior permite argumentar que, si bien los niños con DI no

llegan a una generalización, sí desarrollaron nociones relevantes para la construcción de su pensamiento relacional, como fue el caso de la relación uno a uno.

Sobre la pregunta de esta investigación se encontró que los estudiantes necesitan hacer relación con algo de su vida cotidiana, desde cosas muy simples como las edades de sus familias para poder dar sentido a las actividades que realizan. Hacer uso de actividades diversas y llamativas ayuda en gran medida a la motivación del estudiante, lo cual resulta ser otro factor relevante en su aprendizaje. La interacción con el material concreto permitió el tránsito a los niveles de nociones matemáticas.

El desempeño de los alumnos con DI presenta niveles respecto a su pensamiento relacional, dependiendo de las características de cada estudiante, del uso de esquemas compensatorios y el grado de la afección. Si bien no están muy distantes unos de otros en desempeño, hubo una estudiante a la cual se le facilitaron más las actividades que a los otros dos alumnos, debido a que la niña prestaba atención por periodos más largos, además de tener un mejor manejo en su lenguaje. Había una estimulación más marcada en ella que en los otros dos casos, además de tener una mayor memoria de trabajo por lo cual gozaba de una mayor retención lo que le facilitaba algunas de las actividades, relacionándolas con otras similares que anteriormente, en otros grados había realizado, o relacionándolas con cosas ya conocidas por ella.

Las nociones matemáticas de *correspondencia*, *seriación* y *relación uno a uno*, permitieron sentar bases para la constitución de un pensamiento relacional, sobre todo al momento de hacer relación uno a uno, con la población que se trabajó y con estas características, se logró siempre y cuando no fueran más de cuatro o cinco objetos.

Los niveles propuestos en este trabajo se establecieron conforme los componentes del pensamiento relacional y los niveles protoalgebraicos (Aké, 2017) para el concepto de *patrón*.

Tabla 4. Niveles de los componentes del pensamiento relacional

	Nivel 0	Nivel 1	Nivel 2	Esquema compensatorio observado
Seriación	Identifica diferencias en los objetos, sin determinar exactamente éstas.	Compara objetos.	Establece relaciones entre los objetos.	Memoria. Percepción.
Correspondencia	No reconoce características iguales entre dos objetos.	Encuentra igualdades entre dos objetos.	Encuentra igualdades entre más de dos objetos.	Memoria. Atención.
Relación uno a uno	No relaciona objetos.	Puede asociar un elemento con otro en una colección.	Asigna una sola palabra de la secuencia numérica convencional.	Memoria. Percepción.

Se considera que el enfoque del *Early Algebra* puede ayudar a desarrollar el pensamiento relacional desde la educación especial, con la finalidad de desarrollar un aprendizaje que facilite el estudio posterior del álgebra en educación secundaria. Si bien esta propuesta está pensada para alumnos regulares de primaria, se considera de suma importancia que existan actividades específicas para estudiantes con DI, debido a la importancia de la inclusión educativa, ya que todos los alumnos tienen derecho a oportunidades de aprendizaje acorde a sus características y necesidades.

La consideración de los niveles protoalgebraicos (Aké, 2017) de "patrón" y su correspondencia con las nociones del pensamiento relacional permitieron analizar y ser una vía para determinar la característica del pensamiento matemático de niños con DI. Además, es imperante el uso de materiales didácticos con un soporte físico para que el estudiante con estas características pueda otorgar sentido a las acciones por su uso.

Referencias bibliográficas

Acle, G., Roque, M., Zacatelco, F., Lozada, R., & Martínez, L. (2007). Discapacidad y rezago escolar: riesgos actuales. *Acta Colombiana de Psicología, 10*(2), 19-30.

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación*. (Tesis de doctorado inédita). Universidad de Granada. España.

Aké, L. (2017). El modelo de niveles de algebrización como herramienta de análisis de tareas matemáticas de Educación Primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Alsina, C., Burgués C., & Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometria*. Madrid: Síntesis.

Bautista, J. L. (2013). *El desarrollo de la noción de número en los niños*. Disponible en: http://www4.congreso.gob.pe/historico/cip/eventos/congreso/ICongreso/ponencia/21-25JOSE_21.pdf

Beard, R. (1971). *Psicología evolutiva de Piaget*. Argentina: Editorial Kapelusz.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In J. Cai & E. J. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (p. 409- 428). Berlin: Springer-Verlag.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(2), 155-188.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* España: Universidad de Granada.

Inhelder, B. (1971). *El diagnóstico del razonamiento en los débiles mentales*. España: Nova Terra.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part I: Transforming task structure. En H. Chick, K. Stacey, J. Vicent, y J. Vicent (Eds.). The Future of the Teaching and Learning of Algebra. *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Vol. 1 (pp. 344-350). Melbourne: University of Melbourne.

López-Mojica, J.M. (2009). *Estocásticos en el segundo grado de educación especial.* (Tesis de maestría no publicada). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

López-Mojica, J.M. (2013). *Pensamiento probabilístico y esquemas compensatorios en la educación especial.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV. México.

Molina, M. (2009). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* (Tesis doctoral no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. España.

Molina, M., & Castro, E. (2006). *Comprensión del signo igual y desarrollo de pensamiento relacional en alumnos de tercero de primaria. Una investigación en curso*. Universidad de Granada. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/539/1/MolinaM06-2801.PDF

Orozco, G. (2016). *Patrones numéricos y geométricos*. Disponible en: http://patronesmatematicos.blogspot.mx

Orozco, M. (2008). *Cómo comprende el número el niño*. Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados en Psicología, Congnición y Cultura. Disponible en: http://cms.univalle.edu.co/cognitiva/wp-content/archivos/recursos/Como%20comprende%20el%20ni%C3%B1o%20el%20n%C3%BAmero.pdf

SEP (2010). *Discapacidad intelectual. Guía didáctica para la inclusión en educación inicial y básica*. Consejo Nacional de Fomento Educativo. SEP. Disponible en: https://www.educacionespecial.sep.gob.mx/2016/pdf/discapacidad/Documentos/Atencion_educativa/Intelectual/2discapacidad_intelectual.pdf

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 5-34.

Vasilachis, I. (2009). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: Gedisa.

Vigotsky, L. S. (1997). *Fundamentos de la Defectología. Obras Escogidas V*. España: Visor Dis.

Zapatera, A. (2016). La transición de la aritmética al álgebra. *Revista de didáctica de las matemáticas*. Universidad CEU Cardenal Herrera. Elche.

UNA METODOLOGÍA PARA TIPIFICAR ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMATICAS

A METHODOLOGY TO TYPIFY ERRORS IN MATHEMATICS LEARNING AT THE UNIVERSITY OF COMPUTER SCIENCE

Pedro Alvarez Barreras, María del Carmen Rivalta Valladares
Universidad de las Ciencias Informáticas. Universidad de la Habana(Cuba).
palvarez@uci.cu, maricarmen@matcom.uh.cu

Resumen
El presente trabajo constituye un acercamiento teórico práctico a los errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad de las Ciencias Informáticas. En el mismo se propone una tipificación de errores y una metodología para ponerla en práctica, que se adecua al Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la asignatura Matemática I. En este artículo se analizan diferentes conceptualizaciones y caracterizaciones de error, así como tipificaciones del mismo a partir de la fuente que lo origina, y de esta manera justificar la conceptualización y tipificación asumida. Se utilizan talleres como recurso de la investigación-acción participativa en los que se muestra como a través del intercambio colectivo de experiencias y saberes, los profesores implicados en el contexto del problema a resolver, fueron capaces de someter la propuesta de tipificación de errores y la metodología a una constatación empírica mediante un ejercicio real.

Palabras clave: tipificación, errores, aprendizaje, matemática

Abstract
The present work constitutes a practical-theoretical approach to the errors in Mathematics learning at the University of Computer Science. It proposes a typification of errors and a methodology to put it into practice; which is suitable to the teaching learning process of Mathematics I. In this article, different conceptualizations and characterizations of error are analyzed, as well as its typification from the source that originates it; and in this way, to justify the assumed conceptualization and typifications. Workshops are used as a resource for participatory action- research where it was possible to show how, through the collective exchange of experiences and knowledge, the teachers involved in the context of the problem to be solved, were able to submit the proposal of error typification and the methodology to an empirical observation through a real exercise.

Key words: typification, errors, learning, mathematic

Introducción

Al tratar de explicar y solucionar los problemas que originan el bajo rendimiento académico que tienen los estudiantes en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje (PEA) de la asignatura Matemática I, que se imparte en el primer año de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas, se aplicaron medidas y alternativas a nivel institucional, que si bien han contribuido a mitigar alguno de los problemas, persiste aún este bajo rendimiento, que se constata fundamentalmente en las pruebas parciales y en los exámenes finales. Por otro lado, en los informes de asignatura que se elaboran al finalizar estos exámenes, se mencionan un grupo de dificultades agrupadas por contenidos, que no reflejan de forma explícita el concepto que delata la dificultad: *el error*.

Existe una arraigada concepción en muchos profesores de que el error es una dificultad, algo negativo que se debe evitar a toda costa y que cuando se manifiesta hay que erradicar de inmediato. Sin embargo, se comparte la idea que expresan diferentes investigadores, tales como, (Socas Robayna, 1997), (Rico, 1998), (Bachelard, 2000), (Godino, Batanero, Font, 2003), (Brousseau, 2007), (Cid Castro, 2015), (Estenoz Pino, 2016), entre otros, quienes defienden que el error es consustancial al conocimiento y ha formado parte del propio desarrollo de la ciencia en su devenir histórico, por lo que juega un rol importantísimo en el PEA de cualquier asignatura.

Sobre los errores que manifiestan los estudiantes (Socas Robayna, 1997) y (Rico, 1998), hacen un análisis histórico de este proceso de investigación, que ha tomado diferentes caminos y muestra una multiplicidad de enfoques diferentes. Según Mulhern (1989), citado por (Rico, 1998), desde el punto de vista metodológico las investigaciones sobre errores se pueden agrupar en las siguientes categorías:

1. Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.
2. Análisis de los tipos de errores cometidos.
3. Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntoma de concepciones inadecuadas.
4. Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos.

La primera categoría evidentemente no da mucha información sobre la naturaleza del error para poder tratarlo y es la que más se emplea, sobre todo para realizar informes finales de asignaturas. La tercera categoría; según plantea el propio autor, no facilita encontrar la fuente del error por lo complejo que se hace seguir la línea de pensamiento de los estudiantes. La última categoría, presupone una dedicación profesionalizada en la investigación, lo cual se le hace difícil a un profesor que debe cumplir con una carga docente alta; siendo esta una característica del claustro de la Facultad Introductoria de las Ciencias Informáticas (FICI), que además, es un claustro joven, con poca experiencia docente.

La mayor cantidad de investigaciones se encuadran metodológicamente en el segundo tipo. En este caso al analizar los tipos de errores que manifiestan los estudiantes, se procura hacer una clasificación de los mismos, ver en qué medida se desvían de la respuesta correcta e inferir las posibles causas o fuentes que los provocan. Como resultado de este proceso varios autores han propuesto diferentes tipificaciones de errores según su fuente, de acuerdo a criterios que pueden diferir unos de otros y muestran una dispersión en cuanto a la focalización de sus causas que resulta poco viable, por ejemplo, para profesores que trabajan en las condiciones de la FICI explicadas anteriormente.

Las razones expuestas, guiaron esta investigación a asumir una tipificación de errores en la Matemática I y a diseñar una metodología que permitirá orientar a los profesores, de manera asequible, a identificarlos y clasificarlos para su posterior tratamiento.

Marco teórico

Conceptualización de error

Según aparece en el diccionario Larousse el error es "Concepto o expresión falsos, no conformes a la verdad: *el examen estaba plagado de errores*" (Pequeño Larousse Ilustrado, 2008, p. 401), expresándose en una primera acepción una idea general del término. No obstante, en el ejemplo mostrado se puede leer entre líneas la connotación negativa que este concepto tiene, pues casualmente el ejemplo se refiere al ámbito educativo.

A continuación, se muestran algunas conceptualizaciones y caracterizaciones de error, establecidas en investigaciones relativas al contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, con la finalidad de llegar a una que se ajuste a los intereses de esta investigación.

- Según Godino "hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar" (Godino, Batanero, Font, 2003, p. 73).
- Según Rico "Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta" (Rico, 1998, p.76).
- Socas Robayna considera el error como "…la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solo como una falta específica de conocimiento o de un despiste." (Socas Robayna, 1997, p. 125).
- Rivalta Valladares considera que "un estudiante comete errores en el aprendizaje, cuando al realizar una tarea evidencia una carencia parcial o total de los contenidos específicos o no específicos, o muestra alguna equivocación, según los contenidos declarados en el proyecto curricular o los formalizados en el proceso, aceptados científicamente" (Rivalta Valladares, 2018).

En estas conceptualizaciones de una forma u otra se aprecia como elemento común, que el error es una producción del estudiante que no se corresponde con el conocimiento oficialmente aceptado por la ciencia, pero en las tres primeras no se aclara que aspectos de esas producciones son los errados, que permitan de alguna manera focalizar con más precisión donde está el error.

Si se tiene en cuenta que el conocimiento del cual se está tratando es el contenido de la enseñanza de la Matemática, el cual se asume en esta investigación como "…el contenido específico (conceptos, leyes, teorías, procedimientos y métodos privativos de una ciencia o disciplina en particular) y el contenido no específico (habilidades lógicas, habilidades de carácter general, procedimientos algorítmicos, heurísticos, habilidades de estudio, los valores a desarrollar. (Hernández F., Lópes, s/f)

Por ello para los fines de esta investigación, se justifica considerar como conceptualización de error la dada por Rivalta Valladares (2018).

Fuentes del error

Según Socas Robayna (1997) hay tres direcciones que pueden orientar al profesor a la hora de inferir la fuente del error y que no son necesariamente disjuntas:

1) Errores que tienen su origen en un obstáculo.
2) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
3) Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

La *ausencia de sentido* se puede explicar en situaciones donde hay carencias en la comprensión de los contenidos matemáticos, tanto los específicos (conceptos, teoremas, procedimientos, etc.) como no específicos (habilidades generales matemáticas, habilidades lógicas, etc.). Las *actitudes afectivas y emocionales* impactan siempre el aprendizaje, y si éstas no se traducen en una motivación positiva hacia el mismo, no es de extrañar que se manifiesten errores en las producciones de los estudiantes.

El obstáculo como fuente de errores, por su importancia y sobre todo, por la atención que ha recibido en la investigación en educación matemática será tratado en la siguiente sección.

La noción de obstáculo como fuente de errores

Las investigaciones sobre obstáculos tienen sus orígenes en los trabajos de Gastón Bachelard, epistemólogo francés que, en su obra, "La formación del espíritu científico" de 1938, acuñó el término de *obstáculo epistemológico*; aunque planteó que el mismo se aplicaba a los conocimientos científicos de la Física y otras ciencias, no así a los conocimientos matemáticos (Bachelard, 2000).

No fue hasta el año 1976 que el profesor francés Guy Brousseau contextualizó el concepto de obstáculo al campo de la enseñanza de las Matemáticas como parte de su Teoría de las Situaciones Didácticas. En dicha teoría la noción de *obstáculo* es esencial, pues el profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje deberá ir creando situaciones en las que el objetivo fundamental es ir venciendo dichos obstáculos.

Los autores Palarea y Socas plantean que, tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como "… aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas." (Palarea Medina, Socas Robayna, 1994, p. 93). Esta conceptualización de obstáculo es la que se asume en esta investigación.

A su vez los obstáculos, como fuentes de error pueden tener, según Brousseau, orígenes diferentes:

- *Los de origen ontogenético,* tienen que ver con el desarrollo cognitivo del estudiante.
- *Los de origen didáctico,* están relacionados con la elección metodológica del profesor dentro del sistema didáctico.
- *Los de origen epistemológico*: Están vinculados con la dificultad intrínseca del concepto a aprender y pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la Matemática, en la génesis misma de los conceptos.

En esta investigación no se tiene en cuenta el obstáculo de origen *ontogenético,* pues los estudiantes que cursan la universidad, a diferencia de los de otras edades, ya alcanzaron una madurez en su desarrollo cognitivo.

Tipificación de errores a partir de las fuentes que los originan

Como ya se ha analizado, para dar un tratamiento adecuado a los errores que manifiestan los estudiantes, es importante primeramente identificar las causas o fuentes que los originan. En este sentido se analizó el *obstáculo* como fuente de errores en el aprendizaje y se explicó como en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau este concepto es esencial, al punto de no considerarse prácticamente otras posibles fuentes del error. Ahora bien, existen múltiples tipificaciones realizadas por diferentes autores que abren el diapasón de estas posibles fuentes. Se muestran a continuación las más significativas a juicio de los autores:

Según Radatz (1979) citado por (Rico, 1998)

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Errores debido a rigidez del pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Según Movshovitz et al. (1987) citado por (Rico, 1998)

- Errores debidos a datos mal utilizados.
- Errores debidos a una utilización incorrecta del lenguaje.
- Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.
- Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.
- Errores debidos a la falta de verificación en la solución.
- Errores técnicos: errores de cálculo, de procedimiento en algoritmos básicos.

Estas tipificaciones se sustentan, en relacionar los errores con contenidos propios de la Matemática, con habilidades del pensamiento lógico, uso del lenguaje, etc., pero se aprecia en ellas cierta dispersión en cuanto a la focalización de las fuentes de los errores, o sea, estas tipificaciones no facilitan, a juicio de los autores, que los profesores de la FICI tengan una estructuración mejor ordenada de dichas fuentes.

Si se analizan detalladamente las tipificaciones mencionadas se puede apreciar como los tipos de errores que se declaran tienen su manifestación en acciones realizadas por los estudiantes. Según la teoría de la actividad, sea un concepto, un procedimiento o una habilidad matemática los contenidos no solo se asimilan sino se manifiestan mediante acciones, pues como expresa la psicóloga rusa Nina Talízina: "...no se puede separar el saber del saber hacer, porque saber siempre es saber algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer. Entonces para llegar a algún acuerdo sobre qué es saber, siempre hay que determinar los tipos de habilidades, gracias a las cuales funcionan, se expresan los conocimientos" (Talízina , 1984, p. 48).

Continuando el análisis de las tipificaciones mencionadas, los autores de esta investigación se plantearon la necesidad de reescribir y reagrupar los tipos de errores que estos autores expresan, de manera que la nueva tipificación así obtenida, expresara las fuentes de los errores en términos de constructos que tengan implícitas las acciones que deben realizar los estudiantes para mostrar su aprendizaje, a saber, en términos de contenidos específicos y en términos de contenidos no específicos. Por supuesto, ya se había estado de acuerdo en incluir también los obstáculos como posibles fuentes de errores.

De lo planteado anteriormente se asume en esta investigación la siguiente tipificación de errores tomada de la definición operacional de error dada en (Rivalta Valladares, 2018):

- Error originado por carencia en los contenidos específicos (conceptos, procedimientos, proposiciones, etc.)
- Error originado por carencia en los contenidos no específicos (Habilidades Generales Matemáticas, etc.)
- Error originado por obstáculo (didáctico, epistemológico)

Aquí las Habilidades Generales Matemáticas, son consideradas como un conjunto de "verbos bien definidos, que sirven para unificar el lenguaje en la formulación de los objetivos en los programas de asignaturas matemáticas" (Delgado Rubí, 1999).

Resultados

Metodología para tipificar errores en el aprendizaje de la Matemática I en la UCI

A partir del análisis documental realizado y de las características propias de esta investigación se procedió a diseñar una metodología que facilite el trabajo de tipificación a los profesores de la FICI, la misma se expone a continuación:

Objetivo general:

Tipificar los errores que manifiestan los estudiantes en el PEA de la Matemática I como un primer paso para el posterior tratamiento de los mismos.

Fundamentación:

Esta metodología responde a la necesidad que tienen los profesores de la asignatura Matemática I de tipificar los errores que manifiestan sus estudiantes en el aprendizaje de la asignatura, según la fuente de los mismos y usando una terminología estandarizada en el contexto de la FICI.

Aparato conceptual que sustenta la metodología:

Esta metodología se sustenta en los conceptos fundamentales siguientes:

Contenido matemático: El contenido como categoría de la didáctica responde a la pregunta ¿qué enseñar? En Matemáticas se enseñan conceptos, procedimientos y proposiciones, lo que se entiende como contenidos específicos y habilidades matemáticas generales junto a habilidades del pensamiento lógico, lo que se entiende como contenidos no específicos.

Error: Un estudiante comete errores en el aprendizaje, cuando al realizar una tarea evidencia una carencia parcial o total de los contenidos específicos o no específicos, o muestra alguna equivocación, según los contenidos declarados en el proyecto curricular o los formalizados en el proceso, aceptados científicamente.

Obstáculo: Es aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.

Tipificación de errores: Los errores, atendiendo a su fuente se tipifican como:

- Error originado por carencia en los contenidos específicos (conceptos, procedimientos, proposiciones, etc.)
- Error originado por carencia en los contenidos no específicos (Habilidades Generales Matemáticas)
- Error originado por obstáculo (didáctico, epistemológico)

Pasos que componen la metodología:

1. Inferir errores potenciales que los estudiantes pudieran manifestar. Este paso se cumplirá durante la preparación de una clase o en el proceso de diseño de un instrumento de evaluación, siempre a partir de los objetivos de la actividad docente y del conocimiento que tiene el profesor de sus estudiantes.
2. Tipificar los errores detectados en la actividad docente (clase o evaluación) y tabularlos.
3. Crear grupos de estudiantes por tipos de errores más frecuentes, de manera que facilite el posterior tratamiento didáctico de dichos errores.

4. Comparar la estimación de errores potenciales del paso 1 con los identificados y tipificados en el paso 2, de manera que sirva de retroalimentación para mejorar el proceso.
5. Interactuar con los estudiantes, siempre que sea posible, para afinar el proceso de aproximación a las causas o fuentes de los errores, lo cual enriquecerá la experiencia del profesor para posteriores procesos.

Evaluación de la metodología:

Se recomienda realizar talleres metodológicos donde participen los profesores del colectivo de asignatura de manera que se puedan recopilar y analizar experiencias de trabajo con la metodología, siempre con el objetivo de entrelazar opiniones, visiones, técnicas, etc. y así mejorar la práctica docente.

Recomendaciones para su instrumentación:

Para aplicar con éxito esta metodología es necesario que los profesores:

- Dominen el trabajo didáctico y metodológico con los contenidos específicos y no específicos de la Matemática I.
- Dominen la tipificación que se usará y los conceptos fundamentales asociados a la misma, como error y obstáculo.
- Realicen un diagnóstico frecuente que les permita tener una caracterización de los estudiantes sobre los saberes y errores mostrados en su aprendizaje.

Validación de la tipificación de errores y de la metodología propuesta

Para justificar la tipificación de errores asumida, diseñar la metodología y validar ambas, se realizaron dos talleres de investigación en los que participaron los profesores del claustro de la asignatura Matemática I de la FICI. El primer taller tuvo el objetivo principal de registrar como los profesores participantes, a partir de su propia experiencia y forma de hacer, tipificarían los errores que manifestaron los estudiantes en una evaluación escrita real realizada con anterioridad; en este taller no se dio información alguna relacionada con tipificaciones existentes.

Después de realizado el primer taller se analizaron las tipificaciones realizadas por los profesores talleristas y se verificó en qué medida, la propuesta de tipificación que se propone se ajustaba a lo elaborado por ellos. A partir de ahí se diseñó una propuesta de metodología de tipificación de errores, para facilitar el trabajo de los profesores.

El segundo taller tuvo como objetivo principal registrar como los profesores talleristas tipificarían los errores que manifestaron los estudiantes en el mismo examen utilizado en el primer taller, a partir de la propuesta de tipificación y de la metodología que se propone.
Antes de describir el desarrollo de los talleres se analizarán algunas cuestiones esenciales relacionadas con la teoría sobre el *taller* como recurso de investigación en pedagogía.

El taller como recurso de la investigación-acción en investigaciones pedagógicas

La *investigación-acción* es un método de investigación cualitativa, que se utiliza en las ciencias sociales a partir de los años posteriores a la segunda guerra mundial y se inició con los trabajos de Kurt Lewin. Este autor partió del hecho de estudiar los fenómenos sociales produciendo cambios en ellos, analizando dichos cambios y los efectos que estos producen. (Banister, Burman, Parker, Taylor, Tindall, 2004).

La investigación-acción tiene diferentes fases, que según (Kemmis McTaggart, 1988), citado por (Bausela Herreras, 2004, p. 5) son las siguientes:

1. Diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial.
2. Desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo.
3. Actuación para poner el plan en práctica y la observación de sus efectos en el contexto que tiene lugar.
4. La reflexión en torno a los efectos como base para una nueva planificación.

La investigación-acción "…se concentra en conocimientos precisos aplicados a un problema específico en una situación específica: su fuerza particular es que se evalúa a sí misma y es colaborativa, y su objetivo último es mejorar la práctica." (Banister, *et al*, 2004, p. 143).

La presente investigación se concentra en el estudio de las tipificaciones existentes sobre los errores en el aprendizaje a partir de sus fuentes y en proponer una tipificación que se ajuste al contexto de utilización que tendrá la misma, o sea, el claustro de la asignatura Matemática I, los contenidos de dicha asignatura y los estudiantes de la FICI en la época presente; y luego diseñar una metodología que facilite su uso por los profesores.

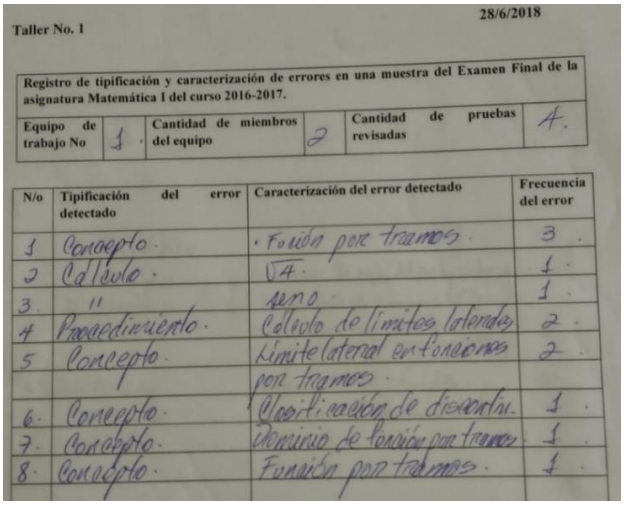
En el ámbito educativo se utiliza el *taller* como forma de organización del trabajo docente, siendo este un tipo de clase, por lo cual tiene un carácter eminentemente formativo, según (Ghiso, 1999) en la literatura relacionada con la educación popular, la animación socio-cultural y el trabajo social, el taller también es reconocido con un carácter formativo, sin embargo se recoge en la literatura que muchos procesos de Investigación-acción-participativa mencionan la utilización de talleres como una manera de *recopilar, analizar y construir conocimiento*.

A partir de lo planteado, se asume en esta investigación el taller como "…la metodología que permite el hacer, el procesar con otros, el entrelazar intensiones, lenguajes, visiones, objetos de estudio, técnicas. Es un espacio para lograr haceres conjuntos que conduzcan al análisis, la discusión académica y la conceptualización." (Montoya Cuervo, Zapata López, 2005, p. 27).

A continuación se describirán los talleres de investigación realizados y sus resultados.

Descripción y resultados del primer taller de investigación

En el primer taller se trabajó en equipos de dos profesores cada uno, a cada equipo se le indicó trabajar solo una pregunta del examen. Los profesores identificaron errores y los tipificaron a partir de su propia experiencia y criterios. A continuación, se muestra el registro de uno de los equipos:



Taller No. 1 — 28/6/2018

Registro de tipificación y caracterización de errores en una muestra del Examen Final de la asignatura Matemática I del curso 2016-2017.

Equipo de trabajo No	1	Cantidad de miembros del equipo	2	Cantidad de pruebas revisadas	4.

N/o	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado	Frecuencia del error
1	Concepto.	• Función por tramos.	3.
2	Cálculo.	√4.	1.
3	"	seno.	1.
4	Procedimiento.	Cálculo de límites laterales	2.
5	Concepto.	Límite lateral en funciones por tramos.	2.
6.	Concepto.	Clasificación de discontinuidades.	1.
7.	Concepto.	Dominio de función por tramos.	1.
8.	Concepto.	Función por tramos.	1.

Figura 1. Registro del equipo de trabajo No.1 durante el taller No.1

Como resultado de este primer taller se pudo llegar a las siguientes conclusiones:

1. Los profesores talleristas tipificaron mayoritariamente los errores apuntando a los contenidos específicos (en este caso conceptos, procedimientos) como la fuente donde encontrar su origen.
2. En menor proporción tipificaron los errores apuntando a carencias en el dominio de Habilidades Generales Matemáticas, tales como calcular, resolver, graficar.
3. Se pueden inferir que existe poco dominio por parte de los profesores de las habilidades generales matemáticas, así como de considerar las mismas como parte del contenido matemático
4. La tipificación hecha por los profesores se aproxima bastante a la propuesta de tipificación que se propone.

Descripción y resultados del segundo taller de investigación

En el segundo taller se les mostró a los profesores talleristas una presentación con los resultados del primer taller. Se continuó con una introducción teórica sobre los errores y las tendencias de diferentes autores para su tipificación y posteriormente se expuso la propuesta de tipificación de errores y la propuesta de metodología para llevarla a cabo. A continuación, se estableció un debate sobre estas cuestiones. Algunas de las opiniones fueron las siguientes:

- Profesor 1: Manifestó sus dudas si en el caso de los errores originados por obstáculos, estos no podían incluirse dentro de los que apuntan a los contenidos específicos o no específicos.
- Profesor 2: Planteó que se recordara que tipificar un error en alguna categoría no implicaba necesariamente que no podía estar en otra categoría a la vez y se puso un ejemplo.
- Profesor 3: Consideró que él estuvo pensando un rato mientras los demás se expresaban y que hasta ese momento no se imaginaba ningún error que no cupiera, por así decirlo, en alguna de las categorías de la tipificación propuesta.
- Profesor 4: Manifestó que la metodología le parecía incluir los pasos necesarios para poner en práctica la tipificación propuesta.

Luego de esta introducción se trabajó en equipos de dos profesores cada uno, a cada equipo se le indicó trabajar solo una pregunta del examen. A continuación, se muestra el registro de un equipo al que se le asignó la pregunta 1 del examen.

1. Dada la función f, tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x-2)}{4-x^2} & si\ x < 2 \\ 1 & si\ x = 2 \\ \frac{-x+1}{6x} & si\ x > 2 \end{cases}$
   a) Determine el dominio de f.
   b) Calcule $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.
   c) Determine si f es continua en $x = 2$, en caso de no serlo, clasifique la discontinuidad.

Figura 2. Pregunta 1 del examen con el que trabajó uno de los equipos en el taller No.2

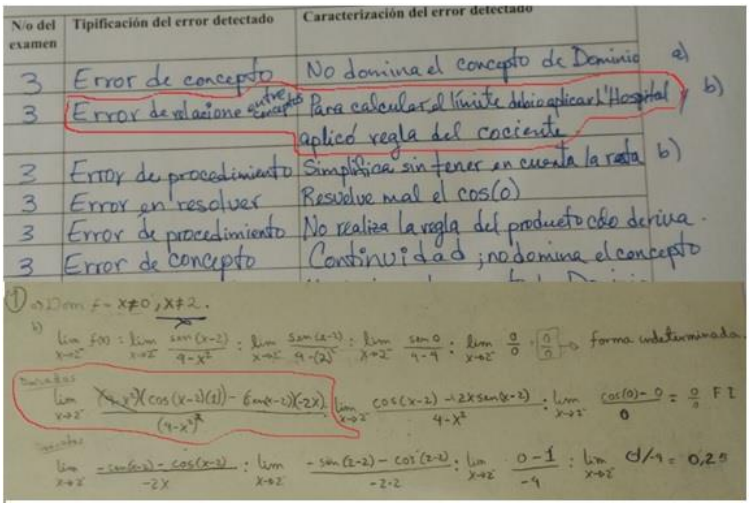


Figura 3. Registro de Tipificación de un error realizado por los profesores (parte superior de la imagen) y el error mostrado por el estudiante y señalado en el examen (parte inferior de la imagen)

En este caso lo tipifican como error de relaciones entre conceptos, o sea, plantean que el estudiante debió aplicar la regla de LHospital para calcular el límite y lo que aplicó fue la regla de la derivada de un cociente. Aunque hay conceptos implicados en este ejemplo, más bien el estudiante lo que hace es utilizar un procedimiento por otro. El autor principal de esta investigación, previamente a la realización del taller hizo una tipificación de los errores mostrados por los estudiantes en ese examen, y en este caso de error en particular lo tipificó como un error por obstáculo, pues consideró que el estudiante al intentar calcular el cociente de las derivadas como procedimiento dentro de la regla de L´Hospital, lo que hace realmente es utilizar la regla de la derivada de un cociente, por lo que se infiere que esta última regla, que el estudiante conoce bien, obstaculizó el aprendizaje de la primera.

El ejemplo descrito anteriormente muestra como al intentar tipificar un error, siempre lo que se hace es una inferencia, que un mismo error puede tener causas diferentes en diferentes estudiantes y en un mismo estudiante, pues las fuentes de los errores no son disjuntas. Por lo tanto, se infiere de este ejemplo la necesidad de retroalimentación constante del profesor con el estudiante, de manera que se vaya afinando el trabajo de tipificación por aproximaciones sucesivas.

Conclusiones de los talleres de investigación

Los talleres de investigación realizados mostraron como a través del intercambio colectivo de experiencias y saberes, los profesores implicados en el contexto del problema a resolver, fueron capaces de someter la propuesta de tipificación de errores y la metodología a una constatación empírica mediante un ejercicio real. La propuesta de metodología para tipificar errores fue enriquecida como resultado del análisis de las opiniones de los participantes, de las dudas que plantearon para trabajar con ella, etc., sobre todo, estas opiniones influyeron en las recomendaciones para su instrumentación.

Conclusiones

Como resultado de esta investigación se puede concluir:

1. Se asumió y justificó una tipificación de errores que se adecua al contexto del claustro de profesores de la asignatura Matemática I de la FICI.
2. Se diseñó una metodología que facilita a los profesores identificar y clasificar los errores que manifiestan sus estudiantes, según la tipificación asumida.
3. Se realizó un estudio teórico de las principales tendencias en cuanto a formas de tipificar errores en el aprendizaje de las matemáticas, tanto en el ámbito foráneo como nacional.
4. La utilización de talleres como recurso de la investigación-acción participativa permitió validar la tipificación de errores y la metodología propuestas en este contexto.
5. Una adecuada tipificación constituye el primer paso para aplicar un tratamiento didáctico que elimine o minimice los errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico, contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (23 ed.). México, D.F: Siglo ventiuno editores.

Banister, P., Burman, E., Parker, I., Taylor, M., & Tindall, C. (2004). *Métodos cualitativos en psicología, una guía para la investigación.* México: Universidad de Guadalajara.

Bausela Herreras, E. (2004). La docencia a través de la investigación-acción. *Revista Iberoamericana de Educación, 35*(1), 1-9.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Cid Castro, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.* Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.

Delgado Rubí, J. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas*. Tesis de Doctorado no publicada, Ciudad de la Habana, Cuba.

Estenoz Pino, S. E. (2016). *Estrategia didáctica para el tratamiento de los errores cognitivos de origen epistemológico en el aprendizaje de la Matemática del preuniversitario cubano*. Tesis de Doctorado no publicada. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana, Cuba.

Ghiso, A. (1999). Acercamientos: El taller en procesos investigativos interactivos. *Estudios sobre las culturas contemporaneas, V*(9), 145-153.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros.* Granada.

Hernández F., H., & Lópes, M. (s/f). Los contenidos de enseñanza. Criterios para una mejor selección.

Montoya Cuervo, G., & Zapata López, C. (2005). El taller: Una estrategia para la normalización de términos y conceptos en un trabajo terminológico. *Análisis, VI*(1), 25-35.

Palarea Medina, M., & Socas Robayna, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*(16), 91-98.

Pequeño Larousse Ilustrado. (2008). *Diccionario*, 267. Ediciones Larousse, S.A. de C.V.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Edits.), *Educación matemática.* Bogotá, Colombia: una empresa docente.

Rivalta Valladares, M. (2018). *Tratamiento didáctico para minimizar los errores en el aprendizaje de la Matemática en estudiantes de licenciatura Química*. Tesis doctoral en proceso. La Habana, Cuba.

Socas R., M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En R. L. otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secuendaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.

Talízina, N. (1984). *Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la educación superior.* La Habana: Universidad de la Habana: Departamento de estudios para el perfeccionamiento de la educación superior.

PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA DEFINICIÓN DE MÁXIMO Y MÍNIMO

A GENETIC DECOMPOSITION PROPOSAL FOR THE DEFINITION OF MAXIMUM AND MINIMUM

Jesús Alfonso Noriega Márquez
Universidad Autónoma de Querétaro (México).
jalfonsonoriega@gmail.com

Resumen
Este trabajo presenta la base para una propuesta para la enseñanza del cálculo diferencial a nivel ingeniería, la cual se especializa en la definición de máximo y mínimo de una función, usando la teoría APOE como marco teórico y metodológico. APOE es un marco teórico constructivista, por lo que el trabajo incluye un análisis teórico que es la descomposición genética hipotética sobre la definición de máximo y mínimo, así como dos instrumentos que ayudan a validar la descomposición. Este trabajo forma parte de una tesis de maestría que muestra una propuesta de la aplicación de la derivada al cálculo de máximos y mínimos.

Palabras clave: APOE, descomposición genética, máximo y mínimo

Abstract
This paper presents the basis for a differential calculus teaching proposal at engineering level, which is specialized on the definition of maximum and minimum of a function, using APOS theory as a theoretical and methodological framework. APOS theory is a constructivist theoretical framework. So, this paper includes a theoretical analysis which is the hypothetical genetic decomposition on the definition of maximum and minimum, as well as two tools that help to validate such decomposition. This paper is part of a master's degree thesis that shows a proposal for the application of the derivate to the calculus of maxima and minima.

Key words: APOS, genetic decomposition, maximum and minimum

Introducción

Se sabe que las matemáticas son pieza fundamental en la formación de ingenieros, prácticamente toda su formación está relacionada con alguna de las ramas de las matemáticas, principalmente el cálculo, siendo ésta la base en ingeniería para poder entender y aprender los conceptos propios del curso. Sin embargo, el cálculo es una de las principales razones por la que los estudiantes abandonan la ingeniería, y en muchos de los casos es por errores didácticos o por que el profesor no tiene los conceptos matemáticos claros y aun así los enseña, lo que provoca una mala concepción por parte del estudiante (Moreno y Cuevas, 2004).

México es uno de los países donde egresan más ingenieros a nivel mundial. En 2012 México fue el sexto país en el orbe que generó más número de ingenieros solo por debajo de Japón, Estados Unidos, República de Corea, Ucrania y República Islámica de Irán (Vázquez, 2012). Sin embargo, la calidad de estos ingenieros es lo que es preocupante, entre los años 2010 y 2015 México pasó del lugar 86 al lugar 96 en el índice de Desarrollo de Tecnologías de la Información (Posada, 2016). Estos números solo muestran el caso de las tecnologías de la información, pero en diferentes aspectos México se está rezagando en el ámbito tecnológico.

La formación académica del ingeniero no es la que requieren las empresas que desarrollan tecnología, por ello la mayoría de los egresados debe realizar capacitaciones propias de las empresas donde van a trabajar por la incapacidad que tiene el ingeniero por posesionarse de un puesto como recién egresado. Además de incluir que el nivel de desempleo entre los recién egresados es de los más altos en el país y que éstos mismos egresados solo un 40% trabaja en algo relacionado con lo que estudió (Hernández, 2012). Éstas bajas estadísticas se deben a dos factores fundamentales, el primero es el bajo nivel académico con el que cuentan los estudiantes en el país, principalmente en matemáticas, los resultados en las evaluaciones internacionales como PISA demuestran este rezago académico que los alumnos van acarreando desde niveles básicos hasta llegar a las universidades.

El segundo aspecto que perjudica el progreso tecnológico es la baja o nula interacción de los estudiantes con el entorno que los rodea, conocen las empresas hasta que terminan sus estudios en lugar de crear lazos para que los proyectos que desarrollen en el área sean acordes a un proyecto en la vida laboral cotidiana. Desde la experiencia del autor como docente se han encontrado diversos tipos de problemas en los estudiantes a la hora de afrontar ejercicios referentes a la aplicación de la derivada.

Muchos alumnos tienen la dificultad de entender los teoremas que son tratados en el curso de cálculo diferencial, muestran problemas en comprender conceptos relevantes y solo siguen instrucciones precisas o fórmulas para encontrar valores que les pide el profesor, como en el caso de derivar una función, se aprenden de memoria las fórmulas y con base en esa memorización intentan encontrar las derivadas de las funciones, en lugar de entender que significa la derivada y encontrar el valor comprendiendo que es lo que están haciendo.
Otro problema que se ha encontrado en el curso de cálculo es que el alumno no consigue contextualizar problemas fuera de la matemática, además que se le dificulta lograr una interacción entre los conceptos matemáticos que está trabajando con conceptos de otros campos que se supone ya conoce.

El presente trabajo forma parte de una tesis de maestría y es una investigación desarrollada con el ciclo de investigación de la teoría APOE y una proposición de descomposición genética por parte del autor tomando como referencias ejercicios del libro de Cálculo de una variable, trascendentes tempranas (Stewart, 2008).

Marco teórico

La investigación se realizó dentro del marco teórico APOE, esto es debido a que dicha teoría funciona tanto como marco teórico como marco metodológico, la misma teoría permite investigar cómo el estudiante aprende y también

permite realizar instrumentos para analizar el desempeño y avance que presenta el estudiante o las dificultades que manifiesta en el aprendizaje.

La teoría APOE fue creada por el Doctor Ed Dubinsky para comprender la formación del conocimiento en los estudiantes. Está basada en los trabajos de Piaget (Piaget y García, 2008) sobre constructivismo, la cual menciona que el sujeto tiene que construir sus propios conocimientos, y no los puede recibir construidos por los otros, aunque para la propia construcción sea indispensable la interacción entre individuo y medio. Y también se basa en la abstracción reflexiva que es un conocimiento no observable, pues es la persona quien lo construye en su mente a través de relaciones con los objetos, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo, es un conocimiento que una vez aprendido ya no se olvida, ya que la experiencia no viene sobre los objetos sino sobre la acción de estos.

APOE Estructuras y mecanismos mentales

La teoría APOE es principalmente un modelo para describir como los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos, ayuda a explicar cómo los individuos crean construcciones mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) para entender los conceptos trabajados de tal manera que pasan de un estado de construcción a otro gracias a los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, generalización y desencapsulación) que va desarrollando (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

Acción

De acuerdo con Paget y adoptado por la teoría APOE un concepto matemático es primeramente concebido por el individuo como una acción, esta se caracteriza por ser una transformación de un objeto que es percibida como externa y se realiza como una reacción a sugerencias o pasos a seguir, es decir estímulos que pueden ser físicas o mentales. (Parraguez, 2009). Dubinsky (1996, p .34) menciona: *"Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento."*
Se dice que un individuo tiene una construcción mental acción cuando manipula el concepto de forma física a partir de un algoritmo, no puede transformar el concepto sin los pasos marcados en el algoritmo. Es el primer acercamiento que tiene el estudiante con el concepto matemático, pero es fundamental que posea esta construcción ya que de aquí parte el conocimiento, de aquí se originan otras construcciones mentales.

Proceso

La construcción mental proceso se puede construir a partir de dos mecanismos mentales, la interiorización o la coordinación. La interiorización se logra cuando el individuo repite la acción y logra reflexionar acerca de ella. Esto quiere decir que logra ejecutar la acción, pero ahora de forma mental lo que conlleva a ya no necesitar el estímulo externo. (Gamboa, 2013). Dubinsky (1996, p. 34) menciona *"En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas"*, lo que quiere decir que el individuo puede reflexionar, describir o incluso revertir los pasos de la transformación ya que la realiza enteramente en su mente, lo que significa que puede reflexionar sobre la acción (Dubinsky, 1996).

Otra manera de construir una estructura mental proceso es a través de la coordinación, la cual es un mecanismo mental que involucra dos constructos mentales proceso, los cuales interaccionan entre ellos formando un nuevo constructo mental proceso. Logrando que el estudiante pueda reflexionar sobre los conceptos trabajados.

Objeto

La estructura mental objeto se logra cuando el alumno encapsula un constructo mental proceso, esto se da cuando el estudiante aplica una acción a un proceso, lo que quiere decir que una estructura mental dinámica como es el

proceso la ve como una estructura mental estática como lo es la acción (Arnon et al, 2014). Cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones que le aplica a un proceso es porque ve ese proceso como un todo, realiza transformaciones sobre ese proceso, ya sean acciones u otros procesos se dice que ve al proceso como una estructura mental objeto (Dubinsky, 1996). La encapsulación es uno de los mecanismos mentales más complicados, Parraguez (2009, p. 40) menciona: *"tomar conciencia sobre las operaciones aplicadas a un proceso y reflexionar sobre ellas resulta una dificultad para los estudiantes"*.

Esquema

Un esquema es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se tienen para un concepto matemático en particular. Dicha colección puede estar relacionada consciente o inconscientemente en la mente del estudiante y son empleados para la solución de situaciones problemáticas que involucren ese concepto matemático. (Parraguez, 2009).

Los estudiantes pueden actuar de diferentes maneras respecto a una situación problemática específica debido a las diferentes relaciones que tienen los esquemas en cada estudiante, esperando que a mayor conocimiento existan relaciones más coherentes, logrando que el estudiante puede discriminar entre que esquema utilizar para cada problema y que esquema no.

La ilustración 1 muestra los mecanismos y las estructuras mentales para la construcción del conocimiento matemático. (traducido de Arnon et al, 2014, p.18).

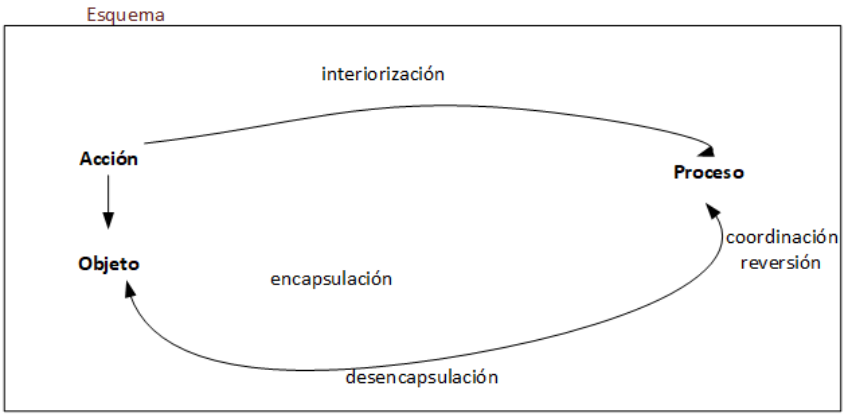


Ilustración 1 Estructuras y mecanismos mentales para la formación del conocimiento matemático (Arnon et al, 2014, p.18)

Los otros mecanismos mentales que faltan por mencionar son:

Desencapsulación, es cuando el estudiante tiene un constructo mental objeto, que lo ve como un todo, y necesita separarlo, regresar a la idea original antes de encapsularlo, es el proceso opuesto a la encapsulación, lo que conlleva una estructura mental proceso.

Reversión, es cuando el alumno tiene una construcción proceso, la cual ya interiorizó siguiendo algunos pasos, la reversión es hacer el camino contrario, no en forma de deshacer, sino para formar un nuevo proceso distinto al original.

Generalización, es cuando el estudiante aplica un determinado esquema en un contexto distinto, lo que origina que el alumno sea consciente de los alcances de sus construcciones mentales. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados en otros esquemas para ser contextualizados en uno diferente del cual surgió.

Descomposición genética

Para poder desarrollar un análisis de acuerdo con la teoría APOE es necesario desarrollar una descomposición genética (DG). La cual se define como un modelo cognitivo que describe las diferentes construcciones mentales que el estudiante realiza para comprender un concepto matemático. Es decir, la teoría APOE trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante estructuras y mecanismos mentales en un individuo (Gamboa, 2013).

La DG es un modelo, como un mapa, en el cual se plasman todas las estructuras mentales que debe desarrollar el estudiante y los diferentes mecanismos mentales que debe aplicar para la aprehensión del concepto matemático.

No existe una única DG para un concepto matemático, cada estudiante, profesor o investigador puede crear la propia, teniendo un sinfín de DG para cada concepto matemático trabajado, ya que cada persona aprende de diferente manera, sin embargo, la DG nos ayuda a plantear una idea general de cómo abordar el concepto a enseñar.

La DG comienza con un análisis histórico-epistemológico, para ir conociendo las construcciones mentales que el individuo hace para entender las ideas relacionadas al concepto matemático, es una primera aproximación para modelar el aprendizaje del concepto matemático y se utiliza como base teórica para la elaboración de material que se emplean en el aula, sirve también para hacer secuencias didácticas e instrumentos para analizar el avance de los estudiantes.

La DG es el corazón de la teoría APOE, con ella se puede generar material para dar las clases de matemáticas, además de permitir realizar un análisis de los conceptos aprendidos por el estudiante.

Metodología

La teoría APOE aparte de ser un marco teórico es un marco metodológico, el cual permite hacer investigación, para eso se desarrolló un ciclo de investigación que involucra el análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. La ilustración 2 (Gamboa, 2013, p. 29.) muestra dicho análisis.

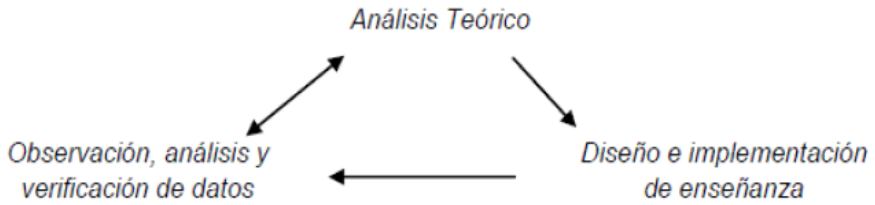


Ilustración 2 Ciclo de investigación en APOE

Este análisis permite conocer el nivel de aprendizaje de los estudiantes y el acercamiento que se tiene a las construcciones mentales que se plantearon.

Este artículo se centra en la investigación de la DG del concepto matemático: definición de máximo y mínimo. El cual surge de la experiencia que tuvo el investigador al ser estudiante y recordar como comprendió el concepto; y al ser profesor e intentar que los alumnos comprendan dicha definición. Estas ideas plasmarlas como un mapa de

construcciones mentales que el alumno seguirá para aprehender la definición de máximo y mínimo. Cada persona puede generar una DG distinta de un solo concepto, la parte metodológica del ciclo de investigación APOE es la que investiga cual es la mejor DG que debe usar el profesor para determinados estudiantes.

Análisis teórico

En esta etapa se crea una DG hipotética, lo que permite modelar el concepto matemático de una manera epistemológica y cognitiva. Consiste en describir las estructuras y los mecanismos mentales que debe desarrollar el estudiante para comprender el concepto matemático. Gracias a esto se conocen también las interrelaciones que el estudiante puede generar entre las construcciones que ha hecho y un concepto nuevo que va a asimilar.

La DG comienza siempre con conocimientos que el estudiante ya debe tener, no se puede crear nuevo conocimiento si no tiene bases previas. Este análisis teórico comprende de la experiencia del investigador y la comprensión que él tiene del concepto matemático a desarrollar, incluyendo un análisis epistemológico, psicológico y de libros de texto para complementar la DG formulada. De acuerdo con Arnon et al (2014, p. 94) existen dos preguntas que se debe responder el investigador para realizar la DG, *"¿Qué significa comprender el concepto matemático? Y ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por el individuo?"*. El objetivo de las preguntas es hacer una reflexión de como comprender el concepto matemático y como el estudiante puede comprenderlo, para después plasmarlo en la DG.

Diseño e implementación de la enseñanza

En esta etapa el investigador se encarga de ayudar al estudiante a desarrollar las construcciones mentales que se plasmaron en la DG. Todo eso mediante la implementación de secuencias didácticas que surgen del análisis teórico. Esta etapa a su vez incluye la formulación de instrumentos basado en las estructuras mentales de la DG, los cuales ayudarán a corroborar como los estudiantes construyeron o están construyendo los constructos mentales. No se implementaron los diseños de enseñanza en el presente trabajo, el análisis sólo se enfocó en la creación de la DG y la elaboración de instrumentos para validar la misma.

Observación, análisis y verificación de datos

El tercer paso del ciclo de investigación es la reunión, observación y verificación de datos para ser analizados. Los resultados por parte de los estudiantes deben ser analizados desde la DG hipotética para poder encontrar qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones mencionadas hipotéticamente en la DG no se evidencian. Lo anterior lleva a una reformulación de la DG hipotética y una determinación de la versión refinada de ésta por la aplicación del ciclo.

Este ciclo de investigación se puede repetir cuantas veces sea necesario para llegar a una comprensión más profunda de cómo el concepto podría desarrollarse en la mente del alumno. En cada repetición se deben agregar nuevos datos referentes al desempeño de los alumnos en tareas matemáticas relacionadas con el concepto matemático (Gamboa, 2013).

Resultados

Análisis teórico

El objeto matemático que se maneja en el presente trabajo es el concepto de máximo y mínimo el cual es muy usado en ingeniería se deben minimizar costos, materiales, energía de entrada y maximizar energía de salida, potencia, esfuerzo, etc., es por ello por lo que se comienza con este concepto tan importante.

Para construir el proceso de la definición de los máximos y mínimos se parte del esquema de función, como concepto previo que debe ya manipular el individuo, de este esquema el interés se centra en que el alumno sepa representar gráficamente una función e interpretar el dominio de la función.

Del esquema de función se extrae la representación gráfica de la función como una estructura mental acción, se espera que el alumno ya manipule las gráficas de las funciones y entienda cual es el dominio de estas.

Ya que se tiene la representación gráfica de la función como una construcción acción se procede a interiorizarla, esto se logra cuando el estudiante analiza la gráfica de la función, observa las curvas, la forma, si corta el eje x o el eje y. La parte clave del análisis es lograr que el alumno logre visualizar la gráfica de cualquier función y ubique que existe uno o varios puntos que están más arriba que el resto de la gráfica, en todo el dominio y en ciertos intervalos; del mismo modo existe uno o varios puntos que están más abajo que el resto.

Una vez que el alumno logra identificar los puntos máximos y/o mínimos en la gráfica, ya sea en un intervalo o en la función completa, se puede llegar a la definición de máximo y mínimo en una construcción proceso. La interiorización, abstracción reflexiva que lleva del constructo mental acción a proceso, se logra desde el punto de vista del investigador cuando el alumno evalúa las propiedades de la gráfica, esto quiere decir que el alumno es consciente que existe uno o varios puntos donde se evalúa la función que están más arribas que el resto de los puntos evaluados, analizando que a la izquierda de este punto la función crecía y a partir de este punto la función decrecerá, análogamente la misma evaluación de propiedades se logra para el mínimo.

Se entiende como: Definición de máximo y mínimo absoluto: Una función f tiene un máximo absoluto en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama valor máximo de f en D. De manera análoga, f tiene un mínimo absoluto en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D; el número $f(c)$ se llama valor mínimo de f en D. Y también: Definición de máximo y mínimo local: Una función f posee un máximo local en c si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c. Esto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c. De manera análoga, f tiene un mínimo local en c si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca a c. (Definiciones tomadas de Stewart, 2008, p. 271).

En la ilustración 3 se muestra la DG completa y como se llega a un estado de construcción proceso de la definición de máximo y mínimo absoluto y máximo y mínimo local o relativo. Los colores en la ilustración van opacándose, dependiendo la complejidad de la estructura mental que va desarrollando el individuo respecto al concepto máximo y mínimo. Los mecanismos mentales, por su parte, quedan flotando dentro de las flechas que indican el camino que va siguiendo el individuo al entender dicho concepto.

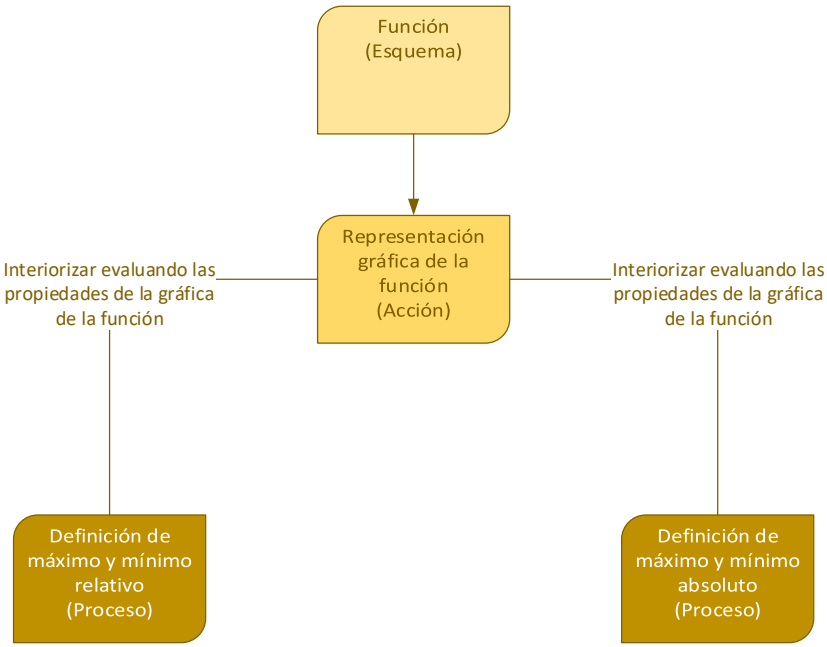


Ilustración 3 Definición de máximo y mínimo en construcción mental proceso

Desde la opinión del investigador, lo importante de construir la definición así, es que el alumno fue generándola con los procesos que se iban desarrollando (graficando la función, ubicando los puntos y encontrando las características de estos puntos), llegando a la definición de un caso en particular y en la definición rigurosa se generaliza, es importante que la definición esté acompañada de varios ejemplos visuales que ayuden a abstraer mejor las propiedades del teorema.

Un ejemplo que presenta Stewart (2008, p. 271) para que el alumno visualice las características de la gráfica y le permita apreciar y abstraer las particularidades de la función y esto le permita interiorizar el concepto puede ser:

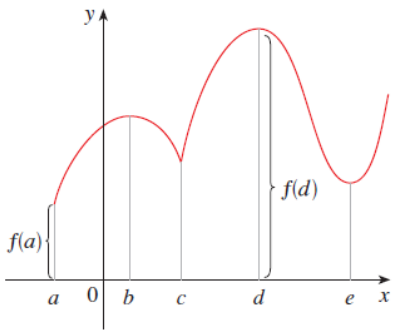


Ilustración 4 Ejemplo de máximo y mínimo

En la ilustración 4 se puede observar cómo en $f(a)$ se tiene un mínimo y en $f(d)$ se tiene un máximo. Un ejemplo como este ayuda a que el alumno visualice que existen puntos más altos y bajos que el resto de la gráfica.

Diseño y análisis a priori de los instrumentos

La segunda etapa dentro del ciclo de investigación en la teoría APOE es el diseño e implementación de la enseñanza. El cual involucra tanto secuencias didácticas como instrumentos para medir y validar el avance que ha tenido el estudiante respecto a la DG hipotética que se formuló anteriormente. Para el análisis del presente trabajo solo se realizaron los instrumentos para validar el avance del estudiante.

La primera parte es fragmentar la DG en zonas para poder analizar si el estudiante ha creado las construcciones mentales, primero se analizan los esquemas como conceptos previos, en este caso se debe analizar si cuenta con el esquema de función, evaluando si el alumno conoce las representaciones gráficas de una función. Posteriormente las estructuras mentales que creó el estudiante respecto a la aplicación de la derivada. Este análisis se enfoca en la definición del máximo y mínimo de una función por lo que el instrumento que se recomienda utilizar es:

(Ejemplo tomado de Stewart, 2008, p. 277) Use la gráfica de la ilustración 5 para para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función:

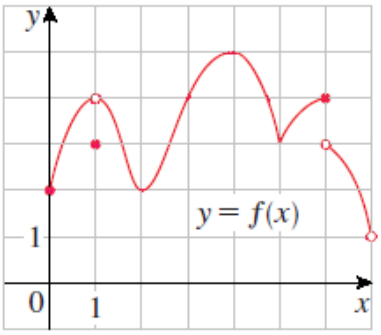


Ilustración 5 Gráfica para validación de esquema máximo y mínimo

En este ejercicio el alumno debe ser capaz de ubicar los puntos máximos y mínimos dentro de la gráfica, para eso debe ser capaz de diferenciar entre las definiciones de máximo y mínimo absoluto y relativo. Si es capaz de diferenciarlo se dice que tiene la definición de máximo y mínimo en una construcción mental proceso.
La tabla 1 muestra la rúbrica de las construcciones mentales que se van a analizar con las posibles respuestas del alumno.

Tabla 3 Análisis a priori del esquema máximo y mínimo

Construcción mental	Respuesta esperada
Acción	El alumno ubica algunos puntos máximos o mínimos, pero no logra diferenciar entre absoluto o relativo.
Proceso	El alumno ubica los puntos máximos y mínimos tanto relativos y absolutos y justifica el porqué.

La respuesta experta esperada es la siguiente:

Se tienen máximos relativos en:

$$x = 1$$
$$x = 6$$

Se tiene un máximo absoluto en:

$$x = 4$$

Se tienen mínimos relativos en:

$$x = 0$$
$$x = 2$$
$$x = 5$$

Se tiene un mínimo absoluto en:

$$x = 7$$

El ejercicio mostrado permite apreciar si el alumno concibe correctamente la definición de máximo y mínimo, tanto absoluto como relativo. La respuesta del estudiante indica la construcción mental que ha creado para dicho concepto. Si la respuesta del individuo sale de la respuesta experta esperada se debe refinar la DG, debido a que el estudiante pudo haber utilizado otras estructuras mentales distintas a las que el investigador planteaba desde el inicio.

Tanto la DG como el ejercicio para validar la descomposición le permiten al profesor de cálculo diferencial crear secuencias didácticas para trabajar en clase y poder enseñar dicho concepto, esperando que al estudiante le quede como un aprendizaje más significativo.

Conclusión

Como conclusiones el trabajo tiene dos, la primera es referente a los conceptos previos, es fundamental que el docente conozca los conceptos previos de los temas que va a enseñar en clase y además que esté seguro de que los estudiantes cuentan con ellos, en caso contrario esto generará más dudas y confusión al desarrollar nuevas estructuras mentales. Si el alumno no comprende bien las formas de representación de una función como concepto previo, principalmente la gráfica, difícilmente entenderá la importancia de un punto máximo o mínimo y no logrará aplicarlo correctamente.

La segunda es relacionada con el mecanismo mental proceso, se recomienda mostrar (y que el alumno comprenda) la demostración de los teoremas trabajados en la definición de máximo y mínimo de una función, la demostración de un teorema ayuda a abstraer características importantes, además de darle confianza al estudiante del trabajo que está desarrollando, esto permite que logre la interiorización del concepto estudiado.

Referencias bibliográficas

Arnon I., Cottrill J., Dubinsky E., Oktaç A., Roa Fuentes S., Trigueros M. y Weller K. (2014). APOS Theory, *A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática,* 8(3), 24 – 41.

Gamboa, M. (2013). *Construcción cognitiva de la raíz cuadrada, una mirada desde la teoría APOE.* Tesis de Maestría no publicada. Pontifica Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Hernández, L. (30 de agosto de 2012). Sin ejercer, 60% de profesionistas; egresan con conocimientos obsoletos. Excelsior. Recuperado de: https://www.excelsior.com.mx/2012/07/30/nacional/850633

Moreno, S. y Cuevas, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática,* 16(2), 93 – 104.

Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial.* Tesis de Doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. IPN. México.
Piaget, J. y García, R. (2008). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.
Posada, M. (23 de mayo de 2016). Cae México en desarrollo de tecnologías a nivel mundial. *La Jornada*.
Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.
Vázquez, R. (2012). ¿Qué ingenieros necesita México? *Innovación Educativa,* 12(60), 125 – 135.

VALIDACIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PARA LA IMPLICACIÓN COMO CONDICIONAL GENERALIZADO

VALIDATION OF A GENETIC DECOMPOSITION FOR THE IMPLICATION AS A GENERALIZED CONDITIONAL

Isabel García-Martínez; Marcela Parraguez
Universidad Católica de Norte, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen
En este trabajo se investigó –bajo la teoría APOE– la implicación con el cuantificador universal en el primer año del nivel universitario. La teoría APOE proporcionó, desde lo metodológico, un ciclo de investigación compuesto por tres componentes que son: análisis teórico o descomposición genética, diseño y aplicación de instrumentos y análisis y verificación de los datos. Se consideró el estudio de casos (Stake, 2010) inserto en cada una de estas componentes. La descomposición genética para la implicación como condicional generalizado diseñada por García-Martínez y Parraguez (2018), fue sometida a validación, mediante la aplicación de un cuestionario y una entrevista semiestructurada, para determinar si los participantes evidenciaban las construcciones y los mecanismos mentales plasmados en ella. Se evidenció que esta descomposición genética debe ser refinada.

Palabras clave: implicación, condicional generalizado, descomposición genética

Abstract
Based on the APOS theory, this research work studied the implication with the universal quantifier, in the first year of university studies. The APOS theory provided, from the methodological standpoint, a research cycle consisting of three components: theoretical analysis or genetic decomposition, design and application of instruments, and data analysis and verification. We considered case studies (Stake, 2010) that were part of each of these components. The genetic decomposition for the implication, as a generalized conditional designed by García-Martínez & Parraguez (2018), was subject to validation through the application of a questionnaire and a semi-structured interview, to determine if the participants showed the mental constructions and mechanisms embodied in the genetic decomposition. It was evidenced that this genetic decomposition needs to be refined.

Key words: implication, generalized conditional, genetic decomposition

Problemática y antecedentes

La implicación es un tema relevante y fundamental en el razonamiento deductivo. En particular, la implicación con cuantificadores es la estructura lógica que rige teoremas matemáticos. A pesar de esta importancia, varios autores han reportado que estudiantes universitarios presentan dificultades en la comprensión de este concepto (Alvarado y González, 2013; Deloustal-Jorrand, 2002; Durand-Guerrier, 2003; Epp, 2003; Laudien, 1999; Palau, 2014; García-Martínez y Parraguez, 2017).

Laudien (1999) que también ha indagado en la implicación desde la matemática, considera dos errores frecuentes relacionados con la implicación, estos son la afirmación del consecuente (AC) y la negación del antecedente (NA). El primero (AC) consiste en concluir que una proposición p es verdadera, a partir de la verdad de $p \Rightarrow q$ y de q. El segundo error (NA), consiste en concluir que q es falsa, a partir de que $p \Rightarrow q$ y $\sim p$ son verdaderas. Para investigar acerca de estos errores y de la relación de los mismos con la confusión del condicional con el bicondicional, se aplica un cuestionario a 52 estudiantes de séptimo y octavo grado de una escuela pública en una pequeña ciudad de Chile. A partir de los resultados, la autora concluye que si bajo las condiciones si-entonces, los estudiantes responden cometiendo los errores AC y NA, lo mismo harán con las condiciones si y sólo si, o sea, parecen malinterpretar el si-entonces como el sí y sólo sí.

Otras de las dificultades de los estudiantes para el entendimiento de la implicación, se deben a la complejidad de este concepto, debido a sus múltiples interpretaciones (Durand-Guerrier, 2003). Para estudiar dicha complejidad, la autora se apoya en la teoría de concepción semántica de verdad de Tarski (1944) y analiza situaciones problemáticas –con la implicación– propuestas a estudiantes de enseñanza media (con más de 12 años), a estudiantes de primer año de la universidad y a profesores. Durand-Guerrier (2003) concluye que es necesario tener en cuenta cuatro interpretaciones de la implicación para su enseñanza y aprendizaje, las cuales fueron propuestos por Quine (1950).

(1) el entendimiento común de la implicación (donde, en general, el antecedente falso no se considera y se confunde la implicación con la doble implicación),
(2) la implicación como conectivo proposicional (definida por la tabla de verdad),
(3) la implicación como condicional lógicamente válido (o reglas de inferencia) y
(4) la implicación como condicional generalizado, o sea la implicación cuantificada universalmente, por ejemplo $(\forall n \in \mathbb{N})(n^2$ es par $\Rightarrow n$ es par).

En esta investigación se estudia la última de estas interpretaciones al alero de la teoría APOE.

Marco teórico

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un marco teórico de corte cognitivo, desarrollado por Ed Dubinsky y colaboradores, y está basada en la teoría de la construcción del conocimiento de Piaget (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014).

Según Piaget (1947/1972), la construcción del conocimiento es un proceso dialéctico donde los datos del mundo externo son asimilados a las propias estructuras del estudiante, las que se enriquecen complejizándolas a través de sucesivas coordinaciones. Es una espiral de equilibrio, desequilibrio, nuevo equilibrio en otro plano, que genera modificaciones en el mundo a la vez que modifica las estructuras propias del estudiante.

Piaget (1950/1975) introduce el concepto de abstracción reflexiva como el mecanismo de construcción de los conceptos lógico-matemáticos, diferenciándola de la abstracción empírica. En esta última, el sujeto opera desde los

objetos y sus propiedades, en cambio en la abstracción reflexiva el sujeto opera desde sus propias acciones sobre ellos.

De acuerdo a la teoría APOE, la construcción mental de todos los conceptos matemáticos o fragmentos de éstos, pueden interpretarse a través de las estructuras (o construcciones) mentales que se denominan acciones, procesos, objetos y esquemas que el estudiante establece como estrategia cognitiva para su aprendizaje.

Las acciones son transformaciones de objetos (físicos o mentales), las cuales el estudiante percibe, en general, como externas. El estudiante muestra una construcción acción de un determinado concepto matemático si, para resolver un problema que involucre dicho concepto, él debe ser guiado, necesitando realizar todos los pasos que la situación involucre. Por ejemplo, cuando el estudiante, para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, lo hace mediante una tabla de verdad, analizando una a una todas las valoraciones posibles de las proposiciones componentes. Cuando una acción se repite y el estudiante reflexiona sobre ella, ésta se interioriza y da origen a un proceso. El estudiante muestra una construcción proceso de un determinado concepto matemático cuando no necesita más del estímulo externo, puede describir los pasos seguidos e incluso, invertirlos. Por ejemplo, un estudiante puede construir mentalmente una tabla de verdad para determinar si la disyunción de dos proposiciones (p y q) es falsa y solamente verificar si ambas proposiciones son falsas.

También se puede obtener otro proceso al coordinar dos o más procesos y, mediante la reversión, se puede volver a los procesos que lo originaron. Cuando el estudiante es capaz de pensar el proceso como un todo y actuar sobre él, se dice que ha encapsulado el proceso en un objeto. Por ejemplo, el estudiante deberá encapsular $(p \vee q)$ en un objeto, para poder realizar acciones sobre él, como lo es determinar, por ejemplo, el valor de verdad de la conjunción $(p \vee q) \wedge r$ (Arnon et al., 2014; Dubinsky, 1991). La operación contraria de la encapsulación es la desencapsulación que consiste en volver al proceso que generó cierto objeto, para buscar un contraejemplo o para poder coordinarlo con otros procesos y encapsularlos en nuevos objetos. El conjunto de acciones, procesos y objetos relacionados con un concepto matemático determinado es denominado esquema. A partir de proposiciones simples –que son objetos en el esquema "de la lógica"– por un proceso iterativo se construyen proposiciones cada vez más complejas, las cuales son asimiladas y acomodadas en el esquema "de la lógica". Dubinsky (1991) dice que un esquema se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua según lo determinado por la actividad matemática del sujeto en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema es determinada por la habilidad del individuo para determinar si se puede usar para manejar una situación matemática particular.

La forma como se pasa de un estado de construcción del conocimiento a otro superior, se denomina mecanismo mental. La interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión son mecanismos mentales, en esta teoría.

Diseño metodológico

La teoría APOE proporciona a la investigación un ciclo metodológico compuesto por tres componentes: (i) análisis teórico o descomposición genética (DG), (ii) diseño y aplicación de instrumentos y (iii) análisis y verificación de los datos. En cada una de estas componentes se inserta un estudio de casos (Stake, 2010), con el fin de llevar a cabo un análisis coherente del trabajo de los participantes en esta investigación. Para investigar la implicación como condicional generalizado, en García-Martínez y Parraguez (2018) se desarrolla la primera componente de este ciclo, diseñando una DG hipotética para la implicación como condicional generalizado (Figura 1). El objetivo de la presente investigación es validar esta DG hipotética, o determinar si debe ser refinada, para lo cual se desarrollan las dos últimas componentes de este ciclo de investigación.

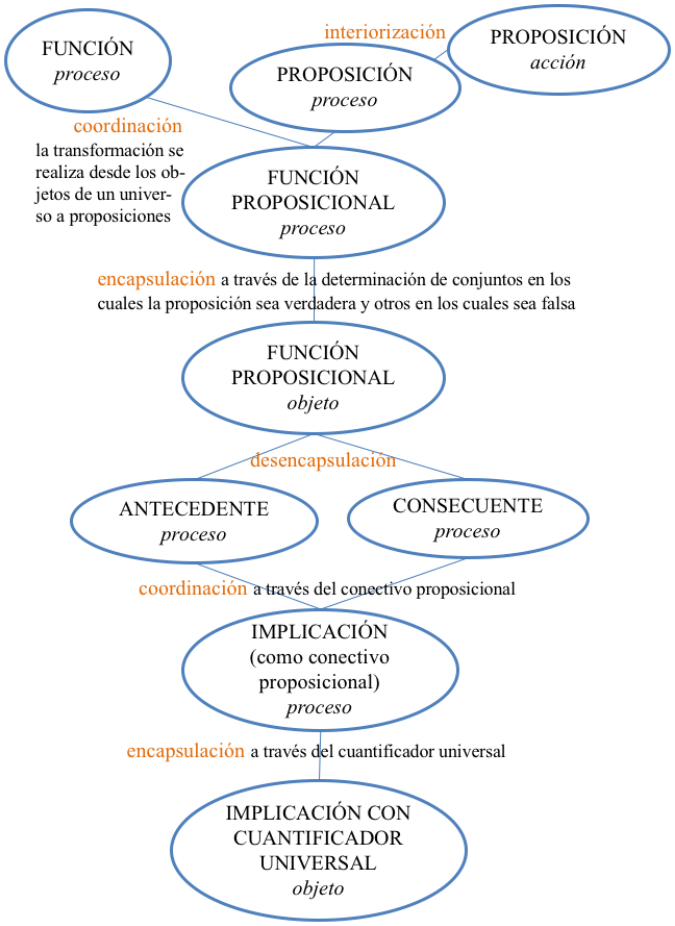


Figura 1. Una descomposición genética hipotética de la implicación como condicional generalizado (García-Martínez y Parraguez, 2018).

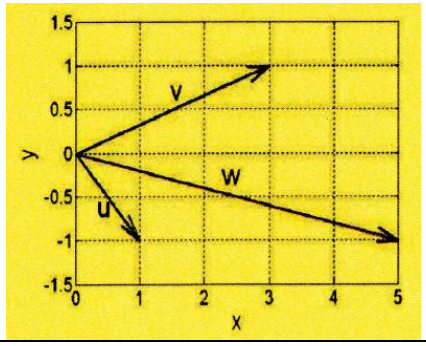
Los casos considerados son cuatro. El Caso 1 lo conforman tres estudiantes de Magíster en Matemática (etiquetados como EMM1, EMM2 y EMM3), el Caso 2 un estudiante de Doctorado en Didáctica de la Matemática (etiquetado como EDDM4), el Caso 3 un Profesor y Doctor en Filosofía (etiquetado como DF5) y el Caso 4 un Profesor y Doctor en Matemática (etiquetado como DM6), todos ellos pertenecientes a una universidad chilena.

Con la intención de validar la DG hipotética de la Figura 1, se aplicó un cuestionario de cuatro preguntas a los estudiantes del Caso 1 y una entrevista semiestructurada a los participantes de los Casos 2, 3 y 4.

Las preguntas del cuestionario son sobre tópicos del álgebra lineal, materia que ya había sido cursada por los estudiantes del Caso 1. La intención de las mismas, fue determinar si, para responderlas, los informantes recurren a los elementos de la DG hipotética de la implicación como condicional generalizado (Figura 1) y contrastar sus respuestas con esta DG.

A modo de ejemplo, se muestran las preguntas 2 y 3 del cuestionario (Figura 2), con su análisis a priori.

2. A partir de la figura, ¿es posible afirmar que el vector w es combinación lineal de u y v?



3. Sea $V = P_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 y el polinomio cero. Sea $\alpha_1 = x^2 + x + 2$ y $\alpha_2 = x^2 + 1$. ¿Genera $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ a V?

Figura 2. Preguntas 2 y 3 del cuestionario.

La intención de estas preguntas fue validar la última parte de la DG hipotética de la implicación como conectivo proposicional (Figura 7). Se espera que el estudiante sea capaz de aplicar teoremas –que son implicaciones cuantificadas–, en un caso particular –implicación como conectivo proposicional, donde el antecedente es verdadero, por lo tanto el consecuente también debe serlo–. Concluyendo, en la pregunta 2, que como los vectores u y v no son colineales, generan $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, w (que pertenece a $\mathbb{R}^2$) es combinación lineal de u y v y, en la pregunta 3, que como V es un espacio vectorial de dimensión 3, ningún conjunto con menos de 3 elementos puede generarlo, por lo tanto, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ no genera a V.

Para indagar con más profundidad respecto a las construcciones y los mecanismos mentales de la DG hipotética de la implicación como condicional generalizado, se aplicó una entrevista semiestructurada a los integrantes del Caso 2 (EDDM4), del Caso 3 (DF5) y del Caso 4 (DM6). A cada entrevistado se le proporcionó un juego de tarjetas, algunas de ellas con las construcciones mentales plasmadas en esta DG hipotética, otras con elementos que podrían aparecer y otras en blanco, para que agregaran elementos que estimaran conveniente. Además se le suministró tiras de papel el blanco para que pudieran vincular las tarjetas y colocarle etiquetas (que podrías ser los mecanismos mentales). Las tarjetas fueron Función, Proposición, Función proposicional, Universo, Antecedente, Consecuente, Implicación (definida por la tabla de verdad), Implicación con cuantificador universal, Hipótesis y Tesis.

Resultados

Cuestionario

En la Figura 3, se muestra la respuesta de EMM2 a la pregunta 2 del cuestionario, donde aplica los teoremas 1 y 2 y una definición, los cuales se muestran a continuación.

Teorema 1:

“Un conjunto de dos vectores de un espacio vectorial es linealmente dependiente si, y sólo si, uno de los vectores es múltiplo del otro.” (Lay, 2007).
Teorema 2:

> Sea V un espacio vectorial de dimensión $p, p \geq 1$. Cualquier conjunto linealmente independiente con exactamente p elementos en V es, de manera automática, una base para V. Cualquier conjunto con exactamente p elementos que genere V es automáticamente una base para V. (Lay, 2007, p. 259)

Definición:

"Sea V un espacio vectorial. Una *base* de V es un conjunto de vectores linealmente independiente de V que genera el espacio V" (Hoffman y Kunze, 1973, p.41).

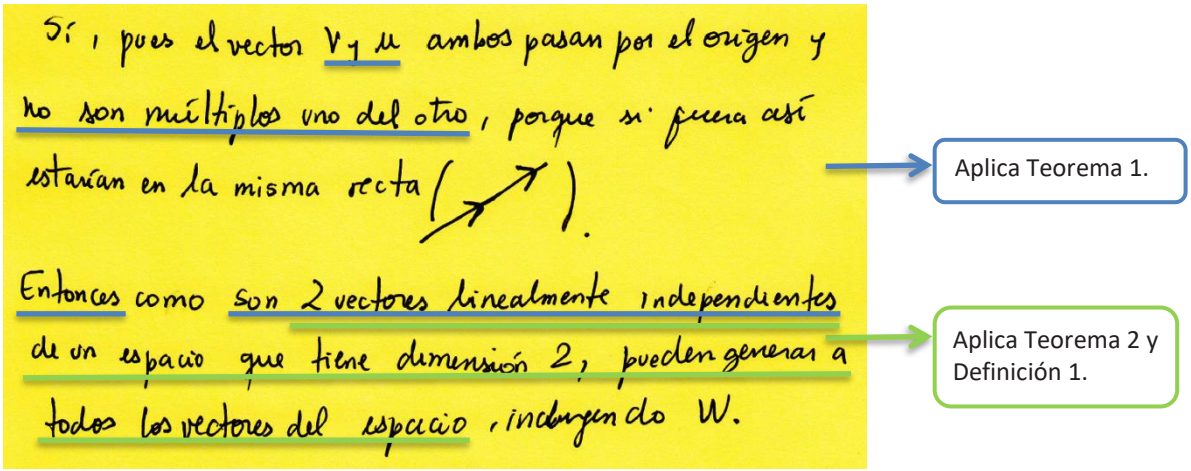


Figura 3. Respuesta de EMM2 a la pregunta 2 del cuestionario.

El estudiante EMM1 responde a la pregunta 3 (Figura 4) aplicando el teorema 3.

Teorema 3:

"Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces ningún subconjunto de V que contenga menos de n vectores puede generar a V" (Hoffman y Kunze, 1973, pp. 44-45).

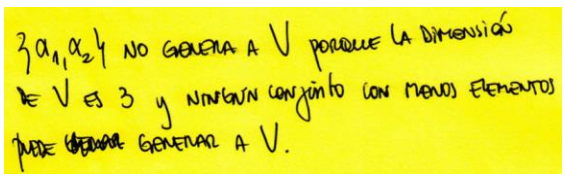


Figura 4. Respuesta de EMM1 a la pregunta 3 del cuestionario.

Los tres informantes (EMM1, EMM2 y EMM3), proceden de manera similar al resolver los problemas del cuestionario, aplicando teoremas, que son proposiciones abiertas con implicaciones, las cuales están cuantificadas universalmente –implicación como condicional generalizado–.

Se interpreta, desde la DG hipotética de esta interpretación de la implicación (Figura 1), que estos estudiantes muestran construcción objeto de la implicación como condicional generalizado, al ser capaces de desncapsularlo en el proceso implicación, cuando aplican los teoremas (que están con el cuantificador universal), en casos específicos. A su vez, el proceso implicación, se obtiene al coordinar los procesos antecedente y consecuente. Esto permite validar la última parte de esta DG.

Entrevista semiestructurada

EDDM4 considera que hay un bloque básico Antecedente-Consecuente-Implicación, que no debe separarse, coloca dobles flechas entre estas tarjetas y realiza la construcción de la Figura 5 (que se muestra en detalle en la Figura 6). EDDM4 agrega las tarjetas conjunto (que la coloca junto a Universo) y cuantificadores y dice: "los cuantificadores es raro estudiarlos solos, pero sí reconocerlos. Porque por ejemplo si quiero hablar del cuantificador universal, yo creo que la mejor forma de identificarlo es como distinguirlo de otros, o sea o para todos, o para cada…"

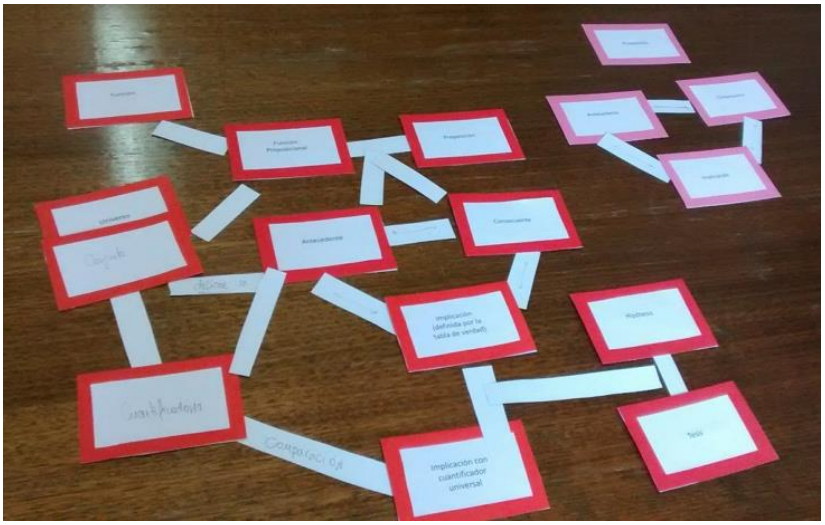


Figura 5. Construcción de EDDM4, de la implicación como condicional generalizado (a la izquierda, con las tarjetas rojas).

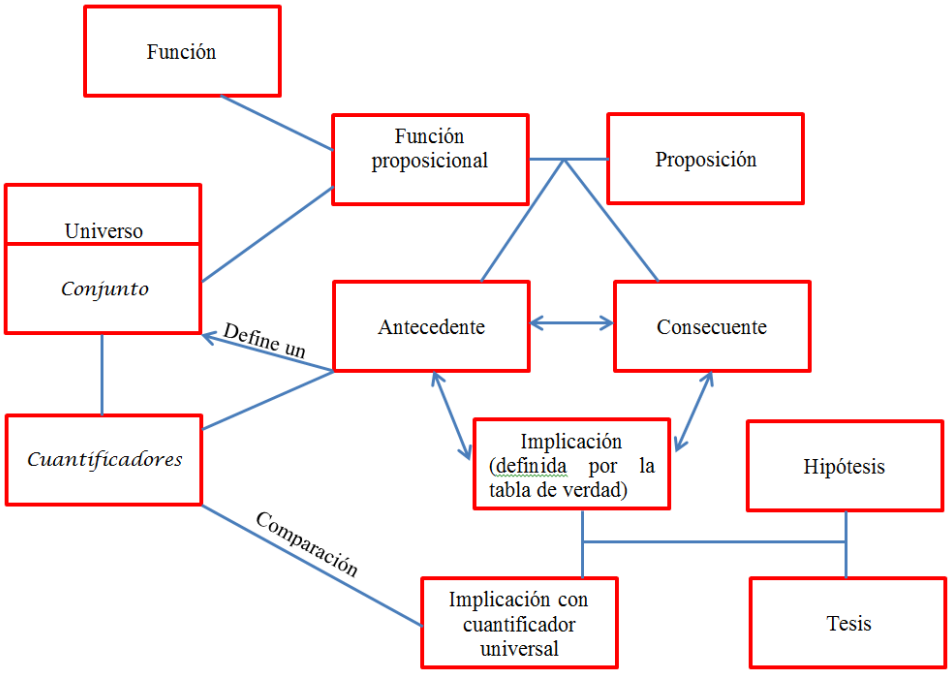


Figura 6. Reescritura de la construcción de EDDM4, de la implicación como condicional generalizado.

Contrastando esta construcción con la DG hipotética de la implicación como condicional generalizado (Figura 1), junto con las respuestas dadas por EDDM4 en la entrevista, se valida la primera y la última parte de esta DG.

Al contrastar los resultados del cuestionario con la DG hipotética de esta interpretación de la implicación, se valida la última parte de esta DG (Figura 7). En cambio, con base en los resultados de la entrevista semiestructurada, se valida la primera y la última parte de esta DG (Figura 7). En ninguno de los casos fue evidenciada la Función Proposicional como objeto.

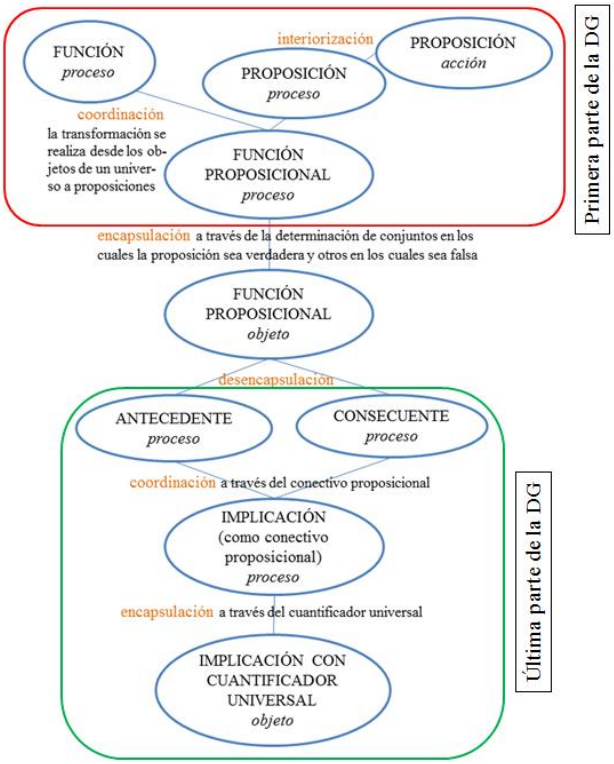


Figura 7. DG hipotética de la implicación como condicional generalizado señalando sus partes.

Conclusiones

Con estos elementos, se puede concluir que la DG hipotética de la implicación como condicional lógicamente válido debe ser refinada, eliminando el objeto Función proposicional y revirtiendo los procesos Antecedente y Consecuente del proceso Función proposicional (Figura 8).

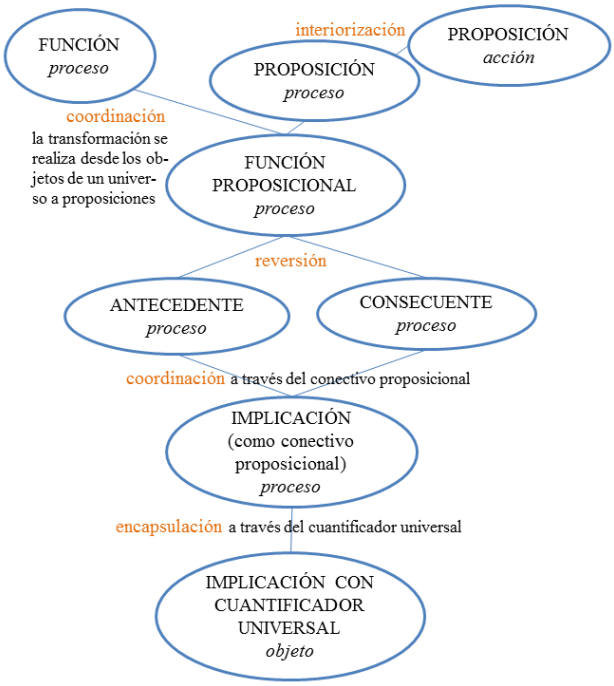


Figura 8. DG hipotética refinada de la implicación como condicional generalizado.

Otro elemento a tener en cuenta para un posible refinamiento de esta DG, es la inclusión de conjuntos, por estar relacionada con la implicación. Si A y B son conjuntos y U el universo, la definición de subconjunto es la siguiente

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \epsilon A \Rightarrow x \epsilon B).$$

Si se consideran los conjuntos $A = \{x \in U: p(x)\}$ y $B = \{x \in U: q(x)\}$, la definición de subconjunto puede escribirse como

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in U)\big(p(x) \Rightarrow q(x)\big).$$

Respecto a este punto, DM6 dice “porque a mí un poquito me gusta ver toda la lógica clásica también con la teoría de los conjuntos, o sea la implicación relacionada a la inclusión”.
La DG hipotética que se obtiene al refinar la anterior, debe ser validada.

Referencias bibliográficas

Alvarado, A. y González, M. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(1), 37-63.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Deloustal-Jorrand, V. (2002). Implication and mathematical reasoning. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 281-288). Norwich, England: PME.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic

perspective. *Educational Studies in mathematics*, *53*(1), 5-34.
Epp, S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110*(10), 886-899.
García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2017). The Basis Step in the Construction of the Principle of Mathematical Induction based on APOS theory. *Journal of Mathematical Behavior 46*, 128-143.
García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2018). Diferentes interpretaciones de la implicación: una mirada desde la teoría APOE. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*(1), 349-357. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal.* México: Editorial Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
Laudien, R. (1999). Misunderstanding of if-then as if and only if. En F. Hitt y M. Santos (Eds.). *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1* pp. 225-231. Columbus, OH: Eric Clearinghouse for Science Mathematics and Environmental Education.
Lay, D. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson educación.
Palau, G. (2014). *Lógica formal y argumentación como disciplinas complementarias.* La Plata: Editorial De la Universidad de La Plata.
Piaget, J. (1972). *Psicología de la inteligencia.* Buenos Aires: Psique. (Obra original publicada en 1947).
Piaget, J. (1975). *Introducción a la epistemología genética: El pensamiento matemático* (Trad. M. T. Cevasco y V. Fischman). Buenos Aires: Paidos. (Obra original publicada en 1950).
Quine, W.V.O. (1950). *Methods of Logic.* New York: Holt, Rinehart and Winston.
Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.
Tarski, A. (1944). The semantic conception of truth and the foundations of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, *4*(3), 341-376.

EMOCIONES ANTE LA MATEMÁTICA DE FUTUROS PROFESORES DEL NIVEL PRIMARIO EN SU ROL COMO MAESTROS Y ESTUDIANTES

EMOTIONS IN THE FACE OF MATHEMATICS OF ELEMENTARY PROSPECTIVE TEACHERS IN THEIR ROLE AS TEACHER AND STUDENTS

María S. García González; Elizabeth Advíncula Clemente, Carina J. Saire Huamani
Universidad Autónoma de Guerrero, Pontificia Universidad Católica del Perú (México, Perú).
mgargonza@gmail.com, eadvincula@pucp.edu.pe, cjsaire@gmail.com

Resumen
Debido a que se ha evidenciado que una gran proporción de maestros en formación expresa emociones negativas hacia las matemáticas, el objetivo perseguido es el estudio de las emociones que experimentan hacia las matemáticas un grupo de profesores peruanos en formación en el nivel primario, en su faceta de estudiantes y de futuros maestros de matemáticas. La metodología se ciñe al paradigma cualitativo, la recolección de datos se llevó acabo por medio de entrevistas a 5 profesores en formación. Los datos recolectados se analizaron desde la Teoría de la Estructura Cognitiva de las emociones. Los resultados señalan que los participantes experimentan emociones de satisfacción, agrado júbilo, gratitud, orgullo, esperanza, miedo congoja, decepción, reproche y desagrado, en ambas facetas, como estudiantes y como futuros profesores.

Palabras clave: emociones, matemática, maestros en formación, teoría OCC

Abstract
Because it has been shown that a large proportion of prospective teachers express negative emotions towards mathematics, this paper aims to study the emotions experienced by a group of elementary school Peruvian in-training teachers, in their roles as students and future teachers of mathematics. The methodology keeps to the qualitative paradigm. And data collection was carried out by interviewing five teachers in training. Data were analyzed based on the Theory of the Cognitive Structure of Emotions. The results indicate that the participants experience emotions of satisfaction, pleasure, gratitude, pride, hope, fear, distress, disappointment, reproach and dislike, in both roles, as students and as prospective teachers.

Key words: emotions, mathematics, teachers in training, OCC theory (Theory of Cognitive Structure of Emotions)

Introducción

Las emociones que experimentamos en las clases de matemática determinarán el éxito o fracaso que tendremos al finalizar el grado que cursamos. En Matemática Educativa, disciplina que estudia la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, desde la línea de investigación llamada Dominio Afectivo, se estudian las emociones, creencias, actitudes, valores y motivación, tanto de profesores como de estudiantes de matemáticas. Los resultados de grupo de indagaciones han mostrado una alta influencia de dichos constructos en la enseñanza y en el aprendizaje escolar, de ahí su importancia de estudio (Lewis, 2013; Di Martino y Sabena, 2011; Bekdemir, 2010; Philipp, 2007; Gómez Chacón, 2000). Dentro de los constructos del Dominio Afectivo, las emociones son las que tienen menor tradición de investigación, por mucho tiempo estuvieron subordinadas a los estudios sobre actitudes y creencias. Sin embargo, con el paso del tiempo, el interés en su estudio individual ha incrementado, esto debido a la importancia de la naturaleza emocional de los contextos educativos (Schutz y Pekrun, 2007; Middleton, Jansen y Goldin, 2018).

Las emociones del profesorado se clasifican en dos grupos, emociones negativas y emociones positivas. Las emociones negativas implican experiencias desagradables durante el momento de la enseñanza, por ejemplo, el estrés, la desmotivación y el síndrome de Burnout (Schutz y Zembylas, 2009; Rodríguez, Guevara y Viramontes, 2017). Cuando este grupo de emociones se presenta puede conducir al desgano por dar clases (Ramos-Silverio y García-González, 2018) o en grados altos, al abandono de la profesión (Hannula, Liljedahl, Kaasila y Rösken, 2007). Las emociones positivas, por el contrario, implican experiencias de placer al momento de conducir una clase, entre ellas se encuentran el entusiasmo, la alegría, el orgullo, la satisfacción y el interés (Di Martino y Sabena, 2011; Anttila, Pyhältö, Soini y Pietarinen, 2016).

La ansiedad matemática se ha reportado como un fenómeno común entre los profesores en formación de la escuela primaria de muchos países, y se ha evidenciado que puede interferir seriamente en ellos impidiéndoles convertirse en buenos profesores de matemática (Bekdemir 2010; Hannula, Liljedahl, Kaasila y Rösken, 2007). También se han evidenciado otras emociones negativas hacia las matemáticas, como miedo, estrés, y desesperación, producto de las experiencias de los futuros profesores, vividas cuando eran estudiantes (Coppola, *et al*., 2012; Di Martino y Sabena, 2011). Estos resultados han sido relevantes al demostrar que las emociones influyen en la perspectiva del profesor acerca de cómo enseñar matemáticas.

Respecto a los profesores en servicio, García-González y Martínez-Sierra (2016) realizaron un estudio exploratorio sobre las emociones de profesores mexicanos de nivel pre universitario, sus resultados muestran que, en su mayoría los profesores experimentan emociones en función de lo que sus estudiantes pueden lograr en la clase de matemáticas (ver Tabla 1). Encontramos este resultado interesante, pues pareciera que las emociones del profesor de matemáticas tienen su origen en la actividad docente, el logro de los aprendizajes matemáticos. De ahí que las acciones que realice el estudiante (poner atención, deserción escolar), directa o indirectamente, para aprender, afectarán la estabilidad emocional del docente.

Tabla 1. Emociones de profesores de bachillerato mexicano

Emociones	Situaciones desencadenantes
Quejoso por	Percepción de que los estudiantes no aprenden Poco interés de los estudiantes
Feliz por	Percepción de que los estudiantes aprenden
Resentido por	Los estudiantes no aprenden
	Deserción escolar por falta de recursos

	Reprobación
Reproche	El estudiante culpa al profesor por no aprender
Congoja	El estudiante no se esfuerza por aprender
Júbilo	El estudiante disfruta la clase
Agrado	Uso de recursos novedosos en la clase Tecnología, dinámicas nuevas
Ira	Falta de interés de los estudiantes por aprender en la clase
Orgullo	Contribuir a la formación de los estudiantes
	Reconocimiento a su labor docente por parte de otros
Gratitud	Los alumnos se ayudan entre ellos
Decepción	Los estudiantes no aprenden al mismo ritmo
Remordimiento	El mismo maestro no entiende lo que va a enseñar
Gratificación	Los alumnos están interesados por aprender
Autoreproche	Los estudiantes entienden la explicación de la clase pero no son capaces de hacer la tarea por no entenderla

Fuente: García-González y Martínez-Sierra (2016).

Otro resultado relevante sobre el origen de las emociones de profesores en servicio es el reportado por García-González y Pascual-Martín (2017), quienes reportan el caso de Diego, un profesor de matemáticas de secundaria que experimentaba emociones negativas en sus clases de matemáticas debido a su escaso conocimiento de los temas que debía impartir. Considerando la importancia de las emociones en la labor de los docentes, en la presente investigación nos proponemos su estudio desde la formación de profesores de nivel primario, bajo el supuesto de que conocer las emociones servirá para hacer intervenciones futuras con el fin de aminorar los efectos negativos de éstas.

Particularmente nos proponemos identificar las emociones y situaciones que las desencadenan en un grupo de estudiantes de la Facultad de Educación del nivel primario en Perú. La elección de esta población se debe a que los profesores de este nivel son los primeros con los que los estudiantes descubren el mundo de las matemáticas y, la forma en como ellos presenten el curso puede influir en el gusto de esta área; si los profesores aman lo que enseñan experimentarán emociones positivas al enseñar y éstas pueden tener influencia en sus estudiantes ya que lograrán tener gratas experiencias de aprendizaje y sólidos cimientos para desarrollar la inteligencia lógico matemática.

Marco teórico

Arellano, Hernández, Nava y Martínez (2018) en su investigación sobre Dominio Afectivo en Matemática Educativa indican que la teoría de la estructura cognitiva de las emociones, conocida como la teoría OCC, es una

teoría apropiada para estudiar las emociones del profesor de matemática a través del lenguaje. Desde dicha postura teórica, las emociones son entendidas como *la reacción con valencia, positiva/negativa, ante eventos, agentes y objetos*.

La teoría OCC señala una tipología (ver Tabla 2) sobre cómo, a diferencia del lenguaje común, se pueden etiquetar las emociones que experimentan las personas, para ello se basa en la palabra emocional que usa la persona cuando narra la emoción experimentada y en las situaciones que desencadenan dicha emoción.

Tabla 2. Tipos de emociones concebidas por la OCC.

Clase	Grupo	Tipos (ejemplo de nombre)
Reacciones ante los acontecimientos	VICISITUDES DE LOS OTROS	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (feliz-por) Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (alegre por el mal ajeno) Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (resentido-por) Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (quejoso-por)
	BASADAS EN PREVISIONES	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (esperanza) Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (satisfacción) Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (alivio) Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (decepción) Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (miedo) Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento Indeseable (temores confirmados)
	BIENESTAR	Contento por un acontecimiento deseable (jubilo) Descontento por un acontecimiento indeseable (congoja)
Reacciones ante los agentes	ATRIBUCIÓN	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (orgullo) Aprobación de una acción plausible de otro (aprecio) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (autoreproche) Desaprobación de una acción censurable de otro (reproche)
Reacciones ante los objetos	ATRACCIÓN	Agrado por un objeto atractivo (agrado) Desagrado por objeto repulsivo (desagrado)

Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	BIENESTAR/ATRIBUCIÓN	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (gratitud) Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (ira) Aprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (complacencia) Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (remordimiento)

Fuente: Arellano, Hernández, Nava y Martínez (2018).

Conviene aclarar que la teoría OCC, no se guía por las palabras emocionales que usa el sujeto para describir la emoción que experimenta, más bien se centra en el acontecimiento que origina la emoción y a esa descripción le da como nombre una palabra emocional neutra (ver columna "tipos" de la tabla anterior). Citemos un ejemplo, si en una situación se percibe un "descontento por un acontecimiento indeseable", la OCC denomina a la emoción que se experimenta congoja, uno puede pensar en diferentes palabras que pueden expresar ese "descontento", por ejemplo, añoranza, pesadumbre, sentirse mal, solitario, tristeza, todas ellas denotan intensidades diferentes, más o menos altas, sin embargo, la OCC usa la palabra congoja por considerarla una palabra emocional neutra.
Para identificar las emociones y las situaciones desencadenantes, la tipología OCC mostrada en la tabla anterior se volvió nuestra herramienta de análisis de datos.

Método

El método de esta investigación es de tipo cualitativo, pues identificamos y describimos las emociones que experimentan por las matemáticas los profesores en formación en su rol de estudiantes y futuros maestros.

Los participantes de esta investigación fueron 3 mujeres y 2 varones, estudiantes de la Facultad de Educación, con especialidad de Educación primaria. Cursaban el quinto y sexto semestre de formación profesional; pero coincidían en el curso Didáctica de la estadística y probabilidad en el semestre 1 de 2018. Fueron elegidos de manera intencionada pues queríamos entrevistar a personas que manifestaron temor hacia la matemática, dificultades al resolver problemas y otros que dominaban el curso pero que habían tenido alguna experiencia negativa en la educación básica.

La técnica empleada para la recolección de datos es la entrevista grabada y posteriormente transcrita para su respectivo análisis. La Tabla 3 muestra el protocolo de la entrevista que utilizamos fundamentado en la teoría OCC. Cabe resaltar que las preguntas 1, 2 y 3, proporcionan las situaciones desencadenantes (la clase de matemáticas, experiencias negativas y positivas en la realización de una sesión de clases) y demandan las palabras emocionales, por el contrario, las preguntas 4 y 5, proporcionan las palabras emocionales (felicidad, alegría, tristeza, pesar) y demandan la situación desencadenante.

Tabla 3. Protocolo de entrevistas

De tus experiencias emocionales, 1. ¿Qué emociones o sentimientos experimenta en la clase de matemática?, ¿por qué experimenta eso? (como estudiante y maestro) 2. ¿Cuáles son las principales experiencias positivas que ha tenido cuando realizó una sesión de clase?, ¿por qué experimenta eso? 3. ¿Cuáles son las principales experiencias negativas que ha tenido cuando realizó una sesión de clase?, ¿por qué experimentó eso? 4. ¿En qué circunstancias y situaciones ha experimentado felicidad o alegría en la clase de matemáticas? (como estudiante y maestro) 5. ¿En qué circunstancias o situaciones ha experimentado tristeza o pesar en la clase de matemáticas? (como estudiante y maestro)

Fuente: Elaboración propia.

Análisis de datos

Las emociones identificadas en nuestro trabajo de investigación han sido nombradas de acuerdo a la tipología de emociones OCC de la Tabla 2. A continuación desarrollamos un pequeño ejemplo de codificación de una emoción. En el discurso de los participantes resaltamos en negrita la situación desencadenante de la emoción y en cursiva las palabras emocionales, usamos corchetes para hacer aclaraciones.

> P1: [Las matemáticas] *me gustaban mucho gracias a un profesor* que era de poner sellos cada vez que uno terminaba un ejercicio.

Identificamos en P1, que la situación desencadenante de su gusto hacia las matemáticas es la didáctica del profesor. El gusto que dice sentir lo codificamos en el grupo de las emociones de atracción, específicamente en el tipo "agrado" (Imagen 1).

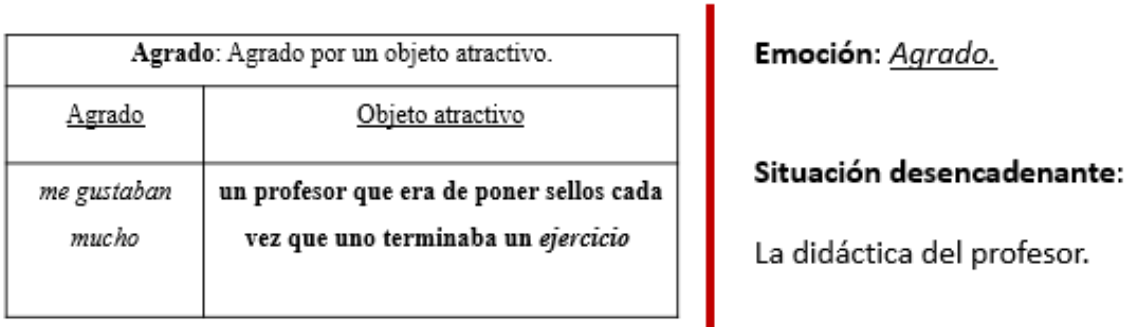


Imagen 1: Ejemplo de codificación de la emoción agrado. Fuente: Elaboración propia.

El discurso de los informantes, individualmente, se analizó como en el ejemplo anterior. Posteriormente se hizo una distinción por tipo de emociones, positivas y negativas, considerando los 5 informantes. Como resultado obtuvimos 6 tipos de emociones positivas (Tabla 4) y 5 de emociones negativas (Tabla 5).

Tabla 4. Emociones positivas

Tipos de emociones	Situaciones desencadenantes
Agrado	Didáctica del profesor Enseñar matemáticas Resolver problemas Gusto por la matemática Conocer la utilidad de la matemática
Satisfacción	Enseñar matemáticas Sentirse involucrado por su profesor Uso de materiales didácticos en clase Dictar una clase interesante
Júbilo	Didáctica del profesor Notas aprobatorias en los exámenes
Gratitud	Didáctica del profesor
Orgullo	Poder resolver problemas
Esperanza	Ser un buen profesor de matemática

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 5. Emociones negativas

Tipos de emociones	Situaciones desencadenantes
Miedo	Examen de matemáticas Pasar al pizarrón Profesor No entender las matemáticas
Congoja	Manejo del grupo Conocimiento de los temas
Decepción	La inclusión en clases Pasar al pizarrón Concurso escolar
Reproche	Estudiante con necesidades especiales Desconocimiento del tema
Desagrado	Desaprobar el curso Justificar respuestas en los exámenes Didáctica del profesor

Fuente: Elaboración propia.

Posterior a identificar las emociones negativas y positivas, nos dimos a la tarea de clasificarlas en dos tipos generales de situaciones desencadenantes, aquellas que los participantes vivieron, y siguen viviendo como estudiantes, y aquellas que son producto de sus experiencias en las prácticas pre profesionales, y en dónde se conciben así mismos como profesores (Tabla 6).

Tabla 6. Emociones por rol del participante y situaciones desencadenantes

Emociones	Situación desencadenante
Agrado Satisfacción Júbilo Gratitud Orgullo Esperanza Miedo	**Como estudiante:** <u>Metas del salón de clases</u> Resolver problemas Aprobar los exámenes Pasar al pizarrón Aprobar el curso Entender las matemáticas Justificar respuestas en los exámenes <u>Acciones del profesor</u> Didáctica del profesor <u>Acciones de ellos mismos</u> Gusto por la matemática Conocer la utilidad de la matemática Sentirse involucrado por el profesor Concurso escolar
Congoja Decepción Reproche Desagrado	**Como Profesor:** <u>Metas del profesor</u> Enseñar matemáticas Usar materiales didácticos en clase Dictar una clase interesante Ser un buen profesor de matemática Saber manejar al grupo Conocer los temas Incluir a los estudiantes con necesidades especiales

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 6, evidencia que los profesores en formación, experimentan ambos tipos de emociones, positivas y negativas, en sus roles como estudiantes y profesores, pero las situaciones desencadenantes son diferentes. Como puede observarse, las emociones experimentadas como estudiantes se deben al cumplimiento de metas del salón de clases, a las acciones del profesor y a las acciones de ellos mismos, lo que coincide con los resultados de la literatura

(ver por ejemplo García-González, 2016). Respecto al rol de profesores, sus emociones se desencadenan por las metas que ellos se plantean en sus prácticas pre profesionales, lo que coincide con la investigación de García-González y Martínez-Sierra (2016).

Conclusiones

A decir de los informantes, la mayoría de las emociones negativas que identificamos en el rol de estudiantes, las experimentaron durante sus primeros años de escolaridad, debido a que sus maestros eran muy estrictos y no fomentaban un clima empático en el aula. Consideramos que, como lo reporta la literatura (Philipp, 2007; Coppola, et al, 2012; Di Martino y Sabena, 2011) esta situación pudiera traer consecuencias en ellos para convertirse en buenos maestros.

Las emociones negativas de los profesores en formación en su rol de profesores son: miedo, congoja, reproche, decepción desagrado. Miedo al preparar una clase de matemática; esto se debe al desconocimiento del tema a trabajar. Congoja al ser conscientes de las experiencias negativas vividas durante la época escolar, que marca su vida como maestros. Decepción por no haber concluido una sesión de clase como la habían previsto, lo que es parte de su aprendizaje como futuros profesores ya que están en prácticas pre profesionales. Sin embargo, a pesar de esta situación, todos manifiestan sus deseos de ser excelentes maestros en su vida profesional y de brindar a sus estudiantes experiencias gratificantes al enseñar matemática.

Para superar las malas experiencias emocionales según Pietila (2002) y Liljedahl, (2005) (citados por Hannula, Liljedahl, Kaasila y Rösken, 2007), es necesario que los educadores de futuros profesores brinden experiencias positivas con las matemáticas, por ejemplo al trabajar de manera constructivista con el uso de fichas, y generar un ambiente de apoyo en el aula al trabajar con la resolución de problemas para generar confianza en ellos y fomentar su participación; esto permitiría que logren aprender realmente las matemáticas que deberán enseñar.

Finalmente, los docentes podemos reconocer que nuestros estudiantes juzgan nuestra capacidad de mantener la disciplina en el grupo, a pesar de que no siempre están interesados en el tema tratado en la clase de matemáticas, pueden estar atentos a nuestras fallas, a veces las externan y otras veces se quedan callados por temor a represalias que pudiéramos tomar. De esta manera los estudiantes demandan que el docente sea justo en todo momento de la clase, haciendo hincapié en que sus acciones no sean viscerales y que sus errores no sean señalados, en voz alta, frente a los otros miembros de grupo, así, el docente se convierte en un modelo de identificación, no solo en lo referente al conocimiento, sino en lo afectivo, por lo que no hay manera de que el profesor esquive sus propias emociones y las que el estudiante deposita en él.

Referencias bibliográficas

Anttila, H., Pyhältö, K., Soini, T. y Pietarinen, P. (2016). “How Does It Feel to Become a Teacher? Emotions in Teacher Education.” *Social Psychology of Education*, 19 (3), 451–473.

Arellano, Y., Hernández, A., Nava, C. y Martínez, G. (2018). Explorando las emociones diarias de profesores de matemáticas en el aula. Un estudio de caso. En G. Martínez-Sierra, C. Dolores Flores, M. García González, J. Juárez López. & J. Ramírez Cruz (Editores). *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa* (pp. 295-314). Primera edición. México: Ediciones y grafitos Eón.

Bekdemir, M. (2010). The pre-service teachers’ mathematics anxiety related to depth of negative experiences in mathematics classroom while they were students. *Educational Studies in Mathematics*, 75(3), 311–328. http://doi.org/10.1007/s10649-010-9260-7

Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M.A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Huelva*: Universidad de Huelva Publicaciones.

Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T. y Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: A crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education* 17 (3–4), 101–118.

Di Martino, P. y Sabena, C. (2011). Elementary pre-service teachers' emotions: shadows from the past to the future. In K. Kislenko (Ed). Proceedings of MAVI 16 Conference: *Current state of research on mathematical beliefs* XVI, (pp.89-105). Tallinn: University of Applied Sciences.

García-González, M.S. (2016). "Me frustra no resolver un problema en el examen": Emociones en la clase de matemáticas. *Revista Eutopía. Revista del Colegio de Ciencias y Humanidades para el Bachillerato* 9 (24), 79-86. ISSN: 1870-8137

García-González, M. y Martínez-Sierra, G. (2016). Emociones en profesores de matemáticas: un estudio exploratorio. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 247-252). Málaga: SEIEM.

García-González, M. y Pascual-Martín, M. (2017). De la congoja a la satisfacción: el conocimiento emocional del profesor de matemáticas. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech*, 8(15), 133-148.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional*. Madrid: Narcea.

Hannula, M. S., Liljedahl, P., Kaasila, R. y Rösken, B. (2007). Researching relief of mathematics anxiety among pre-service elementary school teachers. In J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. P. Park, y D.Y. Seo (Eds). *Proceedings of 31st Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2007(1), (pp. 153–156). Seoul, Korea: PME.

Lewis, G. (2013). Emotion and disaffection with school mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(1), 70–86. doi:10.1080/14794802.2012.756636

Middleton, J., Jansen, A. y Goldin, G. (2017). The Complexities of Mathematical Engagement: Motivation, Affect, and Social Interactions. En Jinfa C. (Ed.). *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 667-699). Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Philipp, R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Ramos-Silverio, J. y García-González, M. S. (2018). Perfil emocional de una docente en clase de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 477-484). Gijón: SEIEM. ISBN: 978-84-17445-11-9.

Rodríguez, J., Guevara, A. y Viramontes, A. (2017). Síndrome de burnout en docentes. *IE Revista de Investigación Educativa de la Rediech,* 7(14), 45-67.

Schutz, P., y Pekrun, R. (Eds.). (2007). *Emotion in education*. Boston, MA: 1100 Academic Press.

Schutz, P., y Zembylas, M. (2009). Introduction to advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives. En P. Schutz, y M. Zembylas (Eds.), *Advances in teacher emotion research: The impact on teachers lives*. New York: Springer.

Zembylas, M. (2005). Beyond teacher cognition and teacher beliefs: the value of the ethnography of emotions in teaching. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *18*(4), 465-487.

LAS SOLUCIONES Y REPRESENTACIONES DE UN ACERTIJO MATEMÁTICO QUE DAN LOS ALUMNOS MEXICANOS DE EDUCACIÓN MEDIA

SOLUTIONS AND REPRESENTATIONS OF A MATHEMATICAL PUZZLE GIVEN BY MEXICAN MIDDLE EDUCATION STUDENTS

Martha Patricia Velasco Romero, Josip Slisko Ignjatov
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).
hypaty4@gmail.com, josipslisko47@gmail.com

Resumen
Los acertijos matemáticos han sido creados y resueltos a través de la historia por diferentes personas. Actualmente, se presentan en pruebas de reflexión cognitiva y requieren de estrategias heurísticas para su resolución. Al enfrentarse una persona a un problema usa dos sistemas de razonamiento: el pensamiento rápido y el pensamiento lento. En este trabajo analizamos las respuestas y las representaciones, generadas por 28 alumnos de segundo grado de educación secundaria obligatoria, al resolver el acertijo matemático "Un caracol que sube y baja", catalogado como un problema no rutinario. Se encontró la ausencia preocupante de representaciones puramente esquemáticas y la dominante presencia representaciones pictóricas e híbridas. Se describen brevemente implicaciones de este resultado para la enseñanza de las matemáticas.

Palabras clave: representación pictórica, representación matemática, acertijos matemáticos

Abstract
Mathematical puzzles have been created and solved throughout history by different people. Currently, they are presented in cognitive reflection tests and they require heuristic strategies for their solution. When a person confronts a problem, two systems of reasoning might be used: fast thinking and slow thinking. In this work, we analyze the answers and the representations, given by 28 second-year students of compulsory secondary education, when solving the puzzle "A snail that goes up and down", classified as a non-routine problem. The worrying absence of pure schematic representations and the dominant presence of pictorial and hybrid representation were found. Implications of this result for mathematics teaching are briefly described.

Key words: pictorial drawing, mathematical drawing, mathematical puzzles

Introducción

Los acertijos y enigmas son partes de la cultura humana desde los tiempos más remotos. Su popularidad y larga existencia revelan la obsesión profunda de los humanos con lo misterioso y desconocido (Danesi, 2002). Con el paso del tiempo, los acertijos tomaron un papel lúdico para pasar el tiempo libre. Aunque previamente las diversiones numéricas se insertaban esporádicamente en libros matemáticos, el género de "matemáticas recreativas", comienza en el año 1612, con el libro "*Problemas divertidos que se resuelven con números*", escrito por el francés Bachet.

En el año 1998, Martín Gardner, el más famoso promotor de los juegos y rompecabezas matemáticos, opinaba que las matemáticas recreativas, aunque tienen un potencial enorme de motivar a los alumnos de apreciar las bellezas matemáticas, no estaban suficientemente presentes en los programas y libros de texto usados en la educación matemática (Gardner, 1998). Últimamente, la situación podría cambiar por dos razones. Por un lado, las matemáticas recreativas y sus rompecabezas permiten explorar una nueva modalidad de enseñar y aprender resolución de problemas (Averbach y Chein, 2012) y modelación matemática (Michalewicz & Michalewicz, 2008).

Por el otro lado, los rompecabezas matemáticos entraron en el mundo de negocios y ciencias empresariales. En Microsoft, Google y otras compañías de alta tecnología, los entrevistadores, una especie de "esfinges de apariencia humana", conducen demandantes entrevistas de trabajo, exigiendo que los candidatos resuelvan rompecabezas matemáticos para demostrar que poseen la inteligencia, la imaginación y la habilidad de resolver los problemas no-rutinarios que se presentan en la economía globalizada (Poundstone, 2003; Poundstone, 2012).

Adicionalmente, el Profesor de la Universidad de Yale, Shane Frederick ha diseñado "*El test de reflexión cognitiva*" (Frederick, 2005), usando tres conocidos acertijos matemáticos. Ese test mide las tendencias de las personas usar el pensamiento rápido o el pensamiento lento. Se ha demostrado que el puntaje en el test predice, de manera asombrosa, la toma de decisiones (buenas o malas) en diferentes problemas del comportamiento económico.

Para entender mejor lo que pasa al resolver un acertijo matemático, se debe considerar queen nuestro razonamiento se usan dos sistemas (el Sistema 1 y el Sistema 2) que realizan los llamados "pensamiento rápido" y "pensamiento lento". El Sistema 1 considera los datos expresados explícitamente y usa la memoria para ayudarse en situaciones similares, dando respuestas rápidas. El Sistema 2 ve más allá de la situación planteada y considera relaciones implícitas. Ambos sistemas trabajan conjuntamente. Sin embargo, en sus razonamientos algunas personas se ven influenciadas más por un sistema que por el otro (Kahneman, 2011). Los buenos acertijos matemáticos son aquellos que activan al Sistema 1 y el "pensamiento rápido", llevando a la persona hacia una respuesta incorrecta.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En los antecedentes se ven las investigaciones relacionadas a las representaciones. En el marco teórico, se describe el rol que juegan diferentes representaciones en la resolución de problemas matemáticos y presenta su clasificación. En la parte metodológica se describe el cuestionario estructurado, el grupo de conveniencia y el modo de aplicación. En la sección de análisis y resultados, se muestran las representaciones del grupo de estudio y descripciones de su solución, así como las entrevistas a dos alumnos. Finalmente se mencionan las conclusionese implicaciones para la enseñanza.

Antecedentes

En la literatura, el problema del caracol y sus distintas versiones han sido planteados para el estudio de representaciones y resolución de problemas. D´Amore (1995) hizo un estudio de exploración cualitativo donde se recolectaron y analizaron dibujos generados de la resolución del problema del caracol realizados por estudiantes de nivel primaria.

Un estudio experimental de intervención se realizó a 12 estudiantes de nivel primaria de Australia, cuya edad promedio fue de 10.25 años. Para mejorar el uso de los diagramas en los alumnos se dieron 12 sesiones de media hora, en donde si el alumno resolvía las actividades intentando usar un diagrama, entonces se le hacían sugerencias para guiarlo. Se usaron dos versiones del acertijo tomadas de Diezmann (1997), con diferentes animales y distancias:

- *"Un koala soñoliento quiere subir a la cima de un árbol que tiene 10 metros de altura. Cada día el koala sube 5 metros, pero cada noche mientras duerme, retrocede 4 metros. A esta velocidad, ¿cuantos días tardará el koala en llegar a la cima?*
- *"Una rana estaba tratando de salir de un pozo. Cada vez que la rana salta, sube cuatro filas de ladrillos, pero debido a que los ladrillos eran resbalosos, se desliza una fila hacia abajo. ¿Cuántos saltos tendrá que hacer la rana si el pozo tiene 22 filas de altura?* (Diezmann, 1997, p. 3)

Reuter y colaboradores (2015) realizaron un estudio comparativo, con 199 alumnos (103 mujeres y 96 hombres) de cuarto año de primaria con edad promedio de 9.21 años. La representación matemática más predominante en las pruebas fueron las tablas. Se usó un grupo de control formado por 40 participantes, mientras que al otro grupo se le instruyó con 12 problemas en los que se incluían: 4 problemas de combinatoria, 4 problemas de comparación y 4 problemas de movimiento. La versión del acertijo que se ocupó fue la siguiente:

> *"Un caracol que se encuentra en un pozo de 24 metros de profundidad quiere subir hasta la cima del pozo. Cada día se arrastra 6 metros hacia arriba del pozo y se desliza por la noche la mitad de distancia que se arrastró durante el día. El caracol empieza a subir el lunes por la mañana. ¿En qué día llegará el caracol al a cima del pozo?"* (Reuter et al., 2015, p. 1390)

En México, una población de alumnos de secundaria y preparatoria, contestó dos pruebas de opción múltiple. El objetivo de este estudio fue ver la influencia de la posición de la respuesta correcta entre las ofrecidas (la primera o la última). La formulación del problema era la siguiente:

> *"Sin revelar sus razones, un caracol decide trepar un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche resbala 2 metros, ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?"* (Cenobio et al., 2017, p. 31)

En esta investigación se toma el problema anterior con el fin de solicitar explícitamente y describir las características de los dibujos realizados por estudiantes de secundaria de segundo año. Los estudios anteriores sugieren un mayor éxito en la solución de problemas matemáticos para los estudiantes con las representaciones esquemáticas (Hegarty & Kozhevnikov, 1999). Sin embargo, en tales estudios no se solicitaban los dibujos sino eran hechos por algunos alumnos de manera espontánea.

Marco teórico

Las representaciones visuales son importantes en la educación matemática, ya que mejoran una visión intuitiva y una comprensión en muchas áreas de las matemáticas. En la resolución de problemas, las representaciones visuales, tales como las imágenes y diagramas, son esenciales en el planteamiento de la solución de un problema (Polya & Zugazagoitia, 1965; Schoenfeld, 1992). Krutetskii (1976), menciona que los individuos que resuelven un problema pueden clasificarse en tres tipos: (1) verbales, que son aquellos que prefieren modos verbales en lugar de imágenes;(2) visuales, que involucra a aquellos que prefieren usar imágenes visuales; y, por último, (3) mixtos, los cuales no tienen una tendenciapreferida como los dos anteriores.

Hegarty y Kozhevnikov (1999) asociaron el uso de representaciones espaciales esquemáticas con un éxito en la resolución de problemas matemáticos, mientras que el uso de dibujos pictóricos se correlacionó negativamente al éxito de resolver un problema matemático.

Para Polya (1965), un diagrama es una representación visual que presenta información distribuida en espacio, mientras que Diezmann y English (2001) los definen como representaciones estructuradas en donde los detalles superficiales no importan y suelen basarse en convenciones que representen las componentes de la situación de manera organizada. En contraste, los dibujos son generados con muchos detalles y no representan las relaciones de las variables del problema.

Diezmann (2005), sostiene que los diagramas tienen tres ventajas cognitivas en la resolución de un problema:

- Contribuyen a la conceptualización del problema. La estructura del problema tiene elementos que se identifican como la situación del problema, las relaciones entre sus elementos y el significado de ellos, por lo cual el diagrama debe representar la solución del solucionador.
- Son un sistema de representaciones de conocimiento basados en la deducción y a su vez pueden generar más conocimiento. Los diagramas pueden compartir estructura pero pueden representar problemas distintos.
- Apoyan el razonamiento visual, que complementa al razonamiento lingüístico. El razonamiento espacial y visual comprende las habilidades: comprensión, manipulación y reorganización o visualización del as relaciones entre los componentes.

Novick yHurley (2001) proponen tres tipos de diagramas:

- Diagrama de red. No tiene estructura predefinida, hay enlaces entre la información de manera flexible y hay múltiples rutas. Está compuesto por nodos y flechas.
- Diagrama jerárquico. Hay organización por medio de niveles que guardan relaciones donde solo hay un camino y no hay enlaces entre nodos del mismo nivel.
- Tabla. Se forma a partir de dos conjuntos de información, no hay enlaces por medio de nodos y la información se enlaza por medio de filas y columnas.

Las rectas numéricas también son representaciones que son usadas para la resolución de un problema, ya que se usan cantidades crecientes y números de forma organizada. En Elia, Gagatsis y Demetriou (2007) se clasificaron las representaciones como: texto escrito, texto con imágenes y recta numérica. A su vez, Siegler y Booth (2004) sugieren que la línea numérica se puede usar como una herramienta de enseñanza para promover la dependencia en las representaciones lineales y para ayudar a los niños a comprender los significados de cualquier rango de números. Gagatsis, Shiakalli y Panaoura (2003) consideran la recta numérica como un modelo geométrico, que implica un continuo intercambio entre una representación geométrica y una aritmética.

Metodología

Se aplicó un cuestionario estructurado alrededor del acertijo del caracol con muestreo por conveniencia (Moreno, 2008). El grupo, atendido por la primera coautora (MPVR), fue de 28 alumnos de segundo grado de Educación Básica Secundaria (10 mujeres y 18 hombres). La edad promedio de los participantes fue de 13.5 años.

El cuestionario estructurado (la hoja de trabajo) se presentó como una “actividad inicial” en una sesión regular de matemáticas. Los alumnos tardaron entre 10 y 15 minutos para llenar la hoja de trabajo. El acertijo, con que comenzaba la hoja de trabajo, decía lo siguiente:

"Sin revelar sus razones, un caracol decide trepar un poste cuya altura es de 10 metros. Durante el día sube 3 metros, pero durante la noche resbala 2 metros, ¿Cuántos días y cuántas noches necesita el caracol para subir hasta la cima del poste?" (Cenobio et al., 2017, p. 31)

Después del acertijo, en la hoja de trabajo viene una sección en que el alumno debe presentar detalladamente el camino hacia la respuesta. La siguiente sección solicitaba la presentación de un dibujo o esquema que se usó para resolver el acertijo. Por último, los alumnos debían dar tres razones que justifiquen sus respuestas.

Las "entrevistas de seguimiento" (Hampshire et al., 2014) se proponían a los alumnos con respuestas incorrectas, con la mención de que esas entrevistas son voluntarias. Aunque hubo más alumnos interesados, finalmente se hicieron solamente dos entrevistas (una alumna y un alumno), quienes dieron las respuestas: "10 días y 10 noches" y "10 días y 11 noches". La razón de tal reducción de los alumnos entrevistados es la escasa autorización previa del tutor y de los padres, necesaria para la audio-grabación.

Análisis de resultados

En los resultados de la prueba se encontraron siete tipos de respuestas. El porcentaje de respuestas correctas (8 días y 7 noches) es del 17. 85%. Las demás respuestas son incorrectas y tienen un 82.15%. Todas respuestas se presentan en la siguiente tabla:

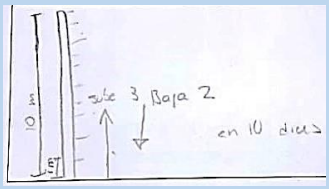
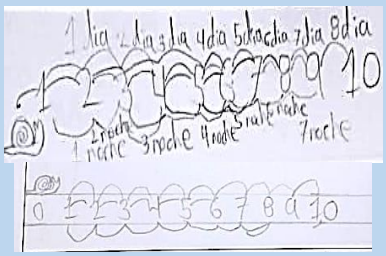
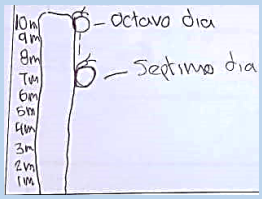
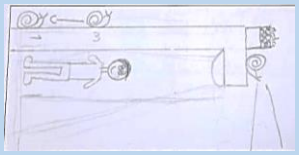
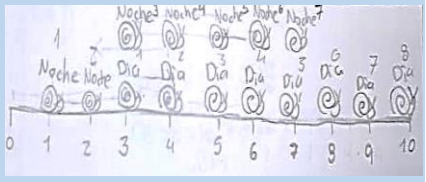
Tabla 1. Respuestas de todos los alumnos.

Tipo de respuesta	Respuesta	Número de alumnos
Correcta	8 días y 7 noches	5
Incorrecta	2 días y 3 noches	1
	9/2 días y 5 noches	1
	10 días y 8 noches	1
	10 días y 9 noches	2
	10 días y 10 noches	13
	10 días y 11 noches	5

La clasificación de representaciones se hizo usando como punto de partida a Hegarty y Kozhevnikov (1999) para separar los dibujos en pictóricos y dibujos esquemáticos. Se usó, también, la clasificación de Novick y Hurley (2001) para los dibujos esquemáticos: tablas, diagramas de red y diagramas jerárquicos. Las rectas numéricas se separaron de estas clasificaciones, considerando las características que contienen como son segmentos y numeración. La originalidad de este estudio es proporcionar la evidencia de la abundante presencia de los "dibujos híbridos" o aquellos que mezclan los elementos de una representación pictórica y una representación esquemática o recta numérica al mismo tiempo.

En la Tabla 2, se describen las representaciones de los participantes que tuvieron la respuesta correcta: 8 días y 7 noches. Se nota que fueron dominantes los diagramas híbridos que son las combinaciones de dibujos pictóricos con una representación esquemática o una recta numérica.

Tabla 2. Representaciones y características de las respuestas correctas.

Imagen	Tipo de dibujo	Observaciones
	Recta numérica segmentada no numerada.	Se describe textualmente que el caracol en la noche siete se encuentra en el metro 7 y en el día 8 llega a la cima.
	Híbrido. Diagrama de red.	En el dibujo híbrido, se usan caracoles y un diagrama de red. Los nodos están representados por los números y las líneas son las flechas.
	Híbrido. Recta numerada no segmentada.	Da una respuesta muy corta, justifica su respuesta con describir el séptimo día.
	Dibujo pictórico.	No justifica la respuesta 8 días y 7 noches.
	Híbrido. Recta numérica segmentada y numerada y caracoles.	Hace los cálculos del recorrido día a día. Coloca un caracol en cada metro mencionando si es el día o la noche.

Las respuestas incorrectas menos populares donde se observó un participante por respuesta se muestran en la Tabla 3, con una descripción más detallada.

Tabla 3. Características de las respuestas incorrectas menos populares.

Respuesta	Tipo de dibujo	Descripción de la representación	Observaciones
2 días y 3 noches	Pictórico	Un sol, una luna, un caracol y un poste segmentado en 7 partes.	Se consideran los metros que debe subir y bajar por día y noche, pero no se desarrolla.

9/2 días y 5 noches	Pictórico	Tres árboles con tres flechas.	No hay datos que expliquen el procedimiento.
10 días y 8 noches	Recta segmentada y numerada	Un poste segmentado y numerado de un metro en un metro.	No hay justificación del número de noches.

Dentro de las respuestas incorrectas con mayor número de participantes, tenemos las de: 10 días y 9 noches; 10 días y 10 noches; y 10 días y 11 noches.

Para la respuesta 10 días y 9 noches, las representaciones fueron: un dibujo pictórico y una tabla sin marcos, ambas representaciones se describen en la Tabla 4.

Tabla 4. Características de la respuesta 10 días y 9 noches.

Tipo de dibujo	Descripción de la imagen	Observaciones
Pictórico	Tres caracoles en tres postes, uno en cada uno respectivamente.	Un metro es el recorrido del caracol en un día completo.
Tabla sin divisiones.	La primera fila, muestra los días; la segunda, el recorrido expresado mediante flechas, en la tercera representa las noches.	Un metro es el recorrido del caracol en un día completo.

Por otro lado, en la respuesta 10 días y 10 noches, los dibujos que son más representativos son los dibujos pictóricos, además se tienen dos rectas numéricas, 3 dibujos híbridos y uno sin representación. Se describen las respuestas de este tipo más detalladamente las representaciones en la Tabla 5.

Tabla 5. Características de la respuesta 10 días y 10 noches.

Tipo de dibujo	Descripción de la imagen	Observaciones
Pictórico.	Seis caracoles.	Es similar a un comic.
	4 líneas con un caracol cada uno.	Un metro por día: $(3 \times 10) - (2 \times 10) = 10$
	Un reloj, un sol, una luna y una línea.	El caracol sube un metro por día completo.
	5 postes con 6 caracoles	Los caracoles son animales que caminan lentamente.

	3 postes con 3 caracoles, uno en cada uno. Un sol.	Se hicieron operaciones que verifican el resultado.
	Un poste y un caracol coloreados.	Un metro por día.
	Un sol, una luna, un poste de 10 metros.	Un metro por día.
Recta numérica segmentada no numerada.	Tres rectas segmentadas no numeradas	Un metro por día.
Recta numérica segmentada y numerada.	Recta segmentada y numerada del 1 al 10.	El caracol sube un metro por día completo.
Hibrido. Recta numérica numerada y segmentada.	Un sol, una luna, una recta segmentada y numerada.	Un metro por día.
Híbrido. Recta numérica segmentada no numerada.	Un poste segmentado en 10 pedazos no numerado y una señal de tránsito.	Tabla son dos sucesiones de 3 en 3, con inicio en 3 y en 1.
	Una recta segmentada de 10 en 10 hasta llegar al 100, un caracol y un poste.	No considera el tamaño del poste.
No tiene dibujo.		

Finalmente, para la respuesta 10 días y 11 noches, se obtuvo un dibujo pictórico, un dibujo hibrido, una gráfica lineal, una recta numérica y un participante sin representación visual (Tabla 6).

Tabla 6. Características de la respuesta 10 días y 11 noches.

Tipo de dibujo	Descripción de la imagen	Observaciones
Pictórico.	2 caracoles con dos líneas de 10 metros.	Un metro por día.
Hibrido. Una recta numérica segmentada y numerada.	Una recta numérica segmentada y numerada. Cuatro caracoles.	Se suman 10 noches más un metro y salen 11 noches.

Una gráfica lineal.	Una gráfica lineal: días vs metros.	Pensamiento lineal, regla de tres.
No hay dibujo.	No hay dibujo	
Recta numérica segmentada no numerada.	Una recta numérica segmentada no numerada.	Sin observaciones por parte del participante.

Por lo tanto, la lista de representación con relación a las respuestas correctas e incorrectas queda de la siguiente manera (Tabla 7). Notemos que la argumentación está presente en el 80% con respecto al total de las respuestas correctas. Las representaciones pictóricas presentes en las respuestas incorrectas son el 39.28 % del total de la población. y estas a su vez consideran la que el caracol avanza por día completo un metro, que representa la respuesta más común donde el Sistema 1 o pensamiento rápido hace un efecto de anclaje y se aferren a este razonamiento.

Tabla 7. Tipos de representaciones encontradas en el estudio.

Tipo de representación	Respuestas correctas	Argumentación	Respuestas incorrectas	Un metro por día
Recta segmentada no numerada	1	1	4	1
Recta segmentada y numerada	0	0	2	1
Híbrido. Diagrama de red	1	1	0	0
Híbrido. Recta no segmentada numerada	1	1	0	0
Híbrido. Recta segmentada y numerada	1	1	2	1
Pictórico	1	0	11	5
Tabla	0	0	1	1
Gráfica	0	0	1	1
Sin dibujo	0	0	2	1
TOTAL	5	4	23	11

Figuras 6 y 7. Ejemplo de dibujo pictórico donde se hacen operaciones aritméticas (al lado izquierdo). Gráfica lineal (al lado derecho).

Cabe resaltar queentre las operaciones que mencionan los participantes para que dé el resultado de 10 metros, la más populares la operación aritmética:

$$(3 \times 10) - (2 \times 10) = 10.$$

Ese y otras operaciones aritméticas se pueden interpretar como una faceta del "contrato didáctico" (D'Amore & Martini, 1997), al que están sometidos los alumnos y el cual señala el uso mecánico de operaciones para justificar su resultado (Figura 6).

Durante una "entrevista de seguimiento" se cuestionó la representación de una gráfica lineal (Figura 7). El alumno la justificó con el uso de la regla de tres como se puede ver en la siguiente transcripción (la E representa a la entrevistadora y P al participante):

> *P: La segunda razón es porque si hacemos una regla de tres nos da por resultado 10 días.*
> *E: ¿Cómo harías la regla de tres? ¿Cómo? Puedes escribir en la parte de atrás de esta hoja y me puedes decir como harías la regla de tres.*
> *P: Así que puse uno es igual a uno, 1 x 10 es igual a 10 y sale 10 y 10 entre 1 es 10*
> *E: Entonces este uno de acá ¿qué sería?*
> *P: O podría decir que este uno de acá (señalando al 1 del lado izquierdo), representa los metros que recorre pro un día.*

Así mismo, se observó en otro fragmento de entrevista que el alumno menciona que el caracol se caerá si sigue con el recorrido por más de 8 días:

> *E: ¿Dónde está el caracol después de los 8 días?*
> *P: Se cae*
> *E: ¿Por qué?*
> *P: Porque, nada más está 10 metros el poste y ya subió acá todo esto, si pasa más se va a caer. Porque si le seguimos así, va a salir que el poste mide más, y ya nos dijeron que el poste mide nada más 10 metros.*

Es importante notar que el alumno, en la entrevista, pudo llegar a la respuesta correcta (8 días), aunque su respuesta inicialmente era errónea.

Conclusiones e implicaciones para la enseñanza

El resultado más importante de este estudio es la ausencia de representaciones visuales puramente esquemáticas y la presencia dominante de representaciones pictóricas e híbridas en el desempeño de los alumnos al resolver el

acertijo del caracol que sube y baja. Tal resultado preocupante se puede entender, por lo menos parcialmente, como consecuencia del tratamiento de estos dos tipos de representaciones visuales en los libros de texto de matemáticas.

En una investigación documental (Contreras et él., 2018), cuyo objetivo fue determinar las características básicas y cuantificar la presencia de representaciones situacionales ("pictóricas") y matemáticas ("esquemáticas") en 480 formulaciones de problemas propuestas por autores de 29 libros de texto de matemáticas mexicanos para el tercero de secundaria, se encontró que los estudiantes no están informados sobre (1) las diferencias entre las representaciones pictóricas y esquemáticas y (2) su papel e importancia en el aprendizaje y la práctica de la modelación. Además, en muchos ejemplos, las representaciones esquemáticas completas o incompletas están insertadas en las representaciones pictóricas (dibujo o fotografía), muy parecidas a las "representaciones híbridas" encontradas en este estudio.

Para mejorar el desempeño de los alumnos en la resolución de problemas no-rutinarios, es necesario presentarles explícitamente tanto las diferencias fundamentales entre las representaciones pictóricas y esquemáticas como los procesos de simplificación que transforman las primeras en las segundas. Está claro que los alumnos deben tener múltiples oportunidades de practicar ellos mismos la generación de ambas representaciones, primero con la ayuda de docente y después de manera autónoma. En tales prácticas, los alumnos deben crear los conocimientos estratégicos sobre los "dibujos situacionales" y "dibujos matemáticos" (Rellensmann et al., 2017).

Para que esas prácticas sean posibles, se requiere tener presentes las diferencias entre las representaciones pictóricas y esquemáticas en los libros de texto de matemáticas y en la preparación de los futuros docentes de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Averbach, B., & Chein, O. (2012). *Problem-solving Through Tecreational Mathematics*. New York: Dover.

Cenobio, C. C., Slisko, J. A., Hernández, R. L. A., & Corona, C. A. (2017). A few considerations of climbing-snail problem: Fibonacci's error, problem's popularity and Mexican students' performances. *Inovacije u nastavi-časopis za savremenu nastavu*, *30*(1), 25-42.

Contreras, E. H., Slisko, J., & Rebollar, L. A. H. (2018). Presence of situational and mathematical models in Mexican mathematics textbooks for middle school: An initial categorization and quantification. *Journal of European Education*, *8*(2), 1-13.

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *3*, 328-370.

D'Amore, B., & Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *32*, 26-42.

Danesi, M. (2002). *The Puzzle Instinct: The meaning of puzzles in human life*. Bloomington: Indiana University Press.

Diezmann, C. M. (1997). The effect of instruction on students' generation of diagrams. In (Biddulph. K. F. & Carr, Eds.) *Proceedings 20th Annual Conference of Mathematics Education Research Group of Australasia: People in mathematics education*, 140-146.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In *2001 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook: The Role of Representation in School Mathematics* (pp. 77-89). National Council of Teachers of Mathematics.

Diezmann, C. (2005). Assessing primary students' knowlegde of networks, hierarchies and matrices using scenario-based tasks. In Gronn, D Horne, M, Roche, A, Pierce, R, Downton, A, Clarkson, P, et al. (Eds.) *Building Connections: Research, Theory and Practice: Proceedings of Annual Conference (MERGA 28 2005).* MERGA Inc., Australia, 289-296.

Elia, I., Gagatsis, A., & Demetriou, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, *17*(6), 658-672.

Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *Journal of Economic Perspectives, 19*(4), 25–42.

Gagatsis, A., Shiakalli, M., & Panaoura, A. (2003). La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers. In *Annales de didactique et de sciences cognitive, 8*, 95-112.

Gardner, M. (1998). A Quarter-Century of Recreational Mathematics. *Scientific American, 279*, 68-75.

Hampshire, K., Iqbal, N., Blell, M., & Simpson, B. (2014). The interview as narrative ethnography: Seeking and shaping connections in qualitative research. *International Journal of Social Research Methodology*, *17*(3), 215-231.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of educational psychology*, *91*(4), 684.

Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. New York: Macmillan.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago University.

Meyer III, E. F., Falkner, N., Sooriamurthi, R., & Michalewicz, Z. (2014). *Guide to teaching puzzle-based learning* (pp. 13-20). Nueva York: Springer.

Michalewicz, Z. & Michalewicz, M. (2008) *Puzzle-based learning: an introduction to critical thinking, mathematics, and problem solving*. Melbourne: Hybrid Publishers.

Moreno, C. M. (2008). Metodología de investigación en estudios de usuarios. *Revista general de información y documentación*, *17*(2), 129-149.

Novick, L. R., & Hurley, S. M. (2001). To matrix, network, or hierarchy: That is the question. *Cognitive psychology*, *42*(2), 158-216.

Polya, G., & Zugazagoitia, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* Ciudad de México: Trillas.

Poundstone, W. (2003). *How Would You Move Mount Fuji? Microsoft's Cult of the Puzzle. How the World's Smartest Companies Select the Most Creative Thinkers*. New York: Little, Brown and Company.

Poundstone, W. (2012). *Are yousmartenoughtowork at Google? Fiendish Puzzles and Impossible Interview Questions from the World's Top Companies*. Oxford: OneworldPublications.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53-78.

Reuter, T., Schnotz, W., & Rasch, R. (2015). Drawings and tables as cognitive tools for solving non-routine word problems in primary school. *American Journal of Educational Research*, *3*(11), 1387-1397.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics, In Grouws, Dougla A. (editor) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (334-370). VA, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child development*, *75*(2), 428-444.

EL DESARROLLO DE LA ETNOMATEMÁTICA EN CHILE: APORTES Y DESAFIOS

THE DEVELOPMENT OF ETHNOMATEMATICS IN CHILE: CONTRIBUTIONS AND CHALLENGES

Mónica Navarrete, Rodrigo Panes Chavarría Anahí Huencho, María Eugenia Reyes, Pilar Peña-Rincón
Universidad de Tarapacá, Universidad del Bío-Bío, Universidad Católica de Temuco, Universidad de Santiago y Pontificia Universidad Católica de Chile (Chile).
monica.navarrete@gmail.com,rpanes@ubiobio.cl,ahuencho@uct.cl, maria.reyes.es@usach.cl, ppenar@uc.cl

Resumen
Este grupo de discusión se ha formado después de realizar la difusión en boletines del capítulo Chile –RELAET y pretende mostrar los aportes y desafíos para el desarrollo de la etnomatemática en Chile. Se presentan los aportes y desafíos que plantea la etnomatemática en torno a dos dimensiones: la primera dimensión en relación al contexto en el que se desarrolla la formación docente y la segunda dimensión muestra algunas experiencias aplicadas a contextos escolares. Los hallazgos muestran intervenciones regionales contemporáneas y que obedecen a sus contextos regionales diferenciados.

Palabras clave: grupo de discusión; formación de profesores; etnomatemática

Abstract
This discussion group was formed after the dissemination, in bulletins, of Chile –RELAET chapter; and it seeks to show the contributions and challenges for the development of ethno-mathematics in Chile. It presents the contributions and challenges set out by ethno-mathematics with respect to two dimensions: the first dimension in relation to the context in which teacher training takes place and the second dimension shows some experience applied to school contexts. The findings show contemporary regional interventions that respond to their differentiated regional contexts.

Key words: discussion group; teacher training; ethno-mathematics

Introducción

Desde el año 1996, el Programa de Educación Intercultural Bilingüe (PEIB), tiene como objetivo "*contribuir a mejorar los logros de aprendizaje a partir del fortalecimiento de la identidad étnica de las niñas y niños de establecimientos de Educación Básica ubicados en contextos de diversidad cultural y lingüística*" (MINEDUC, 2005, p. 5). Su implementación se ha realizado a través de la asignatura "Sector Lengua Indígena" (SLI) en los tiempos destinados al aprendizaje del lenguaje y en establecimientos escolares con al menos un 20% de estudiantes de ascendencia indígena.

Con los años, el PEIB ha sufrido adaptaciones derivadas de las experiencias implementadas por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 1996). De un modelo inicial que permite a las escuelas realizar adecuaciones curriculares y elaborar planes y programas propios al primer ciclo de enseñanza básica, se transita hacia un modelo que incorpora a la comunidad en la educación intercultural de las escuelas.

Si bien, el PEIB muestra un avance importante en temas de diversidad cultural y lingüística de los pueblos originarios, la educación matemática en contextos interculturales cobra cada vez más importancia por cuanto se están desarrollando iniciativas al interior de las universidades y centros de investigación regionales que consideran la etnovisión del pensamiento matemático y la necesidad de adecuar los programas educativos a esta visión apoyados en la Etnomatemática.

Educación intercultural de la matemática en chile

La Etnomatemática ofrece el entorno adecuado para que el PEIB permee al currículo de matemáticas dado que se las considera como una actividad humana de razonamiento basado en la experiencia cultural de quien las piensa. Así, conservar e incorporar los conocimientos matemáticos de diversos grupos socioculturales al aula de clases, iría en la dirección de ampliar y complementar la visión de las matemáticas difundidas por occidente, y particularmente; pensar a la escuela como un sitio de encuentro de distintas culturas donde se construyen sociedades más respetuosas de las diferencias de quienes la integran (Peña-Rincón & Blanco-Alvarez, 2015).

A partir del análisis de Encuentros Académicos realizados en Chile en los que se hayan abordado temas relativos a las etnomatemáticas, se pudo constatar la existencia de al menos tres experiencias que han albergado la comunicación de investigaciones relacionas con matemática y grupos socioculturales, estos son: el Congreso Internacional de Educación e Interculturalidad organizado por RIEDI, el Encuentro Educación Matemática y Diversidad de Iquique y las Jornadas Nacionales de Educación Matemática organizadas por la SOCHIEM. De las ponencias analizadas, un amplio porcentaje se centra en relacionar los aspectos etnomatemáticos con la enseñanza en contexto escolar, de las cuales más de la mitad lo hace en torno a la reflexión desde la generalidad de la diversidad de los grupos socioculturales.

Finalmente, en la categoría Redes académicas; los hallazgos muestran que en el país existen dos instancias en las cuales la comunidad puede participar: la Red Latinoamericana de Etnomatemática (RELAET) y la Red Interuniversitaria de Educación e Interculturalidad (RIEDI). El análisis realizado en torno a los participantes de estas redes establece una fuerte relación entre estas redes y las producciones etnomatemáticas establecidas en las categorías analizadas anteriormente.

Por otro lado, los hallazgos muestran pocas iniciativas orientadas a la visibilización de los conocimientos matemáticos culturales (CMC) lo que dificulta el desarrollo de investigaciones que profundicen su integración al aula y a la formación de docentes. Lo anterior se explicaría por dos razones básicamente:

1. Unas políticas educativas que a través de diversas iniciativas legales que podrían favorecer la inclusión de las etnomatemáticas de los pueblos originarios en los sistemas educativos, el proceso se obstaculiza por la existencia de un enfoque curricular nacional estandarizado y por la falta de sistematización de los CMC de grupos socioculturales. Hemos indicado que la incorporación del SLI ha sido criticada por los propios pueblos originarios debido a la segmentación del estudio de los valores, técnicas y conocimientos de la cultura, dado que no existe ni se promueve interacción entre las asignaturas. Ahora bien, estas políticas han permitido que tanto el Ministerio de Educación como algunas Universidades en Chile, elaboren recursos educativos para la educación intercultural que abordan ciertos aspectos etnomatemáticos o al menos intentan contextualizar la matemática escolar haciéndola pertinente a los pueblos originarios.

2. Respecto de la Formación Docente, el análisis de las mallas curriculares, solo 2 de 41 carreras que forman profesores de Educación Básica o Educación Matemática, han incorporado asignaturas o módulos sobre etnomatemática y la mayoría de las iniciativas en escuelas se han dirigido a contextualizar los CME en los entornos de las culturas originarias. Una es la carrera de Pedagogía Básica Intercultural Bilingüe a través de dos módulos de etnomatemáticas y la otra es la carrera de Pedagogía Básica Intercultural en Contexto Mapuche que contempla un módulo de conocimiento de matemática mapuche y de didáctica intercultural de la matemática. La carrera de Educación Básica de la UMCE incorpora algunas investigaciones relativas al tema dentro del Módulo Pensamiento Numérico I. En las mallas de las carreras que forman profesores de matemáticas no se identificaron asignaturas abocadas a este tema. La investigación bibliográfica de Peña y Huencho (2014) indica que los principales aportes de la investigación etnomatematica a la educación matemática en Chile, tienen relación con el CMC que se visibiliza.

La mayoría de estos elementos son incorporados en los textos escolares que han sido adecuados al contexto intercultural. De ellos se observa que el desarrollo integral de los conocimientos socioculturales y los conocimientos formales entra en una disputa bastante dispar dentro de los textos. Así, los textos siguen el marco curricular chileno e introduce cada una de las actividades con los conocimientos de la cultura a modo de cápsula ante cada propuesta. A esto se agrega que las imágenes se relacionan con un contexto rural acorde al espacio geográfico que es donde transcurre la vida de muchos de sus protagonistas. Todos los textos escolares están en castellano, algunos títulos o indicaciones de tarea en los que se visualizan en la lengua de base y el castellano.

Peña y Huencho (2014) concluyen que los principales desafíos en la formación docente se relacionan con desarrollar estrategias para incorporar a la Etnomatemática y los CMC en las mallas curriculares de las carreras de Educación Básica y Educación Matemática. Respecto de la investigación de la Etnomatemática, los trabajos sobre CMC de grupos socioculturales étnicos y no étnicos, aún es insuficiente. Por tanto, el desarrollo de la Etnomatemática en Chile tiene posibilidades de crecimiento en contextos de educación intercultural desde la visibilización del conocimiento de la cultura en matemática para luego generar estrategias destinadas al aprendizaje de éstos conocimientos desde su etnovisión.

Iniciativas regionales interculturales de la matemática

En la actualidad, el Estado chileno reconoce oficialmente la existencia de nueve pueblos aborígenes: el pueblo mapuche, aymara, diaguita, atacameño, quechua, rapanui, kolla, kawésqar y el pueblo yagán. Según el último Censo de Población y Vivienda realizado el año 2017, de un total de 17.574.003 personas; un 12,8% de la población en Chile se considera perteneciente a un pueblo indígena u originario. El mayor número lo aporta la población mapuche con 1.745.147 personas, seguidos por los Aymara (156.754) y los Diaguita (88.474). Respecto del porcentaje de la población total, las tres regiones de Arica y Parinacota (35,7%), la Araucanía (34,3%) y Aysén (28,7%) se destacan por tener la mayor proporción de personas que se reconocen pertenecientes a un pueblo indígena u originario. Sin embargo, los resultados muestran que los Mapuche viven mayoritariamente en la Región Metropolitana, región del

Maule y Región del Biobío. En este contexto regional y nacional, no es de extrañar que las experiencias etnomatemáticas en Chile, nazcan desde estos territorios

A efectos de esta investigación, se ha dividido el territorio en tres zonas identificando las universidades y/o centros de investigación que han desarrollado experiencias con etnomatemáticas. Es así como en la Zona I NORTE, aparece la Universidad de Tarapacá en la Región de Arica y Parinacota popularmente identificada como la región (XV) y donde se encuentra la población aymara. Lo mismo se describe para las Zonas II con la participación de la Pontificia Universidad Católica de Chile o la Universidad del Biobío y la Universidad Católica de Temuco en la Zona III. A continuación, se presentan las experiencias por cada zona.

Zona I: norte

Contexto institucional de la investigación regional

A partir del año 2016, el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Tarapacá (UTA) definió a la Etnomatemática como una línea de investigación y de intervención educativa en temas de patrimonio local con vistas a la visibilización de su CMC. El trabajo se realizó junto al Departamento de Antropología en el levantamiento de estrategia pedagógica mediante actividades teórico-prácticas que utiliza el análisis geométrico para identificar y valorar el CMC presente en los diseños iconográficos de los textiles y la tecnología prehispánica que se exhiben en el Museo Chinchorro y en los sitios arqueológicos ancestrales. Y a través de los fondos EXPLORA de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica CONICYT que ejecuta la UTA desde el año 2016, se apoya hasta hoy, el desarrollo de actividades con la comunidad sobre CMC a través visitas guiadas a sitios arqueológicos y museos de la cultura chinchorro.

Participación con la comunidad en contextos educativos

Existen tres experiencias educativas con la comunidad regional. Una destinada para un público especializado compuesto por tejedoras que tienen emprendimientos en el comercio de textiles artesanales en la región y otras para público escolar preferentemente, profesores de establecimientos educativos e investigadores de la universidad.

1. Respecto de la primera, el año 2017 se realizó una mesa de conversación con tejedoras locales (aymaras y no aymaras) para investigar el grado de conocimiento sobre la presencia de las matemáticas que se perciben en la confección y estructuración del textil patrimonial. Posteriormente se les mostró la presencia de elementos de rotación, simetría, traslación, perpendicularidad así como diversos elementos de geometría tales como transformaciones isométricas, ángulos, polígonos, teleselaciones entre otros.
2. En el contexto educativo; se han realizado cuatro academias de Etnomatemática para estudiantes y un taller para profesores sobre el pensamiento matemático en contextos de interculturalidad. La experiencia educativa levantada con actividades teórico-prácticas entre investigadores de la universidad de ambos departamentos y representantes de la comunidad aymara, buscaba valorizar el pensamiento matemático presente en los diseños iconográficos de los textiles y la tecnología prehispánica disponibles en la región de Arica y Parinacota.

3. Por último, a partir del año 2016, el Departamento de Matemáticas de la UTA incorporó como actividad de extensión, el “Programa de Visitas Guiadas de Etomatematicas” destinada a académicos, investigadores y profesores de matemática principalmente. Con una visita asistida a los principales sitios de la región que contienen restos arquitectónicos, geogliflos y telares ancestrales, se espera poner en valor el pensamiento matemático del mundo aymará.

Zona II: centro

Contexto institucional de la investigación regional

En la Región Metropolitana, se conocen tres contribuciones a la investigación; una que nace desde el Centro de Estudios Interculturales e Indígenas (CIIR) y desde la Facultad de Educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC) y otra que nace a partir del trabajo colaborativo con tres asociaciones mapuches para la visibilización de sus saberes ancestrales.

Respecto de la PUC, la Facultad de Educación desde el año 2016 ha venido trabajando en la incorporación de conocimientos matemáticos no hegemónicos a la formación de docentes de enseñanza básica con el propósito de mostrar que las matemáticas son un conocimiento socioculturalmente construido y por tanto; hay diversas formas de aprenderlos y aplicarlos.

Los resultados de la tesis doctoral "Influencias de una experiencia didáctica intercultural en las creencias matemáticas docentes" (Peña, 2016), han generado una línea de investigación relativa a la etnomatematica que ha contribuido a incrementar el número de experiencias en el aula. Hecho que luego se valida en el año 2018, al financiar el proyecto "*Prácticas socioculturalmente inclusivas en Didáctica de las Matemáticas"* con fondos para el desarrollo de la docencia. Por último, a través de los fondos EXPLORA de CONICYT que ejecuta la PUC, en el año 2018 la Facultad de Educación apoyó el proyecto "*Diversificando estrategia multiplicativas, una oportunidad para incluir y profundizar los aprendizajes"* levantado por estudiantes de último curso de la enseñanza primaria de un establecimiento en la región.

Participación con la comunidad en contextos educativos

En cuanto a la participación con la comunidad educativa, hay registros de al menos cuatro experiencias de intervención en los establecimientos educativos de la región metropolitana:

1) La primera de ellas resulta del trabajo de campo realizado en la tesis doctoral de Peña desarrollada en una escuela municipal de Santiago con el objetivo de identificar la influencia de un proceso de desarrollo profesional docente intercultural de las creencias matemáticas en un contexto escolar percibido como culturalmente homogéneo. En esta intervención participaron una docente de aula (3° grado), un educador tradicional mapuche y la investigadora doctoral de la PUC.
2) El proyecto "*Prácticas socioculturalmente inclusivas en Didáctica de las Matemáticas"* financiado por la PUC en el año 2018, registró mediante video tres Experiencias Didácticas Matemáticas Interculturales (EDMI) en un curso de didáctica de las matemáticas que forma parte del Programa de Pedagogía en Educación Básica. Los conocimientos abordados fueron un juego de estrategia mapuche llamado Komikan, un instrumento de cálculo inca conocido como Yupana y una herramienta de cálculo creada por Domingo Yojcom en base al sistema numérico maya conocido como Jik'ob'al.
3) Intervención realizada mediante acompañamiento de investigadores de PUC en la ejecución del proyecto "*Diversificando estrategia multiplicativas, una oportunidad para incluir y profundizar los aprendizajes"* levantado por estudiantes de último curso de la enseñanza primaria de un establecimiento polivalente. Proyecto que consistió en indagar sobre las distintas maneras de multiplicar y sobre las percepciones respecto al uso de algoritmos de multiplicación en Chile que tienen los estudiantes extranjeros del mencionado establecimiento.
4) Por último, entre los años 2015 y 2017, las asociaciones mapuches Trawun, Taiñ Adkim y el grupo Kimeltewe realizan talleres hacia la comunidad en general. Los talleres se realizaron en torno a la enseñanza del Mapudungun y de los juegos ancestrales. Se implementó una experiencia educativa de juegos ancestrales en estudiantes de sexto año de enseñanza primaria de un establecimiento urbano municipal con alto índice de vulnerabilidad y que se caracteriza por estar inmerso en un contexto urbano sin PEIB pero con estudiantes de ascendencia mapuche en sus salas de clases (Reyes, 2017). El trabajo buscaba visibilizar parte del patrimonio inmaterial contenido en su sistema de numeración que contienen los juegos ancestrales mapuche. Para Bishop

(1999), el juego es una actividad universal que desarrolla las capacidades científicas y matemáticas (implicando reglas, estructuraciones lógicas, sanciones y recompensas, mientras que promueve la negociación y el intercambio de puntos de vista (Gutiérrez, Fernández y Oliveras, 2015). En este sentido, el pueblo mapuche ha cultivado un conocimiento pragmático del análisis del tiempo y el espacio, un sistema numérico, simple, lógico y regular y juegos tradicionales.

Esta experiencia fue realizada por los docentes del establecimiento orientados por educadores pertenecientes a las asociaciones mapuches. En una primera etapa, se buscaba comprender el proceso de formación del sistema de numeración mapuche conectándolo con otros aspectos de su cultura, mientras que una segunda etapa buscaba "explicar la teoría de las probabilidades a través de los juegos ancestrales, utilizando representaciones concretas y gráficas en las soluciones." Los juegos seleccionados tienen un gran contenido matemático implícito. Estos son el juego kechucawe, juego awarkuden y juego komikan (Manquilef, 1914). Esto es:

a) Kechucawe: Es un juego simétrico. El tablero está definido por un círculo dividido en cuatro territorios donde cada jugador tiene la misma cantidad de fichas en forma individual y en equipo suman 30 fichas aproximadamente
b) Awarkuden: Es un juego de azar. Se juega con ocho habas quemadas, por un lado. Dos jugadores las mezclan y lanzan sobre una superficie plana y según la cantidad de habas quemadas que salgan; se obtiene una puntuación.
c) Komikan: Es un juego asimétrico tanto en los elementos como en su tablero. Se juega con doce fichas contra una, en forma alternada con dos jugadores. El tablero tiene un cuadrado y un triángulo superpuesto en donde están dibujadas cuadriculas con diagonales. Las 12 fichas se colocan en el cuadrado y representan a un perro. La otra ficha se coloca en la base del triángulo y representa a un puma.

Con esta experiencia educativa se pretendía demostrar la factibilidad de llevar a cabo experiencias de etnomatemáticas en el aula. Los hallazgos de la experiencia fueron dos:

1) La implementación de este tipo de experiencias permite visibilizar y valorar los conocimientos matemáticos del estudiante de ascendencia mapuche en el contexto urbano, empoderando y elevando su autoestima y rendimiento académico.
2) Visibilizar y difundir los juegos ancestrales en el aula abre un nuevo foco como investigadores. La entretención, el desarrollo de habilidades blandas y saberes matemáticos inherentes a cada juego, se presenta como experiencia pedagógica interesante de abordar.

Zona III: sur de chile

En esta zona, caracterizada por tener una gran cantidad de pueblos originarios; se han levantado experiencias educativas en Etnomatemática en al menos tres regiones donde las universidades o centros de investigación trabajan colaborativamente. Estas son la región del Ñuble, región del Biobío y Región de la Araucanía.

Caso 1: Contexto institucional de la investigación en la Región del Ñuble y del BioBio

En la Universidad del Biobío ubicada en la Región de Ñuble, existe un Grupo de Investigación en Educación y Educación Matemática (GIE2MAT) cuyos integrantes han venido desarrollando proyectos para visualizar configuraciones de conocimientos matemáticos que desarrollan los profesores en contextos interculturales. Desde el año 2018 al año 2021, integrantes de GIE2MAT están ejecutando el proyecto "Estudio sobre las configuraciones del conocimiento matemático que desarrollan profesores en comunidades educativas interculturales situadas en contextos de ruralidad, migración y comunidades mapuche" financiado por el Fondo de Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología (FONDECYT) de CONICYT. A nivel formativo, hay investigaciones de Magister y Pregrado. Respecto del Magister en Educación, se ha realizado la investigación "Creencias sobre matemáticas y resolución de problemas en estudiantes de segundo año medio de la localidad de Coelemu-Chile y sus sectores rurales" y el

"Estado del Arte de las Etnomatemáticas en revista de alto impacto". En ambas tesis, el insumo del programa etnomatemático es utilizado como herramienta para su análisis y discusión.

Investigadores de GEI2MAT, han generado el desarrollo de proyectos matemáticos en el aula en los Programas de pos título de educación matemática y primer ciclo que dicta la Universidad del Biobío y de la Universidad Católica del Maule. Estos proyectos con base en Etnomatemática y Educación Matemática Crítica, han generado el levantamiento problemáticas de interés para la unidad educativa y que son posibles de solucionar o aportar a su solución con la utilización de herramientas que otorgan los aprendizajes esperados que promueve el currículo nacional.

Participación con la comunidad en contextos educativos

1. En el marco del proyecto FONDECYT, se realizó una primera fase de tipo exploratorio a través de un amplio recorrido por las comunidades educativas de la región del Ñuble, aplicando la escala de tipo Likert denominada Matemática, Cultura y Aprendizaje (Panes, Friz, Lazzaro y Sanhueza, 2018) que indagó las creencias de los profesores desde un enfoque sociocultural y sociopolítico de las matemáticas.
2. La segunda fase aun en desarrollo de este proyecto pretende avanzar en la comprensión de las lógicas de construcción y reconstrucción del conocimiento matemático formal y la reconfiguración de este conocimiento en un saber escolar situado de acuerdo a las características de las comunidades educativas interculturales donde se desarrolla el profesorado.
3. En otra arista formativa del proyecto, una tesis de pregrado promovió la confrontación de ideas sobre las matemáticas al interior de los cuerpos docentes de las escuelas. A través de una metodología de taller, profesores de todas las asignaturas junto a los profesores de matemáticas, socializaron sobre las matemáticas. Para la confrontación se utilizaron preguntas inductoras sobre la disciplina. De esta experiencia y luego de dar a conocer la Etnomatemática como un programa de investigación y desarrollo de la matemática, los docentes consensuaron áreas de intervención de las matemáticas en consideración de su entorno sociocultural.

Caso 2: Contexto institucional de la investigación en la Región de la Araucanía

El año 2015, bajo financiamiento del Gobierno de Chile y del Banco Mundial en la cobertura del Programa de Mejoramiento de la Calidad de la Educación Terciaria (conocido como MECESUP) del Ministerio de Educación levantado por la Universidad Católica de la Santísima Concepción (UCSC), se genera una consultoría de matemática en contexto mapuche denominada "Modelo de acompañamiento en asignaturas críticas para estudiantes mapuche" que reflejaron el contexto en el que se desarrollaban las actividades educativas de la UCSC en su Sede Cañete. A partir de ello, se definió un plan de trabajo con docentes que levantó prácticas concretas posibles de incluir en el aula a fin de generar mejores oportunidades educativas a los estudiantes mapuches.

Durante el año 2018 el proyecto realizó el seminario denominado "El conocimiento Indígena en el pensamiento matemático" desarrollado en Universidad Católica de Temuco (UCT) y Universidad de Concepción (UdeC). Por otro lado, la Carrera de Pedagogía Media en Matemática de la UCT, se adjudicó dos fondos internos para desarrollar entre los años 2018-2019 sobre "Encuentros Interculturales para la integración del conocimiento cultural y social Mapuche al currículo escolar de matemática" y "Diseño de tareas que integran el conocimiento del currículo escolar de matemática y la identidad cultural y social de los estudiantes de escuelas rurales (multigrado) de la región de la Araucanía". La UCT incorporó el conocimiento mapuche al currículo oficial de las carreras que imparte, reestructurando uno de los cursos de décimo semestre de la Carrera de Pedagogía Media en Matemática, con un foco pertinente a los conocimientos matemáticos del pueblo mapuche. Del mismo modo, se trabaja en un optativo para la institución denominado "Etnomatemática" construido en colaboración entre académicos del Departamento de Ciencias Matemáticas y Físicas y el Departamento de Educación Media de esa universidad.

Participación con la comunidad en contextos educativos

El trabajo en terreno realizado en el marco del proyecto CONICYT-PFCHA y apoyo de FONDAP, inicia en el año 2015 un trabajo con las comunidades de Labranza y Lautaro, en tres establecimientos educativos de enseñanza básica que disponían de más del 80% de su matrícula estudiantes de etnia mapuche. Trabajo realizado con la comunidad local y profesores y educadores tradicionales mapuche, lo cual permitió levantar una metodología de acción en el diseño de tareas matemáticas responsables culturalmente, con sentido y proyección territorial en torno a necesidades y demandas expuestas. El proceso concluyó con la creación de una unidad didáctica en torno al *Püron* (sistema de nudos utilizado para cuantificar dentro del pueblo mapuche), su aplicación y validación con la comunidad ancestral del territorio. Los resultados se enmarcan en la sistematización de objetos y procesos matemáticos emergentes de prácticas socioculturales del mapuche y sus formas de transferir/desarrollar el conocimiento (Huencho, Rojas, & Chandía, en revisión), la unidad didáctica y sus resultados dentro de clases de matemática con responsabilidad a las formas de hacer matemática del mapuche, en donde se avanza hacia la creación de código numéricos, habilidad de comunicar y argumentar y procesos matemáticos vinculados al curriculum que pueden ser tratados con naturalidad para estudiantes de menor edad a la estimada, por ejemplo el tema del reparto no exacto desde el código de registro numérico püron por estudiantes de 6 años (Huencho, Webb, & Rojas, 2017), y finalmente, una forma de planificar clases de matemática con responsabilidad a la comunidad del territorio local, basado en sus demandas, necesidades e intereses (Huencho & Chandía, 2018).

Comentarios finales

Los proyectos, estudios y actividades hasta aquí presentadas, representan una muestra del desarrollo de los últimos años en Chile. Creemos que se hace necesario visibilizar y dar voces a las prácticas docentes de los profesores, construir conocimiento en conjunto y aportar a la generación de saberes utilizando diversas perspectivas metodológicas.

La diversidad que se observa en las formas de saber/hacer por nuestros pueblos indígenas y en contextos humanos diversos, expresan las regularidades observadas en el entorno social o natural en el que vivimos a través de la forma que nos orientamos en el tiempo y en el espacio, de cuantificar, y de establecer relaciones, explicaciones, predicciones, clasificaciones, entre otros. La mirada desde la etnovisión que ofrece la Etnomatematica, conduce hacia una comprensión de las matemáticas como parte de esas maneras de ser saber y vivir.

El estudio de la Etnomatemática nos abre sin duda, un camino necesario de abordar. La lectura de esta compilación, muestra la relevancia que constituye en la comunidad regional la importancia de la compatibilización entre el CMC y el CME. Hay desafíos relacionados con la inserción de esta mirada en el curriculum nacional de la formación inicial docente. Estamos convencidos que las posibilidades de abordar las matemáticas se verían beneficiadas de una formulación de planes y programas propios que considere a la interculturalidad como un diálogo entre culturas con el objeto de aprender a partir de la pluralidad epistemológica de los diversos sistemas de conocimientos que coexisten en una sociedad.

Referencias bibliográficas

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós. Temas de Educación. 236p. ISBN 8449307201

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. D.F. México: Limusa

Gutiérrez, S. Fernández, A. Oliveras, M. (2015) Analizando y seleccionando juegos del mundo para la educación científica y matemática. *Reidocrea*, (22),22-27.

Huencho, A., Rojas, F. & Chandía, E. (en evaluación). Caracterización del desarrollo del conocimiento matemático mapuche en contexto educativo. Manuscrito enviado para publicación.

Huencho, A., Rojas, F. & Webb, A. (2018). Desarrollo de Mejores Oportunidades de Aprendizaje Matemático Intercultural: Proyecciones desde el Pueblo Mapuche. En Treviño, E.; Morawietz, L.; Villalobos, C. y Villalobos, E. (Eds.), *Educación Intercultural en Chile. Experiencia, pueblos y territorios*. (pp. 303-333). Santiago de Chile: Ediciones UC.

Huencho, A., & Chandía, E. (2018). Matemáticas con responsabilidad cultural. El registro de información cuantificable a través del püron. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 82, 7-15.

Ley General de Educación. (2009). Recuperado el 14 de noviembre de 2013, de Biblioteca del Congreso Nacional: http://www.leychile.cl/N?i=1014974&f=2013-04-25&p=.

Manquilef, M. (1914). *Comentarios del pueblo Araucano II La Jimnasia Nacional*. Anales de la Universidad Tomo CXXXIV.

MINEDUC. (1996). Decreto Bilingüe 520. Recuperado el 13 de noviembre de 2013, de Mineduc: http://www.mineduc.cl/usuarios/intercultural/doc/201104071329580.Decreto_bilingue_520.pdf

MINEDUC. (2005). Orientaciones para la contextualización de Planes y Programas para la Educación Intercultural Bilingüe. Ministerio de Educación, División de Educación General. Programa de Educación Intercultural Bilingüe, Santiago.

Panes-Chavarría, Rodrigo, Friz-Carrillo, Miguel, Lazzaro-Salazar, Mariana, & Sanhueza-Henríquez, Susan. (2018). Matemática, cultura y práctica docente: un análisis de creencias y elecciones socioculturales. Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32(61), 570-592. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a13

Peña-Rincón, P. & Blanco-Álvarez, H. (2015). Reflexiones sobre cultura, curriculo y etnomatemáticas. En R. Cortina & K. De la Garza (Comp.), *Educación, Pueblos Indígenas e Interculturalidad en América Latina*. (pp. 213-146). Quito: Ediciones Abya-Yala.

Peña-Rincón, P. & Huencho, A. (2014). El desarrollo de la etnomatemática en Chile: potenciales aportes a la educación matemática. Ponencia presentada en las XVIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Universidad de Santiago.

Reyes-Escobar, M. (2017). Juegos de mesa mapuches en contextos urbanos. III Jornadas de Educación Matemática y I Escuela de invierno en Matemática UCSH, UMCE, UDLA en Santiago Chile

ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: EMPLEO DE ESTUDIOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS EN EL DISEÑO DE EXPERIENCIAS DE AULA

HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS IN MATHEMATICS EDUCATION: USE OF HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL STUDIES IN THE DESIGN OF CLASSROOM EXPERIENCES

Gerardo Cruz-Márquez, Daniela Emmanuele, Fabián W. Romero, Neemias Lemus-Cortez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México). Universidad Nacional de Rosario (Argentina). Universidad de Costa Rica (Costa Rica). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
gerardo.cruz@cinvestav.mx, emmanueledaniela@gmail.com, fabian.romero@ucr.ac.cr, neemias.lemus.c@mail.pucv.com

Resumen
De forma general, la enseñanza actual presenta a las nociones matemáticas como conocimiento acabado, trivializando los procesos epistemológicos involucrados. La historia reconoce que la construcción de estas nociones responde a necesidades humanas y problemas tanto de la matemática como de otras disciplinas. En consecuencia, esta sesión del Grupo se enfocó en reflexionar alrededor del empleo de estudios histórico-epistemológicos en el diseño de experiencias de aula. Para ello, se presentan dos ejemplos: el primero corresponde a una serie de experiencias de aula realizadas con profesores en formación inicial y que fueron construidas a partir de elementos histórico-epistemológicos; el segundo, alude al diseño de una tarea de modelación a partir de una Ingeniería Didáctica fundamentada principalmente en su componente epistemológica. Las reflexiones finales del Grupo enfatizan que los estudios histórico-epistemológicos proveen elementos para el diseño de experiencias con miradas alternativas a la tradición escolar.

Palabras clave: diseño fundamentado, formación inicial docente, geometría proyectiva, distribución normal

Abstract
In general, current teaching presents mathematical notions as finished knowledge, trivializing the epistemological processes involved. History recognizes that the construction of these notions responds to human needs and problems both in mathematics and in other disciplines. Consequently, this session of the Discussion Group focused on thinking about the use of historical-epistemological studies in the design of classroom experiences. With this aim in mind, two examples are presented: the first one corresponds to a series of classroom experiences carried out with initial-training mathematics teachers and which were constructed from a historical-epistemological approach; the second one alludes to the design of a modeling task from a Didactic Engineering, based mainly on its epistemological component. The final reflections of the Group emphasize that historical-epistemological studies provide elements for the design of experiences with alternative views to the school tradition, which favors learning processes.

Key words: informed design, initial teacher training, projective geometry, normal distribution

El Grupo de Discusión de "Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa" pretende —de unos años a la fecha— constituir un colectivo latinoamericano de estudiantes, profesores e investigadores en Matemática Educativa y áreas afines, interesados en reflexionar sobre los fundamentos, métodos, resultados y aplicaciones de los estudios de corte histórico-epistemológico realizados en nuestra disciplina.

Con este propósito en mente, se han elegido diferentes temáticas a abordar para cada edición del Grupo. Por ejemplo, en la edición anterior, realizada en el marco de la XXXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme32), se discutió acerca del *empleo de elementos histórico-epistemológicos en la formación inicial docente* (Cruz-Márquez, Romero y Gavarrete, 2019). En esta edición, se decidió centrar la discusión del Grupo en el rol que la historia de la matemática juega en el aula de clases, más específicamente, en el *empleo de estudios histórico-epistemológicos en el diseño de experiencias de aula*.

El diseño de experiencias de aula a partir de estudios histórico-epistemológicos

El divorcio entre la matemática escolar y su contexto de surgimiento advierte la importancia, no sólo de incluir la historia de la matemática en las aulas —en un sentido anecdótico o como base para el diseño instruccional—, sino también de investigar desde una perspectiva histórico-epistemológica con el fin de enriquecer la fundamentación de las experiencias de aula.

En este sentido, González (2004) menciona que, al estudiar la historia de las matemáticas, se conoce el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades implicadas, los problemas que resolvían, y las necesidades cotidianas que se solventaban. Más aún, Russ, Ransom, Perkins, Arcavi, Barbin, Brown y Fowler (1991) reconocen que, además de identificar asuntos ocultos de conceptos matemáticos, el investigar en la historia de las matemáticas sensibiliza al docente sobre las dificultades que enfrentan sus estudiantes cuando aprenden una noción matemática específica.

Con esto en mente, se pueden rescatar al menos dos funciones de la historia y epistemología de las matemáticas en la Matemática Educativa. La primera alude al papel de la componente histórico-epistemológica en la investigación, en particular para el diseño de situaciones de aula con el propósito de construir un objeto matemático específico o diseños exploratorios para recabar información respecto del desarrollo del pensamiento matemático alrededor de ciertos objetos. La segunda función tiene que ver con el docente, quien podrá –al indagar en la historia– percibir herramientas que le sirvan como elemento para el diseño de sus actividades de aula, identificar algunos de los obstáculos y dificultades que se han presentado alrededor de los conceptos matemáticos desde su surgimiento y estructurar propuestas de solución a las mismas. Es decir, el acercamiento a la historia de las matemáticas concede al docente una visión más amplia de la actividad matemática, mostrándola como una actividad humana incardinada en el contexto sociocultural de cada época (Sierra, 2000).

Así, durante esta edición del Grupo de Discusión, se presentaron dos ejemplos del uso de estudios histórico-epistemológicos para el diseño de experiencias de aula, cada uno de ellos asociado a una de las funciones aludidas. El primer ejemplo corresponde a experiencias de aula en formación inicial docente, el cual parte de la premisa de que una de las debilidades en la formación de profesores en matemáticas es la falta de una formación histórico-epistemológica integral, una instrucción que incluya a la historia de las matemáticas como variable didáctica y no sólo como una mera referencia anecdótica (Vernazza y Emmanuele, 2017, 2018). El segundo ejemplo trata sobre el diseño de una tarea de modelación a partir de una Ingeniería Didáctica fundamentada principalmente en su componente epistemológica y en la consideración de lo cotidiano de una disciplina específica, la medicina; cuya premisa principal radica en que la relación entre lo matemático y el cotidiano favorece la construcción de conocimientos matemáticos con significado a partir de su uso (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019). A continuación, se amplía —por separado— acerca de cada uno de estos dos ejemplos.

El uso de un enfoque histórico-epistemológico para la enseñanza de la Geometría Proyectiva: experiencias en el aula de Profesorado en Matemática

La ciencia es una forma de saber intrínsecamente ligada a condiciones históricas y sociales. El contexto social, económico y cultural de una época y lugar dado, es consecuente con el tipo de ciencia que se hace en esta. Los conceptos matemáticos no surgen en cualquier sociedad, en cualquier época, sino que emergen precisamente bajo el predominio de ciertas cosmovisiones y bajo el estándar de 'verdad' en turno. Por ejemplo, la *Geometría Proyectiva* tiene origen en la necesidad artística del renacimiento, donde el centro estaba puesto en el hombre, el placer terrenal del goce con los sentidos y no en el más allá. De hecho, Durero —un artista alemán— es quien fomenta el estudio de la Geometría Proyectiva con su obra pictórica.

Fundamentación teórica de las actividades

De acuerdo con la propuesta realizada por Félix Klein (1849-1927) en su Programa de Erlangen presentado en 1872, se considera que una geometría es el estudio de los invariantes de un grupo de transformaciones actuando sobre un conjunto; por ello, no nos referiremos más a la geometría, sino a las geometrías. En cada una de las geometrías, se presenta un grupo de transformaciones que actúa sobre un determinado conjunto de puntos considerado como el espacio. Así, desde este enfoque, cada una de las geometrías se basa en el establecimiento de una terna:

i. un conjunto de referencia —el plano o el espacio euclídeo, el plano o el espacio afín, una variedad n-dimensional, el espacio hiperbólico, el espacio proyectivo, por ejemplo—;
ii. un grupo abstracto —el grupo lineal, el grupo de isometrías, el grupo afín, el grupo proyectivo, entre otros— donde cada elemento de este se representa —vía un homomorfismo del grupo abstracto en el grupo de las biyecciones del conjunto elegido, como una transformación en el conjunto—; y
iii. una acción a izquierda —o a derecha— del grupo sobre el conjunto —en general, se considera la acción canónica—.

Por consiguiente, el aprendizaje de las geometrías consiste en poder generar una representación de esta terna de datos que permita estudiar en forma activa las transformaciones correspondientes —euclídeas, afines, hiperbólicas o proyectivas, según de qué geometría se trate—, para lograr dos objetivos principales: a) detectar los invariantes propios de dicha geometría, vale decir, aquello que caracteriza de manera intrínseca a esta; y b) establecer relaciones entre las diferentes estructuras geométricas en términos de subgeometrías y supergeometrías, pues de esta manera es factible relacionar los invariantes en cada una de ellas.

Dependiendo del nivel estructural, se pasa de una geometría más general con menos invariantes —la Geometría Proyectiva, que es la 'geometría de las incidencias', por ejemplo—, a una geometría muy especializada con un número elevado de invariantes —la Geometría Euclídea, que es la 'geometría de los movimientos rígidos', por mencionar sólo una—.
Se persigue responder a cuáles son los esquemas conceptuales epistemológicos puestos en juego por los estudiantes de profesorado, asociados a la evolución histórica de los conceptos proyectividad y razón doble de cuatro puntos. Esto permitirá diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones y los conceptos asociados a la noción de razón doble como invariante proyectivo.

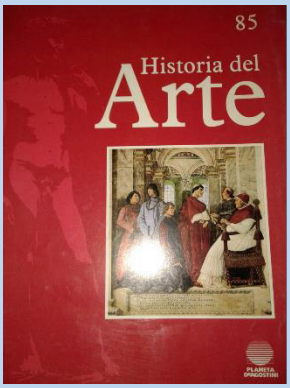
Elementos teórico-metodológicos

Se contemplan y articulan prácticas de referencia, actividades de exploración, desarrollos teóricos, prácticas formales, actividades de investigación y debates, y evaluaciones integradoras.

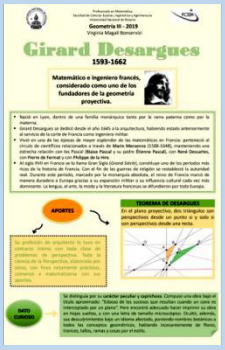
Se denominan *prácticas de referencia* a aquellas que integran un conjunto articulado de actividades desarrolladas por un sujeto o por un grupo cultural con una finalidad específica y bajo una práctica social que norma y regula las mismas (Camacho-Ríos, 2011). En esta propuesta didáctica se incorpora el diseño y recreación en el aula de elementos de una práctica artística, con la que se busca dotar de significado a las actividades planteadas para la enseñanza de la Geometría Proyectiva.

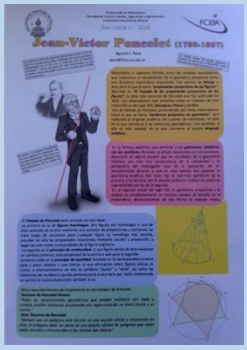
La Tabla 1 ilustra las diferentes etapas de trabajo con los estudiantes de Profesorado en Matemáticas, para proveer una idea general de las actividades realizadas. Sin embargo, con el propósito de destacar el rol de las consideraciones histórico-epistemológicas, nos enfocaremos en algunos elementos de las etapas diagnóstica y prácticas de referencia.

Tabla 1. Etapas del trabajo en el aula de Profesorado en Matemáticas.

Etapa	Descripción
Diagnóstica: Experiencias áulicas.	Se trabajó desde un enfoque histórico-epistemológico, compartiendo distintos tipos de materiales: libros de historia de las matemáticas, revistas de arte y artículos sobre geometría proyectiva. 
Prácticas de referencia	Se llevó al estudiantado al Parque Independencia (año 2018) y al Parque Urquiza (año 2019) —ambos parques de la ciudad de Rosario, Santa Fe, Argentina— y allí realizaron una actividad denominada Pintores Renacentistas, donde los alumnos debían pintar una escena, tomar una fotografía de la misma escena y hacer mediciones en el escenario real.
Actividades varias	Actividades de exploración: Mediante el uso de GeoGebra, los/as estudiantes exploraron propiedades proyectivas de configuraciones geométricas en el

laboratorio de computación, propiedades que posteriormente se desarrollarían en forma teórica.
Clases especiales: También prepararon clases especiales donde debieron actuar en tanto estudiantes (preparando y comprendiendo los temas, resolviendo ejercicios y/o analizando situaciones problemáticas) y en tanto futuros/as docentes (seleccionando material, bibliografía, estrategias didácticas de presentación, recursos didácticos, proponiendo problemas y/o ejercicios).
Confección de pósteres de divulgación: cada estudiante preparó un póster que diera cuenta de la vida y de los aportes significativos de cada uno de los autores seleccionados, entre ellos, Desargues, Poncelet, von Staudt, y otros.





Fuente: Elaboración propia.

La etapa diagnóstica pretende dar luz, a los estudiantes de Profesorado en Matemáticas, sobre la conceptualización de las proyectividades y de la razón doble como invariante fundamental en la Geometría Proyectiva. Luego, durante la etapa prácticas de referencia, en la actividad Pintores Renacentistas, culminan con el cálculo de razones dobles ––a partir de las mediciones realizadas— y cotejan dichas razones dobles con las obtenidas a través de las mediciones hechas sobre la pintura realizada y sobre la fotografía tomada; construyendo la idea de que "cuanto más similares fueran los distintos resultados obtenidos, mejores pintores resultarían", esto atendiendo al invariante fundamental de la Geometría Proyectiva.

Por último, cabe resaltar que este ejemplo se enmarca en un proyecto de investigación que aún se está llevando a cabo. El propósito que se persigue con este tipo de presentaciones didácticas es superar el diseño de una matemática disciplinar aislada, apuntalando el hecho de que el conocimiento matemático se construye a partir de la interacción del individuo y su comunidad con el mundo. Se sostiene que nuestras prácticas docentes deben dotar de significado a los objetos matemáticos —en este caso, geométricos—, favoreciendo la construcción de conocimientos por parte de los estudiantes; más aún, cuando se trata de estudiantes de formación inicial docente.

El identificar el origen de un conocimiento, su evolución y su campo de aplicabilidad, así como el conocer el contexto histórico, político, económico, social, cultural y epistemológico en que dicho conocimiento se origina y el tipo de demanda social que impulsa su conceptualización es fundamental en la formación de Profesores en Matemática. Todos estos saberes fundamentan los contenidos que deben ser enseñados en los distintos niveles educativos y dan respuesta a cuestionamientos que es habitual que planteen los alumnos en el aula, como ser: ¿de dónde sale esto?, ¿para qué nos sirve? Más aún, cuando de estudiantes de Profesorado en Matemática se trata.

Una tarea de modelación construida a partir de un análisis histórico-epistemológico

El análisis histórico epistemológico es importante al momento de realizar intervenciones pedagógicas con miras a que estas propicien el aprendizaje de los objetos matemáticos. En este sentido, se discute acerca de una tarea de modelación que nace desde una ruta epistémica con base en un análisis histórico-epistemológico sobre la Distribución Normal (DNor) (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019) y su funcionalidad en la medicina.

Según Conde (2015), se reconocen dos caminos epistemológicos donde se visualizan aproximaciones de la DNor, definidos por el autor como camino de la probabilidad y camino de la curva de los errores (Gauss, 1857; Placket, 1958; Stahl, 2006), donde se identifican momentos de construcción, significados, usos y tratamientos. El primer camino es reconocido en el currículo chileno (Mineduc, 2017) y da cuenta de que su tratamiento se sustenta en aprender procedimientos y fórmulas para resolver las tareas, soslayando el análisis, la experimentación, el descubrimiento y la construcción del objeto matemático. En cambio, el segundo camino no es utilizado para el desarrollo de la DNor en la escuela, siendo un camino adecuado para analizar datos y promover el uso del objeto matemático.

El análisis histórico-epistemológico realizado, da cuenta de la curva del error como un camino propicio para promover el aprendizaje de la DNor, pues muestra que la DNor surge en el conocimiento humano inherente al error existente en la medición de reiteradas observaciones sobre un mismo fenómeno. En la Figura 1 se muestra cómo evolucionó la curva del error en la DNor, partiendo de los babilonios quienes realizaron las primeras mediciones experimentales de cuerpos celestes considerando la dispersión de los datos (Estepa y Pino, 2013).

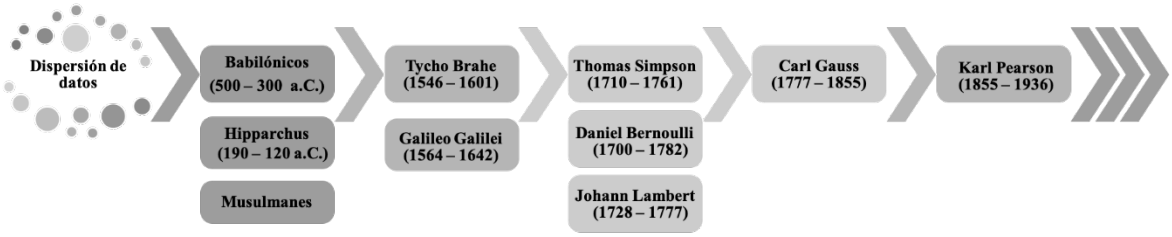


Figura 1. Evolución de la curva del error en la DNor (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019).

Carl Gauss (1777-1855) define el concepto de curva del error, declarando que, en medio de múltiples mediciones experimentales sobre un mismo fenómeno, la media aritmética de todas las mediciones determina el valor más probable y representativo del fenómeno (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019). Años más tardes, Karl Pearson (1855-1936), retoma el concepto de curva del error y acuña el de curva normal (Stahl, 2006).

Luego de tener la base epistemológica, se investigó sobre los alcances de la DNor en lo cotidiano de otras disciplinas, en especial en aquellas que realizan análisis estadísticos, buscando en un grupo de datos la normalidad dentro de la variabilidad de ellos. Este es el caso de la medicina, donde hay múltiples trabajos publicados que hablan de la DNor y la utilidad que presta en todos los análisis de tipo clínico, en la interpretación de la gráfica y cómo se comportan los datos en ella, pues hay trabajos que hablan sobre el nivel de curtosis de los datos, siendo esto un concepto propio de la DNor.

El instrumento médico

Con base en estos dos aspectos —el camino epistemológico y la funcionalidad de la DNor en la medicina—, se decidió utilizar como instrumento al *saturómetro* para realizar la tarea de modelación. El saturómetro es un instrumento médico muy utilizado en los recintos asistenciales de todo el mundo. Este instrumento mide dos tipos

de constantes vitales, la saturación de oxígeno en sangre y la frecuencia cardiaca, donde la curva pletismográfica entregada por el aparato ayuda a realizar una lectura correcta de estas constantes, como muestra la Figura 2.

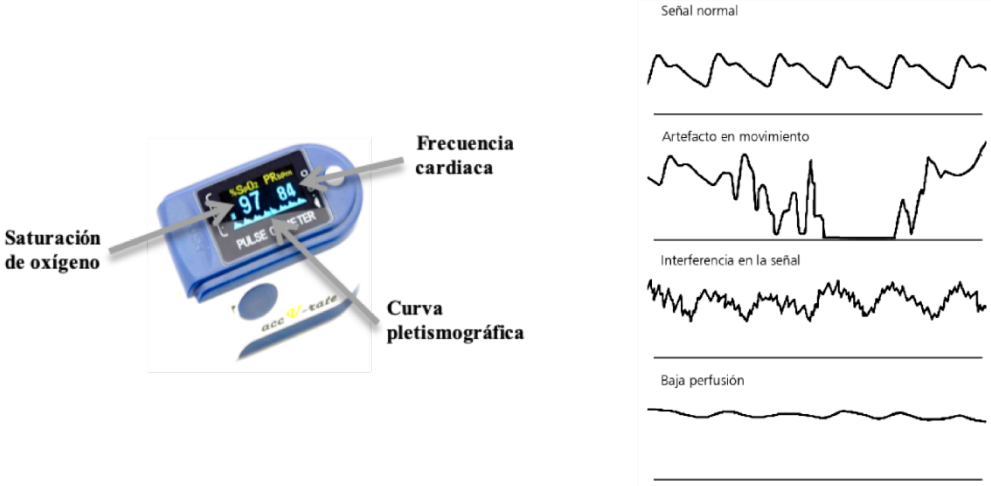


Figura 2. Saturómetro y curva pletismográfica (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019).

La curva pletismográfica permite al usuario determinar el momento exacto para medir la saturación de oxígeno en la sangre, en caso contrario realizará una mala medición y puede producir graves consecuencias al paciente, por las implicancias que tiene la saturación de oxígeno en el torrente sanguíneo y por ende en la salud del paciente.

La tarea de modelación

Teniendo una base histórico-epistemológica, una funcionalidad dentro de una disciplina específica y el instrumento a utilizar, se procede a construir la tarea de modelación. La base histórico-epistemológica ayuda a determinar un camino alternativo para abordar la DNor en el aula. La funcionalidad de la DNor en la medicina nos entrega elementos necesarios para construir la tarea de modelación con base en el ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010), estableciendo la saturación de oxígeno como el mundo real. Además, la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) fue la metodología utilizada para estructurar y articular los elementos para el diseño de la tarea de modelación, así como para implementar y analizar los resultados con base en sus diferentes fases.

La tarea fue construida en dos momentos, uno de organización de los grupos y la misión que debían realizar, como se muestra en la Figura 3. Además, los estudiantes recibieron una tabla para la interpretación de la saturación de oxígeno clínicamente, con el fin de que interpretaran los resultados al analizar los datos recogidos.

TU MISIÓN

Construya la tabla de frecuencia para la saturación de oxígeno y representa con un gráfico de barra.

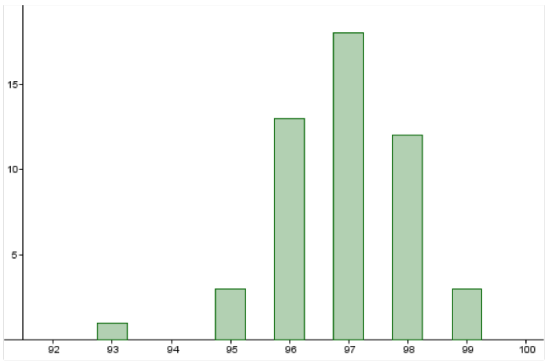
a. ¿Cuál es la saturación de oxígeno referencial del compañero? (Explique su decisión).
b. ¿Cuál es la media de los datos?
c. Si consideramos la representación gráfica, la saturación de oxígeno referencial y la media de los datos. Entonces, ¿Cuál sería la saturación de oxígeno del compañero? y ¿cuál es su interpretación basándose en la tabla 1?
d. A continuación, se entregan los datos de Javiera, compañera del cuarto medio A. ¿Cuál es la saturación de oxígeno de Javiera? Y ¿Cuáles son las diferencias y similitudes, en base a la gráfica, saturación de oxígeno referencial y la media de los datos de Javiera, en comparación con los de su primer compañero?

% Saturación	Acción
>95%	No actuación inmediata
95-90%	Tratamiento inmediato y monitorización de la respuesta al mismo, según ésta, valorar derivación al hospital. Los pacientes con enfermedades respiratoria crónica toleran bien saturaciones en torno a estos valores.
<90%	Enfermo grave. Hipoxia severa. Oxigenoterapia + tratamiento y traslado al Hospital.
<80%	Valorar intubación y ventilación mecánica.

Figura 3. La misión de la tarea de modelación e interpretación clínica de la saturación de oxígeno (Casado y Seco, 2010).

Los estudiantes se organizaron en tres grupos y realizaron la actividad, construyendo sus propias curvas de error con base en el análisis del fenómeno de saturación de oxígeno de tres sujetos de estudio. Cada grupo obtuvo sus 50 datos y los graficaron, pero de ellos observaremos a un grupo y a su sujeto de estudio (G1).

Los elementos visualizados en el análisis histórico-epistemológico, como la curva del error y que el dato más probable para ser el representante del fenómeno viene a ser la media de todos los datos, fueron construidos y calculados por cada grupo. Al mirar sus respuestas, como se observa en la Figura 4, los estudiantes logran evidenciar que el 97 es el valor representativo de saturación de oxígeno en el sujeto de estudio al momento del experimento.



a. 97, porque es el número más frecuente en cuanto a cantidad de apariciones en los datos obtenidos.

b. La media es 97.

c. Basándonos en la tabla se podría decir que predomina el 97, ya que sería la forma normal del individuo y 93 sería el menor valor sacado, por conclusión que esa frecuencia es la que menor vez se ve y dentro de lo normal estaría entre 93 y 97 de frecuencia.

d. En comparación con la tabla anterior observamos que son literalmente iguales y se podría decir que los dos están en un rango de la normalidad que sería 93>97 y podríamos decir que son sanos y hasta con la condición de un deportista.

Figura 4. Respuesta sobre la saturación de oxígeno del sujeto de estudio G1 (Lemus-Cortez y Huincahue, 2019).

El concepto de normalidad que está presente en la DNor es inherente al analizar los datos y en las respuestas de los estudiantes, pues ellos declaran que los datos son normales debido al número representante de la saturación de oxígeno en la sangre y como ese dato se interpreta clínicamente.

Al estar la tarea en el ciclo de modelación de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010), los estudiantes realizan el ciclo de forma natural, pues al tomar los datos del mundo real y analizarlos en el mundo matemático, se produce una conexión entre lo cotidiano y lo matemático; debido a que, al momento de interpretar ese dato resultado del análisis, el dato pierde ese sentido numérico, pues es un dato que tiene un contexto y que tiene un significado en el mundo del sujeto de estudio. Ejemplo de lo anterior, son las respuestas acerca del sujeto de estudio G1, pues los estudiantes realizan la interpretación de los datos y sus explicaciones en el mundo cotidiano de G1, concluyendo que los resultados obtenidos del análisis se deben a que G1 lleva una vida sana y de deporte.

La creación de tareas de modelación con base en el análisis histórico-epistemológico propicia el aprendizaje de los objetos matemáticos, pues se evidencia a la luz de los resultados, que hay un logro en la construcción de una aproximación conceptual de la DNor. Esta construcción ayuda a promover aprendizajes que enlazan lo matemático y lo cotidiano.

Reflexiones finales

En suma, durante esta sesión del Grupo de Discusión de "Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa" se discutió, con base en los ejemplos presentados y los aportes de los asistentes, acerca de los usos que damos a los elementos histórico-epistemológicos, específicamente sobre su empleo en el diseño de experiencias de aula.

Como resultados de dicha discusión, coincidimos en que el enfoque histórico-epistemológico ofrece la posibilidad de estudiar los aspectos que dieron origen a un concepto determinado, mostrando que las matemáticas son el resultado de un proceso en continua evolución, en los cuales se han presentado dificultades y épocas de estancamiento. A la luz de los ejemplos presentados, se considera que este enfoque permite: vislumbrar cómo surgen los objetos matemáticos en su contexto de origen y los problemas que resolvieron (Sierra, 2000); al profesor de matemáticas —en ejercicio o formación inicial— reflexionar y enriquecer su práctica docente (Anacona, 2003); e identificar formas alternativas para promover la construcción de conocimiento matemático en las aulas (González, 2011).

Otras reflexiones —quizá más generales— construidas producto de esta edición del Grupo (Cruz-Márquez, 2019) fueron:

- Es muy importante y necesaria la sistematización y publicación de los resultados de este tipo de experiencias, teniendo un registro detallado (audios, videos, producciones de los participantes, entre otros), con el fin de poder compartirlas con la comunidad de investigadores y educadores.

- Al considerar este tipo de propuestas para el trabajo en el aula, donde los tiempos institucionales son limitados, se presentan ciertos obstáculos pues se percibe una demanda mayor en tiempo y esfuerzo humano para incluir a la historia de la matemática en forma transversal para la construcción de conocimiento matemático. Esto amerita una reflexión más profunda.

- Tener presente que hay distintos usos de la historia de la matemática, el más habitual es un uso anecdótico como elemento motivador para detonar el trabajo en clase. Sin embargo, este no considera la epistemología que es inherente a dicha historia, la que —como muestran los ejemplos— es fuente de elementos importantes para el diseño de situaciones de aula. Vale mencionar que el uso de este enfoque histórico-epistemológico requiere del desarrollo de investigaciones apropiadas, así como de espacios de reflexión y trabajo conjunto entre docentes e investigadores.

Por último, respecto a la organización del Grupo, consideramos que la participación continua de este durante las últimas cuatro ediciones de la Relme da muestra de que el Grupo de Discusión de Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa se está consolidando como un espacio de intercambio, interacción y cooperación para profesores e investigadores —en formación y en ejercicio— de la comunidad latinoamericana. Además, esta edición, nos hizo pensarnos a futuro como un *Proyecto Latinoamericano de Investigación Histórico-Epistemológica en Matemática Educativa*. Sabemos que para esto serán necesarias más acciones por parte de los miembros del Grupo: participación en otros espacios académicos, proyectos conjuntos, redes de colaboración, organización de eventos, por mencionar algunas. La meta parece clara, nos resta construir el camino a través de acciones concretas.

Referencias bibliográficas

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30–46.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 33-59. Bogotá: Una empresa docente.

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal für Mathematik-Didaktik, 31*(1), 99-118.

Camacho-Ríos, A. (2011). Socioepistemología y prácticas sociales. Hacia una enseñanza dinámica del cálculo diferencial. *Revista Iberoamericana de Educación Superior, 2*(3), 152-171.

Casado, M. y Seco, A. (2010). *Técnicas en AP: Pulsioximetría*. La Coruña. España.

Conde, A. (2015). La distribución normal una rápida revisión histórica. *Heurística, 17*, 59-65.

Cruz-Márquez, G., Romero, F. y Gavarrete, M. E. (2019). Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa: Empleo de elementos históricos en la formación inicial docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), 608-615. ISSN: 2448-6469.

Cruz-Márquez, G. [cruzmarquezg]. (2019, 18 de julio). Grupo de Discusión Análisis Histórico-Epistemológico en Matemática Educativa | Relme33 [Archivo de video]. Disponible en https://youtu.be/m5oZnU4O8mk

Estepa, A. y Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 83*, 43-63.

Gauss, C. (1857). *Theory of motion of the heavenly bodies moving about the sun in conic section*. (trans. C. Davis). Boston: Little, Brown and Company (obra original publicada en 1809).

González, M. (2011). Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital. *Epsilon - Revista de Educación Matemática, 28*(77), 83-97.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,* (45), 17-28.

Lemus-Cortez, N. y Huincahue, J. (2019). Distribución Normal: Análisis histórico-epistemológico e implicancias didácticas. *UCMaule,* (56), 9-57.

Mineduc (2017). *Experiencias de aprendizaje: Matemáticas*. Santiago: Maval S.A.

Placket, R. L (1958). The principle of the arithmetic mean. *Biometrika, 45*(1-2), 130-135.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje: Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 12*(1), 45-56.

Russ, S., Ransom, P., Perkins, P., Arcavi, A., Barbin, E., Brown, G., y Fowler, D. (1991). The Experience of History in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 11*(2), 7-16.

Sierra, M. (2000). El Papel de la Historia de la Matemática en la Enseñanza. *Revista Número: Didáctica de las Matemáticas, 43-44*(18), 93-96.

Stahl, S. (2006). The Evolution of the Normal Distribution. *Mathematics Magazine, 79*(2), 96-113.

Vernazza, C. y Emmanuele, D. (2017). Aplicaciones de la Matemática en Carreras de Ingeniería: Una Debilidad en la Formación de Profesores. En N. Cheeín (Coord.), *Libro de Actas del XX Encuentro Nacional y XII Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería* (pp. 259-267). Santiago del Estero: Lucrecia.

Vernazza, C. y Emmanuele, D. (2018). El rol del alumno de Profesorado en Matemática, futuro docente, en las materias disciplinares del campo orientado. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(2), 1748-1755. ISSN: 2448-6469.

CARACTERIZACIÓN DE AMBIENTES Y TAREAS DE MODELACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE DOCENTES DE MATEMÁTICAS

CHARACTERIZING MATHEMATICAL MODELING TASKS AND ENVIROMENTS IN MATHEMATICS TEACHERS' TRAINING

Maritza Méndez Reina, Nelly Yolanda Céspedes Guevara, Iván Darío Flórez Rojano
Universidad Santo Tomás. (Colombia).
maritzamendez@ustadistancia.edu.co, nellycespedes@ustadistancia.edu.co, ivanflorez@ustadistancia.edu.co

Resumen
En el proyecto "Prácticas Sociales y Modelación Matemática: una dicotomía como escenario para la generación de nuevo conocimiento" desarrollado por la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Santo Tomás, tiene como objetivo generar nuevo conocimiento alrededor de la modelación matemática y las prácticas sociales en educación matemática en ambiente formativos con profesores de matemáticas y profesionales de otras disciplinas, se realiza un rastreo de orientaciones sobre la naturaleza de las tareas que promueven prácticas de modelación matemática en ambientes formativos con profesores de matemáticas y profesionales de otras disciplinas. La metodología empleada fue cualitativa y se abordó la construcción y aplicación de una serie de tareas en la asignatura Didáctica del Álgebra a través de la modelización geométrica. Dicha caracterización generó un marco de referencia que orientó el diseño y elección de las tareas considerando su enfoque, los datos, la relación con la realidad, el tipo de modelo, el tipo de representación, la manera como se presentan y las actuaciones de los participantes.

Palabras clave: modelación matemática; educación superior; didáctica

Abstract
The project "Social Practices and Mathematical Modeling: a dichotomy as the scenario for generating new knowledge" developed by the Bachelor's Degree in Mathematics from Santo Tomás University, aims to generate new knowledge related to mathematical modeling and social practices in Mathematics education in training environments with teachers of mathematics and professionals from other disciplines. A search is made for guidelines on the nature of the tasks that promote practices of mathematical modeling in training environments with teachers of mathematics and professionals from other disciplines. The methodology used was qualitative and the construction and application of a series of tasks in the Didactic of Algebra subject was addressed through geometric modeling. This characterization generated a frame of reference that guided the design and choice of tasks considering their approach, the data, the relationship with reality, the type of model, the type of representation, the way they are presented and the actions of the participants

Key words: mathematical modeling, higher education; didactics

Introducción

Este reporte hace parte de la investigación en curso "Prácticas Sociales y Modelación Matemática: una dicotomía como escenario para la generación de nuevo conocimiento" avalado por la Unidad de Investigación de la Universidad Santo Tomás. Este proyecto busca articular las prácticas sociales como posibilidades didácticas y pedagógicas en la educación matemática con escenarios de modelación, con la intención de influir en la construcción del discurso profesional del docente de matemáticas, y el desarrollo de competencias en modelación de futuros profesionales.

Como enfoque de trabajo, la modelación matemática ha evolucionado históricamente, su reflexión inicialmente se acentuaba en el desarrollo de conceptos y nociones matemáticas. Luego se dio lugar a discusiones didácticas alrededor de la construcción de modelos, haciendo un giro hacia el concebirla como una competencia para resolver problemas reales, y a ser complejizada como un proceso cíclico. Estas diversas perspectivas han derivado en investigaciones desde la formación del docente (Manouchehri, 2017) y formación de profesionales de otras áreas (Capace, 2017). Con base en esta pesquisa se delimitó una de las fases del proyecto en el ámbito de trabajo hacia la caracterización de las tareas plausibles que acompañan un proceso de modelación en el aula (Barbosa, 2003; Blum, 2015; Maaß, 2010; Villa, Castrillón y Sánchez, 2017).

Se asume entonces la modelación como un ambiente de aprendizaje asociado con el estudio, la problematización y la investigación de problemas a través de las matemáticas, (Barbosa, 2003). Se espera que estos ambientes no solo les permitan a los profesores de matemáticas y a los profesionales de otras áreas aprender matemáticas o desarrollar habilidades inherentes a ellas; sino que les permita comprender además de manera crítica, situaciones del mundo que los rodea por medio de las matemáticas y que logren vivir experiencias de representación, análisis, y toma decisiones.

A continuación, se presenta un marco referencial relativo a las perspectivas educativas alrededor de la modelación matemática y la caracterización de las tareas a la luz de su enfoque, los datos, la relación con la realidad, el tipo de modelo, el tipo de representación, la manera como se presentan y las actuaciones de los participantes. Luego se muestra a través de un ejemplo, cómo es la naturaleza actual de las tareas propuestas en un espacio académico denominado "Didáctica del álgebra a través de la modelización geométrica" dirigido a la formación inicial de docentes. Para finalmente plantear algunas implicaciones en los escenarios de formación a ser considerados para la implementación de la propuesta.

Marco referencial

Perspectivas de la modelación matemática en educación

De acuerdo con Blum (2015), "Un modelo matemático es una imagen deliberadamente simplificada y formalizada de alguna parte del mundo real. Formalmente hablando: una tripleta (D, M, f) consistente en un dominio D del mundo real, un subconjunto M del mundo matemático y un mapeo de D a M" (p.5). Dentro del mundo de las matemáticas y el "resto del mundo" existiría un ciclo en el cual se realiza la construcción de una situación a modelar basada en un problema o situación real, esta situación se modela en dos contextos: el real y el matemático, en una dinámica que atiende a la simplificación y la estructuración, seguido de un proceso de matematización con el empleo de herramientas, técnicas y conceptos de las matemáticas, que derivan en unos resultados contenidos en el campo de las matemáticas, los cuales se traducirán en unos resultados que puedan ser leídos en el mundo real y puedan contrastarse con la misma realidad; en un ciclo continuo (Figura 1).

Naturalmente, este ciclo de modelado debe verse como un esquema idealizado que no es una imagen del proceso de pensamiento y resolución de problemas de los individuos reales, como ha sido visto en las "rutas de modelado" reales de los estudiantes.

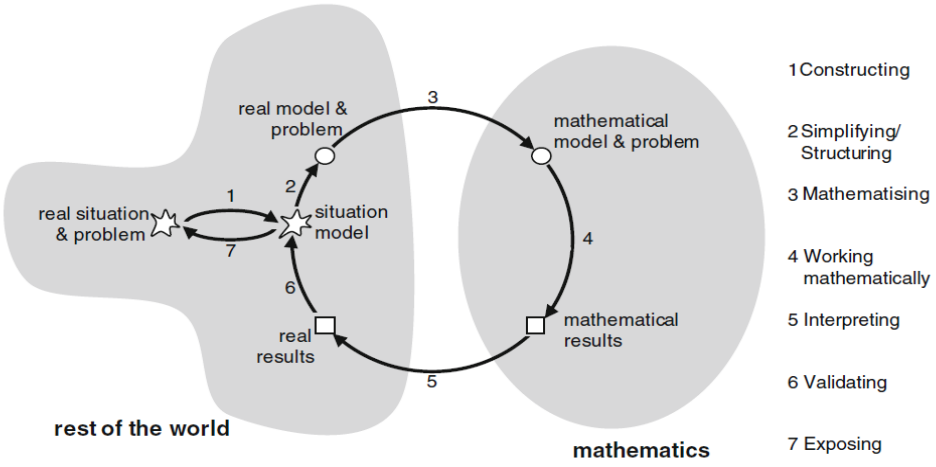


Figura 1. Esquema de los siete pasos seguidos en la modelación
Fuente: Blum (2015)

Para Villa y otros (2017), la modelización o modelación es una herramienta utilizada fundamentalmente por la matemática aplicada, para representar situaciones o fenómenos del "mundo real", que se desarrolla en forma de ciclo y a través de ciertas etapas. En este sentido, el término se asocia con el establecimiento de relaciones entre las matemáticas y el mundo extra matemático, lo cual implica desarrollos de conocimiento provistos de una interpretación y reconocimiento en los esquemas de la formación inicial de profesores de matemática. En la literatura internacional Arrieta y Díaz (2015) proponen que una intervención de este tipo, puede estar enmarcada en los escenarios de la predicción, el diagnóstico o la evaluación; y a su vez la modelación se concibe como una práctica de articulación entre dos entes, el modelo que sirve para interactuar en otro denominado modelado. Por otra parte, Lesh y Caylor (2007) denominan el proceso de modelado sistema; lo que implica que la modelación se convierte en una forma de actuar, diseñar, abordar y pensar en un sistema (en este caso matemático) los elementos que se hacen conscientes de otro sistema (modelado).

De acuerdo con Araujo (2012) los procesos de modelación proporcionan la comprensión critica del mundo a través de las matemáticas, lo que les ofrece a los estudiantes la oportunidad de representar, analizar y tomar decisiones en cualquier situación en contexto y a su vez la modelación se puede comprender como el escenario que propicia procesos de enseñanza y aprendizaje para los profesores en ejercicio y los profesores en formación. De esta forma, la modelación se convierte en indispensable en los procesos de formación de los profesores de matemáticas como un medio o un objeto de construcción del conocimiento matemático, que permita configurar prácticas acordes a los escenarios de aprendizaje y al ámbito escolar donde se plantee dicho escenario.

Considerando el panorama descrito anteriormente, se asume la modelación como un ambiente de aprendizaje asociado con el estudio, la problematización y la investigación de problemas a través de las matemáticas (Barbosa, 2003). Se espera que estos ambientes no solo les permitan a los profesores de matemáticas y a los profesionales de otras áreas aprender matemáticas o desarrollar habilidades inherentes a ellas; sino que les permita comprender además de manera crítica, situaciones del mundo que los rodea por medio de las matemáticas y que logren vivir experiencias de representación, análisis, y toma decisiones.

Ambientes y tareas de modelación matemática

Dado que la intención de este proyecto es caracterizar los procesos de modelación de tareas en ambientes formativos con profesores de matemáticas y profesionales de otras áreas, es necesario planificar ambientes educativos en los cuales la vivencia de la modelación genere esta criticidad. Por ello la elección de las tareas a desarrollar por parte de los estudiantes y docentes participantes en el proceso adquiere un significado importante "como criterios u orientaciones a elegir para orientar el trabajo matemático en el aula" (Villa, Castrillón y Sánchez 2017, p. 3). Por su parte, Maaß (2010) reconoció que existen clasificaciones de las tareas que atienden a criterios como el interés que el estudiante puede prestar en el contexto, el nivel de complejidad, tareas de enseñanza o evaluación, las intenciones didácticas y la naturaleza de la relación con la realidad.

Barbosa (2003) presenta como relevante la participación del profesor y los estudiantes en los esquemas de aprendizaje. Por lo tanto, propone que las tareas de modelación se pueden clasificar en tres tipos. En el primero de ellos, hace referencia a la solución de un problema por parte de los estudiantes siendo presentado por el profesor, el cual muestra la relevancia de datos cualitativos y cuantitativos, en donde simplemente se busca la solución de dicho problema, sin ningún contexto que requiera que los estudiantes realicen algún tipo de pesquisa o cambio de escenario diferente al aula de clase. Por otro lado, el segundo caso, presenta un problema para los estudiantes, quienes deben realizar una serie de procesos fuera del aula que los lleve a encontrar la solución a través de la recolección de datos y otras acciones propias del desarrollo del problema dado. Finalmente, el tercer caso busca el trabajo con proyectos de contextos cotidianos que pueden ser propuestos por el profesor o los estudiantes, en donde se pone en juego el liderazgo y la responsabilidad de los estudiantes en la solución y planteamiento de la ruta de trabajo en la solución del problema.

Desde esta perspectiva, para implementar cambios en la enseñanza diaria y la conceptualización adecuada en matemáticas, Bruder (2009) propone que el esquema de clasificación de las tareas está destinado a:

• Resumir y sistematizar las clasificaciones existentes.
• Proporcionar una visión general válida de la variedad de funciones de la tarea de modelado y, por lo tanto, eviten una selección unilateral de tareas de modelado.
• Apoyar el diseño de tareas de modelado para objetivos específicos y grupos objetivo.
• Nombrar las características de las tareas de modelado de forma cualitativa, como una asignación confiable

Tareas, modelos y modelos relacionados con la realidad

Cuando se afirma el término "tarea relacionada con la realidad" se refiere a todo tipo de aplicaciones de Matemáticas en el mundo real. Modelado se refiere a la resolución de un problema desde el mundo real en oposición a la definición de modelado en PISA (Klieme et al. 2001), que también incluye contextos matemáticos internos (totalmente dentro de las matemáticas y sin conexión con la realidad). Así, en este papel el modelado siempre está relacionado a la realidad, mientras que no todas las tareas relacionadas con la realidad llevan al modelado.

Esquema de clasificación de las tareas de modelado

En este sentido, al proponer un esquema de clasificación de las tareas de modelado se pueden plantear las siguientes preguntas que conducen a la formulación de la estructura de las tareas de modelado:

1. ¿Qué actividades de modelización se deben realizar? ¿En qué actividades se enfoca la tarea? ¿Los estudiantes tienen que llevar a cabo todo un proceso de modelado? ¿O tienen que realizar solo pasos del proceso de modelado?
2. ¿Qué datos se proporcionan? (por ejemplo, ¿hay más datos de los que se necesitan? ¿O menos?;

3. ¿Cuál es la naturaleza de la relación del contexto con la realidad? ¿La pregunta es auténtica? ¿Un contexto artificial?
4. ¿De qué situación se toma el contexto? ¿Personal? ¿Científico?
5. ¿Qué tipo de modelo se utiliza? ¿Un modelo descriptivo o normativo?
6. ¿Qué tipo de representación se elige? ¿Un texto? ¿Una foto? ¿Material?
7. ¿Qué tan abierta es la tarea?
8. ¿Qué marco matemático tiene la tarea?

Las tareas de modelación matemática que se esperan proponer se enmarcan teóricamente desde las características que guiarán el diseño y selección de las mismas (Tabla 1) que responden al enfoque de la actividad, los datos que se plantean o requieren, la naturaleza de la relación con la realidad, el tipo de modelo que atienden, el tipo de representación; a su vez con la manera en que son presentadas (Tabla 2), las actuaciones que los participantes (profesores y estudiantes) ejecutan (Tabla 3), y su carácter para desarrollar competencias en la modelación (Tabla 4).

Tabla 1. Características que guiarán el diseño y selección de tareas

Enfoque de la actividad	Sobre todo el proceso de modelado	Configuración de modelos	Matematización de problemas verbales	Trabajo dentro del modelo matemático	Interpretación de resultados matemáticos	Validación
Datos	Datos faltantes y superfluos		Datos inconsistentes		Datos coincidentes	
Naturaleza de la relación con la realidad	Auténticas		Realistas	Artificiales	Contextos matemáticos internos	
Tipo de modelo	Descriptivo		Normativo			
Tipo de representación	Texto	Tareas que consisten solo en imágenes o fotografías	Materiales como artículos periodísticos, transmisiones de radio, facturas, entre otros			

Fuente: Maaß, (2010)

Tabla 2. Maneras en que son presentadas las tareas

Maneras en que se presentan	Enunciados verbales	Construcción de representaciones	Modelación a través de proyectos	Uso y análisis de modelos

Fuente: Villa, et.al., (2017)

Tabla 3. Clasificación de las tareas según las actuaciones de los participantes

Actuación de los participantes	El profesor presenta un problema relatado con datos cuantitativos y cualitativos, este debe ser resuelto por los estudiantes, para ello no requieren salir del aula.	El profesor plantea una problemática inicial y los estudiantes que enfrentan su resolución, estos deben salir del aula para recolectar los datos y emprender otras acciones.	Se trabajan proyectos desarrollados a partir de temas no matemáticos (propuestos por el profesor o los estudiantes), de tal forma que la responsabilidad y liderazgo del proyecto recae principalmente en los estudiantes.

Fuente: Barbosa (2003)

Tabla 4. Carácter de las tareas para desarrollar competencias en la modelación

Carácter	Práctico	Formativo	Cultural	Psicológico

Fuente: Blum (2015)

Desarrollo de algunos ejemplos

Para el caso de la formación inicial de docentes se presenta el caso del espacio académico denominado "Didáctica del álgebra a través de la modelización geométrica", este hace parte de una de las profundizaciones de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Santo Tomás. En dicho curso, el enfoque de las tareas privilegia la construcción de modelos algebraicos que den cuenta de patrones y regularidades de carácter geométrico, para lo cual se configuran actividades relacionadas con procesos de generalización desde situaciones geométricas que sugieran el trabajo con sucesiones. A continuación, se muestra un ejemplo de tarea propuesta en el espacio académico: Encuentre la regla que relacione simbólicamente los términos y sus resultados

Ejercicio 6. Si dibuja 35 líneas en un pedazo de papel de modo que no haya dos líneas paralelas entre sí y no haya tres líneas secantes, ¿cuántas veces se cruzarán?

Figura 2. Ejemplo tarea propuesta en el espacio académico didáctica del álgebra a través de la modelización de problemas geométricos.
Fuente: Elaboración propia

Considerando la clasificación de las tareas de modelado, la situación propuesta tiene las siguientes características:

- Respecto al enfoque de la actividad, se orienta a un trabajo dentro del modelo matemático en un contexto interno o propio de las matemáticas, pues no tiene relación con la realidad, sin embargo, se espera que el maestro en formación logre trabajar con un modelo matemático para encontrar algunos resultados.
- Con relación a los datos con los que se cuenta, estos son todos explícitos en la situación y son todos ellos necesarios para la solución de la misma.
- Frente a la naturaleza de la relación de la tarea con la realidad, esta sólo incorpora un contexto propio de la matemática, en particular uno geométrico.
- Considerando el tipo de modelo, se privilegia el tipo normativo en función de la necesidad encontrar un resultado particular de un caso posible.
- Los tipos de representación empleados son texto e imágenes.
- La manera como se presenta en la guía de trabajo es a través de enunciados verbales.
- Respecto a la actuación de los participantes, es el profesor a cargo del espacio quien presenta una situación que debe ser resuelta, los estudiantes no requieren hacer una búsqueda de datos, pues cuentan con los necesarios.
- Es de carácter formativo.

En general, se puede notar que la mayoría de los espacios académicos, las tareas propuestas a los estudiantes como situaciones de aprendizaje, presentan una descontextualización de lo cotidiano, de manera tal que el carácter formativo radica en la efectividad de la solución que emitan los estudiantes a la tarea presentada más no en el proceso de modelado ni en el modelo emergente.

Implicaciones

Considerando la perspectiva teórica del proyecto, se inicia por transformar parte de las tareas de los espacios académicos del programa, por ejemplo, para el espacio académico denominado finito e infinito, se diseña una tarea con base en una situación que puede ser referente para muchos de las personas que viven en Colombia y se enfrentan con las problemáticas del tráfico vehicular de las ciudades, de modo que todos los maestros en formación puedan participar y sentirse involucrados al respecto:

Tabla 5. Ejemplo tarea propuesta en el espacio académico finito e infinito

En esta primera tarea se solicita construir un modelo matemático para el flujo vehicular. Ello implica una serie de pasos en los cuales se hace necesario ir desarrollando actividades semana a semana y hacer reporte de los avances permanentemente en los encuentros sincrónicos o en el foro académico de la primera estrategia en caso de que no pueda asistir al encuentro, subiendo un video donde explique sus avances.	
Primera Semana: 1. ¿En qué momento el flujo vehicular se convierte en un problema? ¿Cuándo no lo es? Explique en lo posible con ejemplos reales o hipotéticos. 2. ¿Qué consecuencias o impacto tiene sobre una población cuando es un problema? ¿Qué ventajas tiene realizar un estudio del flujo vehicular? 3. Identifique varios (al menos seis) factores que determinar los cambios en el flujo vehicular. 4. Seleccione de estos factores tres o cuatro que puedan ser determinantes en este análisis, omitir los factores que puedan no ser cruciales en el análisis, e indicar por qué no lo serían. 5. De acuerdo con esos factores defina variables que permitan medir el flujo vehicular. 6. Establecer relaciones cualitativas entre esas variables. Es decir, proponga cómo varían	*Segunda semana:* 1. Seleccione un contexto real donde se pueda realizar un experimento sobre el flujo vehicular. 2. Recoja datos de muestra que permitan identificar relaciones cuantitativas entre las variables obtenidas. 3. Elabore gráficas que muestren las relaciones entre las variables. 4. Seleccionar de estas gráficas cuáles tienen posibilidades de considerarse como funciones. 5. Describir cualitativamente estas funciones, es decir, realizar hipótesis de cuáles podrían ser su dominio y recorrido, mencionar si son crecientes, decrecientes, o combinaciones de ellas, si tienen puntos máximos o mínimos, si son cóncavas hacia arriba o hacia abajo, si tienen algún tipo de simetría, si existen asíntotas al suponer valores muy grandes o muy pequeños, etc. 6. Utilizar Excel para buscar aproximaciones al fenómeno de la medida del flujo vehicular donde se ingresen los datos encontrados en la actividad de recolección. 7. Inspeccionar las gráficas que se presentan en Excel con los datos tabulados, explicar el significado de las mismas en el contexto del flujo vehicular del lugar seleccionado y los análisis que podrían derivarse de ellas.

Tercera semana: 1. Utilizar dentro de las gráficas elaboradas la semana anterior, el de dispersión con líneas suavizadas, y sobre ella incorporar diferentes líneas de tendencia (lineal, exponencial, logarítmico, polinómico de diferente orden – allí se pueden modificar los valores de 2 en adelante) tratando de que se ajusten lo mejor posible a la línea suavizada. Marcar como opción "presentar ecuación en el gráfico" y con ellas realizar las interpretaciones correspondientes del significado de estas expresiones dentro de la situación del tráfico vehicular. 2. Analizar la pertinencia de cada una de estas funciones para ser empleada en el estudio del tráfico vehicular, mediante suposiciones o predicciones de lo que podría ocurrir y reemplazando con valores supuestos para mirar el resultado obtenido. 3. Ver si este modelo para el flujo vehicular es relevante para el problema tratado. Revisar varias opciones encontradas. 4. Seleccionar el modelo que más le parezca conveniente, explicar por qué. 5. Realice el estudio de uno de los documentos de sus compañeros y evalúe la pertinencia del mismo; haga una coevaluación del mismo considerando el impacto o la relevancia de lo propuesto. Formule sugerencias en lo posible.	*Cuarta semana:* 1. Utilizar el modelo seleccionado la anterior semana u otro que considere mejor, de acuerdo con la coevaluación realizada por los compañeros, para analizar una situación en otro contexto diferente. Valorar su aplicabilidad. 2. Realizar un análisis infinitesimal de la función seleccionada tomando diferencias muy pequeñas y calculando los diferenciales correspondientes. Usar esta información para interpretar las variaciones en el flujo vehicular. 3. Representar en otras tablas las variaciones encontradas y analizarlas a la luz de crecimiento o decrecimiento en los cambios del flujo vehicular. 4. De acuerdo con el modelo propuesto obtenga conclusiones de lo que podría suceder en ese sitio frente a cambios en los valores actuales de las variables consideradas para el flujo vehicular. 5. Indague sobre modelos de flujo vehicular existentes en otras fuentes, seleccione uno de ellos y explique las herramientas matemáticas que se usan para utilizar el modelo. 6. Formule varias conclusiones sobre el ejercicio desarrollado.

Fuente: Elaboración propia

El enfoque de las tareas en este espacio académico privilegia la construcción de modelos algebraicos que den cuenta de patrones y regularidades de carácter algebraico, para lo cual se configuran actividades relacionadas con procesos de generalización desde situaciones variacionales que sugieran el trabajo con modelos de flujo vehicular. La actividad propuesta sobre el tráfico vehicular se encuadra dentro del contexto de modelado matemático, es decir, se espera que los docentes en formación configuren un modelo matemático sobre el tráfico vehicular. Podría pensarse que se puede conseguir un ejercicio a modo de proyecto. En este caso el profesor propone una situación inicial y los estudiantes deben problematizarla, identificar las variables esenciales y superfluas, establecer relaciones entre ellas, describirlas en forma cualitativa y cuantitativa, desde donde se espera que construyan el modelo, con base en la recolección de datos, tabulación, sistematización y aplicación de herramientas tecnológicas de modelado matemático, validar diferentes posibles modelos y seleccionar el que más se adecúe a su contexto.

La tarea propuesta puede considerarse de carácter realista pues muestra una situación que resulta problemática para muchas personas, pero podría estar en el contexto de las tareas auténticas que implican además el interés del estudiante en encontrar el modelo y utilizarlo para comprender y dar respuesta al problema, y que implica en algunos casos la autenticidad del problema para una comunidad. Como se espera revisar todo el problema del flujo vehicular, se deben considerar numerosas variables que hacen parte de este como son tiempos, cantidad de vehículos, ancho de las vías, pares, cruces, etc., al ser analizadas en un solo sitio; mientras que, si se piensa en la red de vías, se tendrían que considerar estos aspectos además del flujo entrante en cada nodo.

Como se muestra en el ejemplo anterior, se espera que, a través del reconocimiento de las diversas clasificaciones de las tareas, se articulen parte de las categorizaciones expuestas en correspondencia con los propósitos y los grupos objetivo de la propuesta, para posteriormente determinar en dónde se centra la diferenciación del trabajo con profesores de matemáticas en formación inicial y con profesionales de otras disciplinas revisando oportunidades y limitaciones de cada tipo de tarea.

Un trabajo posterior en el marco de este proyecto de investigación se centra en diferenciar las competencias que deben ser promovidas de manera diversificada de acuerdo al campo de desempeño profesional futuro, esto implica revisar diversas perspectivas sobre el análisis de a nivel epistemológico sobre el cómo y para qué se emplea la modelación matemática en programas de formación de profesores de matemáticas.

Conclusiones

En el desarrollo parcial de la investigación presentada en este documento ilustra la pesquisa realizada por los autores, como esquema inicial de trabajo en la construcción de la caracterización de las tareas propuestas para un curso de profundización desde la perspectiva de la modelación matemática, a partir de la consulta de diversas fuentes académicas que permiten evidenciar la importancia de una buena formulación de situaciones de aprendizaje o tareas para los profesores en formación, las cuales se fundamentan en un ejercicio juicioso y comprensivo, el cual proporciona la construcción de conocimientos formales desde una perspectiva de trabajo cooperativo entre pares y docentes del programa académico.

Por otro lado, se espera que tareas como la presentada en este documento se considere un punto de partida para la generación de cambios al interior del espacio académico y al mismo tiempo, cambios en la forma de enseñanza y aprendizaje de los docentes del programa y los estudiantes que se están formando como docentes.

Referencias bibliográficas

Araujo, J. (2012). Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática. En: Bolema - *Boletim de educação matemática,26* (43), Doi:10.1590/S0103-636X2012000300005

Arrieta, J, Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. En: Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, v. 18, n 1, p. 19-48. Doi: 10.12802/relime.13.1811

Barbosa, J. C. (2003). Modelagem Matemática na sala de aula. En: *Perspectiva*, 27(98), 65-74.

Bressan, A y Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. En: Correo del Maestro. No. 168. 5 -21.

Bruder, R (2009). Eight target structure types of tasks as background for learning surroundings». En: 12th International Congress on Mathematical Education. Seoul, Korea , 143

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. En: Springer, In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education,* 73-96.

Capace, Luis. (2015). *La enseñanza de la matemática en ingeniería.* En Ortiz, José; Iglesias, Martha (Eds.), Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación, 107-119. Maracay, Venezuela: Universidad de Carabobo.

Henn, H y Niss, M, (2010), Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study. (p. 219-224). New York: Springer, 10

Klieme, E., Baumert, J. (2001). Identifying National Cultures of Mathematics Education: Analysis of Cognitive Demands and Differential Item functioning in TIMSS. European Journal of Psychology of Education, XVI, n° 3, 385-402.

Lesh, R, Caylor, B. (2007) Introduction to the special issue: Modeling as application versus

modeling as a way to create mathematics. International Journal of computers for mathematical Learning, v. 12, n. 3, 173-194.

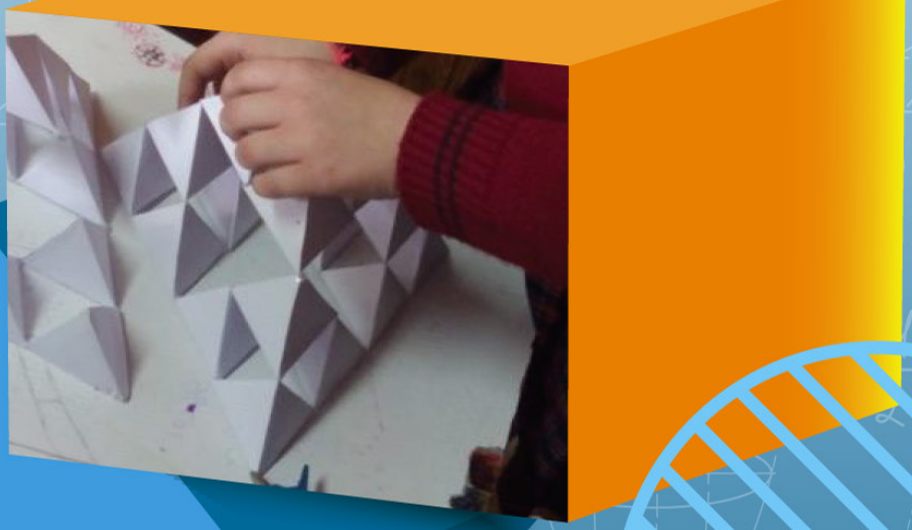
Maaß, K. (2010). Classification scheme for modelling tasks. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 285-311.

Manouchehri, A. (2017). Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. En: Springer. In *Mathematical Modelling and Applications,* 421-432.

Villa, J., Castrillón, A., y Sánchez, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, 18(36), 219-251.

SECCIÓN 3

ASPECTOS SOCIOEPISTEMOLÓGICOS EN EL ANÁLISIS Y EL REDISEÑO DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR



EL NIÑO Y LOS NÚMEROS NATURALES: UN ESTUDIO EN LAS INTERACCIONES DE AULA

THE CHILD AND NATURAL NUMBERS: A STUDY IN CLASSROOM INTERACTIONS

Francisco Emmanuel González Ángeles, Daniela Reyes-Gasperini
Centro de Estudios sobre la Educación de El Colegio de Morelos, Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. (México)
fga_1994@hotmail.com, dreyes@cinvestav.mx

Resumen
El objeto de estudio de esta investigación cualitativa son las interpretaciones que construyeron, comunicaron y desarrollaron 30 estudiantes del 2º grado de primaria sobre los números primaria en situaciones de aprendizaje. Con base en un método etnográfico, tuvo el propósito de identificarlas bajo la perspectiva teórica de la Socioepistemología. En particular, se trabaja con las nociones de empoderamiento docente, discurso matemático escolar plasmado en el currículo y los estudios recientes que aportan al fenómeno de las relaciones didácticas con la aritmética. La observación como técnica y los registros etnográficos como instrumento de investigación permitieron obtener como principales hallazgos algunos patrones caracterizados por ser de tipo: ordinales, cardinal, posicional, funcional, de conteo, de prácticas socialmente compartidas, afectivas y mis concepcionales como interpretaciones imperantes en el aula de la escuela pública estudiada indicando una posible relación entre "desempeño", "interpretaciones infantiles" y "situaciones de aprendizaje" como dispositivo didáctico.

Palabras clave: construcción social, números naturales, primaria

Abstract
The object of study of this qualitative research are the interpretations that were built, communicated and developed by thirty-two second-grade elementary students regarding natural numbers in learning situations. Based on an ethnographic method, it aimed to identify them under a Socio-epistemology theoretical perspective. In particular, we work under the notions of teaching empowerment, school mathematical discourse embodied in the curriculum and recent studies that contribute to the phenomenon of didactic relations with arithmetic. Observation along with ethnographic records were used as research tools that enabled us to obtain as main findings some patterns characterized by being: ordinal, cardinal, positional, and functional types; of counting; of socially shared, affective and misconceptional practices; all as prevailing interpretations in the classroom of the public school involved in the study; indicating a possible relationship between "performance", "child interpretations" and "learning situations" as a teaching device.

Key words: social development, natural numbers, elementary school

Introducción

La presente investigación se realizó con el propósito de identificar y analizar las interpretaciones realizadas sobre los números naturales por estudiantes del 2° grado en la Escuela Primaria "Josefa Ortiz de Domínguez" cuando trabajan y se involucran en situaciones de aprendizaje contextualizadas en un escenario rural de educación formal. Los supuestos que se sostienen refieren, por un lado, a que las prácticas socialmente compartidas favorecen la significación matemática de los números naturales en situaciones de aprendizaje y, por el otro, que las interpretaciones de los estudiantes de segundo de primaria sobre los números naturales brindan elementos didácticos para el diseño de situaciones de aprendizaje basadas en prácticas socialmente compartidas.

La estadística de la prueba nacional PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes) reportó que en el estado de Morelos, México, apenas un 17.9% de estudiantes en sexto de primaria resuelven problemas con números naturales, calcula perímetros irregulares y porcentajes, es decir, adquiere competencias matemáticas en su nivel de dominio más básico según el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE, 2015). No obstante, en el último reporte del INEE (2018), el porcentaje estatal desciende a un 17.1%. Aunado a ello, se observaron los resultados obtenidos del Sistema de Alerta Temprana (SisAT) de la escuela donde se realiza el estudio. Esta se trata de una prueba también nacional, pero aplicada a todos los grados y niveles de la educación básica. En ella se plantea a los estudiantes la resolución de 10 reactivos que refieren a algoritmos de suma, resta e iteración multiplicativa a través del cálculo mental, con un tiempo de resolución para cada uno de 20 segundos máximo, con una segunda oportunidad que incluye el apoyo visual mediante una tarjeta. Los resultados se derivan en tres niveles de desempeño: esperado, en desarrollo y requiere apoyo. Con base en los resultados de la prueba SisAT aplicada a los 30 estudiantes de la escuela focalizada para este estudio, se ubican en el nivel esperado un 46.87%, en desarrollo un 12.5% y un 40.62% que requiere apoyo (porcentaje que en conjunto con el nivel de desarrollo rebasa la media). Los puntajes son un elemento de muestra que señalan una dificultad en el grupo de niños para el uso de estrategias de cálculo mental independientemente de la complejidad de las expresiones numéricas. Se precisa que, de acuerdo a los criterios de desempeño específicos, los estudiantes que se encuentran en un nivel esperado comunican rápidamente sus resultados, mientras que los ubicados en nivel de desarrollo requieren consolidar estrategias de cálculo mental, dificultando la adquisición y uso de los principios del conteo necesarios en la construcción del concepto de número a los que refieren Gelman y Cohen (1978) citados en Noda, Bruno, Aguilar, Moreno, Muñoz y González (2007), tales como el orden estable, la correspondencia y la cardinalidad.

En la literatura revisada los estudios en el nivel primaria que aporten a la comprensión de las interpretaciones relativas a las matemáticas escolares desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento matemático son escasos, motivo por el cual se origina esta investigación.

Revisión bibliográfica

Se reporta un conjunto de estudios recientes que dan cuenta de las manifestaciones relativas a los principios del conteo en los números naturales desde la primera infancia que se aproximan a la construcción del conocimiento matemático tanto en México como en Latinoamérica.

Fernández (2010) en su análisis epistemológico sobre la secuencia numérica advierte su construcción lógica en un contexto ordinal, interesándose por el sistema de relaciones lógicas existente entre sus términos, y omitiendo el significado cardinal de cada uno de ellos. Reportó la acción de conteo como base para que todos los cálculos subsecuentes sean mentales, concretos o de representación gráfica, que demandan el manejo en la secuencia numérica. Esta habilidad, según la psicología infantil, comienza desde etapas muy tempranas que incluso anteceden a la escolarización, es decir, el dominio de la seriación desde una mirada ordinal.

Sus hallazgos determinaron que:

- La secuencia numérica, independientemente de la naturaleza de sus términos, tiene un soporte conceptual ordinal para construirla.
- Las diferentes posiciones epistemológicas ante el número natural condicionan la transmisión escolar de la aritmética, pero en todos los casos la secuencia numérica resulta importante para su aprendizaje.
- Las distintas interpretaciones epistemológicas sobre la secuencia numérica se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela. Así, los planteamientos conjuntistas introducen los conceptos de cardinal y de correspondencia, con lo cual se producen intentos por reducir la aritmética a la lógica y el número natural a las clases, mientras que los planteamientos aritmetistas abogan por el número ordinal (Ashcraft,1982; Brannon, 2002, citados en Fernández, 2010).

En el estudio de Díaz (2009) se analizan los conceptos de noción de número, conteo y subitización recuperando de Gelman y Gallistel la tesis que enuncia que el origen de la noción de número no corresponde a una visión discreta sino analógica, contrario de los estudios sobre los tiempos de reacción en comparación de cantidades, que se llevaron a cabo con sujetos de diferentes especies, que sirvieron de base para postular los efectos de la distancia y del valor numérico. Sobre la adquisición, se debate el origen de la noción de numerosidad entre sí, esta obedece a una herencia filogenética u ontogenética, destacando que:

- Los niños poseen una amplia habilidad en el proceso de enumeración.
- Los chimpancés y las aves también presentan percepción de numerosidad (únicamente visual).
- Los humanos pueden cuantificar también lo audible, además de que en animales la percepción de un número determinado de elementos está limitada, en aves a un máximo de 3 objetos y en primates, de 7.
- Es posible identificar en el niño elementos pre numéricos culturales, dentro de los cuales se menciona el recuento de números pequeños, la subitización de números pequeños y la representación de magnitudes numéricas aproximadas.
- El conteo como fuente para desarrollar la capacidad para comprender los números y no como una mera repetición memorística sin sustento cognitivo.

En la investigación más reciente de Quidel y Sepúlveda (2016) se analiza el valor de uso que tiene el conteo en los habitantes del pueblo mapuche que tienen edades entre los 70 y 80 años. De ellos, tres son hombres y una es mujer; y ninguno posee educación primaria. Entre sus resultados se reporta la apreciación del uso de los múltiplos de 10 y de la multiplicación como actividad práctica con valor de uso para el pueblo mapuche. Se identifica que el pueblo cuenta con un sistema y lógica cultural propia, así el conocimiento que generan obedece a su forma de entender la realidad y a los valores culturales que les son propios. Su conocimiento matemático se caracteriza por la cotidianidad. Asimismo, evidenciaron que el pueblo posee conocimiento matemático, pero en ocasiones ignora que lo posee puesto que lo ha creado con fines prácticos atribuyéndole valor en contextos de uso.

García (2011) en su estudio refiere a niveles intelectuales organizados en arbitrario, concreto, pictórico-simbólico, simbólico no convencional y simbólico convencional. Los aspectos y niveles presentados por el autor, como una caracterización de rasgos generales para la infancia, guardan relación con la evidencia empírica de la investigación que Lerner y Sadovsky (2014) realizaron con niños de ocho años, planteándose la pregunta ¿cómo se aproximan los niños al conocimiento del sistema de numeración?, encontrando que:

- Los niños en esta edad comparan y producen números elaborando criterios propios que les permiten representarlos.
- Elaboran hipótesis en las que explican que cuanto mayor sea la cantidad de cifras mayor es el número.
- Tienden a sumar los dígitos.

- Descubren que la posición de las cifras cumple una función relevante, reconociendo el valor en virtud de la ubicación.
- Manejan la escritura de nudos numéricos: decenas, centenas, unidades de millar y después van ubicando los intervalos.
- En ocasiones cuando reúnen decenas y unidades llegan a interpretar la letra "y" como una representación lingüística que demanda adición.
- Recurren a conocimientos provisionales.

Charlot y Da Silva (2013) en su investigación sobre el sentido de aprender matemática en niños brasileños de una primaria pública metropolitana, reporta lo siguiente:

- Algunos alumnos consideran que hay matemáticas donde hay números.
- Aluden a prácticas sociales de referencia (comprar, vender, cambiar, etc.).
- La importancia que tienen las matemáticas en su formación se expresa mediante la posibilidad de dominar el conocimiento matemático para volverse inteligente, ser alguien en la vida, saber más cosas más adelante.
- Existe un punto de encuentro entre la didáctica, la sociología y el psicoanálisis que se manifiesta cuando un objeto matemático se llega a convertir en objeto de deseo, como cuando el aprendiz se siente inteligente cuando hace matemáticas.
- Los alumnos quieren aprender prácticas sociales usando números[1]

Finalmente, D'Amore (2015) señala que una misconcepción es un concepto errado y por tanto constituye genéricamente un evento de evitar; pero, esta no es vista siempre como una situación del todo negativa: no se excluye que, para poder alcanzar la construcción de un concepto, sea necesario pasar a través de una misconcepción momentánea, en curso de sistematización. El estudiante revela las propias misconcepciones, por ejemplo, cuando aplica correctamente reglas incorrectas.

Desarrollo

Esta investigación sienta sus bases teóricas en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013), ya que permitirá analizar el proceso constructivo de los números naturales, a partir del análisis de las prácticas asociadas a dicho conocimiento. Importan desde esta mirada aquellas acciones que se movilizan a través de actividades y resultan en prácticas socialmente compartidas con acciones como: leer, escribir, comunicar y ordenar números naturales (SEP, 2017).

Entender esto exige replantear la didáctica en términos de su organización operatoria, tal como lo señala Cantoral (2013) y se representa esquemáticamente en la Figura 1.

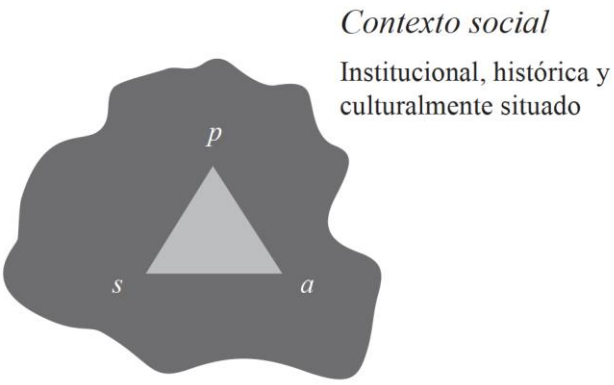


Figura 1. Triángulo didáctico socioepistemológico con base en Cantoral (2013).

El papel que juega el saber como conocimiento en uso cobra sentido en función de situaciones sociales específicas: consensos, usos y prácticas. En la clase de Matemáticas el profesor que demanda explicaciones sobre los cálculos favorece la discusión entre los diferentes métodos propuestos, buscando que los estudiantes defiendan o refuten dichos caminos. La discusión de este tipo generada en el aula posibilita la constitución de lo que Cantoral (2013) señala como conocimientos localmente válidos. Las explicaciones que ofrecen los estudiantes como justificación de alguna respuesta y procedimiento que sale de la regularidad son ejemplo de verdades matemáticas que cobran significado en contextos escolares muy específicos.

Reyes–Gasperini (2016) apunta a la mejora en el aprendizaje y uso de las matemáticas con base en el desarrollo profesional docente a través del empoderamiento, permitiendo así que sea el profesor quien viva la innovación como elemento identitario de su profesión adquiriendo herramientas de gestión áulica para la problematización de la matemática escolar. Esto da la posibilidad de cuestionar para el caso de este estudio las relaciones alumno-alumno, alumno-saber, alumno-contexto. El aporte refiere a la posibilidad que tiene el profesor de problematizar la matemática escolar y, en este caso, contribuir a las relaciones didácticas que establecen los actores educativos con los números naturales en la escuela primaria.

También se recupera del modelo educativo denominado Aprendizajes Clave para la Educación Integral (SEP, 2017) su cuarto y octavo principio que reconocen el contexto sociocultural en las prácticas matemáticas socialmente compartidas. Las principales diferencias entre la propuesta del 2011 y del 2017, pueden notarse en el cuadro 1.

Cuadro 1. La variación de los principios pedagógicos.

	Modelo 2011	**Modelo 2017**
Principios pedagógicos	12 principios 1. Centrar la atención en los estudiantes y sus procesos de aprendizaje 2. Planificar para potenciar el aprendizaje 3. Generar ambientes de aprendizaje 4. Trabajar en colaboración para construir el aprendizaje	14 principios 1. Enfocarse en el proceso de aprendizaje 2. Tener en cuenta los saberes previos del alumno 3. Diseñar situaciones didácticas que propicien el aprendizaje situado 4. Reconocer la naturaleza social del conocimiento 5. Dar un fuerte peso a la motivación intrínseca del estudiante

	5. Poner énfasis en el desarrollo de competencias, el logro de estándares curriculares y aprendizajes esperados 6. Usar material educativo para favorecer el aprendizaje 7. Evaluar para aprender 8. Favorecer la inclusión para atender la diversidad 9. Incorporar temas de relevancia social 10. Renovar el pacto entre el estudiante, el docente, la familia y la escuela 11. Reorientar el liderazgo 12. La tutoría y asesoría académica a la escuela	6. Favorecer la cultura del aprendizaje 7. Ofrecer acompañamiento al aprendizaje 8. Reconocer la existencia y el valor del aprendizaje informal 9. Promover la relación interdisciplinaria 10. Entender la evaluación como un proceso relacionado con la planeación 11. Superar la visión de la disciplina como mero cumplimiento de normas 12. Modelar el aprendizaje 13. Mostrar interés por los intereses del alumno 14. Revalorizar y redefinir la función docente

Elaboración propia.

Es necesario mirar que si bien el modelo 2011 contempla en su noveno principio pedagógico la necesidad de incorporar los temas que cobran importancia social, la diferencia sustantiva se encuentra en la palabra "incorporar" entendiéndola como unir a los contenidos, por ejemplo matemáticos, a aquellos diversos contextos donde también vive la matemática y se usa. No obstante, el modelo 2017, en su cuarto y octavo principio transforma la incorporación en el "reconocimiento" como una forma de "dar el valor que ya tiene", es decir, reconoce el contexto sociocultural en las prácticas matemáticas socialmente compartidas. A nuestro entender, este hecho moviliza la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje como evidencia de un progreso, al menos conceptual.

Método

Se optó por un modelo cualitativo e interpretativo con un diseño microetnográfico tanto por el tamaño de la muestra como por las categorías inducidas en el trabajo de campo para dar cuenta de algunos rasgos culturales y sociales compartidos por los 30 participantes estudiantes del 2º grado de primaria (18 mujeres y 14 hombres) durante el ciclo escolar 2018-2019. La técnica que se utilizó fue la observación de cinco sesiones videograbadas y el registro etnográfico como instrumento para el análisis de los 71 episodios seleccionados de las clases pertenecientes al eje "Número, Álgebra y Variación" que fueron planificadas y ejecutadas por el docente titular en el marco del programa de estudios de matemáticas correspondiente al grado escolar, fungiendo como investigador de su propia práctica.

Análisis de datos y resultados

Una vez realizada la intervención docente por parte del profesor en condiciones reales de trabajo como observador participante, se presentan las interpretaciones más observadas durante el trabajo de campo. El criterio de inclusión se basa en la frecuencia, es decir, considerando la revisión bibliográfica, para el análisis debían estar citados en al menos 3 de los 5 registros etnográficos que emergieron de las clases, conformando las siguientes categorías acompañadas de episodios como descriptores empíricos:

- Interpretaciones ordinales (Dedekind, 1988 citado en Fernández, 2010): se observaron en aquellos diálogos donde la atención se centra en el lugar que ocupa un numeral dentro de una secuencia numérica.

P: Ah, a ver, otra estrategia, podemos escuchar a Betzy ¿quieren escuchar cómo se está organizando este equipo? A ver Betzy ¿qué pasa?
E10: Primero este Ángel y Oliver andan buscando los números en orden y nosotros pegamos.

- Interpretaciones cardinales (Russell, 1982 citado en Fernández, 2010): se observaron en aquellos diálogos donde la atención se centra en la cantidad que conforma un conjunto de elementos.

P: Ok, veamos. Gael decía la decena es el equipo de los 10, de los 20, de los 30, de los 40, de los 50.
E2: De los 60, de los 70.
E18: De los 80, de los 90 y de los 100.

- Interpretaciones posicionales (Lerner y Sadovsky, 2014) se observaron en aquellos diálogos donde el valor posicional adquiere relevancia con base en la posición de las cifras y se manifiesta reconociendo este valor en virtud de la ubicación.

P: A ver, ok, ya ganó Adrián, primer lugar, vamos por el segundo lugar, siguiente número 6, siguiente número 15, ¿qué pasa con el 51? Lo confundimos con cuál.
Es: 15.
P: ¿En qué cambia?
E7: En el 5.
P: Pero ¿por qué cambia en el 5 si también el 15 tiene 5?
E5: Primero tiene que estar el 1 y después 5 para que sea 15.

- Interpretaciones funcionales (Quidel y Sepúlveda, 2016): se observaron en aquellos diálogos donde los conocimientos matemáticos adquirieron fines prácticos a corto, mediano y largo plazo con un valor de uso en contextos específicos como el conteo de animales en su comunidad.

P: Y ¿qué es contar Emiliano?
E3: Es cuando cuentas tus dedos, o lo que tengas.
P: Lo que tengas, ¿por qué?
E14: Es como si estuvieras sumando.
P: ¿Por qué es importante saber contar, Gael?
E15: Más adelante tienes que contar más cosas.
P: Ok.
E20: Es como si estuvieras grande y cuando tengamos un trabajo nos van a dar cosas y tenemos que contar los costales, si lo agarramos de montón no vamos a saber cuánto es.

- Interpretaciones de conteo (Díaz, 2009): se observaron en aquellos diálogos en los que se recurre al conteo como fuente para comprender los números y como estrategia para la comprobación de procedimientos *a priori* de emitir un resultado correcto.

E14: A ver señores, es que no entiendo si lo vamos a hacer acá o en la libreta (le comparte a su equipo la duda).
P: Ahí lo puedes hacer.
E7: Ya casi voy a terminar, maestro.
E14: Voy a contar a ver si estoy de acuerdo.

- Interpretaciones socialmente compartidas (Cantoral, 2013): se observaron en aquellos diálogos en los que las acciones matemáticas constituían un conocimiento construido en colectividad, por ejemplo, contar para realizar actividades cotidianas.

P: ¿Habrá alguna actividad allá afuera de la escuela en la que ocupemos las decenas y las unidades?
E9: Para bailar.
P: ¿Para qué te sirve en el baile?
E22: Para contar los pasos.
P: Muy bien para contar los pasos, ok, ¿para qué otra actividad?
E10: Para jugar.
E23: Para hacer ejercicio.
P: ¿Cómo ocupas esto, Edgar?
E23: Cuando hacemos lagartijas contamos.
E10: Cuando hacemos diez lagartijas hacemos una decena.
E1: Cuando bajamos las escaleras.
P: ¿Por qué?
E5: En mi casa hay muchas escaleras.

- Interpretaciones afectivas (Charlot y Da Silva, 2013; García, 2011): se observaron en aquellos diálogos en los que se manifestaba una actitud hacia las matemáticas.

E5: Podemos hacer más.
P: Ok, un minuto más.
Es: Eeeeeh.
P: ¿Por qué, Saúl?
E14: A mí me gustan las cantidades.
P: Ok, un minuto.

- Interpretaciones misconcepcionales (D'Amore, 2015): se observaron en aquellos diálogos en los que un error temporal intervenía en la actividad matemática desarrollada a manera de momento didáctico necesario que mediante interpretaciones erradas permite construir concepciones más elaboradas y convencionalmente aceptadas.

P: Y, ¿qué característica tiene la centena?
E7: Tiene 100.
P: Tiene 100, sí.
E14: Tiene dos ceros.
P: Tiene dos ceros, ¿qué otra característica?
E12: Tiene 3 números.
P: Tiene 3 números, ¿quién dijo?
Es: Adrián.
P: Adrián, y ¿cuántas unidades caben en el 100?
Es: Una.
E7: 2.
P: ¿Dos unidades en el 100?, a ver les voy a repetir lo que me dijeron que cuando tenemos 3 cifras se forma una centena entonces, ¿cuántas unidades tiene?
E14: 100.
P: ¿Por qué Saúl?
E14: Porque ya cambia.
P: ¿En qué cambia?

E14: En el cero.
E7: En el cero le ponen otro cero.

En los niños participantes de este estudio se observó una progresión lógica en la adquisición de nociones aritméticas: de lo ordinal a lo cardinal, de lo cardinal a lo posicional, de lo posicional a lo funcional pasando por necesarios errores momentáneos, favoreciendo el aprendizaje esperado "Lee, escribe y ordena números naturales hasta el 1000" mediante un equilibrio entre el serialismo (ordinalidad) y el conjuntismo (cardinalidad).

Conclusiones

Se reconoce que las bajas estadísticas reportadas en las pruebas estandarizadas (SisAT) pueden atenderse desde la práctica docente al problematizar la matemática escolar, posibilitando a partir de la intervención docente realizada la detección de aquellas formas de interpretación que hacen los estudiantes sobre los números naturales para ajustar las actuaciones didácticas y así favorecer la disminución en el porcentaje de alumnos que no logran resolver problemas durante y al término de la primaria. Lo que fundamenta nuestro reconocimiento es que los estudiantes participantes en esta investigación obtuvieron mejores resultados en la segunda aplicación de la prueba SisAT, logrando un aumento en la cantidad de estudiantes que se ubicaron en el nivel esperado y en desarrollo, así como una disminución significativa de los que se encontraban en un nivel de requerimiento de apoyo respecto a la primera aplicación evidenciando una relación vehiculizada por las situaciones de aprendizaje entre "desempeño" e "interpretaciones infantiles sobre el número natural".

Así, el proceso de empoderamiento para quien realizó la investigación y vivió este desarrollo profesional, se refleja en la transformación de la propia práctica como proceso de mejora continua, experimentando alternativas al planificar situaciones de aprendizaje matemático al a) considerar las tendencias o avances en el campo de la Matemática Educativa desde una mirada sociocultural, b) involucrar prácticas socialmente compartidas en la intervención docente, c) rediseñar el discurso matemático escolar valorando las argumentaciones y los procedimientos que se pondrán en juego ante ciertos contenidos curriculares, más allá de una mera operatividad e instrumentación curricular.

Finalmente, el haber jugado el rol de profesor-investigador de las propias clases de matemáticas se presentó como un reto que implicó superar la subjetividad comprometida en el análisis de las interpretaciones matemáticas.

Nota:

1. Esta noción de práctica social se recuperó textual de Charlot y Da Silva (2013) no desde la TSME.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Estudios sobre construcción social del conocimiento. Barcelona, España: Gedisa.

Charlot, B. y Da Silva, A. (2013). La relación con la matemática de los alumnos de la escuela primaria. Un estudio con niños brasileños. En Matemáticas en la escuela primaria [II] *Saberes y conocimientos de niños y docentes* (pp.64-66). Buenos Aires: Paidós.

D´Amore, B. (2015). Primeros elementos de la Didáctica de la Matemática. En Tendencias en la educación matemática basada en la investigación (pp.13-15). México: BUAP.

Díaz, R. (2009). Adquisición de la noción de número natural. *Revista Iberoamericana de Educación, OEI 49* (5) p.1-9.

Fernández Escalona, C. (2010). Análisis Epistemológico De La Secuencia Numérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13* (1), 59-87.

García, S. (2011). *Resolución de problemas matemáticos en la escuela primaria: proceso representacional, didáctico y evaluativo*. México: Trillas.

Instituto Nacional de Evaluación de la Educación. (2018). *Puntaje promedio y niveles de logro a nivel estatal en Matemáticas. Primaria*. México, INEE.

Instituto Nacional de Evaluación de la Educación. (2015). *Puntaje promedio y niveles de logro a nivel estatal en Matemáticas. Primaria.* México, INEE.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (2014). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Didáctica de las matemáticas Aportes y reflexiones (pp. 95.131). Buenos Aires: Paidós.

Noda, María Aurelia, & Bruno, Alicia, & Aguilar, Rosa, & Moreno, Lorenzo, & Muñoz, Vanesa, & González, Carina (2007). Un estudio sobre habilidades de conteo en alumnado con síndrome de Down. Educación Matemática, 19(3),31-63.

Piaget. J. (1983). *Introducción a la epistemología genética* (Tomo I, El pensamiento matemático). Buenos Aires: Paidós.

Quidel Catrilaf, G., & Sepúlveda Obreque, K. (2016). El Rakin, conteo mapuche, un conocimiento con valor de uso. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9* (2), 12-32.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. España: Gedisa.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral*. México: SEP.

DISCURSO ESCOLAR INCLUSIVO, UNA PROPUESTA PARA EL AULA DE MATEMÁTICAS

INCLUSIVE SCHOOL DISCOURSE: A PROPOSAL FOR THE MATHEMATICS CLASSROOM

Fredy de la Cruz Urbina, Gabriela Buendía Ábalos
Telebachillerato en Chiapas, Red cimates. (México)
frecu@hotmail.com, buendiag@hotmail.com

Resumen
La investigación propone una articulación entre tres dimensiones: los factores socioculturales comunitarios, la matemática escolar y, el contexto discursivo del aula para favorecer un rediseño del discurso matemático escolar hacia un *discurso escolar inclusivo*. Con esto se espera desarrollar una resignificación situada socioculturalmente del cambio y la variación en jóvenes de bachillerato que, viven en comunidades rurales y con cierto grado de marginación. Este escenario sui géneris y el marco teórico socioepistemológico permite considerar a los factores socioculturales comunitarios pertinentes para su inclusión al discurso escolar. La investigación busca lo inclusivo porque no se impone a la cultura, a lo social, sino que pretende establecer con ellos una base para la significación del conocimiento matemático del cambio y la variación en situaciones escolares.

Palabras clave: discurso, factores socioculturales comunitarios, inclusión

Abstract
The research proposes an articulation between three dimensions: community sociocultural factors, school mathematics and, the classroom discursive context, to favor a redesign of school mathematical discourse towards an *inclusive school discourse*. With this aim in mind, it is expected to develop a socio-culturally-focused resignification of change and the variation in rural communities' high- school youth who live with a certain degree of marginalization. This idiosyncratic scenario and the socio-epistemological theoretical framework allow considering the relevant community sociocultural factors for their inclusion in school discourse. The research seeks the inclusion because it does not prevail over socio-cultural factors, but rather aims to establish, with them, a basis for the signification of mathematical knowledge of change and variation in school settings.

Key words: discourse, community socio-cultural factors, inclusion

Antecedentes

La investigación se desarrolla en el subsistema de Telebachillerato en el estado de Chiapas, México. Es un subsistema educativo que brinda educación media superior a jóvenes que viven en comunidades rurales con cierto grado de marginación (Castillejos, García, Matuz, y Aguilar, 2017). Aunado a estas condiciones particulares, Chiapas tiene una población pluricultural sustentada en sus pueblos originarios que cuentan con una lengua y cultura propia (Constitución Política del Estado Libre y Soberano de Chiapas, 2018). La experiencia docente en diferentes comunidades y escuelas del Telebachillerato en Chiapas ha permitido identificar que las condiciones sociales y culturales de las comunidades trascienden al aula de matemáticas.

De acuerdo con Crespo (2007) el escenario sociocultural del alumnado "influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita, moldeando, de cierta manera sus acciones y pensamientos, condicionándolos sustancialmente" (Crespo, 2007, p. 38). Es decir, el escenario sociocultural influye en el desarrollo de elementos propios en los estudiantes y los caracteriza como parte de una comunidad. En este trabajo, estos elementos socioculturales comunitarios son considerados relevantes para desarrollar escenarios de significación del conocimiento matemático. De allí la propuesta de su inclusión al discurso matemático escolar para que sean base de significación. Esto pretende llamarse *discurso escolar inclusivo*.

Se considera como *factores socioculturales comunitarios* al conjunto de elementos que determinan la identidad de la comunidad. Estos aspectos la hacen única y diferente, tales como: la lengua materna, las actividades comunitarias (estas pueden ser sociales, culturales, productivas, rituales y recreativas), la cosmovisión, el saber ancestral, la gastronomía, el contexto geográfico y natural en el que habitan y conviven los alumnos. Se retoman estos aspectos para desarrollar un discurso escolar inclusivo. El término *inclusivo* se usará en el sentido de considerar lo sociocultural con una perspectiva comunitaria y es relativo al cotidiano de los estudiantes para favorecer un conocimiento socioculturalmente significativo.

Rey-Herrera y Candela (2013) mencionan que "la construcción de los contenidos científicos escolares se vuelve más significativa en la medida en que tenga mayor cantidad de relaciones con las experiencias personales de los participantes del aula" (p. 59). Según las autoras la experiencia personal y extraescolar de maestros y estudiantes juegan un rol importante en la construcción del conocimiento en el aula. Esto reitera la relevancia de los factores socioculturales comunitarios si se asume que estos condicionan y moldean al alumnado.

En suma, nos proponemos presentar al *discurso escolar inclusivo (dei)* como una propuesta para la intervención didáctica en el aula de matemáticas. Por ello planteamos la relevancia de los factores socioculturales comunitarios como base de significación y favorecer un rediseño del discurso matemático escolar hacia dicho discurso escolar inclusivo. Esto busca generar una relación dialógica entre los factores socioculturales comunitarios y la matemática escolar.

El trabajo se enfoca en la matemática del cambio y la variación y en ello, se cuestiona cómo el discurso escolar inclusivo favorece su resignificación. Esto requiere identificar qué elementos socioculturales deben retomarse y cómo deben articularse con el conocimiento matemático, de manera que el alumno como parte de una comunidad participe activamente en su construcción y significación.

Aspectos teóricos

En la Matemática Educativa, el discurso Matemático Escolar (dME) se ha caracterizado como un sistema de razón que norma las matemáticas escolares. El señalamiento que hacen algunos autores es que el dME tradicional resulta hegemónico, suele no considerar el uso del conocimiento matemático e impone significados, procedimientos y

conceptos matemáticos que ocasionan dificultades para significar el conocimiento al carecer de un marco funcional. Por ello, en la búsqueda de un conocimiento matemático escolar que se incorpore de manera funcional a la vida del alumno, el dME debiera considerar los contextos sociales y culturales, las comunidades y las situaciones específicas de donde emerge el conocimiento matemático y no olvidar que los seres humanos pertenecen a una cultura, a una institución, a una sociedad; ellas contribuyen e imponen significados y usos al conocimiento matemático (Cordero Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Buendía (2006) menciona que la Teoría Socioepistemológica considera que el conocimiento matemático se nutre de los aspectos culturales, históricos e institucionales. Con este enfoque teórico el conocimiento se presenta centrado en su *uso* social y su *funcionalidad* asociada en un contexto específico. Por esto la Socioepistemología se propone "identificar aquellas *significaciones* que le son propias al saber y que se diluyen, se transforman o se pierden al configurar un discurso escolar, pero que lo caracterizan como un saber funcional en escenarios específicos" (Montiel y Buendía, 2012, p. 63).

Con este marco se comprende que el paso del saber matemático al aula produce una serie de modificaciones que lo descontextualizan y despersonalizan, causando una pérdida de sentido y significado del conocimiento matemático. No obstante, la Socioepistemología considera que el conocimiento matemático se usa en distintos escenarios de la vida cotidiana y responde a situaciones específicas. Estos contextos favorecen una resignificación situada del conocimiento, donde el significado del conocimiento matemático emerge de la actividad en la que están inmersos y participan los seres humanos. Así, los factores socioculturales comunitarios se consideran elementos fundamentales para su significación y, por ende, pertinentes para su inclusión al discurso escolar.

Como una ilustración de la importancia de los factores socioculturales puede citarse el trabajo de García y Buendía (2017), quienes afirman que la lengua materna es un aspecto clave de la cultura para el discurso escolar. Argumentan que el no tomar en cuenta la lengua nativa de los alumnos y el entorno sociocultural trae dificultades en el aula. Identifican esa dificultad en la comprensión de textos pues al ser fundamental la comprensión para la resolución de problemas, la lengua materna al seno de la cultura se vuelve un elemento fundamental a considerar en varios sentidos. Asimismo, el trabajo de Peña (2016) muestra que "en contextos multiculturales, los enfoques matemáticos socioculturalmente inclusivos contribuyen a profundizar la comprensión de las matemáticas" (p. 11).

Desde otras cosmovisiones, la inclusión tiene que ver con la atención de las diferencias individuales con el objetivo de integrar a cada uno de los estudiantes y lograr su desarrollo académico (López, 2017). Enfatizamos que uno de los aspectos que han sido soslayados total o parcialmente por el dME son los factores socioculturales comunitarios. Por ello la *inclusión educativa* parte de considerar la diversidad de todas las personas para alcanzar la igualdad (de Mattos, 2019). Acorde con esta idea de inclusión, el enfoque socioepistemológico tiene como uno de sus objetivos la *democratización* del aprendizaje (Cantoral, 2013a; Reyes, 2016). Esto alude a que todos los alumnos puedan acceder y desarrollar el conocimiento matemático. De otra manera democratizar el aprendizaje refiere a la igualdad en la posibilidad de aprender para usar el conocimiento (Reyes, 2016).

Con estos fundamentos se comprende que lo inclusivo demanda democratizar el aprendizaje; el matemático, en particular. Según el marco teórico socioepistemológico la democratización precisa de un rediseño del dME que tiene como base la *construcción social del conocimiento matemático* (Cantoral, 2013a; Reyes, 2016). De acuerdo con Cantoral (2001) se entiende por construcción social del conocimiento matemático al conjunto de interacciones, explícitas o implícitas, que se establecen entre los procesos de pensamiento, la epistemología de la matemática y las prácticas humanas. En estos términos nuestra propuesta busca lo *inclusivo*, porque no se impone a la cultura, a lo social, al saber ancestral, sino que pretende establecer con ellos una relación dialógica con el conocimiento matemático escolar para favorecer su resignificación.

Montiel y Buendía (2012) explican que la resignificación es el "proceso continuo de darle significado al saber matemático a través de sus usos" (p. 64). Se considera que los distintos escenarios donde está presente el

conocimiento matemático le dan otra connotación y lo diversifican. La construcción de significados con esta visión socioepistemológica es relativa al escenario y, por tanto, solo son válidos en dicho escenario. Al respecto Zaldívar (2014) expresa:

> La resignificación expresa la función de la práctica social y da evidencia del desarrollo del uso en una situación específica. Así, la resignificación no sería otra cosa que la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional (p. 66).

Como puede apreciarse la resignificación está ligada a los usos del conocimiento matemático en contextos específicos, donde los factores socioculturales tienen un rol fundamental. A la vez, puede entreverse que la resignificación está en una relación dialéctica con la interacción del grupo humano. Esta interacción que se produce en el aula es concebida en este trabajo como *contexto discursivo*. Esto refiere a un espacio de diálogo, donde los alumnos participan, argumentan, refutan y como consecuencia resignifican el conocimiento matemático en juego (García y Buendía, 2017). Rey-Herrera y Candela (2013) señalan que la interacción discursiva entre los alumnos y el profesor es un elemento clave en la construcción social de conocimiento en el aula. Por su parte Reséndiz (2004) afirma: "El discurso matemático en el salón de clases proporciona un escenario al maestro y los alumnos para representar, pensar, hablar, estar de acuerdo y en desacuerdo" (p. 42). En síntesis, se postula que la gestión de un contexto discursivo en el aula con la articulación de los factores socioculturales comunitarios -lo inclusivo- favorece la resignificación del conocimiento matemático del cambio y la variación.

La matemática del cambio y la variación

En la vida cotidiana existen diversas situaciones donde la matemática del cambio y la variación están presentes: el ritmo cardiaco de una persona, el calentamiento de una sustancia, el movimiento de una pelota, la sombra que proyecta un árbol, el crecimiento de una planta; por mencionar algunos ejemplos. Estas situaciones muchas veces el cambio pasa desapercibido, sin embargo, es observable, medible y cuantificable.

En los planes y programas de estudio del bachillerato mexicano la matemática del cambio y la variación se desarrolla específicamente en el cuarto semestre de este nivel educativo en un eje articulador de aprendizaje denominado *Pensamiento y Lenguaje Variacional*, que se ocupa del tratamiento del cambio, la predicción y acumulación con fines predictivos (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017). La matemática del cambio y la variación articula elementos de aritmética, algebra, geometría, trigonometría y geometría analítica con el cálculo diferencial e integral. Se relaciona con conceptos como variable, constante, razón, proporción, función, pendiente, límite, derivada, etc. (Cantoral, 2013b).

En la Matemática Educativa el cambio y la variación enfatiza un tipo de pensamiento que ha sido estudiado desde una visión socioepistemológica. Cantoral (2019) comenta que el estudio del cambio y la variación precisa de una construcción de comparaciones entre estados de un fenómeno. Requiere, además, de unidades de medida y sistemas de referencia. Concretamente, implica contestar las preguntas "¿qué varía?, ¿cómo varía? y ¿por qué varía de esa manera?" (p. 43). Al seno de este marco, se dice que la *predicción* es la práctica social que funge de base y orientación de la matemática del cambio y la variación (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014).

Respecto al sistema de referencia, Caballero (2018) reporta que se conforma por la relación entre *causalidad* y *temporización*. La primera está ligada a las preguntas ¿qué cambia? ¿respecto de qué cambia? y ¿por qué cambia de esa manera? Mientras que, la temporización tiene que ver con analizar estados intermedios en la evolución de un fenómeno. Responde a las preguntas ¿cuánto cambia y cómo cambia? Cantoral (2019) menciona que la matematización del cambio y la variación precisa de *prácticas variacionales*, a saber: "la comparación de estados, su secuenciación, la estimación del comportamiento y finalmente la predicción de una eventual evolución" (p. 57).

Tomando en cuenta estas ideas y a partir de la experiencia docente en el Telebachillerato que llamaremos A, se visualizan ciertas actividades comunitarias que realizan los alumnos chiapanecos como posibles escenarios para significar el cambio y la variación. Una de las actividades que se ha explorado con esta intención es el cultivo de maíz. Principal actividad productiva en la comunidad rural donde se sitúa el Telebachillerato A. Normalmente los estudiantes apoyan a sus padres en las diversas tareas que involucra esta actividad. La experiencia de los alumnos en esta actividad comunitaria se considera relevante para que sea base de significación de la matemática del cambio y la variación.

Hacia una herramienta metodológica para analizar el *dei*

El *dei* procura establecer una articulación entre los factores socioculturales comunitarios en la que están insertos los estudiantes con la matemática escolar en un contexto discursivo. Desde el enfoque socioepistemológico los elementos que posibilitan este diálogo están asociados con la funcionalidad y los usos del conocimiento matemático en contextos específicos. Es decir, las significaciones subyacen de estos contextos, donde los factores socioculturales comunitarios tienen un rol fundamental.

Los contextos específicos se ligan a los factores socioculturales comunitarios. Para la intervención didáctica en el aula se configuran para que sean base de significación conformando un *contexto de significación*. Según Espinoza (2009) "El contexto de significación de cierto conocimiento es el ámbito en el cual cierta persona o colectivo sitúa la significación de cierto conocimiento en cierto escenario sociocultural" (p. 150). El autor menciona que el contexto de significación tiene tres dimensiones: situacional, sociocultural y racional, de estas emerge la significación del conocimiento matemático.

> a) La situacional, que incluye el conjunto de factores o circunstancias a considerar en el contexto (es aquí donde se cuestiona sobre el tamaño); b) La sociocultural, que se refiere a una manera de mirar a la dimensión situacional; y c) La dimensión de la racionalidad, que será un plano paralelo que determinará la "manera de ver" al conocimiento científico relativo a la dimensiones situacional y sociocultural (Espinoza, 2009, p. 161).

A partir de estas dimensiones, se articulan los tres elementos claves de la investigación para conformar un contexto de significación para el *dei*: el contexto discursivo, los factores socioculturales comunitarios y la matemática del cambio y la variación; que corresponden a la dimensión situacional, sociocultural y racional, respectivamente. La intersección que converge de estas dimensiones, consideramos está caracterizada por la resignificación del conocimiento matemático. Esta resignificación permitirá hablar de un *dei* (ver Figura 1).

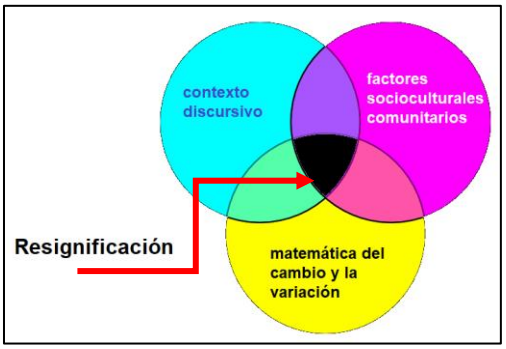


Figura 1: el contexto de significación para favorecer el *dei*

Estas dimensiones pueden caracterizarse por los siguientes indicadores:

discurso escolar inclusivo (dei)		
contexto discursivo	factores socioculturales	cambio y variación
• interacciones acciones relaciones normas y prácticas • discurso palabras, gestos mediadores visuales procedimientos argumentaciones	• lengua materna • actividades comunitarias (pueden ser sociales, culturales, productivas, rituales y recreativas) • cosmovisión • saber ancestral • gastronomía • contexto geográfico y natural	• causalidad ¿qué cambia? ¿respecto de qué cambia? ¿Por qué cambia de esa manera? • temporización ¿cuánto cambia? ¿cómo cambia?
resignificación de la matemática del cambio y la variación		

Cómo puede apreciarse gráficamente en la Figura 1, el *dei* emerge de las articulaciones de estas dimensiones. El *dei* sería entonces la resignificación que subyace del uso del conocimiento matemático establecido por los factores socioculturales comunitarios en un contexto discursivo.

La propuesta didáctica

Partiendo de los factores socioculturales relativos a la actividad comunitaria y el saber ancestral del cultivo de maíz y los elementos epistemológicos del cambio y la variación, se confeccionó un diseño didáctico para desarrollar intencionalmente dicho conocimiento matemático. En términos generales, este diseño trata con el cultivo del maíz. Se estructuró en tres fases, las cuales se describen a continuación:

- Fase 1: reconocer el cambio

En plenaria los alumnos reflexionan y discuten sobre las variables que están presentes en el cultivo de maíz y cómo se relacionan. El tipo de preguntas que se proponen son ¿Cuáles son las tareas o actividades que se desarrollan en el cultivo de maíz? ¿Qué va cambiando en el proceso del cultivo de maíz?

Posteriormente se plantea a los alumnos argumentar sobre cómo cambia durante el proceso. Con base a su experiencia ellos estimarán el crecimiento de la planta para un tiempo de dos semanas. Elaboraran una tabla con estos datos. Se recomienda validar esta información con sus padres o abuelos.

- Fase 2: medir el cambio

Organizados en equipos se pide elaborar un área experimental para modelar el cultivo del maíz en el espacio escolar. Se solicita sembrar cinco plantas con las mismas condiciones iniciales. Aquí se espera que los alumnos usen su experiencia para seleccionar las semillas, el tipo de suelo, controlar la humedad y la profundidad de sembrado, principalmente.

Para estudiar cómo crece el maíz, se elige la variable altura y el tiempo. La manera como crece y se desarrolla la planta de maíz es un indicador para valorar el buen crecimiento de la planta. Los alumnos deberán medir la altura de las plantas periódicamente, organizar los datos en una tabla y realizar mediciones durante diez días. Se sugiere que las mediciones sean periódicas y que se realicen al menos tres veces en el día: en la mañana, al mediodía y en la tarde (en el horario escolar). Es importante que los alumnos aprecien cómo la planta va cambiando y qué está cambiando. Deben tomar nota de estas observaciones en cada medición.

Se recomienda que los alumnos lleven a cabo los cuidados que consideren importantes para el buen estado de las plantas. Estos tienen que ver con el riego, la limpieza y la luz solar que necesitan las plantas, entre otros que crean necesarios. En esta fase se pretende que los alumnos usen su experiencia para desarrollar las diferentes tareas que comprende el cultivo de maíz.

- Fase 3: Cuantificar el cambio

Se pide a los alumnos que a través de los datos registrados observen cómo las plantas van cambiando. En qué días las plantas crecieron más o crecieron menos. Incluso, se les pide averiguar si todas crecieron de la misma manera o que identifiquen qué planta creció más. Se solicita que argumenten a qué se debe estas posibles diferencias. Se sugiere que revisen sus anotaciones en la bitácora.

Posteriormente se solicita que obtengan la representación cartesiana del crecimiento de las plantas. Además, que consideren la estimación que ellos hicieron con base a su experiencia del crecimiento de la planta de maíz. Estas gráficas deben de representarse en un mismo plano cartesiano para poder hacer comparaciones. Se cuestiona, ¿cómo fue el crecimiento con base a lo esperado? ¿qué planta creció más rápido? ¿qué planta creció menos? ¿qué elemento de la gráfica permite hablar sobre estos cambios: más rápido-menos rápido? ¿cómo crece la planta de maíz? ¿qué información interpretan de las gráficas? Por equipos se pide que compartan sus resultados, problemas e inquietudes que se hayan presentado.

Finalmente, se pide a los alumnos que caractericen la gráfica del crecimiento del maíz con base a la experiencia observada en este estudio y que lo confronten con el conocimiento que han aprendido en su comunidad. Como cierre se pide que argumenten las posibles diferencias o similitudes que surjan.

Algunos resultados y comentarios finales

Una primera puesta en escena de la propuesta didáctica permitió reconocer que los alumnos mostraron cómo además de desarrollar interés en la actividad, se va favoreciendo un *dei*. Tomaron en cuenta el conocimiento que los padres de familia tienen sobre el cultivo de maíz para la realización de ciertas tareas. Se reconoció que en el desarrollo de estas tareas implica prácticas como medir, cuantificar y estimar. Por ejemplo, para el sembrado las plantas deben guardar cierta distancia; generalmente usan pasos para medir esta distancia. Cuantifican insumos para determinada área de cultivo. Además, por experiencia, estiman cuál será el crecimiento de la planta dependiendo el tipo de semilla y la temporada de siembra. Con base al crecimiento de la planta valoran la calidad de la planta para asegurar una buena producción.

Algunas evidencias que se obtuvieron en la fase 3 se presenta en la Figura 2. En ella los alumnos identificaron por comparación que no todas las plantas crecieron igual, pero tienen la misma tendencia. Comentan que un buen cultivo se valora por el crecimiento, aunque ellos esperaban que todas las plantas "crecieran parejo" o de la misma manera. Argumentaron que esto puede deberse a la cantidad de nutrientes que tiene el suelo o bien por la humedad, aunque esta última era una variable controlada.

TABLA Y GRAFICA DE MEDICION DE LAS PLANTAS DE MAIZ

PLANTAS	SABADO			DOMINGO			LUNES
	(7:00)	(15:00)	(23:00)	(31:00)	(39:00)	(47:00)	(55:00)
P1	0	2.5	3.5	4.5	5.2	5.3	5.5
P2	0	2.5	3.4	4.1	4.2	5.9	6.4
P3	0	1	1.5	2.5	2.8	3.4	3.6
P4	0	2.5	3.3	4.2	4.4	4.8	5.4
P5	0	1.5	2.2	3	3.8	4	5.1
P6	0	0	0	1.9	2.8	4	5.2
P7	0	3.3	4.2	5.3	6.7	8.8	10.1
P8	0	1.3	2.4	3.1	3.3	4.4	5.3
P9	0	1.6	2.6	3.5	4.6	4.7	5.7
P10	0	2.5	3.3	4.3	5.7	6.7	8.1

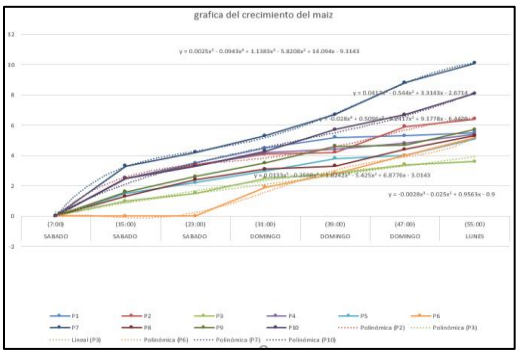


Figura 2: la matematización del cultivo de maíz

Respecto a la pregunta sobre qué elemento de la gráfica permite hablar sobre estos cambios: más rápido-menos rápido, los alumnos percibieron que el elemento *pendiente* está asociado con el crecimiento. Una mayor pendiente indicará un mayor crecimiento, pendientes iguales significa que las plantas crecieron de la misma manera. En cuanto a las preguntas relativas a cómo crece la planta de maíz y qué información interpretan de las gráficas, argumentaron que el maíz no tiene un crecimiento constante, contrario a lo que ellos pensaban, pero siguen un mismo comportamiento como se aprecia en las gráficas.

Con base a estos resultados creemos que la propuesta didáctica del cultivo del maíz contribuye a generar significados del cambio y la variación. Involucra la participación de los alumnos y de los padres de familia, además de considerar el saber ancestral que han desarrollado en esta actividad comunitaria a lo largo de los años.

Respecto al *discurso escolar inclusivo* puede decirse que a diferencia de un dME tradicional, se logra una mayor interacción entre alumnos y profesor con lo comunitario. Se consideran relevantes las argumentaciones que surgen de los alumnos y la validación del conocimiento se hace en consenso confrontándolo con la evidencia empírica de la experimentación, considerando además la experiencia que tienen los alumnos en la actividad comunitaria. Se evidencia que los alumnos con su diversidad tienen un conocimiento funcional que puede enriquecer la matemática escolar y que este resulta más significativo cuando ellos tienen la libertad de expresarlo en el aula de clases.

Es importante mencionar lo trascendente que resulta la problematización del conocimiento matemático de manera tal, que el alumno vincule su experiencia extraescolar y empírica con él y esté así en situación de aprender. Los factores socioculturales comunitarios del alumnado constituyen un saber propio y funcional que resignifica la matemática escolar.

Referencias bibliográficas

Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9(2),* 227–251.

Caballero, M. A. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013a). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. (2013b). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública.

Cantoral, R. (2019). *Caminos del saber. Pensamiento y lenguaje variacional*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7*(3), 91-116.

Castillejos, R. F., García, F.J., Matuz, J. R. y Aguilar, M. G. (2017). Proyecto de intervención para el desarrollo de entornos personales de aprendizaje en zonas rurales del Estado de Chiapas.

Constitución Política del Estado Libre y Soberano de Chiapas. Periódico Oficial No. 353, Tomo III, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, 2 de marzo de 2018.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad.* Barcelona: Gedisa.

Crespo, C. R. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la Socioepistemología.* Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

de Mattos, M. (2019). Consideraciones de los alumnos del curso de Pedagogía de la UNESP FCLAR sobre su formación como profesores en una perspectiva inclusiva. *Revista A&H* (9), 10-25.

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico.* Tesis de maestría. México: Cinvestav.

García, B. y Buendía, G. (2017). La enseñanza de las matemáticas en zonas indígenas: el caso de la modelación-graficación. *Revista Electrónica Sinergias Educativas 1(1),* 9-25.

López, N. (2017). ¿Qué es un aula inclusiva en educación? Recuperado de https://www.ceac.es/blog/que-es-un-aula-inclusiva-en-educacion

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.

Peña, P. A. (2016). *Influencias de una experiencia didáctica intercultural en las creencias matemáticas docentes*. Tesis de doctorado. México: CICATA.

Reséndiz, E. (2004). La variación en las explicaciones de los profesores en situación escolar (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México.

Rey-Herrera, J. y Candela, A. (2013). La construcción discursiva del conocimiento científico en el aula. *Educación y Educadores 16(1),* 41-65.

Reyes, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. Barcelona: Gedisa.

Secretaría de Educación Pública. (2017). *Nuevo currículo de la Educación Media Superior, campo disciplinar de Matemáticas.* Recuperado de: http://www.sems.gob.mx/curriculoems/planes-de-estudio-de-referencia

Zaldívar, J. D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar.* Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios avanzados del IPN. México.

PENSAMIENTO CRÍTICO Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS FUNCIONES REALES EN ESTUDIANTES INGRESANTES A LA UNIVERSIDAD

CRITICAL THINKING AND MEANINGFUL LEARNING OF REAL FUNCTIONS IN STUDENTS ENTERING UNIVERSITY

Diana Ruth Campos Fabian
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (Perú)
pcmadica@upc.edu.pe

Resumen
Aprender cualquier parte de un contenido, es comprender (es decir razonar o pensar a detalle) las conexiones entre las partes de ese contenido. No hay aprendizaje del contenido sin un proceso del pensamiento de calidad. El objetivo del trabajo de investigación fue determinar si hay relación significativa entre el nivel de pensamiento crítico y el aprendizaje de las funciones reales, el cual es un tema fundamental en el primer curso de matemática para estudiantes ingresantes a la universidad. La investigación tiene un enfoque cuantitativo de alcance correlacional con una muestra constituida por 115 estudiantes del primer ciclo de dos universidades de Lima-Perú. Los resultados evidencian que existe una relación entre las dos variables de estudio.

Palabras clave: pensamiento crítico, aprendizaje significativo, funciones reales

Abstract
To learn any part of a content is to understand (i.e.to give reasons for or to think in detail) the connections between the parts of that content. There is no content learning without a quality-thinking process. The aim of this research work was to determine if there is a significant relationship between the level of critical thinking and the learning of real functions, which is a fundamental topic in the first course of mathematics for students entering university. The research has a quantitative approach of correlational scope with a sample of 115 students from the first cycle of two universities in Lima, Peru. The results show that there is a relationship between the two study variables.

Key words: Critical thinking, meaningful learning, real functions

Introducción

En el Perú los estudiantes de 15 años de Educación Básica Regular presentan un bajo rendimiento en el curso de matemática. El informe de programa internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA, por sus siglas en inglés) publicado por el Ministerio de Educación del Perú (MINEDU, 2017) señala que

> alrededor del 66,1% de estudiantes peruanos próximos a finalizar la educación escolar, pueden responder a las preguntas que involucran contextos conocidos, en los que se encuentra toda la información necesaria para dar una respuesta y las preguntas están claramente definidas[…] El 21% de estudiantes logran interpretar y reconocer situaciones que requieren una inferencia directa; también utilizan algoritmos, fórmulas, procedimientos básicos, así como interpretaciones literales de los resultados […] El 9,8% realiza interpretaciones suficientemente sólidas para la construcción de un modelo simple o para seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. (pp.81-82)

Este bajo rendimiento en la etapa escolar se traslada a la educación superior, afectando considerablemente el aprendizaje del primer curso de matemática en el nivel universitario.

Como profesora de matemática de estudiantes del primer ciclo de la Facultad de Negocios de una universidad privada en Lima- Perú observé que mis estudiantes presentan dificultades en la comprensión, interpretación, análisis, reconocimientos de supuestos y argumentación en los problemas planteados de matemática. Estas deficiencias se evidencian con mayor notoriedad cuando se inicia el tema de funciones reales, ya que el aprendizaje de funciones integra varias capacidades como saber resolver ecuaciones, inecuaciones, productos notables, grafica de ecuaciones en el plano, entre otros temas.

Paul y Elder (2005, p.14) señalan que "aprender cualquier parte de un contenido, es comprender (es decir razonar o pensar a detalle) las conexiones entre las partes de ese contenido. No hay aprendizaje del contenido sin el proceso del pensamiento". Pero, "gran parte de nuestro pensamiento puede ser arbitrario, distorsionado, parcializado, desinformado o prejuiciado afectando nuestra calidad de vida" (Paul y Elder,2003, p.4).

Entonces surgen algunas preguntas ¿cómo nuestro pensamiento mejora nuestra calidad de vida? y concretamente ¿un pensamiento de calidad conduce a mejorar el aprendizaje de matemática? Una posible respuesta a estas preguntas es el pensamiento crítico, el cual es considerado un pensamiento ce calidad.

El pensamiento crítico es aquel que nos lleva a razonar y reflexionar al momento de tomar decisiones y resolver problemas. En educación superior, los estudiantes se enfrentan a situaciones, tareas o problemas académicos cognitivamente demandantes que involucran lectura analítica, análisis reflexivo y organización de ideas complejas, por lo cual es necesario mejorar las habilidades analíticas y críticas. "Una persona que logra utilizar su habilidad de pensar críticamente puede poner los hechos en contexto, interpretarlos, darles significado y trascendencia" (Flores, 2016, p.132). Además, prepara al estudiante para conocer, transformar y aplicar conocimientos (Betancourth, Insuasti y Riascos,2012).

Por lo tanto, es posible establecer un vínculo o relación entre el pensamiento crítico y el aprendizaje de una de las materias que más les cuesta aprender a los estudiantes, la matemática. En particular, en un tema fundamental en esta materia, las funciones reales de variable real, las cuales "permiten modelar y resolver problemas que se presentan en las ciencias, los negocios y la vida real"(Roumieu, 2014, p.3)

La investigación tiene como objetivo demostrar si un mayor desarrollo del pensamiento crítico se corresponde con un mayor nivel de aprendizaje de las funciones reales. Para lo cual se planteó la siguiente hipótesis: *A mayor nivel de pensamiento crítico en estudiantes ingresantes a la universidad, mejor aprendizaje significativo de funciones*

reales. Además, se dará a conocer el nivel de pensamiento crítico de los estudiantes ingresantes a la universidad y el nivel de aprendizaje en el tema de funciones reales.

Marco teórico

Es cierto que pensar es inherente a cada persona, pero el pensamiento es diverso debido a diferentes factores como: saberes previos, idiosincrasia, cultura, educación, sentimientos, procesos fisiológicos, edad, entre otros. Villarini (2003, p. 38) señala que el pensamiento puede ser automático, cuando actuamos "sin pensarlo mucho". Otras veces es sistemático cuando "nos detenemos a pensar" y usamos todos los recursos intelectuales a nuestro alcance (los conceptos, destrezas y actitudes) para crear nuevas respuestas a las situaciones. Pero, "cuando nos dedicamos a examinar nuestra propia actividad y proceso de pensamiento. Podemos entonces someter a análisis y evaluación nuestras operaciones, conceptos, actitudes y su relación con las realidades que ellos pretenden expresar" esto alude a pensamiento crítico.

En la Tabla 1 se muestra la conceptualización por parte de los más destacados autores en pensamiento crítico.

Tabla 1. Conceptualización del pensamiento crítico.

Paul y Elder (2003, p.4)	Es el modo de pensar de cualquier tema, contenido o problema en el cual el pensante mejora la calidad de su pensamiento al apoderarse de las estructuras inherentes del acto de pensar y al someterlas a estándares intelectuales
Facione (2007, p.21)	Es el juicio auto regulado y con propósito que da como resultado interpretación, análisis, evaluación e inferencia, como también la explicación de las consideraciones de evidencia, conceptuales, metodológicas, criteriológicas o contextuales en las cuales se basa ese juicio
Saiz y Rivas (2008, p.3)	La consideran como el proceso de búsqueda de conocimiento, a través de las habilidades de razonamiento, solución de problemas y toma de decisiones, que nos permite lograr los resultados deseados
Ennis (2011, p.1)	La define como un pensamiento reflexivo y razonado centrado en decidir qué hacer o que creer

Fuente: Elaboración propia

En esta investigación se consideró como marco teórico la concepción de pensamiento crítico de Goodwin Watson y Robert Glaser (1980) quienes definieron el pensamiento crítico como

> la composición de actitudes, conocimientos y habilidades. Esta composición incluye (1) actitudes de investigación que implican capacidad para reconocer problemas y necesidad de prueba en sustento de lo que se afirma como verdadero, (2) conocimiento de la naturaleza de inferencias válidas, abstracciones y generalizaciones en los que la exactitud de la evidencia de diverso tipo se determina

> de manera lógica y (3) habilidades para hacer uso de las actitudes y el conocimiento mencionados en los dos puntos anteriores (p.1)

Watson y Glaser analizaron el pensamiento crítico en función de cinco dimensiones: Inferencia, reconocimiento de supuestos, deducción, interpretación y evaluación de argumentos.

1. *Inferencia*, definida como conclusión que puede extraerse de hechos observados o supuestos, evalúa la discriminación de los grados de validez de inferencias inmediatas
2. *Reconocimiento de supuestos* o enunciados implícitos en las aserciones proporcionadas.
3. *Deducción,* determinación de la atingencia lógica de conclusiones a partir de las premisas dadas;
4. *Interpretación*, ponderación de la evidencia para juzgar si las generalizaciones propuestas se siguen de los datos más allá de una duda razonable. El test permite determinar si las conclusiones se siguen necesariamente de la información proporcionada.
5. Evaluación de argumentos, distinción de argumentos en "fuertes" o "débiles" en función de su relevancia para el asunto en discusión

Se eligió esta concepción porque la sinergia de actitud, conocimiento y habilidades es necesaria para el mejor aprendizaje de la matemática en particular de funciones reales. Además, Watson y Glaser crearon un instrumento que permite evaluar las cinco dimensiones de pensamiento crítico en estudiantes universitarios y adultos.

La otra variable de la investigación es el aprendizaje significativo de funciones reales. Para ello recordamos la teoría de aprendizaje significativo de Ausbel, quien es uno de los grandes referentes del constructivismo. Barriga y Hernández (2010) señala de acuerdo con Ausubel que el aprendizaje es significativo cuando los nuevos contenidos son relacionados con las experiencias previas del estudiante, es decir con ideas del mundo que lo rodea. Esto también se aplica en el aprendizaje de matemática.

Ausubel propone dos tipos de aprendizaje, según el modo como se adquiere el aprendizaje (ver la Tabla 2) y según la forma como se incorpora el conocimiento en la estructura del aprendizaje (ver la Tabla 3).

Tabla 2. Comparación entre las formas de adquirir el aprendizaje

Recepción	Descubrimiento
Se presenta el contenido a aprender	El contenido no se da, el estudiante debe descubrirlo
El estudiante debe procesar la información para transformarse en conocimiento	Los estudiantes forman los conceptos en el proceso de solución de problemas
No es memorización de información	Es significativo y repetitivo
Útil en campos avanzados del conocimiento	Útil en campos del conocimiento donde no hay respuestas unívocas
Ejemplo. Se pide al estudiante que estudie conversión de unidades	Ejemplo: El estudiante a partir de actividades reales encuentra la forma de realizar las conversiones.

Fuente: Barriga y Hernández (2010, p. 30)

Tabla 3. Formas de incorporar el conocimiento a la estructura del aprendizaje

Significativo	Repetitivo
La información nueva se relaciona con la ya existente	Las relaciones de dan en forma arbitraria, al pie de la letra
El estudiante debe tener una actitud favorable para extraer el significado	La actitud del estudiante es la memorización de la información
El estudiante tiene los conocimientos previos de anclaje necesarios	El estudiante no tiene los conocimientos previos pertinentes
El estudiante puede construir una red conceptual	El estudiante construye una base de información factual.
Puede promoverse mediante estrategias apropiadas	Aprendizaje mecánico de símbolos y algoritmos.

Fuente: Barriga y Hernández (2010, p. 30)

Anderson y Krathwohl (2001) citado en González (2014) realizaron en 1999 una revisión a la taxonomía de Bloom, la cual describía lo que los educadores esperaban que sus estudiantes aprendan. Ellos publicaron una versión actualizada de la taxonomía de Bloom en la cual señalan que el conocimiento es el resultado del aprendizaje. Y el conocimiento corresponde al *saber qué y consta de cuatro categorías:*

1. El conocimiento factual que contempla pequeñas cantidades de información, como vocabulario y conocimiento referente a detalles específicos.
2. El conocimiento conceptual comprende los sistemas de información como clasificaciones y categorías.
3. El conocimiento procedimental abarca algoritmos, heurísticas técnicas y métodos.
4. El conocimiento metacognitivo se refiere al conocimiento de los procesos de pensamiento (González, 2014, p.25)

Los procesos de pensamiento de la taxonomía revisada de Bloom comprenden seis destrezas, como la versión original. Ellas son, de las más simples a las más complejas: recordar, comprender, aplicar, analizar, evaluar y crear. En el tema de funciones reales, y seguramente en otros temas también, podemos seguir esta secuencia de destrezas, desarrollándolas de menos a más definiendo previamente hasta donde queremos llegar.

Ahora veamos ¿qué es saber matemática? Para ello recordemos la afirmación de Godino, Batanero y Font (2003, p.66) "la persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido"
Además, afirman que a matemática tiene un lenguaje y esta tiene doble función.

> *Representacional*: nos permite designar objetos abstractos que no podemos percibir.
> *Instrumental*: como herramienta para hacer el trabajo matemático. El valor instrumental puede ser muy diferente según se trate de palabras, símbolos, o gráficas. En consecuencia, el estudio de los diversos sistemas de representación para un mismo contenido matemático es necesario para la comprensión global del mismo (p.39-40)

Por su parte Duval (2004, p. 14) señala que "el aprendizaje de los objetos matemáticos debe darse en diferentes representaciones. No se puede comprender matemática sino se distingue entre el objeto y su representación". Se entiende por objeto a los números, funciones, ecuaciones, rectas, etc…y por representaciones los símbolos, las gráficas, las escrituras fraccionarias o decimales, etc…. "Un mismo objeto puede presentarse a través de diferentes representaciones. El objeto representado es el que importa y no sus diversas representaciones semióticas" (p.14)

Metodología

La investigación se inscribe en un enfoque cuantitativo, sustantivo, de alcance correlacional. Hernández, Fernández y Baptista (2014, p. 93) y Bernal (2015, p.147) señalan que una investigación tiene alcance correlacional cuando "tiene como finalidad conocer la relación o grado de asociación que existe entre dos o más variables de una muestra. Se examina asociaciones, pero no relaciones causales" Las investigaciones correlacionales tiene como fuente de información la base de datos.

Tiene un diseño no experimental, transeccional correlacional según afirma Hernández, Fernández y Baptista (2014, p.154) es no experimental porque "no se genera ninguna situación, sino que se observan situaciones ya existentes, no provocadas intencionalmente en la investigación". Es de tipo transversal correlacional porque "se recolectan datos en un solo momento, su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado"

La investigación se realizó con dos grupos de estudiantes un grupo de la universidad privada y otro de una universidad nacional. De la universidad privada fueron 52 estudiantes matriculados en el curso de Fundamentos del Cálculo de la Facultad de Negocios y de una universidad Nacional 63 estudiantes matriculados en el curso de matemática aplicada a las Ciencias Sociales y Humanas de diferentes facultades. En total fueron 115 estudiantes.

Para la recolección de datos de la variable pensamiento crítico se utilizó la técnica de la encuesta y el instrumento fue el *test* adaptado de Watson y Glaser, Forma A. por Chalupa (2006) el cual tiene una confiabilidad de 0,82 según el *alpha* de Cronbach. La Prueba tiene 66 items de opción múltiple, cerradas y cinco dimensiones (ver la Tabla 4) Esta prueba se aplicó en 45 minutos al inicio de clases.

Tabla 4. Escalas de la variable pensamiento crítico y de sus dimensiones.

Dimensiones	Indicadores	Items	Valoración por dimensión	Valoración por variable
Inferencia	Evalúa, deduce y concluye en forma correcta	1-16	Deficiente: 0- 5 Bajo: 6-11 Bueno: 12-16	Deficiente: 0- 22 Bajo: 23-44 Bueno: 45-66
Reconocimiento de Supuestos	Distingue y reconoce en forma correcta	17-29	Deficiente: 0- 4 Bajo: 5-9 Bueno: 10-13	
Deducción	Relaciona y determina en forma correcta	30-42	Deficiente: 0- 4 Bajo: 5-9 Bueno: 10-13	

Interpretación	Valora, discrimina y juzga en forma correcta	43-54	Deficiente: 0- 4 Bajo: 5-9 Bueno: 10-13	
Evaluación de Argumentos	Diferencia y clasifica en forma correcta	55-66	Deficiente: 0- 4 Bajo: 5- 8 Bueno: 9 - 12	

Fuente. Elaboración propia

La aplicación de este test fue para conocer el nivel de pensamiento crítico de los estudiantes ingresantes a una universidad. Es una manera de evaluar el nivel de pensamiento crítico desarrollado en la etapa escolar previa a la enseñanza universitaria.

Para la variable aprendizaje de funciones se elaboró una prueba de 6 preguntas con opciones múltiples. En la elaboración de la prueba se tomaron en cuenta las primeras cinco destrezas de los procesos cognitivos de Anderson y Krathwohl (2001). Se revisaron los contenidos comunes del tema de funciones de los sílabos del curso de matemática en cada universidad. Las preguntas fueron elaboradas en diferentes registros de representación: Figural, algebraico y gráfico (ver Figura 1). Posteriormente se elaboraron los *ítems* se establecieron categorías y las escalas de medición

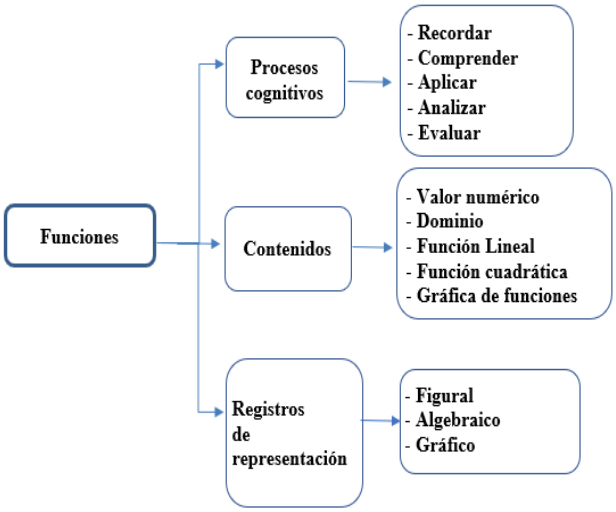


Figura 1. Estructura de las preguntas de aprendizaje de las funciones.

La prueba fue validada por tres doctores expertos en el área de matemática y metodología de la investigación, quienes consideraron apropiado el instrumento de evaluación. Se destinaron 15 minutos para aplicación de la prueba, la cual se aplicó después de 10 semanas de iniciada las clases, en ese momento en ambas universidades se había enseñado el tema de funciones. En la Tabla 5 se presentan los baremos, indicadores y valoración de cada pregunta del test y en la Figura 2 se muestra una de las preguntas de la prueba de aprendizaje.

Tabla 5. Escalas y baremos de la variable aprendizaje de funciones

Variable	Indicadores	Ítem	Valoración
Aprendizaje de funciones	Relaciona la regla de correspondencia con la gráfica	1	Deficiente: 0- 2 Bajo: 3-4 Bueno: 5-6
	Identifica el valor numérico a partir de la gráfica de una función	2	
	Interpreta el significado de un punto en una gráfica	3	
	Determina la relación entre dos variables	4	
	Analiza la veracidad de las proposiciones respecto al dominio de funciones	5	
	Evalúa afirmaciones y selecciona una respuesta en base a la teoría de funciones cuadráticas	6	

Fuente. Elaboración propia

3. El siguiente gráfico ilustra la trayectoria de un balón de fútbol. Durante su ascenso, ¿Después de cuántos segundos alcanzó una altura de 7,5 m?

a. 5 s
b. 10s
c. 30 s
d. 35 s

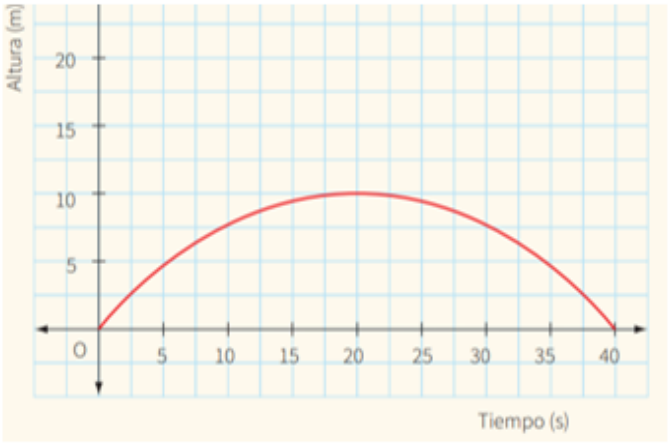


Figura 2. Pregunta 3 de la prueba de aprendizaje de funciones (Fuente: MINEDU- cuaderno de trabajo de matemática)

Análisis a interpretación de resultados

Los resultados del análisis descriptivo muestran que los estudiantes ingresantes a la universidad privada tienen un nivel bajo de pensamiento crítico. Estos estudiantes en promedio obtuvieron 37,74 puntos de un total de 66 puntos (ver Tabla 6). Mientras que los estudiantes ingresantes a la universidad nacional alcanzan 41,65 puntos (ver Tabla 7), pero también presentan un nivel de pensamiento crítico bajo.

Tabla 6: Niveles de pensamiento crítico en estudiantes ingresantes a la universidad privada.

Intervalo de puntajes promedio	Niveles	Frecuencias	Porcentaje (%)
[0 –22]	Deficiente	1	1.6
[23 – 44]	Bajo	55	87.3
[45– 66]	Bueno	7	11.1
	Total	63	100.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 7: Niveles de pensamiento crítico en estudiantes ingresantes a la universidad nacional

Intervalo de puntajes promedios	Niveles	Frecuencias	Porcentaje (%)
[23 – 44]	Bajo	33	63.5
[45–66]	Bueno	19	36.5
	Total	52	100.0

Fuente: Elaboración propia

Como se puede apreciar en la Tabla 6. y Tabla 7. el porcentaje de estudiantes que tienen un nivel Bueno de pensamiento crítico es mayor en la universidad pública, ellos son el 36.5% y en la universidad privada solo el 11.1%. Esta diferencia puede explicarse por la exigencia que tienen los estudiantes para ingresar a la universidad nacional, quienes en muchos casos deben prepararse al menos un año para alcanzar una vacante. En la universidad privada el ingreso es mediante una entrevista personal.

En cuanto al nivel alcanzado por dimensión, se observó que los estudiantes de ambas universidades respondieron mejor a la dimensión Reconocimiento de supuestos y obtuvieron menos coincidencias en el nivel de Inferencia. Los estudiantes de la universidad nacional obtuvieron mejores puntuaciones en las cinco dimensiones en comparación con los estudiantes de la universidad privada (ver Tabla 8.)

Tabla 8. Puntaje alcanzado por dimensión en la universidad nacional y privada.

Dimensiones	Puntaje máximo	Puntaje promedio (universidad privada)	Puntaje promedio (universidad nacional)
Inferencia	16	7.11	8.14
Reconocimiento de Supuestos	13	8.92	9.58
Deducción	13	7.62	8.57

Interpretación	13	7.08	7.85
Evaluación de Argumentos	12	7.02	7.51

Fuente: Elaboración propia

En cuanto al aprendizaje de funciones reales los resultados muestran que el promedio obtenido por los estudiantes de la universidad privada es 3,8 puntos de un total de 6 puntos (ver Tabla 9). Mientras que los estudiantes de la universidad nacional alcanzan 2,67 puntos (ver Tabla 10).

El porcentaje de estudiantes que tienen un buen aprendizaje en el tema de funciones en la universidad privada es mayor al de la universidad nacional. Este resultado, podría parecer contradictorio, ya que los estudiantes de la universidad privada tienen un menor nivel de pensamiento crítico. Pero, puede explicarse por las estrategias de enseñanza utilizadas por los docentes de ambas universidades. Cuando se entrevistó a los docentes de cada universidad se observó que empleaban diferentes estrategias de enseñanza. En la universidad nacional la enseñanza es tradicional, el docente da la definición luego resuelve algunos problemas y finalmente propone ejercicios. En la universidad privada se inicia con un caso en el cual el estudiante debe entender el problema y utilizar los saberes previos para intentar responder a las preguntas planteadas posteriormente el docente brinda el nuevo conocimiento para que los estudiantes puedan resolver el caso y otros problemas propuestos.

Entonces el nivel de pensamiento crítico no es decisivo para que haya un buen aprendizaje de matemática, concretamente de las funciones reales. También es necesario que los estudiantes conozcan las representaciones mediante símbolos, gráficos, variables, ecuaciones, etc. Que utilicen diferentes algoritmos, reglas, convenios en la resolución de problemas. Y el docente utilice estrategias adecuadas para el desarrollo de habilidades matemática centradas en el estudiante.

Tabla 9. Niveles de aprendizaje de funciones en la universidad privada

Intervalo de puntajes promedios	Niveles	Frecuencias	Porcentaje (%)
[0.00 –2.00]	Deficiente	12	19.0
[3.00 – 4.00]	Bajo	29	46.0
[5.00 –6.00]	Bueno	22	34.9
	Total	63	100.0

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10. Niveles de aprendizaje de funciones en la universidad nacional

Intervalo de puntajes promedios	Niveles	Frecuencias	Porcentaje (%)
[0.00 – 2.00]	Deficiente	15	28.8
[3.00 – 4.00]	Bajo	31	59.6
[5.00 – 6.00]	Bueno	6	11.5
	Total	52	100.0

Fuente: Elaboración propia

El objetivo principal de la investigación fue establecer una relación entre el pensamiento crítico y el aprendizaje de funciones. Para ello se planteó la siguiente hipótesis:
A mayor nivel de pensamiento crítico en estudiantes ingresantes a la universidad, mayor aprendizaje del curso de matemática.

En la universidad privada el resultado de la prueba estadística muestra un coeficiente de Correlación de Spearman es igual a 0.251 lo cual indica una correlación positiva baja, para un $p = 0.047 < \alpha$=0.05. En la universidad nacional este coeficiente es igual a 0.346 lo cual indica una correlación positiva baja para un $p = 0.012 < \alpha$ =0.05. En ambos casos se puede decir existe relación entre pensamiento crítico de estudiantes ingresantes y el aprendizaje de funciones, pero al ser baja se entiende que un buen nivel de pensamiento crítico no asegura el éxito en el aprendizaje de las funciones, pero tiene mayor posibilidad de lograrlo.

Conclusiones

La revisión bibliográfica reveló que pensamiento crítico no tiene una única definición. Hay diferentes concepciones y múltiples definiciones de diferentes autores y disciplinas. El pensamiento crítico es una competencia general, una macro habilidad y podríamos considerarla una competencia transversal que debe estar incluida en todo currículo universitario. Además, debe coadyuvar toda toma de decisiones y resolución de problemas a nivel personal, académico y profesional. En los cursos de matemática tanto en la etapa escolar como universitaria urge la necesidad de utilizar estrategias que desarrollen el pensamiento crítico lo cual contribuye a la resolución de problemas académicos cognitivamente demandantes.

Según los resultados de la estadística descriptiva los estudiantes ingresantes a la universidad, tanto pública como privada, obtuvieron bajas puntuaciones en las cinco dimensiones evaluadas: Inferencia, Reconocimiento de Supuestos, Deducción, Interpretación y Evaluación de Argumentos. Lo cual los ubica en el nivel bajo.

La prueba de contrastación de hipótesis demuestra que hay una baja relación entre el pensamiento crítico y el aprendizaje de las funciones reales. Es decir, un buen nivel de pensamiento crítico no asegura un óptimo aprendizaje de las matemáticas. Es cierto que hay mayor posibilidad de lograrlo, pero se debe tener en cuenta que la matemática también requiere del conocimiento del lenguaje representacional (símbolos, reglas, gráficos, algoritmos, convenios, entre otros)

Referencias bibliográficas

Anderson, L., y Krathwohl, D. (2001). *Una taxonomía para el aprendizaje, la enseñanza y la evaluación de: Una revisión de la taxonomía de Bloom de los objetivos educativos*. New York: Longman.

Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. Mexico: Mc Graw Hill.

Bernal, C. (2015). *Metodología de la investigación. Administración, economía, humanidades y ciencias sociales*. Colombia: Pearson.

Betancourth, S., Insuasti, K., y Riascos, N. (2012). Pensamiento crítico a través de la discusión socrática en estudiantes universitarios. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. (*35*), 147-167.

Chalupa, M. (2006). *El pensamiento crítico en la enseñanza de la Filosofía en el nivel medio*. Tesis de Licenciatura no publicada, Universidad Católica de La Plata. La Plata, Argentina.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* (M. Vega, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Ennis, R. (2011). *The nature of critical thinking: An outline of critical thinking dispositions and abilities*. Recuperado el 20 de julio de 2017 de https://education.Illinois. edu/ docs/ default-source/faculty-documents/robert-ennis/thenatureofcriticalthinking_51711_000.pdf

Facione, P. (2007). *Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante?* .Recuperado el 20 de Agosto del 2017 de http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/PensamientoCriticoFacione.pdf

Flores, D. (2016). La importancia e impacto de la lectura, redacción y pensamiento crítico en la educación superior. *Zona próxima.* (*24*), 128-135.

Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 20 de agosto del 2017 de https://ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

González, D. (2014). Uso de un blog como estrategia didáctica para la construcción del aprendizaje y rendimiento académico en la asignatura de química. Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Nuevo León, Monterrey, México.

Hernández, R., Fernández, C., y Babtiste, P. (2014). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw-Hill.

Ministerio de Educación del Perú (MINEDU) (2017). El Perú en Pisa 2015. Informe Nacional de Resultados. Lima: Oficina de Medición de Calidad de los Aprendizajes.

Paul, R. y Elder, L. (2003). *Mini guía para el pensamiento crítico, conceptos y herramientas*. Recuperado el 10 de julio de 2017 de https://www.criticalthinking.org/resources/PDF/SP-ConceptsandTools.pdf

Paul, R. y Elder, L. (2005). Una Guía Para los Educadores en los Estándares de Competencia para el Pensamiento Crítico. Recuperado de https://www.criticalthinking.org/ resources/PDF/SP-Comp_Standards.pdf

Roumieu, S. (2014). La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1. En Asenjo, J., Macias, O. y Toscano, J. (Eds.). *Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*. Argentina: OEI (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura)

Saiz, C. y Rivas, S. (2008). *Intervenir para transferir en Pensamiento Crítico*. Recuperado el 20 de agosto del 2017 de http://www.pensamiento-critico.com/archivos/intervensaizriva s.pdf

Villarini, A. (2003). Teoría y pedagogía del pensamiento crítico. *Revista Perspectivas Psicológicas* 3-4,35-42.

Watson, G. y Glaser, E. (1980). *Critical Thinking Appraisal.* San Antonio: Har-court Brace Jovanovich.

LA IDENTIDAD DISCIPLINAR EN UN DISEÑO DE SITUACIÓN ESCOLAR DE SOCIALIZACIÓN: PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

DISCIPLINARY IDENTITY IN A SCHOOL SOCIALIZATION SITUATION DESIGN: MATHEMATICS PRE-SERVICE TEACHERS

Sindi Lorely Marcía-Rodríguez, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (CINVESTAV-IPN). (México)
sindi.marcia@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen
Presentamos la etapa inicial de un proyecto de investigación que se desarrolla en el marco del programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes*. El objetivo es diseñar una *situación escolar de socialización,* que se sustenta, por un lado, a partir de la c*ategoría de acumulación (*como una resignificación de la *integral)* y, por otro, con la perspectiva de *identidad disciplinar (*como ente de resistencia al fenómeno de *adherencia*, causado por el *discurso Matemático Escolar)*. La socialización de la situación escolar se llevará a cabo con una comunidad de profesores de matemática en formación, del nivel medio superior.

Palabras clave: Integral, acumulación, resignificación, identidad disciplinar

Abstract
We present the initial stage of a research project that is developed within the framework of the socio-epistemological program *Forgotten Subject & Transversal Knowledge*. This is aimed at designing a school situation of socialization, which is supported, on the one hand, from the category of accumulation (as a resignification of the integral) and, on the other, with the perspective of disciplinary identity (as an entity of resistance to the phenomenon of adherence, caused by the *school mathematical discourse*). The socialization of the school situation will be carried out with a community of mathematics pre-service teachers, at the upper secondary level.

Key words: Integral, accumulation, resignification, disciplinary identity

Introducción

La enseñanza del Cálculo está inscrita permanentemente en la formación matemática que reciben los estudiantes de nivel universitario. Lo anterior, se identifica por ejemplo en los planes de estudios de las Ciencias Naturales, las Ingenierías, la Economía o las Ciencias de la Salud y el Medio Ambiente. Es decir, parece ser que el Cálculo cumple una función dentro de la enseñanza de la matemática escolar en áreas del saber que no necesariamente están relacionadas con la producción y difusión del conocimiento matemático. Cabe señalar que el interés por enseñar el Cálculo incluso ha llegado a la enseñanza del Bachillerato, donde conceptos propios del Cálculo como función, límite, derivada e integral son parte de la enseñanza de la matemática escolar. De ahí que, algunas investigaciones señalan que se identifican dificultades en el aprendizaje de las nociones fundamentales del Cálculo como por ejemplo Dreyfus (1990) quien agrupa estas dificultades y señala que la primera dificultad es que los estudiantes aprenden los conceptos del Cálculo de forma algorítmica. La segunda es sobre la visualización, afirmando que esta es poco común y, si ocurre el vínculo cognoscitivo visual-gráfica y la analítica-algebraica, es el punto de mayor dificultad (citado por Zepeda, 2010). Por otro lado, Martínez y García (2016), con respecto al Cálculo Integral, mencionan que existen dificultades al momento de pasar a representar, las alturas de los rectángulos en las Sumas de Riemann, de la forma gráfica a la forma algebraica.

En este contexto, Kouropatov y Dreyfus (2013) discuten el desempeño de los estudiantes en la tarea de aprender el Cálculo. Al respecto, señalan que los estudiantes centran la atención en el Cálculo Integral como una serie de procedimientos con algoritmos asociados. Sin embargo, destacan que no desarrollan una comprensión de los conceptos. Además, los alumnos presentan mayor éxito en preguntas comunes sobre la Integral —como, por ejemplo, la identificación de un área y el cálculo de la antiderivada—, pero no ocurre lo mismo cuando las preguntas no son rutinarias como las ya señaladas.

Otro tipo de investigaciones, respecto a la problemática del Cálculo, se han orientado en torno a su enseñanza. Sobre este punto, por ejemplo, se caracterizan la forma en que el Cálculo se enseña en lo habitual de la matemática escolar. En este contexto, Cordero (2003) señala que en la enseñanza del Cálculo en el nivel universitario se presenta un "modelo didáctico" de carácter axiomático, el cual se caracteriza por centrar la atención en conceptos matemáticos cuya naturaleza es acabada; donde la didáctica provee un conocimiento matemático que se acumula a la luz de su carácter utilitario. Además, el autor señala que en la Matemática Escolar no se consideran los significados de los objetos matemáticos, ni las situaciones y actividades que pudieran favorecerlos.

Por otro lado, Eichler y Erens (2014) realizan un estudio sobre los objetivos de enseñanza de los profesores. Según este estudio, los profesores (de media superior) de Cálculo, tienen los mismos objetivos periféricos relacionados con una visión esquemática, es decir, para ellos el Cálculo es un conjunto de reglas y procedimientos que se deben memorizar y aplicar en tareas rutinarias (citado por Bressoud, Ghedamsi, Martinez y Törner, 2016).

Ahora bien, Alanís y Soto (2011) reconocen varios aspectos característicos de la enseñanza del Cálculo; por ejemplo:

- Un énfasis en una algoritmia desprovista de significados.
- Conceptualización de la Integral basada únicamente en la noción de área.
- Falta de afinidad con otras ciencias de las cuales el cálculo es subsidiario.

En consideración a las investigaciones anteriormente señaladas, se reconoce una enseñanza del Cálculo –mayormente- centrada en el desarrollo de algoritmos, procesos y definiciones que son utilitarios a problemas propios de la matemática escolar. Sin embargo, en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) se han desarrollado otro tipo de investigaciones donde sus resultados destacan un conocimiento funcional. Lo anterior, implica la emergencia del conocimiento matemático en comunidades que a la luz de su cotidiano y bajo

situaciones específicas emergen argumentaciones como la predicción, el comportamiento tendencial de las funciones y la analiticidad de las funciones (Cordero, 2001; Cordero, 2008). Esto es, una epistemología que, no está en la enseñanza de la matemática, pero sí en el cotidiano del que aprende.

Lo anterior, tensa la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo ya que la atención no se orienta en fortalecer los procesos habituales de su enseñanza sino en la emergencia del conocimiento matemático de la gente. Esto quiere decir, se confronta desde la emergencia de estas argumentaciones -donde habitan los usos y significados de la gente- la adherencia que provoca el discurso Matemático Escolar (dME) (Cordero y Silva-Crocci, 2012; Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2019).

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa

Dentro de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) se considera que existe un discurso Matemático Escolar, que está permeado de una epistemología dominante (centrada en el objeto matemático); el cual provoca al menos tres fenómenos: *adherencia, exclusión* y *opacidad* (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015). La *exclusión* es el resultado de dejar de lado el cotidiano de la gente, es decir la construcción social del conocimiento matemático; esto causa una hegemonía del conocimiento centrado en el objeto matemático, no haciendo visible la pluralidad epistemológica que vive en las realidades (*Opacidad*). Asimismo, los profesores y estudiantes aprenden esa matemática sin cuestionar la naturaleza de ese conocimiento que se enseña *(adherencia)* (Cordero *et al*., 2015).

Ante tal realidad, la TSME busca trastocar esa Matemática Escolar, ya que el conocimiento que se enseña está enfocado en el objeto matemático. Al respecto, Silva-Crocci y Cordero (2014) mencionan que es necesario "trastocar la matemática escolar, ya que su construcción se fundamenta exclusivamente en epistemologías de conceptos, con la intención de generar otra matemática escolar que incorpore a su construcción fundamentos epistemológicos con base en las prácticas sociales del conocimiento matemático" (p. 1454). A través de ello se espera valorar los significados matemáticos que la gente posee y construye socialmente, estos pueden ser distintos según la profesión, la cultura a la que pertenezcan, así se tendrá un conocimiento matemático descentralizado del objeto, por ende, compuesto de usos y significaciones.

Cantoral (2015), en la conferencia llamada *Socioepistemología de la variación y el cambio: una ruta didáctica*, menciona que la primera contribución de esta perspectiva radica en haber producido una *descentración del objeto matemático*; se trata de un abordaje muy cercano al que vive el estudiante en su vida en sociedad, de ahí que le denomine Construcción Social del Conocimiento Matemático, o más sencillamente, *matemáticas en uso*. Dicha descentración, no implica olvidarse del objeto abstracto, sino que plantea un paso, del objeto a las prácticas, es decir, la apropiación del objeto matemático precisa de prácticas que le acompañen en su construcción, tanto al nivel de la cultura como del uso que viven los saberes matemáticos situados.

La Figura 1 que se presenta a continuación, muestra lo descrito en los párrafos anteriores.

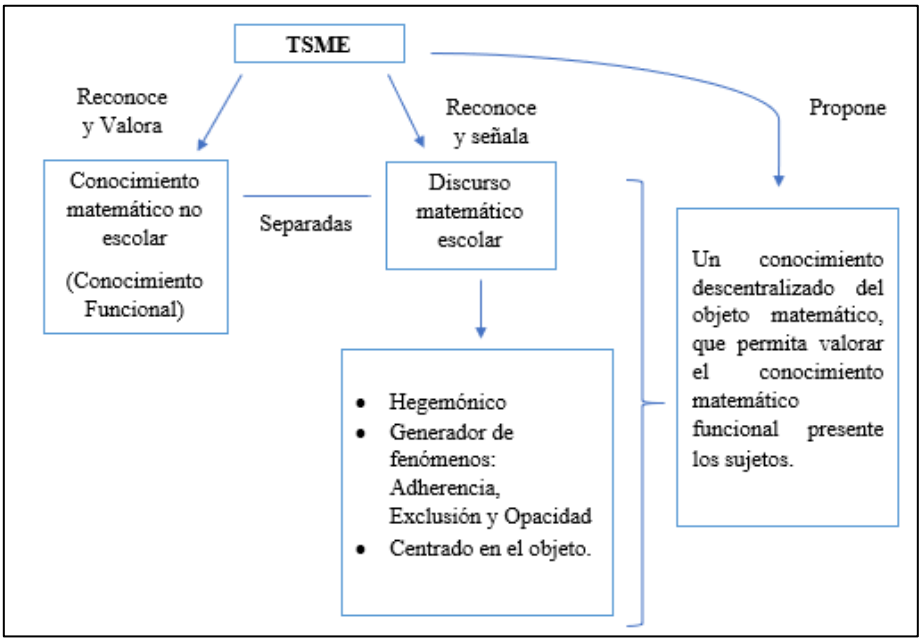


Figura 1. Problemática con una visión Socioepistemológica

El Programa de Investigación Socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes

Dentro de la perspectiva Socioepistemológica, se desarrolla el programa de investigación denominado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)*, el cual tiene por objetivo principal revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente. Este programa de investigación se desarrolla en dos líneas de trabajo simultáneas: 1) La Resignificación del Conocimiento Matemático; donde se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades, entre diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego (el discurso Matemático Escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad) y 2) el Impacto Educativo; en esta segunda línea se ponen en escena Diseños de Situación Escolar de Socialización (DSES), con el propósito de lograr la transversalidad de las categorías de conocimiento (de las cuales, en la primera línea, se ha dado cuenta de su emergencia en diversas comunidades de conocimiento matemático) hacia comunidades de profesores y estudiantes, para alcanzar una horizontalidad de saberes. Aquí se conforman los multifactores y estadios que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas (Cordero, 2017). Ver Figura 2.

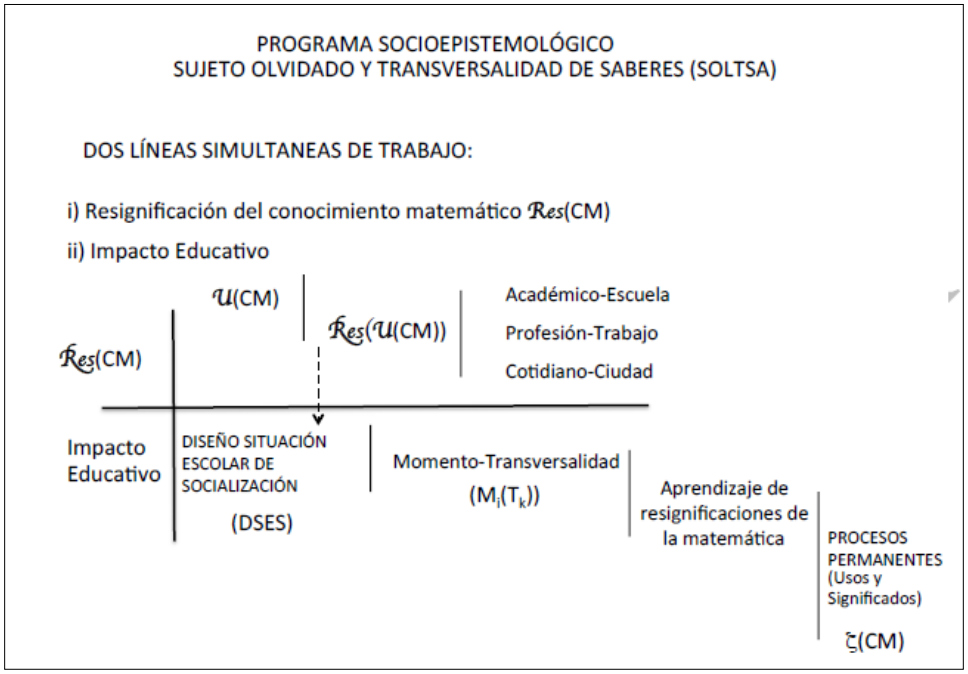


Figura 2. Programa Socioepistemológico. Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (Cordero, 2017).

El Diseño de Situación Escolar de Socialización

Llevar la matemática funcional a la escuela requiere un proceso de socialización. La socialización pretende una dialéctica entre la matemática escolar y el conocimiento de la gente; el cotidiano (Gómez y Cordero, 2010). Mediante la socialización se busca que lo funcional y lo cotidiano del conocimiento puedan estar al mismo nivel del conocimiento escolar, procurando así la horizontalidad de saberes (Cordero, 2017). El DSES, será un instrumento esencial para la socialización.

En este proyecto de investigación —ubicado en la segunda línea de trabajo del programa socioepistemológico SOLTSA— se elaborará un DSES, con el fin de resignificar a la Integral en una comunidad de conocimiento de profesores de matemática en formación. En el DSES se pretende que el profesor de matemática en formación confronte el conocimiento del Cálculo Integral de la Matemática Escolar frente a una situación que responde a un conocimiento funcional de la Integral.

El DSES pretende dos funciones esenciales: en primer lugar, valorar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en la comunidad de conocimiento de profesores de matemática en formación; y en segundo lugar, mantener la reciprocidad y la horizontalidad entre la escuela y el cotidiano de la gente. Es decir, trastocar y transformar la Matemática Escolar a partir de las categorías del conocimiento matemático, a la espera de un impacto educativo y, simultáneamente, la orientación de la función del docente de matemáticas (Cordero, 2017).

Con el DSES, se desea modificar el papel hegemónico del dME —causante de la desigualdad en la enseñanza y aprendizaje de la matemática— incorporando los usos del conocimiento matemático que han emergido en el cotidiano de la gente. Los que son organizados en categorías del conocimiento matemático que sustentan una Socioepistemología del Cálculo y del Análisis, ausente en lo habitual de la Matemática Escolar (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018). Ver Figura 3.

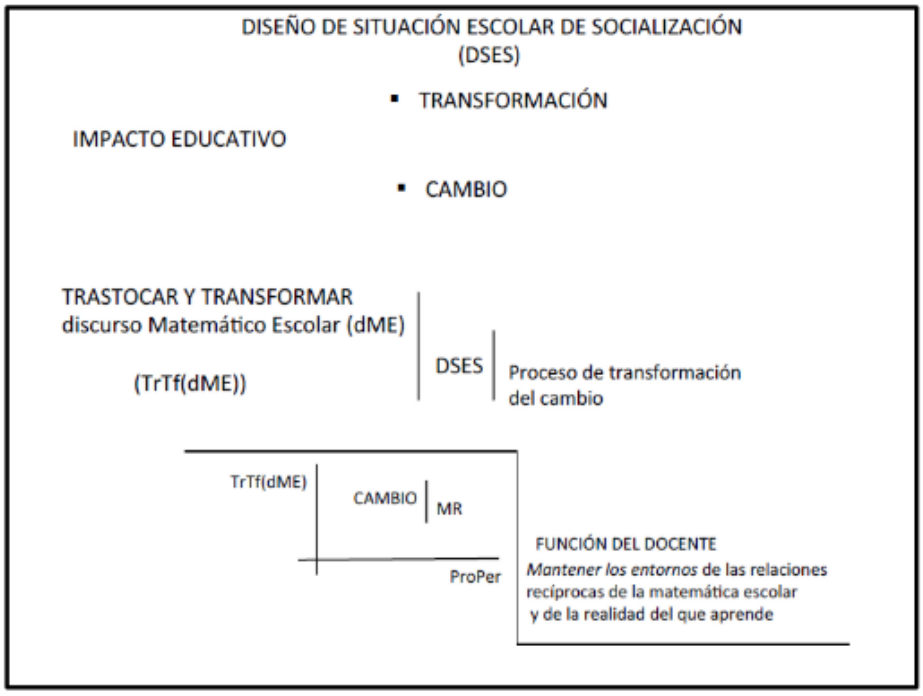


Figura 3. Diseño de Situación Escolar de Socialización (DSES) (Cordero, 2017).

Para tal objetivo, el DSES tendrá dos elementos importantes en su construcción: el primero es la resignificación de la Integral a través de la *noción de acumulación*, y el segundo es la *identidad disciplinar* como ente de resistencia al fenómeno de la *adherencia*.

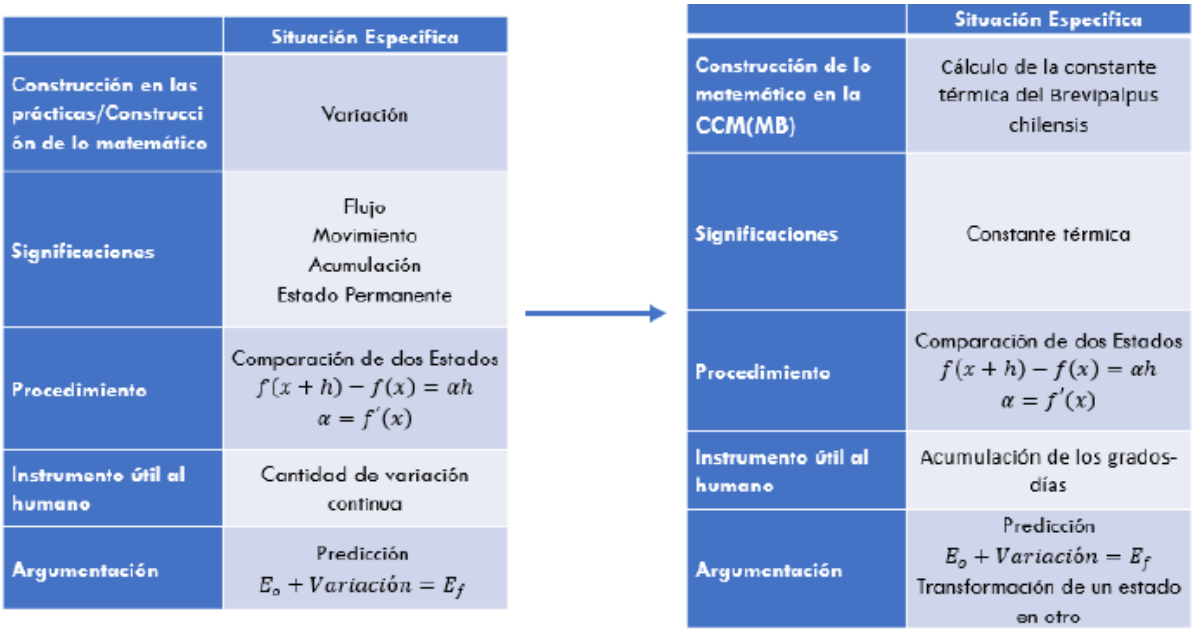
Acerca de la Acumulación

Respecto del primer elemento del DSES (la resignificación de la Integral a través de la *noción de acumulación*), se desarrolló a través de un análisis epistemológico donde se encontró un patrón de construcción en la conformación de la teoría de integración. El patrón de construcción es considerado como "la representación de una idea que prevalece independientemente del contexto de la situación" (Cordero, 2003, p. 11). Bajo esta idea se estudiaron diferentes momentos del desarrollo epistemológico, clasificados en tres situaciones: 1) La Integral antes de Riemann, dónde se estudia principalmente la Integral de Cauchy. 2) La Integral de Riemann 3) La Integral después de Riemann, considerando las obras de Lebesgue, Luzin y Denjoy. Consecuencia de ese estudio, se identifica a la expresión $\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$ como el patrón de construcción. De esta manera se resignificó a la Integral por medio de la noción de acumulación, lo que permitió conformar una categoría de acumulación (Cordero, 2003).

Teniendo como base la investigación anterior, Mota (2019) muestra cómo en el campo de modelación matemática la integral se resignifica a través de la noción de acumulación. Esta emerge en la situación de modelación matemática del ciclo de vida de la plaga llamada Brevipalpus Chilensis, realizada por una comunidad de conocimiento matemáticos de Modeladores Biomatemáticos. La autora analiza la situación específica del cálculo de la constante térmica; observó que la problemática de la comunidad, en esa situación específica, es el cómo realizar la acumulación de los grados-días (unidad de medida), para lograr una mejor aproximación a la constante térmica de la plaga. El uso de la noción de acumulación permitió cuantificar el fenómeno, reconociendo al patrón

de construcción de la integración como aquel procedimiento a través del cual la cuantificación se hizo posible, mediante los procesos de generalización. De esta forma, la categoría de acumulación surge como un conocimiento funcional que ayuda a darle solución al problema planteado. La acumulación, en esta situación específica, adquiere el significado de constante térmica. Esto permite generar una argumentación de predicción, es decir, reconocer los estados futuros o transformar un estado en otro, ya sea para una etapa o para el desarrollo completo de la plaga.
Lo anterior, permitió la construcción de *lo matemático* de la comunidad de conocimiento matemático de modeladores biomatemáticos; reflejo de la matemática funcional en esa comunidad (Ver Figura 4).

Figura 4. Lo matemático en la comunidad de conocimiento de modeladores biomatemáticos (Mota, 2019)



Por otro lado, Mendoza-Higuera, Cordero, Solís y Gómez (2018), mencionan algunos ejemplos de usos del conocimiento matemático en diversas comunidades; uno de esos ejemplos es la modelación de acumulación. Esta se presenta como una situación de acumulación de fluidos que es propia de las prácticas de una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros civiles en formación. Hace referencia a la necesidad de mantener el nivel de un fluido acumulado en un tanque cilíndrico al que le entra un fluido con un gasto constante y sale a través de una válvula con un gasto variable. Esta situación permitió significar a la ecuación diferencial lineal como un modelo de estabilidad.
La integral, por ende, desde la acumulación, se reconoce como un conocimiento funcional y transversal en distintas comunidades y en situaciones específicas del cotidiano profesional o disciplinar de estas comunidades.

Acerca de la Identidad Disciplinar y la Adherencia

El segundo elemento que se considera para la construcción del DSES es la *identidad disciplinar,* como ente de resistencia al fenómeno de la *adherencia*. La adherencia es uno de los fenómenos provocados por el dME, caracterizado por la aceptación total del sistema hegemónico que actualmente rige la Matemática Escolar. Como consecuencia de este fenómeno, ni el profesor ni el estudiante se atreven a cuestionar y tratar de considerar argumentaciones distintas a las valoradas en el dME (Cordero *et al*, 2015).

Como se mencionó en párrafos anteriores, la comunidad de conocimiento en la que se pondrá en escena el DSES, es una comunidad de profesores de matemática en formación. Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci (2018) consideran que la "Identidad Disciplinar es un factor esencial para que el docente trastoque y transforme al dME. Considerándolo como el instrumento de resistencia para que participe en la construcción de los objetos y en las resignificaciones de los usos". Con el fin, entonces, de promover la construcción de la identidad disciplinar, en el DSES se pone en escena el diálogo horizontal de la Matemática Escolar con los usos del conocimiento matemático propios de esta comunidad.

Desde una perspectiva de Identidad Disciplinar, el DSES debe articular al menos tres momentos: el primer momento hace alusión a *la confrontación*, es decir, en el cual quien aprende cuestiona la matemática escolar. El segundo momento es *el despoje del discurso matemático escolar*, donde el que aprende accede a otros significados y procedimientos que promueven la construcción de un patrón gráfico o analítico que a priori no está presente en lo habitual de la enseñanza de la matemática escolar. Un tercer momento, será la emergencia de las *argumentaciones autónomas* (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2019). Todo lo anterior, en busca de que el docente de matemáticas valore su propio uso del conocimiento matemático.

Para finalizar

Este proyecto de investigación está orientado a la construcción de un Diseño de Situación Escolar de Socialización, donde se busca la resignificación de la Integral a través de la *acumulación*, ya que consideramos que con ello se logrará descentralizar la atención en el objeto matemático, pues es una categoría que representa un conocimiento funcional y transversal.

Referencias bibliográficas

Alanís, J.A. y Soto, A.E. (2011). La Integral de funciones de una variable: Enseñanza Actual. *El Cálculo y su Enseñanza, 3*(1), 1-6.

Bressoud, D. M., Ghedamsi, I., Martiniez-Luaces, V., & Törner, G. (Eds.). (2016). *Teaching and learning of calculus*. Cham: Springer.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa

Cantoral, R. [Facultad de Educación Universidad de La Sabana]. (30 septiembre, 2015). Conferencia Ricardo Cantoral (México) Día 3 Congreso Internacional Didáctica de la Matemática [Archivo de video]. Recuperado desde https://youtu.be/tl7wnOTDgcU

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(2) ,103-128.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. D.F, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 256-286.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012) Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: El quehacer y la usanza del Conocimiento Disciplinar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15 (3), 295-318

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona, España: Gedisa

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y Modelación: un programa Socioepistemológica*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Editorial Gedisa.

Gómez, K. y Cordero, F. (2010) Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un studio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 23, 919-927.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44 (5), 641-651

Martínez, M., García, D. (2016). *Una situación didáctica para introducir la noción de la suma de Riemann.* En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya, ..., D. Zakaryan (Eds.), XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática (p. 377-381), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV.

Mota, C. (2019) *La Matemática Escolar y la Modelación: De la Integral a una Categoría de Acumulación*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Mendoza-Higuera, E. J., Cordero, F., Solís M. y Gómez, K. (2018), El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Bolema*, 32 (62), 1219-1243

Opazo-Arellano, C.; Cordero Osorio, F. y Silva-Crocci, H. (2018). ¿Por qué estudiar la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas? *Premisa* 20 (77), 5-20

Opazo-Arellano, C. y Cordero Osorio, F. y Silva-Crocci, H. (2019). La Formación del Futuro Profesor de Matemáticas y la Construcción de la Identidad Disciplinar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32*, 600-607. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Silva-Crocci, H. y Cordero, F. (2014). Matemática Educativa: Latinoamérica, Adherencia E Identidad. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 1449-1456. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Soto, D. (2014). *La dialéctica Exclusión-Inclusión entre el discurso matemático escolar y la Construcción Social del Conocimiento Matemático.* (Tesis de Doctorado no publicada). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Zepeda, S., (2010) *Ambiente computacional de apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la matemática: caso introducción de la integral de Riemann*. (Tesis de Maestría no publicada) Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

LA MODELACIÓN EN LA MATEMÁTICA EDUCATIVA: SUS PROGRAMAS DE INVESTIGACIÓN Y LA DOCENCIA. EL ROL DE LA TRANSVERSALIDAD DE SABERES MATEMÁTICOS

MODELING IN EDUCATIONAL MATHEMATICS: ITS RESEARCH PROGRAMS AND TEACHING; THE ROLE OF MATHEMATICAL KNOWLEDGE TRANSVERSALITY

Francisco Cordero, Carolina Henríquez, Miguel Solís, Claudia Méndez, Claudio Opazo, Atenea De la Cruz
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, Universidad de Talca (Chile), Universidad Autónoma de Chiapas, Casio Académico, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados-IPN, Universidad Autónoma de Chiapas (México).
fcordero@cinvestav.mx, cahenriquez@utalca.cl, solise@unach.mx,clmendezb@cinvestav.mx, copazo@cinvestav.mx, ateneadr@hotmail.com

Resumen
Valorizar los usos del conocimiento matemático que emergen en la gente, la matematización de la realidad elaborada por culturas distintas y los proyectos interdisciplinarios en correlación con los cursos de matemáticas son tres grandes programas de modelación matemática. Sus planteamientos del conocimiento matemático generan visiones ontológicas y epistemológicas que conllevan cuestionamientos de la educación habitual de la matemática. Una vértebra de estos programas es la *transversalidad de saberes matemáticos*. Su inclusión en la educación deriva en un cambio de la matemática escolar: *la matemática en uso*. La función del docente consiste en mantener las transversalidades como acciones del aprendizaje. Para tal fin, la matemática educativa deberá conformar *programas de acompañamiento permanente con el profesorado que coadyuve a su transformación.*

Palabras clave: modelación matemática, transversalidad de saberes, función del docente de matemáticas

Abstract
Valuing the uses of mathematical knowledge that emerge in people, the mathematization of reality elaborated by different cultures and interdisciplinary projects in correlation with the courses of mathematics are three great programs of mathematical modeling. His approaches to mathematical knowledge generate ontological and epistemological visions that lead to questions of the usual education of mathematics. A vertebra of these programs is the transversality of mathematical knowledge. Its inclusion in education results in a change in school mathematics: mathematics in use. The teacher's role is to maintain transversality as learning actions. To this end, educational mathematics must form permanent support programs with the teaching staff that contribute to its transformation.

Key words: mathematical modeling, transversality of knowledge, math teacher role

Introducción

En esta ocasión el Grupo de Discusión Modelación en la Matemática Educativa, conformado por las y los autores de este escrito, enfocaron la atención en los programas de modelación matemática que por sus planteamientos ontológicos y epistemológicos trastocan la habitual matemática escolar. Por un lado, lo ontológico, está destinado a comunidades de la escuela (estudiantes y profesores), del trabajo (jergas del oficio y de la profesión) y de la vida (cotidiano y cultura), y por otro, lo epistemológico, está destinado al conocimiento matemático, no estrictamente el académico, sino propio de esas comunidades, el cual se convino, en la discusión del grupo, llamarle matemática funcional.

Esa matemática funcional es una categoría de modelación matemática, cuyo principio se basa en relaciones recíprocas entre la matemática y la realidad. Su estructura está compuesta por los usos del conocimiento matemático, y por las resignificaciones de esos usos, en situaciones específicas (Cordero, Villa-Ochoa, Rosa, Suárez-Téllez, Carranza, P. y Mendoza-Higuera, 2019). Tales situaciones son parte de ese entorno (relaciones recíprocas) que suceden en comunidades de conocimiento matemático. Cada situación específica se conforma por elementos secuenciales que construyen lo matemático: significación, procedimiento e instrumento, que derivan la argumentación de la situación. En términos genéricos, la argumentación es una resignificación de usos construida por la comunidad en la situación (Cordero, 2016). Efectivamente es un conocimiento matemático situacional que emerge de las comunidades, no corresponde a la emulación del objeto matemático en la situación, sino a la revelación de los usos y significados del objeto, propios de la comunidad, normados por la situación.

Los usos se resignifican en cada situación; pero también cuando suceden transversalidades entre escenarios o dominios de conocimiento. Por ejemplo, entre la escuela y el trabajo o entre la matemática y la ingeniería, los usos se resignifican. Pero en las situaciones y transversalidades suceden *momentos,* y entre ellos también los usos se resignifican. Los momentos son fases en el proceso situacional. Y los usos son las funciones orgánicas de las situaciones (funcionamientos) que se manifiestan por las "tareas" que componen la situación, y la forma del uso será la clase de esas 'tareas". Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica, que debatirá con las formas de los usos. A este "acto de uso" se le llamada resignificación de usos (Cordero y Flores, 2007).

Para incluir estos nuevos saberes matemáticos en la educación será esencial crear *programas de acompañamiento permanente con el profesorado.* Puesto que el surgimiento de una base epistemológica de esos saberes derivará en el cambio de la matemática escolar. Entonces estos acompañamientos generarán diferentes líneas simultáneas de trabajo. Por un lado, diseñar situaciones escolares que coadyuven, al estudiantado y profesorado, a valorizar las transversalidades de saberes (resignificación de usos); y por otro, organizar la función del docente para mantener las situaciones como acciones del aprendizaje. Ambas tareas deben ser sistemáticas, de ahí la importancia del acompañamiento permanente.

A continuación, se presentan los ejemplos de las categorías de modelación (transversalidad de saberes) delimitada a la recolección de datos que se han realizado en las investigaciones científicas en el seno del grupo. La atención se enfocó en dos temas: por un lado, los programas de modelación matemática, la formación inicial y el desarrollo del docente de matemáticas, y por el otro, el impacto educativo de la transversalidad de saberes matemáticos.

Esas categorías de modelación conllevaron reflexionar sobre su significado en la matemática escolar. En primer lugar, esas categorías, a priori, no están en el tratamiento escolar de la matemática. En segundo, se discutió la caracterización de la categoría de modelación en los docentes y estudiantes de los diferentes niveles educativos.

Se formuló la necesidad de entender a los docentes de matemáticas como una comunidad de conocimiento matemático que construye sus categorías matemáticas propias de su entorno normadas por las relaciones recíprocas entre el conocimiento de la escuela y la realidad. Los programas de modelación deberán orientar las articulaciones

necesarias en acciones autónomas en la docencia de la matemática, de ahí la importancia de generar investigaciones sobre la función del docente (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018) y generar programas alternativos de formación inicial del docente (Proyecto en ejecución FID TAL. 1758).

Los programas de modelación matemática, la formación inicial y el desarrollo del docente de matemáticas

Los Programas de la Pedagogía de la Matemática en Chile: El caso de un Proyecto de Formación Inicial

La pregunta que define la génesis de un proyecto de investigación en curso (FID TAL.1758) para la formación inicial docente (FID) de educación media en matemáticas, en una universidad del centro sur de Chile se describe como ¿Cuáles son las habilidades específicas que articulan los dominios disciplinar y didáctico disciplinar que se deben desarrollar en la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria? Y más precisamente, ¿Cómo estas habilidades consideran los diversos contextos socioculturales locales en la FID? El currículo de la escolaridad secundaria en Chile (Mineduc, 2015) considera explícitamente el desarrollo de habilidades como la modelación, resolución de problemas, entre otras. En este sentido, el proyecto busca analizar a partir de contextos socioculturales locales que están presentes en la escuela, el desarrollo de habilidades específicas y, cómo esto se articula en los escenarios formativos en la FID. Luego, con una perspectiva teórica se abordan las relaciones entre los marcos de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) y sobre el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTK) (Carrillo-Yáñez et al., 2018). Los alcances del proyecto implican intervenciones y un plan de mejoramiento en la FID que consideran los resultados alcanzados. Entonces se deberá enfocar la atención a la articulación entre las habilidades que suceden en la diversidad de contextos socioculturales y los marcos teóricos ETM y MTK. Tal vez un eje para tal fin sea la categoría de modelación planteada en la Introducción. Los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones definiran las habilidades, pero también los espacios matemáticos y el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas.

La matemática de la ingeniería y la Categoría de Modelación

Se entiende la matemática de la ingeniería como aquel conocimiento que usan los ingenieros, profesionales y en formación, cuando se enfrentan a problemas propios de su disciplina, en contraste con la matemática escolar de la ingeniería que es el conjunto de asignaturas organizadas en un currículo de enseñanza de la ingeniería, que, hoy en día es poco solidaria con su práctica.

El estudio del uso del conocimiento matemático en comunidades de ingenieros y estudiantes de ingeniería (Mendoza-Higuera, 2013) permitirá acercar a la matemática escolar de la ingeniería a la matemática de la ingeniería, esta última de carácter funcional, a través de un rediseño del discurso matemático escolar en la enseñanza de la ingeniería.

Para este rediseño se deben caracterizar las prácticas propias de la ingeniería que permita diseñar situaciones que involucren la modelación matemática con el propósito construir un conocimiento matemático funcional.

La modelación, como categoría del conocimiento que involucra significaciones o resignificaciones y sus procedimientos, ha permitido establecer el diálogo entre la matemática funcional del ingeniero y la matemática escolar.

En Solís (2012), con el uso de las gráficas, se identifican las nociones de predicción y simulación, propias de la ingeniería. La simbiosis predicción-simulación constituye en una especie de modelación matemática dónde la

búsqueda de comportamientos tendenciales (Cordero, 1998) en las ecuaciones diferenciales lineales es producto de esta simbiosis.

La tecnología digital, la modelación y la educación media

La tecnología digital, en los actuales planes y programas de estudio del Sistema Educativo Nacional mexicano, tiene un papel prioritario en la búsqueda del "éxito" de los estudiantes en su vida académica. Esto no es exclusivo de México, pues la tecnología está viviendo un auge a nivel mundial en diferentes escenarios, a saber: la escuela, el trabajo y la ciudad.

La educación matemática contemporánea explicita la necesidad de la funcionalidad de "lo que se aprende" en la escuela con la vida cotidiana; sin embargo, esto no es trivial. Pues la vida cotidiana de la gente es diversa en situaciones y condiciones, esto permea los usos del conocimiento matemático U(CM). Es decir, este dialogo entre el conocimiento de la escuela y el del cotidiano debe ser recíproco, pues no son ajenos uno del otro. En este sentido, la *modelación* permitirá el diálogo entre estos conocimientos, el de la escuela y el cotidiano, pero no como la creación de modelos que emulen uno en términos del otro; sino como el mecanismo que genera diversidad de argumentaciones para exhibir una pluralidad de usos y transversalidad de saberes en diversos dominios.

De esta manera, la tecnología per se no es el recurso que permitirá un éxito escolar en los estudiantes; sino que, por sus cualidades, será el instrumento conveniente para accionar categorías de conocimiento matemático a través de la modelación z(Mod) según Cordero et al. (2019); lo que además exigirá de un *Programa de acompañamiento permanente con el profesorado* pues esta tarea es compleja y requiere de la investigación educativa, la experiencia y debate de colectivos. Más adelante se mostrará un ejemplo de proyecto de *mejoramiento en matemáticas con laboratorios tecnológicos* con docentes de Nivel Medio Superior en México.

El rol de la modelación en la formación inicial del estudiante de Pedagogía en Matemáticas

La formación inicial, en Chile, ha incorporado como requisito la modelación en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de pedagogía. Esto conlleva dirigir acciones educativas coordinadas con el fin de incluir la modelación como una habilidad a desarrollar por quien aprende para enseñar matemáticas. Una tendencia es que en lo habitual de la matemática escolar la modelación se instrumentaliza a partir de la resolución de problemas. En este contexto, surgen dos preguntas. La primera: ¿De qué naturaleza son los problemas que se resuelven en la matemática escolar en torno a la modelación? La segunda: ¿Conocemos cómo modela el que se forma para enseñar matemáticas? Ambas preguntas tensan la enseñanza de las matemáticas. Por una parte, cuestiona la epistemología que subyace en la modelación de la matemática escolar. Por otra, llama la atención sobre la opacidad del núcleo que define una comunidad de conocimiento matemático: la reciprocidad, la intimidad y la localidad que denota la construcción del conocimiento en una situación específica de modelación. Al desarrollar la modelación sin dimensionar estos dos aspectos, tiene como consecuencia *la adherencia al discurso Matemático Escolar* (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018). Se subraya que la adherencia implica no confrontar la matemática escolar, por lo tanto, no se legitiman los usos y significados del conocimiento matemático que emergen en el cotidiano escolar-académico del estudiante de pedagogía en matemáticas.

La matemática de la Ingeniería

El contenido de las matemáticas en las carreras propias de la ingeniería es significativo en la mayoría de los planes curriculares las ubican dentro de las ciencias básicas, mismas que preceden a las materias de las ciencias de la ingeniería y las materias profesionales. Esta importancia y dificultad de las matemáticas hace que los alumnos, profesores y la sociedad en general demande cuestionamientos que tiene que ver más con el sentido utilitario que funcional del conocimiento matemático: ¿Sirve esa matemática de la escuela, en la vida diaria del ingeniero?

La Ingeniería Civil se desarrolla a partir del análisis, diseño, dictamen y predicción, actividades que norman la

formación y actividad en el ejercicio de su profesión. En cada una de las actividades mencionadas existe el contenido matemático. Un papel importante de la matemática educativa consiste en proponer marcos de referencia que ayuden a entender la reconstrucción del conocimiento matemático (Cordero, 2008), para atender una problemática de la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el área de la Ingeniería Civil. A raíz de las prácticas observadas en la formación del ingeniero civil se logra distinguir la modelación, misma que se encuentra implícita en dichas prácticas, de tal forma que desempeña un papel medular en las actividades de esta comunidad.

Epílogo

Los programas de modelación matemática, en la matemática educativa, incursionan por diferentes escenarios. Estos escenarios expresan líneas de investigación en donde se atienden las problemáticas de la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Por ejemplo, hay proyectos de la formación inicial del docente que enfocan el interés en los contextos culturales regionales, lo que desembocará en una matemática funcional dotada de usos y significados según los contextos culturales. Pero también, hay proyectos de formación inicial, donde lo que importa es el desarrollo epistemológico de la matemática para diseñar permanentemente situaciones escolares para que el estudiante y el docente valoricen los usos del conocimiento matemático que emergen en la gente. Otra línea de investigación es la tecnología digital, la cual trastoca la matemática escolar habitual porque la tecnología digital pasa a ser un instrumento que ayuda al estudiante y al docente a dotar de significados a la matematización de las realidades del que aprende. Pero los proyectos interdisciplinarios en correlación con los cursos de matemáticas componen otra línea de investigación, donde se reflexiona sobre la importancia de distinguir entre los saberes matemática de la ingeniería y la matemática educativa de la ingeniería. Cada una de estas líneas subyace un principio: la transversalidad de saberes matemáticos.

El impacto educativo de la transversalidad de saberes matemáticos

El rol de la transversalidad de saberes en Pedagogía de la Matemática en Chile: ¿Las tareas como un foco de atención?

Reflexionamos respecto al rol de la transversalidad de saberes en el marco de un programa de formación inicial, lo que conlleva a la posibilidad de considerarla como una base epistemológica del conocimiento matemático que en la FID podrían ser abordados en un programa de formación, su rol dentro del trabajo matemático del formador y del profesor en formación inicial, y el impacto que tendría en las escuelas, en el currículo escolar, en los programas de la FID, dando sentido a los contextos socioculturales locales y redefiniendo habilidades matemáticas que es necesario favorecer en los estudiantes y en las aulas. En este sentido, el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas y de los formadores debería ser resignificado.

Ahora bien, la transversalidad de saberes matemáticos, por el momento, será considerada en un sentido amplio, donde cobra valor analizar y diseñar tareas que favorecen ciertas rutas de trabajo intencionadas y que permitirían articular diversos contextos de conocimiento, como la escuela y la cultura, la escuela y la formación de los profesores, la formación de profesorado de matemáticas y escenarios interculturales, contextos escolares rurales, escuelas multigrado, entre otros. Por otra parte, en el marco de los ETM, Kuzniak (2011) señala que "[…] los problemas no son parte del espacio de trabajo, pero son su razón de ser y su activador" (p. 13); es decir, el rol de las tareas y su diseño sería un foco de atención que podría favorecer la resignificación de usos del conocimiento matemático en diversos contextos de conocimiento.

La matemática de la ingeniería

El diseño, construcción, mantenimiento y, posteriormente, eliminación de artefactos son prácticas propias de la ingeniería. Ésta no siempre fue considerada como una ciencia, sino hasta que establece su relación con la matemática. La obra de Bernard Belidor (1729), "La ciencia de los ingenieros", es una de las primeras en vincular ciencia e ingeniería a partir de la matematización de la ingeniería. Hoy en día no se concibe a la ingeniería desligada de la ciencia, la tecnología y la matemática.

La ingeniería se entiende ahora como la aplicación de la ciencia y la tecnología, su enseñanza se ha organizado en este sentido, así los currículos de los programas de ingeniería se agrupan en ciencias básicas, ciencias de la ingeniería e ingeniería aplicada. La matemática escolar de la ingeniería, bajo este esquema, no es diferente a la matemática escolar en otras disciplinas.

Pero, los programas de formación de ingenieros no han considerado el uso del conocimiento matemático en la ingeniería (Mendoza, Cordero, F, Solís & Gómez, 2018), de esta forma no es posible establecer un diálogo entre la matemática escolar y la práctica de la ingeniería.

Al hablar de ingeniería y matemática habría que hacer una distinción en la forma en que estas se relacionan. Por un lado, está la *matemática de la ingeniería*, aquella que es funcional con las prácticas de la ingeniería y por otro está también la matemática escolar en la ingeniería que, en muchos de los programas de ingeniería, son esos contenidos mínimos propuestos por los consejos acreditadores de la enseñanza de la ingeniería (Barrera 2018) y organizados dentro de un currículo que no considera los usos del conocimiento matemático en ingeniería.
La matemática educativa en ingeniería es la disciplina que reestablecerá el diálogo. La categoría de modelación y la transversalidad de los saberes permitirá un rediseño del discurso matemático escolar de la ingeniería que haga de la matemática un conocimiento funcional.

La tecnología y la matemática en la educación media

En la educación media superior se hace explícito el uso de la tecnología como elemento primordial para la innovación educativa y logro de retos sociales contemporáneos. Sin embargo, la inclusión de la tecnología en el aula no debería ser inercial sino intencional.

En este sentido, mencionamos un programa de acompañamiento docente que ha ido madurando, con una vida de 3 años ha logrado atender a más de 6 mil estudiantes y 15 mil docentes de diversos niveles y modalidades educativas. Actualmente se cuenta con la participación activa de aproximadamente 30 maestras y maestros que diseñan actividades e imparten talleres, cursos, conferencias, etc., para sus colegas docentes respecto al uso tecnologías en el aula (Recursos: http://casiocalculadoras.mx/academico_02.html). Este programa se nutre de la investigación en Matemática Educativa y otras disciplinas, además de proyectos alternos por instituciones educativas.

De esa manera, los docentes se reúnen para experimentar, debatir y reconstruir propuestas del uso de tecnologías escolares en el aula. La base de estas propuestas es una epistemología de lo matemático que versa en: la Variación, Transformación, Aproximación, Selección, Ponderación, Periodización (ver Figura 1). Esto nos ha permitido generar actividades y situaciones con base en los U(CM), no sólo con la cualidad de la operatividad rápida y precisa que brinda una tecnología, sino que se ha procurado que sea el escenario donde se construyan significados y procedimientos diversos exhibiendo la funcionalidad del conocimiento matemático.

Este diseño y rediseño de situaciones es una tarea compleja y requiere del colectivo, de la experiencia y el debate, así como de la puesta en escena en escenarios reales con estudiantes, aulas, evaluaciones, requerimientos, modalidades y condiciones diversas. Así se vivió lo denominado *proyecto de mejora en matemáticas con laboratorios tecnológicos*, proyecto de acompañamiento durante 6 meses a 9 docentes de educación básica y media

superior, atendiendo a 401 estudiantes, referentes a 10 planteles de la Ciudad de México; Tetlanohcan, Tlaxcala; Ciudad Madero, Tamaulipas y Tlapa de Comonfort, Guerrero.

Si bien en este proyecto no se diseñaron situaciones para cada plantel, se tuvo como eje rector "repensar" la matemática de la escuela, pues con el uso de un instrumento tecnológico obligaba a hacer preguntas distintas, más en términos del desarrollo de estrategias de solución ante distintas situaciones.

Este proyecto forma parte del programa de acompañamiento docente que se modifica continuamente con base en las necesidades del aula. Consideramos que la educación media sin duda requiere de la inclusión de las diversas tecnologías pues serán el instrumento que permitan las acciones para el aprendizaje, siendo el docente quien las haga accionar a través de una epistemología de U(CM) de diferentes dominios que, a través de diversas situaciones, vivan en un escenario escolar.

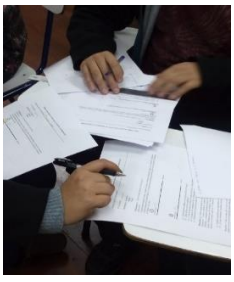
La matemática en la formación inicial de los estudiantes de Pedagogía en Matemáticas

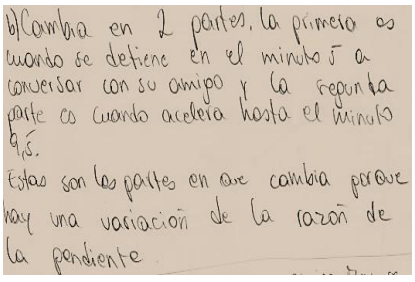
La enseñanza de la matemática escolar exige una transformación. El cambio, desde la construcción social del conocimiento matemático, radica en la epistemología que norma lo habitual de su enseñanza. Una expresión de cambio es la resignificación del conocimiento matemático. Por lo anterior, los diseños de actividades escolares que construyen los estudiantes de pedagogía en matemáticas en su cotidiano escolar-académico son un ejemplo de la fuente de sentido que promueve la transformación. Esto deriva en la construcción de la identidad disciplinar y en la definición de la función del docente (Opazo-Arellano, Cordero y Silva-Crocci, 2018).

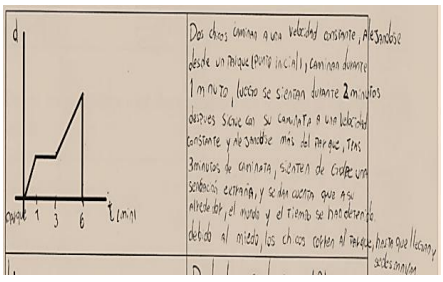
Los diseños de actividades escolares que se construyen recuperan la construcción de lo matemático. Es decir, significaciones, procedimientos, lo útil al humano y argumentaciones que denotan *pluralidad epistemológica y transversalidad de saberes* (Cordero, 2016). Un ejemplo, es el *comportamiento tendencial de las funciones* (Ver Figura 1). Destaca en este contexto la situación de modelación de movimiento, la que favorece la resignificación del uso de la gráfica (Zaldívar y Briceño, 2019). Quien aprende para enseñar matemáticas pone en uso esta situación con el objetivo de hacer emerger argumentaciones autónomas en quien aprende (la gente). Los diseños, por ende, se sustentan en una base de conocimiento que amplía la modelación que se promueve en la enseñanza de la matemática escolar. La ampliación está sujeta a la transversalidad entre dominios de conocimiento o entre situaciones.

La Tabla 1, muestra el uso de la gráfica en una situación específica de modelación. En este caso, se conforma una comunidad de conocimiento que a la luz de las preguntas del diseño transita en la significación de parámetros gráficos y analíticos, lo que deriva la variación de parámetros. Con ello, encuentra un patrón de comportamiento. Lo útil al humano está en la función como una instrucción que organiza de comportamientos gráfico, la argumentación es: *el comportamiento tendencial de las funciones*. Una expresión de esta resignificación es cuando la comunidad de conocimiento a partir de los comportamientos locales y globales que se analizan en la gráfica anticipan la situación en cuestión.

Tabla 1: Situación de modelación del movimiento.







La modelación es funcional cuando responde a lo útil a lo humano. Esta tesis confronta la matemática escolar y promueve un cambio desde el que aprende, la gente. Para tal fin, en la formación inicial, el estudiante de pedagogía debe cambiar la epistemología. Es decir, pasar de las definiciones y conceptos a la construcción de un patrón de comportamiento que responde a su cotidiano escolar-académico. Habrá que avanzar en un programa permanente que haga cada vez más robusto la epistemología del cambio.

La ingeniería y la Categoría de Modelación

A fin de establecer diálogos, vínculos entre el conocimiento matemático de las materias básicas y las materias propias de la ingeniería civil, se proponen actividades que los provoquen, por lo que se retoma el diseño y los objetivos de actividades sustentadas en la Socioepistemología que considera al binomio Modelación-Graficación como categoría del conocimiento matemático, en el sentido de que se constituye en una herramienta para la construcción misma de conocimiento, y no solo como aplicación de conocimiento adquiridos en los cursos matemático previos (Suárez 2008). La modelación matemática según Suárez (2014) es concebida en sí misma como una construcción de su conocimiento por su potencial de vinculación con otras disciplinas y diferentes ramas de la matemática entre sí. Para Arrieta (2003) la modelación es una práctica social que se ha ejercicio históricamente tanto en lo cotidiano como en lo profesional, sobre todo en el ámbito profesional cuando ha sido relacionado la mayoría de las veces con fenómenos físicos, químicos o sociales. Se destaca también las actividades que constituye el hacer, reproducir y comunicar el conocimiento matemático científico subrayando que existen separaciones y fronteras aun no definidas claramente entre la actividad matemática, científica; actividad del uso de las matemáticas y la actividad matemática escolar todos inmersos en la actividad humana.

De la Cruz-Ramos (2011), reportó la instrumentación de una experimentación para la resignificación del Binomio de Newton en el contexto de la Ingeniería Civil, sobre el fenómeno de la infiltración.

En las argumentaciones finales, los alumnos expresaron argumentos variacionales como el que se presenta a continuación:

“A medida en que se repite el procedimiento la velocidad con la que filtra el agua en el suelo lleva más tiempo. La grafica obtenida varia demasiado conforme la velocidad va disminuyendo y el tiempo se incrementa; logrando identificar las causas que origina que la capacidad de filtración se pierda conforme pasa el tiempo”.

De lo anterior se concluye que la puesta en escena propicia la exploración, determinación y formulación de una idea misma que trascendió y produjo recursos propios, para la emisión de un juicio acerca de un fenómeno físico como lo es la Infiltración.

La finalidad de esta puesta en escena fue en un primer momento: establecer vínculos entre el conocimiento creado en las aulas como el implementado en el qué hacer diario del profesional de la Ingeniería, particularmente Hidrología e investigar el uso de la Predicción y la Modelación-Graficación, como elementos medulares en la toma de decisiones en el ejercicio profesional del Ingeniero Civil.

Epílogo

Hemos mencionado tres grandes programas de modelación matemática: la valorización de usos del conocimiento matemático que emergen en la gente, la matematización de la realidad elaborada por contextos culturales y los proyectos interdisciplinarios en correlación con los cursos de matemáticas. Sus inserciones en la educación (básica, media y superior) conllevaría a un cambio epistemológico de la matemática escolar. Por un lado, admitiría una pluralidad epistemológica, ya que tomaría en cuenta saberes matemáticos en diferentes escenarios: la escuela, el trabajo y la vida. Y por otro, las transversalidades de esos saberes, ya que los usos del conocimiento matemático se

resignifican entre situaciones, dominios y escenarios (Cordero, 2016). El impacto educativo consistirá en nuevos diseños de situaciones escolares que ayuden a emerger los usos del conocimiento matemático en la realidad del que aprende. El aprendizaje no será entonces emular un procedimiento matemático, sino será desarrollar autonomía de resignificaciones de usos en diversas situaciones, en múltiples dominios y en diferentes escenarios.

Conclusiones

Los programas de modelación mencionados derivan en transversalidades de saberes. Con una gran diversidad de investigaciones en comunidades de conocimiento matemático (ver por ejemplo Cordero, Del Valle y Morales, 2019; Mendoza et al, 2018), sus resultados han arrojado categorías del conocimiento matemático (ver Figura 1). Cada una de las categorías: predicción, comportamiento tendencial, analiticidad, optimación, compensación y anticipación; se han evidenciado como emergencias en comunidades de docentes, estudiantes y profesionistas no necesariamente matemáticos, a través de situaciones específicas según sus jergas disciplinares: variación, transformación, aproximación, selección y periodización. Estas situaciones han sido bases epistemológicas para generar diseños de situaciones escolares donde suceden aprendizajes autónomos (por ejemplo, Opazo, et al, 2018). Esto diseños confrontan y transforman la matemática escolar habitual, debido a que se valorizan los usos y significaciones de los objetos matemáticos.

Una epistemología de lo matemático

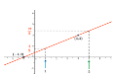
	SITUACIONES					
CONSTRUCCIÓN DE LO MATEMÁTICO	VARIACIÓN	TRANSFORMACIÓN	APROXIMACIÓN	SELECCIÓN	PONDERACIÓN	PERIODIZACIÓN
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación	Distribución de comportamiento	Reproducción de comportamientos
Procedimientos	Comparación de dos Estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades	Equiparar	Comparación de periodos
Instrumentos	Cantidad de variación continua $f(x+h)-f(x)=ah$ $a=f'(x)$	Instrucción que organiza comportamientos $y=Af(Bx+C)+D$	Formas analíticas $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Lo estable	Punto de equilibrio $\sum_{i}^{n} x_i-\bar{x}=0$	Interpolación 
Argumentación/ Resignificaciones	Predicción $E_0+Variación=E_f$	Comportamiento tendencial	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\ldots$	Optimación	Compensación	Anticipación

Figura 1. Categorías de usos del conocimiento matemático

Entonces, la tarea pendiente es generar programas permanentes de acompañamiento para impactar al sistema educativos en todos los niveles: básico, medio y superior. La composición de estos programas consistirá en una estructura multifactorial y de estadios en la formación y desarrollo profesional del docente. Por ejemplo, un factor es la identidad disciplinar que confronta la adherencia de la matemática escolar y genera la autonomía de las categorías de usos. Las acciones de este factor tendrán que ser mantenidas, por eso la idea del programa permanente, por un lado, en los entornos de diálogos horizontales y recíprocos entre el conocimiento de la ciencia, el conocimiento escolar y el conocimiento de la vida. Y por otro, construir la articulación entre lo institucional y lo

funcional para el cambio educativo de la matemática: generar la relación dialéctica entre los procesos del conocimiento matemático escolar y la funcionalidad del conocimiento matemático de la gente.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada. D. F., México: CINVESTAV-IPN.

Barrera, M. E. (2018). *Marco de Referencia 2018 del CACEI en el Contexto Internacional (Ingenierías)*. México: CACEI A. C.

Belidor, B. F. (1729*). La Science des Ingenieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'Arquitecture civile*. Paris: Claude Jombert.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's 50otmail50zed knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y del análisis: el caso del comportamiento tendencial de las funciones *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 1(1), 56-74.

Cordero, F. (2008). El Uso de las Gráficas en el Discurso del Cálculo Escolar. Una visión Socioepistemológica. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Cordero, F., Villa-Ochoa, A., Rosa, M., Suárez-Téllez, L., Carranza, P. y Mendoza-Higuera, E.J. (2019). La modelación en la matemática educativa: sus métodos de investigación y el impacto educativo en la formación y desarrollo de la docencia de la matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Vol. 32. Núm.1, 539-547.

Cordero, F., Del Valle, T. y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 22 (2): 185 – 212. DOI: 10.12802/relime.19.2223

De la Cruz-Ramos, A. (2011). *Situaciones Didácticas de las Ecuaciones Diferenciales en el contexto de Ingeniería Civil a través de la Predicción*. Tesis de maestría no publicada. México: Universidad Autónoma de Chiapas.

Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses Genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D. & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education, 48*, 721–737, DOI 10.1007/s11858-016-0812-x.

Mendoza-Higuera, E.J. (2013*). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería* (Tesis de Maestría no publicada). CINVESTAV-IPN, México

Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 11(1),* 36-61.

Mendoza, J., Cordero, F., Solís, y M. Gómez, K (2018). El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Boletim de Educação Matemática-BOLEMA*, volumen 32, número 62, 1219-1243.

Opazo-Arellano, C.; Cordero Osorio, F. y Silva-Crocci, H. (2018). ¿Por qué estudiar la identidad disciplinar en la formación inicial del docente de matemáticas? *Premisa 20 (77),* 5-20.

Proyecto en ejecución FID TAL.1758 – Conocimiento especializado del profesor de matemática y física en la formación inicial de profesores: Estudio de relaciones entre ETM-MTSK.

Solís, M. (2012). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo. Caso de la predicción y la simulación en las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden* (Tesis de Doctorado no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

Suárez, L. (2014). *Modelación Graficación para la matemática escolar*. México: Díaz de Santos.

UNA EPISTEMOLOGÍA DE USOS DE LA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES EN UNA COMUNIDAD DE INGENIEROS CIVILES

AN EPISTEMOLOGY OF THE FUNCTION COMPOSITION USES IN A COMMUNITY OF CIVIL ENGINEERS

Isabel Tuyub Sánchez, Yahaira Zapata Canché
Universidad Autónoma de Yucatán. (México)
Isabel.tuyub@correo.uady.mx, yahairaeloisa@hotmail.com

Resumen
Se presentan algunos avances de una investigación desarrollada en torno a la identificación y análisis de usos del conocimiento matemático relativo a la composición de funciones, que subyacen en actividades y quehaceres de una comunidad de ingenieros civiles, a través de un análisis de libros de corte ingenieril empleados en su carrera. Se trata de un estudio socioepistemológico que desea generar una epistemología de usos que permita dar evidencia de la funcionalidad de dicho conocimiento matemático en escenarios apegados al ámbito profesional, para poder mirar significados que aporten a una matemática funcional.

Palabras clave: usos, composición de funciones, libros ingenieriles

Abstract
This paper presents a preview of a research focused on the identification and analysis of the uses of mathematical knowledge relating to the composition of functions that underlie in the activities and chores of a civil engineers' community, through an analysis of engineering books used in their profession. It is a socio-epistemological study that seeks to create an epistemology of uses that allows showing the functionality of the aforementioned mathematics knowledge in scenarios attached to the professional field, to be able to look at meanings that contribute to functional mathematics.

Key words: uses, composition of functions, engineering books

Introducción

La educación por competencias, que permea también a la Matemática Educativa (ME), orienta el aprendizaje acorde con los retos y problemas del contexto social, comunitario y profesional, especialmente, en los procesos de formación del nivel superior. Entre los principales objetivos de dicha educación está la formación de profesionales que se adapten al ámbito laboral, la contribución al desarrollo en diferentes contextos y la adquisición de una formación integral para la vida que, en el nivel superior, debieran ser competencias que sirvan en su vida diaria, en lo laboral y social (Tobón, 2008).

En la formación profesional, particularmente en ingeniería, dentro de la educación por competencias implicaría que los futuros profesionales sean capaces de resolver problemas a través de proporcionales una visión bien integrada de la ingeniería que permita hacer uso de sus conocimientos y habilidades. En particular, la Matemática aparece caracterizada dentro de su currículo como un uso inherente y como una ciencia aplicada.

Este escrito enfatiza a la primera caracterización, ya que coincidimos en lo que afirma Mendoza (2013) en que los usos de la matemática en un contexto de ingeniería dan cuenta de la funcionalidad de la matemática, es decir, lo que le es de utilidad al ingeniero, lo cual significa que reconocer dichos usos aportará a una educación por competencias que permita generar una matemática funcional apegada no solo al ambiente académico, sino a lo profesional que es el ámbito de mayor interés para el ingeniero.

Precisamente, para lograrlo, pretendemos estudiar este ambiente profesional de manera que se identifique aquello que realmente usa el ingeniero o como menciona Cordero y Flores (2007): identificando a la matemática como un conocimiento incorporado orgánicamente (de manera natural) en el humano.

Para ello, resulta factible estudiar el uso de saberes matemáticos asociados a las profesiones, como el caso de la ingeniería, que permita desarrollar una matemática funcional y se apegue a lo que realmente necesita un profesional para desempeñarse. Ante esto, no basta con solamente considerar las aproximaciones didácticas de la matemática, sino considerar la actividad que rodea, vive y le da significado en su contexto de origen.

Existen diversas maneras de aunar en esta perspectiva, una de ellas es recurriendo a los libros pues, según Font y Godino (2006) son una herramienta muy utilizada por la comunidad. Además, reconocemos que son una fuente que los profesores utilizan para crear sus diseños del aula y sus metodologías de enseñanza. De ahí que se optó por investigar el uso de la matemática en libros de corte ingenieril.

Por otra parte, profundizando en la matemática a enseñar a los futuros ingenieros, se distingue que esta profesión trabaja en gran medida con el cálculo (Zúñiga, 2007), en particular la función matemática. Sin embargo, una problemática surge cuando estos conocimientos no logran ser extrapolados o reconocidos fuera del ambiente escolar. En ese sentido, nos centramos en analizar un conocimiento matemático específico: la composición de funciones, ya que desde el punto de vista didáctico, los libros de texto otorgan un tratamiento basado en definirla como una contención de funciones, ejemplos relativos a la estructura de dicha función, ejercicios que consisten en sustituciones analíticas y uno que otro problema de aplicación bajo la misma lógica, lo cual deja ver a la composición de funciones como un cambio de variables y no hay un significado que pueda permear en la utilidad del estudiante. Si analizamos dicho conocimiento matemático desde la epistemología podemos notar que está estrechamente relacionada con los fenómenos donde existe una dependencia de variables, factores, estados, etc. y que sus imágenes y dominios están relacionados de cierta manera, por lo que indagar en la perspectiva de los significados que le dan origen a partir del uso que le da el ser humano podría aportar a una matemática significativa.

Ante ello, consideramos que proporcionar un marco de referencia que haga explícito los usos de la composición de funciones en ambientes profesionales podría generar una epistemología de usos para otorgar nuevos significados a mencionado conocimiento matemático que permita ser significativo para los futuros profesionales y, a la vez, vaya

alineada a lo que exigen las nuevas reformas educativas basadas en competencias. Por lo tanto, el objetivo de la investigación es identificar aquellos usos asociados a la composición de funciones presentes en libros de corte ingenieril utilizados en una comunidad académica-profesional de ingenieros civiles para la realización de una epistemología de usos.

Marco teórico

Al analizar el panorama que toma en cuenta el uso del conocimiento matemático en cierta actividad que se efectúa en un contexto específico, en este caso el profesional, una teoría en ME que ofrece herramientas teóricas-metodológicas para aunar en esa perspectiva y ese tipo de problemáticas es la Teoría Socioepistemológica de la ME.

Esta teoría revela una necesidad por estudiar escenarios (escolares y no escolares) de construcción del conocimiento, reconociendo fuertemente las prácticas sobre las que los objetos matemáticos emergen, ofreciendo una explicación desde ese escenario (Tuyub, 2010).

Para ello, se fundamenta en cuatro dimensiones del saber (didáctica, epistemológica, cognitiva y social) y cuatro principios relacionados entre sí: El principio de la racionalidad contextualizada, el principio del relativismo epistemológico, el principio de la resignificación progresiva y el principio normativo de la práctica social (Cantoral, 2013).

Las cuatro dimensiones nos permiten reunir evidencia acerca de los procesos de adquisición cognitiva que el estudiante posee al aprender un conocimiento matemático, el estatus de éste en el discurso matemático escolar, es decir, su difusión institucional a partir del profesor y los libros de texto, los contextos que dan origen a su constitución como saber y algunos usos que se le da fuera del ámbito escolar desde diversas perspectivas.

Con respecto a los cuatro principios, estos se articulan de manera que las prácticas sociales son la base de construcción del conocimiento matemático (normatividad de las prácticas sociales) y el contexto influye en el tipo de racionalidad con la cual un individuo construye conocimiento en tanto lo pongan en uso (racionalidad contextualizada). Dado que dicho conocimiento es puesto en uso, se consolida como un saber tomando en cuenta que será relativo al entorno en donde emergió su construcción (relativismo epistemológico) y finalmente, con la evolución e interacción con los diversos contextos, se resignificarán los saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva).

Además, se considera que las prácticas sociales son las que generan el conocimiento, y conllevan a modelizar la práctica otorgando una estructura y significado a lo que se hace (Cordero, 2001), esto es, otorgar un significado del conocimiento matemático a estudiar desde el uso que el ser humano le da. Además, respetan el contexto, tiempo y cultura (Arrieta, 2003) lo que propicia una normatividad en el que hacer de una comunidad, es decir, existe una resignificación respecto al uso del conocimiento matemático, debido a que la función y la forma de dicho uso va de acuerdo con lo que la comunidad usa y hace para lograr sus objetivos (Domínguez, 2003).

Esto obliga a formular epistemologías del conocimiento cuya centración está en su constitución social natural, es decir, en lo que hace que el conocimiento sea de esa manera y no de otra (Tuyub, 2010).

Por lo tanto, un método socioepistemológico aportará a nuestra investigación al considerar desde una perspectiva múltiple y sistémica, el estudio de los procesos de construcción social del conocimiento matemático, en contextos donde la matemática se resignifica, considerando la interacción entre lo epistemológico, cognitivo, didáctico y sociocultural asociado al saber.

Para el desarrollo de este trabajo, partimos de un esquema metodológico para la investigación Socioepistemológica (ver Figura 1) en el que al tener definida la problemática de la investigación, se procede con una revisión Socioepistemológica basada en las prácticas y usos del saber matemático con el fin de mirar cómo adquiere significados contextualizados y usos que, posteriormente, permitan formular una epistemología que ofrezca explicaciones sobre la problemática planteada y que será la base para cualquier intervención didáctica (Montiel y Buendía, 2012).

Figura 2. Parte del Esquema Metodológico para la investigación Socioepistemológica (Montiel y Buendía, 2012)

Considerando el escenario desde el cual se realiza el estudio, y con base en el anterior esquema, para el encuadre de la investigación, se propone una unidad de análisis que nos permita mirar usos de la composición de funciones en un contexto de libros ingenieriles. Dicha unidad se retoma de la propuesta por Montiel y Buendía (2012), misma que fue traducida a esta investigación (ver Figura 2).

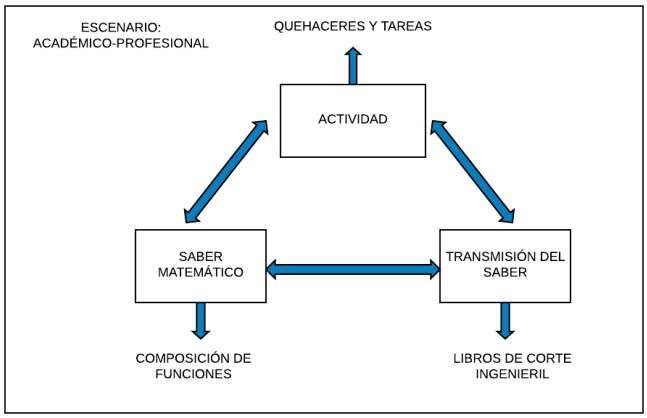


Figura 3. Unidad de análisis de Montiel y Buendía (2012) traducida a la investigación

En ella, se aprecian cuatro componentes: saber matemático, actividad, transmisión del saber y escenario. El primero refiere al conocimiento matemático composición de funciones desde el punto de vista de sus significados y naturaleza, mismo que funge como indicador para encontrar los usos del mismo. El segundo es la actividad o bien, los quehaceres, situaciones o tareas de carácter ingenieril donde permean dichos usos. El tercero concierne a la transmisión del saber, es decir, el medio por el cual se hace presente el uso dentro de la situación; en este caso, serán los libros de corte ingenieril. Finalmente, el cuarto componente es el escenario dentro del cual se enmarca el análisis de los usos de la composición de funciones y que es el escenario académico-profesional ya que consideramos que indagamos en un ambiente académico al considerar los libros, pero también profesional ya que son enfocados o especializados en el área ingenieril.

Además, para la formulación de una epistemología referente a los usos de la composición de funciones, utilizamos tres constructos teóricos (ver Tabla 1).

Tabla 1. Constructos teóricos para la formulación de una epistemología de la composición de funciones

Usos del conocimiento matemático composición de funciones:	Función específica que tiene el conocimiento ante una necesidad que norma el uso de una comunidad y que se manifiesta por tareas que componen el quehacer inmerso (Cordero y Flores, 2007). Responde a la pregunta: ¿Cuál es el objetivo de la composición de funciones en la situación?
Formas del conocimiento matemático:	Serán la clase de esas tareas que hacen emerger el uso de dicho conocimiento (Cordero y Flores, 2007). Responde a la pregunta: ¿A partir de qué emerge la composición de funciones?
Funcionamiento del conocimiento matemático:	Responde a la pregunta: ¿Para qué se utiliza una composición de funciones?

Metodología

Como parte de este estudio cualitativo de tipo descriptivo exploratorio, la población en la que centramos nuestra atención es la de Ingenieros Civiles del estado de Yucatán pues consideramos que esta profesión contribuye e impacta al desarrollo de la sociedad desde diversos ámbitos a partir de la resolución de problemas que emergen en la misma, por lo que la matemática resulta ser una de las herramientas fundamentales que les permite dar solución. Particularmente, trabajamos con estudiantes, profesores y egresados de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México.

Como parte de los instrumentos utilizados que nos permitieron indagar en los usos, empleamos libros de corte matemático-didáctico y artículos de educación matemática, para analizar la epistemología y lógica didáctica (tratamiento didáctico) de la composición de funciones y otros aspectos que nos ofrezcan indicios de lo que se ha reportado sobre dicho conocimiento. También optamos por los libros ingenieriles básicos como el medio en el que desarrollaremos la investigación. Además, consultamos el mapa curricular y la relación de asignaturas que estudia la comunidad seleccionada, con la intención de encontrar bibliografía de la cual se basarán sus planes de estudio y aporte a la elección de los libros de corte ingenieril mencionados.

Las técnicas que utilizamos, en orden, fueron las siguientes:

1. La indagación previa desde la matemática: consulta de libros de corte matemático,
2. La revisión documental: consulta de artículos de educación matemática,
3. La determinación de categorías de uso: significados de la composición de funciones con base en su uso desde diversos contextos que nos permitan encontrar dicho uso pero en la ingeniería,
4. Una encuesta: para recolectar información y aportar a la selección de libros de corte ingenieril más utilizados durante su formación académica o profesional por estudiantes, profesores y egresados de Ingeniería Civil de la UADY,
5. La selección de los libros de corte ingenieril: con base en su uso y apego a los planes de estudio,

6. El análisis socioepistemológico en los libros de corte ingenieril y
7. La generación de una epistemología de usos.

Análisis de resultados

Con base en el marco teórico, al estudiar la epistemología de la composición de funciones y otros recursos acerca de dicho conocimiento matemático, identificamos tres categorías que nos permitieron encontrar el uso de la composición de funciones en contextos específicos (ver Tabla 2).

Tabla 2. Categorías de uso de la composición de funciones.

Categoría de uso	Caracterización
1. Cuantificación de cambios relacionados	Su principal intención es medir el cambio que presentan situaciones que dependen entre sí.
2. Optimización de proceso de estados	Simplificar un proceso que considera una o varias variables intermedias, esto es, por ejemplo, pasar de un estado A a un estado C, sin considerar explícitamente el estado B.
3. Dependencia múltiple	Identificar la dependencia entre varios estados.

Posterior a ello, con base en la encuesta realizada a la comunidad y la información acerca de la bibliografía que apoya a sus planes de estudio, se eligieron los libros de corte ingenieril que se consideran esenciales para dicha profesión:

- Piralla, M. (2002). Diseño estructural. Limusa Noriega Editores: México.
- Keyser, K. (1985). Ciencia de Materiales para Ingeniería. Limusa Noriega Editores: México.

Se procedió a realizar el análisis socioepistemológico en cada uno y, con base en determinada categoría de uso, se encontraron las siguientes situaciones en las que notamos cómo puede emerger o hacerse presente la composición de funciones.

1. Situación de selección de materiales

En el libro de Diseño Estructural (relacionado con las asignaturas de construcción de obras) y que tiene como objetivo analizar todo el proceso general para determinar las características de una estructura, se identificó un concepto llamado estructuración el cual consiste en el proceso que conlleva la selección de materiales, determinación de dimensiones y otros aspectos que construirán la estructura. De ahí que el objetivo de dicho proceso es adoptar la solución óptima de entre un conjunto de posibles opciones.
Específicamente distinguimos una situación relacionada con la selección de materiales que construyen la estructura con base en los costos y calidad de materiales (ver Figura 3), la cual fue reconocida con la categoría de uso "optimización de proceso de estados".

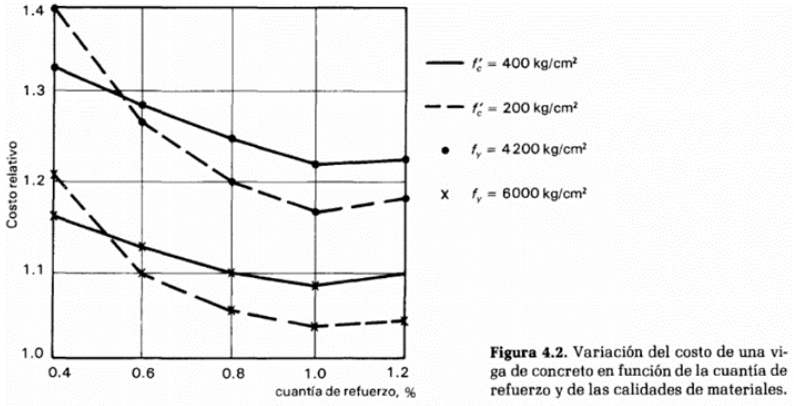


Figura 4. Gráfica en la que se percibe un caso de variación (Piralla, 2002)

En la misma se pudo reconocer tres variables que, al analizarlas, notamos que cumplen cierta relación de dependencia. Dado que en la gráfica solo se percibe directamente la relación entre el costo y la resistencia (cuantía), optamos por indagar con un ingeniero civil de la comunidad seleccionada para que nos explicara cómo se presenta en su quehacer estos conocimientos.
Al entrevistarlo se le cuestionó primeramente sobre en qué situaciones se le presentan múltiples que tengan que depender entre sí y qué relación existía entre las variables reconocidas en la gráfica nos comentó lo siguiente:

> *"(…) también hay otra que se llama f´(c) que es un factor de resistencia del concreto y que puede hacerse más grande mejorando la calidad, pero debes cambiar la cantidad de agregados (que son cuatro). Dependiendo de cómo se combine puede dar una resistencia mayor o menor. Por ejemplo: Si le pones mucho cemento te va a salir muy caro, pero resiste mejor. Si le pones grava y arena te da en las distintas resistencias, pero influye en el precio".*

El Ingeniero Civil argumenta que la calidad del material tiene que ver con la cantidad de agregados que este pueda tener, de ahí que los agregados del concreto serían cuatro: arena, cemento, piedra y agua; mientras que el del acero sería el carbono.

Entonces modificar estas cantidades de agregados nos resulta en la calidad que puede tener el material, lo cual se relaciona con su resistencia y ésta, a su vez, influye considerablemente en el costo.

Es por ello que su argumento nos ofrece una explicación de cómo el resultado de relacionar dos de las variables permite relacionarlo con una tercera.

Por lo tanto, existe una múltiple dependencia entre las variables, dos de las cuales son explícitas (costo y cuantía) y una implícita (calidad), donde la cuantía es la resistencia del concreto (denotado por *f´(c)*) y la resistencia del acero (denotado por f_y).

Con ese análisis, identificamos un uso de la composición de funciones caracterizada por dicha dependencia entre las variables, con un objetivo, forma y funcionamiento específico y que se acompaña de nociones matemáticas que le permiten tener sentido en la situación (ver Tabla 3).

Tabla 3. Uso, funcionamientos y formas de la composición de funciones en la situación 1

Uso:	Optimizar el costo de una viga.
Funcionamiento:	Expresar una relación de tres variables en simplemente dos, esto es, una relación entre el costo, la resistencia (cuantía) y la calidad del material a partir de considerar solamente el costo y la resistencia.
Forma:	Se percibe una visión puntual de la gráfica, esto a partir de la identificación de puntos de referencia, mismos que corresponden a los puntos de la cuantía o resistencia del concreto y acero y se selecciona el de menor altura. De forma global, la calidad se identifica analizando la curva más posicionada al lado derecho de todos los porcentajes de la cuantía. La resistencia del material se lee a partir del significado de la curva con respecto a la resistencia del acero con respecto al concreto, con respecto al porcentaje de resistencia (eje x)
Otras nociones matemáticas involucradas	Variación, dependencia entre variables, variable cuantitativa, variable cualitativa, variables continuas.

2. Situación de fallas a temperaturas elevadas

El libro de Ciencia de Materiales para Ingeniería (relacionado con la asignatura que lleva el mismo nombre) tiene por objetivo explicar cómo y por qué los materiales se comportan tal como lo hacen y qué puede hacerse para obtener el mejor provecho de ellos. Al respecto, se identificó una situación llamada fallas a temperaturas elevadas la cual consiste en analizar cómo la elevación de la temperatura perjudica a la mayoría de las propiedades mecánicas de los materiales.

Específicamente, nos centramos en analizar una situación relacionada con las temperaturas prolongadas en la que distinguimos tres variables que dependen entre sí, identificado a partir de la categoría de uso "cuantificación de proceso de estados", donde los estados del proceso son: el tiempo, el porcentaje de deformación (fluencia) y el esfuerzo.

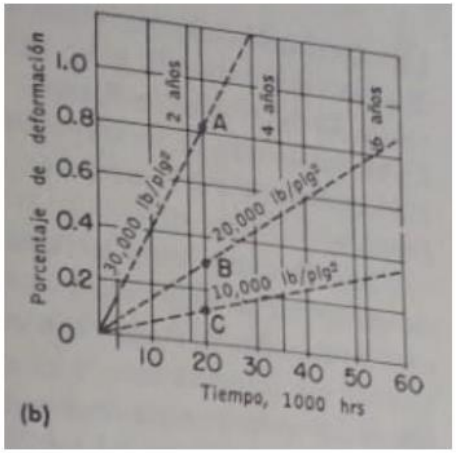


Figura 5. Gráfica tiempo vs fluencia (deformación)

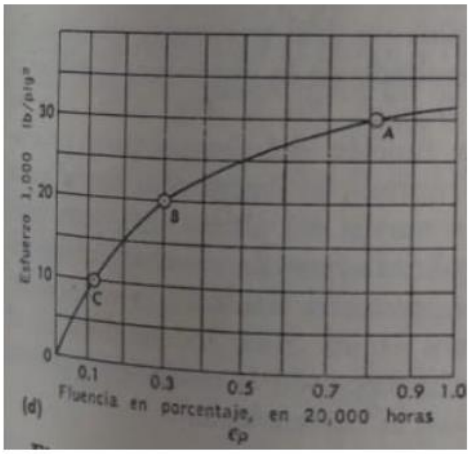


Figura 6. Gráfica fluencia (deformación) vs esfuerzo

La relación entre estas gráficas la reconocimos a partir de mirar los ejes coordenados en los cuales se hacían explícitas las variables y los valores que toman cada una, lo cual reflejó una secuencia y dependencia entre las variables involucradas: tiempo, deformación y esfuerzo.
Dicha relación se da a partir de reconocer dos variables (ver Figura 4) en la que se presentan ciertos comportamientos. Uno de ellos es cuando los valores (imágenes) que se obtienen al evaluar en el tiempo $t = 20$ son los nuevos valores (dominio) que serán relacionados con una tercera variable (ver Figura 5).

De manera similar al ejemplo anterior, fue posible distinguir un uso de la composición de funciones caracterizado por el objetivo que dicho conocimiento persigue en la situación, su funcionamiento y formas específicas, así como su presencia en conjunto con otras nociones matemáticas que le dan sentido (ver Tabla 4).

Tabla 4. Uso, funcionamientos y formas de la composición de funciones en la situación 2

Uso:	Cuantificar el cambio del esfuerzo a partir de la fluencia y el tiempo necesario.
Funcionamiento:	Estudiar el comportamiento de una variable a partir de otras dos, como una relación entre esfuerzos, temperaturas y deformaciones.
Forma:	De manera puntual, es decir, con respecto a cada gráfica, en la gráfica (b), se distinguen tres puntos coordenados (x_n, y_n) A, B y C, cada uno perteneciente a una línea recta con diferente pendiente. En la gráfica (d) podemos observar que, dado los puntos anteriormente analizados, los valores de y_n ahora son valores de x_n, es decir, ahora ya no son valores que forman parte de un rango, sino de un dominio. Además, no se toman todos los valores del porcentaje de deformación en cualquier tiempo, sino solo para los que se definen en $t = 20{,}000$ hrs., en el cual se encuentran los puntos A, B y C. De manera global, las gráficas se relacionan a partir de la variable deformación, pues ésta es la que permite hacer una conexión entre el tiempo y el esfuerzo.

	Existe un cambio de dominios: Para la gráfica (b) el dominio son los valores de la variable tiempo mientras que el rango son valores de la variable deformación. En la gráfica (d), ahora los valores de la variable deformación se consideran pertenecientes a un dominio y los valores de la variable esfuerzo son de un rango. Además, se optimizan los resultados de los valores específicos, cada uno en tres rectas diferentes a una sola curva.
Otras nociones matemáticas involucradas	Variación, dependencia entre variables, variable cuantitativa, variables continuas, línea recta, línea curva.

Consideraciones finales

Reportamos algunos breves resultados del uso de la composición de funciones en el ambiente profesional de la ingeniería civil a partir de los libros de su área, donde la optimización y cuantificación de cambios han sido los principales objetivos de este conocimiento en las situaciones específicas analizadas, mismas que son parte de los quehaceres del ámbito profesional de los ingenieros.

Al respecto, se hacen evidentes dichos usos a partir de la caracterización que los hace ser desde ese contexto, como el hecho de ser situaciones donde se involucran más de dos variables o estados que dependen entre sí, la necesidad de cuantificar los cambios que presentan dichas situaciones, la optimización, la relación entre lo que matemáticamente conocemos como dominios y rangos de las relaciones de dependencia, entre otras. Además, la composición de funciones no aparece de manera aislada, sino que se hace presente en conjunto con nociones matemáticas como el tipo de variables (cuantitativas o cualitativas, discretas o continuas), la variación, la línea recta o curva para la modelación de la situación, entre otras, lo cual nos deja ver que la matemática si permea en este tipo de ambientes profesionales y, además, es diversa.

A partir del análisis socioepistemológico realizado con base en los significados del conocimiento matemático composición de funciones, pudimos observar que el uso de éste permea en la realidad profesional de la ingeniería civil, dando evidencia de que las categorías identificadas bajo dicho análisis nos concedieron indagar usos en la comunidad de estudio.

Es gracias a este análisis lo que nos ha permitido dar evidencia acerca del uso de la composición de funciones, en conjunto con su funcionamiento y forma, en situaciones específicas del escenario profesional. No descartamos que el uso de dicho conocimiento esté aislado de otros por lo cual también han sido reportadas algunas nociones matemáticas que acompañan al uso del conocimiento y que son importantes para su significación en las situaciones.

Debido a que la investigación sigue en curso, esperamos poder identificar otros libros esenciales para la formación de un ingeniero civil de la UADY y, con base en las categorías de uso, apreciar más ejemplos que puedan proporcionarnos una evidencia con mayor solidez de lo presentado en este escrito.

De igual manera, esperamos seguir encontrando evidencias asociadas a cada una de las categorías de uso que generen una epistemología de usos desde el contexto de la ingeniería civil y aportar hacia una matemática funcional y significativa.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *La modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(1), 103-128.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, *10*(1), 7-38.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Font, V. y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20*, 376-381. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Keyser, K. (1985). *Ciencia de Materiales para Ingeniería.* México: Limusa Noriega Editores.

Mendoza, E. (2013). *Matemática funcional en una comunidad de conocimiento: el caso de las ecuaciones diferenciales lineales en la ingeniería*. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de estudios avanzados del IPN. México.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y* Reflexiones (61-88). México: Lectorum.

Piralla, M. (2002). *Diseño estructural*. México: Limusa Noriega Editores.

Tobón, S. (2008). *La formación basada en competencias en la educación superior: el enfoque complejo.* Guadalajara, mx: Universidad Autónoma de Guadalajara.

Tuyub, I. (2010). Un papel de la función matemática en la práctica toxicológica. *Abstraction y Aplication*, *3*, 21-34.

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de Ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 145-175.

RETOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS PARA LA TRANSVERSALIDAD DE GÉNERO EN LAS INVESTIGACIONES DE CORTE SOCIOEPISTEMOLÓGICO

THEORETICAL AND METHODOLOGICAL CHALLENGES FOR GENDER TRANSVERSALITY IN SOCIOEPISTEMOLOGICAL STUDIES

María Guadalupe Simón Ramos, Rosa María Farfán Márquez, Claudia Rodríguez Muñoz
Universidad Autónoma de Tamaulipas, PIDPDM, Cinvestav. (México)
gsimon@docentes.uat.edu.mx, claurom65@gmail.com, rfarfan@cinvestav.mx,

Resumen
Las primeras reflexiones de este grupo alrededor de nuestro fenómeno de estudio se han centrado alrededor de la variable didáctica identificando que existen estereotipos de género que se promueven al interior de las aulas que frenan el desarrollo del pensamiento matemático tanto de hombres como de mujeres. Recientes trabajos nos han llevado a concluir que hacer investigación en género y matemáticas implica más que poner nuestra atención en las diferencias en las pruebas estandarizadas o el aprovechamiento escolar para ambos sexos, sino en las raíces de esta problemática y cómo son trastocadas por la matemática a través del discurso matemático escolar.

Palabras clave: socioepistemología, perspectiva de género

Abstract
The first reflections of this group with respect to our object of study has focused on the didactic variable, identifying that there are gender stereotypes promoted in the classrooms which hinder the development of mathematical thinking in both men and women. Recent studies has led us to conclude that to do research on gender and mathematics implies more than to pay attention to the differences in standardized tests or academic progress for both sexes, but to approach the roots of this problem and how they are changed by mathematics through the school mathematical discourse.

Key words: socio-epistemology, gender perspective

Introducción

El grupo de discusión sobre género y matemática educativa tuvo su tercera reunión en esta Relme 33. La primera de ellas centro su foco de atención en los trabajos que se han realizado sobre la inclusión de la variable género en las investigaciones en matemática educativa. En la segunda reunión del grupo se discutió sobre el papel del conocimiento matemático en el proceso de exclusión que han sufrido las mujeres a lo largo de la historia, especialmente en las áreas STEM (por sus siglas en inglés Science, Technology, Engineeering and Mathematics).

Ahora, en esta ocasión nos planteamos discutir con la comunidad sobre las reflexiones teórico-metodológicas que a lo largo de más de 10 años de investigación en esta línea han surgido. Preguntas del siguiente tipo han sido motivo de reflexión en el grupo ¿Cómo una mujer piensa a las matemáticas? ¿Si cambiamos al sujeto cognocente, cambia la forma como se aborda un problema matemático? ¿Por qué un diseño didáctico puede considerarse con perspectiva de género?

Las primeras reflexiones de este grupo alrededor de nuestro fenómeno de estudio "género en la enseñanza de las matemáticas" se han centrado alrededor de la variable didáctica. Hemos identificado que existen diversos estereotipos de género que se promueven al interior de las aulas los cuáles frenan el desarrollo del pensamiento matemático tanto de hombres como de mujeres.

Nuestros más recientes trabajos nos han llevado a concluir que hacer investigación en género y matemáticas implica más que poner nuestra atención en las diferencias en los resultados de las pruebas estandarizadas como PLANEA o PISA o el aprovechamiento escolar de mujeres y hombres, sino en las raíces de esta problemática y cómo son trastocadas por la matemática (Farfán y Simón, 2016).

En la actualidad al interior del grupo se realizan investigaciones que pretenden trastocar los estereotipos que se han construido acerca de las habilidades cognitivas de las mujeres, por ejemplo, las que se refieren a las habilidades visoespaciales.

Desde la perspectiva Socioepistemológica no sólo el ambiente de aula, las acciones de los docentes y los estudiantes juegan un papel en la construcción de conocimiento. Lo juega también aquello que se pretende enseñar (la matemática misma), su construcción, así como usos históricos y socioculturales.

Algo que es muy claro es que, en el aula tradicional, las mujeres y otros grupos sociales (minorías étnicas, bajos recursos económicos, discapacidad, etc.), quedan excluidos de la construcción de conocimiento matemático por razones ajenas a sus capacidades en. Matemáticas. Desde la teoría Socioepistemológica se han dado caracterizaciones, cada vez más finas, sobre el discurso que vive en las aulas, el cual se ha denominado "discurso matemático escolar". Pero dado que las mujeres siguen representando una minoría en las áreas STEM vale la pena preguntarse ¿Cómo el discurso matemático escolar excluye a las mujeres? (Simón, 2018).

Hemos identificado que este discurso no reconoce a las mujeres como constructoras de conocimiento matemático, se reconoce en el aula figuras como la de Pitágoras, Newton, Euler, sin tomar en cuenta a aquellas mujeres que a lo largo de la historia han contribuido a éste y mucho menos a las mexicanas o latinoamericanas. Este discurso matemático dominante no permite a las mujeres que el conocimiento tenga una utilidad, no solo para tratar casos particulares, sino para hacer un bien a la comunidad. Su enseñanza es abstracta, sin marcos de referencia en los cuáles el conocimiento sea contextualizado, se le dé un sentido y significado, además de estar seriado en una lista de temas continua y lineal que no permite una reflexión global sobre como la matemática vive en nuestro cotidiano.

Marco teórico

Los estudios de género en matemática educativa en México se vienen realizando desde hace más de 15 años desde diversas corrientes teóricas. El grupo de discusión sobre género y matemática educativa se reunió por vez primera en la RELME 30 en Monterrey, México, El grupo planteó una discusión desde dos perspectivas teóricas, que a su modo buscaban dar una respuesta a una problemática que desde los años 70´s ha sido analizada (Fenema, 1974). Presentamos un breve análisis de cómo estas problemáticas han ido evolucionando de tal forma que podemos ahora plantear aquello que es necesario hacer para reforzar las investigaciones dentro de esta temática.

Estas investigaciones han señalado las diferencias en el desempeño matemático entre estudiantes de distintos niveles y han dado cuenta de una gran variedad de factores que se atribuyen a estas diferencias de género (Eccles, 1989; Vale, 2008 y Simón 2016), algunos estudios reportan los factores que diferencian el desempeño académico de las estudiantes por debajo de sus compañeros, por ejemplo, las creencias y concepciones (Andrews y Hatch, 2000); la motivación (Middleton y Spanias, 1999); algunas variables cognitivas y de actitud hacia las matemáticas (McGraw, et al., 2006; Pierce, Stacey y Barkatsas, 2007); la auto-confianza para trabajar en Matemáticas (Eccles, 1989; Jacobs et al., 2002 y Ursini et al., 2004).

En investigaciones previas de algunas integrantes del grupo, se han explorado las actitudes, creencias, motivaciones, afectividad y logro académico en la asignatura de matemáticas de las y los estudiantes sobre todo en secundaria nos han permitido mirar, las distintas formas que las mujeres construyen y negocian su *"ser estudiantes de matemáticas",* y diversas maneras de relacionarse con la comunidad escolar en el aula de matemáticas (Inmujeres, 2010; Rodríguez y Ursini, 2014 y Farfán y Simón 2018).

A lo largo de 10 años de investigación Rodríguez y Ursini (2012) han buscado identificar cómo funcionan los mecanismos de discriminación/exclusión de las mujeres dentro del aula de matemáticas a finales del nivel primaria (8-12 años) y durante toda la secundaria (12-15 años) dentro de escuelas públicas.

Ellas han identificado que las interacciones dentro del aula y con el conocimiento son importantes pues las estrategias didácticas que legitiman a las niñas como comunicadoras matemáticas, modifica la participación, la autopercepción y la autoconfianza como aprendices.

Además, esta investigación confirmo que la construcción del conocimiento en el aula de Matemáticas no está limitada a la interacción del profesor y sus estudiantes, sino que abarca una serie de redes de interacción social (familia) que toca al entorno sociocultural de la clase.

Por su lado, el grupo liderado por Rosa María Farfán, denominado "Género y matemáticas", hasta ese momento se había enfocado en analizar las interacciones con el conocimiento matemático de grupos específicos de mujeres. En la investigación realizada junto con Simón (Farfán y Simón, 2016) proponen un modelo de Análisis del Desarrollo del Talento de las Mujeres en Matemáticas. Dicho modelo se centra en el individuo como constructor de conocimiento, dentro de un contexto sociocultural. Por tanto, la matemática es producto de dicha construcción social. Y, al considerar al conocimiento matemático en uso relativo al individuo y su contexto, plantearon una visión dinámica de la inteligencia que toma al talento como desarrollable respecto a un ámbito específico, la matemática.

Bajo esta perspectiva realizaron el seguimiento de un pequeño grupo de 5 estudiantes (3 niñas y 2 niños) dentro de un programa de atención a las capacidades sobresalientes. Al analizar los desempeños de este grupo en talleres científicos y en su día a día en dicho programa, identificaron que la base principal de los razonamientos de las jóvenes está en la situación problemática misma; es decir, es a través de la observación y el análisis de los elementos propios de la situación o del experimento que ellas evolucionan sus deducciones matemáticas. Aspectos relacionados a qué es lo que se estudia (movimiento, temperatura), qué es lo que cambia (resorte, agua, hielo), cuáles son sus características (flexible, muy frío, muy caliente), cómo cambia (rápido, lento, de golpe, suave), son

los que juegan un papel principal en el establecimiento de conjeturas, razonamientos, explicaciones y argumentaciones.

López (2016) en colaboración con Farfán desarrolló un trabajo de investigación que se enfocó en el nivel educativo siguiente, medio superior (15-18 años). Este tuvo como objetivo estudiar con perspectiva de género, cómo el concepto de función es percibido por los estudiantes. A través de una encuesta y de entrevistas semiestructuradas (la mayoría mujeres) se analizó cómo los estudiantes perciben el concepto de función a través del uso de las desigualdades y de sus dos principales representaciones, la gráfica y la algebraica.

Uno de los hallazgos más importantes fue que las gráficas son preferidas mayormente por mujeres y sus argumentos son distintos a los de los hombres. De acuerdo al trabajo realizado por el grupo de Modelación-Graficación, citado por Buendía (2012) el cual tiene entre sus resultados que la gráfica antecede a la función, pues la graficación conforma elementos de construcción para el desarrollo de ideas variacionales, podemos concluir que las diferencias de género en el desempeño en matemáticas podrían estar fuertemente relacionadas con la preferencia de las mujeres hacia un pensamiento funcional que pueda sostener la construcción de conceptos matemáticos.

Dados estos resultados, en ese primer momento estábamos en condiciones de ofrecer sugerencias al profesorado sobre el trato de género en el aula y las estrategias didácticas que podrían favorecer la construcción de conocimiento matemático. Algunas de estas fueron:

- Profesores y profesoras deben trabajar en la deconstrucción de estereotipos de género.
- Erradicar el lenguaje sexista.
- Incorporar la difusión de trayectorias científicas de mujeres matemáticas.
- Desarrollar diseños didácticos que favorezcan la construcción de conocimiento matemático desde un enfoque sociocultural.
- Fortalecer la habilidad comunicativa matemática de las y los estudiantes.
- Fomentar la validación grupal de resultados en tareas matemáticas.
- Fortalecer el desarrollo de pensamiento matemático de forma igualitaria entre los sexos.

En la segunda reunión del grupo se discutió sobre el papel del conocimiento matemático en el proceso de exclusión que han sufrido las mujeres a lo largo de la historia, especialmente en las áreas STEM. Se analizó el papel de las mujeres en el desarrollo del conocimiento desde la prehistoria y cómo al tiempo que este se convertía en una actividad que les exigía alejarse de casa y no poder cuidar de los hijos las actividades que en un tiempo habían sido de dominio femenino como la agricultura, la alfarería o la botánica se volvieron completamente masculinas. Fue así que el papel de la mujer en el desarrollo de la ciencia y la tecnología empezó a entrar en decadencia (Alic, 1991, citado en Farfán y Simón 2016). Y se sentaron las bases del orden social que ha llevado a los varones a ocupar un papel hegemónico.

Cómo fue que las mujeres quedamos excluidas de los espacios en los que se generaba conocimiento matemático:

La matemática se separó del resto de las ciencias para desarrollarse en sí misma, un saber construido por el poder hegemónico. Con sus propios principios y leyes, los cuales no provienen (o no deben provenir) de la experiencia tangible sino del establecimiento de relaciones entre definiciones, axiomas y teoremas. Es decir, la matemática se revestía de características atribuidas al género masculino donde: la razón, el saber, el intelecto, la excelencia, lo legítimo, lo medible y perfecto va apareciendo como sinónimos por estar exentos de emociones, de afectos, de intuición, de intangibilidad, valores considerados puramente femeninos (Fernández, 2010).

Este modo de pensamiento, de origen puramente androcéntrico sobre las matemáticas, su aprendizaje y valor social, regula las interacciones al interior de las aulas: las relaciones familiares y escolares, las intervenciones pedagógicas

y didácticas, el logro y desempeño escolar, así como las motivaciones e intereses desarrollados por parte de las jóvenes mujeres (Farfán y Simón, 2016).

Todo ello llevó a que en la actualidad las mujeres que estudian carreras de matemáticas o de las áreas STEM estén sub-representadas, tal como se muestra en el siguiente gráfico. Llevando con esto a la sociedad a perderse de sus habilidades, tan importantes para el desarrollo de las naciones en la actualidad.

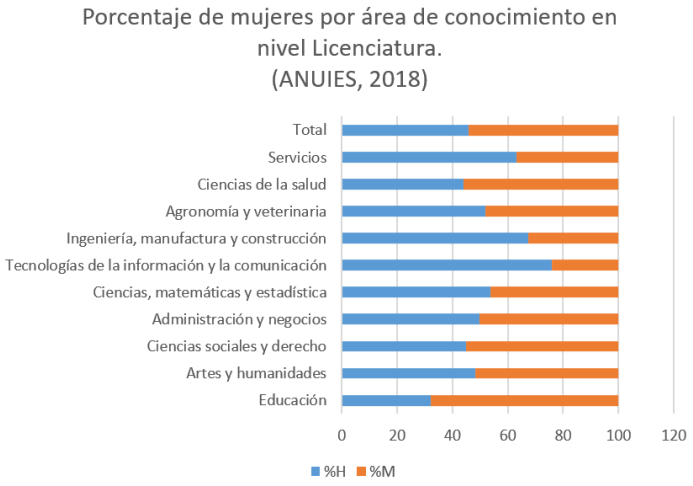


Gráfico 1. Representación de mujeres y hombres por área de conocimiento

La discusión se centró en analizar junto con las ponentes y los asistentes la necesidad de derribar estereotipos de género que impiden el desarrollo de las mujeres al interior de las aulas, en las universidades y como parte de grupos académicos.

Metodología de discusión del grupo

Se presentaron de manera breve a los participantes y al público asistente un resumen de las investigaciones que se han realizado en el grupo alrededor del tema (género en la enseñanza de las matemáticas) desde diferentes posturas teóricas (teoría de representaciones sociales, Socioepistemología y epistemología feminista), con el objetivo de destacar las preguntas que han dejado abiertas dichos trabajos y las reflexiones que se tienen en la actualidad.

Se expusieron, discutieron y analizaron también las investigaciones que se realizan actualmente, tomando como eje la forma en la que fueron concebidas, es decir, las preguntas desde las cuáles parten, las necesidades teóricas y metodológicas de dichos cuestionamientos, así como las hipótesis y supuestos que se tienen actualmente.

Presentamos a continuación las posturas del grupo que fueron analizadas durante RELME 33, las reflexiones, nuevos cuestionamientos y aquellos que siguen estando pendientes en nuestra agenda.

Posturas del grupo

Para comenzar esta reflexión quisiéramos plantear una pregunta ¿Por qué nos interesan los estudios de género en matemática educativa? De manera general, la matemática educativa se ocupa de la enseñanza de la matemática y su mejora progresiva (Cantoral y Farfán, 2001). En especial, a través del tiempo, la enseñanza de la matemática ha

sido tema de preocupación de todas las sociedades por su importancia en el desarrollo de otras áreas del conocimiento, en la actualidad, de vital importancia para las disciplinas STEM, consideradas la base del desarrollo sostenible inclusivo y justo. Las cuáles cada vez demandan mayor fuerza de trabajo en áreas técnicas y profesionales. Desde la perspectiva de género se considera que la participación de las mujeres enriquecerá y ampliará la visión en estas áreas. Pero justamente se trata de aquellas áreas en las cuales las mujeres tienen una participación minoritaria. Pues se ha identificado que el desarrollo económico, laboral, académico y personal de las mujeres esta sesgado por la cultura hacia los cuidados de los otros y otras.

Promover la igualdad entre los géneros femenino y masculino y lograr el empoderamiento de las mujeres han sido parte de políticas públicas internacionales de la Organización de las Naciones Unidas a través de los Objetivos de Desarrollo del Milenio (desde 2015 Objetivos de Desarrollo Sostenible) (ONU, 2019). En suma, nuestra sociedad actual necesita del talento de las mujeres.

Las principales líneas teóricas, que desde la matemática educativa han abordado esta problemática, la socioepistemología, la teoría de las representaciones sociales y la perspectiva de género; coinciden en un punto en particular, uno de los aspectos primordiales en la enseñanza de las matemáticas es “la (el) aprendiz” con su cultura, conocimientos, historia y saberes, en otros términos teóricos, sus representaciones sociales.

Desde esta perspectiva, vale la pena preguntarse ¿Cómo una mujer piensa a la matemática?, pregunta para la cuál en este momento no tenemos una respuesta, pero si podemos asegurar que, dado que su cultura, sus conocimientos, su historia y sus saberes han sido trastocados por las atribuciones sociales hechas a su género, la forma en la que una mujer piensa la matemática no puede ser igual a la de un hombre y a su vez las representaciones sociales existentes alrededor de la matemática influyen en el desempeño de las estudiantes dadas las interacciones que con dicho conocimiento tienen las jóvenes dentro de las aulas, en su vida cotidiana e incluso dentro de su entorno familiar, sin soslayar las expectativas que docentes y familiares tienen hacia el aprendizaje de las matemáticas en el caso de las mujeres.

Si bien, las primeras reflexiones de este grupo se han centrado en la variable didáctica y el ambiente de aula, en los últimos años se han realizado investigaciones que buscan dar cuenta de la forma en la que las mujeres abordan un problema matemático, investigaciones como la de Carranza y Farfán (2019); Farfán y López (2015) y Farfán y Simón (2015) han evidenciado que aquello que está en la base de los razonamientos y argumentaciones de las mujeres está más relacionado con la funcionalidad del conocimiento, considerado este último como la integración de usos y significados de un objeto matemático en una situación específica (Cordero, Gómez, Mendoza y Solis, 2015).

Actualmente, en la búsqueda de enfrentar uno de los retos teórico-metodológicos de nuestro grupo de investigación, se realizan investigaciones que pretenden analizar con profundidad a nivel cognitivo el desarrollo del pensamiento matemático de las mujeres. Una de las investigaciones analizadas durante la sesión del grupo es la realizada por Farfán y Ortiz (2019), la cual, dados los resultados de numerosas investigaciones de los años 70’s que han identificado diferencias en el razonamiento espacial de mujeres y hombres (Spelke, 2005). Diferencias en su mayoría medidas a través de pruebas estandarizadas que analizan las diferencias cuantitativamente por sexo. Las investigadoras mencionadas trabajan en un diseño de situación de aprendizaje, desde la teoría socioepistemológica, que permita identificar las características del razonamiento espacial de las mujeres en el trabajo geométrico.

Lo anterior pone en mesa de discusión otro de nuestros grandes cuestionamientos ¿Puede un diseño de situación de aprendizaje considerarse con perspectiva de género? Algunos de los hallazgos de nuestras investigaciones nos permitieron identificar que las situaciones de aprendizaje de la socioepistemología permitían a las mujeres participar motivadas e interesadas de la actividad matemática, por medio de valorar e incluir sus experiencias, argumentos y razonamientos particulares como parte de la construcción de conocimiento (Farfán y Simón, 2016; Farfán y Carranza, 2019). En ese momento pareciera que nuestro problema habría sido resuelto, sin embargo, el análisis y

puesta en escena de nuestros diseños nos ha llevado a identificar que se necesitan más investigaciones sobre como el discurso matemático escolar excluye a las mujeres.

En aras de ahondar más a profundidad en la forma como el discurso matemático escolar (definido desde la teoría socioepistemológica) presentamos a la comunidad nuestras recientes reflexiones al respecto.

Cantoral y sus coautores (2006) mencionan que este discurso se refiere al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos. De este modo, dicho discurso se refiere más que a los planes, programas de estudio y libros de texto, también a las creencias y concepciones de profesores, estudiantes y comunidad académica en general. Cantoral y Soto (2014) mencionan que este discurso reproduce una particular forma de hegemonía que produce exclusión. Dicho discurso tiene las siguientes características y formas en las que excluye a las mujeres de la construcción de conocimiento matemático (Tabla 1):

Tabla 1. Exclusión hacia las mujeres en el discurso matemático escolar.

Discurso Matemático Escolar Actual	Formas en las que excluye a las mujeres
Carácter utilitario	La forma en la que las jóvenes construyen conocimiento matemático está estrechamente relacionada con el uso y funcionalidad de este conocimiento. Características que no se privilegian en el discurso matemático escolar tradicional.
Atomización de conceptos	No considera los aspectos sociales, contextuales y culturales propios del rol de juegan las mujeres en la sociedad.
Carácter hegemónico	Reconoce principalmente a la figura masculina como constructora de conocimiento matemático.
Conocimiento acabado y continuo	La mecanización de conceptos o memorización de procedimientos no está dentro de las metas principales de las mujeres, pues su estilo de aprendizaje es abierto y reflexivo.
Falta de marcos de referencia para su resignificación	Los marcos de referencia en los cuáles se da significado al conocimiento matemático no son aquellos en los que tradicionalmente las mujeres participan.

Como podemos observar, este discurso no reconoce a las mujeres como constructoras de conocimiento matemático, se reconoce en el aula figuras como la de Pitágoras, Newton o Einstein, sin tomar en cuenta a aquellas mujeres que a lo largo de la historia han contribuido a éste y mucho menos a las mexicanas o latinoamericanas. En México tenemos a Elvira Zenaida Ramos o a Mónica Clapp, solo por mencionar algunas. De este modo se ha desarrollado la idea de que el conocimiento matemático solo es producido por los hombres y solo ellos tienen la capacidad para hacerlo. Por ejemplo, en la edad media los hombres dedicados a la ciencia eran considerados magos y las mujeres eran llamadas brujas y las quemaban en la hoguera. Este discurso matemático dominante no permite a las mujeres que el conocimiento tenga una utilidad, no sólo para tratar casos particulares, sino para hacer un bien a la comunidad. Su enseñanza es abstracta, sin marcos de referencia en los cuáles el conocimiento sea contextualizado, se le dé un sentido y significado, además de estar seriado en una lista de temas continua y lineal que no permite el movimiento entre ellos.

Implicaciones

Continuar investigando, reflexionando y discutiendo en torno a las rutas teóricas metodológicas que nos permitan la transversalidad de género en la democratización de la construcción social del conocimiento matemático, dará mayores certezas en el rediseño del discurso matemático escolar. Que las mujeres puedan entretejer una matemática funcional, cooperativa, reveladora de sus potenciales talentos generará sin duda un giro al desarrollo de la humanidad.

La construcción de conocimiento científico y tecnológico será enriquecida por la participación de más mujeres talentosas, la condición social y económica de las mujeres también romperá la brecha de género que actualmente las coloca en desventaja.

Conclusiones

La trayectoria de las investigaciones realizadas por nuestro grupo ha permitido develar elementos que limitan o favorecen el desarrollo de las estudiantes en la construcción y comunicación del conocimiento matemático en los diferentes niveles educativos en los que indagamos.

Conocemos de mejor manera cómo el discurso matemático escolar hegemónico excluye a las mujeres y a los hombres. Sabemos que el diseño de situaciones de aprendizaje desde la teoría socioepistemológica configura un rediseño del discurso matemático escolar, favoreciendo tanto a mujeres como hombres que estudian matemáticas.

El reto en futuras investigaciones será ver si es posible diseñar situaciones de aprendizaje desde la teoría socioepistemológica con perspectiva de género, que brinde mayores luces en el análisis profundo de los entramados cognitivos del desarrollo del pensamiento matemático de las mujeres.

Referencias bibliográficas

Andrews, P. y Hatch, G. (2000). A comparison of hungarian and english teachers' conceptions of mathematics and its teaching. Educational Studies in Mathematics 43 (1), 31-64.

Buendía G. (2012) El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación matemática*, 24(2), 9-35.

Cantoral R. y Farfán R. (2001) Matemática educativa, una visión de su evolución. *Revista educación y pedagogía*, 15(35), 200-214.

Cantoral R., Farfán R., Lezama J., & Martínez–Sierra G. (2006). "Socioepistemología y representación: algunos ejemplos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking. 83-102.

Cantoral R. y Soto D. (2014) Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema: Boletín de Educación Matemática*, 29 (50), 1525-1544.

Carranza B. y Farfán R. (2019) Estrategias dinámicas para la introducción de la noción de variación en la ecuación diferencial ordinaria con perspectiva de género. Un caso de simulación digital del fenómeno de caída libre. Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Cordero F., Gómez K. Mendoza J. y Sólis M. (2015) El uso del conocimiento matemático en comunidades de ingenieros. Del objeto a la funcionalidad matemática. *Bolema Rio Claro,* 32(62), 1219-1243.

Eccles, J. S. (1989). Bringing young women to math and science. In M. Crawford & M. Gentry (Eds.), Gender and thought: Psychological Perspectives (pp. 36-58). New York: Springer.

Farfán R. y López (2016) ¿Gráficas o algoritmos? Un estudio con perspectiva de género. Tesis de maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Farfán R. y Ortiz V. (2019) Matemáticas y género: un estudio del razonamiento espacial. Revista acta latinoamericana de Matemática Educativa, 32(1), 434-440.

Farfán R. y Simón M. G., (2016) *La construcción social del conocimiento. El caso de género y matemáticas*. CDMX: Gedisa.

Farfán R. y Simón M. G., (2018) El desarrollo del talento en matemáticas desde la Socioepistemología y la perspectiva de género: Un estudio de biografías. *Bolema. Rio Claro*. 32(62), 946-966.

Fennema, E. (1974). Mathematics learning and the sexes: A review. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*(3), 126–139.

Fernández L. (2010) Género y ciencia: Entre la tradición y la transgresión. En N. Blazquez, F. Flores y M. Ríos. (Coords.) Investigación feminista. Epistemología, metodología y representaciones sociales. (pp. 79-110) Ciudad de México: UNAM.

Inmujeres (2010) Género y desarrollo. Investigación para la igualdad sustantiva de las mujeres. México: Instituto Nacional de las mujeres.

Jacobs, J. E., Lanza, S., Osgood, D. Eccles, J. & Wigfield, A. (2002). Changes in children's self-competence and values: Gender and domain differences across grades one through twelve. Child Development, 73 (1), 509 – 527.

McGraw, R., Lubienski, S. y Strutchens, M. E. (2006). A Closer Look at Gender in NAEP Mathematics Achievement and Affect Data: Intersections with Achievement, Race/Ethnicity, and Socioeconomic Status. Journal for Research in Mathematics Education. 37(2),129-150.

Middleton, J., y Spanias, P. (1999). Motivation for achievement in mathematics: Findings generalizations and criticism of the research. Journal for Research in Mathematics Education 30(1), 65-88.

ONU (2019) Objetivos de desarrollo sostenible. Recuperado el 12 de mayo de 2020 de: https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/

Pierce, R., Stacey, K. & Barkatsas, A. (2007). A scale for monitoring students' attitudes to learning mathematics with technology. Computers & Education, 48, pp. 285–300.

Rodríguez, C. y Ursini, S. (2012) Representación social y género en la enseñanza de la matemática con una herramienta multimedia en México. Momento. *Diálogos em Educação* 21(2), 31-48.

Rodríguez y Ursini (2014) Mujeres y matemáticas escolares: un estudio longitudinal, sociocultural con estudiantes mexicanas. Revista acta latinoamericana de Matemática Educativa, 21(1), 1547-1556.

Simón M.G. (2016) Vertientes actuales de investigación en género y talento en matemáticas. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades*. 26(2), 109-135.

Simón M.G. (2018) Transversalidad de género en la enseñanza de las matemáticas. *De este lado. Revista feminista de divulgación científica*. 3(2), 17-26.

Spelke, E. (2005) Sex diferences in intrinsic aptitude for mathematics and science? A critical review. *American psycologist,* 60(9), 950-958.

Ursini, S., Sanchez, G., Orendain, M., & Butto, C. (2004). El uso de la tecnología en el aula de matemáticas: diferencias de género desde la perspectiva de los docentes. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 409-424.

Vale, C. (2008). Trends and factors concerning gender and mathematics in Australasia, ICME (2008), TSG 32: Gender and mathematics education, Recuperado 10 de enero 2012 de http://tsg.icme11.org/document/get/169

REPRODUCCIÓN CONTINUA DE COMPORTAMIENTOS DISCONTINUOS. DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE A LA CONTINUIDAD DE LA REPRODUCCIÓN DE COMPORTAMIENTOS

CONTINUOUS REPRODUCTION OF DISCONTINUOUS BEHAVIORS; FROM THE LAPLACE TRANSFORM TO THE CONTINUITY OF BEHAVIOR REPRODUCTION

Falconery Mauricio Giacoleti-Castillo, Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (México)
falconery.giacoleti@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx

Resumen
Se reporta un avance de una investigación de corte cualitativo, situada en el programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes*, la cual se enfoca en dar cuenta de la emergencia de la *reproducción continua de comportamientos discontinuos* en una *comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación*, revelando *usos* de la Transformada de Laplace cuando diseñan un sistema de control. Exponemos el tratamiento que tiene la Transformada de Laplace en la matemática escolar, el cual ocurre con una centración al objeto matemático, dejando de lado su *funcionalidad*. Además, mencionamos algunos estudios realizados acerca de esta transformada y cuál ha sido su interés de investigación. Finalmente, presentamos una estructura epistemológica conformada por dos factores funcionales que la comunidad pone en juego al diseñar el sistema de control; estos factores le dan sentido funcional a la *reproducción continua de comportamientos discontinuos* y dotan de *significado* a la Transformada de Laplace.

Palabras clave: Transformada de Laplace, sistemas de control, comportamientos continuos y discontinuos

Abstract
A qualitative research preview is reported, focused on the socio-epistemological program *Forgotten Subject & Transversality of Knowledge*. This research is aimed at showing the emergence of the continuous reproduction of discontinuous behaviors in a community of mathematical knowledge of electronic engineers in training; revealing uses of Laplace Transform when designing a control system. We expose the treatment of the Laplace Transform in school mathematics, which occurs with a focus on the mathematical object, leaving aside its *functionality*. In addition, we mention some already made studies about this transform and their research interest as well. Finally, we present an epistemological structure made up of two functional factors that the community puts at stake when designing the control system; these factors give functional meaning to the *continuous reproduction of discontinuous behavior* and provide *meaning* for Laplace Transform.

Key words: Laplace Transform, control systems, continuous and discontinuous behaviors

Introducción

(TL). A diferencia de temas como la derivada o la integral, en los cuales, en el mejor de los casos, los textos o los profesores tratan que el estudiante construya y atribuya significados de esos conceptos a partir de conocimientos previos, la TL se presenta en el aula como una representación simbólica dada por la integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$. Cordero y Miranda (2002) mencionan que la TL es introducida en el medio escolar como una herramienta cuyas propiedades formales son ventajosas para resolver ecuaciones diferenciales lineales, y en ningún momento es construida o motivada por algún medio físico o geométrico o a partir de un conocimiento previo. En este sentido, la escuela presenta a la Transformada de Laplace carente de un marco de referencia de significados y de origen de las condiciones que permitieron su construcción. Giacoleti-Castillo y Cordero (2019) mencionan que el discurso matemático escolar centra su atención en el carácter algorítmico de la fórmula de la Transformada de Laplace y de sus propiedades útiles para resolver ecuaciones diferenciales lineales, prevaleciendo de esta manera el utilitarismo de este conocimiento matemático y no su funcionalidad en el cotidiano (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Este proyecto de investigación se sitúa dentro del programa socioepistemológico *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)* (Cordero, 2016a, 2016b). El propósito principal de SOLTSA es revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo y en la ciudad (Cordero, 2017).

Nuestra investigación se enfoca en dar cuenta de la emergencia de la *reproducción continua de comportamientos discontinuos* en una *comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación (CCM(IE_F))*, cuando diseñan un sistema de control. En esta emergencia, se revelan *usos* de la Transformada de Laplace, la cual se resignifica en esta *situación específica* de la comunidad.

Tomamos la situación de diseño de sistemas de control, dado que es una de las actividades centrales en la práctica cotidiana de la ingeniería. Mendoza y Cordero (2018) señalan que los dispositivos artificiales construidos por ingenieros se conforman de procesos que se requieren controlar, de tal manera que se puedan reproducir las características y la estructura deseadas. Esto alude a la categoría de conocimiento *Reproducción de Comportamientos*, ya que se buscan reproducir características (comportamientos) deseadas.

En la descripción de estos comportamientos deseados, aparecen gráficas que típicamente son discontinuas, pero la reproducción de estos comportamientos se presenta con gráficas continuas. Esto nos motivó a hacer una inmersión en una comunidad de ingenieros electrónicos que diseñan un sistema de control; de tal manera que pudiésemos revelar las argumentaciones funcionales referentes a la reproducción continua de comportamientos discontinuos, en la situación específica de diseño del sistema de control en esta comunidad.

Problemática y algunos antecedentes

Al referirnos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, la investigación en Matemática Educativa ha reportado acerca de la importancia de considerar a todos los agentes involucrados en dicho proceso educativo. Sin embargo, el panorama que describen los resultados de investigación —particularmente, aquellas basadas en la construcción social del conocimiento— es que la educación matemática está permeada por un discurso matemático escolar (dME) caracterizado por ser hegemónico, de tal manera que dicta la matemática que se debe enseñar y aprender, y excluye el uso del conocimiento matemático del que aprende. En este sentido, Cordero (2016a) menciona que en los modelos educativos siempre hay un sujeto olvidado. Este sujeto tiene varias expresiones: la realidad, el cotidiano, los usos del conocimiento y, en términos más genéricos, la gente. Esta última es significativa porque hace explícito el olvido del que aprende, del trabajador, del nativo y del ciudadano.

Cuando se olvida ese sujeto —es decir, se *excluye*—, obligadamente creemos que solo en el objeto matemático se encuentra la fuente del conocimiento matemático y, consecuentemente, nos *adherimos* al discurso hegemónico de la matemática escolar. De tal manera que podemos ver solo una matemática, aquella matemática escolar en la que se centra la enseñanza en las aulas de clases; sin embargo, no se valoriza la matemática del cotidiano, los usos del conocimiento matemático que se desarrollan en diferentes escenarios. En este sentido, existe una *opacidad* del conocimiento matemático, ya que el dME hace reconocer solo una argumentación del conocimiento matemático, pero excluye un conjunto de argumentaciones usadas en la construcción social del conocimiento en diferentes contextos y situaciones específicas. Lo anterior describe los tres fenómenos provocados por el discurso matemático escolar: *exclusión, adherencia* y *opacidad* (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015).

Ante tal problemática, Gómez y Cordero (2010) señalan una vía necesaria para valorizar los usos del conocimiento matemático del cotidiano:

> Es necesario recuperar la parte humana en la construcción del conocimiento y es precisamente el cotidiano lo que permitirá conseguirlo. Por tanto, resulta conveniente ampliar la problemática para lograr que estos elementos tengan cabida. Así, de enfocarse en los estudiantes de matemáticas en el aula, es preciso entender primero el cotidiano de los ciudadanos que se tienen enfrente. Se requiere ver al ciudadano que participa activamente en la vida cotidiana y que la modifica. Es importante que en el aula de matemáticas ya no se piense en el alumno, sino en el ciudadano. (p. 921)

Diversas investigaciones en matemática educativa que han realizado estudios en el campo de la ingeniería —algunas de ellas, ingeniería electrónica—, han tenido el interés de investigar asuntos relacionados con dificultades y/o habilidades operacionales de los estudiantes respecto a la Transformada de Laplace, así como también sobre el papel que tiene en proyectos que se proponen a estudiantes de ingeniería para que los desarrollen. Algunos estudios se interesan también en la implementación de software matemático cuando se resuelven problemas donde interviene esta transformada. En la siguiente tabla sintetizamos algunas de estas investigaciones:

Tabla 1. Algunas investigaciones acerca de la Transformada de Laplace

Autores de la investigación	Interés de la investigación	Descripción
Jáuregui, Ávila y Nesterova (2007)	Identificar habilidades al utilizar la Función Escalón Unitario de la TL	Las habilidades que los estudiantes poseen para representar analítica y gráficamente (en términos de la Función Escalón Unitario) las funciones definidas por intervalos se refieren al apoyo de la propiedad correspondiente de la TL.
Juárez e Irassar (2014)	Dificultades para resolver ecuaciones diferenciales que contiene una función definida por intervalos	Dificultades en el cálculo de la TL de funciones definidas por intervalos, escritas en forma analítica por partes o dadas en forma gráfica. Dificultades para resolver ecuaciones diferenciales, mediante la TL, cuyo término no homogéneo es una función continua por partes. Dificultades en la resolución de problemas que involucran procesos discontinuos.

Ruiz, Camarena y del Rivero (2016)	Implementación de software. Conocimientos previos	Se propone evaluar el desarrollo de habilidades operacionales de los estudiantes, al resolver eventos contextualizados de la TL en circuitos eléctricos, al emplear el software Maple 13.
Romo (2010)	El papel de la TL en proyectos que desarrollan estudiantes de ingeniería	Se cuestiona sobre el papel que juegan la TL en el desarrollo de las tareas de proyectos de ingeniería y cuál sería la praxeología realmente útil dado el uso de los recursos tecnológicos actuales.

Cuando nos referimos a la enseñanza y aprendizaje de la matemática en general, y particularmente en la ingeniería, sabemos que existen grandes retos que debemos afrontar. Durante varias décadas se han llevado a cabo investigaciones que buscan esclarecer la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y cuyos resultados han posibilitado que se implementen cambios con el propósito de mejorar la calidad educativa de las matemáticas. Sin embargo, en general, estos cambios que se han implementado no han podido obtener los resultados que se anhelan. Comúnmente, la visión de estas investigaciones gira alrededor de estudiar los objetos matemáticos y, particularmente, el interés de las que se muestran en la tabla 1 es estudiar el objeto matemático de la Transformada de Laplace, no los usos del conocimiento que están presentes en diversas comunidades; como, por ejemplo, los *usos* de la TL que un ingeniero electrónico pone en juego al diseñar sistemas de control, y que emergen en la comunidad de conocimiento a la que pertenece. No obstante, como se dijo antes, nuestra investigación se interesa en estudiar estos *usos*.

La Transformada de Laplace en libros de texto

Al revisar diferentes programas de estudio de varias escuelas del sistema universitario de México (en particular, en el área de Ingeniería), se ha encontrado que la Transformada de Laplace aparece por primera vez en los cursos de ecuaciones diferenciales y que casi todos los programas consultados tienen los mismos textos, entre estos, aparecen: Spiegel (1983), Edwards y Penney (1986) y Zill y Cullen (2006). En estos libros, la definición de la Transformada de Laplace es —sin muchas variantes— la siguiente:

Dada una función $f(t)$ *definida para* $t > 0$*, la Transformada de Laplace de la función* $f(t)$ *es la función* $F(s)$ *definida como* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ *para todos los valores de* s *para los cuales la integral converge.*

La Transformada de Laplace además aparece en otros cursos dirigidos a ingeniería; entre estos cursos están algunos de probabilidad, en especial en Ingeniería Electrónica, en donde la TL aparece junto con las series de Fourier, teoría de control y al análisis de señales y sistemas. En general, estos cursos son posteriores a los de ecuaciones diferenciales.

Según Cordero y Miranda (2002), en los textos de ecuaciones diferenciales, la introducción y definición de la Transformada de Laplace no ha variado desde la década de los 50's, y se revela la ausencia de argumentos que puedan dar significado gráfico o físico sobre el tipo de problemas que originaron su definición; esto implica que para enseñarla solo se parte de su definición simbólica. En algunos libros se dan referencias de que esta transformada se originó debido a los trabajos de Heaviside y sus métodos operacionales para resolver las ecuaciones diferenciales, pero no se dice cómo fue esto, ya que en esos libros los capítulos sobre soluciones de ecuaciones diferenciales por operadores (o métodos cortos) están desconectados con el capítulo de la TL, pues no se explica la relación de un método con el otro.

Además, en el sistema educativo la enseñanza de la TL está limitada a la manipulación de su expresión integral, calculando la transformada de funciones, probando sus propiedades, para después establecer un algoritmo que permite obtener la solución de algunos tipos de ecuaciones diferenciales —comúnmente, ecuaciones diferenciales lineales—.

En ese sentido, esto sirve como punto de partida para mirar la forma en que se introduce y se trata la Transformada de Laplace en el medio escolar —la cual ocurre con una centración al objeto matemático— y de esta manera dimensionar su papel predominante en lo habitual de la enseñanza en la Matemática Escolar. En otras palabras, tal como señalan Giacoleti-Castillo y Cordero (2019), el discurso matemático escolar no le da a la TL otro valor distinto que el algorítmico, centra su atención en el objeto matemático y deja de lado su valor funcional que se desarrolla en situaciones específicas del cotidiano de las comunidades de conocimiento matemático.

Consideraciones teóricas y metodológicas

Con base en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) (Cantoral, 2013), se plantea que la Matemática Escolar (ME) ha centrado su atención en el objeto matemático y ha generado un discurso Matemático Escolar (dME), nocivo, que ha soslayado un actor principal en la construcción de conocimiento matemático: el cotidiano (*sujeto olvidado*); esto es, la realidad de los sujetos, lo habitual de los escenarios donde este se sitúa y donde expresa usos rutinarios (Cordero, 2016a). La ME debe valorar los usos y significados de la gente e incorporarlos en la enseñanza de la matemática, reconociendo que las *prácticas sociales* son las generadoras de conocimiento matemático. Según menciona Cordero (2016b), el constructo *práctica social* se ha dotado de un significado tal que valora el sujeto olvidado, que es de vital importancia recuperar. De esta manera se reconocerá no solo una epistemología —dominante—, sino que se valorará el conocimiento matemático que la gente produce y usa en su entorno.

La postura teórica desde la cual concebimos al conocimiento matemático, nos permite entenderlo desde una racionalidad contextualizada, ya que, como resultado de diversas investigaciones que proveen de evidencia empírica a la TSME, se ha configurado una *Epistemología de lo Matemático*. Esta obedece a estructuras epistemológicas distintas, denominadas *Situaciones,* cada una de ellas (variación, transformación, aproximación, selección) construida a partir de *significaciones* relativas a su estructura epistemológica. Por ejemplo, para la construcción de *lo matemático* en la *situación de transformación*, las *significaciones* son los patrones de comportamiento gráfico y analítico, los *procedimientos* derivados de las significaciones son la variación de los parámetros, *los instrumentos* sobre los que se realizan los *procedimientos* son las instrucciones que organizan comportamientos. Todo esto genera la *argumentación* de la *situación de transformación*: el *Comportamiento Tendencial / Reproducción de Comportamientos*. Esta *argumentación* es la *resignificación de usos* de las gráficas (Cordero, 2008).

El constructo que denominamos *uso* lo entenderemos tomando en cuenta su *funcionamiento* y su *forma*. El funcionamiento del uso será aquella función orgánica de una situación, que se manifiesta por las *tareas* que componen la situación, y la forma del uso será la clase (tipo) de esas *tareas*. El *funcionamiento* y la *forma* son un binomio inherente al *uso*, de modo que el primero se expresa en las ejecuciones, acciones u operaciones que se desarrollan con la situación, mientras que la *forma* son las maneras cómo se llevan a cabo las tareas o ejecuciones. Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica, que debatirá con las formas de los usos. A este acto de uso se le llamará *resignificación de usos* (Cordero y Flores, 2007; Cordero, Cen y Suárez, 2010).

Para dar cuenta de la emergencia de la *reproducción continua de comportamientos discontinuos* en la CCM(IE_F) —y revelar *usos* y *significados* de la Transformada de Laplace que subyacen en el cotidiano de esta comunidad—, en esta investigación tomamos una metodología cualitativa. En un primer momento, hemos hecho una revisión

documental (artículos, libros sobre Ingeniería Electrónica y Teoría de Control) con el propósito de conocer sus intereses y problemáticas de su cotidiano. Para un segundo momento, se han considerado algunos elementos de la Etnografía (Guber, 2001), como el método de *inmersión* —en un sentido de acompañamiento permanente del investigador con la comunidad de conocimiento matemático—; esto, con el propósito de adentrarnos en la CCM(IE_F). En la toma de datos se hizo uso de técnicas que posibilitan el diálogo del investigador con la CCM(IE_F): entrevistas semiestructuradas y no estructuradas y observación participante.

La Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos en Formación

La consideración que tenemos de comunidad de conocimiento matemático (CCM) posee elementos que caracterizan lo propio de lo que es comunidad, es decir su naturaleza. No cualquier conjunto de personas agrupadas componen una comunidad; se debe distinguir a la comunidad de conocimiento de la individualidad, de lo público y de la universalidad. En ese sentido reconocemos tres elementos que constituyen una comunidad (Cordero, 2016a; Cordero y Silva-Crocci, 2012):

- *Reciprocidad*: se refiere a que el conocimiento de la comunidad se genera por la existencia de un compromiso mutuo.
- *Intimidad*: el uso de conocimiento matemático es propio y privado, no es público.
- *Localidad:* el conocimiento es local, y se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, lo regional, entre otros.

Estos tres elementos nos permiten separar lo individual, lo público y lo universal, e identificar lo propio de comunidad. De ahí la importancia de formular el constructo *Comunidad de Conocimiento Matemático* como una triada (reciprocidad, intimidad y localidad). Otro aspecto consiste en el uso del conocimiento matemático; para apreciar el uso se requiere de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia, en el seno de su comunidad. Por ello, importa la continuidad del conocimiento, es decir, la institucionalización como un eje transversal. Otro eje transversal es la identidad, la cual hace que una comunidad se distinga de otra. Esta identidad se conforma de momentos, tales como: legitimidad, resistencia y proyecto (Cordero, 2016a; Cordero y Silva-Crocci, 2012).

En la comunidad de conocimiento matemático de ingenieros electrónicos en formación CCM(IE_F) que estudiamos, hemos identificado aspectos de los elementos que constituyen dicha comunidad, los cuales son:

- *Comportamientos tendenciales de las señales del sistema de control*: conocimiento funcional referente a los elementos del sistema, que los miembros de la comunidad construyen al tener un compromiso mutuo en su proyecto, y al interactuar y dialogar recíprocamente con sus compañeros.
- *Reproducción continua de comportamientos discontinuos*: es la categoría de conocimiento matemático que emerge en la CCM(IE_F) y que revela el uso del conocimiento propio y privado, expresión de la intimidad de esta comunidad.
- *El diseño del sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas*: es la problemática local que atiende la comunidad, y esta se da por una coincidencia de ideas, jerga disciplinar de la ingeniería electrónica e intereses locales en su escenario escolar.

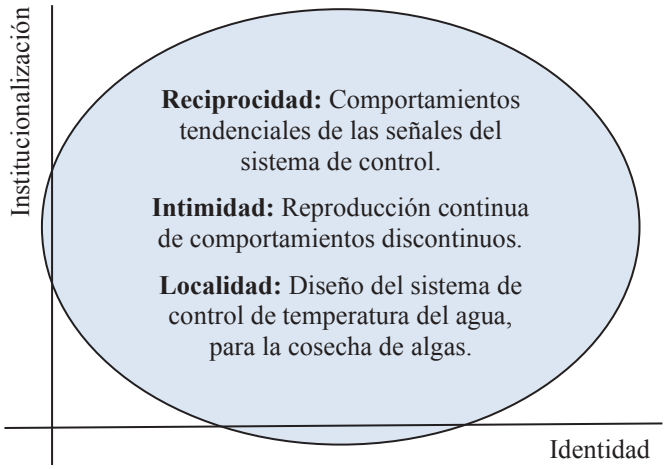


Figura 1. Modelo de Comunidad de Conocimiento Matemático de Ingenieros Electrónicos en Formación (CCM(IE_F))

Un Proyecto de la Comunidad de Conocimiento (CCM(IE_F)): Automatización de un Sistema de Control de Temperatura del Agua para la Cosecha de Algas

Los miembros de la CCM(IE_F) seleccionados en este estudio, son estudiantes de la carrera de Ingeniería Electrónica del Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, ubicado en el estado de Chiapas, México.

El perfil de la carrera de Ingeniería Electrónica en esta institución educativa es el siguiente:

> Diseñar, analizar y construir equipos y/o sistemas electrónicos para la solución de problemas en el entorno profesional, aplicando normas técnicas y estándares nacionales e internacionales. Asimismo, crear, innovar y transferir tecnología aplicando métodos y procedimientos en proyectos de ingeniería electrónica, tomando en cuenta el desarrollo sustentable del entorno. (Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, s.f.)

En este sentido, una de las actividades centrales en el cotidiano del ingeniero electrónico y de la CCM(IE_F) es el diseño de sistemas de control, ya que los equipos o sistemas electrónicos que ellos construyen están conformados por procesos que necesariamente tienen que controlarse, de tal manera que puedan cumplir con las especificaciones deseadas.

Los miembros de la comunidad seleccionados para el estudio son cuatro estudiantes que cursan la asignatura denominada *Control Avanzado*, que se ubica en el último semestre de su carrera. En el transcurso de esta asignatura se llevan a cabo actividades teóricas y prácticas acerca de diseño de control. Como presentación final, el profesor les solicita que desarrollen un proyecto de su interés en donde se ponga en juego el diseño de un sistema de control. El proyecto que llevó a cabo la CCM(IE_F) se denomina *automatización de un sistema de control de temperatura del agua para la cosecha de algas*. Este proyecto se expone a continuación.

El sistema consiste en controlar la temperatura del agua que está contenida en un recipiente rectangular, en el cual se cosechan algas comestibles (Espirulina). La temperatura óptima para la cosecha de algas es de 33-37 °C. Pero la temperatura en el recipiente rectangular se ve perturbada frecuentemente por la temperatura del ambiente, entre otros factores. El objetivo principal del sistema de control es, entonces, mantener la temperatura del agua en el rango deseado (33-37 °C).

Para ello, la CCM(IE_F) construye el equipo físico (la planta) con los siguientes elementos: un recipiente rectangular con agua y algas, recipientes con agua fría y caliente, sensor de temperatura, placa Arduino y bombas de suministro de agua.

Figura 2. Equipo físico del sistema de control

Dinámica del Sistema de Control

El sistema funciona de tal manera que el sensor detecta la temperatura del agua en el recipiente rectangular. El software del Arduino adquiere los datos de temperatura (toma datos cada 5 segundos) que le proporciona el sensor. Entonces, dependiendo la temperatura a la que se encuentre el agua en el recipiente rectangular, este software ordena si se requiere activar las bombas para la recirculación del agua de otro recipiente hacia el recipiente rectangular que contiene las algas, para estabilizar la temperatura del agua al rango deseado.
Es decir, si detecta que la temperatura es mayor a 37 °C, entonces se bombea desde otro recipiente agua fría, y si detecta que es menor a 33 °C, bombea agua caliente; hasta que el sistema detecta que la temperatura ha vuelto al rango deseado. Cuando la temperatura del agua vuelve al rango deseado, el sistema de bombeo se detiene.

La temperatura deseada (33 °C mínima y 37 °C máxima) la CCM(IE_F) la denomina *señal de entrada* $R(s)$, y la temperatura que se obtiene en el recipiente rectangular la llaman *señal de salida* $C(s)$. Estos dos elementos son de vital importancia en la *Teoría de Control*, dado que el modelo matemático de la recirculación del agua que se lleva a cabo en el bombeo, se expresa con la relación del tipo $G(s)$, que es la *Función de Transferencia* de un sistema de control; donde $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ es la *Función de Transferencia* que relaciona la Transformada de Laplace de la señal de salida con la Transformada de Laplace de la señal de entrada. Es en la *Función de Transferencia*, donde el sistema, implícitamente, lleva a cabo las modificaciones, ejecuciones o acciones de control, para que la temperatura del agua se devuelva al rango deseado, cuando se hace la recirculación del agua en el bombeo.

A continuación, en la Figura 3, se muestra una gráfica que se obtuvo de la CCM(IE_F), en la cual se aprecia la señal de salida dibujada con un trazo continuo que tiene cierto comportamiento en el tiempo.

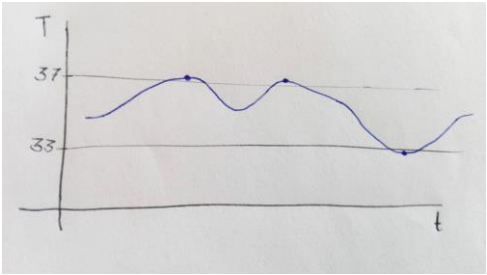


Figura 3. Gráfica de la señal de salida

El comportamiento deseado de la temperatura del agua (T) y la gráfica de la señal de salida, tiene una *tendencia en un rango*, que es el óptimo para el crecimiento de las algas; y esta tendencia se reproduce a través del *tiempo* (*t*). Es decir, se *reproduce un comportamiento* en *todo tiempo* y este comportamiento reproducido es con *tendencia en un rango*. Los comportamientos de los fenómenos en los sistemas de control siempre están ligados al tiempo, ya que estos fenómenos se problematizan con un tratamiento especial del *dominio temporal*: la *temporalización*.

En ese sentido, en los sistemas de control hay comportamientos que se problematizan a través del tiempo. Y en esta situación en particular (control de temperatura del agua para la cosecha de algas) lo que se problematiza en la *temporalización*, es la tendencia de la temperatura: se desea controlar que la temperatura del agua esté en el rango deseado en todo tiempo; para este fin, entonces, al *temporalizar* se reproduce ese comportamiento deseado y tal comportamiento es con una *tendencia en un rango.*

Estos dos factores epistemológicos (la *temporalización* y la *tendencia en un rango*) son los que le dan sentido funcional a la *reproducción continua de comportamientos discontinuos*. De esta manera, entonces, esta reproducción de comportamiento se dibuja con un trazo continuo.

Es preciso e interesante mencionar que este comportamiento de la señal de salida —que se dibuja de manera continua— es una reproducción que deviene a partir de comportamientos discontinuos. Estos comportamientos discontinuos resultan de diferentes momentos de tiempo (m_1, m_2, m_3, …), en los cuales el sistema de control detecta que la temperatura del agua se ha salido del rango deseado, y se requiere devolverla a dicho rango. Los comportamientos de la temperatura en estos momentos indican gráficas dibujadas a trozos, es decir comportamientos discontinuos. No obstante, la reproducción de estos comportamientos (que es continua) tiene un comportamiento que tiende a la gráfica discontinua en los diferentes momentos (m_1, m_2, m_3, …).

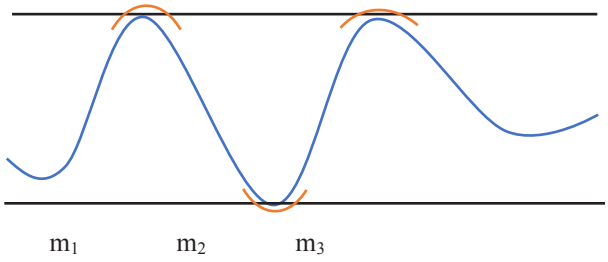


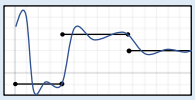
Figura 4. Comportamientos discontinuos y continuos

Se aprecia, entonces, que cuando la CCM(IE_F) diseña el sistema de control, aparecen gráficas dibujadas a trozos (es decir, se dibujan comportamientos discontinuos); sin embargo, la reproducción de estos comportamientos es *continua*. Es decir, se *reproducen comportamientos continuos a partir de comportamientos* discontinuos.

Una Epistemología de Usos de la Transformada de Laplace en los Sistemas de Control

En el diseño del sistema de control —que es una problemática del quehacer cotidiano del ingeniero— la CCM(IE_F) pone en funcionamiento elementos que son alusivos a una *matemática funcional*. Este conocimiento funcional se presenta a continuación como estructura epistemológica (Situación de Transformación), en la construcción de *lo matemático* cuando se diseñan sistemas de control.

Tabla 2: Construcción de lo Matemático en el Sistema de Control en la CCM(IE_F)

Construcción de lo Matemático	Situación de Transformación	Situación de Sistema de Control
Significaciones	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Comportamientos de la señal de entrada y de salida del sistema. Temporalización Tendencia en un rango
Procedimientos	Variación de Parámetros	Comparación de las señales (entrada y salida) y recirculación del agua en los recipientes (Realimentación en la Función de Transferencia (transformada) para lograr un comportamiento deseado)
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos	Instrucción que organiza un comportamiento continuo $\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
Argumentación	Comportamiento tendencial/ Reproducción de comportamientos	Reproducción continua de comportamientos discontinuos 

Esta situación específica, manifiesta una *epistemología de usos* de la Transformada de Laplace (en la cual, la TL adquiere el significado de *instrucción que organiza comportamientos continuos*). La Transformada de Laplace —al ejecutarse como instrumento en un sistema de control— subyace en la categoría *reproducción de comportamientos*, cuando interviene la ecuación diferencial —transformada— que modela el fenómeno del sistema (comportamiento de la señal de entrada y de salida y función de Transferencia).

Además, esta categoría de conocimiento alude a lo que mencionó el mismo Laplace (1814/1988) en su *Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, respecto a lo que hoy conocemos como la Transformada de Laplace: "de lo único que se trataba es de reducir la integral definida a una serie convergente. Es lo que he obtenido por un procedimiento que hace converger la serie con rapidez" (pp. 65-66). Es decir, en términos de la categoría diríamos que el interés de la Transformada de Laplace era reproducir un comportamiento con cierta tendencia deseada.

A manera de conclusión

La *reproducción continua de comportamientos discontinuos* emerge en la CCM(IE_F), cuando diseñan el sistema de control; la cual expresa una matemática funcional propia de la comunidad de conocimiento matemático.

Esta epistemología de usos se resignifica en los sistemas de control a través de dos factores, que son los que le dan el sentido funcional a esta reproducción continua:

- La temporalización
- Tendencia en un rango

Tal como ya se dijo, el tratamiento de la Transformada de Laplace en la Matemática Escolar ocurre con una centración al objeto matemático. El discurso Matemático Escolar no le da a la TL otro valor distinto que el algorítmico, dejando de lado su valor funcional, que se desarrolla en diferentes escenarios profesionales. En cambio, en la CCM(IE_F) la Trasformada de Laplace adquiere el significado de *instrucción que organiza un comportamiento continuo* en el sistema de control; en contraparte al carácter algorítmico y utilitario que tiene en la Matemática Escolar, como método para resolver una ecuación diferencial.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México: Díaz de Santos-CLAME A.C.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente en matemáticas: Pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, Guerrero, A. Mena, J. Mena, E. Montoya,D. Zakaryan (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (p. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, IMA-PUCV. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(2),187-214.

Cordero F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F. y Miranda, E. (2002). El Entendimiento de la transformada de Laplace: Una Epistemología como Base de una Descomposición Genética. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *5*(2), 133-168.

Cordero, F. y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamérica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *15*(3), 295-318.

Edwards, C. y Penney, D. (1986). *Ecuaciones diferenciales elementales, con aplicaciones.* Primera edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Giacoleti-Castillo, F. y Cordero, F. (2019). Usos y significados de la Transformada de Laplace en una comunidad de ingenieros electrónicos. En D. García-Cuéllar; I. Pérez-Vera (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(2), 429-438. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. ISSN: 2448-6469

Gómez, K. y Cordero, F. (2010). Los procesos de difusión del conocimiento matemático en el cotidiano. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 919-927. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Guber, R. (2001). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad.* Bogotá: Ed. Norma.

Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez (s.f.). Ingeniería Electrónica, Tuxtla Gutiérrez: SEP. Recuperado de: https://www.tuxtla.tecnm.mx/ingenieria-electronica/

Jáuregui, E., Ávila, J. y Nesterova, E. (2007). El aprendizaje del tema "transformada de Laplace de funciones definidas por intervalos" con apoyo del conocimiento previo sobre la función escalón unitario. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 132-137. Camagüey: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Juárez, A. y Irassar, L. (2014). Sobre el aprendizaje de la transformada de Laplace: algunas dificultades y una propuesta didáctica. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 977-985. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Laplace, P. (1988). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (P. Castillo, Trad.). México: Alianza Editorial. (Obra original publicada en 1814).

Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.

Romo, A. (2010). Projets d'ingénierie: étude d'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *15*, 201-218.

Ruiz, L., Camarena P. y Del Rivero S. (2016). Prerrequisitos deficientes con software matemático en conceptos nuevos. Transformada de Laplace. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 21*(69), 349-83.

Spiegel, M. (1983). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Tercera edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Zill, D. y Cullen, M. (2006). *Matemáticas avanzadas para ingeniería: Ecuaciones diferenciales.* Tercera edición. México: McGraw-Hill.

LA ESTADÍSTICA EN CONTEXTO: PRÁCTICAS ASOCIADAS A PROFESIONALES DE CIENCIAS DE LA SALUD

STATISTICS IN CONTEXT: PRACTICES RELATED TO HEALTH SCIENCE PROFESIONALS

Christiane Ponteville, Myriam Nuñez, Hugo Granchetti
Universidad de Buenos Aires, Facultad de Farmacia y Bioquímica (Argentina)
chponteville@gmail.com, myriam@ffyb.uba.ar, hgranchetti@gmail.com

Resumen
En el campo de las Ciencias de la Salud, la aplicación de la estadística se refleja en un amplio rango del ejercicio profesional, incluyendo el diagnóstico y tratamiento de enfermedades, el uso de medicamentos, el control de calidad, la validación de técnicas y la investigación de nuevas terapias y tecnologías. En este trabajo se propone un análisis sistemático, desde una perspectiva Socio-epistemológica, de las actividades estadísticas de profesionales de la salud en el ámbito laboral, con el objetivo de identificar aquellas concepciones y elementos que permitan en un futuro mejorar la enseñanza de esta área de formación.

Palabras clave: estadística, salud, prácticas

Abstract
In the field of Health Science, statistics application covers a wide range of professional practices; including the diagnosis and treatment of diseases, the use of medicines, quality control, validation of techniques, and research into new therapies and technologies. This paper proposes a systematic analysis, from a Socio-epistemological perspective, of health professionals' statistical activities at their workplace. It is aimed at identifying those conceptions and elements that allow us to improve statistics teaching in the future.

Key words: statistics, health, practices

Introducción

A lo largo del siglo XX, las sociedades han incorporado a la estadística entre sus prácticas de uso, siendo su desarrollo y difusión una demanda cada vez más urgente. El concepto de alfabetización estadística se puede explicar a través de dos mecanismos imbricados: la capacidad para poder explicar y valorar en forma crítica la información que se recibe respecto de datos o situaciones estocásticas que las personas pueden encontrar en diversos contextos, y la capacidad para discutir o compartir sus opiniones respecto de estas ideas estadísticas cuando sea pertinente. Se argumenta que el comportamiento estadísticamente alfabetizado se basa en la activación conjunta de cinco bases de conocimiento interrelacionadas: alfabetización, estadística, matemática, contexto y crítica, junto con un grupo de disposiciones de apoyo y creencias facilitadoras (Gal, 2002). En la actualidad, tanto los individuos como las diferentes organizaciones de la sociedad utilizan a la estadística para analizar datos y tomar decisiones, encontrándose este proceso en pleno desarrollo. La estadística tiene un papel primordial en el avance de nuestra sociedad pues permite describir situaciones de incertidumbre en los análisis científicos actuales. Así, la educación estadística es una demanda cada vez más urgente de nuestras sociedades modernas. Diferentes autores consideran que su desarrollo ha sido más rápido que la capacidad de las instituciones educativas para responder a la demanda de su enseñanza (Ponteville, 2012). La tecnología, las ciencias y los medios de comunicación han hecho de los métodos estadísticos una herramienta de uso habitual. Con mayor o menor sofisticación, las representaciones gráficas y el cálculo de estadísticos se encuentran en nuestra comunicación habitual.

Frente a esta realidad la educación formal, en todos los niveles educativos, ha incorporado contenidos vinculados con las probabilidades y estadística, con el objetivo de concientizar a los ciudadanos sobre la importancia de una cultura estadística básica. La simple incorporación de contenidos a las diversas asignaturas no es suficiente para la adquisición de conceptos estadísticos de manera eficiente. En el nivel superior ya es evidente que una asignatura general de estadística no satisface lo que piden las diferentes y diversas áreas del conocimiento. De esta manera, el desafío consiste en realizar un análisis no sólo de cómo se enseñan dichos contenidos, sino también qué es lo que se enseña en los diferentes cursos vinculados con las probabilidades y la estadística en las diversas áreas. Esta revisión se debe hacer teniendo en cuenta el notable aumento de la incorporación de la estadística en diferentes disciplinas y el doble rol de técnica auxiliar y de generadora de conocimientos de la estadística. Por ejemplo, para la definición de un escenario de aprendizaje para alumnos de nivel superior vinculados a las ciencias de la salud, deben tenerse en cuenta algunos de los siguientes aspectos: incorporación del análisis de datos descriptivo, análisis de los contenidos a enseñar teniendo en cuenta sus raíces epistemológicas, problemas en los procesos cognitivos de adquisición de los conceptos de muestra y población, los medios gráficos y los instrumentos tecnológicos como medios de aprendizaje, la inferencia estadística como proceso de validación científica (Ponteville, 2012).

Así, es necesario problematizar los contenidos de forma que se realice una verdadera construcción de ellos, sin caer en meras repeticiones y actividades de resolución rutinarias. Las Ciencias de la Salud no quedan fuera de este proceso social. La incorporación de la estadística en las diversas carreras de formación profesional se realiza de manera heterogénea. Las dificultades detectadas en el aprendizaje de los contenidos vinculados a esta área, ha provocado que una comunidad cada vez más grande de investigadores trate de encontrar respuesta a la diferencia que existe entre lo que es enseñado y lo que es aprendido (Ponteville, 2015).

Marco teórico

En nuestra sociedad la estadística constituye un instrumento para validar, siendo utilizada y aplicada en áreas muy diversas que requirieron un desarrollo cualitativo de manera significativa. La estadística marca su utilidad para las ciencias y, paralelamente, se desarrolla como área de conocimiento independiente con un gran desarrollo teórico. Es transversal a una extensa variedad de disciplinas, desde el control de calidad hasta las ciencias sociales, desde

las ciencias de la salud hasta la física. De esta manera el método estadístico constituye la matemática social por antonomasia (Boyer, 1994).

Los criterios de validación del conocimiento científico se establecen, y por lo tanto son una construcción sociocultural que evoluciona y cambia no sólo con el tiempo sino de un grupo a otro. Es posible decir que, actualmente, en relación con la educación en ciencias se identifican diferentes aspectos. Entre ellos, el carácter eminentemente cultural del conocimiento, reconociéndose que nuestras formas de razonamiento no adhieren necesariamente a los cánones de la lógica formal y, por último, y muy ligado a los anteriores, la importancia de los lenguajes y especialmente de la argumentación en la construcción, justificación y valoración del conocimiento (Crespo Crespo, 2007). Así, dichas prácticas estarán en el centro del análisis poniendo énfasis en el pasaje del conocimiento al saber, considerando al conocimiento como información sin uso y al saber como la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática (Cantoral, 2013).

Diversos trabajos han analizado la problemática de la enseñanza de la Estadística en carreras no estadísticas, intentando responder interrogantes sobre si estamos preparando a nuestros alumnos acorde al medio social en el que deberán trabajar cuando se reciban (Ferreri, 1999). Entre ellos, algunos ponen el énfasis en ver cuáles son las estrategias estadísticas utilizadas en diversas áreas profesionales. Se identifican brechas entre los temas y las técnicas aprendidas en la universidad y los utilizados en el lugar de trabajo, y se señalan deficiencias en la preparación estadística para el empleo. Los cursos demandados incluyen estadística multivariada, modelos lineales generalizados, diseño de estudios, y análisis de potencia. Se recomienda expandir los cursos para eliminar brechas, desarrollar talleres intensivos para graduados y para el lugar de trabajo, e involucrar al personal de otros departamentos para proporcionar un contexto para la enseñanza de la estadística. (Harraway y Barker, 2005). Las brechas antes nombradas pueden analizarse desde la perspectiva de la construcción social del conocimiento matemático. Para ello es necesario explicar las dinámicas del conocimiento situado que pueden analizarse en tres planos: el plano de la problematización del saber desde su propia naturaleza, las prácticas sociales normando la actividad humana como base de nuevos sistemas conceptuales y, por último, las articulaciones teóricas para caracterizar el funcionamiento del modelo de construcción social del conocimiento (Cantoral, 2013).

En los temas que nos competen el primer plano de respuesta, vinculado a la actividad humana, el hablar del saber no se limita a definir relaciones entre el saber y las personas sino posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia de estructurar sus sistemas conceptuales respecto al papel que juega la estadística en la construcción de conocimiento, utilizando las estrategias de modelos teóricos que se ajustan y diversas situaciones experimentales. Por lo tanto, la problematización conduce a hablar de prácticas con la idea de problematizar las causas del por qué el ser humano hace algo, describir circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y por qué lo hace y cómo se auto concibe: el uso de métodos estadísticos para la validación propia y entre pares, la concepción de los supuestos, el análisis de conclusiones científicas a partir de resultados estadísticos.

Frente a estas visiones consideramos que nos encontramos en un sistema educativo que debe comprender las prácticas de uso de los profesionales del área de las Ciencias de la Salud en sus ámbitos laborales, tipo de metodología estadística utilizada, el uso de la tecnología, los paquetes estadísticos empleados, observación, análisis y conclusión de los resultados obtenidos.

Objetivo

En el presente trabajo se propone un análisis sistemático, desde una perspectiva socioepistemológica, de las actividades estadísticas de profesionales de la salud en el ámbito laboral, con el objetivo de identificar aquellas concepciones que permitan en un futuro mejorar la enseñanza de esta área de formación.

Metodología

La población en estudio consistió en profesionales de la salud incluyendo médicos, farmacéuticos y bioquímicos, con o sin título de posgrado, de ambos sexos y de todas las edades, que se encontraran trabajando formalmente al momento de la presente investigación, ya sea en el ámbito extra-académico como académico. Se tomó una muestra no aleatoria, intentando representar las proporciones poblacionales de graduados de las diferentes áreas, con predominio de profesionales médicos.

Para alcanzar el objetivo del trabajo, se elaboró una encuesta anónima constituida por seis secciones que abarcaron 19 preguntas e ítems sobre: datos generales (edad, sexo, lugar actual de trabajo, cargo laboral actual, tipo de trabajo); formación estadística (cursos realizados durante la formación de grado y/o posgrado, formación continua en el ámbito laboral); actividades estadísticas habituales (análisis de datos, lectura de publicaciones, reporte de resultados cuantitativos, diseño de estudios, control de calidad, análisis financiero, estudio de mercado); herramientas estadísticas empleadas habitualmente (estadística descriptiva, gráficos, pruebas de hipótesis, modelos de regresión, análisis de supervivencia, métodos más complejos); uso de recursos tecnológicos (paquete estadístico); aplicación de resultados obtenidos a partir del análisis de datos y su impacto en el ámbito laboral. La encuesta fue administrada a través de una plataforma en línea y las respuestas fueron recabadas durante el mes de marzo de 2019.

Se realizó un análisis cualitativo y cuantitativo. El análisis cualitativo consistió en identificar aquellas prácticas y concepciones asociadas al uso de la estadística en el ámbito laboral, a partir de la interpretación de las respuestas. Para el análisis cuantitativo, se calcularon frecuencias absolutas y relativas, se construyeron gráficos de sectores circulares y de barras y se realizó la prueba de Chi-cuadrado (o prueba exacta de Fisher) para evaluar la asociación entre variables categóricas. Se utilizó un nivel de significación de 0,05. Para el análisis estadístico se empleó el paquete SPSS versión 22.

Resultados

El grupo en estudio incluyó un 50% de hombres y de mujeres, con una mediana de edad de 47 años (mínimo: 27; máximo: 66). El 70% de los encuestados fueron médicos, el 20% farmacéuticos y el 10% bioquímicos (Gráfico 1). El 87,5% reportó poseer un título de posgrado, siendo el más prevalente el de especialista, que se refiere a la formación en un área disciplinar o profesional específica (Gráfico 2).

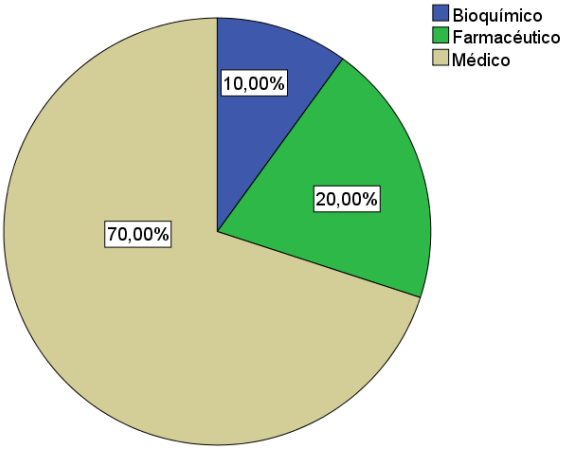


Gráfico 1: Título de grado

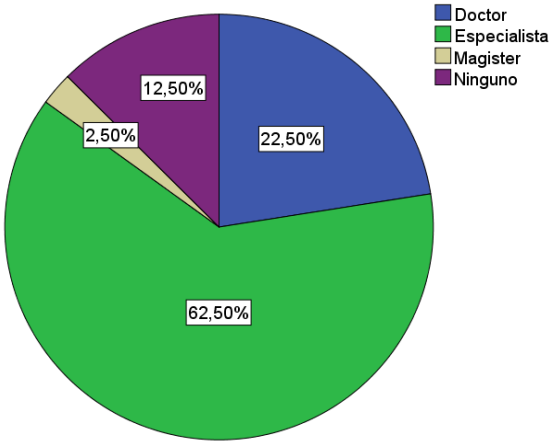


Gráfico 2: Título de posgrado

Como muestra el Gráfico 3, los lugares predominantes de trabajo fueron el hospital (72,5%), el sanatorio (10%) y la universidad (10%). Otros lugares reportados fueron la industria, el Ministerio de Salud y el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET). Los cargos laborales ocupados mayoritariamente por los encuestados fueron de planta, jefatura y guardia (Gráfico 4). Puede apreciarse en el Gráfico 5 que la práctica laboral predominante fue la clínica y asistencial (60%), seguida de las tareas administrativas y de investigación (no excluyentes).

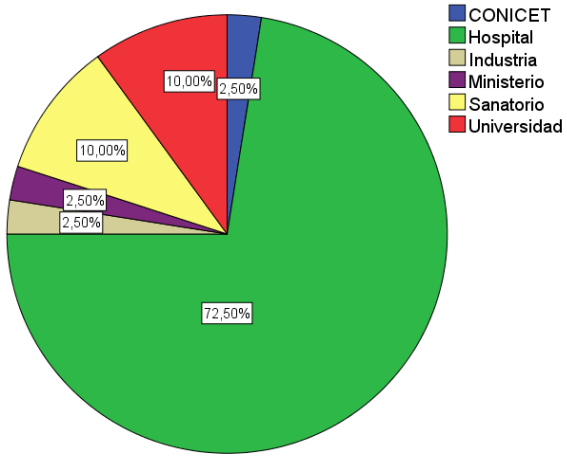


Gráfico 3: Lugar de trabajo

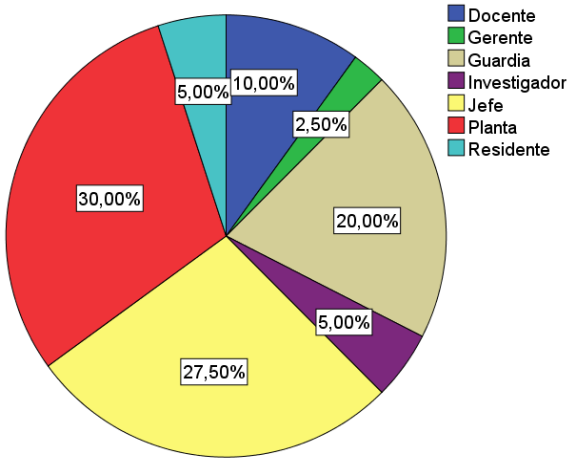


Gráfico 4: Cargo laboral

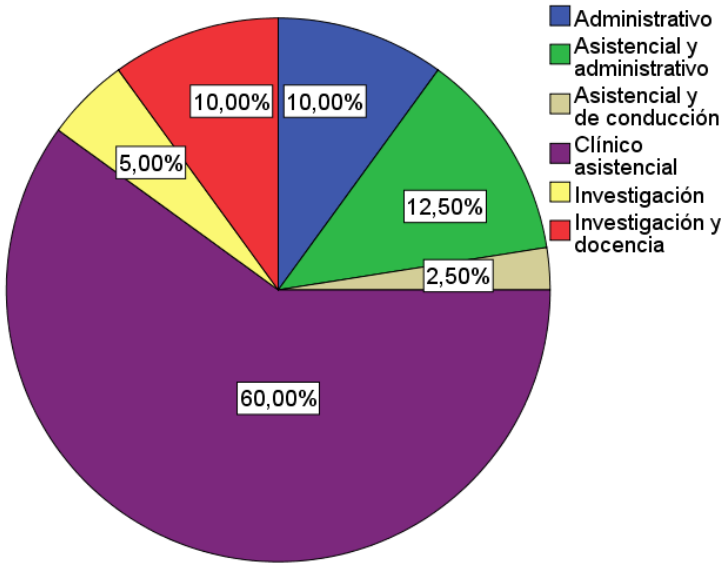


Gráfico 5: Tipo de trabajo

En cuanto a la formación en temas de estadística, el 70% reportó haberla recibido durante su carrera de grado, y la misma proporción afirmó que la recibió luego de obtener su título profesional. En forma no excluyente, el 55% de los encuestados realizó cursos de perfeccionamiento, el 35% cursó asignaturas de posgrado (dentro de maestrías o especializaciones) y el 20% asistió a seminarios relacionados dentro de un congreso científico (Gráfico 6). Por otra

parte, sólo el 25% señaló que en su ámbito laboral se fomenta la formación continua en este aspecto, a través de la presentación de trabajos en reuniones científicas, la realización de estadísticas mensuales de servicio o el trabajo interdisciplinario con estadísticos y matemáticos.

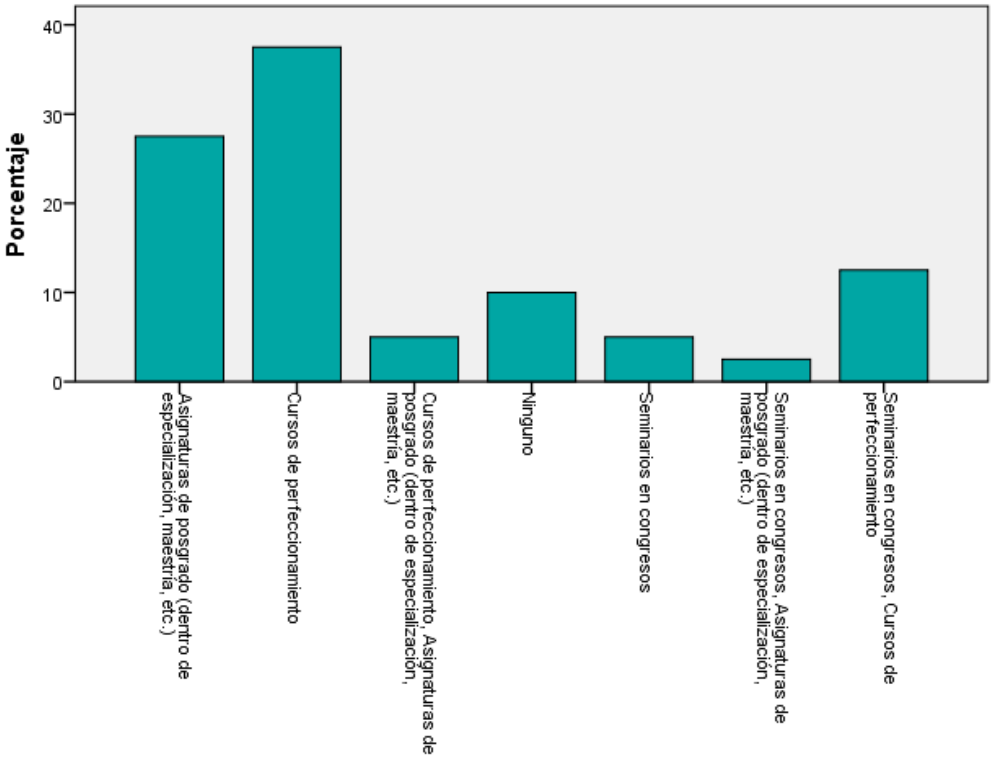


Gráfico 6: Formación en temas de estadística

Sólo el 25% de los profesionales reportó realizar con frecuencia algunas de las actividades estadísticas enumeradas en la Tabla 1. Entre aquellas mayormente prevalentes en el ámbito laboral se encontraron la lectura de publicaciones, el análisis de datos cuantitativos y la elaboración de reportes con interpretación de resultados cuantitativos (Gráfico 7). Los participantes que afirmaron realizar dichas actividades manifestaron hacerlo en forma individual (50%), en forma grupal (20%) o ambas (33,3%).

Tabla 1: Actividades estadísticas llevadas a cabo en el ámbito laboral.

Actividad estadística	Número de encuestados que reportó realizarla con frecuencia en su ámbito laboral
Ninguna	30
Análisis de datos cuantitativos	3
Lectura de publicaciones con sustento estadístico	9
Elaboración de reportes con interpretación de resultados cuantitativos	3
Diseño de investigaciones/estudios/experimentos	2

Control de calidad de productos y/o procesos	0
Consultas a especialistas estadísticos	0
Análisis financiero	0
Estudio de mercado	0

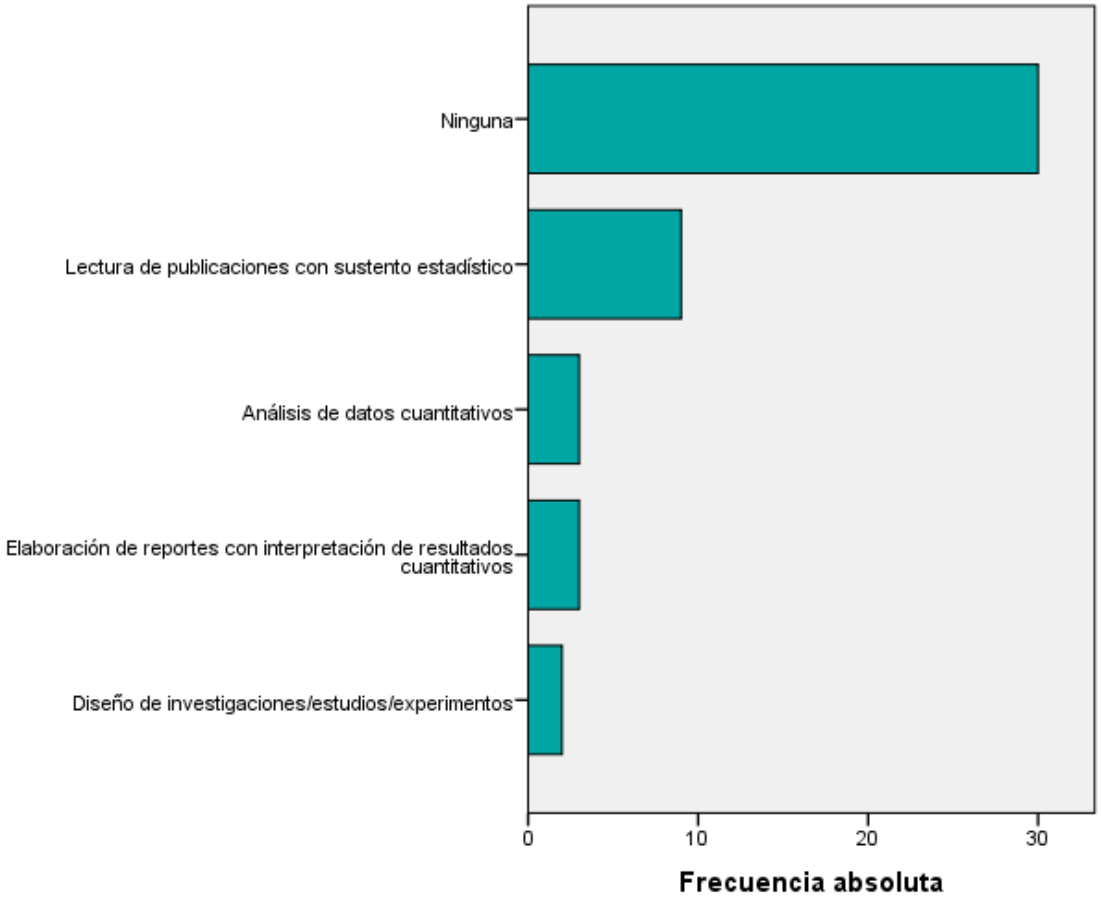


Gráfico 7: Actividades estadísticas llevadas a cabo en el ámbito laboral

No se hallaron evidencias de que la participación en tareas de investigación en el ámbito laboral estuviera asociada con la realización de algún tipo de actividad estadística (prueba exacta de Fisher: $p = 0{,}689$), como se puede apreciar en el Gráfico 8.

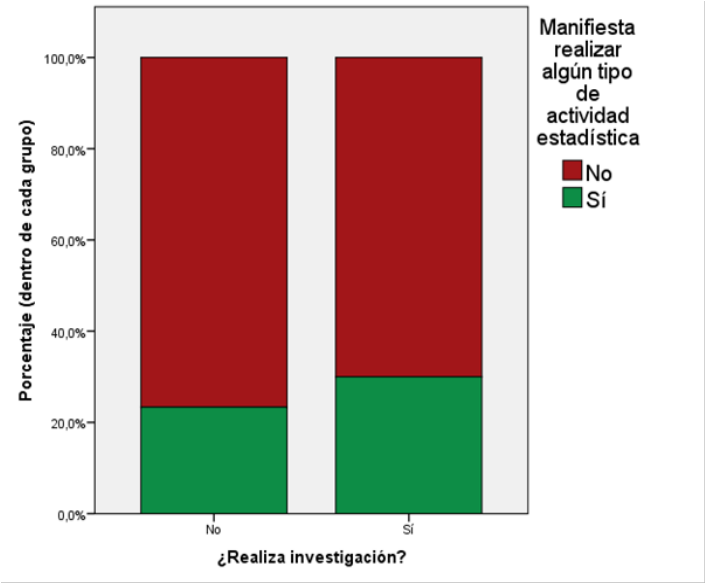


Gráfico 8: Actividades estadísticas según participación en tareas de investigación

En cuanto a las herramientas estadísticas empleadas habitualmente, los encuestados reportaron la estadística descriptiva y los gráficos, aunque la mayoría señaló no utilizar ninguna (Tabla 2 y Gráfico 9). Por otra parte, sólo tres personas respondieron que utilizan una herramienta informática para sus análisis estadísticos (dos mencionaron planillas de cálculo y uno mencionó paquetes específicos como EpiDat e Infostat).

Tabla 2. Herramientas estadísticas utilizadas en el ámbito laboral.

Herramienta estadística	Número de encuestados que reportó emplearla habitualmente en su ámbito laboral
Ninguna	32
Estadística descriptiva	5
Gráficos	7
Tests de hipótesis	2
Modelos de regresión (lineal, logística, etc.)	3
Análisis de supervivencia	1
Métodos más complejos	0

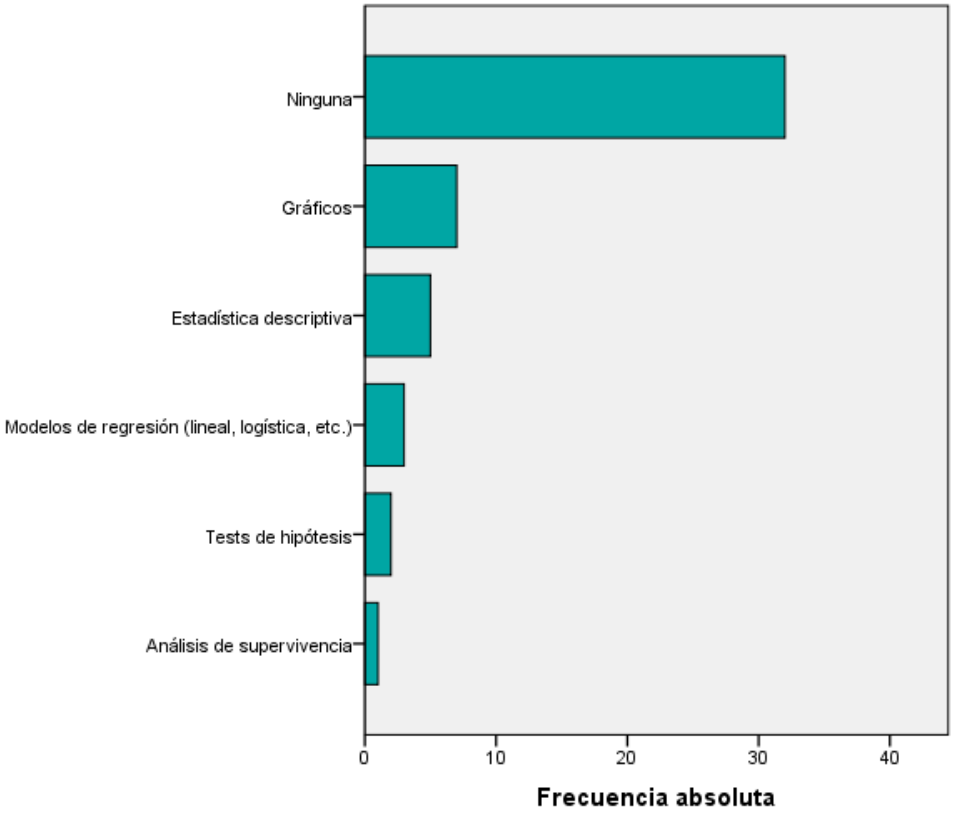


Gráfico 9: Herramientas estadísticas empleadas habitualmente

Los participantes que reportaron realizar actividades estadísticas frecuentemente señalaron que sus resultados impactan en la modificación de algunas conductas en cuanto al tratamiento de enfermedades y la utilización de medicamentos, al relevarse datos sobre el resultado clínico de las terapias, la frecuencia de efectos adversos e información relacionada. De estos diez participantes, nueve de ellos señalaron que comunican sus conclusiones sobre el análisis estadístico de datos en congresos o simposios por fuera del ámbito laboral; seis reportaron hacerlo en encuentros formales programados dentro de su lugar de trabajo; y seis reportaron hacerlo en encuentros informales entre compañeros de trabajo.

Discusión y conclusiones

Puede apreciarse que, a pesar de haber recibido formación de grado y posgrado, la mayoría de los encuestados realiza habitualmente un conjunto muy reducido de actividades estadísticas y aplica sólo las herramientas más básicas de la disciplina, sugiriendo que en el ámbito laboral de la salud no se fomenta la concepción de una cultura analítica de los datos y la evidencia generados a diario. Sería de interés en un futuro indagar acerca de las razones por las cuales se destacan estas conductas y concepciones. Se pone también de manifiesto una falta de interacción interdisciplinaria entre especialistas del área laboral -ya sea de medicina, farmacia o bioquímica- y especialistas estadísticos, lo cual debilita el potencial detrás del análisis de datos tanto para la optimización continua de las tareas profesionales como para validación de resultados de investigación.

En lo que respecta a la enseñanza de la disciplina, las implicancias de estos hallazgos son diversas. Por un lado, la necesidad de elaborar situaciones problemáticas en un contexto real de aplicación, que involucren no sólo el conocimiento de técnicas sino además la interpretación de resultados y la diversificación de lo que éstos significan en la práctica profesional (desarrollando estrategias para responder por qué, cómo y para qué podrían utilizarse las conclusiones de allí extraídas construyendo saber).

Por otra parte, posiblemente sea de interés desde la formación de grado fomentar un intercambio entre ambas áreas de conocimiento a través de proyectos educativos conjuntos entre cátedras, departamentos o incluso facultades, que ponga en contacto profesionales de las áreas de salud con aquellos dedicados al análisis estadístico.

A partir de lo observado, este trabajo refleja que los profesionales de las áreas de salud realizan un reducido conjunto de actividades estadísticas y aplican muy pocas de las herramientas aprendidas en su formación de grado y posgrado, lo cual resalta la necesidad de orientar la enseñanza de la estadística hacia propuestas educativas más contextualizadas y con mayor articulación interdisciplinaria, para poder favorecer al desarrollo de prácticas vinculadas a la estadística en los medios profesionales de las Ciencias de la Salud.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de doctorado. CICATA-IPN, México.

Ferreri, N. et al (1999). Enseñanza de la estadística: desde el ámbito laboral al aula. Cuartas *Jornadas en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística*. Rosario.

Gal, I. (2002). Adults´ Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.

Harraway, J. y Barker, R. (2005). Statistic in the workplace: a survey of use by recent graduates with higher degrees. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 43-58.

Ponteville, Ch. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la estadística. *Premisa (Revista de la Sociedad Argentina de Educación Matemática)*, 14(54), 37-40.

Ponteville, Ch. (2015). El rol de las Argumentaciones Estadísticas: Pruebas de Hipótesis. *Tesis de maestría no publicada*. CICATA-IPN, México.

SECCIÓN 4

EL PENSAMIENTO DEL PROFESOR, SUS PRÁCTICAS Y ELEMENTOS PARA SU FORMACIÓN PROFESIONAL

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS QUE IMPLICAN FRACCIONES

THE SPECIALIZED KNOWLEDGE IN THE TEACHING OF ADDITIVE PROBLEM SOLVING INVOLVING FRACTIONS

Ana María Reyes-Camacho, Eugenio Lizarde Flores, Francisco Javier Hernández Gutiérrez
Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos". (México)
anyreca0712@hotmail.com, life genio@yahoo.com.mx, frajaher 79@hotmail.com

Resumen
En este trabajo identificamos el conocimiento matemático y didáctico de una profesora en formación inicial de primaria, para enseñar problemas aditivos que implican fracciones en sexto grado, las cuales son un objeto de estudio complejo por sus diferentes significados: parte-todo, medida, cociente, razón y operador. Así, adoptamos el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En este estudio de caso, las entrevistas semiestructuradas, la planificación, la videograbación de clases y un documento de análisis de la práctica son las fuentes de información. En los resultados, la profesora evidencia conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, sobre teorías de enseñanza (Teoría de las Situaciones Didácticas) y estrategias (Pasos de Polya para resolver problemas matemáticos). Además, esta profesora evidencia conocimiento de los temas matemáticos en relación con conocimiento de definiciones (problemas aditivos) y fenomenología (significado de la fracción como parte todo en contextos continuos y discretos).

Palabras clave: conocimiento del profesor, primaria, fracciones

Abstract
In this work, we identify the mathematical and didactic knowledge of a primary education initial training teacher to teach additive problems involving fractions in the sixth grade. They constitute a complex object of study due to their different meanings: part-whole, measure, quotient, ratio and operator. Thus, we adopted the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge Model. In this case study, semi-structured interviews, planning, video recording of classes, and a report of the practice analysis are the sources of information. In the results, the teacher shows knowledge of mathematics teaching, about theories of teaching (Theory of the Didactic Situations), and strategies (Polya steps to solve mathematical problems). In addition, this teacher shows knowledge of the mathematical topics in relation to knowledge of definitions (additive problems) and phenomenology (meaning of the fraction as part-whole in continuous and discrete contexts).

Key words: teacher's knowledge, primary education, fractions

Introducción

Desde hace años, el conocimiento matemático y didáctico de los profesores se ha convertido en objeto de estudio en diferentes investigaciones. En este escenario, emerge nuestro interés por el conocimiento profesional de profesores de primaria.

En educación matemática, existe una amplia preocupación porque los profesores posean conocimientos matemáticos y didácticos en relación con el estudio de las fracciones, pues se convierten en un objeto de estudio complejo por la diversidad de significados que poseen: parte-todo, medida, cociente, razón y operador (Llinares & Sánchez, 1997). En ese sentido, Montes et al. (2015) realizaron un estudio con profesores en formación inicial de primaria, donde destacan debilidades en los significados que les otorgan a las fracciones, sin embargo, la suma de fracciones aparece como una de sus fortalezas. Por su parte, Hansen, Mavrikis & Geraniou (2016) efectuaron un estudio con profesores en formación continua para investigar sobre el conocimiento didáctico y tecnológico de fracciones, en este trabajo aparecen las sumas de fracciones con igual y diferente denominador como algunas de las tareas que se diseñan para trabajar con los alumnos.

A partir de este contexto, en esta investigación nos preguntamos: ¿Cuál es el conocimiento especializado que una profesora en formación inicial de primaria evidencia cuando enseña la resolución de problemas aditivos que implican fracciones? Así, nuestro propósito se traduce en caracterizar el conocimiento especializado de una profesora en formación inicial de primaria, para enseñar la resolución de problemas aditivos que implican fracciones en sexto grado.

Marco teórico

La profesionalización del docente implica la identificación de los conocimientos que están en juego durante el desarrollo de su tarea. Existen algunos investigadores que han realizado estudios sobre el conocimiento del profesor (Ball, Thames & Phelps, 2008; Shulman, 1986). En esta investigación, tomamos como perspectiva teórica el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés- *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), el cual es presentado por Carrillo et al. (2018). Desde este enfoque se precisa que el conocimiento que el profesor usa para enseñar es especializado, en particular, en el campo de las matemáticas.

El modelo MTSK se divide en dominios, subdominios y categorías; en algunos de los aspectos anteriores, las siglas que se emplean para su identificación corresponden a su nombre en inglés, tal como se presenta en la Figura 1. En términos concretos, el MTSK se divide en tres dominios y, a su vez, dos de los dominios organizan en tres subdominios.

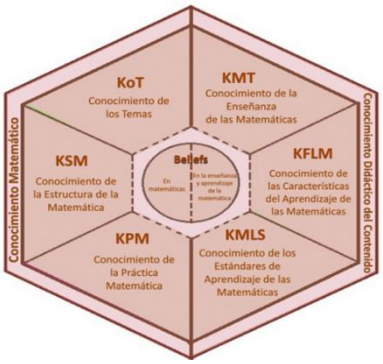


Figura 1. Diagrama del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK (Carrillo et al., 2018).

En el dominio del Conocimiento matemático (MK) se encuentra el subdominio del Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), cuyas categorías son procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones. En el Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) aparecen como categorías conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. Por último, en el subdominio del Conocimiento de la práctica matemática (KPM) identificamos: jerarquización y planificación, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas, prácticas particulares del quehacer matemático y, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio del Conocimiento didáctico del contenido (PCK), se ubica el subdominio Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), desde donde emergen como categorías: teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático e intereses y expectativas. En el caso del subdominio de Conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (KMT) ubicamos: teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales y, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. En el subdominio de Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) identificamos: expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores. El tercer dominio de conocimiento son las Creencias, el cual se ubica en el centro de la Figura 1.

En esta comunicación avanzamos en la caracterización de algunos de los conocimientos matemáticos (KoT) y didácticos (KMT), que una profesora en formación inicial de primaria evidencia cuando favorece la enseñanza de la resolución de problemas aditivos que implican fracciones, en un grupo de sexto grado.

Metodología

En esta investigación recurrimos a un análisis cualitativo de los datos, desde el enfoque de análisis de contenido (Flick, 2004), mismo que se interpreta como un procedimiento para la categorización de datos con el propósito de clasificar, resumir o tabular (Fox, 1981). Este análisis ha sido empleado en otras investigaciones, cuyo objeto de estudio es el conocimiento del profesor de matemáticas al enseñar los números racionales (e. g. Rojas, 2014).

En este trabajo retomamos el estudio de caso, como "[…] el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1999, p. 11) y aún más, de carácter "instrumental" en tanto que asumimos "una necesidad de comprensión general, y consideraremos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular" (Stake, 1999, p. 16). Así, nuestro caso está representado por una profesora en formación inicial de primaria (Luisa), la cual cursa el octavo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (Plan de Estudios 2012), en la Escuela Normal Rural "Gral. Matías Ramos Santos", en el estado de Zacatecas, México. Entre los principales rasgos para la selección de este caso, destaca el conocimiento que Luisa tiene sobre las fracciones y, que en semestres anteriores de su formación abordó los cursos de la línea de matemáticas (aritmética: su aprendizaje y enseñanza; álgebra: su aprendizaje y enseñanza; geometría: su aprendizaje y enseñanza; procesamiento de información estadística).

El plan de clase y la videograbación, constituyen las fuentes principales para la recogida información; en relación con la primera, Simons (2011) plantea la importancia de la revisión de documentos en el contexto de la investigación cualitativa. En lo que respecta a la segunda fuente, Planas (2006, p. 40) señala que "[…] el video de una sesión de clase proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez". En esta investigación, la entrevista semiestructurada se convierte en una fuente secundaria de recogida de información, debido a que su diseño está en función del contenido de las fuentes principales. Así, en palabras de (Kvale, 2011) la entrevista semiestructurada "[…] trata de obtener descripciones del mundo vivido de los entrevistados con respecto a la interpretación del significado de los fenómenos descritos" (p. 34).

En el proceso de análisis de contenido de la información recogida, destacamos la identificación de unidades de análisis, la definición de las categorías que se van a emplear y la codificación de las unidades correspondientes a cada categoría (Fox, 1981). En este estudio, el MTSK nos proporciona las categorías de análisis para la identificación de conocimientos matemáticos y didácticos. En el conocimiento didáctico, identificamos como categorías del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés): Teorías de enseñanza y estrategias. En el conocimiento matemático, ubicamos categorías del Conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés): Definiciones y fenomenología.

Resultados

En este estudio identificamos evidencias e indicios de conocimientos matemáticos y didácticos de Luisa para enseñar problemas aditivos con fracciones; las primeras se definen como los elementos que permiten afirmar que un profesor posee un conocimiento particular que, con frecuencia, proviene de una triangulación para definir su existencia. En lo que corresponde a los indicios de conocimiento, se referencian como aquellos que permiten reconocer que se requiere de información amplia para convertirse en evidencias de conocimiento, por lo cual, se pueden traducir como sospechas (Flores-Medrano, 2015). A continuación, presentamos en la Tabla 1 los indicadores de conocimiento de Luisa, cuya organización se desprende de los dominios y subdominios del MTSK, mismos que después ejemplificamos.

Tabla 1. Indicadores de conocimiento matemático y didáctico de Luisa

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio *Conoce sobre*	Indicadores de conocimiento
Conocimiento matemático	Conocimiento de los temas (KoT)	Definiciones	-Luisa conoce los problemas aditivos con fracciones como aquellos que implican adiciones y sustracciones.
		Fenomenología	-Luisa conoce la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos.
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza	-Luisa conoce la Teoría de las Situaciones Didácticas para la enseñanza de los problemas aditivos con fracciones.
		Estrategias	-Luisa conoce estrategias para la resolución de problemas (pasos de Polya).

En el caso del Conocimiento de los temas matemáticos, particularmente de definiciones sobre problemas aditivos, encontramos que Luisa evidencia conocimientos en el plan de clase, las entrevistas semiestructuradas, la videograbación de clases y el documento de análisis de la práctica; en ésta última fuente de información señala:

> "[…] me permito especificarme en los problemas "de estructura aditiva", que Vergnaud (1990) define como "el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones y sustracciones" (p. 97)".

En la Tabla 2, en los elementos iniciales del plan de clase, identificamos que Luisa presenta indicios de conocimiento de fenomenología de las fracciones, en específico del significado parte-todo. Además, encontramos que Luisa muestra conocimientos de algunos elementos o variables didácticas para trabajar los problemas aditivos, como la ubicación de la incógnita en el estado final, la presentación de la información necesaria y en orden en los problemas, entre otros elementos, aunque al final precisa el trabajo con el significado parte todo de la fracción en contextos continuos y discretos.

Tabla 2. Indicadores que contextualizan el diseño de un plan de clase de matemáticas.

Elementos que complejizan los problemas de tipo aditivo que se plantean
Lugar de la incógnita: Incógnita en el desafío final o total. Tipo de relación implicada en el problema: Relación dinámica. Orden y manera en la que se presenta la información: Información necesaria/ información en orden. Número de etapas del problema: Problemas de dos etapas o más (compuestos). Fracción como parte todo en contextos continuos o discretos.

A continuación, presentamos algunos fragmentos de registro de la videograbación del inicio de la clase de Luisa, donde identificamos que evidencia conocimientos de fenomenología en relación con la representación gráfica de la fracción como parte-todo en contextos continuos (Llinares & Sánchez, 1997), lo cual se observa en la Figura 2 en el contexto de la lectura de un problema a los alumnos, tal como se aprecia:

> Luisa: […] ¿Qué compró Jonathan en el tianguis?
> Aos: Pizza para él y para su papá.
> Luisa: Muy bien, dice que compró dos cuartas partes de pizza para él y la mitad de pizza para su papá.
> Rutilio: Es igual maestra.
> Fernando: No.
> Eduardo: Compraron una pizza entera y la partieron a la mitad, la mitad para él y la mitad para su papá.
> Jaqueline: Compraron lo mismo.
> Luisa: ¿Por qué dices que compraron lo mismo?
> Jaqueline: Porque dos cuartos equivalen a un medio.
> Luisa: Muy bien, pasa al frente para que representes lo que se comieron entre los dos. /La alumna pasa al pizarrón y dibuja un círculo y lo divide en dos cuartos y un medio/

Figura 2. Representación de partición de pizza

Luisa: ¿Qué tiene que hacer ella para saber cuánta pizza se comieron entre Jonathan y su papá?
Eduardo: Partirla a la mitad, agarra un medio para el papá y dos cuartos para el niño.
Aos: El de arriba es el del papá y el de abajo es el de Jonathan.
Jaqueline: Es lo mismo maestra.
Luisa: ¿Qué pasa ahí?
Jaqueline: Se comieron lo mismo
Luisa: ¿Cuánto se comieron entre los dos?
Aos: Un entero, una pizza entera.

En el fragmento de registro anterior, Luisa rescata algunos conocimientos previos de los alumnos sobre la suma de fracciones con diferente denominador *(¿Qué tiene que hacer ella para saber cuánta pizza se comieron entre Jonathan y su papá?*), donde la representación gráfica juega un papel fundamental y lleva a los alumnos a identificar que ambas partes del papá e hijo son un entero, sin embargo, no se plantea un procedimiento formal. Además, Luisa muestra conocimiento de fracciones equivalentes en el planteamiento de la tarea (1/2 y 2/4), así como en sus intervenciones en la clase (*Luisa: ¿Por qué dices que compraron lo mismo?; Jaqueline: Porque dos cuartos equivalen a un medio; Luisa: Muy bien* […]).

En el inicio de la clase, Luisa plantea diferentes problemas a los alumnos en función de las características de algunos productos que les mostró (Figura 3), lo cual se observa en el siguiente registro:

Luisa: Muy bien, ¿qué más dice que compró?
Aos: Dulces.
Luisa: Dice que compró una bolsa con 6 dulces, ¿de qué color son los dulces?
Aos: Azul y amarillo.
/Una alumna dibuja en el pizarrón los dulces que hay en la bolsa/

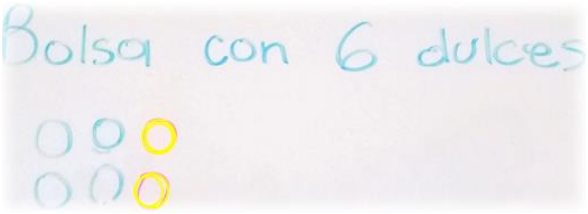


Figura 3. Representación de dulces

Luisa: ¿Qué fracción representa la cantidad de dulces de cada color que hay en la bolsa?
Eduardo: 4/6 y 2/6
Luisa: ¿Qué fracción representan los dulces azules?
Eduardo: 4/6
Luisa: ¿Y los dulces amarillos?
Eduardo: 2/6
Luisa: ¿Por qué 2/6?
Aos: Por qué son 2 de 6.
Eduardo: Y los azules 4 de 6 dulces que hay en la bolsa.
Luisa: Si Jonathan se comió 1/3 de dulces amarillos y 1/3 de dulces de color azul, ¿cuántos dulces se comió en total?
Eduardo: Se comió los 2 amarillos y 2 de los azules, en total se comió 4.
Luisa: Y en fracciones, ¿cómo se resolvería este problema?
Jaqueline: Pues se suma 1/3+ 1/3 y son 2/3.
Yolet: 1/3 más 1/3 son 2/3 y 2/3 son 4 dulces.

En el inicio de la clase, Luisa contribuye a que los alumnos avancen en la representación gráfica y numérica de las fracciones en contextos discretos, para luego llevarlos a la suma de fracciones con igual denominador (*Luisa: Si Jonathan se comió 1/3 de dulces amarillos y 1/3 de dulces de color azul, ¿cuántos dulces se comió en total?*). En este caso, logra que los alumnos identifiquen la necesidad de recurrir a la suma de las fracciones para obtener la respuesta a su interrogante (*Jaqueline: Pues se suma 1/3+ 1/3 y son 2/3).*

En concreto, en la primera parte de la clase, Luisa evidencia Conocimiento de los temas matemáticos, en particular del conocimiento de definiciones (problemas aditivos) y el conocimiento de fenomenología de fracciones (significado parte todo en contextos continuos y discretos), lo cual aparece en otras investigaciones (e. g. Rojas 2014).

En relación con el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas que Luisa posee, en la Tabla 3 presentamos un fragmento del plan de clase, donde favorece la enseñanza de problemas aditivos con fracciones en un grupo de sexto grado:

Tabla 3. Fragmento de una situación didáctica para la enseñanza de problemas aditivos con fracciones

Situación problema/consigna
Se pedirá a los alumnos que se reúnan en binas, y una vez realizado esto, se entregarán problemas impresos: Problema 1: Alberto compró una pizza el día de su cumpleaños, para repartirla entre su familia. Su hermano Ramiro se ha comido 2/3 de la pizza y Luis, su otro hermano se ha comido 1/6 de la pizza, ¿qué parte de la pizza se comieron entre los dos?, ¿qué parte de la pizza le queda ahora? Problema 2. Joselyn compró una bolsa con 30 dulces. Ella se comió 1/3 parte de dulces por la mañana y más tarde 3/6 partes del total de dulces de la bolsa, ¿qué parte de los dulces se comió en total?, ¿qué cantidad de dulces equivale a la fracción que representa lo que se comió?, ¿qué parte de dulces le queda?
Fase de acción
Los alumnos revisarán cada problema que se les ha entregado para que los lean, analicen y reflexionen sobre cuál es el proceso que deben seguir para resolverlos. Antes de que los alumnos comiencen a resolverlos. En esta fase, se considera necesario llevar a los alumnos a entender el problema, paso 1 que propone Polya para la resolución de un problema. Este primer paso, se guiará bajo las siguientes preguntas que serán realizadas a los alumnos, estas preguntas se adecuarán (las adecuaciones aparecen en negritas). para que los alumnos se sientan más familiarizados con la situación que se plantea en este momento: Paso 1: Entender el Problema. ¿Entiendes todo lo que dice? ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras? ¿Nos podrías decir con tus propias palabras lo que dice el problema? ¿Distingues cuáles son los datos? ¿Qué información o datos nos proporciona este problema, que sea de utilidad tomar en cuenta para resolver el problema? ¿Sabes a qué quieres llegar? ¿Qué es lo que el problema pide que hagamos, a qué quiere que lleguemos? ¿Hay suficiente información? ¿Con esos datos podríamos resolverlo?, ¿falta información o datos?) ¿Hay información extraña? ¿Hay información que no nos ayuda a resolver el problema, o que no entendamos?) Las respuestas a estas preguntas serán escritas en papel bond, y los alumnos las escribirán en su cuaderno para que les sirvan como referente o guía para resolver los problemas planteados.

En la Tabla 3, en el fragmento del plan de clase, Luisa muestra algunos conocimientos relacionados con el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, en particular con el conocimiento de una Teoría de enseñanza y el conocimiento de Estrategias para la resolución de problemas. En el caso de la Teoría de enseñanza, en la Figura 4, Luisa presenta indicios de conocimientos de algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas: planteamiento de una situación problema y una fase de acción; lo anterior se confirma con la información que nos proporciona en el documento de análisis de su práctica:

> Las planeaciones diseñadas que guiaron mi intervención, al estar planeadas bajo la TSD, descrita en líneas anteriores permitieron que los alumnos actuaran sobre situaciones didácticas, formularan sus propios procedimientos a partir de los saberes previos, mismos que serán validados con argumentos sustentados en los conocimientos adquiridos y, bajo las consideraciones de los otros alumnos sobre si son verdaderos o no y, la institucionalización (aspecto formal matemático) que el maestro relice sobre los conceptos, definiciones, procedimientos, algoritmos, que se han venido abordando de manera informal durante la clase. Esta metodología construirá el proceso de enseñanza-aprendizaje de cada intencion didáctica.

Figura 4. Fragmento de análisis de la práctica de Luisa.

En el documento de análisis de la práctica, Luisa muestra conocimiento de algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas como la fase de acción, formulación, validación e institucionalización; la primera fase se encuentra explícita en la Tabla 3, las fases de formulación y validación se encuentran presentes en la Tabla 4:

Tabla 4. Fragmento de una situación didáctica para la enseñanza de problemas aditivos con fracciones

Formulación
Tomando en cuenta los pasos que se rescataron en la fase anterior para resolver un problema, se preguntará a los alumnos: Ahora que entendimos lo que el problema plantea, ¿qué sigue para resolver el problema? En función de las opiniones de los alumnos, se mencionará que para ello deberán identificar primero, de manera individual, el procedimiento que crean más pertinente, así que a cada alumno se le entregarán las siguientes tablas en las que escribirán el procedimiento para cada problema. Esto hace referencia a los pasos 2 y 3 que propone Polya: Paso 2: Configurar un plan. Para este paso, se dará libertada al alumno que elija alguna estrategia de resolución o procedimiento que crean pertinente para resolver los problemas. Se considera que este paso va de la mano del paso 3, ya que una vez que formulen sus procedimientos, deberán elegir de entre los que formularon, el que les resulte más práctico para resolver el problema, y será éste el que habrán de ejecutar, es decir, será con éste con el que procederán a resolver el problema. Paso 3: Ejecutar el Plan. -Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema. -Sugiera tomar un nuevo curso.

-Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (¡puede que "se te prenda el foco" cuando menos lo esperes!).
- No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Problema	Nombre del alumno 1:_____	
¿Cómo voy a resolver el problema 1?	Procedimiento	¿Por qué?
¿Cómo voy a resover el problema 2?	Procedimiento	¿Por qué?

Validación

En esta fase, se preguntará de manera grupal: ¿qué procedimiento utilizaron? A partir de las respuestas y la identificación de los procedimientos, se pasará al frente a algunos alumnos (que utilizaron procedimientos diferentes respectivamente) para que muestren sus procedimientos.
De manera grupal se validarán estos procedimientos en función de las preguntas que en las siguientes líneas se muestran y que guían esta fase.

Para este momento, se organizará por turnos a los alumnos que deseen participar en la validación de los procedimientos encontrados.

Se pedirá a algún alumno que participe dando el argumento a la pregunta: ¿por qué se empleó este procedimiento?, y se preguntará, nuevamente, de manera grupal sí están de acuerdo con este procedimiento y expresen sus argumentos de acuerdo a la respuesta que dan. Otras de las preguntas que se realizarán son: ¿alguien lo resolvió de manera diferente?, ¿qué implica este procedimiento?, ¿sumaron o restaron las fracciones?, ¿cómo lo podríamos representar de manera gráfica?, ¿cuál de los procedimientos resulta más pertinente?, ¿por qué?

Esta misma dinámica se empleará para la validación del segundo problema.

A partir de las respuestas de los alumnos, se mencionará que en función de las observaciones que sus compañeros les realizaron y el nuevo análisis a sus procedimientos iniciales, habrá qué mirar hacia atrás, es decir, ver nuevamente los procedimientos ya validados y reflexionar sobre éstos, para dar respuesta correcta de acuerdo a lo establecido en los problemas, así como se les dará la oportunidad de escribir una forma de solución más sencilla que cumpla con lo establecido en los problemas.
Esta fase, corresponde al paso 4 de Polya:
Paso 4: Mirar hacia atrás.
¿Es tu solución correcta?
¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?
¿Adviertes una solución más sencilla?
¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general?

Como podemos identificar en la Tabla 3 y 4, Luisa evidencia conocimientos de Teorías de enseñanza, en particular de la Teoría de las Situaciones Didácticas en relación con la fase de acción, formulación y validación. Además, en las Tablas 3 y 4 Luisa muestra conocimientos de Estrategias para la resolución de problemas, las cuales se traducen en los pasos que propone Polya (Paso 1: Entender el problema; Paso 2: Configurar un plan; Paso 3: Ejecutar el plan y Paso 4: Mirar hacia atrás). De acuerdo con Santos-Trigo & Aguilar (2018, p. 157):

> […] en la comunidad matemática se han generado desarrollos relevantes relacionados con la resolución de problemas. Polya (1945) analiza su propia actividad y quehacer matemático vía el método introspectivo, que lo conduce a plantear un modelo que identifica las fases fundamentales que aparecen durante el proceso de resolver problemas.

Los párrafos anteriores nos permiten identificar, que Luisa evidencia conocimiento de relaciones entre el conocimiento de algunas fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el conocimiento de estrategias para la resolución de problemas. En la Tabla 3, aparece la fase de acción y el Paso 1: Entender el problema, mientras que en la Tabla 4 se presenta la fase de formulación, el Paso 2: Configurar un plan y el Paso 3: Ejecutar el plan. Al final de la Tabla 4 se encuentra la fase validación y el Paso 4: Mirar hacia atrás.

Conclusiones

La caracterización del MTSK de los profesores en formación nos provee de datos y evidencias para incidir en la transformación del contenido de los programas de formación inicial, en este caso, de educación primaria. Como podemos apreciar en esta comunicación, identificamos que Luisa muestra Conocimiento de los temas matemáticos (definiciones y fenomenología) y Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza y estrategias).

Al ser un reporte parcial de investigación, la caracterización del resto de los subdominios del MTSK sigue en curso, sin embargo, lo que aquí presentamos nos permite concluir que, derivado de sus procesos de formación inicial, los estudiantes normalistas manifiestan evidencias de la construcción del conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas al resolver situaciones problema que provienen de su quehacer docente y, al resolver tareas que plantean los formadores, cuya base son el resultado de las investigaciones en la formación inicial. De manera concreta, observamos que Luisa tiene conocimiento de relaciones de conocimientos entre las situaciones o fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas y, las fases para la resolución de problemas que propone Polya. Por ejemplo, en la situación de validación ubica la fase mirar hacia atrás, al igual que en el resto de las fases manifiesta articulación con los heurísticos que propone Polya.

Lo expresado en los párrafos anteriores cobra relevancia si asumimos que, ante la inmediatez que habitualmente impregna a la docencia, el reconocimiento y concreción de teorías didáctica sobre y desde la enseñanza de las matemáticas, articulado con el Conocimiento de los temas (KoT), son parte ineludible del conocimiento profesional y especializado del profesor de matemáticas.

Referencias bibliográficas

Ball D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics

teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20 (3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis doctoral publicada. Recuperada desde de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503

Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: EUNSA.

Hansen, A., Mavrikis, M., & Geraniou, E. (2016). Supporting teachers' technological pedagogical content knowledge of fractions through co-designing a virtual manipulative. *Journal of Mathematics Teacher Education* 19 (2-3), 205-226.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en Investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.

Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones: la relación parte-todo*. España: SÍNTESIS.

Montes, M. Á., Contreras, L. C., Liñán, M.ª C., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. & Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación* 367, 36-62

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, 18(1), 37-72.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis doctoral publicada. Universidad de Granada, España. Recuperada desde http://funes.uniandes.edu.co/6428/2/Rojas2013ConocimientoProfesor.pdf

Santos-Trigo, L. & Aguilar, D. (2018). "Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Polya al razonamiento digital" en Alicia Ávila (coord.): *Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista Educación Matemáticas.* México: SOMIDEM. ISBN: 978-607-98263-0-7

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Morata.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

DESCRIPTORES DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA EN SU PERSPECTIVA LOCAL: UN CASO DE ESTUDIO

DESCRIPTORS OF SPECIALIZED KNOWLEDGE FOR DERIVATIVE TEACHING IN ITS LOCAL PERSPECTIVE: A CASE STUDY

Irma Pinto-Rojas, Marcela Parraguez, Nielka Rojas
Universidad Católica del Norte; Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl, nrojas03@ucn.cl

Resumen
Esta investigación presenta las distintas formas en que un profesor interactúa con la derivada en su perspectiva local en un contexto de enseñanza. El modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) permite caracterizar los subdominios y categorías internas del conocimiento del profesor al describir y comprender esta interacción. Para lograr esto último, se definieron descriptores de conocimiento que fueron contrastados con una entrevista a un caso único –profesor universitario que imparte la asignatura de Cálculo–. Los resultados obtenidos permitieron focalizar los elementos de conocimientos que le fueron útiles al profesor, así como también delimitar aquellos conocimientos que dan identidad a su labor de enseñanza.

Palabras clave: derivada, estudio de caso, conocimiento del profesor

Abstract
This research presents the different ways in which the teacher interacts with the derivative in its local perspective (DLP) in a teaching context. The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) model allows characterizing the internal subdomains and categories of the teacher's knowledge when describing and understanding this interaction. To achieve the latter, knowledge descriptors were defined and contrasted with an interview to a unique-case-university professor who teaches Calculus subject. The results obtained allowed focusing attention on the elements of knowledge that were useful to the teacher, as well as defining those knowledge that give identity to his teaching work.

Key words: derivative, case study, teacher's knowledge

Problemática y antecedentes

Las dificultades en el aprendizaje del Cálculo para estudiantes que cursan primer año de universidad, es un tema bastante conocido en el campo de la Didáctica de la Matemática (Gutiérrez, Buitrago & Ariza, 2017; Jaafar & Lin, 2017; Kinley, 2016; Tallman, Carlson, Bressoud, y Pearson, 2016). Los estudiantes universitarios de estas temáticas, describen al Cálculo como una actividad cognitiva que está orientada a fortalecer habilidades algorítmicas, con un deslizamiento hacia procesos algebraicos donde *caminan a ciegas* en este sistema (Hitt, 2003) y no les permite resolver problemas fuera de este contexto, sin embargo, sí son capaces de resolver correctamente problemas donde pueden aplicar algoritmos (derivada de un producto, de un cociente etc.), operaciones en un punto de vista global de la derivada, con poca explicación o nula de cómo están entendiendo la derivada y alejados de realizar conexiones entre las distintas interpretaciones de ésta, además, se evidencian las dificultades de los estudiantes para diferenciar la derivada como función (perspectiva global) y la derivada en la cercanía de un punto (perspectiva local), conocimiento esencial para resolver problemas que están sustentados en una comprensión conceptual de la derivada.

Los resultados interpretados desde los distintos enfoques en las investigaciones antes referenciadas, han mostrado que las distintas interpretaciones o representaciones de la derivada dependen de una perspectiva local en sinergia con su perspectiva global, teniendo éstas un rol fundamental desde el punto de vista de la comprensión de la derivada. Más aún, se tienen evidencias que la perspectiva global de la derivada se favorece en la enseñanza (Montoya Delgadillo y Vivier, 2016), quedando la perspectiva local de la derivada (DPL) oculta en operaciones algebraicas o simplemente desechada, la Figura 1, muestra la producción de un estudiante universitario que prioriza un conocimiento básico de productos notables, no explicando que sucede en la vecindad de $x = 1$.

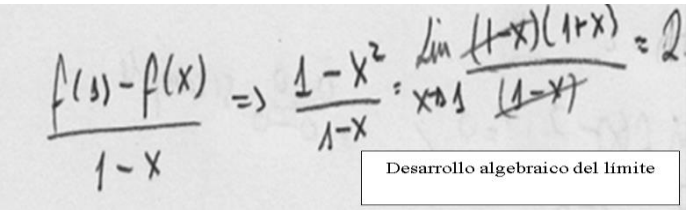


Figura 1. Operación realizada por un estudiante universitario.

En este sentido, y considerando que la DPL es un concepto estrechamente ligada al concepto de límite, y éste ha constituido en larga data un obstáculo epistemológico, es también, una exigencia cognitiva en la comprensión del Cálculo para estudios universitarios (Tall y Katz, 2014). Además, la comprensión de la DPL y el entendimiento común del límite están en conflicto con las ideas de aproximación y de cercanía, esto representado en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y en la recta tangente en un punto de la curva. Según estudios recientes, aún persisten los problemas de comprensión de estos contenidos, lo que incide directamente en una comprensión satisfactoria de la DPL (Gutiérrez et al. 2017, Sari, Hadiyan y Antari (2018). Desde el punto de vista de la enseñanza de la derivada, ésta sigue la forma clásica de su estructura, la secuencia, definición a los teoremas, del teorema a la demostración y de ésta a las aplicaciones y ejercicios, concede demasiada importancia a desarrollos algorítmicos y al manejo algebraico de la derivada dificultando la comprensión de la DPL (Gutiérrez et al., 2017 entre otros). En este sentido, Artigue (2001), señala:

> La enseñanza de la derivada se protege en el aprendizaje de prácticas algorítmicas y algebraicas que son a su vez el centro de la evaluación, situación que aún se mantiene y los estudiantes la conservan como una forma segura para trabajar, no tratar de comprender, sino sólo de funcionar en este dominio. (p. 213).

En este contexto, el rol del profesor, visto como una oportunidad de aprendizaje, y considerando el efecto que tiene el conocimiento del profesor en los logros alcanzados por sus estudiantes (Ball, Hill y Rowan, 2005), el interés de este estudio será indagar en los conocimientos que despliega el profesor universitario cuando aborda la derivada en su perspectiva local (DPL), permitiéndonos analizar las relaciones entre el conocimiento matemático y el conocimiento para la enseñanza de la DPL, desde la dimensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés de *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*) (Carrillo et al., 2018). Se espera que los resultados obtenidos en esta investigación sean un aporte a la comunidad de investigadores interesados en estas temáticas, y ser un aporte de conocimientos para el profesor que aborda el diseño de secuencias didácticas para actividades de aula en relación a una comprensión significativa de la DPL. Para avanzar en el desarrollo de esta investigación, planteamos la siguiente pregunta, en sintonía con el objetivo declarado:

¿Qué elementos matemáticos manifiesta el profesor al trabajar contenidos de Cálculo I, en relación a la DPL?

La respuesta a esta pregunta considera una indagación en el conocimiento especializado de quién enseña la DPL, para ello presentamos el marco teórico que enmarca a este estudio.

Marco teórico

Para describir el marco teórico que sustenta las decisiones teórico-metodológicas asumidas–indagar en el conocimiento especializado para la enseñanza de la DPL–, consideramos un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK–Mathematics Teacher's Specialized Knowledge), desarrollado en el Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), con sede en la Universidad de Huelva, España. MTSK, se compone de dos dominios del modelo de Shulman (1986), el dominio del conocimiento matemático (MK) y el dominio del conocimiento pedagógico del contenido (PCK), en uno de cuyos subdominios (el del conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas - KMLS), incluye el conocimiento curricular de Shulman; y considera, además, las concepciones y creencias del profesor acerca de la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje como elementos que permean todo el conocimiento (Carrillo et al., 2013). El conocimiento especializado en este modelo se extiende de la propuesta de Ball y colaboradores (1987), en el modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

MTSK, refiere a lo especializado como la integración de tres dominios: los conocimientos matemáticos, los conocimientos didácticos matemáticos específicos del profesor (los cuales a su vez se dividen en tres subdominios respectivamente), y un tercer dominio referente a las concepciones que tiene el profesor acerca de las matemáticas de su aprendizaje y enseñanza, representado en la parte central, para mostrar que permea todo el conocimiento (Figura 2). Mientras que en el MKT la especialización atañe, entre otras cosas, a la exclusividad de uso de elementos de conocimiento por parte del profesor frente a otros profesionales, en el MTSK la especialización procede del uso y de la necesidad de uso de esos elementos de conocimiento en la enseñanza de las matemáticas, independientemente de que esos elementos se compartan o no con otros profesionales.

Una descripción general de la estructura del MTSK, se muestra en un diagrama (Figura 2),

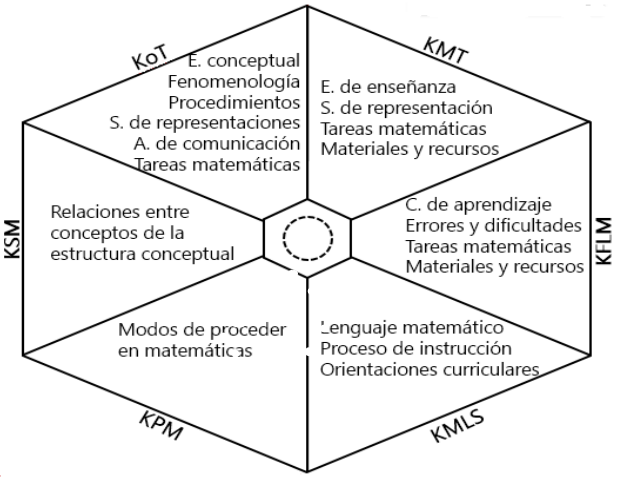


Figura 2. Sistema de categorías y subcategorías del MTSK.

Desde el punto de vista de nuestra investigación, MTSK es un modelo que aporta elementos teóricos y analíticos –categorías en el conocimiento especializado del profesor– con un enfoque centrado en la matemática, permitiendo identificar descriptores de conocimiento, para realizar interpretaciones del conocimiento que el profesor universitario podría activar y operar en su trabajo profesional docente en la enseñanza de la matemática (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Estas categorías y subcategorías constituyen la base para definir los descriptores de conocimiento especializado de la DPL.

MTSK, focalizado en la perspectiva local de la derivada, etiquetado, MTSK-DPL, está compuesto del dominio de conocimiento matemático (MK-DPL), con los subdominios de conocimiento: (a) De los temas relacionados con la DPL (KoT-DPL) (b) De la estructura de la matemática (KSM-DPL) (c) De la práctica matemática (KPM-DPL); y del dominio de conocimiento didáctico del contenido (PCK-DPL), los subdominios de conocimiento: (i) De la enseñanza de la DPL (KMT-DPL) (ii) De las características del aprendizaje de la derivada en lo local (KFLM-DPL) y (iii) De los estándares de aprendizaje de la DPL (KMLS-DPL).

Además, para constituir los descriptores del MTSK-DPL, se ha debido complementar con un modelo de comprensión profunda para la DPL, desarrollado en Pinto-Rojas y Parraguez (2017), desde una extensión de los Modos de pensamiento de Sierpinska (2000). Para este propósito, desde un estudio en la dimensión histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica de la derivada, se presentan tres formas de interpretar la DPL. La Figura 3, muestra este modelo, un insumo para el desarrollo de la parte metodológica, necesaria para construir los descriptores de conocimiento que se pretenden.

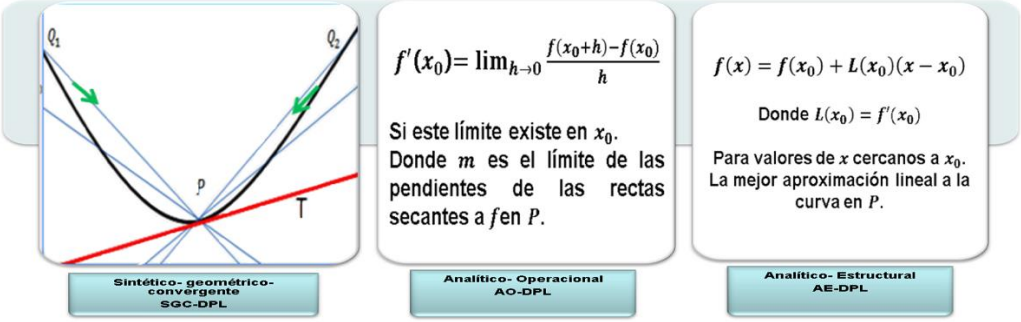


Figura 3. Descripción de los modos SGC-DPL, AO-DPL y AE-DPL para la DPL.

Para determinar los descriptores de conocimiento especializado del profesor que aborda la DPL para su enseñanza, se han debido determinar los indicadores de conocimiento que fundamentan los pasos a seguir en el proceso de análisis del MTSK. Este proceso involucra el análisis histórico y epistemológico de la derivada, en su génesis y evolución y los antecedentes de obstáculos en el campo de las investigaciones en Didáctica de la Matemática.

Una distinción importante, para iniciar este análisis, es recordar que esta indagación presentada a manera de síntesis está centrada en la DPL, la cual se describe en el contexto de esta investigación, como la derivada que se trata en las vecindades del punto.

Análisis epistemológico de la derivada en su perspectiva local

Los momentos históricos describen cuatro etapas en el desarrollo de la derivada hasta su definición actual (Larson, Hostetler y Edwards, 2009), resumidos a través de la siguiente frase: "Primero fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y solo entonces definida" (Grabiner, 1983, p.195). Los hitos temáticos de la génesis de la derivada emergen del estudio de tres problemas, el trazado de rectas tangentes, el cálculo de máximos y mínimos y las velocidades (Bourbaki, 1972). En este periodo, considerado anterior al siglo XVII, el trazado de tangentes tiene una concepción estática en la geometría griega (320-200 a.C.), los matemáticos, de los cuales destaca Euclides, Arquímedes, Eudoxo y Apolonio, ya tenían conocimiento de cómo encontrar la tangente en curvas específicas, como la circunferencia, donde la rigurosidad matemática era a través de pruebas geométricas.

Primera Etapa

En los inicios del siglo XVII, el desarrollo del Cálculo Diferencial está caracterizado por la introducción de conceptos como los indivisibles o infinitésimos que permiten desarrollar técnicas para calcular tangentes, donde las demostraciones carecen de rigor matemático, con prioridad en métodos heurísticos, tanto en su producción como en la forma de entender los conceptos. Con la invención de la geometría analítica, los matemáticos de la época crean nuevos métodos para el cálculo de las tangentes a las nuevas curvas, no se habla de infinitesimal, ni magnitudes pequeñas, los métodos están aplicados a problemas de construcciones geométricas (Bourbaki, 1972). Uno de los ejemplos que caracteriza las técnicas desarrolladas para calcular cantidades máximas y mínimas a través de la tangente desarrollada por Fermat, Barrow, Descartes entre otros matemáticos, usaban el concepto de derivada, sin embargo, la justificación matemática de las cantidades infinitamente pequeñas, no tiene explicación matemática convincente produciendo una crisis paradigmática en los matemáticos de la época, y poniendo en conflicto los argumentos defendidos entorno a la justificación matemática de la existencia del límite.

Siguiendo con las tangentes, su cálculo fue de gran interés durante el siglo XVII, y se consideraba como una secante en la cual dos puntos distintos se acercaban hasta coincidir era un método que funcionaba basado en la idea de aproximación, usado por Fermat, Descartes, matemáticos como Wallis y otros, tampoco se tiene claridad en la explicación de cómo estas secantes se convierten en tangentes. Sin embargo, utilizan esta noción de la derivada para resolver problemáticas en fenómenos de la física, la geometría y la mecánica, con aplicaciones de la derivada que brindaron resultados con grandes logros en el avance científico (Grabiner, 1983).

Segunda Etapa

En este período se destacan las investigaciones sobre el movimiento en relación con la recta tangente y la identificamos en las leyes que establece Galileo sobre la composición vectorial del movimiento, al representar este en un gráfico desplazamiento-tiempo, cuya dirección corresponde a la tangente de la trayectoria y su velocidad a la pendiente de la recta tangente (González, 1992).

Roberval y Torricelli en el año 1630, descubren un método para calcular tangentes mediante consideraciones cinemáticas, con las ideas básicas de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneos y la consideración de la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. La razón de sus velocidades, conocidas entre los dos movimientos tiene como resultante la dirección del movimiento por la ley del paralelogramo, se representa esta idea, que podía ser aplicada solo a curvas mecánicas, es decir, curvas generadas por el movimiento de un punto *P* situado en una circunferencia que rueda, siguiendo la idea de Galileo, relacionando geometría y dinámica.

Tercera Etapa

En el siglo XVIII, Brook Taylor (1685-1731), considerando las propiedades de diferencias finitas escribió una ecuación expresada como se conoce actualmente $f(x+h)$ en términos de $f(x)$ y sus cocientes de diferencias de varios órdenes. Posteriormente considerando diferencias más pequeñas, junto con un paso al límite, define la fórmula que se conoce como: Serie de Taylor. Reconocida por Maclaurin (1698-1746), Euler (1707-183), quienes la utilizaron para el estudio de funciones y para calcular soluciones aproximadas de ecuaciones. Permitió también comprender algunos elementos de la naturaleza de la derivada.

Cuarta Etapa

En esta cuarta etapa de la evolución histórica-epistemológica de la derivada se viene a dar respuesta a la búsqueda de la definición formal de la derivada. Esta etapa denominada del análisis, involucra el último tercio del siglo XIX y parte del XX, una época en que la derivada es definida formalmente, el Cálculo infinitesimal dio por primera vez un tratamiento claro y potente de la derivada en 1823, cuando Cauchy tomó el viejo concepto de cociente diferencial, y le dio un nuevo significado a la derivada con la definición épsilon–delta a través del límite. En resumen, no existía una definición satisfactoria de tangente ni tampoco existía la definición de límite.

La perspectiva local tiene un momento histórico que viene de las propiedades de las funciones sobre las vecindades del punto, de gran similitud con las dificultades que enfrentan los estudiantes, cuando abordan la derivada, por lo que se facilita la determinación de los obstáculos epistemológicos de la DPL o posiciones dogmáticas opuestas, para ser superadas en su enseñanza y aprendizaje de la DPL:

> "[…] por un lado la incorporación de elementos del dominio geométrico para medir cambios y por otro que la abstracción de carácter geométrico de lo infinitamente pequeño pueda ser llevada a un dominio puramente algebraico del límite" (Pinto-Rojas y Parraguez, 2017).

En resumen, la derivada se identifica en cuatro campos de estudio, Cálculo Diferencial, Integral, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Vectorial. Todos estos tópicos han aportado para conformar los descriptores de conocimiento que forman parte del MTSK-DPL. Los descriptores del PCK-DPL, emergen desde las distintas aproximaciones investigativas del campo de la Didáctica de la Matemática, con relación directa o indirecta en los conceptos matemáticos como: las funciones y sus propiedades, la continuidad de las funciones, derivada en un punto, función derivada como la pendiente de la recta tangente y como el límite del cociente de incrementos, diferenciabilidad local y global, el modo analítico y representación geométrica, derivadas laterales, procedimientos y argumentos intuitivos y formales de la derivada, su relación con la noción de límite, contenido en la estructura de los números reales, inmerso en la concepción de lo infinitamente pequeño.

La elaboración de los descriptores de conocimiento también tiene una componente cognitiva que aportan las tres formas de comprensión para la DPL, su modo de comprensión geométrica (SGC-DPL), su modo de comprensión analítica operacional (AO-DPL) y su comprensión estructural (AE-DPL).

Todos estos conocimientos, integran el universo matemático para la enseñanza y aprendizaje de la DPL, desde donde se identifican los descriptores de conocimiento que darán sentido a las categorías y subcategorías de conocimiento en los subdominios del MTSK que se busca profundizar.

A continuación, se muestran los descriptores de conocimientos levantados para los subdominios de conocimiento matemático (KoT-DPL) y (KSM-DPL) del dominio matemático de la DPL, como muestran las Tablas 1 y 2, en la categoría de procedimientos, se describen los estándares asociados al campo de problemas en relación con la derivada, siendo consciente de los aspectos matemáticos que surgen cuando el profesor va a explicar la DPL. En el caso del KSM-DPL, corresponde al conocimiento interpretado como un sistema de conexiones interconceptuales que permite indagar cómo comprende el profesor otros conceptos ligados a la DPL. Este proceso se realiza con todos los subdominios del MTSK.

Tabla 1. Descriptores de conocimiento de los temas matemáticos (KoT-DPL)

Procedimientos (A 1)
A1.1 Conocimiento de algoritmos de la estructura algebraica de las funciones para resolver la diferenciabilidad local. A1.2 Conocimiento de condiciones necesarias y suficientes para la diferenciabilidad, por ejemplo, la continuidad, vértices en la curva. A1.3 Conocimiento de la no diferenciabilidad a partir del límite por la derecha y por la izquierda.

Tabla 2. Descriptores de conocimiento de las estructuras de la DPL (KSM-DPL)

Conexiones de complejización (B1)
B1.1 Relaciona la DPL con contenidos posteriores dentro de la matemática, derivada como función, operador derivada, espacio tangente, espacios vectoriales.
Conexiones de simplificación (B2)
Desarrolla conceptos con una visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental. B2.1 Relaciona la DPL con contenidos anteriores dentro de la matemática, como propiedades algebraicas o de las fracciones numéricas para operar con el límite o la derivada.
Conexiones transversales y/o auxiliares (B3)
B3.1 Las conexiones transversales son las ideas matemáticas como elementos que estructuran diferentes contenidos, ejemplo, patrones de igualdad, de congruencia. Las conexiones auxiliares se establecen entre conceptos matemáticos, ejemplo, la función como ecuación.

Una vez desarrolladas las categorías e indicadores de conocimientos, se ha solicitado revisión de expertos, dos doctores que pertenecen al Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva (SIDM). Los investigadores realizaron observaciones que permitieron mejorar, especialmente el proceso de asignación de códigos, con la finalidad de asegurar una correcta interpretación de la información al momento de realizar el análisis de las entrevistas. De igual forma, para los indicadores de conocimiento y su relación con las unidades de información identificadas asegurando la validez de los indicadores y asignaciones.

Metodología

En consideración al objetivo de esta investigación, *describir los componentes de conocimiento especializado de la DPL, según el modelo MTSK que presenta el profesor informante al abordar la DPL.* Se considera un estudio de caso dado que aporta las técnicas para un estudio minucioso y en profundidad del profesor informante en estudio, también, pautas para realizar los procedimientos específicos de recogida, organización y análisis de la información (Stake, 2010). La caracterización del caso corresponde a un profesor universitario que imparte la asignatura de Cálculo I (tratado como Caso único de investigación), elegido en base a su predisposición para colaborar en el estudio. Se le aplicó una entrevista semi estructurada, sin límite de tiempo, con el interés de lograr reflexiones completas y acabadas sobre la DPL, asegurando respuestas más efectivas para el propósito investigativo. La finalidad de aplicar esta técnica, fue obtener información lo más detallada posible de los conocimientos desplegados por este informante en relación a los tres modos SGC-DPL, AO-DPL y AE-DPL, presentados para indagar en profundidad en los conocimientos puestos en juego al abordar la DPL.

Los tres modos de comprender la DPL, fueron presentados como: TARJETA 1, 2 y 3, con las distintas interpretaciones de la DPL. Esta consideración fue debido a que se quiere favorecer una reflexión del entrevistado, sin influencia del propósito de la investigación. Para guiar al lector, la TARJETA 1 es modo SGC; TARJETA 2 el modo AO; la TARJETA 3 el modo AE de la DPL.

Para desarrollar la entrevista se considera un guion, con la finalidad de abarcar todos los puntos de interés en relación al objetivo que se pretende, algunas de las preguntas: ¿Qué conceptos de la matemática, podrían ayudar a relacionar estos aspectos de la derivada? (manipula las tres tarjetas), ¿Cómo presentaría usted estas tarjetas, al enseñar la DPL?, ¿Si tuviera que dar algún nombre representativo de cada tarjeta? ¿Cómo las denotaría? ¿Cuáles de estos aspectos de la derivada son considerados en la enseñanza?, entre otras, permitieron centrar la atención en la comprensión e interpretación de la naturaleza del conocimiento especializado del profesor en relación a la DPL. El proceso de recogida de la información, a través de las reproducciones escritas, grabaciones y trascripciones de las conversaciones. La información proporcionada se dispone en párrafos, numerados, entre corchetes[X] como indica la Tabla 3, para poder identificar los episodios que contienen los fragmentos de interés, con la filosofía general de no alterar ni la forma, ni el contenido de ésta.

Análisis de la entrevista

Para iniciar este análisis, primero presentamos una descripción de aspectos contextuales que ayudan a entender la participación de este profesor, para ello se contrastan las respuestas del informante con los descriptores de conocimiento especializado MTSK-DPL. Se muestran a continuación algunos fragmentos del análisis realizado para algunos subdominios.

Conocimiento de los temas en el subdominio (KoT-DPL)

Para el subdominio de conocimiento de los temas matemáticos (KoT-DPL), se consideraron las categorías: procedimientos matemáticos (A1); definiciones propiedades y fundamentos (A2); registros de representaciones de la DPL (A3) conexiones intraconceptuales (A4); fenomenología y aplicaciones (A5), con sus respectivos indicadores de conocimiento.

Respecto del conocimiento del contenido matemático de la DPL, (KoT-DPL), manifestado por este profesor no se encuentran evidencias en la categoría de procedimientos (A1), sin embargo, al momento de argumentar la representación gráfica de la DPL, Figura 4, el profesor muestra los conocimientos sobre procedimientos matemáticos que aportan indicios que conoce formas de resolver problemas, justificando las propiedades del

triángulo rectángulo y de la tangente para llegar a la definición de la DPL, correspondiendo al indicador A1.2 y A1.3.

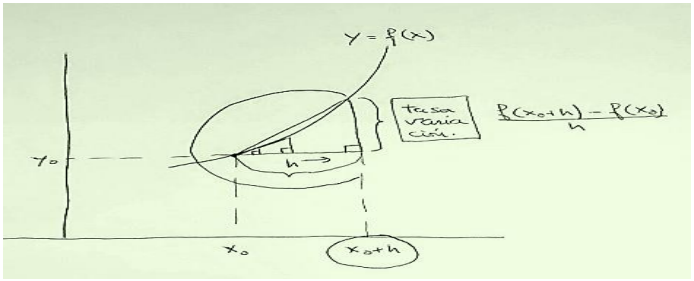


Figura 4. Evidencia de conocimiento matemático (MK-DPL)

Respecto de la categoría de conocimiento, de las definiciones, propiedades y sus fundamentos (A2), el profesor, muestra evidencias de las propiedades y definiciones, que son abordadas en la mayor parte del tiempo en un lenguaje formal de la matemática, con evidencias de conocimiento de las propiedades en torno a las funciones diferenciables A2.1, de la recta tangente, propiedades del triángulo rectángulo (A2.2). La información obtenida se organiza en tablas, identificando la unidad de información en el documento de la transcripción de la entrevista, representada y codificada, como muestra la Tabla 3, donde

Tabla 3. Asignación de códigos para las categorías A2 del profesor informante.

		UNIDAD DE INFORMACIÓN	COD	INTERPRETACIÓN
Conocimiento de los tópicos: KoT (A)	CATEGORIA: Definiciones, propiedades y sus fundamentos	[2] *Primero es que usted puede fijar el $f(x)$ del punto P y puede decir que $f(x+h)$ es el extremo del triángulo, en conexión con el punto Q, o puede ser mirando cualquier punto del otro lado, a la izquierda o derecha de P.*	A2.1	Propiedad de la función diferenciable en un punto.
		[3] *El ángulo de tangencia da exactamente la pendiente de la recta tangente, cuando h tiende a cero.*	A2.2	Conoce las propiedades de la recta tangente.
		[6] *Generalmente cuando yo me detengo a mirar, cuando construyo un modo de pensar en ello, construyo una relación de equivalencia, ir y venir, para mí la relación de equivalencia es dada solo por el triángulo, nunca pensé en que podría ser otro elemento.*	A2.2	Propiedades del triángulo rectángulo.
		[19] *La continuidad es una definición que es puramente matemática.*	Indicio	Conocimiento para la continuidad de una función.

El análisis realizado al MTSK-DPL del profesor informante, sujeto de estudio, muestra cómo se manifiesta y se relacionan los distintos subdominios de conocimientos, destacando la presencia de conocimiento del tema

matemático, y conocimiento de la práctica matemática en relación a la DPL. Al caracterizar el conocimiento especializado del profesor, se establecen relaciones con el conocimiento matemático y didáctico, como una forma de aproximación al conocimiento especializado sobre la DPL de profesores universitarios.

Resultados

Respecto del objetivo de investigación, y para describir los componentes de conocimiento según el modelo MTSK-DPL que presenta este profesor, se han obtenido evidencias en casi todos los subdominios de conocimiento a excepción del subdominio KSM-DPL, que no presentó evidencias en las categorías B2, de las conexiones de simplificación y B3, de conexiones transversales y/o auxiliares. La justificación de esto último se podría explicar por el instrumento utilizado para indagar estos conocimientos, dado que en la entrevista no se contempló la resolución de problemas y en el caso de esta categoría, resulta necesario observar la forma de operar en un problema concreto. La misma situación justifica la categoría B3, donde interesan las ideas transversales y conexiones interconceptuales, en la resolución de problemas, como, por ejemplo, la función con su ecuación (Escudero, 2014). En relación a los resultados obtenidos del conocimiento especializado del profesor informante, se destacan especialmente los conocimientos correspondientes a los subdominios KoT-DPL, en sus categorías A3.1, A3.2 y A3.3, y el subdominio KPM-DPL, en las dos categorías C1 y C2. Este profesor mostró conocimiento de las tres representaciones de la DPL, como se muestra en la Figura 5, donde se puede observar, además, que la práctica matemática de este profesor KPM-DPL, manifiesta un alto nivel de conocimiento, de las jerarquías y empleo de argumentos lógicos para demostrar en matemáticas, también, se destacó el uso de ejemplos y contraejemplos para validar sus argumentos, junto con el manejo de alto nivel en la producción matemática. Para entender la información descrita en la Figura 5, los números representan las categorías, así, el subdominio KoT, tiene categorías, A1, …, A5; el subdominio KSM tiene tres categorías, B1, B2 y B3; KPM, categorías C1 y C2. Para el Conocimiento Didáctico de la DPL, en KMT, las categorías D1, D2 y D3, en KFLM, las categorías, E1, E2 y E3; KMLS las categorías F1, F2 y F3. Los espacios en blanco indican que no hubo evidencias de conocimiento en esas categorías.

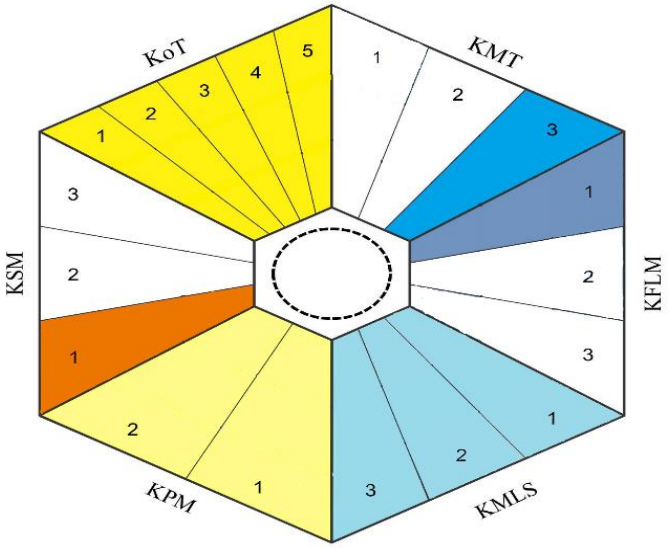


Figura 5. Representación del MTSK-DPL del profesor informante.

Respecto del uso de ejemplos en este profesor, los datos analizados mostraron que los ejemplos son la base para explicar ideas matemáticas en torno a la DPL y de cómo los ejemplos funcionan para entender ciertas definiciones,

como también, para generar conocimientos, al considerar los ejemplos como estrategias en la categoría D2, por lo que se identifica como una relación entre el subdominio KoT-DPL y KMT-DPL.

Respecto a su conocimiento en el dominio PCK-DPL, a través de sus reflexiones en torno a cuestiones curriculares, muestra estar consciente de cierta jerarquía en la enseñanza de la DPL, por lo que se interpretó como conocimiento en el subdominio KMLS-DPL, mostrando evidencias en todas sus categorías, como muestra la Figura 5.

Conclusiones

En el conocimiento especializado del profesor, se ha encontrado una posible relación entre el subdominio KoT-DPL y KMLS-DPL, al reflexionar sobre los elementos de conexión entre las distintas representaciones de la DPL, realizando una secuenciación de conceptos que se pueden considerar parte de la categoría F3 de KMLS-DPL, que refiere a la secuenciación de la DPL con temas anteriores y posteriores en la organización de contenidos.

Respecto del uso de ejemplos, los datos analizados mostraron que los ejemplos son la base para explicar ideas matemáticas en torno a la DPL y de cómo los ejemplos funcionan para entender ciertas definiciones, como también, para generar conocimientos. Desde el punto de vista de la enseñanza, esto podría explicar, como señalan Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009), los ejemplos son estrategias de enseñanza. Además, se destaca en este profesor, cómo el ejemplo del valor absoluto, le permite mostrar la no diferenciabilidad de la función en el cero, abordar la existencia de una única tangente para explicar la no diferenciabilidad, ejemplo que los estudiantes podrían considerar como un patrón de resolución de problemas, cuya estructura genérica podría servirles para enfrentar problemas similares; es decir, un conocimiento que podría estar en el subdominio KMT-DPL, al considerar los ejemplos como estrategias en la categoría D2, por lo que se identifica como una relación entre el subdominio KoT-DPL y KMT-DPL.

Respecto a su conocimiento en el dominio PCK-DPL, a través de sus reflexiones en torno a cuestiones curriculares, muestra estar consciente de cierta jerarquía en la enseñanza de la DPL, por lo que se interpretó como conocimiento en el subdominio KMLS-DPL, mostrando evidencias en todas sus categorías

En el conocimiento especializado del profesor, se ha encontrado una posible relación entre el subdominio KoT-DPL y KMLS-DPL, al reflexionar sobre los elementos de conexión entre las distintas representaciones de la DPL, realizando una secuenciación de conceptos que se pueden considerar parte de la categoría F3 de KMLS-DPL.

Referencias bibliográficas

Artigue, M., (2001). What can we learn from educational research at the university level? In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp.207-220). Holand: Kluwer Academic.

Ball, D.L., Hill, H.C. & Rowan, B. (2005). Effect of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2),371-406.

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas*. España: Alianza Editorial.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán (2013). Determinig Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. In B.Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceding of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, C. y Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 22*(1), 185-205.

Carrillo, J., Climent., N., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Contreras, L. C., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán. C. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education.* https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Escudero, D. (2014). *Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVIII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Madrid: Alianza Editorial.

Grabiner, J. (1983). The changing concept of change: The derivative from Fermat to Weierstrass. *Mathematics Magazine, 56*(4), 195-206.

Gutiérrez, L., Buitrago, M. R. & Ariza, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Rev. Cient. Gen. José María Córdova, 15*(20), 137-153. DOI: http://dx.doi.org/10.21830/19006586.170.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X* (2), 213-223.

Jaafar, R. & Lin, Y. (2017). Assessment for Learning in the Calculus Classroom: A Proactive Aproach to Engange Students in Active Learning. *IEJME-Mathematics Education 12*(5), 503-520.

Kinley, M. (2016). Grade Twelve Students Establishing the Relationship Between Differentiation and Integration in Calculus Using graphs. *IEJME-Mathematics Education, 11*(9), 3371-3385.

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B. (2009). *Cálculo Diferencial*. México: Mc Graw Hill Interamericana, S.A. de C. V.

Montoya Delgadillo, E. & Vivier, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as and analysis tool for the teaching and learning of analysis, *ZDM-The Intenational Journal of Mathematics Education, 48*(6), 739-754.

Pinto-Rojas, I.E., y Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 873-898.

Rojas, N. (2014). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). Transformation: Using examples in mathematics teaching. En T. Rowland, F. Turner, A. Thwaites, y P. Huckstep (Eds), *Developing Primary Mathematics Teaching: Reflecting on Practice with the Knowledge Quartet* (pp. 67-100). London: Sage.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra. In J. Dorier. (Ed), *On The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Tall, D.O. y Katz, M. (2014). A cognitive analysis of Cauchy's conceptions of function, continuity, limit and infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 97-124.

Tallman, M., Carlson, M. P., Bressoud, D., y Pearson, M. (2016). A characterization of calculus I final exams in U.S. colleges and universities. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(1), 105-133.

ANÁLISIS DE ERRORES DE NEWMAN EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE LÓGICA Y CONJUNTOS

ANALYSIS OF NEWMAN'S ERRORS IN SOLVING PROBLEMS OF LOGIC AND SETS

Estela L. Juárez Ruiz, Ruth G. Solano, Carina Andrea Hernández Pacheco
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. (México)
estela.juarez@correo.buap.mx, ruth.garciasol@correo.buap.mx, carinah30@hotmail.es

Resumen
Una de las habilidades más demandadas de los estudiantes es la resolución de problemas. Newman delimitó cinco errores establecidos en niveles, que los estudiantes pueden cometer al resolver problemas. El alumno debe superar sucesivamente estos niveles para poder obtener la solución requerida. El objetivo de este trabajo consistió en analizar qué errores de Newman cometen con mayor frecuencia estudiantes universitarios y si están correlacionados significativamente. La muestra consistió de 52 estudiantes. De los errores presentados por los estudiantes, el 9.35% correspondió a errores de lectura, 17.29% a errores de comprensión, 18.22% a errores de transformación, 46.73% a errores de habilidades de proceso y 8.41% a errores de codificación. Siete de las diez correlaciones resultaron significativamente diferentes de cero, confirmando que los errores de Newman están relacionados entre sí, no solamente consecutivamente por niveles.

Palabras clave: errores de Newman, problemas matemáticos

Abstract
Problem solving is one of the most demanding skills of students. Newman defined five errors that are set out in levels, which students can make when solving problems. The student must successively pass these levels in order to obtain the required solution. The objective of this work was to analyze which ones of Newman's errors are most frequently made by university students and if they are significantly correlated. The sample consisted of 52 students. Of all errors presented by the students, 9.35% corresponded to reading errors, 17.29% to comprehension errors, 18.22% to transformation errors, 46.73% to process skills errors and 8.41% to coding errors. Seven of the ten correlations were significantly different from zero, confirming that Newman's errors are related to each other, not only consecutively by levels.

Key words: Newman's errors, mathematics problems

Introducción

Una de las habilidades más demandadas de los estudiantes es la resolución de problemas (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1991), pues la capacidad de resolver problemas es muy importante para desarrollar el aprendizaje de las matemáticas (Hasbullah y Wibawa, 2017). Es necesario analizar los obstáculos o dificultades que los estudiantes tienen en la resolución de problemas para poder hacer mejoras en la enseñanza.
(Newman, 1977, 1983) estableció que cuando una persona intenta resolver un problema matemático, tiene que poder superar varios obstáculos sucesivos, etapas o niveles. Abdullah, Abidin, y Ali (2015) los definen como sigue:

- Nivel 1 *Lectura o decodificación*, implica la capacidad para leer problemas matemáticos dados e identificar oraciones, signos y símbolos matemáticos.
- Nivel 2 *Comprensión completa*, consiste en que los estudiantes puedan comprender el problema.
- Nivel 3 *Transformación*, es la capacidad para realizar un plan para resolverlo o para determinar el método de solución matemática.
- Nivel 4 *Habilidades de proceso*, es la capacidad para realizar correctamente las operaciones necesarias para resolver el problema.
- y Nivel 5 *Codificación*, es la capacidad para integrar los elementos obtenidos en una respuesta coherente al problema (p. 134).

Ellerton y Clements (1996) declararon que Newman usó la palabra "jerarquía" explicando la razón por la cual los estudiantes que fracasan en cualquier nivel de resolución de problemas les impide obtener la solución requerida. Esta perspectiva rigorista diría que si un estudiante se equivoca en una etapa del proceso de resolución del problema, tiene mal todo lo demás. Pero ¿si la coherencia de todo lo demás es correcta, sería adecuado ponerle todo mal?

El presente estudio tiene como objetivo analizar qué errores de Newman se presentan con mayor frecuencia en estudiantes de primer semestre de ingeniería en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP), en México, y si están correlacionados significativamente. De esta manera, se pretende dar un soporte cuantitativo a la propuesta de Newman de que los errores están relacionados entre sí, no solo consecutivamente por niveles, y estudiar qué tipos de errores no consecutivos también están relacionados.
Las preguntas de investigación son: ¿Qué errores de Newman presentan con mayor frecuencia los estudiantes de primer semestre de la Facultad de Electrónica de la BUAP? ¿Qué correlaciones significativas existen entre los errores de Newman cometidos por estos estudiantes?

Marco referencial

El estudio de errores que cometen los estudiantes al resolver problemas matemáticos ha sido el foco de varias investigaciones, esto debido al gran interés de realizar mejoras tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de las matemáticas.

Uno de los aportes sobre el análisis de los errores presentes en los estudiantes es el estudio realizado por Sarwadi y Shahrill (2014), quienes investigaron sobre la comprensión de los errores y conceptos erróneos que poseen estudiantes que recursan el año 11 (segundo año de educación media superior en México). Su objeto de estudio fue investigar cuánta matemática entendieron y recordaron los estudiantes; cómo su nivel de confianza en sí mismos afecta sus respuestas de los ítems de la prueba, y las causas de los errores e ideas falsas que evidencian. Los participantes de la investigación estuvieron constituidos por 74 estudiantes y nueve maestros del mismo año escolar. Para la recolección de información, realizaron pruebas a los estudiantes junto con una escala para medir la confianza de los alumnos en sí mismos, y cuestionarios a estudiantes y profesores. El estudio obtuvo que no hubo correlación entre la confianza de los estudiantes en sí mismos y su rendimiento en la prueba; pero los conceptos erróneos que

tienen los estudiantes parecen tener un impacto significativo en el progreso y logro en las pruebas. Estos errores y conceptos erróneos fueron variados y debido a diferentes causas, como la falta de atención y el descuido del maestro.

Por otro lado, Rokhimah, Suyitno, y Sukestiyarno (2015) realizaron una investigación de corte cualitativo, que tuvo como propósito determinar cuáles son los tipos y las causas de error que los estudiantes de séptimo grado (primer año de secundaria en el sistema mexicano) cometen al resolver problemas verbales de aritmética social (problemas de compra y venta en la vida cotidiana). Los autores mencionan que de acuerdo con el método de análisis de los errores de Newman, se sugieren cinco actividades cruciales para encontrar el tipo y causa de los errores de los estudiantes al resolver problemas verbales, añadiendo un sexto error denominado error de descuido (Clements, 1982). Para recolectar los datos, realizaron tests y entrevistas a seis estudiantes divididos en dos ternas, cada una de ellas con estudiantes pertenecientes a tres diferentes niveles de rendimiento académico (alto, medio y bajo). Entre los resultados que obtuvieron, encontraron que los sujetos de nivel alto presentaron errores de comprensión, transformación y habilidades de proceso; los de nivel medio mostraron errores de comprensión, transformación, habilidades de proceso y descuido; y los estudiantes de nivel bajo, errores de lectura y comprensión. Entre las conclusiones, los investigadores recomiendan, por un lado, aumentar la comprensión de fórmulas y por otro, aumentar la capacidad de los estudiantes para interpretar palabras claves y para realizar procedimientos de cálculo de operaciones.

Otros estudios que centran su atención en el método de análisis de los errores de Newman son los hechos por White (2009, 2010) y están relacionados con la reevaluación de dicho método. Los artículos enuncian que el análisis de errores de Newman (NEA por sus siglas en inglés) ha sido incluido en una serie de programas en Nueva Gales del Sur, en Australia, y se discute su uso como una herramienta de diagnóstico para vincular la aritmética y la lecto-escritura. El estudio concluyó que en uno de los programas en que se introdujo el NEA se hizo una contribución importante en la mejora de los resultados de aprendizaje de docentes y estudiantes, reflejados estadística y educativamente entre el inicio y finalización del programa vinculado con la resolución de problemas verbales matemáticos. Asimismo, los maestros que aplicaron el método lo consideraron como una estrategia correctiva y pedagógica en el aula.

Finalmente, Rohmah y Sutiarso (2018) buscaron en su investigación explorar los tipos y factores de errores que se presentan en la resolución de problemas de ecuaciones lineales de dos variables en estudiantes de secundaria en Indonesia. Para ello, utilizaron el procedimiento de Newman el cual juega un papel importante para la elaboración y análisis de una prueba aplicada a 147 estudiantes de 15 años. Los factores de error que detectaron en los estudiantes al resolver este tipo de problemas fueron: no absorción idónea de la información, no comprensión de la transformación del problema, no comprensión del material de estudio, débil comprensión de los conceptos matemáticos, poca experiencia de los estudiantes para resolver problemas y descuido en el proceso de ejecución. Con lo que se interpreta que el método de Newman es una herramienta fundamental para identificar los errores en los estudiantes y utilizarla como un medio para mejorar habilidades resolutivas.

Metodología

Se trató de un estudio cuantitativo descriptivo correlacional con pruebas de hipótesis para identificar correlaciones significativamente diferentes de cero. La población de estudio consistió en los estudiantes de primer semestre de las carreras de Ingeniería en Sistemas Automotrices e Ingeniería en Energías Renovables de la Facultad de Electrónica de la BUAP, en México, en el periodo comprendido entre agosto y diciembre de 2018. La selección de la muestra se realizó a través de un muestreo aleatorio por conglomerado.

La recolección de datos se hizo a través de la aplicación de una prueba consistente en tres problemas como se muestra en la Figura 1. Estos problemas fueron seleccionados por un grupo de diez profesores con formación y desempeño profesional en matemáticas.

1. Analiza si el siguiente argumento es válido o inválido:
   O bien Toledo deja el gobierno o bien las protestas aumentan. Si las protestas aumentan, los políticos se esconden o Susy Díaz toma el poder. Para que Susy Díaz tome el poder es necesario que todos los alumnos aprueben el curso de IA o que Toledo deje el poder. Toledo deja el poder. En consecuencia, Susy Díaz toma el poder.
2. Si la proposición $\neg\big([(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (r \vee s)\big)$ es verdadera, obtenga el valor de verdad de: $(r \wedge s) \Rightarrow (p \vee q)$.
3. Demuestre que si $A \subseteq B$, entonces $B^c \setminus A^c = \emptyset$.

Figura 1. Problemas de lógica inferencial y conjuntos.

Los errores de Newman fueron evaluados de manera independiente. Cada tipo de error fue contabilizado de la siguiente manera: 0 si no hubo error y 1 si hubo error. Los criterios de selección para cada tipo de error se presentan a continuación:

- *Error de lectura*. Omisión de algún paréntesis cambiando el significado de la proposición lógica, modificación de algún dato como por ejemplo cambiar alguna palabra del enunciado modificando su interpretación, lectura incorrecta del problema por la omisión de algún signo de puntuación, omisión de algún dato.
- *Error de comprensión*. Utilizar de forma incorrecta alguna propiedad o algún concepto.
- *Error de transformación*. Elección incorrecta del método de demostración, por ejemplo, querer probar una propiedad de conjuntos haciendo solamente un diagrama de Venn.
- *Error de habilidades proceso*. Errores al realizar procedimientos matemáticos, como por ejemplo realizar implicaciones sin sustento o incluir datos extraños sin justificación.
- *Error de codificación*. No proporcionar la respuesta correcta del problema, por ejemplo, decir argumento no válido cuando en realidad ha probado su validez.

Se utilizó el paquete estadístico R versión 3.6.1 y la correlación de Kendall no paramétrica para el cálculo de las correlaciones entre los diferentes tipos de error de Newman y para identificar alguna correlación significativamente diferente de cero entre ellos con un nivel de confianza del 95%. La prueba de hipótesis fue: Ho: $\tau_{x,y} = 0$; Ha: $\tau_{x,y} \neq 0$.

Resultados

La muestra consistió de 52 estudiantes con edades entre 18 y 24 años, de los cuales tres no se presentaron a la aplicación del instrumento, quedando un total de 49 participantes, de los cuales 39 (79.6%) fueron hombres y 10 (20.4%) mujeres. Después de aplicar el instrumento y eliminar las preguntas sin contestar, se obtuvieron 123 respuestas, cada una con cinco columnas correspondientes a cada tipo de error, haciendo un total de 615 datos.
El número total de errores fue de 214 (34.80% del total de datos). En la Tabla I se presentan las proporciones de cada uno de los cinco errores con respecto al total de errores presentados. Como puede observarse, el error de habilidades de proceso fue el que se presentó con un porcentaje más alto.

Tabla I. Proporción de cada uno de los errores de Newman.

Lectura	Comprensión	Transformación	Habilidades de Proceso	Codificación
9.35%	17.29%	18.22%	46.73%	8.41%

Ejemplos de los tipos de errores que presentaron los estudiantes al resolver los problemas se muestran a continuación. En la Figura 2 se puede observar un error de lectura que el estudiante cometió en el problema 1 al no percatarse que la "O" inicial del primer enunciado es parte del lenguaje y no corresponde a un conectivo lógico, por lo que en su primera premisa colocó $\vee P \vee Q$, lo cual no tiene sentido lógico. Esto es un indicador de que no está leyendo correctamente el conectivo que es un operador binario. También cometió un error de comprensión al no separar la conclusión de las premisas. De hecho, como puede leerse en la Figura 1, modificó el enunciado original de la última oración "En consecuencia, Susy Díaz toma el poder" por "entonces Susy toma el poder" sin darse cuenta de que la frase "en consecuencia" es la que separa las premisas de la conclusión. En tercer lugar, cometió un error de transformación al no establecer correctamente el método de demostración para probar invalidez (premisas verdaderas y conclusión falsa)

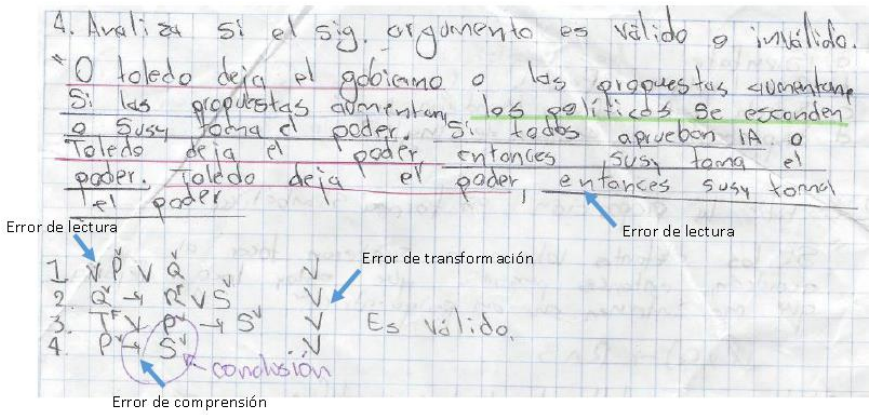


Figura 2. Diversos tipos de error al resolver el problema 1.

En la Figura 3 se muestra un ejemplo de error de codificación. El estudiante realizó correctamente todo el proceso para probar invalidez (premisas verdaderas, conclusión falsa) pero al no poder probarla, no trata de probar validez, sino que simplemente concluye que el argumento no es válido.

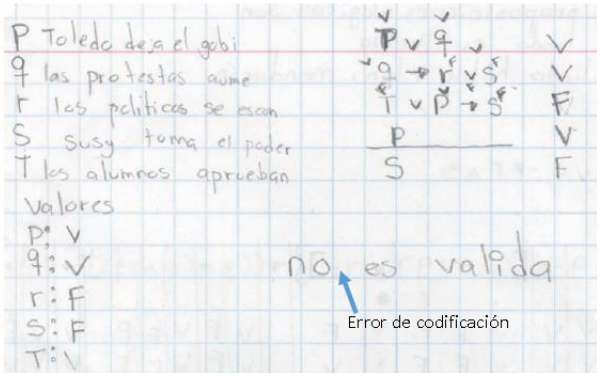


Figura 3. Ejemplo de error de codificación en el problema 1.

En la Figura 4 se muestra un error de lectura realizado en el problema 2, el cual consistió en colocar incorrectamente el paréntesis de la negación afectando solo al antecedente de la proposición lógica, cuando en realidad debía afectar a toda la proposición lógica. Este error afecta todo el análisis posterior haciéndolo más complejo. Varios estudiantes cometieron este tipo de error.

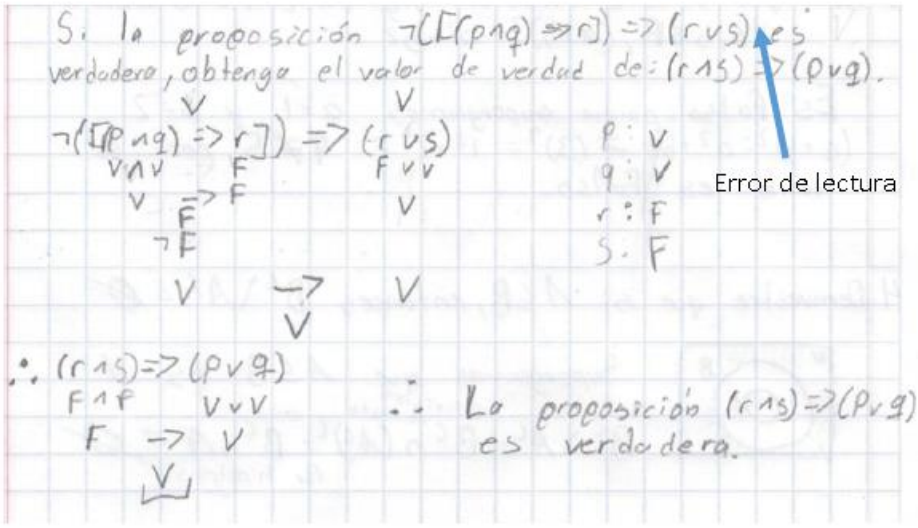


Figura 4. Un error de lectura en el problema 2.

Finalmente, en la Figura 5 se presentan varios tipos de errores que dos estudiantes cometieron en el problema 3. En la figura 5 a) hay un error de comprensión debido a que el estudiante no sombrea correctamente los conjuntos B^C y A^C. También comete un error de transformación al tratar de demostrar la proposición matemática con solo un diagrama de Venn.

En el caso de la Figura 5 b), el estudiante comete un error de lectura al no escribir correctamente el consecuente de la implicación enunciada en el problema 3: $B^C \setminus A^C = \emptyset$ (ver la Figura 1). También comete un error de habilidades de proceso al implicar incorrectamente $A \subseteq B \rightarrow A = B$. Observe que al final concluye que $B^C \setminus A^C = \emptyset$ contradiciendo su enunciado previo equivocado, a pesar de hacer una demostración directa.

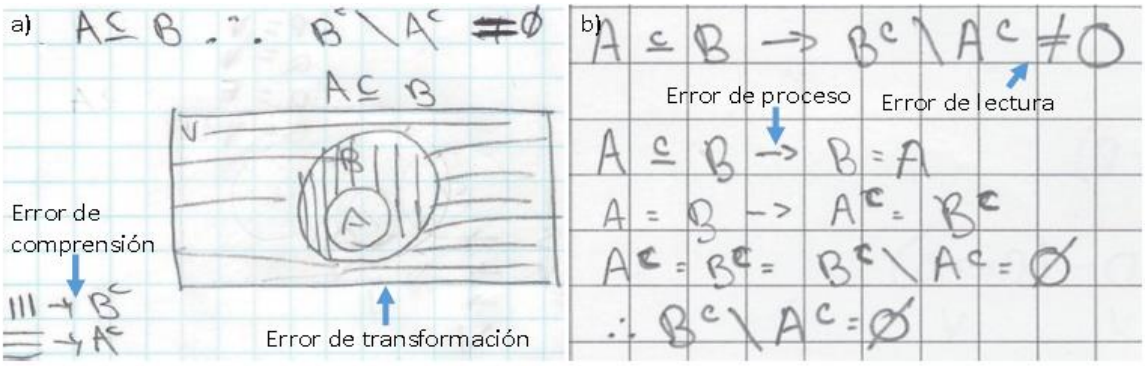


Figura 5. Ejemplos de errores en el problema 3.

Con respecto a las correlaciones, se aplicó el estadístico τ de Kendall con un nivel de confianza del 95%. En la Tabla II se pueden observar los valores obtenidos para cada par de errores con sus respectivos valores de p. Las

pruebas de hipótesis que resultaron significativamente diferentes de cero fueron siete. Los errores más altamente correlacionados según Fraenkel, Wallen, y Hyun (2011), son aquellos cuyas correlaciones tienen valores de $\tau >$ .40. Estas se dieron entre el error de lectura y el de comprensión ($\tau = .53$), y entre el error de lectura y el de codificación ($\tau = .44$).

Con respecto a la relación positiva encontrada entre el error de lectura y el de comprensión, se puede concluir que, en efecto, la percepción de Newman de una jerarquía en el proceso de resolución de problemas se encontró en este estudio, de tal manera que cuando el estudiante realizó correctamente la lectura de los problemas, probablemente también los comprendió y pudo continuar con el proceso de resolución y de la misma forma, cuando cometió un error de lectura, también probablemente cometió algún error en la comprensión del mismo.

Con respecto a la otra correlación significativa obtenida entre el error de lectura y el de codificación, ambos tienen que ver con la estructura del lenguaje escrito y matemático, por un lado, la lectura del problema y por otro, la entrega de una solución coherente con el cuestionamiento planteado. Este resultado muestra que cuando el estudiante realizó una lectura correcta del problema, también entregó una respuesta acorde al cuestionamiento, y cuando falló en la lectura, también fallo en la codificación.

Tabla II. Resumen de correlaciones y p-valores entre los pares de errores de Newman.

Tipo	Cp		T		HP		Cd	
	τ	p	τ	p	τ	p	τ	p
L	**.53**	<.001	**.32**	<.001	.10	.28	**.44**	<.001
Cp		1	**.24**	.008	**.18**	.049	**.33**	<.001
T				1	.013	.88	**.26**	.003
HP						1	.140	0.12
Cd								1

Nota: Los valores de correlación significativos están en negritas. L=Error de lectura; Cp=Error de comprensión; T=Error de transformación; HP=Error de habilidades de proceso; Cd=Error de codificación.

Discusión

Se hizo un estudio con el propósito de investigar los tipos de errores que los estudiantes universitarios del área de ingeniería cometen, al resolver problemas de lógica y conjuntos. Asimismo, se planteó confirmar o negar la afirmación de Newman de que los errores de lectura, comprensión, transformación, habilidades de proceso y codificación están relacionados, a través de un estudio de correlación y si éstos son significativamente diferentes de cero.

Los hallazgos encontrados fueron que los estudiantes cometen todos los tipos de error al resolver problemas de lógica y conjuntos, pero predominantemente errores de habilidades de proceso, con un 46.73%, seguido por errores de transformación (18.22%) y comprensión (17.29%). El error de lectura (9.35%) y el de codificación (8.41%) fueron los errores que menos se presentaron en estos estudiantes.

Estos resultados se encuentran en concordancia con los estudios de Trance (2013), Rohmah y Sutiarso (2018) y Abdullah et al. (2015) como se muestra en la Tabla III. En efecto, en casi todos los casos, los errores de comprensión,

transformación y habilidades de proceso son los que presentan una mayor incidencia; el error de lectura presenta una incidencia más bien baja (de 0% a 9.35%) y solo el error de codificación presenta variaciones mayores.

Tabla III. Comparativo de resultados con resultados de otros autores.

Autores	L	Cp	T	HP	Cd
Nuestro estudio	9.35%	17.29%	18.22%	46.73%	8.41%
Trance, (2013)	3.85%	24.62%	47.69%	18.46%	5.38%
Rohmah y Sutiarso, (2018)	4.35%	17.39%	34.78%	23.9%	19.6%
Abdullah et al., (2015)	0%	20.9%	24.17%	27.33%	27.58%

Nota: L: lectura, Cp: comprensión, T: transformación, HP: habilidades de proceso, Cd: codificación.

Un análisis comparativo más detallado de los resultados obtenidos con el estudio de Trance (2013) revela una conmutación en los errores de transformación y de habilidades de proceso, con porcentajes muy cercanos. En el error de habilidades de proceso los porcentajes son muy similares con diferencias de a lo más 5 puntos porcentuales. En el error de comprensión se dieron cambios más grandes.

En el de Rohmah y Sutiarso (2018) se encontraron las siguientes similitudes con nuestro estudio: a) los errores que más se presentaron son el error de comprensión, transformación y el de habilidades de proceso. b) El error que menos se presentó es el de lectura. c) El porcentaje de error de comprensión es muy similar en ambos estudios.

Finalmente, Abdullah et al. (2015) encontraron en su estudio con estudiantes de 13 años que los errores de proceso, transformación, comprensión y codificación fueron los que con mayor frecuencia se presentaron, coincidiendo con nuestros resultados, excepto en el error de codificación que en nuestros estudiantes fue bajo (8.41%) contra 27.58% de su estudio. El aumento en este porcentaje pudo ser causado porque en su investigación no se presentó el error de lectura y en nuestro estudio fue de 9.35%.

Los resultados de nuestro estudio también están respaldados por las investigaciones realizadas por Singh, Rahman, y Hoon (2010), y Santoso et al. (2017), quienes descubrieron que son los errores de procesamiento matemático (comprensión, transformación y habilidades de proceso) los principales errores cometidos por los estudiantes al resolver problemas matemáticos, y los errores causados por la fluidez del lenguaje (lectura y codificación) son los que se presentan en menor proporción.

Respecto de las correlaciones, siete de diez resultaron significativamente diferentes de cero, de las cuales las más altas se presentaron entre el error de lectura versus el error de comprensión (0.53) y entre el error de lectura versus el de codificación (0.44). Las restantes cinco que resultaron significativas oscilaron en un rango de valores de 0.18 a 0.33 (Tabla II). De esta forma, se observa que existe un vínculo muy marcado entre el error de lectura y el de comprensión, es decir, si un estudiante no lee con cuidado el problema e identifica las palabras y símbolos matemáticos que ahí se presentan, muy posiblemente tampoco podrá comprender completamente el problema o lo comprenderá de forma incorrecta y lo que se le pide resolver. La otra correlación existente en nuestro estudio entre el error de lectura y el de codificación, que fue el segundo más alto, puede deberse a que ambos errores tienen que ver con la fluidez del lenguaje, indicando que los estudiantes que cometen un error de lectura también tienen problemas para entregar la respuesta adecuada a la pregunta planteada en el problema. Esto incide directamente con tener un buen desempeño a la hora de resolver problemas.

Conclusiones

A través de este estudio se dio soporte a la afirmación hecha por varios autores acerca de que los tipos de errores que más se presentan en los estudiantes al resolver problemas tiene que ver con las habilidades de procesamiento matemático (comprensión, transformación y habilidades de proceso) y menos con la fluidez del lenguaje (lectura y codificación).
Asimismo, el estudio confirma cuantitativamente la aproximación de Newman acerca de que los tipos de error están relacionados significativamente, de tal manera que si un estudiante falla en una parte del proceso de resolución de un problema matemático, es muy probable que también falle en etapas sucesivas.

Estos resultados pueden orientar el trabajo de los educadores y profesores de este nivel hacia el reforzamiento y promoción de actividades de lectura de texto, tanto de lenguaje escrito como de lenguaje matemático, la importancia de observar con detenimiento detalles como paréntesis y símbolos, así como de la comprensión de conceptos, propiedades y procesos, para un mejor proceso de resolución de problemas de lógica y conjuntos en estudiantes universitarios.

Referencias bibliográficas

Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., & Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science*, *11*(21), 133–142. https://doi.org/10.5539/ass.v11n21p133

Clements, M. A. (1982). Careless Errors made by sixth-grade children on written mathematical task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(2), 136–144. Retrieved from http://www.jstor.org/stable/748360

Ellerton, N. F., & Clements, M. A. (1996). Newman error analysis. A comparative study involving Year 7 students in Malaysia and Australia. *Technology and Mathematics Education*, 186–193.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E., & Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. New York, USA: McGraw-Hill.

Hasbullah, & Wibawa, B. (2017). Analysis of mathematics students ability in learning metacognitive strategy type ideal (identify, define, explore, act, look). *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *12*(3), 859–872. Retrieved from https://www.iejme.com/article/analysis-of-mathematics-students-ability-in-learning-metacognitive-strategy-type-ideal-identify

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: Author.

Newman, M. A. (1977). An analysis of sixth-grade pupils' errors on written mathematical task. *Victorian Institute for Educational Research Bulletin*, *39*, 31–43.

Newman, M. A. (1983). *Strategies for diagnosis and remediation*. Sydney: Harcourt, Brace.

Rohmah, M., & Sutiarso, S. (2018). Analysis problem solving in mathematical using theory Newman. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(2), 671–681. https://doi.org/10.12973/ejmste/80630

Rokhimah, S., Suyitno, A., & Sukestiyarno, Y. L. (2015). Students Error Analysis in Solving Math Word Problems of Social Arithmetic Material for 7th Grade Base on Newman Procedure. *Proceeding in International Conference on Conservation for Better Life*, 349–356. Semarang, Central Java, Indonesia.

Santoso, D. A., Farid, A., & Ulum, B. (2017). Error Analysis of Students Working about Word Problem of Linear Program with NEA Procedure. *Journal of Physics: Conference Series*, *855*(1). https://doi.org/10.1088/1742-6596/855/1/012043

Sarwadi, H. R., & Shahrill, M. (2014). Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. *Mathematics Education Trends and Research*, *2014*, 1–10. https://doi.org/10.5899/2014/metr-00051

Singh, P., Rahman, A. A., & Hoon, T. S. (2010). The Newman procedure for analyzing Primary Four pupils errors on written mathematical tasks: A Malaysian perspective. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *8*, 264–271. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2010.12.036

Trance, N. (2013). Process Inquiry: Analysis of Oral Problem-Solving Skills in Mathematics of Engineering Students. *US-China Education Review A*, *3*(2), 73–82.

White, A. L. (2009). *A Revaluation of Newman Error Analysis*. Sydney.

White, A. L. (2010). Numeracy, Literacy and Newman's Error Analysis. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *33*(2), 129–148.

O PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

THE PEDAGOGICAL RESIDENCY PROGRAM IN MATHEMATICS TEACHERS' INITIAL TRAINING

José Fernandes da Silva; Marger da Conceição Ventura Viana
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais; Universidade Federal de Ouro Preto. (Brasil)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, margerv@ufop.edu.br

Resumo
Este artigo tem como objetivo discutir aspectos do Programa Residência Pedagógica - PRP (uma política pública do Ministério da Educação do Brasil) e as perspectivas enumeradas por uma Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do Estado de Minas Gerais participante da citada política. Trata-se de uma pesquisa qualitativa para a qual foram realizadas consultas às fontes primárias (Projeto Institucional e legislação atinente à Residência Pedagógica) e secundárias (revisão literária de estudos atinentes à formação de professores). As análises permitem afirmar que o citado programa enumera um conjunto de ações e metas necessárias à formação dos futuros professores de Matemática, tais como: diálogo com a educação básica e estágio supervisionado, bem como a inovação curricular, tanto na licenciatura, quanto no âmbito das escolas parceiras.

Palavras-chave: residência pedagógica, formação de professores de matemática, idoneidade didática

Abstract
This paper aims to discuss aspects of the Educational Residency Program (a public policy of the Brazilian Ministry of Education), and the perspectives listed by a Mathematics Bachelor's Degree from a public institution in the State of Minas Gerais participating in this public policy. This is a qualitative research for which enquiries were conducted with primary sources (Institutional Project and legislation related to the Educational Residence) and secondary sources (literary review of studies related to teacher training). The analysis allows us to state that the already mention program lists a set of actions and goals necessary for prospective mathematics teachers training, such as: dialogue with basic education and supervised internship, as well as curricular innovation, both in the bachelor's degree, and in school program participants.

Key words: pedagogical residence, mathematics teacher training, didactic suitability

Introdução

Grande parte dos problemas no contexto da formação inicial de professor de Matemática não é exclusividade da realidade do Brasil. Muitos países enfrentam dificuldades com a falta de diálogo entre a formação matemática e a formação pedagógica (Vaillant, 2013). Mudanças ocorrem, reiteradamente, no seio da sociedade e, neste contexto, é presente a preocupação de com a formação dos novos mestres para lidar com as novas gerações.

A Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura – UNESCO, em 2012, apontou que as sociedades modernas dependem de instituições sólidas para dar conta da sua complexidade, em especial, aquelas que formam os professores, pois estes, necessitam articular conteúdos, valores, culturas e práticas sociais em prol da formação intelectual dos estudantes. Desta forma, percebe-se a emergência de educadores autônomos e capazes de gerenciar seu próprio processo de aprendizagem (Rocha, Fiorentini 2018).

De acordo com Gatti (2019), é consenso para o mundo e, em especial, para a América Latina a necessidade de discutir os desafios relacionados ao fortalecimento da profissão docente. Ainda, conforme, a citada autora, diferentes organizações governamentais e não-governamentais têm destacado a necessidade de atrair bons alunos para os cursos de formação de professores, visando elevar a qualidade das licenciaturas e valorização da carreira profissional. Neste sentido, o desenvolvimento de políticas públicas para a formação de professores é fundamental (Unesco, 2012). Por outro lado, investigar e discutir as políticas, já existentes, faz-se necessário pois estas culminam em intervenções nos programas de formação, os quais institucionalizam o conjunto de conhecimentos, práticas e competências que devem ter os futuros professores, em especial, no campo da Matemática. (Godino, Batanero, Rivas e Arteaga, 2013).

Neste artigo, discute-se aspectos do Programa Residência Pedagógica – PRP, uma política pública proposta pelo Ministério da Educação (MEC) do Brasil. Tal política tem como objetivo central, segundo a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes - órgão vinculado ao MEC - induzir o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica, a partir da segunda metade de seu curso.

Diante disso, elaborou-se a seguinte questão norteadora: Em que aspectos o PRP se ajusta aos projetos educativos da instituição formadora de forma a promover à inovação no processo da formação inicial de professores de Matemática?

Marco teórico

A sustentação teórica para esta investigação está ancorada nas discussões de Ponte (2002) sobre a vertente profissional da formação inicial e Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013) sobre componentes e indicadores didaticamente adequados para avaliar programas de formação de professores de Matemática.

Ponte (2002), destaca que os cursos de formação de professores devem refletir sobre o profissional a ser formado.

> O ensino é uma profissão iminentemente relacional. Envolve, além disso, muitas questões de ordem ética. Que objectivos se devem estabelecer neste campo na formação inicial de professores? Como atender ao lado pessoal do professor e favorecer o seu desenvolvimento com vista ao exercício da profissão? Que objectivos de formação decorrem da necessidade do professor se tornar membro activo da sua escola e da sua comunidade profissional? (Ponte, 2002, p. 1).

Visando uma reflexão sobre as perguntas supracitadas, Ponte (2002) propõe que os cursos de formação de professores busquem campos de formações mais abrangentes. Na figura 1, estes campos estão delineados:

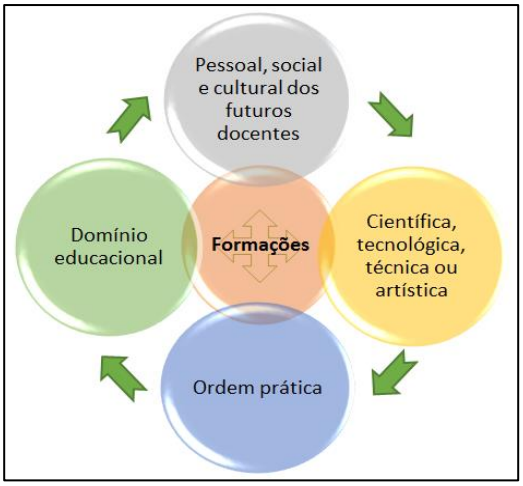


Figura 1: Ponte (2002) – adaptado

No que concerne, especificamente, à formação de professores de Matemática, Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013), destacam que as instituições educativas tomam decisões sobre os desenhos curriculares para formar os futuros professores e os professores formadores, apenas, executam seus planos de aula, muitas vezes, sem uma reflexão sobre quais conhecimentos devem ter os futuros professores. Diante do exposto, faz-se mister que os professores formadores disponham de instrumentos que possam subsidiar a avaliação e o debate sobre os elementos que são importantes para o bom funcionamento de um programa de formação.

Para Godino (2009), falta certo consenso na literatura disponível para explicitar os conhecimentos que os professores mobilizam durante suas práticas. Para o autor, refletir sobre as possibilidades de modelos que possa subsidiar o processo de ensino e aprendizagem, é importante. Assim, seria possível orientar o desenho de ações formativas e a elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos dos professores, sendo estes mais coerentes com as demandas das práticas profissionais.

Silva (2018) faz uma abordagem na qual explicita que:

> A multiplicidade de abordagens relacionadas aos conhecimentos que os professores deveriam ter impacta, diretamente, na construção dos currículos dos programas de formação de professores. Neste sentido, é notória, a ausência, ou a complexidade de parâmetros para as avaliações dos cursos de formação. Os parâmetros usados, pelas agências governamentais, [...] são dúbios e, por vezes, generalistas. (Silva, 2018, p. 1735).

Tal fato, exige a reflexão sobre parâmetros para avaliar os conhecimentos dos professores, em especial dos professores de Matemática pois:

> A complexidade dos processos de ensino e aprendizagem implica em prestar atenção à proposição de normas para a intervenção nos sistemas didáticos, porque não temos receitas sobre como ensinar, embora isso não signifique que não tenhamos certos conhecimentos para tomar algumas decisões locais pontuais. (Godino, Batanero, Rivas e Arteaga, 2013, p. 47).

Um parâmetro importante para avaliar o processo de ensino e aprendizagem é a noção de idoneidade didática (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011; Seckel, Breda e Font, 2019) que se ocupa de definir critérios para a transposição dos conteúdos matemáticos em sala de aula de forma que sejam levadas em consideração as seguintes dimensões: epistémica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica. Tais dimensões são descritas conforme Font, Planas e Godino (2010), da seguinte forma:

> 1. Epistêmica: conhecimento matemático relacionado ao contexto institucional em que o processo de estudo é realizado e a distribuição ao longo do tempo dos vários componentes do conteúdo (problemas, linguagens, procedimentos, definições, propriedades, argumentos). 2. Cognitiva: conhecimento pessoal dos alunos e progressão da aprendizagem. 3. Afetiva: estados afetivos (atitudes, emoções, crenças, valores) de cada aluno em relação aos objetos matemáticos e ao processo de estudo seguido. 4. Mediacional: recursos tecnológicos e alocação de tempo para diferentes ações e processos. 5. Interacional: padrões de interação entre o professor e os alunos e seu sequenciamento, visando criar e negociar significados. 6. Ecológica: sistema de relações com o ambiente social, político, econômico, ... que dá suporte e condiciona o processo de estudo. (Font, Planas e Godino, 2010, p. 17-18).

As citadas dimensões podem ser critérios para analisar o processo de ensino e aprendizagem e permitir uma reflexão sobre a qualidade deste, ou seja, apontar sua idoneidade didática (adequação, qualidade, pertinência).

Para Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013), é possível realizar uma transposição desta noção de idoneidade didática para avaliar programas de formação de professores de Matemática, pois é necessário que as instituições formadoras criem cenários que favoreçam o desenvolvimento do conhecimento didático matemático dos futuros professores. A tabela 1 ilustra os componentes e indicadores para subsidiar tal avaliação:

Tabela 1: Componentes e indicadores de idoneidade didática para avaliar programas de formação de professores

(Conteúdo Didático-Matemático, entendido do ponto de vista institucional) **Faceta Epistêmica**
Conteúdo matemático: Problemas, linguagens, conceitos, procedimentos, proposições, argumentos, conexões Conteúdo cognitivo: Conhecimentos prévios, adaptações curriculares, aprendizagem do conteúdo matemático por parte dos alunos Conteúdo afetivo: Interesses, atitudes, emoções frente a aprendizagem do conteúdo matemático dos alunos Conteúdo interacional: Modos de interação do discurso no processo de ensino e aprendizagem da matemática Conteúdo mediacional: Uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem da matemática Conteúdo ecológico: Currículo, inovação didática, adaptação sócio profissional, conexões interdisciplinares
Outras facetas implicadas na formação didática e matemática
Faceta cognitiva: Aprendizagem do conteúdo didático-matemático pelos professores Faceta afetiva: Crenças, valores, interesses, atitudes, emoções dos professores diante da aprendizagem do conteúdo didático-matemático Faceta interacional: Modos de interação e discurso no processo de formação de professores Faceta mediacional: Uso de recursos tecnológicos no processo de formação de professores Faceta ecológica: Currículo, inovação didática na formação de professores, conexões interdisciplinares

Fonte: Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013) - adaptado

Para esta investigação, tomou-se, apenas, a faceta ecológica para subsidiar as discussões.

Método

É uma investigação qualitativa (Garnica, 2004), tendo o levantamento bibliográfico como fonte principal de coleta de dados. Realizou-se consultas às fontes primárias (Projeto Institucional da Residência Pedagógica e regulamentos) e secundárias (revisão literária/teórica de estudos atinentes à investigação). Pautou-se a discussão nas diretrizes nacionais deste programa e nas perspectivas enumeradas por uma Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do Estado de Minas Gerais que foi contemplada com o Programa Residência Pedagógica, especialmente, nos aspectos que concernem ao fomento ao diálogo entre a formação inicial de professor de Matemática, a instituição formadora e a escola de Educação Básica, ou seja, faceta ecológica. Portanto, trata-se de uma discussão sobre a fase inicial

O Programa Residência Pedagógica, no âmbito da formação de professores de Matemática, está organizado da seguinte forma:

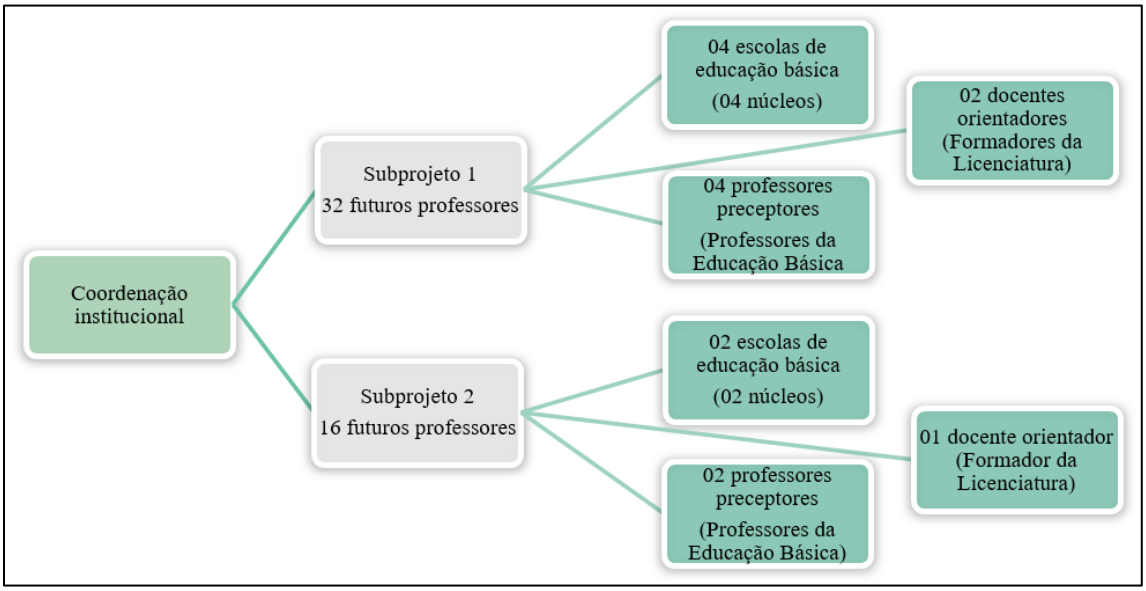


Figura 3: Organização do Programa Residência Pedagógica
Fonte: IFMG, 2018

Segundo o edital 06/2018 (lançado pela Capes visando selecionar instituições formadoras de professores para participarem do Programa Residência Pedagógica), o Coordenador Institucional é o responsável por gerenciar e coordenar as atividades numa perspectiva macro, visando o bom funcionamento das atividades, envolvendo todos os cursos de licenciaturas das diferentes áreas do conhecimento. Os docentes orientadores são os professores atuantes das licenciaturas responsáveis pelo funcionamento dos subprojetos e seus núcleos. Os professores preceptores pertencem ao quadro de docentes das escolas de educação básica que recebem os futuros professores (residentes). Em cada escola participante lotam-se 08 residentes, sendo estes coordenados por um preceptor.

Os dados foram organizados em categorias que emergiram das análises do Projeto Institucional da Residência Pedagógica que se apresentou dividido em fases: fase de levantamento, fase de estudos e reflexões sobre a realidade educacional e fase das reflexões curriculares.

Os resultados foram interpretados à luz dos componentes e indicadores de idoneidade didática para avaliar programas de formação de professores propostos por Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013), em especial, a faceta ecológica que envolve o currículo e a inovação didática na formação de professores e conexões interdisciplinares.

Resultados

Sobre o Programa Residência Pedagógica

O Brasil tem poucas experiências com projetos relacionados ao aspecto de Residência Pedagógica que faça a indução do professor ao campo de atuação. Destacam-se dois projetos que promoveram aspectos da Residência Pedagógica a docentes. O primeiro deles foi um programa gestado na Universidade Federal de São Paulo – Unifesp, criado em 2009 no âmbito do Curso de Pedagogia. O segundo trata-se do Colégio Pedro II que em 2012 iniciou o trabalho de promover a Residência Pedagógica nas seguintes áreas: I) Desenho Geométrico e Matemática; II) Biologia, Física e Química; III) Português e Inglês; IV) Geografia e História; V) Filosofia e Sociologia; VI) Artes, Educação Física e Música e VII) Anos Iniciais do Ensino Fundamental e Educação Infantil.

Em 2017, o Ministério da Educação, por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes, anunciou que implantaria o Programa Residência Pedagógica a nível nacional, como forma de modernização do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid (Política pública do Ministério da Educação do Brasil que se constitui em um programa para ofertar bolsas a futuros professores que realizam atividades de docência e apoio nas escolas de Educação Básica). Tal proposição gerou debates e manifestações, uma vez que o Pibid se constituía uma política consolidada e com importantes repercussões no âmbito da Educação Básica.

No início de 2018, a Capes publicou o edital 06/2018, que regulamentou o certame de seleção dos projetos institucionais da Residência Pedagógica. Tal edital enumerou os seguintes objetivos:

> I. Aperfeiçoar a formação dos discentes de cursos de licenciatura, por meio do desenvolvimento de projetos que fortaleçam o campo da prática e conduzam o licenciando a exercitar de forma ativa a relação entre teoria e prática profissional docente, utilizando coleta de dados e diagnóstico sobre o ensino e a aprendizagem escolar, entre outras didáticas e metodologias; II. Induzir a reformulação do estágio supervisionado nos cursos de licenciatura, tendo por base a experiência da residência pedagógica; III. Fortalecer, ampliar e consolidar a relação entre a IES e a escola, promovendo sinergia entre a entidade que forma e a que recebe o egresso da licenciatura e estimulando o protagonismo das redes de ensino na formação de professores [...]. (CAPES, 2018, p. 1).

Percebe-se que a relação teoria e prática é ponto fundamental do Programa Residência pedagógica.

Sobre a Residência Pedagógica no âmbito de uma Licenciatura em Matemática do Estado de Minas Gerais

O subprojeto da Licenciatura em Matemática, por hora analisado, demonstra um alinhamento com as diretrizes nacionais da Residência Pedagógica. Os objetivos do subprojeto analisado podem se organizar da seguinte forma:

Fase de levantamento de informações das escolas parceiras e aproximação entre a gestão do programa e a gestão das instituições de Educação Básica, ou seja:

> - Estabelecer parcerias com as escolas de Educação Básica da rede pública de ensino; - Estabelecer encontros entre a gestão, equipe pedagógica das escolas parceiras, comissão da Residência Pedagógica e docentes do Curso de Licenciatura em Matemática; - Conhecer, através de um levantamento de dados, a realidade educacional das escolas parceiras, bem como suas expectativas no desenvolvimento das ações conjuntas que envolvem a Residência Pedagógica e o Estágio Supervisionado no âmbito da Licenciatura em Matemática. (IFMG, 2018. p. 36).

Fase de estudos e reflexões sobre a realidade educacional que consiste no estreitamento dos laços entre a formação docente e as demandas das escolas-campo. Neste momento, o subprojeto destaca a importância de atividades de intervenção pedagógica.

> - Promover estudos e reflexões para elaboração de um plano de ações que envolva os residentes, os preceptores, as escolas parceiras, os gestores, coordenadores de área e os docentes da Licenciatura em Matemática; - Aproximar, por meio do diálogo entre o IFMG e as instituições parceiras, interesses, metodologias, didáticas, teorias, práticas e reflexões que busquem o enriquecimento da formação docente; - Promover a imersão dos licenciandos em Matemática nas instituições parceiras, visando o reconhecimento de seu campo de atuação, bem como a realização de intervenções no campo do processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio da pesquisa-ação. (IFMG, 2018, p.36-37)

Fase das reflexões curriculares que busca envolver desde o currículo da licenciatura até os currículos da Educação Básica. Segundo o subprojeto, esta fase prioriza formações diversas e registros sistemáticos das atividades realizadas. Isto é:

> Promover discussões sobre a adequação dos currículos e propostas pedagógicas dos cursos de formação inicial de professores de Matemática do IFMG às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); - Fomentar discussões sobre a adequação dos currículos e propostas pedagógicas da Educação Básica às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); - Promover a formação dos residentes e preceptores tendo como base os princípios norteadores da Residência Pedagógica, tais como: relação teoria e prática, currículo, sujeitos e metodologias no âmbito do ensino da Matemática; - Avaliar as ações desenvolvidas ao longo do projeto envolvendo todos os participantes: IES, escolas-campo, coordenadores de área, preceptores, residentes e gestores; - Elaborar os relatórios das práticas vivenciadas, socializando os resultados com a comunidade interna e externa. (IFMG, 2018, p. 37)

A estrutura de funcionamento deste subprojeto do Programa Residência Pedagógica, no âmbito da licenciatura investigada, está organizada em etapas, sendo cada uma delas, direcionadas pelos objetivos propostos. Configuram-se 440 horas que englobam todas etapas do subprojeto, sendo definidas da seguinte forma:

> A residência pedagógica terá o total de 440 horas de atividades distribuídas da seguinte forma: 60 horas destinadas à ambientação na escola; 320 horas de imersão, sendo 100 de regência, que incluirá o planejamento e execução de pelo menos uma intervenção pedagógica; e 60 horas destinadas à elaboração de relatório final, avaliação e socialização de atividades. (CAPES. 2018, p. 1-2).

O subprojeto da Licenciatura em Matemática apresenta, como objetivo geral, desenvolver projetos inovadores em parceria com as escolas de Educação Básica, visando fortalecer as discussões sobre currículo, práticas pedagógicas e formação dos futuros professores.
Observa-se, explicitamente, em seus objetivos específicos, aspectos relacionados à faceta ecológica:

> Estabelecer *parcerias* com as escolas de Educação Básica; Estabelecer *encontros* entre a gestão, equipe pedagógica das escolas parceiras, comissão da Residência Pedagógica e docentes do Curso de

> Licenciatura em Matemática; Conhecer a *realidade educacional* das escolas parceiras; Promover estudos e reflexões para elaboração de um plano de ações que envolva os residentes, os preceptores, as escolas parceiras, os gestores, coordenadores de área e os docentes da Licenciatura em Matemática; Aproximar, por meio do *diálogo* entre o IFMG e as instituições parceiras, interesses, metodologias, didáticas, teorias, práticas e reflexões; Promover a imersão dos licenciandos em Matemática nas instituições parceiras, visando o reconhecimento de seu *campo de atuação*, bem como a realização de intervenções no campo do processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio da pesquisa-ação; Promover discussões sobre a *adequação dos currículos* e propostas pedagógicas dos cursos de formação inicial de professores de Matemática do IFMG às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); Fomentar discussões sobre a adequação dos currículos e propostas pedagógicas da Educação Básica às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [...]. (IFMG, 2018, p. 18).

Como pode ser observado, e em acordo com Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013), a Residência Pedagógica como um programa oriundo de uma política pública, apresenta, em suas diretrizes, aspectos da faceta ecológica pois busca promover o diálogo entre os atores envolvidos, bem como, intervir, positivamente, no âmbito das escolas públicas parceiras. Tal fato está em consonância com a necessidade de aproximar as licenciaturas às escolas de Educação Básica, pois

> Uma questão adicional que se coloca à formação inicial de professores é a de saber se esta visa, antes de mais, a integração no sistema educativo existente ou se visa, sobretudo, formar professores que possam contribuir activamente para a mudança desse sistema. Trata-se de um dilema difícil de resolver. Se a formação não preparar o jovem professor para se inserir nas escolas que existem, com os seus alunos e as suas culturas profissionais, corre o sério risco de formar inadaptados, professores que, ao assumirem funções, se sentem completamente deslocados e inaptos para desempenhar o seu papel. Muitos deles podem mesmo abandonar o ensino. Se a formação não prepara os novos docentes para a mudança educativa e social, assume-se como mais uma força conservadora e, no fundo, complacente com os problemas existentes. (Ponte, 2002, p. 3).

Considerações finais

As discussões no âmbito da formação de professores e, em especial, da formação de professores de Matemática são imprescindíveis pelas suas características e constituição histórica. Agrega-se a este cenário a criação de políticas públicas que culminam em programas que incidem, diretamente, nos desenhos e práticas curriculares.

Destaca-se, nestas reflexões, que, tais políticas públicas são fundamentais para a consolidação das licenciaturas, que historicamente, foram subjugadas às sombras dos bacharelados.

A implantação do Programa Residência Pedagógica foi acompanhada de lutas, contrassensos, incertezas e dúvidas. É provável que a própria escassez de estudos sobre programas deste formato tenha colaborado para as tensões do momento.

É importante refletir sobre o cenário econômico do Brasil, pois os constantes cortes orçamentários contribuem para a tomada de decisões polêmicas em relação às políticas públicas, em especial, aquelas voltadas à formação de professores.

Contudo, é importante salientar que o subprojeto analisado apresenta ações importantes e necessárias à reformulação de práticas de formação dos futuros professores de Matemática. As análises documentais evidenciam

uma preocupação política no âmbito do projeto institucional no sentido de promover o diálogo entre o Curso de Licenciatura em Matemática e o contexto do futuro campo de atuação profissional dos licenciandos.

Retomando ao objetivo inicial desta investigação, pode-se afirmar que o Programa Residência Pedagógica, pelo projeto institucional, se ajusta à instituição formadora e às escolas de educação básica pelo diálogo e pelo intercâmbio de experiências. Encontra-se explicita a meta de reflexão sobre as práticas de estágio supervisionado e às formas de repensá-las.

A investigação continua, pois, dada a complexidade do Programa Residência Pedagógica, novas pesquisas serão empreendidas com o objetivo de compreender sua operacionalização e suas incidências na formação dos futuros professores.

Referências bibliográficas

Gatti, B A.; Barreto, E., S., S.; André, M., E., D., A.; Almeida, P., C., A. (2019). *Professores do Brasil: novos cenários de formação*. Brasília: UNESCO

Coordenação Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. (2018). *Edital Residência Pedagógica Nº 06 de 2018 com normas para submissão de propostas de projetos de Instituições de Ensino Superior*. CAPES, Brasília.

Font, V., Planas, N., Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33 (2), 89-105.

Garnica, A.V.M. História Oral e Educação Matemática. (2004). Em Borba, M. de C. e Araújo, J. de L, *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (77-98). Belo Horizonte: Autêntica.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D, Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT*, 8, (1), 46-74.

Godino, J. D.; Contreras, A.; Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, v. 26, n. 1, p. 39-88.

Godino, J. D.; Bencomo, D.; Font, V.; Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII, n. 2, p. 221-252.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Conferencia presentada en la XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia e Minas Gerais. (2018*). Projeto Institucional da Residência Pedagógica*. IFMG, Belo Horizonte.

Ponte, J. P. (2002). A vertente profissional da formação inicial de professores de matemática. *Educação Matemática em Revista,* 11A, 3-8.

Ximenes-Rocha, S., H; Fiorentini, D. (2018). Formação de professores em comunidades colaborativas no interior da Amazônia. ***Educação*** **(UFSM)**, 43(2), 267-284.

Seckel, M. J., Breda, A., Font, V. (2019). Los criterios de idoneidad didáctica en la formación de profesores. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(2), 440 - 447.

Silva, J. F. (2018). Componentes e indicadores de idoneidade didática de um curso de Licenciatura em Matemática: um levantamento relacionado aos aspectos ecológicos. *Revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, v. 31, p. 1733-1739.

Unesco. (2012). *Antecedentes y criterios para la elaboración de políticas docentes en América Latina y el Caribe*. Instituto de Estadística de la UNESCO, Santiago.

Vaillant, D. (2013). *Desarrollo profesional, evaluación y políticas docentes en Latinoamérica*. 2013. Recuperado em 30 de abril de 2019 de: http://www.ort.edu.uy/ie/articulos/desarrollo-profesional-evaluacion-y-politicas-docentes-en-latinoamerica.pdf

ERRORES DE NEWMAN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES DE PROBABILIDAD CONDICIONAL: UN ESTUDIO DE CORRELACIÓN

NEWMAN´S ERRORS IN THE CONDITIONAL PROBABILITY WORD PROBLEM SOLUTION: A CORRELATION STUDY

Ruth G. Solano, Estela L. Juárez Ruiz
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. (México)
ruth.garciasol@correo.buap.mx, estela.juarez@correo.buap.mx

Resumen
Se presentan los resultados de un estudio descriptivo correlacional cuyo objetivo fue analizar los errores que cometen algunos estudiantes al resolver problemas verbales de probabilidad condicional basado en el modelo propuesto por Newman. El instrumento utilizado consistió en cuatro problemas verbales. La muestra tuvo 88 estudiantes de tercer año de nivel medio superior de las áreas de ciencias sociales y humanidades. Los resultados arrojaron que el error de lectura fue el que más se presentó (23.57%), seguido con valores muy cercanos por los errores de transformación (20.59%), codificación (20.38%) y habilidades de proceso (19.32%). El que menos se presentó fue el de comprensión (16.14%). Con respecto a las correlaciones, todas resultaron significativamente diferentes de cero, con un nivel de confianza del 95%. Los coeficientes más altos se dieron entre los errores de habilidades de proceso con codificación (.88), errores de comprensión con transformación (.59), errores de comprensión con habilidades de proceso (.60) y errores de comprensión con codificación (.62).

Palabras clave: errores de Newman, descriptivo correlacional

Abstract
This paper presents the results of a correlational descriptive study which is aimed at analyzing the errors students make when solving conditional probability word problems based on Newman's model. The instrument used consisted of four-word problems. The sample included 88 third-year students of high school in the areas of social sciences and humanities. The results showed that the reading error was the one that appeared most (23.57%), followed with very close values due to the transformation errors (20.59%), coding (20.38%) and process skills (19.32%). Understanding errors were the least observed (16.14%). With respect to correlations, all were significantly different from zero, with a 95% confidence level. The highest coefficients were among the errors of process skills with coding (.88), understanding errors with transformation (.59), understanding errors with process skills (.60) and understanding errors with coding (.62).

Key words: Newman´s errors, correlational descriptive study

Introducción

La resolución de problemas es una actividad que involucra varias acciones en la mente del solucionador, incluido el acceso y uso del conocimiento, las habilidades y la experiencia (Abdullah, Abidin, y Ali, 2015). Por tanto, una educación matemática basada en la resolución de problemas puede dar cohesión a los conceptos y procesos matemáticos, creando y fomentando dentro del salón de clases una comunidad de aprendizaje, con una comprensión profunda del uso y aplicación de temas matemáticos.

La resolución de problemas se enseña y forma parte de los planes de estudio alrededor de todo el mundo (Törner, Schoenfeld, y Reiss, 2007) estudiándose durante décadas (Liljedahl, Santos Trigo, Malastina, y Bruder, 2016). El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) desde la Agenda para la Acción de 1980 promueve el poder de la resolución de problemas afirmando que: "El verdadero poder de la resolución de problemas requiere un amplio repertorio de conocimientos, no solo de habilidades y conceptos particulares, sino también de las relaciones entre ellos y los principios fundamentales que los unifican" (National Council of Teachers Mathematics, n.d., p.3).

En la resolución de problemas matemáticos, los estudiantes deben pasar por varias fases o niveles antes de obtener la respuesta final. En el proceso de resolución de problemas propuesto por Polya (1965) se tienen cuatro fases o niveles que son: a) comprender el problema, b) planificar la estrategia, c) ejecutar un plan y d) revisar la respuesta.

Al considerar que las matemáticas son un medio lógico de pensar y que ese razonamiento es una parte que debemos entender sobre el aprendizaje mismo de las matemáticas (Pulungan y Suhendra, 2019) se vuelve relevante analizar algunos de los errores que cometen los estudiantes al resolver problemas matemáticos. De tal forma que se pueden proporcionar elementos desde la investigación, que guíen las acciones docentes apropiadas para corregirlos.

De acuerdo con Effandi y Siti Mistima (2010, citados en Abdullah et al., 2015), el modelo de análisis de errores de Newman vincula la jerarquía en la que se clasifican los tipos de error, con las fases o niveles de resolución de problemas propuesto por Polya en el proceso de solucionar un problema. La declaración anterior es coherente con lo reportado por Ellerton y Clements (1996, citados en Abdullah et al., 2015), quienes reportaron que Newman usó la "jerarquía" como la justificación por la cual los estudiantes que fallaron en cualquier nivel de resolución de problemas no lograron obtener la solución requerida en niveles superiores.

Los docentes son responsables de identificar las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, que conducen a errores, antes de continuar y enseñar otros temas matemáticos (Abdullah et al., 2015). Las dificultades de algunos estudiantes se pueden identificar a través del análisis de los errores en los que incurren al solucionar problemas o concluir sus evaluaciones. El esfuerzo de los docentes por descubrir los errores de los estudiantes es útil para diseñar estrategias encaminadas a corregirlos, logrando aumentar el rendimiento de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Los errores continuos causarán dificultades y obstáculos en la comprensión que logran los estudiantes de los temas que abordan e incluso continuarán en los próximos temas de matemáticas, acumulando dificultades y obstáculos originados por la complejidad en el dominio de los conceptos y procedimientos matemáticos (Maharani y Subanji, 2018).

Los factores que causan errores cuando se ven desde las dificultades y habilidades de aprendizaje en los estudiantes tienen diversos orígenes (Abdullah et al., 2015), se pueden deber a que los estudiantes no integran correctamente la información, principalmente por la falta de experiencia de los estudiantes al trabajar en la solución de problemas, o bien que los estudiantes no entienden el contenido matemático de un problema lo suficiente para manipularlo, debido a que tienen superficialmente el concepto o poca destreza en su manipulación e integración a diversos contextos. Los errores también pueden deberse a factores como la negligencia o simplemente el descuido de los estudiantes.

Según las observaciones, los errores ocurren con mayor frecuencia debido a la falta de precisión de los estudiantes en el modelado y en el cálculo de la solución. En la investigación que realizaron (Santoso, Farid, y Ulum, 2017) sobre la resolución de problemas verbales de algebra lineal, reportaron que a menudo los estudiantes cometen errores en la fase de modelado (transformación) y en las habilidades de proceso, con una distribución porcentual generalizada del 20% y el 15%, respectivamente.

Un elemento importante en el aprendizaje es la retroalimentación que se da posterior a la evaluación. La última fase propuesta por Polya: revisar la respuesta o solución, concluye cuando la evaluación de la solución es una respuesta correcta y coherente con el problema planteado. Una evaluación exhaustiva de todo el proceso en la resolución del problema afectará el resultado del aprendizaje, pues el proceso de evaluación no concluye sino se realiza el análisis de los errores cometidos a lo largo del trabajo elaborado. Los errores que cometen los estudiantes son elementos importantes para identificar algunas dificultades u obstáculos en el aprendizaje, experimentadas por los estudiantes al resolver problemas y en las que es oportuna la intervención del docente (Santoso et al,2017).

El objetivo del presente estudio consistió en analizar los errores qué cometen los estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas verbales de probabilidad condicional, usando el modelo de errores de Newman, identificando cuáles de ellos están correlacionados y comprobando si las correlaciones son significativas.

La pregunta de investigación que se estableció fue: ¿Qué errores cometen los estudiantes de nivel medio superior al resolver problemas verbales de probabilidad condicional y si están correlacionados significativamente?

Marco teórico

Al llevar a cabo el proceso de resolución de problemas, es usual que algunos estudiantes encuentren dos obstáculos para encontrar la respuesta correcta. El primer obstáculo es el problema de la fluidez lingüística y la comprensión conceptual relacionada con el nivel de lectura simple y el significado de los problemas. El segundo obstáculo tiene que ver con el procesamiento matemático de la solución, que comprende las etapas o fases de: transformación, habilidades de proceso y codificación de la respuesta (Pulungan y Suhendra, 2019). Basándose en la explicación mencionada anteriormente, este estudio tiene como objetivo identificar y cuantificar los errores cometidos por algunos estudiantes en la resolución de problemas verbales de probabilidad condicional, usando el modelo de errores de Newman, y verificar si los errores que cometen están correlacionados significativamente.
La investigación de Pulungan y Suhendra (2019) reporta evidencia de que la mayoría de los estudiantes son capaces de realizar la primera etapa del modelo de Newman (leer y recodificar) sin mayores complicaciones, sin embargo, enfrentan dificultades para realizar desde la segunda hasta la quinta etapa en dicho modelo, las cuales son: comprensión, transformación, habilidades de proceso y codificación.

Algunos de los factores de error en la resolución de problemas, que cometen los estudiantes son: absorber información inconsistente, incompleta o deficiente sobre el problema, elegir un modelo de solución inapropiado para el problema planteado, seguir el material superficialmente y/o trabajar con una comprensión débil de conceptos matemáticos (Rohmah y Sutiarso, 2018). Al considerar algunos de los factores de error ya mencionados Rohmah y Sutiarso (2018) mencionan dos aspectos importantes a considerar, el primero es qué con las deficiencias mencionadas, muchos estudiantes perciben las matemáticas como un campo de estudio que es difícil de integrar a la resolución de problemas. Esto sucede debido a que las matemáticas se les presentan en una forma que es poco atractiva y con dificultades en su aprendizaje, como resultado, los estudiantes a menudo se sienten aburridos y desmotivados. Y el segundo es que cuando los estudiantes están poco interesados en aprender matemáticas, por no comprender como incorporarlas en la vida cotidiana, se muestran más pasivos para aprender, reacios, temerosos o tímidos al expresar sus ideas en la resolución de problemas que se abordan en matemáticas.

La resolución de problemas de acuerdo con Kantowski (1975, citado en Rohmah y Sutiarso, 2018) considera la interacción entre el conocimiento y los errores en el proceso de solución abarcando factores cognitivos y afectivos en la resolución de problemas.

De lo anteriormente expuesto se puede concluir que la resolución de problemas es un intento de encontrar una salida a una dificultad, logrando objetivos que no se pueden alcanzar de inmediato y que están estrechamente relacionados con el error en: el proceso, el pensamiento, el aprendizaje, la memoria, la transferencia, la percepción y la motivación (Rohmah y Sutiarso, 2018).

Investigaciones recientes llaman la atención sobre la importancia de las habilidades cognitivas que subyacen en la capacidad de resolver problemas verbales (Rohmah y Sutiarso, 2018), considerando la falta de comprensión del significado algebraico de los símbolos como la barrera que impide transformar con precisión los datos proporcionados por el lenguaje natural, en su equivalente algebraico. La interpretación errónea de la estructura del texto semántico como números, operaciones y ecuaciones o funciones dificulta llevar la evidencia semántica en la frase de los problemas, a representaciones matemáticas.

Newman (1977, 1983, citado en Abdullah et al., 2015) sugiere que hay cinco etapas en la resolución de problemas matemáticos y vinculadas a ellas se pueden asociar cinco errores específicos, los cuales se definen a continuación:

a) *Error de lectura*, indica la incapacidad de los estudiantes para leer problemas matemáticos dados identificando oraciones, signos y símbolos matemáticos.
b) *Error de comprensión,* consiste en que los estudiantes no comprenden problemas semánticos vinculándolos con una respuesta matemática.
c) *Error de transformación,* consiste en la elección incorrecta que realiza el estudiante al determinar el método de solución matemática.
d) *Error en habilidades de proceso,* se considera cuando el estudiante al realizar operaciones básicas necesarias para resolver el problema lo realiza de forma incorrecta.
e) *Error de codificación,* es la capacidad del estudiante para integrar los elementos en una respuesta matemática de forma coherente con él problema planteado.

Prakitipong y Nakamura (2006) afirman que cuando los estudiantes intentan resolver los problemas lo hacen más o menos de la misma forma alcanzando los siguientes niveles:

Nivel 1 Lectura (Lectura o Decodificación),
Nivel 2 Comprensión exhaustiva (Comprensión)
Nivel 3 Modelado (Transformación)
Nivel 4 Procesamiento (Habilidades de proceso)
Nivel 5 Escribir la respuesta (Codificación)

Santoso et al. (2017) reportan qué al solucionar problemas verbales, existe la posibilidad de que los estudiantes cometan errores de procesamiento o incluso cometan un error al escribir o transcribir el resultado final. Entre otras investigaciones que se centran en el análisis de errores en la resolución de problemas verbales, basadas en el modelo de Newman, se considera la investigación realizada con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de Rahayu y Qohar (2014, citado en Sari y Valentino, 2016) en estudiantes de séptimo grado de “Malang State Junior High School”, investigación que reporta el hallazgo de los siguientes errores: de comprensión, de transformación, de habilidades de proceso y de codificación. Parte integral de la investigación con sistemas de dos ecuaciones lineales fue proporcionar el acompañamiento apropiado para reducir los errores que se presentaron, mediante la retroalimentación, utilizando como herramientas la explicación, la reestructuración y el desarrollo del pensamiento conceptual. El análisis de errores al resolver problemas tipo PISA hasta la etapa de reestructuración ha mostrado

resultados similares cuando el estudiante comete alguno de los cinco errores considerados en el modelo de Newman (Sari y Valentino, 2016).

Metodología

La investigación se llevó a cabo a través de un estudio cuantitativo descriptivo correlacional. Se realizó un muestreo aleatorio por conglomerado en los estudiantes de tercer año del nivel medio superior inscritos durante el periodo otoño 2018 en la preparatoria Emiliano Zapata, perteneciente a la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, en México.

El instrumento utilizado para la recolección de los datos estuvo conformado por cuatro problemas verbales del tema de probabilidad condicional, los cuales fueron seleccionados por un grupo de profesores expertos, miembros de la Academia de Matemáticas de dicha preparatoria. En la Figura 1 se muestran los problemas.

1. Un sistema detector de humo utiliza dos aparatos, A y B. Si hay humo, la probabilidad de que éste sea detectado por el aparato A es 0.95; por el aparato B, 0.98; y por ambos aparatos, 0.94.
   a) Si hay humo, encuentre la probabilidad de que éste sea detectado por el aparato A.
   b) Encuentre la probabilidad de que el humo no sea detectado

2. En la evaluación de un programa de capacitación de ventas, una empresa descubrió que de los 50 vendedores que recibieron un bono el año anterior, 20 habían asistido a un programa especial de capación en ventas, al que asistieron un total de 30 empleados. En la empresa laboran 200 personas en el área de ventas. Se nombra **B** al suceso en el que el vendedor recibe bono y **S** el suceso de que acudio al programa especial.
   Determina el valor de las siguientes probabilidades:
   a) $P(S \cap B) =$
   b) $P(S|B^C) =$
   c) $P(S^C|B) =$

3. Una empresa que fabrica camisetas posee tres máquinas (**A**, **B**, **C**), que producen el 45%, 30% y 25% respectivamente, del total de las piezas producidas en la fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son: 3%, 4% y 5% respectivamente.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una camiseta, elegida al azar, esté defectuosa?
   b) Si al seleccionar al azar la camiseta sale defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de haber sido producida por la máquina **B**?

4. Una industria dedicada a la fabricación de bolsas tiene 3 máquinas (**A**, **B** y **C**). La máquina **A** contribuye con el 25% de la producción total de bolsas; la máquina **B** con el 35% y la máquina **C**, con el 40%. Se ha determinado que la producción de la máquina **A** tienen 5% de defectos; la de la máquina **B** tiene 10% de defectos y la máquina **C**, 3% de producción defectuosa. De acuerdo con estos datos:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una bolsa, elegida al azar, esté defectuosa?
   b) Si al seleccionar al azar la bolsa no sale defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producida por la máquina **A**?

Figura 1. Los cuatro problemas que conformaron la prueba aplicada.

Los criterios para evaluar cada uno de los errores del modelo de Newman fueron los siguientes:

Se presenta un error de lectura cuando el estudiante no realiza ninguna acción u omite algún dato proporcionado en el enunciado del problema. Un error de comprensión si utiliza incorrectamente algún concepto o propiedad. Un error de transformación si elige incorrectamente un modelo de solución para el problema, considerando correctos los diagramas de Venn, diagrama de árbol, representaciones analíticas de probabilidad condicional o Teorema de

Bayes. Se considera un error en habilidades de proceso si el estudiante realiza incorrectamente procedimientos u operaciones o si incluye datos extraños durante el procedimiento al implementar el modelo de transformación elegido. Finalmente, se considera un error de codificación cuando la respuesta al problema planteado no es coherente o carece de unidades de medida.

Resultados

La muestra consistió en 88 estudiantes participantes, 61 de los cuales fueron mujeres conformando el 69.31% de la muestra y 27 hombres que representaron el 30.69%, con edades entre 17 y 18 años, de las áreas terminales de humanidades (43.1%) y ciencias sociales (56.9%).

Después de aplicar el cuestionario, se evaluaron cada uno de los errores del modelo de Newman asignando el valor 0 si el estudiante no cometió dicho error; 1 si cometió el error y ausencia de valor cuando no hubo evidencia o respuesta del estudiante para poder emitir un juicio.

Cada uno de los errores se evaluaron de manera independiente para no establecer de antemano alguna relación entre ellos, con el propósito de estudiar si en realidad están relacionados. El análisis de los datos se realizó con el paquete estadístico R 6.3.1.

Se obtuvieron 353 respuestas por parte de los estudiantes dentro del tiempo asignado para la aplicación de la prueba, en cada respuesta se contabilizaron los cinco tipos de errores. Sin contar las casillas vacías se recopilaron 1267 datos de los cuales, 471 correspondieron a la presencia de alguno de los cinco errores del modelo de Newman (37.17%).

En la Figura 2 se muestra la distribución por cada tipo de error de acuerdo con el modelo de Newman con respecto al total de errores obtenidos. El error que con mayor frecuencia se presentó fue el error de lectura con un 23.57%, seguido de los errores de transformación y codificación, con porcentajes muy cercanos (20.59% y 20.38%) respectivamente. Un punto porcentual abajo se presentó el error de habilidades de proceso (19.32%) y finalmente, el error de comprensión, con un 16.14%.

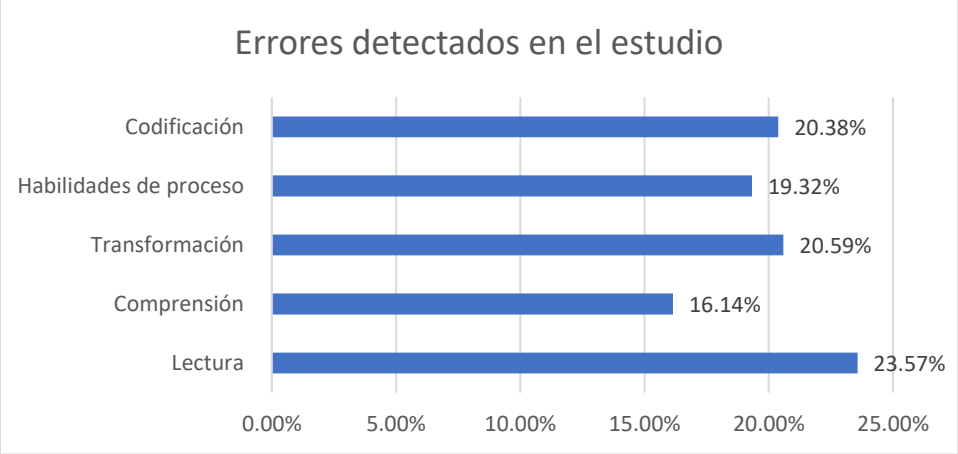


Figura 2. Distribución de los errores detectados en la aplicación de la prueba.

Un ejemplo de error de lectura se muestra en la Figura 3 en el que al resolver el tercer problema de la prueba mostrado anteriormente en la Figura 1, se observa que el estudiante traza un diagrama de Venn en el que no realiza ninguna acción.

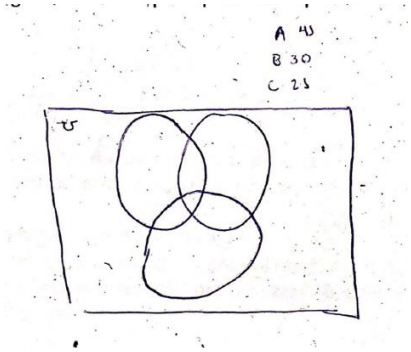


Figura 3. Ejemplo de error de lectura

En la Figura 4 se muestra un ejemplo de error de comprensión en el cuarto problema, donde el estudiante realiza el diagrama de Venn asignando valores incorrectos.

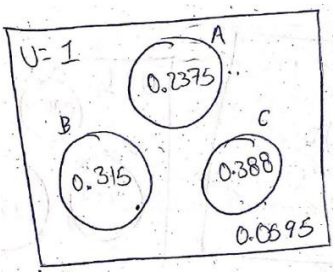


Figura 4. Ejemplo de error de comprensión

En la Figura 5 se muestra un error de transformación al resolver el cuarto problema ya que el estudiante no logra integrar la información en un solo diagrama de Venn, de forma coherente, sino que elabora dos diagramas de Venn para el mismo problema.

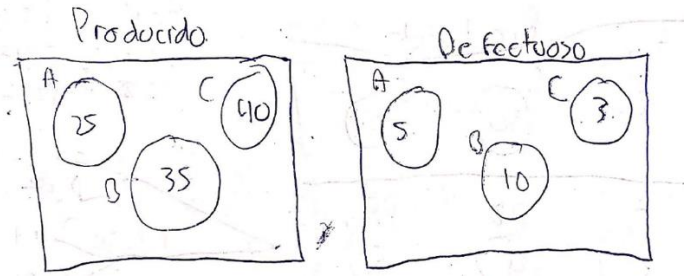


Figura 5. Ejemplo de error de transformación

En la figura 6 se muestra un error de habilidades de proceso, ya que el estudiante interpreta un 3% y un 5% como un .3 y .5, al responder el inciso b del tercer problema.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una camiseta, elegida al azar, este defectuosa?

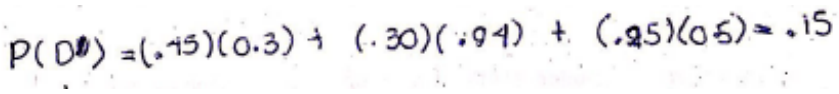


Figura 6. Ejemplo de error de habilidades de proceso.

En la figura 7 se muestran los incisos b, c, y d del segundo problema que muestran un error de codificación pues el estudiante interpreta la probabilidad como un porcentaje a pesar de tratarlo en todo el procedimiento como una razón.

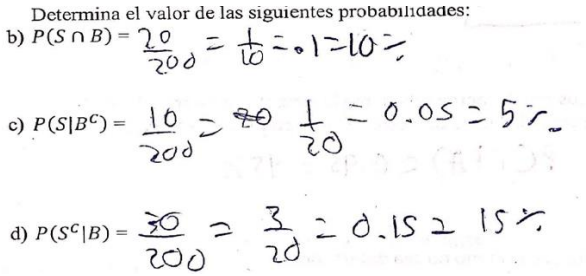


Figura 7. Ejemplo de error de codificación

Utilizando el paquete estadístico R se calcularon las correlaciones de Kendall entre los pares de errores del modelo de Newman y se realizaron pruebas estadísticas por cada par, para verificar la existencia de una correlación no nula. Por ello, se plantearon las siguientes hipótesis nula y alternativa:

$$Ho: r_{x,y} = 0; \qquad Ha: r_{x,y} \neq 0$$

En la Tabla I se presentan las correlaciones entre todos los posibles pares de errores del modelo de Newman, los resultados de las pruebas de hipótesis indican que todas las correlaciones fueron estadísticamente significativas, con p-valores menores a .001. Las correlaciones más altas se dieron entre el error de comprensión con el error en habilidades de proceso, entre el error de comprensión con el error de codificación y entre el error en habilidades de proceso con el error de codificación.

Tabla I. Coeficientes de correlación y p-valor.

Tipo de errores	Comprensión		Transformación		En habilidades de proceso		Codificación	
	τ	p	τ	p	τ	p	τ	p
Lectura	.36	<.001	.25	<.001	.28	<.001	.26	<.001
Comprensión		1	.59	<.001	.60	<.001	.62	<.001
Transformación				1	.53	<.001	.48	<.001
Habilidades de proceso						1	.88	<.001
Codificación								1

Discusión

La investigación se implementó con el objetivo de realizar un análisis descriptivo de los errores, basado en el modelo de Newman, que cometen algunos estudiantes de nivel medio superior (17 a 18 años) al resolver problemas verbales de temas de probabilidad condicional y al mismo tiempo determinar si dichos errores se encuentran correlacionados, ya que la literatura indica que los errores en el modelo de Newman son jerárquicos vinculados a fases o etapas específicas, de manera que, si un estudiante presenta un error en una etapa, difícilmente podrá pasar a la siguiente correctamente. Los hallazgos de nuestro estudio fueron que los estudiantes presentaron porcentajes de error cercanos al 20% en cada uno de los cinco errores del modelo de Newman y que todos los errores están correlacionados significativamente, dándose las correlaciones más altas entre el error de comprensión con el error de transformación (.59), entre el error de comprensión con el error de habilidades de proceso (.60), el error de comprensión con el error de codificación (.62) y entre el error de habilidades de proceso con el error de codificación (.88), todas con p-valores menores a .001 (ver Tabla I).

Con respecto al análisis descriptivo, los porcentajes obtenidos en los errores de comprensión (16.14%), proceso (19.32%) y codificación (20.38%) cercanos a 20%, concuerdan con los obtenidos en el estudio de Rohmah y Sutiarso (2018) con 17.39% en el error de comprensión, 23.91% en habilidades de proceso y 19.75% en codificación. Sin embargo, Rohmah y Sutiarso (2018) obtuvieron un porcentaje de error de lectura de 4.35% y de transformación de 34.78%, ambos lejanos al 20% que reporta nuestro estudio.

En el caso del estudio de Abdullah et al. (2015) no se encontró error de lectura y la distribución de porcentajes en los restantes errores de comprensión, transformación, habilidades de proceso y codificación fue de 20.92%, 24.17%, 27.33% y 27,58%, respectivamente. Como se observa, estos porcentajes se encuentran en el rango entre el 20% al 28%, lo cual puede explicarse por la falta de error de lectura. A pesar de no haberse presentado error de lectura, sus resultados son coherentes con los obtenidos en nuestro estudio, en donde sí se presentó el error de lectura.

El estudio correlacional indica que, aunque el error de comprensión tuvo un porcentaje menor de presencia un 16.1 % comparado con el registro de los otros cuatro errores del modelo de Newman, todos ellos con presencia superior al 19 %, los coeficientes de correlación del error de comprensión con los errores de transformación, proceso y codificación fueron superiores a .50 con un p-valor menor a .001. Solamente superado por la correlación entre los errores de habilidades de proceso y la codificación con un coeficiente de correlación de .88 con un p-valor menor a .001. Esta información puede orientar la práctica del docente en implementar actividades que propicien una mayor comprensión del problema impactando indirectamente en una disminución de errores de transformación, habilidades de proceso y codificación que modificarán su desempeño en la resolución de problemas.

Conclusiones

Los resultados del análisis descriptivo arrojaron que el error de lectura fue el que más se presentó (23.57%), seguido con valores muy cercanos por los errores de transformación (20.59%), codificación (20.38%) y habilidades de proceso (19.32%). El que menos se presentó fue el de comprensión (16.14%). En cuanto al análisis de correlación, los coeficientes más altos estuvieron vinculados con el error de comprensión encontrando los siguientes valores: error de comprensión con el error de transformación (.59), error de comprensión con el error en habilidades de proceso (.60) y error de comprensión con el error de codificación (.62), indicando que cuando un estudiante se equivoca en la comprensión de un problema verbal, difícilmente estará en posibilidades de elegir la estrategia de solución apropiada y que además es muy probable que tampoco podrá realizar el procedimiento correctamente ni integrará la información obtenida para dar una respuesta coherente y correcta con el problema.

Referencias bibliográficas

Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., y Ali, M. (2015). Analysis of students' errors in solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) problems for the topic of fraction. *Asian Social Science, 11*(21), 133–142. doi: 10.5539/ass.v11n21p133

Liljedahl, P., Santos Trigo, M., Malastina, U., y Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education.* Suiza: Springer. Recuperado el 29 de agosto de 2019 de http:www.springer.com/series/14352

Maharani, I. P., y Subanji, S. (2018). Scaffolding Based on Cognitive Conflict in Correcting the Students' Algebra Errors. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13*(2). doi: 10.12973/iejme/2697

National Council of Teachers Mathematics. (s.f.). *The power of Problem Solving*. Recuperado el 29 de agosto de 2019 de https://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teacher/Blog/The-Power-of-Problem-Solving/

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas*. (1st ed.). México: Trillas.

Prakitipong, N., y Nakamura, S. (2006). Analysis of mathematics performance of grade five students in Thailand using Newman procedure. *Journal of International Cooperation in Education, 9*(1), 111–122.

Pulungan, R. R., y Suhendra. (2019). Analysis of student's misconception in solving system of linear equation in two variables. *Journal of Physics: Conference Series*, *1157*, 042113. doi: 10.1088/1742-6596/1157/4/042113

Rohmah, M., y Sutiarso, S. (2018). Analysis problem solving in mathematical using theory Newman. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(2), 671–681. doi: 10.12973/ejmste/80630

Santoso, D. A., Farid, A., y Ulum, B. (2017). Error Analysis of Students Working about Word Problem of Linear Program with NEA Procedure. In *Journal of Physics: Conference Series*: Vol. 855. (pp. 1-9). Bristol, Reino Unido: IOP Publishing. doi: 10.1088/1742-6596/855/1/012043

Sari, Y., y Valentino, E. (2016). An Analysis of Students Error In Solving PISA 2012 And Its Scaffolding. *Journal of Research and Advances in Mathematics Education, 1*(2), 90–98. doi: 10.23917/jramathedu.v1i2.3380

Törner, G., Schoenfeld, A. H., y Reiss, K. M. (2007). Problem solving around the world: Summing up the state of the art. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 39*(5–6), 353. doi: 10.1007/s11858-007-0053-0.

LA EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA CON ARDUINO Y CASIO

EXPERIMENTING IN THE CLASSROOM WITH ARDUINO AND CASIO

Fredy de la Cruz Urbina, Hipólito Hernández Pérez, Sergio Raymundo, Betanzos Sarmiento
Telebachillerato en Chiapas. (México)
frecu@hotmail.com, polito_hernandez@hotmail.com, ing_sergiobetanzos@hotmail.com

Resumen
El presente trabajo se estructuró para docentes y alumnos con el objetivo de resignificar en el salón de clases el valor de la constante de la aceleración de la gravedad, con el uso de tecnología. Este taller está centrado en un marco de modelación-graficación de fenómenos, se diseñó una secuencia didáctica para calcular el valor de aceleración de la gravedad (g) con el fin de desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional en los participantes quienes serán los principales actores para su significación. Asimismo, exponemos el potencial de la tecnología usada para el diseño de situaciones didácticas que buscan modificar el discurso bajo el cual se difunden las matemáticas escolares y con el apoyo de la tecnología que brinda Arduino y Casio en la labor docente. El resultado del taller se valida con las argumentaciones y evidencias de los participantes de estas propuestas tecnológicas.

Palabras clave: Resignificación, gravedad, tecnología, modelación – graficación

Abstract
This work was structured for teachers and students with the aim of re-signifying the constant value of the standard gravity, using technology, in the classroom. This workshop is focused on a phenomenon modeling-graphing framework. A didactic sequence was designed to calculate the standard gravity *(g) value* in order to develop thinking, and variational language in the participants who will be the main actors to its signification. Likewise, we present the potential of the technology used for the design of didactic situations intended to modify the discourse under which school mathematics is disseminated and with the support of the technology that Arduino and Casio provide for teaching. The result of the workshop is validated with the arguments and evidence by the participants of these technological proposals.

Key words: Resignification, gravity, technology, modeling – graphing

Introducción

Hoy día el avance de la tecnología se está desarrollando en todos los campos, desde el uso en áreas industriales, en el hogar y en el campo educativo. Por ello, se cree que deben proponerse alternativas en el discurso escolar que incorporen el diseño de experimentos con el uso de dispositivos tecnológicos cuya finalidad sea que los estudiantes resignifiquen el conocimiento.

La Modelación - graficación (Suárez, 2008; de la Cruz, 2015) permite la construcción del conocimiento matemático a través de una interacción de los participantes con la situación y el uso de la tecnología, en nuestro caso particular, el estudio del periodo de un péndulo y el análisis de la representación gráfica del fenómeno para obtener el valor de la constante de la aceleración de la gravedad. Por ello, el presente reporte da cuenta de la situación didáctica del péndulo simple con el uso de la placa Arduino y calculadoras graficadoras Casio, que en ambos casos permiten el uso de sensores para recopilar los datos requeridos y obtener el valor de la gravedad con estudiantes y profesores que participaron en el taller presentado en la RELME 33.

La problemática que se atiende es que comúnmente en el discurso escolar del bachillerato mexicano el valor de la gravedad g es una constante asignada, no se cuestiona su naturaleza y en la que existen pocos significados al respecto. Se cree que para significar la constante de gravedad es necesario proveer a los estudiantes actividades que partan de la experimentación de fenómenos en donde pongan en juego el descubrimiento.

Marco teórico

Una de las tareas de la Matemática Educativa es cuestionar el *discurso* que permea la matemática escolar. En la Matemática Educativa, el *discurso Matemático Escolar* (dME) es un constructo que "consensua y valida la construcción de la matemática escolar a través de las estructuras y los conceptos matemáticos" (Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015, p. 50); en consecuencia, norma las formas en que los actores didácticos se relacionan con el saber.

En particular, al seno de la Matemática Educativa la visión teórica socioepistemológica sostiene que la introducción del conocimiento matemático al sistema de enseñanza origina *discursos* que buscan facilitar la comunicación de ideas, empero provoca una pérdida de sentido y significado original de dicho conocimiento matemático puesto que su difusión institucional lo obliga a una serie de modificaciones ocasionando que se despersonalice y descontextualice (Cantoral, 2013). Estos *discursos* van conformando, junto con los currículos y los modelos educativos, una epistemología dominante que impone argumentaciones, significados y procedimientos matemáticos soslayando el conocimiento sociocultural situado.

En este sentido, el dME tradicional resulta hegemónico, se mantiene ajeno a la construcción social del conocimiento matemático y carece de marcos de referencia para dar significado al conocimiento. Por ello, en la búsqueda de un conocimiento matemático escolar que se incorpore de manera funcional a la vida del alumno, el dME debiera considerar los contextos sociales y culturales, las comunidades y las situaciones específicas de donde emerge el conocimiento matemático y que no olvide que los seres humanos pertenecen a una cultura, a una institución, a una sociedad; ellas contribuyen e imponen significados y usos al conocimiento matemático (Cordero et al., 2015). Según Cantoral (2013) el dME no se reduce solamente a los contenidos y a los métodos de enseñanza-aprendizaje, sino que se extiende "al establecimiento de bases de comunicación y a la formación de consensos, así como a la construcción de significados compartidos de los objetos y los procesos matemáticos" (p. 64).

> La postura socioepistemológica considera que la matemática no es una ciencia que surge aislada de la sociedad, sino inmersa en ella y por lo tanto recibe influencias fuertemente basadas en el pensamiento,

> las necesidades y características del escenario en que se desarrolla. De esta manera, es que el contexto social, cultural e históricamente determinado actúa como parte indiscutible de este proceso de nacimiento, desarrollo y evolución de la ciencia, debiendo tenerse en cuenta que el conocimiento no surge en escenarios escolares, hecho que, por lo tanto, debe tenerse en cuenta en la construcción del discurso matemático escolar (Crespo, 2007, pp. 9-10).

Como una manera de atender esta problemática, la Socioepistemología propone un Rediseño del Discurso Matemático Escolar basado en una epistemología de prácticas y el uso del conocimiento como base de significación para la matemática escolar (Cantoral, 2013; Buendía, 2012). Por esto, con este marco la situación didáctica que se elabora es una resignificación de cierto conocimiento. "A través de la resignificación se ha permitido establecer diferentes categorías de conocimiento matemático que permiten establecer relaciones funcionales entre los diferentes tópicos que integran el saber matemático, una de esas categorías es el binomio graficación - modelación" (Morales y Cordero, 2014, p. 327).

Para el desarrollo de nuestra propuesta se retoma la categoría de modelación-graficación.

La categoría de Modelación Graficación (M-G) es una aportación de Suárez (2008) para la modelación escolar. A partir del estudio de la *Figuración de las cualidades* de Oresme, la autora conformó un marco socioepistemológico de la modelación y graficación para resignificar el cambio y la variación a través de los fenómenos de movimiento. Con los elementos que identifica del trabajo de Oresme, Suárez plantea un nuevo estatus para la modelación y la graficación conformando la categoría de Modelación-Graficación; la cual está compuesta por: *datos epistemológicos de la modelación del movimiento, los elementos propios de la modelación y las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos-objetos.* Los elementos epistemológicos de la categoría de Modelación-Graficación comprende: realizaciones múltiples, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo del razonamiento. Estos elementos quedan articulados tal y como se aprecia en la figura 1.

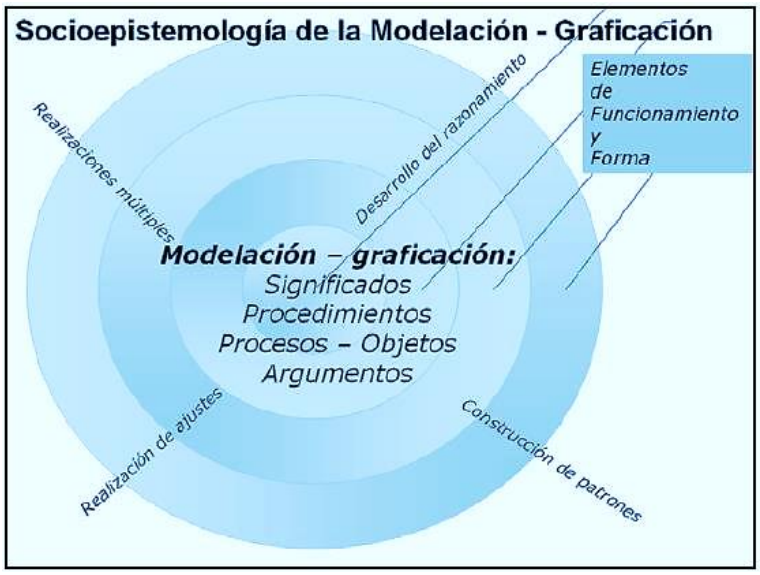


Figura 1: Socioepistemología de la modelación-graficación (Suárez, 2008, p. 85)

Considerando estos referentes teóricos-metodológicos se propone una secuencia didáctica para la resignificación de la constante de gravedad *g*, mediante la situación del péndulo simple y la categoría de Modelación-Graficación con

el uso de dispositivos tecnológicos. Con ello se espera "ampliar esquemas explicativos para enriquecer la matemática escolar y que esta se muestre como funcional y articulada" (Buendía, 2012, p. 27). En este contexto, la interacción y experiencia de los participantes con la situación es trascendente para la construcción y significación del conocimiento, como mencionan Rey-Herrera y Candela (2013): "la construcción de los contenidos científicos escolares se vuelve más significativa en la medida en que tenga mayor cantidad de relaciones con las experiencias personales de los participantes del aula" (p. 59).

Metodología

Como ya se comentó la secuencia didáctica que se propone está sustentada en la Modelación-Graficación de fenómenos en donde se realizan múltiples realizaciones y mediciones en tiempo real sobre las variables del fenómeno. Se analiza el fenómeno a través de sus formas de representación: numérico, gráfico y algebraico, quienes se constituyen en herramientas para argumentar e intervenir en el fenómeno (Suárez, 2008; de la Cruz, 2015). Por otra parte, la participación del público (en este caso los participantes del taller) es de gran relevancia, puesto que, las experiencias personales, el contexto y las necesidades influyen en la construcción del conocimiento en situaciones escolares (Rey-Herrera y Candela, 2013; Crespo, 2007).

Haciendo referencia a este marco conceptual se ha diseñado una secuencia didáctica que nos permite resignificar la constante de aceleración de la gravedad g a través de la Modelación-Graficación del péndulo simple con el uso de dispositivos tecnológicos (Calculadoras graficadoras Casio y placa de desarrollo Arduino con sus respectivos sensores), en la que, los participantes son los principales actores para su significación. Asimismo, otro de los fines es mostrar a los participantes el potencial de la tecnología usada para el diseño de situaciones didácticas y de esta manera modificar el discurso bajo el cual se difunden las matemáticas escolares.

Es importante mencionar que como antecedentes se había experimentado con estudiantes de ingeniería el cálculo de la constante de la gravedad. Se usó un péndulo con diferentes longitudes (L) y considerando un cronómetro y cinta métrica, se sustituyeron los datos en la fórmula del periodo de un péndulo dado como:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, o bien $g = 4\pi^2(\frac{L}{T^2})$

Los datos obtenidos se registraron en una tabla, posteriormente se analizaron con el software Excel para obtener una regresión de los datos y posterior a ello la pendiente como se muestra en la figura 2. Cabe mencionar que el periodo T es el tiempo promedio que tarda una oscilación, en todos los casos se consideraron diez oscilaciones para reducir el error. En la gráfica cartesiana el eje y representa el periodo T elevado al cuadrado, el eje x representa la longitud L de la cuerda. Esta significación se logró mediante la ecuación $g = 4\pi^2/m$, donde $m = \frac{T^2}{L}$ es la pendiente de la recta.

L(m)	T^2 [seg]^2
0.05	1.1
0.1	1.63
0.15	1.64
0.2	1.65
0.25	1.98
0.3	2.33
0.35	2.51
0.4	2.55
0.45	2.81
0.5	2.95
0.55	3.24
0.6	3.75
0.65	3.75
0.7	4
0.75	4
0.8	4.2
0.85	4.4455
0.9	4.5

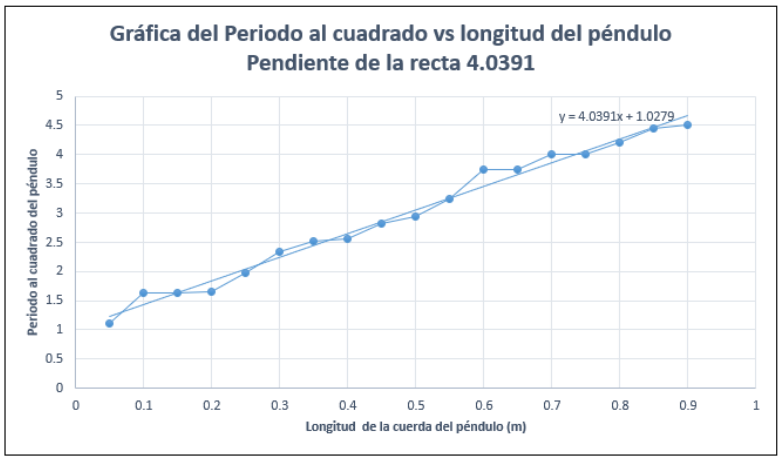


Figura 2. Valores obtenidos para encontrar la pendiente y encontrar la constante de gravedad *g*

Se observó que la aproximación al valor convencional de la gravedad depende de la calidad de los datos. Entre más datos minuciosos se logren tomar en este experimento; es decir, longitud, tiempo y periodo de oscilaciones, habrá una mayor posibilidad de encontrar un valor de pendiente que arroje una mejor aproximación al valor de la constante de la gravedad $g = 9.81$ m/s^2, valor que se utiliza actualmente en el Sistema Internacional de Medidas SI.

Posteriormente, el taller fue pensado para docentes que imparten las materias de matemáticas o física en diversos niveles educativos: secundarias, nivel medio o superior, asimismo para el público en general interesado en la ciencia y tecnología. El taller contempla cuatro momentos, estos se desarrollan en equipos. Cada equipo se le dota de una cinta métrica, una esfera, una cuerda y un vernier, se supone cada equipo cuenta con un cronómetro en su teléfono móvil.

- Momento 1: Realizar la modelación del péndulo simple de forma manual, es decir se miden los tiempos con un cronómetro para la obtención del periodo. Se mide la cuerda con una cinta métrica.

- Momento 2: Comprende una introducción sobre la programación de la placa de desarrollo Arduino, sus componentes y aplicaciones aterrizadas a la experimentación del péndulo simple.
  Se realiza la Modelación-Graficación del fenómeno en una secuencia de pasos: *realizaciones múltiples, identificación de patrones, realización de ajustes y desarrollo del razonamiento.*

- Momento 3: Comprende una introducción sobre el uso de la Calculadora Casio Fx-Cp400 o Classpad II. Específicamente, se presentan las funciones que se utilizan para la modelación del péndulo simple. Se realiza la secuencia de Modelación-Graficación del péndulo simple con esta tecnología.

- Momento 4: Se reflexiona en plenaria sobre la secuencia de Modelación-Graficación del péndulo simple y de las tecnologías empleadas para su implementación en el aula.

Esta propuesta fue implementada en diciembre 2018 en la Escuela de Invierno de Matemática Educativa (EIME) en Puebla, México. Allí, los participantes exploraron las bondades del uso de sensores y la placa Arduino en el aula para la matematización de fenómenos, donde el objeto "gráfica" tuvo un rol importante en el estudio del fenómeno para su comprensión e intervención. Los participantes mostraron interés en el uso de esta tecnología y dentro de las dificultadas expresaron como una desventaja la programación del microcontrolador Arduino.

Partiendo de esta experiencia para el taller impartido en la Relme 33 se hicieron las adecuaciones pertinentes con el fin de hacer más "amigable" la interacción con los dispositivos tecnológicos, particularmente con la tecnología Arduino. Se buscó minimizar las dificultades relacionadas con Arduino que pueden dar la sensación al participante que es una tecnología difícil de implementar. Como otra alternativa se presentó la calculadora Casio Fx-Cp400 también conocida como Classpad II, el analizador de datos EA-200 y los sensores correspondientes con el fin de que los participantes comparen ambas tecnologías y tengan un panorama más amplio para la experimentación en el aula (ver figura 3).

Figura 3: Tecnología Casio. Analizador de datos EA-200 y calculadora Casio Fx-Cp400

Como otra mejora al curso, se rediseñó una tarjeta que embona con la placa Arduino Uno R3 (las placas que embonan con Arduino se les conoce como *shields* por su significado en inglés) y que hace más fácil la tarea de conexión con los sensores Arduino utilizados (figura 4).

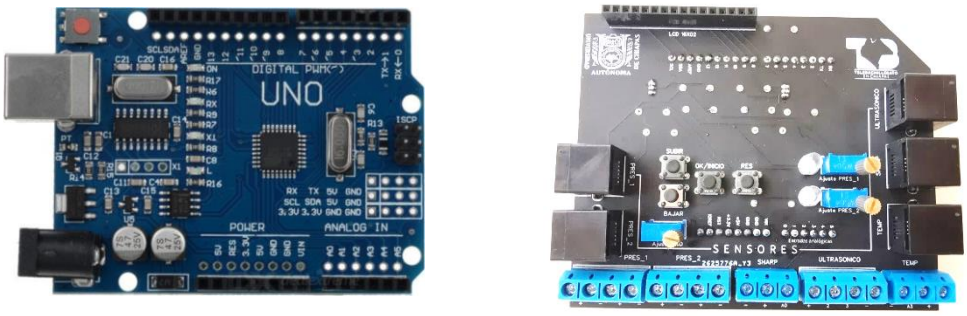


Figura 4: Arduino uno R3 y *shield* para la experimentación

En ambas tecnologías se usaron sensores específicos de acuerdo con las necesidades de Modelación-Graficación del péndulo simple. En el caso de Casio un sensor óptico que es sensible a la luz y para el caso de Arduino un sensor de presencia que consta de un emisor y un receptor (el emisor es un led infrarrojo y el receptor es un fototransistor) y un sensor de distancia SHARP para la obtención de la gráfica (figura 5).

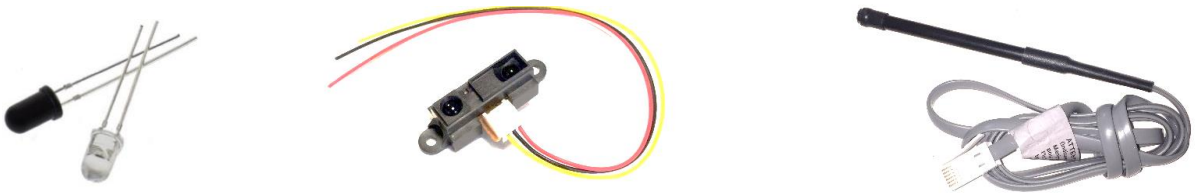
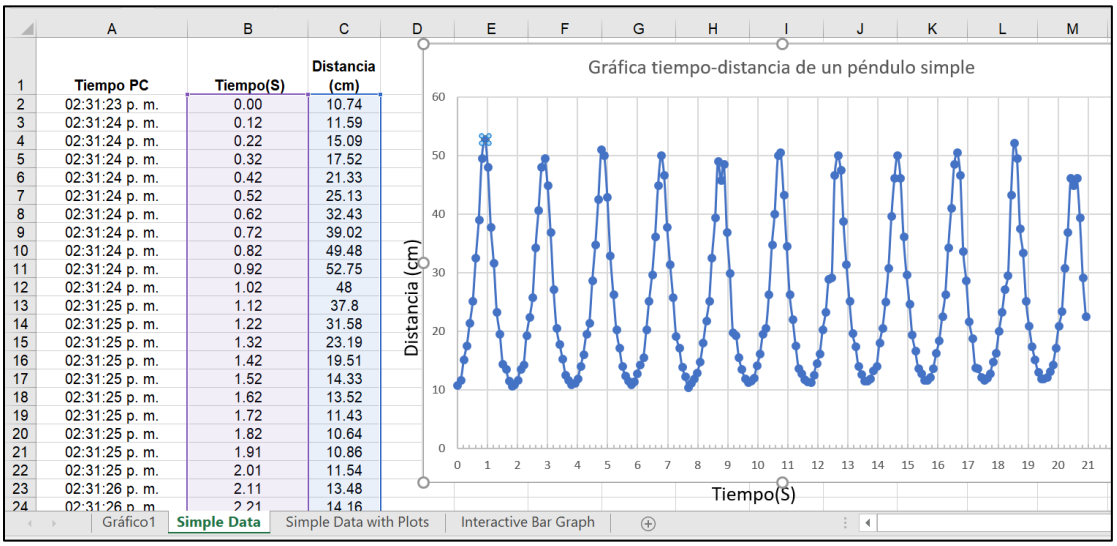


Figura 5. Sensores: Emisor-Receptor de Luz, Sharp y sensor óptico de Casio

Las mediciones de los periodos y de las longitudes de las cuerdas de los péndulos se anotaban en la calculadora Casio en una actividad precargada que efectuaba las operaciones de manera automática y que guiaba a los participantes a través de la secuencia didáctica (función e-activity). Esta secuencia contempla tanto la medición manual como con el sensor Casio y el sensor de Arduino.

Los participantes más adelante en las actividades incorporaron el uso de sensores de Arduino y Casio con la finalidad de obtener datos más precisos en el mismo experimento. El uso de estos sensores dio tiempos más precisos para el periodo y como consecuencia, en el cálculo de la gravedad. Se pudo confirmar la exactitud de los instrumentos utilizados al acercarse a la constante *g* con mayor precisión. Otro objetivo del taller fue utilizar estos datos para la obtención de la gráfica de posición del péndulo en la cual los participantes mostraron gran interés al ver que se podía generar una tabla para después analizarla con la calculadora o con la computadora y obtener el periodo a través de la misma (figura 6).



	Tiempo PC	Tiempo(S)	Distancia (cm)
2	02:31:23 p. m.	0.00	10.74
3	02:31:24 p. m.	0.12	11.59
4	02:31:24 p. m.	0.22	15.09
5	02:31:24 p. m.	0.32	17.52
6	02:31:24 p. m.	0.42	21.33
7	02:31:24 p. m.	0.52	25.13
8	02:31:24 p. m.	0.62	32.43
9	02:31:24 p. m.	0.72	39.02
10	02:31:24 p. m.	0.82	49.48
11	02:31:24 p. m.	0.92	52.75
12	02:31:24 p. m.	1.02	48
13	02:31:25 p. m.	1.12	37.8
14	02:31:25 p. m.	1.22	31.58
15	02:31:25 p. m.	1.32	23.19
16	02:31:25 p. m.	1.42	19.51
17	02:31:25 p. m.	1.52	14.33
18	02:31:25 p. m.	1.62	13.52
19	02:31:25 p. m.	1.72	11.43
20	02:31:25 p. m.	1.82	10.64
21	02:31:25 p. m.	1.91	10.86
22	02:31:25 p. m.	2.01	11.54
23	02:31:26 p. m.	2.11	13.48
24	02:31:26 p. m.	2.21	14.16

Figura 6. Datos y gráfica de posición en Excel obtenidos con Arduino

De la figura anterior y con el uso de Excel o la calculadora ya que se pueden exportar los datos a la misma y trabajar allí, es posible calcular el periodo dado que tenemos los tiempos de las distancias máximas o mínimas y sustituirla en la fórmula para obtener *g*. De estas actividades realizadas tanto con Arduino y Casio se espera que los participantes valoren ambas tecnologías de acuerdo con sus necesidades específicas y hagan sus propias valoraciones para futuros proyectos o diseño de secuencias en el aula.

Resultados

Los participantes argumentan que el periodo de las oscilaciones que se generaron al mover el péndulo de su punto de equilibrio no dependía de su masa ni de su amplitud de movimiento sino de la longitud (*L*) de la cuerda a la cual estaba sujeta. Los participantes mencionan que el uso de herramientas tecnológicas permite mejor toma de datos y mayor precisión. El fenómeno de oscilación del péndulo se aprecia más porque la calculadora graficadora o bien los sensores del Arduino permiten observar el comportamiento físico en tiempo real del movimiento en tanto su posición, velocidad y tiempo, a diferencia de usar solo cronómetro.

Entre más tomas de muestras se tengan habrá una mayor posibilidad de encontrar un valor de la pendiente (T^2/l) que ayude a mejorar la aproximación del valor de la constante de la gravedad que se utiliza actualmente en el Sistema Internacional de medidas (SI). Con esta experimentación (ver figura 2) los participantes obtuvieron un valor de la constante de gravedad de 9.774 m/s^2. En tanto que otros grupos obtuvieron un valor de g = 9.63 m/s^2.

Es así como la tecnología permite visualizar de forma amplia las gráficas que muestran el tiempo, la velocidad y distancia, principalmente y, con esta información numérica o gráfica hacer un análisis del comportamiento del fenómeno mediante los elementos gráficos como: puntos clave, pendientes, concavidad, máximos, mínimos, puntos de inflexión, entre otros. Alternativamente brinda la herramienta de correlación para realizar ajustes a modelos predeterminados y vincular con ello la representación algebraica del fenómeno. Por tanto, se tiene un aprendizaje significativo que favorece que los participantes cotejen las diferencias entre las creencias con que llega a la clase y las leyes que gobierna el mundo real, lo cual mejora el grado de aprendizaje conceptual (Ausubel, 1997).

Asimismo, estas tecnologías, aunque abren el debate sobre la obtención histórica de la constante *g* donde no existían, permiten al profesor o alumno usarlas para fines prácticos y educativos de modelación-graficación de fenómenos físicos y dar cuenta de que construir conocimiento matemático no es una tarea simple. Otro aspecto para tomar en cuenta es que en escenarios donde se usa la tecnología surgen dificultades al momento de implementarla dado que la tecnología tiene aspectos técnicos a considerar para estar en los rangos operables de la misma. Por ello, el experimento debe contemplar que la variable elegida se presente de manera adecuada. Por ejemplo, en el caso del péndulo las condiciones que se consideraron son: una cuerda de masa despreciable, una base firme sin movimiento y/o rozamiento para el péndulo, instrumentos de medición de distancia adecuados y una amplitud angular menor de 20°. Esto dado que en la experimentación se suele cometer varios errores que afectan la medición de las variables, por lo que el profesor debe definir y tener muy claros sus objetivos para que determine el grado de intervención de los alumnos.

Comentarios finales

Como conclusión de las tecnologías implementadas, definimos que la integración de Casio hace posible la experimentación en múltiples escenarios en los que más que programar se configuran acciones que hacen más fácil la experimentación en un primer momento, aunque en la fase de análisis de los datos invertimos tiempo en descartar lo que no ocuparemos. Por otro lado, Arduino no sólo permite automatizar el proceso de inicio y fin de los cálculos minimizando errores entre ellos, sino, exige en un inicio un mayor conocimiento pues se programan en código lo que esperamos ver con los sensores y los datos que ocuparemos del experimento lo que nos permite trabajar más rápido en la fase del análisis de los datos.

Comparando estas tecnologías en ambas se recopilan datos producto de la medición de los sensores, con ellos se puede obtener una tabla de datos o la gráfica correspondiente. Lo que puede influir a la hora de elegir una u otra tecnología es el coste y el nivel de interés de la persona, en el caso de Casio como desventaja presenta su coste comparado con el de Arduino y de los sensores, pero como ventaja tiene menor curva de aprendizaje para poder experimentar con él. Conscientes de ello se realizó un prototipo que facilita conexiones de sensores en Arduino. Con esto se minimizan las dificultades para su utilización en el aula (figura 7). En él se han programado los diferentes sensores que se usaron en el taller y otros que pueden usarse para diferentes situaciones de modelación-graficación, tales como caída libre, movimiento rectilíneo, calentamiento y enfriamiento de sustancias, entre otros. Se espera poder socializarlo en la próxima RELME.

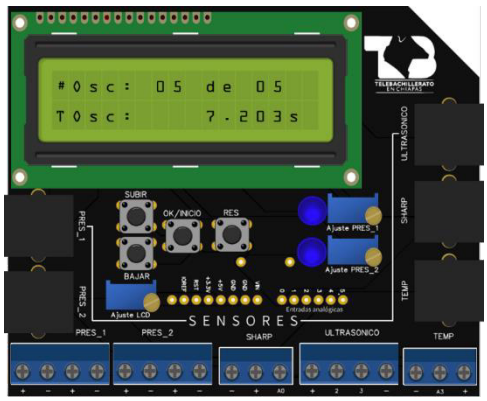


Figura 7. Render del experimento del péndulo en el shield

Desde la experiencia personal en la modelación de fenómenos (de la Cruz, 2015; de la Cruz y Hernández, 2018) y en el presente taller, podemos concluir que la tecnología ofrece herramientas que favorecen la transición entre una forma de representación y otra: numérica, gráfica y algebraica. El uso de dispositivos tecnológicos en situaciones de Modelación-Graficación permite estudiar con más detalle el fenómeno, esto se traduce en una medición más precisa de la variable durante un periodo continuo en tiempo real por sobre mediciones puntuales y escasas, que pueden obtenerse sin tecnología.

Al final del día cada docente elige la tecnología que se adapta mejor a sus necesidades, pueden ser las que presentamos, de otra índole o de otras marcas, pero tenemos plena seguridad que en la dirección que hemos avanzado logramos que los participantes y alumnos resignifiquen la contante *g* y exploten el potencial que la tecnología tiene para ofrecer sobre otros conocimientos que deseen resignificarse.

Referencias bibliográficas

Ausubel, D. (1997). *Psicología educativa. Un punto de vista activo*. México: Trillas.

Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas, un estudio con profesores. *Educación Matemática, 24*(2), 5-31. Recuperado de http://somidem.com.mx/revista/vol24-2/

Cantoral, R. A. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Barcelona: Gedisa.

Crespo, C. R. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la Socioepistemología* (Tesis de doctorado no publicada). CICATA-IPN. México. Recuperado de http://tesis.ipn.mx/handle/123456789/705

de la Cruz, F. (2015). *Resignificación de la Función Cuadrática a partir de la Modelación-Graficación de fenómenos de movimiento* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Autónoma de Chiapas, México.

de la Cruz, F. y Hernández, H. (2018). Estudio del concepto de función a través de la modelación-graficación en situaciones de movimiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31*(2), 1821-1826.

Hernández, H. y Morales, E. (2017). Uso de la calculadora graficadora y sensor de movimiento como mediador en el aprendizaje de la constante de la gravedad y el péndulo simple. *Revista Pakbal*, 42(2), 34-39.

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La graficación-modelación y la serie de Taylor. Una Socioepistemología del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3), 319-345. Suárez, L.

y Cordero F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista latinoamericana de Investigación en matemática educativa,* Relime 13 (4): 319-333.

Rey-Herrera, J. y Candela, A. (2013). La construcción discursiva del conocimiento científico en el aula. *Educación y Educadores, 16*(1), 41-65. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83428614002

Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico* (Tesis doctoral no publicada). CINVESTAV-IPN, México.

EL ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO EN LA FORMACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS IN THE FORMATION OF MATHEMATICS TEACHER

Cecilia Rita Crespo Crespo,
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González". (Argentina)
crccrespo@gmail.com

Resumen
En las carreras de formación de profesores de matemática, existen espacios en los que es posible realizar una presentación histórico-epistemológica de la matemática. En este trabajo, se analiza la importancia de incorporar con más presencia estudios desde la visión socioepistemológica, que permite a los docentes, situarse en una visión no ingenua y comprender el proceso de construcción del conocimiento matemático. Esto se traduce en sus propias prácticas en el aula, permitiendo adoptar como principio la reflexión constante de su quehacer. En este trabajo se tratarán diversos ejemplos para evidenciar cómo este tipo de estudios fortalecen al profesor de matemática por medio de la integración de conocimientos y la comprensión de su construcción social.

Palabras clave: análisis histórico epistemológico, construcción sociocultural

Abstract
In mathematics teacher training courses, there are spaces where it is possible to make a historical-epistemological presentation of mathematics. In this paper, we analyze the importance of incorporating with more presence studies from the Socioepistemological vision, which allows the teachers, to place themselves in a vision that is not naive and to understand the process of building mathematical knowledge. This translates into their own practices in the classroom, allowing them to adopt as a principle the constant reflection of their work. In this paper various examples will be discussed to show how this type of studies strengthen mathematics teacher by the integration of knowledge and understanding its social construction.

Key words: historical-epistemologic analysis, sociocultural construction

Introducción. La historia y la epistemología de la matemática en la formación inicial de profesores de matemática

La formación inicial de los profesores de matemática en Argentina, está en manos de los institutos de formación docente. En el caso de los de la Ciudad de Buenos Aires, son básicamente de tres tipos: de gestión jurisdiccional (dependientes del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires), de gestión privada (dependientes de la Dirección General de Educación de Gestión Privada) o dependientes de universidades. Nacionales.
Las distintas carreras de Profesorado de matemática, en el plan curricular institucional organizan la carrera en tres campos:

- Campo de la formación general**.**
- Campo de la formación específica**.**
- Campo de la formación en la práctica profesional.

Dentro del Campo de la formación específica, se plantean varios bloques que se orientan a abordar los contenidos de las distintas ramas de la matemática. Uno de ellos es el que se denomina: Historia, fundamentación y profundización del conocimiento matemático. Las materias que corresponden a él son: Historia de la matemática y Fundamentos de la matemática, que se desarrollan respectivamente en los dos últimos años de la carrera.

En Historia de la matemática, según el diseño curricular del Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González" (ISP JVG, 2015), se analiza el proceso de nacimiento y consolidación de los conceptos matemáticos según las características e ideas de una determinada época, retomando conceptos ya trabajados en otras materias para analizar sus orígenes interpretando su evolución histórica. La matemática es concebida como un conocimiento de construcción social influenciado por las ideas culturales, filosóficas, políticas, sociales y económicas, ya que estos factores influyen en los intereses de la sociedad en la que se desarrollan. Por otra parte, se espera que esta materia brinde a los futuros profesores de matemática recursos didácticos y pedagógicos para sus clases permitiendo no sólo motivar a los estudiantes, sino permitirles comprender a la matemática como una disciplina producto de las actividades del hombre en la sociedad.

Entre los objetivos que se plantean para esta asignatura en el Plan Curricular Institucional (ISP JVG, 2015), se pueden mencionar:

Que el futuro profesor:

- Ubique históricamente la aparición de los conceptos básicos de la matemática.
- Identifique los momentos más importantes del proceso a través del cual la matemática se configura como ciencia como consecuencia de las ideas existentes en la sociedad.
- Reconozca la construcción del conocimiento matemático como producto sociocultural que surge en escenarios socioculturales adecuados.
- Comprenda que la Matemática es una ciencia dinámica y en continuo desarrollo.
- Valore la importancia de abordar en el aula la historia de la matemática para posibilitar la comprensión del surgimiento de sus conceptos a lo largo del tiempo.

Los contenidos de la materia recorren desde los orígenes del pensamiento matemático en la prehistoria hasta el Siglo XX.

A lo largo de la carrera, los distintos contenidos son abordados desde distintas ópticas, tomando como referencia las ideas planteadas por Simon (1994) en su modelo de ciclos de aprendizaje en la educación matemática de docentes. Este modelo plantea que, así como la matemática se aprende haciendo y reflexionando sobre lo hecho,

los futuros docentes adquieren las capacidades de su profesión a partir de las actividades que realizan y logran construir el conocimiento a partir de su abordaje desde distintas visiones sobre el mismo. Esto se puede realizar a partir de ciclos que se presentan sucesivamente en distintos cursos de la carrera de profesor de matemática. Simon, presenta un modelo para la formación docente en el que los seis ciclos de aprendizaje (Figura 1).

Estos seis ciclos propuestos por este modelo permiten a los futuros docentes construir y reflexionar sobre el conocimiento matemático. Los estudiantes van a abordar a través de su carrera diferentes aspectos del conocimiento, permitiendo su formación integral y logrando el empoderamiento del mismo, para estar de esta manera preparados para el desempeño posterior de la profesión docente. Las etapas que se llevan a cabo durante cada ciclo consisten en la exploración, la identificación conceptual y finalmente la aplicación. Una vez recorrido ese ciclo, se da lugar al ciclo siguiente. En cada ciclo se va generando la nueva reflexión sobre la base de lo construido anteriormente. Se inicia desde el conocimiento de la matemática, que se determina sobre el conocimiento conceptual y procedimental, se figue con el conocimiento sobre matemática que se enfoca en la naturaleza de la disciplina, su forma de trabajo y validación. Las teorías del aprendizaje aportan la comprensión acerca de la dinámica del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática y da pie al conocimiento sobre cómo aprenden los alumnos determinadas ideas matemáticas, para finalmente enfocarse en favorecer las habilidades de los futuros profesores para planificar su enseñanza y para interactuar efectivamente con sus alumnos en el proceso de construcción del conocimiento matemático en el aula.

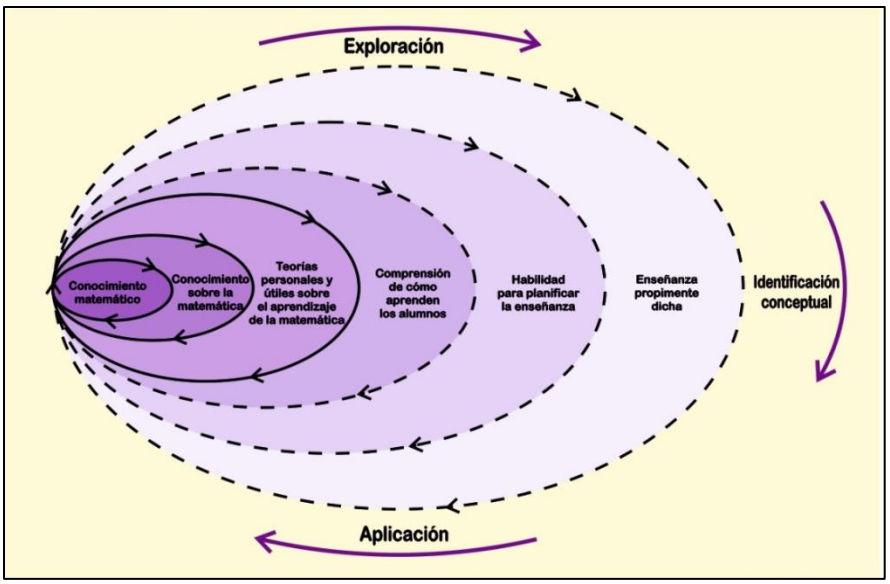


Figura 1. Modelo de M. Simon (1994)

En el segundo ciclo, al trabajar el conocimiento sobre matemática, el análisis histórico epistemológico cobra sentido en la formación del profesor de matemática porque le permite comprender las características de la naturaleza del conocimiento matemático y la manera en la que se lo construyó socialmente en las distintas culturas y momentos históricos de la humanidad.

El enfoque dado a la materia Historia de la Matemática

En nuestra institución, la materia se inserta en el plan en tercer año de la carrera de Profesor de Matemática. Se articula con las materias disciplinares anteriores y con Filosofía, ya que de esta manera permite al alumno tener los

conceptos básicos de matemática y lineamientos de filosofía, para interpretar el proceso de creación y desarrollo de la matemática como construcción social del hombre.

Existen varias maneras de abordar la historia de la matemática en el aula de la formación docente: una de ellas es realizar un estudio cronológico, otra es presentar crónicas históricas, basadas en anécdotas de la vida de matemáticos o curiosidades de algunos momentos históricos; otro enfoque posible es mostrar problemáticas que preocuparon a distintas culturas y la manera en la que lo hicieron. Resulta interesante combinarlas para aprovechar los recursos que la historia provee para comprender cómo se construye el conocimiento matemático. En nuestros cursos, no es abordada como una secuenciación de nombres, hechos y fechas, sino buscando comprender la aparición de los conceptos matemáticos a partir de su proceso de la construcción y su interrelación con el entorno sociocultural de las diversas etapas históricas. De esta manera, se intenta lograr la comprensión de la matemática como una ciencia que surge y se desarrolla dentro de la sociedad y no aislada de ella.

La visión de la matemática como una ciencia que construye sus conceptos sobre bases epistemológicas, cognitivas, didácticas y sociales, presentada en esta asignatura, por medio del análisis de los escenarios socioculturales que facilitaron el surgimiento y consolidación de los conceptos matemáticos, suministra al futuro egresado recursos didácticos y pedagógicos para sus clases. Estos recursos pueden consistir herramientas para motivar ciertos temas o bien para resignificarlos en el aula.

Estudiar la historia de la matemática de esta manera da oportunidad de que los futuros docentes se adentren en cuestiones que dieron origen a diversos conceptos e ideas, a conocer el origen de términos y notaciones, problemas que planteaban y resolvían las distintas culturas, cómo los aplicaban, métodos y técnicas que desarrollaban, y maneras de validar en conocimiento que utilizaban (Crespo Crespo, 2017a, 2017b).

La socioepistemología se basa en el reconocimiento del carácter social de la matemática. El análisis histórico epistemológico permite analizar la manera en que se genera conocimiento matemático en determinados escenarios socioculturales.

Las actividades en la materia Historia de la matemática se desarrollan combinando las modalidades de clase teórica y de aula taller. Paralelamente al desarrollo de cada tema, los alumnos van realizando trabajos prácticos que ellos deben trabajar y analizar para realizar posteriormente las consultas que consideren necesarias.

Algunos de los trabajos prácticos incluyen la lectura y análisis de textos seleccionados por el docente. Se trata de fuentes primarias y secundarias que permiten a los alumnos la interpretación y adquisición del lenguaje matemático propio de las temáticas abordadas. En algunas oportunidades realizan investigaciones y exposiciones acerca de problemáticas de la historia de la matemática.

En relación a la evaluación, se toman dos parciales que se orientan a lograr una evaluación en proceso de los aprendizajes adquiridos y son complementados por el monitoreo constante de las actividades de los alumnos. La modalidad de los parciales es escrita, individual y a libro abierto, pudiendo los estudiantes consultar todos sus apuntes teóricos y prácticos, como así también libros si lo desean. Consiste en la evaluación de los contenidos trabajados mediante la resolución teórico-práctica de situaciones problemáticas y el análisis de la construcción del conocimiento matemático a través de la historia. El examen final es de carácter oral y se centra en las caracterizaciones de los escenarios socioculturales en los que se desarrolló la matemática a través de la historia. En cada una de las instancias de evaluación se apunta a la adquisición de los contenidos propios de la materia, precisión y claridad en la formulación de conceptos y deducciones, capacidad de elaboración de conclusiones e inferencias a partir de los conceptos estudiados.

Algunos ejemplos de abordaje de contenidos. El caso del teorema de Pitágoras en distintos escenarios socioculturales

A continuación, se muestran algunos ejemplos de actividades extraídas de las prácticas de esta materia. Se ha realizado una selección en las que se ponen de manifiesto la presencia y utilización del Teorema de Pitágoras en distintos escenarios y las aplicaciones que de esta propiedad hacía cada una de las culturas correspondientes. En cada uno, se comenta la manera en la que los estudiantes realizan la resolución y algunas de las observaciones que realizan. En este trabajo nos centramos en esta propiedad debido a la riqueza que brinda su análisis histórico por haber sido aplicado en diferentes culturas. Además, es un contenido que se encuentra presente en el discurso matemático escolar del nivel secundario.

a) Problemas de tablillas babilónicas

> *El siguiente problema es una traducción de una tablilla babilónica en los que pueden apreciarse algunas características de las situaciones planteadas en las tablillas. Te proponemos que lo leas detenidamente, interpretando su significado a través de su resolución e indicando qué conocimientos demuestra que poseían los babilónicos:*
>
> *"Uno de los lados de un trapecio es 30 , el segundo lado es 30 , el ancho superior es 50 , el ancho inferior es 14 . 30 veces 30 es 15,0 . Reste 14 del 50 y el residuo es 36 . La mitad es 18 . 18 veces 18 es 5,24 .*
> *Reste 5,24 de 15,0 y el residuo es 9,36 . ¿Qué número debo multiplicar por sí mismo para obtener 9,36 ?*
> *24 veces 24 es 9,36 . 24 es la línea de separación. Sumamos 50 y 14 , a los anchos, y el resultado es 1,4 . La mitad es 32 . Multiplicamos 24, la línea de separación, por 32 , y el resultado es 12,48"*

En este problema se reconoce la utilización del sistema de numeración sexagesimal por parte de la cultura babilónica. Los estudiantes deben primeramente identificar los cálculos realizados verificando su corrección a través de su pasaje a base 10. Una vez que logran esto, reconocen la aplicación del Teorema de Pitágoras al cálculo de la altura de un trapecio isósceles. Suelen trazar la figura de análisis correspondiente en la que notan la utilización de prototipos de representación distintos de los presentes en el discurso matemático escolar. Al reconocer la aplicación del Teorema de Pitágoras en una cultura temporalmente anterior a la griega, los alumnos se muestran muy sorprendidos. En clase se realizan los comentarios aclarando que no se trata del único contenido ni la única propiedad que culturas diferentes lograron construir de manera independiente. Se les hace notar que sin embargo hubo diferencias, una de las cuales es que en Grecia su aplicación implicaba la existencia de generalizaciones y que esto se ponía en evidencia en la posibilidad de tener un enunciado y una demostración, mientras que en el caso de la cultura babilónica, su aplicación se restringe a la aplicación a casos particulares, no existiendo su generalización.

b) Aplicaciones y problemas en papiros

En Egipto, en la antigüedad, con el crecimiento periódico del río Nilo, se producían inundaciones que borraban los límites de los campos dedicados a la agricultura. El faraón cobraba impuesto por el territorio que se sembraba y cosechaba, por lo que al volver el río a su cauce normal, era necesario marcar nuevamente los terrenos determinando los ángulos rectos.

Para determinar un ángulo recto usaban una cuerda en la que realizaban 12 nudos equidistantes. Luego unían los extremos de la cuerda, quedando una figura de 12 nudos y 12 segmentos iguales y formaban un triángulo de modo que uno de los lados fuera igual a tres unidades, otro a cuatro unidades y el tercero quedaba entonces de cinco unidades.

a. *Verifica la construcción utilizando un trozo de hilo*
b. *¿Asegura este método el trazado de ángulos rectos?*
c. *¿Qué propiedad aplica?*
d. *¿Puedes proponer un procedimiento análogo con otra cantidad de nudos?*
e. *Teniendo en cuenta las construcciones que legaron los egipcios a la humanidad, ¿Qué otra aplicación del método anteriormente descripto?*
f. *También sabían que podían lograr triángulos rectángulos con otras medidas de lados: 6, 8 y 10, o bien 9, 12 y 15, y con otras incontables ternas de números enteros. ¿Qué nombre recibirán posteriormente estas ternas? Demuestra qué propiedad poseen*

En esta actividad se muestra una de las aplicaciones del Teorema de Pitágoras dada por los egipcios. La técnica utilizada para la construcción de ángulos rectos es sencilla pero requiere del conocimiento de ternas pitagóricas. En la actividad los alumnos verifican la aplicabilidad del método tanto desde la práctica como desde la teoría.

En la misma práctica, correspondiente a la cultura egipcia de la antigüedad, se encuentra también la siguiente actividad:

En el Papiro del Cairo se encuentra este problema: "Una pequeña porción de terreno rectangular de 60 cúbitos cuadrados, siendo la diagonal 13 cúbitos. ¿Cuántos cúbitos son un lado?"

a. *Resuelve el problema con los métodos actuales y responde ¿qué conceptos matemáticos son necesarios para resolverlo?*
b. *Lee la resolución presentada en una traducción del problema que a continuación se detalla e interpreta cómo lo fueron resolviendo y qué limitaciones y ventajas encuentras en la misma:*

"Debe calcular 13 veces 13. Resultado 169. Debe calcular 60, dos veces. El resultado 120. Debe adicionarlo a 169. El resultado 289. Lo que es reducido a su raíz cuadrada. El resultado 17. Debe quitar el excedente"

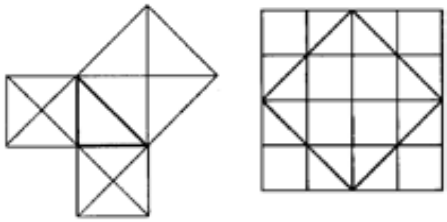
c. *¿Qué conocimientos son necesarios para dicha resolución? ¿En qué varía con la realizada en el primer punto? ¿A qué se puede deber dichas diferencias?*

Mediante la resolución y análisis de este problema, se busca que los estudiantes comprendan las diferencias de maneras de resolver un problema que se ponen de manifiesto en los distintos escenarios socioculturales. La resolución inicial que proponen los alumnos si bien para ellos es más sencilla porque responde a algoritmos aprendidos escolarmente, posee más complejidad que la utilizada en Egipto en la antigüedad. El conocimiento de métodos diversos, facilita a los futuros profesores a comprender el sentido de los algoritmos y a abrirse a aceptar la

diversidad de los mismos en las aulas. La mirada crítica de las maneras en las que una cultura resuelve un problema planteado, les permite inferir los conocimientos que se manejaban en esos escenarios y la manera en la que se los utilizaba para lograr la solución buscada.

c) El Teorema de Pitágoras en Grecia

a. El Teorema de Pitágoras en el caso particular del triángulo rectángulo isósceles aparece en el diálogo El Menón (82d–83e) de Platón a propósito del problema de la "duplicación del cuadrado" que es la antesala del famoso problema délico de la "duplicación del cubo". (González Urbaneja, 2008, p.112)



Analiza la afirmación anterior e indica si es posible considerar la anterior como una demostración del Teorema de Pitágoras. Explica tu respuesta.

b. Busca la Proposición 47 del Libro 1 de los Elementos de Euclides y analiza la demostración de este teorema. ¿De qué teorema se trata?

c. ¿Consideras que la normativa de esta demostración es adecuada para la matemática actual? Justifica.

A lo largo de la materia se presentan distintas demostraciones de propiedades matemáticas y se analizan las mismas con la finalidad de lograr construir en los estudiantes una comprensión de las demostraciones como prácticas sociales (Crespo Crespo, 2007) asociadas a la validación dentro de la matemática.

En la primera parte de esta actividad, los estudiantes deben observar que más allá de que se trata de una argumentación gráfica, lo presentado responde a un caso particular de aplicación del teorema de Pitágoras, por lo que no se está presentando una demostración general. El caso demostrado corresponde únicamente a la situación planteada en el Menón, y no a otros triángulos rectángulos que no sean isósceles.

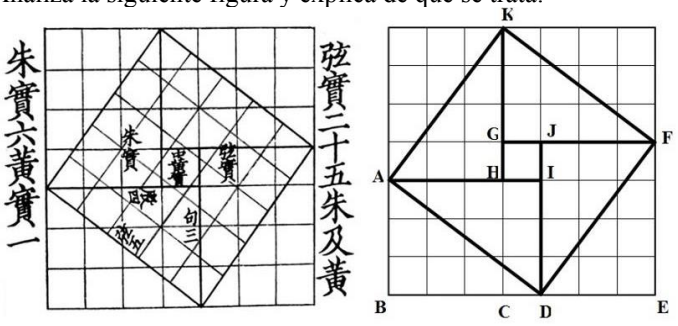
Por otra parte, en el caso de la demostración de Euclides, deben analizar que se trata de una demostración realizada dentro de un sistema axiomático. Las argumentaciones presentadas son deductivas y en la normativa actual de la matemática es aceptada. Esta demostración, según (González Urbaneja, 2008, p.114) "alcanza una verdadera apoteosis geométrica la forma magistral y sumamente bella con que el maestro alejandrino realiza la proeza de demostrar el legendario teorema, con una lógica impecable, una inusitada elegancia y una modesta economía de elementos geométricos construidos de forma muy cuidadosa en las proposiciones anteriores."

En esta actividad además, los estudiantes deben ejercitar su habilidad de búsqueda bibliográfica, ya que para resolverla deberán leer el diálogo de Platón y buscar la proposición indicada en los Elementos.

d) El Teorema de Kou Ku

Un problema que aparece en el Chiu Chang Suan Shu (Obra anónima datada de 300 a.C. - 200 d.C.) es el siguiente:
"Un acuario tiene una base cuadrada de lado 10 chi. Una caña nace en el centro del acuario y crece perpendicularmente a la base hasta salirse 1 chi sobre la superficie del agua. Si se inclina la caña hacia un lado, su tope tocará el borde del acuario exactamente al nivel del agua. ¿Cuál es la profundidad del agua y cuál la longitud de la caña?"

i. Resuélvelo
ii. ¿Qué conocimientos matemáticos son necesarios para su resolución?
iii. El teorema que se aplica en la resolución de los tres problemas fue denominado Kou Ku. (Kou = lado más corto, Ku = lado más largo, Shian = diagonal) ¿Cuál es el nombre con el que se conoció a este resultado en Occidente?
iv. Analiza la siguiente figura y explica de qué se trata:



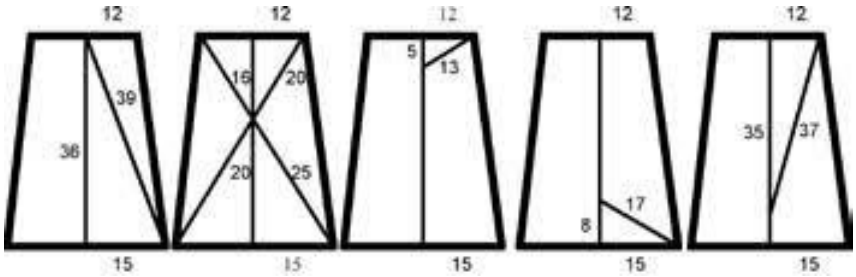
Teorema de Kou Ku es el nombre dado al Teorema de Pitágoras en China en la antigüedad. En el problema planteado, se puede observar una aplicación del mismo. Para su resolución, los estudiantes deben interpretar el enunciado a través de la realización de una figura de análisis. Esta les permite plantear una ecuación de segundo grado que deben resolver. En problemas anteriores de la misma práctica ya han encontrado las ecuaciones y formas de resolverlas de esta cultura.

El último ítem de esta actividad muestra una demostración visual del Teorema de Pitágoras. Este tipo de demostraciones son habituales en la matemática de la antigua China. Una vez más deberán reconocer cuáles son las normativas que caracterizan las demostraciones de determinados escenarios socioculturales (Crespo Crespo, 2007).

e) India: ternas pitagóricas y demostraciones

En los Sulvasutras se describen las características geométricas que deben tener los altares. La construcción de altares utiliza en su construcción el denominado triángulo indio de lados 5, 12 y 13

a. *¿Qué caracteriza al triángulo indio?*
b. *¿Qué utilidad consideras que tenía una cuerda que forma un triángulo cuyos lados correspondan a las medidas de los lados del triángulo indio?*
c. *¿En qué cultura se realizaba una práctica similar? Explica diferencias y similitudes entre ambos métodos*
d. *A continuación se presentan las figuras que corresponden a las trazas de los altares trapezoidales del Sulvasutra de Apastamba (siglo V a.C.) con indicación de las ternas pitagóricas utilizadas en la construcción ritual. Analiza cada una de ellas y comenta lo que observas*



Mediante la resolución de esta actividad, los alumnos relacionan el método de trazado de perpendiculares utilizado en la India con el que se utilizaba en Egipto. Ambas prácticas se basan en la utilización de ternas pitagóricas, pero las ternas utilizadas por cada cultura son distintas. La construcción de altares trapezoidales, es otra aplicación de las ternas pitagóricas.

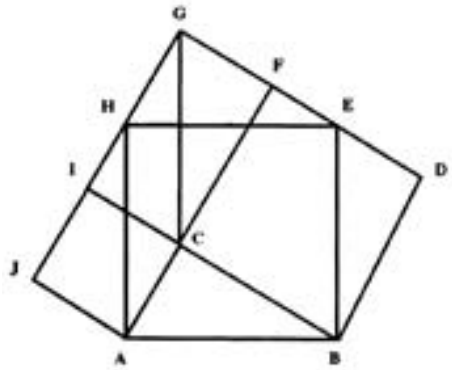
Bhaskara demostró hacia 1150 d.C., el Teorema de Pitágoras de la siguiente manera. Según él, no es necesaria ninguna explicación. Se limitó a escribir "Mira" bajo la figura.

a. *Analízalo atentamente e interpreta lo que propone*
b. *Indica bajo qué condiciones se lo puede considerar una demostración*

Esta demostración atribuida a Bhaskara se caracteriza por su sencillez. A esta altura de la materia, los estudiantes ya no se asombran de encontrar al Teorema de Pitágoras en cada uno de los escenarios descriptos en la historia de la matemática y analizar distintos tipos de demostraciones y aplicaciones. Pueden encontrar en este tipo de demostraciones maneras de validar resultados en la escuela secundaria.

f) Los árabes y la demostración del Teorema de Pitágoras

Tabib ibn Qurra es reconocido en el mundo árabe por las traducciones al árabe que realizó de diversas obras, entre ellas, los Elementos de Euclides. También realizó aportes propios. Uno de ellos es la siguiente demostración del Teorema de Pitágoras.



a. Analiza si se trata de una demostración correcta.
b. ¿Puedes compararla con alguna de las otras vistas en la materia? Explica.

Esta actividad de los alumnos hace que relacionen la misma con otras anteriormente trabajadas en otras actividades de la materia.

Los futuros profesores de matemática si bien son conscientes de que, en la actualidad, lo visual no es aceptado en los escenarios de desarrollo de la matemática sobre la base de que pueden ser imprecisas, faltas de formalización y pueden conducir al engaño, comprenden que las argumentaciones basadas en la visualización favorecen la comprensión de la demostración matemática (Hanna, 2000).

Algunos comentarios finales

Los ejemplos de actividades que se han presentado en este trabajo, al ser trabajadas por los estudiantes de la materia Historia de la matemática les permiten analizar la manera en la que las distintas culturas construyeron la matemática, por medio de problemáticas propias para cuyas propuestas de solución generaron algoritmos propios. “El conocer la historia de la evolución de las ideas matemáticas, desde los tiempos remotos es algo que enriquece al pensamiento moderno” (Ortiz Fernández, 1936, p.42).

Al no ser la historia abordada como mera sucesión de hechos, los estudiantes deben comprender sus problemáticas, pudiendo comprender a la matemática como emergente sociocultural influenciado por ideas filosóficas, políticas, sociales, económicas y religiosas de cada escenario sociocultural. Es posible en esta materia retomar conceptos a trabajados en otras materias, ya que los estudiantes comprenden los orígenes y aplicaciones de temas que ya estudiaron, pero los ven ahora contextualizados. Esto permite a los estudiantes tener una visión de los conceptos matemáticos no de manera abstracta, sino como un reflejo de las necesidades e intereses de los escenarios socioculturales en los que se desarrollaron. De esta manera la presencia de ciertos conocimientos en diferentes culturas es vista como consecuencia de la búsqueda de la sociedad para resolver problemáticas de su interés.

Este tipo de actividades, dan a los futuros profesores de matemática recursos didácticos para sus clases, pues pueden analizar a través de ejemplos y problemas, los distintos algoritmos, su significación y los conocimientos matemáticos que involucran. La posibilidad de acercar a sus futuros estudiantes la matemática como construcción social puede darles una vía para acercarles una visión humanizada de esta ciencia.

Resulta innegable la importancia en los cursos de formación docente de la presencia de espacios curriculares en los que se reflexione acerca de la construcción social del conocimiento matemático y sus relaciones con la matemática y con el aula de matemática, pudiendo reconocer la manera en la que la diversidad cultural produce conocimiento.

Referencias bibliográficas

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. CICATA-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2017a). Acerca de la multiplicación de números naturales en el Antiguo Egipto. Didáctica sin fronteras, 3, 7-9.

Crespo Crespo, C. (2017b). *La Importancia del Análisis Histórico-Epistemológico en la Formación del Profesor de Matemática. Los Algoritmos de las Operaciones.* Revista Perspectivas em Educação, 10 (23), 474-482,

González Urbaneja, P. (2008). El teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma 32*, 103-130.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics,* 44, 5–23.

ISP JVG (2015). *Plan Curricular Institucional del Profesorado de Educación Superior en Matemática* Res 2014/3931-MEGC. Buenos Aires: Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”.

Ortiz Fernández, A. (1936). *Historia de la Matemática. Volumen I*. Pontificia Universidad Católica del Perú: Lima.

Simon, M. (1994), Learning Mathematics and Learning to Teach: Learning Cycles in Mathematics Teacher Education. *Educational Studies in Mathematics,* 26, 1-94.

¿CÓMO HACEMOS LAS MATEMÁTICAS MÁS DEMOCRÁTICAS? UNA REFLEXIÓN AUTOBIOGRÁFICA SOBRE LA PRÁCTICA DOCENTE CON ESTUDIANTES BILINGÜES

HOW DO WE MAKE MATHEMATICS MORE DEMOCRATIC? AN AUTOBIOGRAPHICAL REFLECTION ON TEACHING PRACTICE WITH BILINGUAL STUDENTS

Diana Paola Piedra Moreno
Western Norway University of Applied Sciences (Noruega).
dppm@hvl.no

Resumen
Comprender el valor de las matemáticas en un mundo preocupado por los conflictos sociales es un factor clave para la continuación de estudios sociopolíticos en educación matemática. Más aún lo es para la humanización y quilificación de los procesos de comunicación, argumentación y participación en el aula con los cuales se puede, desde una perspectiva crítica, comprender, cuestionar y transformar las realidades que vivimos como comunidad. Existe una gran brecha entre reconocer teóricamente el poder democrático de la educación matemática y el desarrollo de prácticas comprometidas que activen ese poder. En esta reflexión autobiográfica, comparto algunas experiencias como docente y los aprendizajes y desafíos de cuando se intenta trabajar con prácticas democráticas en aulas matemáticas bilingües.

Palabras clave: democracia, argumentación, educación matemática crítica, bilingüismo

Abstract
Understanding the value of mathematics in a world concerned with societal issues is a key factor for continuing sociopolitical studies in mathematics education. Specially, it is so, for the humanization and qualification of processes of communication, argumentation and participation in classrooms that enable us, from critical perspectives: to understand, question, and transform our community realities. There is a large gap between theoretically recognizing the democratic power of mathematics education and the development of practices that truly activate that power. In this autobiographical reflection, I share my teaching experience, and learning and challenges faced when trying to work with such democratic practices in bilingual mathematics classrooms.

Key words: democracy, argumentation, critical mathematical education, bilingualism

Introducción y contextualización

"Because I, a *mestiza*,
continually walk out of one culture
and into another,
because I am in all cultures at the same time,
alma entre dos mundos, tres, cuatro,
me zumba la cabeza con lo contradictorio.
Estoy norteada por todas las voces que me hablan
simultáneamente"
(Anzaldúa, 2013, pág. 13)

Esta reflexión autobiográfica hace parte de una exploración inicial de la etnografía critica como metodología de mi trabajo doctoral. En dicha exploración, el investigador reflexiona sobre su posicionalidad en el campo de trabajo. Mi investigación de doctorado está asociada al proyecto *aprendiendo acerca de la enseñanza de la argumentación para la Educación Matemática Crítica* (LATACME por sus siglas en inglés), el cual se lleva a cabo en aulas con estudiantes multilingües y estudiantes para profesor en Noruega. En este país, al igual que otros, hay un incremento en el número de estudiantes que provienen de diversas partes del mundo por diferentes circunstancias; desplazamiento, guerra o inestabilidad en sus países de origen. Estos estudiantes necesitan un apoyo docente particular ya que aprenden matemáticas mientras deben desarrollar progresivamente la lengua noruega y a su vez se busca reducir la vulnerabilidad con la que vienen y la que se genera al vivir en el nuevo lugar. En este contexto, la inclusión escolar de los aprendices multilingües, en el sentido de valorar su riqueza cultural y lingüística, se convierte en una prioridad desde una perspectiva crítica de la educación matemática. El propósito de mi investigación doctoral es identificar aspectos democráticos que se consideran importantes en la formación inicial de profesores de matemáticas de escuelas primarias quienes trabajarán con aprendices multilingües. En este texto, exploro por medio de la autografía mi experiencia en el campo de la Educación Matemática Crítica (EMC) y de la educación bilingüe, la cual contextualiza y hace accesible mi perspectiva investigativa como elemento influyente de mi investigación doctoral. Para ello hago un relato cronológico y reflexivo, una revisión teórica, y me centro en una reconstrucción de experiencias de aulas bilingües en segundo, tercero y cuarto de primaria que tuvieron lugar en el 2015. En dichas experiencias veía muchas situaciones "exitosas" pero ahora desde una mirada retrospectiva y crítica *me zumba la cabeza con lo contradictorio*. Al finalizar busco cerrar con una discusión que centra a la educación matemática en un campo de reflexión de contradicciones y luchas.

A modo de relato

Como estudiante, pensé que las matemáticas era una disciplina precisa e irrefutable, una entidad divina que era importante para el mundo académico y científico. Era "buena" en repetir procedimientos matemáticos, así que me gustaban las matemáticas así. Cuando fui a la universidad, noté que "saber" o "no saber" las matemáticas limitaba una ruta de oportunidades. En mi país de origen, Colombia, el examen nacional (ICFES-SaberPro) es un requisito de admisión para las universidades públicas y privadas. Las universidades públicas son casi gratuitas para familias con bajos ingresos. Sin embargo, las plazas limitadas y los puntajes bajos en los exámenes dejan a miles de jóvenes fuera del sistema de educación superior. Se dice comúnmente que conocer las matemáticas es la clave para la admisión a la universidad; ya que la competencia se estrecha entre aquellos que son "buenos" en matemáticas. Asistir a una universidad pública me hizo más consciente de la profesión docente. Ingresé a un programa de formación de profesores de matemáticas que me abrió la mente a muchas preocupaciones: ¿cómo pueden contribuir las matemáticas a comprender y transformar el complejo mundo que devora a los desfavorecidos? ¿Hasta qué punto la educación matemática puede cultivar pensadores críticos? ¿Tienen todos los estudiantes acceso de alta calidad al

conocimiento matemático? ¿Cuál es el poder del conocimiento matemático? ¿Cómo puede la educación matemática contribuir a la democracia y la paz? Estas preguntas han vivido conmigo desde entonces.

Durante mi periodo como practicante, experimenté compromisos que iban más allá de la enseñanza conceptual en el aula. Me enfrenté a realidades; Abandono escolar, acciones autoritarias y represivas entre miembros de la escuela, y bajas expectativas académicas. Nunca pensé que las relaciones humanas entre estudiantes, colegas y administradores representaba conflictos estructurales tan desafiantes. Me di cuenta de que no puedo resolver todos los problemas escolares, pero tampoco puedo pretender hacer algo relevante mientras me concentro exclusivamente en un enfoque conceptual del aula.

Después de terminar mi licenciatura, me convertí en maestra de matemáticas bilingüe; ser profesora de matemáticas y hablar un segundo idioma eran mis cualificaciones. Noté poco a poco que saber matemáticas y tener un segundo idioma no eran conocimientos suficientes para desenvolverse en este contexto. Trabajé en una escuela privada de clase media con un proyecto de inmersión en inglés. Era la primera vez que las matemáticas se iban a enseñar allí en inglés, así que dirigí la organización curricular. Para la planificación, discutí ideas con colegas, así aprendí que el trabajo colaborativo es un elemento que hace que la educación matemática sea más democrática, ya que existen prácticas consensuadas y se discute y negocia el propósito de las matemáticas escolares. Aprendí que en la educación matemática la democracia no solo está dirigida a los estudiantes, sino también a los maestros. También noté que no estaba bien preparada para usar la lengua como recurso y comencé a preguntarme qué necesitamos en la formación docente para ser mejores maestros de matemáticas de estudiantes que aún están aprendiendo el idioma de instrucción.

Emigré a los Estados Unidos para mejorar las habilidades de inglés como segunda lengua y más tarde, me inscribí en un programa de maestría en currículo e instrucción. Como migrante, experimenté luchas y aprendí lecciones yo misma. Fui tutora de estudiantes internacionales y locales, trabajé como líder activo del Centro de Programas Internacionales y como profesora de español. Aprendí mucho de otras culturas e incluso de la mía. Una de las cosas que más me impresionó fue notar cómo el uso de diferentes idiomas tiene diferentes connotaciones y formas de poder, de privilegio y opresión. Por un lado, los niños y maestros colombianos (como yo) usan el inglés como segundo idioma porque brinda cierto estatus social, pero, por otro lado, algunos niños y familias latinas en los EE. UU. deciden no usar o aprender su lengua materna porque hablarla, principalmente en áreas mayoritariamente blancas, por ejemplo, trae consigo rechazo, segregación e intimidación. Me volví sensible a estas realidades y situaciones complejas. Hacer amigos con ciudadanos estadounidenses que no hablan español y tienen padres latinos fue estremecedor; sus historias reflejan experiencias escolares y sociales en relación con la formación de su identidad. También fue estremecedor trabajar con estudiantes que llegaron a los Estados Unidos sin saber inglés y fueron simplemente asignados a instrucción regular en la cual era bastante evidente su exclusión. Aquí aprendí que educar estudiantes migrantes en tiempos de incertidumbre política, más aún en el gobierno de Trump, es bastante complejo y requiere de muchos compromisos democráticos y de un rol bástate político por parte de los maestros. Después emigré una vez más, a Noruega, donde ahora estoy haciendo estudios de doctorado relacionados con el proyecto LATACME. Quiero aprender sobre cómo nosotros, los emigrantes, experimentamos la escuela y la educación matemática. Mi investigación es un reflejo de formas particulares en las que he percibido responsabilidades políticas como educador matemático, migrante e investigador. Creo que en este campo hay todavía un largo camino por recorrer para reconocer y generar más conocimiento en los estudios socio-políticos de la educación matemática que abran y mantengan escenarios democráticos.

Revisión teórica

Para caracterizar un significado particular, pero complejo, de la democracia, es importante reconocer su existencia tanto en la sociedad como en la escuela. Según la filósofa e historiadora Diana Uribe (2012), los pensadores griegos

fueron los primeros en hablar sobre un orden cívico para la toma de decisiones y la elección de gobernadores. Estos filósofos rompieron con el esquema de tomar decisiones basadas en un orden cósmico, el de la divinidad. En ese orden las acciones y decisiones de los hombres ya habían sido tomadas por los dioses y eran transmitidas a través de los líderes autoritarios que los representaban. La idea de romper el orden cósmico revolucionó la época, se creó por primera vez un orden que basaba su legitimidad en el consenso humano, el consenso cívico, no en el divino. La palabra democracia proviene del griego antiguo "Demos-Kratos ". -Demos- significa personas y -Kratos- poder o gobierno; haciendo de "Demos-Kratos" la expresión para el gobierno del pueblo o las personas empoderadas (Uribe, 2012). Por lo tanto, la democracia no solo está relacionada con el gobierno, sino también con el poder de las personas para tomar sus propias decisiones teniendo en cuenta su rol comunitario y el consenso. Una cultura democrática no es solo una situación para la elección de líderes; va más allá de esa comprensión de una dimensión política.

Como afirman Sánchez y Molina (2012), el concepto de la democracia es uno multidimensional, es explorado y explicado a través de cuatro dimensiones: política, jurídica, económica y sociocultural. Estas cuatro dimensiones permiten que la democracia se expanda más allá de la idea de organización gubernamental y se reconozca como Noddings (2016) la concibe; como una interacción social orientada al aprendizaje continuo. Aunque la dimensión política comúnmente se asocia con el voto popular, ésta se refiere a la conceptualización de los mecanismos de participación ciudadana en asuntos públicos. Desafortunadamente, esta creencia común solo enfoca la atención en las elecciones de líderes y deja de lado la participación directa de los ciudadanos en las decisiones que los afectan. Esta dimensión política también se preocupa por los *valores* y las *habilidades* necesarias para que todos los ciudadanos puedan participar plenamente en los debates en los que están directamente involucrados; por ejemplo, autonomía y pensamiento crítico (Horlacher, 2014). La dimensión jurídica se caracteriza por la generación de mecanismos para la protección de los derechos humanos, especialmente los de igualdad y libertad en un mundo de pluralidad. La dimensión económica se refiere a la democracia como la distribución equitativa de los bienes. Por ejemplo, acceso equitativo a la educación matemática en escenarios plurales como aulas multilingües (Valero, 2017; Adler, 2001). Finalmente, la dimensión sociocultural incluye las anteriores, pero le da a la democracia el papel de crear un espacio para que las personas puedan convertirse en sujetos autónomos que mantienen un respeto profundo por la diversidad de ideas y los pensamientos de los demás (Biesta, 2006; Sánchez & Molina, 2012; Valero & Skovsmose, 2012). A pesar de la existencia de una retórica antigua y sólida que relaciona la democracia y la educación, las prácticas de educación matemática siguen siendo individualistas, estandarizadas y restrictivas (Noddings, 2016; Valero & Skovsmose, 2012). La tradición y perpetuación de esas prácticas mecánicas requiere que desde la educación matemática se reconsidere su propósito y los aspectos que son esenciales en las aulas. Por ejemplo, para crear y mantener una cultura democrática en la cual se puede ser un sujeto crítico frente a los problemas globales. También hay una necesidad de investigación en la formación del profesorado que apoye las posibilidades de existencia de un espacio crítico y democrático ya que la creación de esa cultura democrática debe estar dirigida a no solo a la educación escolar y sino también a la docente (Apple & Beane, 2007).

Reitero que la idea de democracia y escuela en general no es nueva. Por ejemplo, Dewey creía que "Se debería alentar a los niños a comunicarse entre sí, a construir valores y conocimientos comunes (...) aprender a participar en la vida democrática implica vivir democráticamente, estudiantes trabajando juntos en problemas comunes" (Noddings, 2016, p. 36, traducción propia). ¿Cómo podría traducirse esta idea a la educación matemática? se deben explorar oportunidades para crear, mantener y preservar las estructuras democráticas, un camino podría ser a través de prácticas de argumentación en escenarios plurales; por ejemplo, en aulas con estudiantes multilingües. La democracia también puede ser vista como una interacción escolar; Apple y Beane (2007) sugieren que las escuelas deben ser conscientes de que la preservación de la democracia reside en el multiculturalismo y la diversidad, y la escuela es un escenario responsable de ello. Hacen hincapié en que la democracia no sucede por casualidad, por lo que los maestros y los educadores de docentes deben buscar oportunidades para que la democracia cobre vida. Por este motivo, la educación matemática debería prestar más atención a sus vínculos con la democracia y las actividades matemáticas que hacen posible el desarrollo de las interacciones sociales, la autonomía y las reflexiones colectivas. Esto ha sido explorado ampliamente mediante la resolución de problemas y las actividades de modelaje matemático (Valero y Skovsmose, 2012; Blomhøj, 2009). Las aulas de matemáticas, más allá de tener una función

de "desarrollo conceptual", tienen una gran responsabilidad democrática con los ciudadanos. Los estudiantes deben ser considerados como individuos únicos que respetan diferentes puntos de opinión y que son conscientes de los procesos de toma de decisiones que involucran su estilo de vida como colectivo. La educación matemática debe cambiar la perspectiva individual y silenciosa con la que hemos caído en la "maratón de hacer mejores atletas" y hemos estado entrenando ciudadanos individuales, no críticos y uniformes (Ernest, 2009; Valero y Skovsmose, 2012).

Los atletas corren esa maratón por el sistema de evaluación en una caminadora y realmente no se dirigen a ningún lado. La Educación Matemática Crítica asume una conexión crítica entre la democracia y la educación matemática que se apoya en prácticas colectivas, como la toma de decisiones, la deliberación y la coflexión (Valero y Skovsmose, 2012). En este sentido, la comunicación matemática y la argumentación pueden verse como producciones colectivas reflexivas. Sin embargo, la tradición de las matemáticas como una disciplina rigurosa basada en inferencias racionales y métodos "universales", limita la concepción de la argumentación a una secuencia de explicaciones lógicas y deductivas. La argumentación en las aulas matemáticas debe concebirse, no como una práctica exclusiva, individual, perfecta, única y deductiva, pero como *una práctica inclusiva, colectiva, incierta, diversa y abductiva*. Una comprensión que, por ejemplo, explora otras formas de argumentación matemática en aulas tanto regulares como multilingües en las que se reconocen gestos, videos y sonidos para generar significado (Fernández-Villanueva & Jungbluth, 2016). Las aulas multilingües no solo podrían representar una dimensión económica y sociocultural de la democracia, sino también un objetivo para que la EMC explore la complejidad de los procesos de comunicación en el que la argumentación toma lugar a través de medios multimodales. En el contexto latinoamericano de la EMC, se ha explorado más el modelaje matemático y la resolución de problemas como escenarios que pueden ayudarnos a hacer que las matemáticas sean más democráticas.

El modelado matemático, desde la EMC, es un entorno de aprendizaje elegido por los estudiantes para investigar modelos matemáticos y estadísticos relacionados con realidades críticas (Araújo, 2009; Barbosa 2009). Existen múltiples temas que pueden conducir dichas investigaciones, tales como los problemas médicos, sociales y ambientales; también los relacionados con las matemáticas financieras y el análisis de datos (Blomhøj, 2009). Según Barbosa (2009), hay dos situaciones que conducen a reflexiones críticas y escenarios en los que pueden ocurrir prácticas de argumentación: analizar los criterios para construir el modelo matemático y comparar los modelos matemáticos. Del mismo modo, Blomhøj (2009) señala que a través de estas situaciones se puede dar lugar a reflexiones críticas durante el proceso de modelaje y sus subprocesos y también dichas reflexiones pueden centrarse en la aplicación del modelo en un problema social.

Al igual que el modelaje matemático, los problemas matemáticos han ocupado un lugar central en el plan de estudios de la escuela de matemáticas, sin embargo, la resolución de problemas no es solo una cuestión de tener cualquier problema (Schoenfeld, 1992). La resolución de problemas permite interpretaciones matemáticas de diversas situaciones, logrando más que la realización de procedimientos o la memorización de fórmulas, la exploración de patrones y la formulación de conjeturas y predicciones (Schoenfeld, 1992). En este sentido, se permite la creación de diferentes estrategias (heurísticas) y prácticas argumentativas colectivas para explicar y reflexionar. Aun así, conceptualizaciones de la resolución de problemas como las de Schoenfeld (1992) no siempre nos orientan a caminos críticos en el sentido político, pueden ser más intencionales con respecto a las responsabilidades democráticas de la educación matemática. La formulación de conjeturas, la toma de decisiones y el desarrollo de la creatividad son un fertilizante importante para el pensamiento crítico incluso en las perspectivas cognitivas que se centran en el desarrollo de habilidades mentales. Sin embargo, en este texto, el pensamiento crítico es un proceso sistemático de elaboración y respuesta de preguntas. Pensar críticamente significa ser capaz de alzar la voz, preguntar en lugar de aceptar una verdad por medio de la autoridad y valorar las razones (Freire, 2000). La EMC señala en esta dirección que las circunstancias sociopolíticas para las cuales las matemáticas pueden ser un instrumento de comprensión, reflexión y transformación también desarrollan el pensamiento crítico, lo cual va más allá de la aplicación de los procedimientos matemáticos (Valero y Skovsmose, 2012).

Reconstrucción y análisis de la experiencia

Una de las preguntas clave de este texto es cómo podemos hacer que las matemáticas sean más democráticas. El modelado matemático y la resolución de problemas parecen ser una respuesta amplia desde la literatura, también se ha empezado a reconocer el papel de la argumentación como aspecto integrador de los procesos de comunicación colectivos en el aula de matemáticas. Mi intención con esta reflexión autobiográfica no es mostrar un "buen" ejemplo de cómo podemos hacer que las matemáticas sean democráticas; por el contrario, documento las percepciones, lecciones y dificultades que enfrenté en la planificación e implementación cuando me comprometí con una perspectiva democrática. Para la elaboración de la reflexión estudié de manera retrospectiva un año de mi propia práctica docente con alumnos bilingües en grado segundo, tercero y cuarto de primaria. Recolecté datos utilizando notas de entrevistas de grupos focales con quienes diseñé el curso (colegas de matemáticas, ciencias e inglés, junto con coordinadores y el rector de la institución), grabaciones de video de las clases, diario de campo, entrevistas a algunos estudiantes y diario fotográfico de cuadernos y talleres. Investigué una transformación curricular para la educación matemática en segundo y tercer grado en una escuela de inmersión bilingüe colombiana. El español era el idioma nativo y el inglés el segundo idioma en desarrollo. Las matemáticas eran enseñadas en el idioma nativo antes de la implementación de la transformación curricular porque el bilingüismo era una nueva política institucional que comenzó a ejecutarse gradualmente cinco años antes, pero involucraba solo otras asignaturas como ciencias naturales y artes. Después de ese período, era hora de involucrar al área de matemáticas en la educación bilingüe y existía la posibilidad de proponer algo diferente de lo que estaba haciendo en el aula regular de matemáticas. Quería proponer un proyecto con la intención de abrir posibilidades para una cultura democrática de manera explícita. No fue fácil hacerlo antes, porque había demasiadas pautas curriculares específicas en la institución que tenía que seguir. Estaba haciendo que mis estudiantes "corrieran en la caminadora" para lograr puntajes altos en las pruebas escolares nacionales y cumplir con las expectativas de los directivos, mis colegas, padres y estudiantes.

La comunicación matemática y la argumentación fueron un doble desafío ya que el aprendizaje matemático crítico era una intención y el desarrollo de un segundo idioma también. La versión aprobada del proyecto incluía la resolución de problemas como una nueva clase contenida en el departamento de matemáticas de la escuela. La clase tuvo una duración de 2 horas por semana y los estudiantes también tuvieron paralelamente una clase de matemáticas ordinaria en español. Considerando que un diseño curricular debe partir de las necesidades particulares de la población (Rico, 1999), organizamos un grupo focal para identificar algunas necesidades. El director, el coordinador de la escuela primaria, los jefes del departamento de matemáticas e inglés y algunos profesores de ciencias, inglés y matemáticas participaron en el grupo focal. Algunas de las preguntas abordadas a través de entrevistas informales fueron; ¿Cómo fortalecer el segundo idioma de los estudiantes? ¿Cómo avanzar en el proceso de bilingüismo? ¿Cómo puede involucrarse el área de las matemáticas con la política institucional de la educación bilingüe? ¿Qué tipo de educación docente se requiere en área de matemáticas para atender a la política bilingüe y a los propósitos de aprendizaje propuestos desde el departamento de matemáticas? ¿Cuáles son algunos conceptos clave, vocabulario y habilidades lingüísticas en las que los estudiantes trabajan en las áreas de ciencias y de inglés que podrían integrarse con matemáticas? En el departamento de matemáticas, se identificó como una necesidad el desarrollo del pensamiento crítico y la generación de un espacio diferente del aula de matemática ordinaria. En el nuevo espacio, los profesores y los alumnos podrían centrarse en la búsqueda y creación de estrategias heurísticas de diversos problemas y situaciones que no estaban vinculadas directamente con el tema de la clase. Algunos maestros de matemáticas dijeron: los estudiantes saben que después de aprender un concepto matemático lo aplicarán a un problema. El conflicto es que los estudiantes proceden a resolver un problema sin entenderlo; simplemente seleccionan los números y aplican el último concepto que aprendieron, incluso si no tiene sentido. Era importante para el departamento de matemáticas que los estudiantes pudieran ser críticos al tomar decisiones autónomas y crear sus propias heurísticas, formas razonables de resolver problemas y validarlas mediante argumentos. Para hacerlo, una cultura de comunicación y participación democrática se consideró de gran valor porque ésta podría conducir a mejores diálogos. También se descubrió que había actividades importantes en el plan de estudios nacional que no estaban cubiertas en el plan de estudios de la escuela debido al tiempo. Algunos de ellos

fueron la gestión del dinero y el tiempo, el uso lógico de las cuatro operaciones básicas y las estrategias de resolución de problemas. Desde las áreas de ciencias e inglés, se identificaron algunos contextos de comunicación en el segundo idioma y algunas terminologías de contenido que podrían conectarse con la resolución de problemas para basar un diálogo común. Los estudiantes de segundo grado generalmente desarrollaban vocabulario relacionado con verbos en tiempo presente, animales y alimentos saludables y no saludables. Los estudiantes de tercer grado tenían múltiples contextos como familia, profesiones, estructura del pasado simple y uso de instrumentos de medida. Los estudiantes de cuarto grado trabajaban en el aprendizaje de ecosistemas y en el uso de verbos modales y en la elaboración de ideas creativas para resolver problemas. Tener un contexto de lenguaje común en diferentes asignaturas abrió posibilidades para que los estudiantes mejoraran sus habilidades de comunicación, así se pensó que se les proporcionaría un acceso más justo a los diálogos de la clase de matemáticas. Así, la planeación de una malla curricular de esta nueva asignatura se realizó con insumos provenientes del trabajo colaborativo para sostener un lenguaje común y garantizar un acceso equitativo a la educación matemática de aprendices del inglés como segunda lengua, esto fue considerado una experiencia exitosa inicialmente. Sin embargo, ahora desde una mirada retrospectiva puedo decir que adaptar el pensamiento crítico a una asignatura solo promueve una nueva fragmentación del conocimiento y esto contradice la idea de repensar el propósito de la educación matemática desde una perspectiva más interdisciplinar y crítica. Adicionalmente, si se ha de trabajar con propósitos democráticos usando la resolución de problemas y el modelaje matemático en situaciones que son relevantes para los estudiantes, no tiene sentido crear un diseño curricular tan detallado de manera previa al inicio del año escolar sin conocer a los estudiantes y sin darles voz alguna en la creación de situaciones de su interés. Eso contradice la dimensión política, y sociocultural de la democracia. Araújo (2009) señala que las actividades de modelaje desde una perspectiva crítica deben ser elegidas por los estudiantes. Sin embargo, cómo hacerlo dentro de las estructuras de las escuelas y en los primeros años de escolarización no es fácil ni parece ser muy factible. La institución solicita pautas curriculares que deben entregarse por adelantado, incluso antes de conocer a los estudiantes. Estas pautas pueden ser modificadas, pero aún restringen la acción práctica ya que se establecen compromisos con la escuela, los colegas, los estudiantes y los padres de familia.

Cuando comencé con la implementación, noté que había fuertes estructuras de poder en las aulas que influían los procesos de toma de decisiones de los estudiantes y que dificultaban las posibilidades de diálogo. Lo que quiero decir con esto es que mis alumnos me veían como una autoridad única para validar sus prácticas matemáticas. Además, tenían la sensación de poseer una etiqueta inmutable de ser buenos o malos en matemáticas. Pensaban que ser bueno era tener siempre éxito en el primer intento. Fue también difícil para ellos buscar sus propias estrategias al principio porque pensaban que solo existía una sola forma de resolver cada problema y que solo se permitían los algoritmos estándar. Me preguntaron muchas veces; ¿Lo resuelvo con multiplicación o división? Necesitaban mi aprobación para tomar una decisión y seguir adelante. Fue difícil también desmantelar la idea de que el maestro tenía que explicar los procedimientos y conceptos de antemano. No confiaban en los argumentos de algunos compañeros de clase. Los estudiantes parecían callados, tímidos e incluso asustados de explicarle a los demás sus ideas que parecían no ser tan estándar. A menudo querían explicarme sus soluciones solo a mí, la profesora. Querían guardar silencio cuando no sabían. Como Freire (2000) explica, nos liberamos de las estructuras autoritarias solo a través del diálogo. “A través del diálogo (...) el maestro ya no es simplemente el que enseña, sino el que se enseña a sí mismo en diálogo con los estudiantes (...). Se vuelven conjuntamente responsables de un proceso en el que todos crecen. En este proceso, los argumentos basados en "autoridad" ya no son válidos " (Freire, 2000, p. 80, traducción propia). En este sentido, los estudiantes tuvieron que dejar de tomar decisiones basadas en la autoridad del maestro. Tenían que involucrarse en una crítica lógica de nuestro hacer matemático por medio de la investigación, la argumentación y la resolución de problemas. Aquí el propósito del aprendizaje matemático era la creación de entornos que permitían la existencia de la dimensión sociocultural de la democracia, el juicio individual y el devenir al mundo con formas personales únicas de comprensión matemática (Biesta, 2006). Poco a poco, sentí que algunos de los estudiantes que tenían dificultades en el uso verbal de la segunda lengua y en las clases ordinarias de matemáticas comenzaron a tener su propia voz en mi clase, llenos de estrategias creativas y argumentos que podían expresar con dibujos, señales y gestos. Ahora explicaré algunos ejemplos que seleccioné por cada grado escolar, no todos son ejemplos críticos, pero corresponden al esfuerzo de adaptación.

En segundo grado, los estudiantes rompieron la tradición de trabajar con solo dos cantidades. Se dieron cuenta de la existencia de la adición de más de dos cantidades en el contexto de la compra de artículos para una comida. Proporcioné una lista de artículos del supermercado y los invité a crear y pagar su propia comida. Un estudiante dijo que era imposible saber cuánto podría ser el total ya que no se les había enseñado aún a agregar más de dos cantidades. Otro estudiante respondió diciendo que en la vida real las personas rara vez compran solo dos cosas porque solo saben cómo agregar dos cantidades. Les pregunté cómo podríamos resolver el problema. Un estudiante propuso agregar grupos de a dos números, otro dijo que podrían organizarlos en una lista e intentar agregar columna por columna como de costumbre e intentar mantener un registro en el conteo. Aquí los estudiantes cuestionaron el aprendizaje matemático que limita la adición a una reunión de únicamente dos cantidades.

Con respecto a la implementación en tercer grado, discutimos: ¿Qué puede comprar una familia con un salario mínimo en Colombia? Muchos alumnos respondieron -600.000 pesos. Pregunté si esa podría ser la respuesta de la pregunta. Después de analizar, dijeron –¡No, pero en matemáticas, la respuesta es un número! Discutimos que las matemáticas también nos llevan más allá de encontrar un número. Los estudiantes también afirmaron que 600.000 pesos era mucho dinero y que las familias podrían comprar nuevas tecnologías. Le pregunté si eso era posible. Comenzaron a discutir el valor de los diferentes objetos: -si el objeto cuesta menos de 600.000, podemos comprarlo. Los estudiantes agregaron nuevas variables al problema. Dijeron que las familias tenían que pagar la matrícula escolar, la comida, los servicios públicos. No todos ellos modelaron el problema de la misma manera. Algunos consideraron la cantidad de miembros en su familia, otros las opciones y costos de transporte acorde a donde vivían. Con algunos cálculos, criticaron que no era mucho lo que una familia colombiana en realidad puede hacer con ese salario e incluso reconocieron que sus familias tienen ingresos superiores a un salario mínimo. En general, fue un desafío desmantelar las ideas de que quién habla debía saber la respuesta y tener un inglés excelente o de que el maestro es la única autoridad con argumentos correctos para validar la actividad matemática. Poco a poco los estudiantes sintieron que podían traer sus propias ideas al aula y crear estrategias diferentes, como dibujar, contar de diferentes maneras, darse a entender con gestos y usar diferentes variables para hacer modelaje matemático, también reconocieron que puede haber diferentes maneras de modelar un problema.

En grado cuarto, tuvimos un proyecto para predecir cuánta basura producían los estudiantes de cuarto grado en un año. Se tomaron algunas decisiones con respecto a la recopilación de datos, el análisis y las predicciones. Reconocimos que el modelo no iba a ser exactamente lo que podría suceder en la realidad. Los estudiantes decidieron rastrear el fenómeno durante una semana, al principio, habían acordado un mes, pero cuando se le solicitó al personal de aseo no vaciar los contenedores de basura de dichos salones, los estudiantes notaron que el olor era un problema a largo plazo. Un estudiante dijo que nunca se había dado cuenta de la cantidad de basura que producían ya que los botes de basura estaban vacíos todas las mañanas. Al preguntar por soluciones al problema un estudiante describió que comer fruta era una alternativa para dejar de tener mucho plástico a causa del consumo de las papas fritas y de otros paquetes. Esta actividad de modelado fue un desafío porque los estudiantes trabajaban en grupos pequeños y no todos avanzaban a la misma velocidad. Tampoco puedo decir que todos los miembros de todos los grupos estaban participando de manera activa. Guíe el proceso de modelado y fue difícil reflexionar en qué momentos los estudiantes tenían un espacio efectivo para crear sus propias posibilidades bajo mis limitaciones e instrucciones.

Cabe mencionar que debido al foco de resolución de problemas la institución decidió que debía preparar a los estudiantes para las pruebas estandarizadas que se aproximaban y me entregó unas cartillas de trabajo. Así que es bastante contradictorio que terminé haciendo lo que critico; preparar a los estudiantes para maratones sin sentido. Quería solucionar muchos problemas que vi en la instrucción tradicional, pero terminé haciendo muchas de las cosas en las que estaba en contra. Otras soluciones que idealizaba, en realidad seguían atrapadas en un sistema que veo problemático. Un sistema en el cual las identidades continúan siendo estandarizadas de una manera u otra; se puede pensar aquí en la domesticación de la crítica (Pais, Fernandes, Matos y Alves, 2012). Terminé creando una receta curricular para crear estudiantes críticos y eso también es una contradicción ya que se estandariza un modo

de actuar. Una reflexión que quiero compartir con otros educadores comprometidos con la Educación Matemática Crítica es que quizás en el afán de resolver problemas dejamos de cuestionarnos sobre los problemas en sí mismos. En lugar de seguir idealizando la Educación Crítica en Matemáticas como una herramienta para "saber" hacia dónde debemos dirigirnos "con buenas intenciones", deberíamos centrarnos en comprender más la complejidad de los problemas que intentamos resolver y en dejar de idealizar las soluciones, hay que seguir problematizando. Recientemente, la profesora Valero (2018) introdujo la idea de la Política Cultural de la Educación Matemática (como un desplazamiento de la EMC) que se enfoca en investigar situaciones de lucha en su complejidad más que dar por sentado un problema y trabajar con él para su solución o para alcanzar unos objetivos. Esta complejidad relaciona múltiples elementos que están presentes en una red de prácticas que no pueden analizarse de forma aislada pero tampoco en todo su universo (Valero, 2009). La Política Cultural de la Educación Matemática cuestiona el deseo de obtención de más logros matemáticos y la naturalización de las matemáticas como un factor importante en la sociedad, que gobierna las formas de subjetividad. Los estudios sobre las políticas culturales de la educación matemática plantean la cuestión de cuáles son los compromisos éticos y políticos de los educadores matemáticos en dicha racionalidad política y económica. Debemos pensar: "¿en qué direcciones estamos gobernando y siendo gobernados con y a través de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el currículo escolar? Lo que estamos haciendo no es inocente: siempre estamos dirigiendo a las personas, guiándolas hacia una dirección particular, entonces: ¿Cuál es esa?" (Valero, 2018, p. 114, traducción propia).

Discusiones finales

Volviendo al breve texto con el que abrí la introducción, Anzaldúa (2013) nos invita a tener tolerancia a la ambigüedad, a lo que no podemos mantener dentro de límites rígidos, a quienes somos y seremos con nuestra personalidad plural; *alma entre dos mundos, tres, cuatro ... me zumba la cabeza con lo contradictorio*. En esta versión de la reunión latinoamericana de educación matemática discutimos que nos representa el mestizaje y que nuestra identidad está en constante cambio con todas las experiencias que tenemos y construimos como profesores de matemáticas, formadores de profesores y migrantes; somos almas atrapadas en diferentes fronteras, culturas e idiomas, e incluso en una pluralidad de modos de pensar matemáticamente que cruzan fronteras incluso dentro de los regionalismos de nuestras propias naciones; y aunque trabajemos en culturas que parecen homogéneas somos humanos diferentes, eso hay que reconocerlo y preservarlo. Nos cuestionábamos sobre el rol de la educación matemática en diferentes interrogantes: ¿Qué es lo que vamos a hacer ahora para coexistir? ¿Cuáles son esas pinceladas para coexistir y qué una cultura no domine a otra? ¿Qué hacer para que unas subjetividades no primen sobre otras? ¿Cómo vivir con la ambigüedad? Quizás el análisis de algunas de estas preguntas nos conlleve a seguir buscando formas de hacer las matemáticas más democráticas. La resolución de problemas, el modelaje matemático y la amplificación de la argumentación matemática en un sentido colectivo y crítico deben seguir siendo estudiadas y cuestionadas para crear, vivir y preservar escenarios democráticos. A su vez los esfuerzos interdisciplinares y el trabajo colectivo de docentes también son formas de hacer las matemáticas más democráticas en el sentido de resignificar constantemente el propósito del aprendizaje de las matemáticas. Esto debe seguirse haciendo desde la teoría y la práctica, no con el fin de idealizar unas prácticas deseadas en aula sino para comprender a profundidad las luchas y dificultades que afrontamos cuando asumimos perspectivas críticas de la educación matemática. Luchas que no deben ser abordadas únicamente desde el aula de clases ya que esto genera adaptaciones a un sistema educativo que oprime identidades y domestica el sentido crítico como lo mostré en mi autobiografía. Luchas que nos comprometen con el estudio de la Política Cultural de la Educación Matemática para comprender la complejidad de la red de prácticas en la que la educación matemática toma lugar más allá del aula.

Referencias bibliográficas

Adler, J. (2001). *Teaching Mathematics in Multilingual Classrooms*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Anzaldúa, G. (2013). La conciencia de la Mestiza. En M. Adams, W. Blumenfeld, R. Castañeda, H. Hackman, M. Peters, & X. Zuñiga, Readings for Diversity and Social Justice (págs. 94-98). New York: Routledge.

Apple, M., & Beane, J. (2007). Democratic Schools. Portsmouth, NH: Heinemann.

Biesta, G. (2006). Beyond Learning. Boulder: Paradigm Publishers.

Blomhøj, M. (2009). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics-Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical education (pp. 1-17). Monterrey, Mexico: Roskilde University. Retrieved from http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/461.pdf

Ernest, P. (2009). Mathematics Education Ideologies And Globalization. En P. Ernest, B. Greer, & B. Sriraman, Critical Issues in Mathematics Education (págs. 67–110). Charlotte, N.C: Information Age Publishing.

Fernández-Villanueva, M., & Jungbluth, K. (2016). Beyond Language Boundaries : Multimodal Use in Multilingual Contexts. Berlin, Germany: De Gruyter. Retrieved from https://ebookcentral.proquest.com/lib/hogskbergen-ebooks/detail.action?docID=4714792#

Freire, P. (2000). Pedagogy of the Opressed. New York: Continuum Editors.

Horlacher, R. (2014). ¿Qué es Bildung? El Eterno Atractivo de un Concepto Difuso en la Teoría de la Educación Alemana. Revista de Investigación Educacional Latinoamericana, I(51), 35-45. Retrieved from https://www.zora.uzh.ch/id/eprint/101273/

Noddings, N. (2016). Philosophy of Education. Boulder: Westview Press.

Rico, L. (1999). Consideraciones Sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. Funes. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/521/2/RicoL97-2528.PDF

Sánchez, M., & Molina, J. (2012). On the Links between Mathematics Education and Democracy: A Literature Review. Pythagoras, Art. #164. Retrieved from http://www.pythagoras.org.za/index.php/pythagoras/article/view/164

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (págs. 334-370). New York: MacMillan.

Uribe, D. (2012). La Historia de la Democracia. La Historia del Mundo. Con la filosofa e historiadora, Diana Uribe. Cultopedia. Retrieved from https://www.youtube.com/watch?v=ujNTiq6l5N0&t=2s

Valero, P. (2009). Mathematics education as a network of social practices. Proceedings of CERME 6 (págs. LIV-LXXX). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Valero, P. (2017). El Deseo de Accesso y equidad en la educacion matematica . Revista Colombiana de Educacion, 97-126. Obtenido de http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RCE/article/view/6360/5292

Valero, P. (2018). Human capitals: School mathematics and the making of the homus economicus. Journal of Urban Mathematics Education (11(1&2)), 103-117.

Valero, P., & Skovsmose, O. (2012). Educación Matemática Crítica Una Visión Sociopolítica del Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Bogota: Ediciones Uniandes.

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN LAS ESCUELAS NORMALES DE MÉXICO

INITIAL TRAINING OF MATH TEACHERS IN TEACHER TRAINING COLLEGES IN MEXICO

María del Carmen Fajardo Araujo, Ma. Carmen Barrios Cuevas, Alberto Salazar Barrios
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera", Universidad Autónoma de Querétaro.
(México)
fajardomaraujo@gmail.com, barrioseneq@gmail.com, albertocbeneq@gmail.com

Resumen
Las escuelas Normales en México han sido por tradición las encargadas de formar a los profesores que atenderán los niveles preescolar, primaria y secundaria, sin embargo, presentan rezagos en cuanto sus funciones como Institución de Educación Superior pues no se les ha considerado importantes para aportar y generar cambios desde la investigación educativa. Este trabajo mostrará mediante un breve análisis documental elementos que conforman la reciente reforma curricular para la formación inicial del profesor de matemáticas de nivel secundario, apelando al fortalecimiento de las escuelas formadoras de docentes.

Palabras clave: formación inicial, escuelas normales, reforma educativa

Abstract
Teacher training colleges in Mexico have been traditionally in charge of training teachers who will work at kindergarten, elementary school and secondary school; however, they are behind in respect of their role as a Higher Education Institution, as they have not been regarded important in order to contribute, and to generate changes from educational research. Through a brief documentary analysis, this work will show elements that make up the recent curriculum reform for initial training of the secondary school mathematics teacher, seeking for the strengthening of teacher training schools.

Key words: Initial training, teacher training colleges, educational reform

Introducción

La formación de profesores en México tiene sus inicios seguramente antes del año 1822 con la instauración de la Compañía Lancasteriana, pero se reconoce a esta como precursora de la formación inicial, ya que estaba conformada por tres departamentos, el de primaria, el de artes y oficios, así como la educación normal, cuyo objetivo era preparar profesores de las primeras letras con el método lancasteriano, que consistía en tener un monitor que instruía a los menos destacados (Jiménez, 1987). Para el año de 1832, se presenta ante la Cámara de Diputados una propuesta para la instrucción pública donde se crearían una normal para hombres y otra para mujeres que enseñarían lógica, moral y métodos de enseñanza mutua, además de las materias básicas de la enseñanza primaria, sin embargo, no se pudo efectuar tal plan debido al arribo al poder de un grupo conservador. La profesionalización del magisterio era importante, por lo que en 1857 se estipuló que los profesores en servicio debían asistir a la Normal nocturna para recibir cursos de actualización sobre nuevas formas de enseñanza, ello no significaba la instalación de manera formal de una escuela Normal.

Finalmente, después de una serie de acontecimientos políticos y sociales en la vida del país con las ideas juaristas como antecedentes en materia educativa, el gobierno de Porfirio Díaz se instaló y trajo consigo un alto desarrollo económico, por lo que los proyectos de educación se harían posibles. La Ley Federal de Instrucción Pública obligaba a los padres a mandar a sus hijos a la escuela elemental que duraba cuatro años, la enseñanza superior, por su parte, se prolongaba por seis años. Al surgir la Academia Normal en Orizaba en 1887 ya se le consideraba al magisterio como carrera y contaba con 49 cursos para cuatro años. A la par surge en la Ciudad de México la Escuela Nacional de Maestros también con una duración de cuatro años, cuyo currículum incluía asignaturas que fomentarían la conciencia nacional como geografía, historia de México, derecho mexicano, así como dialectos indígenas (Jiménez, 1987).

El año 1984 fue importante en el rumbo de las escuelas Normales pues los estudios fueron decretados al rango de licenciatura, por lo que se requería para el ingreso a cualquier carrera ofertada por la escuela Normal, haber cursado el bachillerato. Los profesores formadores adscritos a las escuelas Normales, además de las actividades de docencia debían realizar tareas de investigación y difusión cultural (Figueroa, 2000). También, debían tener su plan de estudios con un tronco común y área específica con base en la carrera que se eligiera, las Normales entonces se convirtieron en Institución de Educación Superior. Estas son definidas como centros de educación superior que comprenden las escuelas que imparten estudios de licenciatura, especialidad, maestría y doctorado, incluye además recursos humanos, materiales y financieros (Programa Sectorial de Educación 2013-2018, 2013).

El objetivo de este trabajo es mostrar, con base en un somero análisis documental, la nueva organización curricular que se está implementando en las escuelas Normales mexicanas, particularmente se evidenciarán los aspectos, como el enfoque y el modelo de formación inicial de la licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. Conviene aclarar que este documento da cuenta de una fase inicial de una investigación de un alcance mayor.

Marco referencial

Las escuelas Normales en México han sido por tradición las encargadas de formar a los profesores que atenderán los niveles que conforman la educación básica los cuales son preescolar, primaria y secundaria. Las escuelas Normales son definidas como instituciones que preparan a los educandos para que ejerzan la docencia en la educación básica (compuesta por los niveles preescolar, primaria y secundaria) del Sistema Educativo Nacional mexicano (Secretaría de Educación Pública SEP, 2013). En México hay 446 Normales, 263 de sostenimiento público y 183 de sostenimiento privado (SEP, 2017ª, p. 72). Se ofrecen siete programas de licenciatura para la formación de profesores, licenciatura en educación preescolar, licenciatura en educación preescolar intercultural

bilingüe, licenciatura en educación primaria, licenciatura en educación primaria intercultural bilingüe, licenciatura en educación secundaria con diez especialidades (biología, física, formación cívica y ética, español, geografía, historia, lengua extranjera inglés, matemáticas, química y telesecundaria), licenciatura en educación especial con cinco áreas de atención (auditiva y de lenguaje, atención intelectual, atención motriz, atención visual, integral), licenciatura en educación física (SEP, 2017a).

Las escuelas Normales presentan rezagos en cuanto sus funciones como Institución de Educación Superior, sólo un 4% de los 15 373 docentes adscritos a las Normales mexicanas cuentan con doctorado y el 35% es de tiempo completo. De acuerdo con Navarrete-Cázales (2015) a las escuelas Normales no se les ha considerado como núcleos importantes que propicien cambios desde la investigación educativa, a pesar de contar con 163 Cuerpos Académicos reconocidos por el Programa para el Desarrollo Profesional de tipo Superior (PRODEP) y distribuidos en 21 entidades federativas. Aunado a lo anterior destaca la poca correspondencia entre las prácticas pedagógicas llevadas a cabo en la formación inicial y las que se ejercen en la actividad profesional (Figueroa, 2000), es decir la disparidad entre las demandas de la educación básica, en cuanto a las reformas educativas y los enfoques obsoletos que las Normales proponen para la formación inicial. Se esperaría que, debido a su historia como formadoras de profesores de nivel básico, tuvieran un avance paralelo a las demandas de las reformas educativas de dicho nivel. La tabla 1 da cuenta de los años en que se han realizados reformas a los planes y programas de educación básica, específicamente en educación secundaria, comparados con los de las escuelas Normales en la licenciatura en educación secundaria.

Tabla 1. Años de reformas curriculares a la educación básica y Normal en México.

Nivel Educativo	Año de reforma educativa
Educación secundaria	1975, 1993, 2006, 2011, 2016, 2018
Educación superior (Escuela Normal)	1936, 1945, 1959, 1983, 1999, 2018

Elaboración propia.

El surgimiento del Sindicado Nacional de Trabajadores de la Educación (SNTE) en el año de 1943, como un grupo organizado de profesores de educación básica que pugnaba por mejorar sus condiciones laborales y acabar con las persecuciones de las que eran objeto, llevaría a cabo un papel fundamental en la propuesta de programas de desarrollo para la transformación de las escuelas Normales. El diagnóstico realizado por la fundación SNTE a las escuelas Normales siete años después de haber sido elevadas al grado de licenciatura, permitió reflexionar sobre la falta de discusión con instituciones nacionales y extranjeras, el deficiente desarrollo académico de su planta docente lo cual impedía efectuar tareas de investigación y difusión. Una de las labores para realizar cambios en las escuelas Normales fue la creación en el año de 1996 del Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académico de las Escuelas Normales (PTFAEN), cuyas líneas de acción eran:

1. La Transformación de los planes y programas de estudio
2. La formación y actualización del personal docente
3. El mejoramiento de la gestión institucional
4. La regulación del trabajo académico de los maestros de las escuelas Normales
5. El mejoramiento físico y del equipamiento de las escuelas Normales

Los resultados del programa fueron, entre los más importantes, las reformas a los planes y programas de estudio de las licenciaturas en prescolar, primaria y secundaria, cuya enseñanza de contenidos disciplinares estaba relacionada con el nivel que atenderían (Gutiérrez, 2006). El *Plan de Estudios 1999*, derivado del PTFAEN, centraba el interés

en la práctica docente, reducía los contenidos teóricos y de investigación, dicho plan todavía lo cursan dos generaciones (2016-2020 y 2017-2021) de alumnos normalistas. Paralelamente hay dos generaciones (2018-2022 y 2019-2023) que llevan el Plan 2018.

Ante los cambios llevados a cabo en los planes y programas de educación básica, se hizo necesaria la reflexión sobre el rumbo de las escuelas Normales, por ello desde el año 2014 se realizaron en todo el país foros de consulta de la situación actual y futura de las escuelas Normales (SEP, 2017a). La Estrategia para el fortalecimiento y transformación de las escuelas Normales pretende garantizar que estas continúen siendo el pilar de la formación de maestros de México en congruencia con los retos educativos del siglo XXI (SEP, 2017b), se tomaron en cuenta seis ejes derivados de encuentros entre diversos actores involucrados en la formación normalista. Se enunciarán los ejes, seguidamente se hará una breve descripción de ellos, dando mayor importancia al de "transformación pedagógica" puesto que es donde se enuncian los cambios a los planes y programas de la formación inicial de los profesores de matemáticas. Los seis ejes son,

a) La transformación pedagógica articulada con el currículo de educación básica
b) La educación indígena e intercultural
c) El aprendizaje del inglés
d) La profesionalización de planta docente de las escuelas Normales
e) Las sinergias con universidades y centros de investigación
f) El apoyo a las escuelas Normales con estímulos para la excelencia

El eje de *transformación pedagógica* tiene un enfoque basado en el desarrollo de competencias y el centrado en el aprendizaje, de manera que los planes de estudio permitan la flexibilidad en el currículo incluyendo cursos optativos que atiendan las necesidades específicas del estudiantado normalista. Se enfatiza el conocimiento profundo de la disciplina, su pedagogía y su didáctica, además se fortalecen las prácticas profesionales y el desarrollo de habilidades investigativas durante toda la formación. Una vez establecida la orientación que tendría el nuevo plan de estudios se definió *el perfil de egreso* compuesto por competencias genéricas, profesionales, disciplinares y específicas, estas se enuncian más adelante.

Las mallas curriculares se conforman por cuatro trayectos formativos, definidos como espacios integrados por componentes disciplinarios, que aportan sus teorías, métodos, conceptos, procedimientos y técnicas sobre un propósito definido que contribuya a la preparación profesional de los estudiantes (SEP, 2017a) cuyo punto de referencia correspondió a los contenidos de educación básica. Se conformó un plan curricular mixto (Díaz-Barriga, Lule, Pacheco, Saad y Rojas-Drummond,1990) que permitirá que el alumno normalista se especialice en la disciplina matemática. Cuenta con doce cursos correspondientes al trayecto formativo de bases teórico-metodológicas para la enseñanza, veintidós de la formación para la enseñanza y el aprendizaje, ocho de la práctica profesional, seis de inglés y cinco del trayecto de optativos.

Los trayectos formativos se enuncian brevemente, *bases teórico-metodológicas para la enseñanza,* cuya función es ofrecer los fundamentos en los que se sustenta el desarrollo del niño y adolescente, además de referentes básicos relacionados con los métodos o estrategias que sustentan la planeación y evaluación de los aprendizajes. *Práctica profesional,* fortalece el desempeño profesional del futuro docente con un acercamiento gradual y secuencial a la práctica docente, el trayecto tiene tres principios, la gradualidad caracterizada por la amplitud y complejidad con la que se entiende la docencia con relación al aprendizaje de los alumnos. La secuencialidad refiere a la articulación entre cada curso para el desarrollo de competencias que promueven los aprendizajes. La profundidad para lograr meta habilidades lo cual permitirá niveles elevados de comprensión, explicación y argumentación de las intervenciones en el aula. *Formación para la enseñanza y el aprendizaje,* comprende el saber disciplinario más avanzado del que se enseñará, su pedagogía y su didáctica, este trayecto formativo incluye dos líneas, la disciplinar con su didáctica, así como la disciplinar y su relación con otras áreas del conocimiento. *Optativos,* espacios para profundizar en diversos enfoques o en alguno en particular, de manera que se atiendan las necesidades de formación,

problemáticas y/o contextuales de los alumnos normalistas, se inicia su estudio en segundo semestre y culmina en sexto. El trayecto optativo propiciará identidad institucional que contribuirá a la creación de líneas de generación y aplicación del conocimiento. Las opciones para este trayecto se muestran en el
Gráfico *1*,

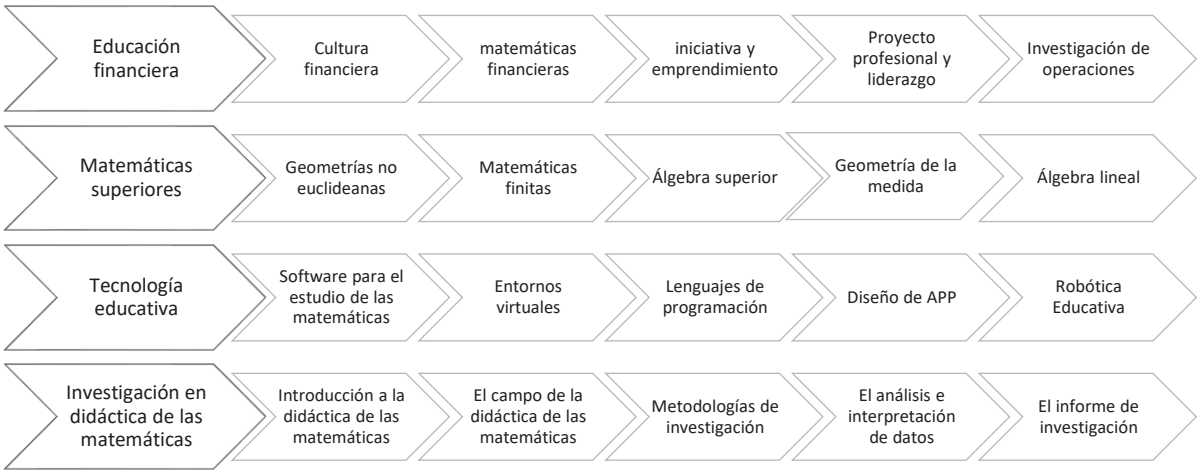


Gráfico 1 Opciones del trayecto Optativo de la formación inicial de profesores de matemáticas. Tomado de SEP, 2017b, p. 72.

Ahora bien, como el enfoque del Plan de Estudios 2018 es por competencias y se debe reconocer el carácter holista e integrado cuyos componentes son los conocimientos explícitos, tácitos, actitudes, valores y emociones en contextos concretos tomando en consideración las particularidades históricas y culturales. Las competencias que integran el Plan de Estudios 2018 son de tres tipos, las genéricas que atienden el tipo de conocimientos, disposiciones y actitudes que los egresados de nivel superior debieran desarrollar a lo largo de su vida y son de carácter transversal. Las competencias profesionales conforman conocimientos, habilidades, actitudes, así como los valores necesarios para profesar la docencia en cualquier nivel educativo. Finalmente, las competencias disciplinarias aluden a los conocimientos académicos que requiere un docente para trabajar los contenidos del currículum del nivel educativo en el que se insertará a la laborar.

Las competencias de la Licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de educación secundaria se puntualizan en seguida,

Competencias genéricas

- Soluciona problemas y toma decisiones utilizando su pensamiento crítico y creativo.
- Aprende de manera autónoma y muestra iniciativa para autorregularse y fortalecer su desarrollo personal.
- Colabora con diversos actores para generar proyectos innovadores de impacto social y educativo.
- Utiliza las tecnologías de la información y la comunicación de manera crítica.
- Aplica sus habilidades lingüísticas y comunicativas en diversos contextos.

Competencias profesionales

- Utiliza conocimientos de las Matemáticas y su didáctica para hacer transposiciones de acuerdo con las características y contextos de los estudiantes a fin de abordar los contenidos curriculares de los planes y programas de estudio vigentes.
- Diseña los procesos de enseñanza y aprendizaje de acuerdo con los enfoques vigentes de las Matemáticas, considerando el contexto y las características de los estudiantes para lograr aprendizajes significativos.
- Evalúa los procesos de enseñanza y aprendizaje desde un enfoque formativo para analizar su práctica profesional.
- Gestiona ambientes de aprendizaje colaborativos e inclusivos para propiciar el desarrollo integral de los estudiantes.
- Utiliza la innovación como parte de su práctica docente para el desarrollo de competencias de los estudiantes.

Competencias disciplinares

- Construye argumentos para diseñar y validar conjeturas en todas las áreas de las matemáticas en diferentes situaciones.
- Articula las distintas ramas de las Matemáticas incorporando otras disciplinas para facilitar el análisis de una situación modelada.
- Utiliza la abstracción algebraica con las particularidades de la aritmética para relacionar el lenguaje cotidiano con el lenguaje algebraico.
- Demuestra con argumentos coherentes las propiedades geométricas de figuras planas y sólidos en la construcción del pensamiento geométrico.
- Establece las relaciones funcionales algebraicas y trascendentes entre variables para modelar y resolver problemas que impliquen máximos y mínimos.

El segundo eje la estrategia de fortalecimiento a las escuelas Normales es el de *educación indígena e intercultural,* 23 de las 240 escuelas Normales en México cuentan con programas de formación intercultural y bilingüe. El cambio a la formación inicial adopta una perspectiva equitativa, inclusiva en intercultural, donde el docente de educación indígena domine la lengua originaria y le permita atender la diversidad sociocultural de la educación básica. También se sugiere desarrollar la investigación en los contextos que por diversas razones han sido invisibilizados.

El *aprendizaje del inglés*, es otro de los ejes y se sustenta en los retos que exige el mundo globalizado a los profesionales, es de especial interés que los futuros profesores adquieran habilidades de dicha lengua para que incorporen recursos y herramientas en su proceso de enseñanza aprendizaje.

La *profesionalización de la planta docente*, implica que los formadores de las escuelas Normales desarrollen no sólo labores docentes, sino de investigación, trabajo colegiado, tutorías, asesorías académicas gestión de recursos, así como difusión cultural. En este eje ser fortalecerán los mecanismos de ingreso y promoción del personal de manera que los perfiles profesionales de los docentes normalistas se ajusten a los de las otras Instituciones de Educación Superior. La formación continua y desarrollo profesional refiere a la diversidad de cursos, talleres, diplomados y posgrados para los formadores de formadores, de manera que les permitan formar cuerpos académicos para establecer redes de colaboración con otras instituciones de educación superior, realizar investigación aplicada y dialogar con instituciones no sólo nacionales, sino internacionales.

Debido a que las Normales son consideradas como Instituciones de Educación Superior, eso les da la posibilidad de establecer vínculos con otras instituciones para el desarrollo de proyectos comunes. Se promoverá la movilidad académica, no sólo de estudiantes normalistas, sino también de los docentes permitiendo conocer otros contextos y

formas de aprendizaje que abran espacios para la investigación, actualmente se están poniendo a prueba programas de movilidad que fortalezcan el eje *Sinergias con universidades y centros de investigación.*

Reestructurar la infraestructura de las escuelas Normales y promover los incentivos para la mejora permanente de las mismas son estrategias del eje *Apoyo a las escuelas normales y estímulos de excelencia.* El Plan de Apoyo a la Calidad Educativa y a la Transformación de las Escuelas Normales PACTEN, se enfoca principalmente al desarrollo académico y de gestión que incluye la consolidación de cuerpos académicos, certificación y uso de las TIC, la segunda lengua, evaluación de los planes y programas de estudio, mejorar la infraestructura física, programas de tutoría.

Metodología

La metodología que se usó en este trabajo fue un análisis documental, ya que se revisaron algunos artículos como (Arteaga y Camargo, 2009), (Chapa y Flores, 2015), (Del Cid y Vera, 2019), (Figueroa, 2000), (Instituto de Estudios Educativos y Sindicales de América IEESA, 2015), (López, 2016), (Medrano, Ángeles y Morales, 2015), (Navarrete, 2015), (Ramírez-Rosales, 2010), (Vera, 2011) , que reportan las problemáticas de las escuelas Normales, el Plan de Estudios 1999, los planes y programas de educación básica 2017, así como la nueva malla curricular 2018. Se centró la atención en detectar el enfoque de cada plan de estudios de la escuela Normal para la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas (Plan de estudios 1999) y la licenciatura en enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria (Plan de estudios 2018), el número de cursos ofertados para la especialidad de matemáticas, en cuanto a lo disciplinar, las reformas realizadas a la educación básica y Normal que se mostraron en la tabla 1, el perfil de egreso de la formación inicial.

Tabla 2 Rasgos valorados en las dos últimas reformas curriculares a la formación inicial de profesores de matemáticas.

Plan de Estudios1999		Plan de Estudios 2018
Enfoque	Competencias	Competencias y centrado en el aprendizaje
Cursos ofertados	Formación general: 8 Formación común: 15 Formación específica disciplinar y didáctica: 14 disciplinar, 4 de práctica docente, 4 talleres y práctica docente intensiva	Trayectos formativos Bases teórico-metodológicas para la enseñanza:12 Formación para la enseñanza y el aprendizaje: 22 Práctica profesional: 8 Optativo: 5 Inglés: 6
Número de créditos	392	284.95
Organización estructural del programa	Bloques con contenidos (máximo 5 bloques)	Unidades de aprendizaje (máximo 3 unidades)
Perfil de egreso	Competencias en campos de formación: a) habilidades intelectuales específicas,	Competencias genéricas, profesionales y disciplinares específicas

	b) dominio de los propósitos y contenidos de la educación secundaria, c) competencias didácticas, d)identidad profesional y ética, e) capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela	

Elaboración propia.

Implicaciones

Dentro de las adecuaciones positivas que se plantean en el nuevo programa de estudios 2018 a la formación inicial están la reducción de los contenidos en los bloques temáticos, ahora se les denomina unidades de aprendizaje cuyas características son que están organizadas en temas que tienden a desarrollar tanto las competencias disciplinares como las profesionales y genéricas. En las unidades de aprendizaje el profesor tiene la decisión de incorporar temas que complementen a los propuestos con la finalidad de alcanzar las competencias estipuladas. Debido al carácter holista del plan se fomenta el trabajo colegiado de manera que las evidencias de los aprendizajes pueden estar dadas como productos que incorporen todas las materias de un curso, o bien una mayoría, se promueve la hetero, co y autoevaluación de forma gradual, el uso de las TIC, el portafolio electrónico, entre otros.

Comentarios finales

Con la Estrategia de fortalecimiento y transformación para las escuelas Normales se auguran cambios significativos en la formación inicial del profesor de matemáticas. La escuela Normal a la que los autores están adscritos optó por el campo formativo “Investigación en didáctica de las matemáticas”, por ello se está poniendo especial atención en indagar en una investigación en desarrollo ¿Qué didáctica necesitan los profesores de matemáticas de educación secundaria? ¿Cómo contribuyen los cursos de didáctica de las matemáticas en la formación inicial de los alumnos de la escuela Normal? ¿Cuáles son los resultados o productos (participaciones en eventos académicos locales, nacionales e internacionales, actas en congreso, artículos, etc.) del trayecto formativo opcional “investigación en didáctica de las matemáticas? ¿En qué aspectos de los cursos disciplinares hay áreas de oportunidad y cómo combatirlas? ¿Cuáles son verdaderamente las competencias que están adquiriendo los futuros docentes de matemáticas? ¿Cómo se corresponde formación inicial con la realidad profesional?

Convendría también fijar la atención en el resto de los ejes propuestos en la estrategia de transformación en las escuelas Normales, por ejemplo, revisar cómo avanzó la conformación de los cuerpos académicos con base en el incremento de los docentes de tiempo completo, cómo se fortaleció la formación continua con el estudio de posgrados, dónde se han difundido los resultados de las investigaciones, con qué universidades se han realizado convenios, etc.

Referencias bibliográficas

Arteaga, B., & Camargo, S. (2009). El surgimiento de la formación de docentes en México como profesión de Estado: Enrique C. Rébsamen y la creación de las primeras escuelas Normales. *Integra Educativa, II*(3), 121-133. Obtenido de https://integraeducativa.jimdo.com

Chapa, M., & Flores, M. (2015). La formación inicial de los profesores en las Escuelas Normales. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH, 6*(10), 28-35. Obtenido de https://www.rediech.org

Del Cid, C., & Vera, J. (2019). Evaluación de la funcionalidad de las escuelas normales desde la perspectiva docente. *Cpu-e Revista de Investigación Educativa*(28), 78-104. doi: https://doi.org/10.25009/cpue.v0i28.26000

Díaz-Barriga, F., Lule, M. d., Pacheco, D., Elisa, S., & Silvia, R.-D. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior.* México: Trillas.

Figueroa, L. (2000). La formación de docentes en las escuelas normales: entre las exigencias de la modernidad y las influencias de la tradición. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XXX*(1), 117-142.

Gutierrez, C. (2006). El mejoramiento institucional de las escuelas normales en el gobierno del cambio. *Reencuentro. Análisis de Problemas Universitarios*(45), 1-17.

IEESA, I. d. (2015). *Sindicato Nacional de Trabajadores de la Educación.* Obtenido de https://www.snte.org.mx

Jiménez, C. (1987). *La escuela Nacional de maestros sus orígenes.* México: SEP.

Medrano, V., Ángeles, E., & Morales, M. (2017). *La educación en México. Elementos para su análisis.* Obtenido de Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación : www.inee.edu.mx

Navarrete-Cázales, Z. (2015). Formación de profesores en las Escuelas Normales de México. Siglo XX. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana, 17*(25), 17-34.

Ramírez-Rosales, V. (2010). El normalismo: proyectos, procesos institucionales y actores. *Revista Iberoamericana de Educación Superior, I*(2), 98-113. doi:https://doi.org/10.22201/iisue.20072872e.2010.2.7

Secretaría de Educación Pública, SEP. (1999). *Secretaría de Educación Pública*. Obtenido de https://www.dgespe.sep.gob.mx

Secretaría de Educación Pública, SEP. (2013). *Programa Sectorial de Educación 2013-2018.* México: Progreso.

Secretaría de Educación Pública, SEP. (2017a). *Modelo Educativo. Escuelas Normales. Estrategia de fortalecimiento y transformación.* México: SEP.

Secretaría de Educación Pública, SEP. (2017b). *Orientaciones curriculares para la formación inicial.* México : SEP.

Vera, J. Á. (2011). Reconfiguración de la profesión académica en las escuelas normales. *Reencuentro. Análisis de problemas universitarios*(62), 82-87. Obtenido de https://reencuentro.xoc.uam.mx

REPERCUSSÕES DO CONHECIMENTO DIDÁTICO MATEMÁTICO DE UM PROFESSOR QUE VIVENCIOU PRÁTICAS DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL

REPERCUSSION OF THE DIDACTIC MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF A TEACHER WHO EXPERIENCED PRACTICES OF INITIATION TO TEACHING IN HIS INITIAL TRAINING

José Fernandes da Silva; Ana Lúcia Manrique
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. (Brasil)
jose.fernandes@ifmg.edu.br, analuciamanrique@gmail.com

Resumo
Esta investigação qualitativa tem como objetivo explicitar repercussões, no âmbito de um grupo colaborativo, do conhecimento didático matemático de um professor que vivenciou práticas de iniciação à docência na formação inicial. Tal grupo teve o objetivo de discutir aspectos de planejamento, execução e avaliação de aulas de diferentes conteúdos matemáticos. As análises dos dados basearam-se na abordagem do Conhecimento Didático Matemático do professor, oriundas do Enfoque Ontossemiótico do conhecimento e da instrução Matemática. Conclui-se que as práticas de iniciação à docência substanciaram uma melhor formação do professor de Matemática, em especial, sobre a faceta ecológica que consiste na tomada de consciência da importância do diálogo entre o currículo e os contextos sociais, culturais e econômicos.

Palavras-chave: formação de professores, conhecimento didático matemático do professor

Abstract
This qualitative investigation aims to describe the repercussions, within a collaborative group, of the mathematical didactic knowledge of a teacher who experienced practices of initiation to teaching in his initial training. Such group had the objective to discuss aspects regarding planning, implementation and evaluation of classes with different mathematical contents. Data analysis was based on the approach to the teacher's Mathematical Didactic Knowledge, derived from the Onto-semiotic Approach to Mathematical Cognition and Instruction. It showed that the practices of initiation to teaching substantiate a better training of the Mathematics teacher; in particular, on the ecological aspect, which consists in gaining awareness as to the importance of the exchange between the curriculum and the social, cultural and economic context

Key words: Teacher training, teacher's mathematical didactic knowledge

Introdução

As discussões sobre a formação de professores, em especial a formação dos professores de Matemática, se fazem presentes em diferentes meios: acadêmico, social e político. Este artigo tem como objetivo compartilhar resultados de uma investigação realizada com um professor egresso da Licenciatura em Matemática, de uma instituição pública brasileira, que foi participante do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID, uma política pública do Ministério da Educação do Brasil que visa ofertar bolsas a futuros professores que realizam atividades de docência e apoio nas escolas de Educação Básica.

Para subsidiar a investigação, estabeleceu-se a seguinte questão norteadora: Como o professor, egresso do PIBID, articula a abordagem dos conteúdos matemáticos ao contexto das escolas onde atua?

A justificativa para a realização da pesquisa se apoiou na necessidade de investigar os conhecimentos dos professores de Matemática que participaram do PIBID, ao longo das suas formações acadêmicas. Após mais de uma década de existência desta política, presente no âmbito dos cursos de formação de professores, é salutar que esta tenha significativos reflexos na prática profissional dos egressos. Tal justificativa está respaldada no estudo denominado *Professores do Brasil: novos cenários,* apoiado pela Fundação Carlos Chagas, um dos principais centros de pesquisa educacional do Brasil e que abriga a Cátedra UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura) sobre Profissionalização Docente. Este estudo mostra que na última década observou-se um aumento importante das produções a respeito de práticas e metodologias no âmbito da formação dos professores, tendo como elemento potencializador o PIBID que culminou na revitalização das licenciaturas promovendo importantes práticas em parceria com a Educação Básica (Gatti, Barreto, André e Almeida, 2019).

Marco teórico

A sustentação teórica para esta investigação é a abordagem do Conhecimento Didático Matemático – CDM, proposta por Godino (2009), Pino-Fan, Godino, Font (2013), Pino-Fan e Godino (2015), Silva, Pietropaolo, Font (2017) no âmbito do Enfoque Ontossemiótico (EOS) proposto por Godino, Batanero e Font (2007).

Existem diferentes discussões que buscam explicitar os conhecimentos do professor, em especial, o professor de Matemática. Neste sentido, uma questão emblemática no campo da Educação Matemática é "*Quais conhecimentos são essenciais para o Professor de Matemática exercer bem sua função na docência?*". Para Godino (2009), não existe um consenso na literatura disponível para apontar os conhecimentos que os professores mobilizam durante o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Levando em consideração esta complexidade, Godino (2009) aponta:

> Seria útil dispor de modelos que permitam uma análise mais detalhada de cada um dos tipos de conhecimentos que se põem em jogo num ensino efetivo (proficiente, eficaz, idôneo) da Matemática. Ele permitiria orientar o desenho de ações formativas e a elaboração de instrumentos de avaliação dos conhecimentos do professor. (Godino, 2009, p. 19).

Reportando às contribuições da Psicologia, da Matemática, da Epistemologia, da Pedagogia, da Sociologia, da Semiótica e outras áreas envolvidas na Didática da Matemática, Godino (2009) defende que o uso do termo *"conhecimento didático-matemático do professor - CDM"* é mais adequado para se referir à complexidade de conhecimentos profissionais do professor que ensina Matemática. O citado contexto teórico destaca seis dimensões que são chamadas de facetas, as quais caracterizam o conhecimento didático matemático do professor. Em continuação, de acordo com o exposto acima, apresenta-se uma abordagem mais detalhada de cada faceta de acordo com Godino (2009).

- *Epistêmica:* Está relacionada ao conhecimento direto da Matemática, ou seja, o professor necessita fazer uso deste conhecimento de modo a buscar diferentes soluções para resolver o mesmo problema de modo a desenvolver a compreensão dos estudantes que não tiveram êxito da resolução de uma tarefa proposta;
- *Cognitiva*: Esta faceta possibilita que os professores tenham conhecimentos que lhes permitam conhecer melhor seus alunos. Com este conhecimento prévio o professor pode realizar um melhor planejamento de suas aulas, antecipando possíveis erros e dificuldades;
- *Afetiva:* É a faceta que permite aos professores lidar com a parte afetiva, que está compreendida por elementos relacionados às atitudes, emoções, crenças e valores dos alunos no ambiente de estudos da Matemática. Neste sentido, o professor necessita conhecer e perceber o estado de ânimo de seus alunos para enfrentar os problemas matemáticos propostos;
- *Mediacional:* Refere-se aos conhecimentos do professor relacionados à capacidade de articular materiais e tecnologias para o ensino. Além disso, o professor necessita ter condições de delimitar tempo para as ações no âmbito do processo de ensinar um conteúdo;
- *Interacional:* trata-se da capacidade de o professor compreender, prever, implementar e avaliar as interações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem. Neste processo, as relações se estabelecem em contexto: entre professores e alunos, entre os alunos, entre alunos e os recursos estabelecidos e entre os professores e os recursos e os alunos; e
- *Ecológica:* o professor que dispõe de conhecimentos no âmbito desta faceta é capaz de perceber o currículo como uma janela que estabelece enlaces com o entorno social, político e econômico. Assim, conhecer o currículo e sua complexidade é fundamental para articular as propostas advindas dos sistemas educativos aos conteúdos numa perspectiva práxica. Para tal, decorre a importância da abertura à inovação didática através das diferentes tecnologias e recursos disponíveis que podem subsidiar a prática educativa reflexiva, na qual todos os atores envolvidos possuem papel de destaque. No âmbito desta faceta o currículo, em conexões intra e interdisciplinares, necessita contribuir com a formação socioprofissional dos alunos, valores democráticos e pensamento crítico.

Mediante o exposto, os processos de planejar, executar e avaliar o ensino e a aprendizagem da Matemática necessitam ser vistos como complexos e sistêmicos, pois envolvem aspectos desde o ponto de vista da qualidade do conteúdo até o contexto educacional (Pino-Fan; Godino; Font, 2013, Pino-Fan e Godino, 2015 e Silva; Pietropaolo; Font 2017).

Método

É uma investigação qualitativa (Garnica, 2004). Participaram, de um grupo colaborativo, cinco professores que lecionam em diferentes anos da Educação Básica, sendo estes egressos do PIBID. Ao que tange às características de um grupo colaborativo, Fiorentini (2004) destaca que a participação é voluntária e tem como meta o desenvolvimento profissional e o compartilhamento de experiências e práticas. Além disso, os contextos colaborativos são fundamentais para a ampliação do conhecimento docente (Palanch, Manrique, 2016).

As atividades do grupo colaborativo consistiram no ato de planejar (em grupo), executar (nas escolas onde atuavam) e avaliar (em grupo) propostas de aulas em uma reunião semanal com duração de duas horas.

No que concerne à dinâmica do grupo colaborativo, este previa encontros semanais – todos em vídeos gravados - ao longo do segundo semestre de 2018, sendo estes voltados para ao diálogo e a comunicação entre os professores participantes visando o conhecimento mútuo, as reflexões sobre experiências, trajetórias acadêmicas e profissionais e o papel do PIBID em suas formações.

Não foi objetivo dos pesquisadores impor temáticas de conteúdo, pois os participantes já estavam numa rotina de trabalho em suas instituições. O plano de aula apresentado por cada professor foi debatido pelos pares, visando possíveis sugestões para contribuir com a qualidade da aula a ser desenvolvida. Após cada reunião, os pesquisadores assistiam a aula do professor na escola onde ele atuava, sendo esta filmada e, posteriormente, refletida no âmbito do grupo.

Com o objetivo de conhecer o histórico de formação e o perfil dos participantes foi realizada a aplicação de um questionário com o intuito de registrar informações mais específicas quanto à formação inicial destes professores. Foram indagados sobre participações em eventos acadêmicos, iniciação à pesquisa, extensão, grupos de estudos, entre outros. Utilizou-se o recurso do *Google forms*, usando o laboratório de informática da instituição formadora. Embora tenham participado cinco professores do grupo colaborativo (denominados nesta pesquisa por professor A, B, C, D e E), serão apresentados e discutidos dados nos quais o professor E é o protagonista.

A tabela 1 explicita o perfil do professor E:

Tabela 1: Perfil do Professor E

Nível e modalidade em que leciona	Localidade	Ano de Formação	Tempo de Participação no PIBID	Idade	Tema de reflexão e aula
9º ano do Ensino Fundamental II e 1º,2º,3º anos do Ensino Médio	*Rural*	2014	3,5 anos	27 anos	Introdução ao conceito de função

Fonte: Elaboração própria

As análises foram restritas ao que concerne à faceta ecológica, porém, tal fato não exclui a possibilidade de que elementos das outras facetas se façam presentes, pois as fronteiras entre estas são tênues.
Ao considerar, em nossa análise, aspectos ecológicos do CDM, buscamos elencar categorias que relacionam as atividades desenvolvidas no grupo colaborativo e a capacidade do professor perceber o currículo e suas articulações com o entorno social, político e econômico. As quatro categorias foram propostas no sentido de contribuir para a interpretação dos resultados apresentados e são elas: a importância das práticas de iniciação à docência vivenciadas; o planejamento de aula; o espaço de execução da aula e a reflexão sobre esta.

Resultados e Análises

Em relação às práticas de iniciação à docência vivenciadas

O Professor E ao ser questionado sobre as práticas vivenciadas ao longo de sua formação inicial, fomentadas pelo PIBID, enumera que, tanto a participação, quanto a organização de atividades de extensão foram fundamentais para o enriquecimento do percurso. Segundo este professor, os bolsistas participavam e promoviam diferentes cursos de capacitação:

> ***Professor E**: Organização de Feiras de Matemática, café filosófico, minicursos e oficinas diversas. Participação curso de LIBRAS, Sistema Braille, artesanato em origami, xadrez, técnicas de demonstração Matemática, tecnologias e comunicação e a prática docente, programa ciência em movimento promovido pela Fundação Ezequiel Dias, curso pró-técnico, qualificação em Linux Educacional.*

No que concerne às práticas de pesquisa, o professor E destaca a construção de artigos para apresentar em congressos, os quais, segundo ele, envolviam as temáticas: Origami no processo de ensino e aprendizagem de Geometria Euclidiana, a Teoria de Van Hiele, Números Inteiros e o cotidiano dos alunos, e a Leitura e Escrita em Matemática.

> ***Professor E**: Escrever e apresentar uma pesquisa desenvolvida por você é algo indescritível, pois você se faz presente na pesquisa da elaboração à coleta de dados. E para a prática profissional a escrita é essencial na formação de um professor pesquisador, pois instiga a pesquisar e escrever em prol de uma educação de qualidade.*

Quando questionado sobre o fomento à participação em eventos, o Professor E relatou que o PIBID buscava possibilitar a participação dos futuros professores em diferentes eventos, tanto locais e regionais, quanto nacionais. Na sua percepção, a participação em eventos acadêmicos é fundamental.

> ***Professor E**: Os momentos de interação com outras instituições em eventos tornaram-se importantíssimos na formação docente, pois contribuíram na troca de saberes e no reconhecimento da docência. Possibilitaram, ainda, refletir sobre os desafios encontrados no âmbito da educação e buscar alternativas que podem ser usadas para uma educação de qualidade.*

Diante do exposto, evidencia-se, nesta unidade de análise, que o futuro professor atribuiu ao PIBID uma importância significativa para o processo de formação inicial. Assim, infere-se que o contexto ecológico de sua formação inicial foi ao encontro das reflexões de Godino (2009) as quais apontam que o professor faz parte de uma comunidade de estudo e investigação que compartilham conhecimentos sobre práticas Matemáticas e didáticas adequadas que devem ser conhecidas e aplicadas.

Em relação ao planejamento de aula

Após o levantamento sobre as incidências das práticas de iniciação à docência à formação profissional, os professores foram convidados a apresentar planejamentos de aulas. O professor E levou para o grupo uma proposta de aula baseada no conteúdo de funções, especificamente, a introdução às noções de função. Assim ele relata:

> Professor E*: Bem, a ideia era eu começar a Função afim com eles, porém estivemos envolvidos com o Setembro Amarelo (mês dedicado à prevenção do suicídio), por isso não tivemos tempo para aprofundar nos conteúdos. Então, estamos bem no início do conceito de função.*

Nesse sentido, o professor E demonstrou uma preocupação com o contexto onde ele trabalha, ao citar o *Setembro Amarelo* ele relatou:

> Professor E: *Esta semana é semana que vamos trabalhar com o Setembro Amarelo, pois, infelizmente, tivemos um caso de suicídio na nossa escola, recentemente. Em Julho, deste ano, um aluno de 13 anos (suicidou-se) e temos alguns alunos passando certas dificuldades. Existem coisas que eles não encontram na família mas encontram na escola e, às vezes, a gente não vai conversar só sobre Matemática com o aluno, vamos conversar como amigos.*

Especificamente, sobre o plano de aula, o professor foi convidado a apresentá-lo para os colegas. Ao iniciar sua explanação ele explica:

> Professor E: *eu fiz uma tarefa[...] para tentar mostrar um pouco a realidade deles mostrando de onde vem o etanol, que vem da cana-de-açúcar, e que o Brasil é um dos maiores produtores do álcool,*

justamente, por causa da cana-de-açúcar. Eu vou ver se consigo, ao decorrer da atividade, que eles questionem mais sobre as condições de biocombustíveis, ver com eles quais seriam as finalidades de utilizar mais biocombustíveis, verificar se eles têm essa consciência sobre poluição. Aí no finalzinho tem assim: por causa das pesquisas (que investem) na produção (de etanol), atualmente, o Brasil produz cerca de 80 litros de etanol por tonelada de cana-de-açúcar, então eles (os alunos) vão entender todo o contexto que seria o do biocombustível. No final, vou focar na Matemática que seria 80 litros de etanol por Tonelada, que seria a função de uma grandeza.

Embora o professor E tenha dito uma "*função de uma grandeza*" na fala anterior, no excerto que se segue ele menciona o conceito de função a uma relação entre duas grandezas, ou seja, a produção de álcool e cana de açúcar. Ao discorrer sobre os principais objetivos de sua aula, o professor afirmou:

Professor E: *Então, de acordo com o texto, depois temos outros questionamentos, sobre, por exemplo, escrever a função que tenha a ver com a ligação entre álcool e a cana-de-açúcar, depois outras questões como qual seria a variável dependente e independente. Com os dados obtidos na aula eles vão construir um gráfico pois eu estou levando um papel quadriculado para que eles possam fazer um gráfico bem alinhado.*

O texto citado pelo docente E – registrado em seu plano de aula – apresentou o roteiro para a discussão da seguinte forma:

1- De acordo com texto:
a) Utilizando a tabela, calcule a quantidade de álcool produzido por tonelada de cana-de-açúcar.
b) Na lei de formação da função, qual é a variável dependente? E qual é a variável independente?
c) Escreva a lei de formação da função que associa a quantidade de álcool produzido por tonelada de cana-de-açúcar.
d) Esboce em folha quadriculada o gráfico que fornece a quantidade de álcool produzido por tonelada de cana-de-açúcar.
2- Um agricultor tem um terreno e duas opções: plantar soja ou plantar feijão. O gasto com a plantação de soja será $R\$$ 10.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, $R\$$ 2,00. Já o gasto com a plantação de feijão será $R\$$ 12.000,00, e o preço de venda de cada quilograma, $R\$$ 3,00.
a) Que lei de formação dá o valor $V_s(x)$ obtido na produção de soja em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação.
b) Que lei de formação dá o valor $V_f(x)$ obtido na produção de feijão em função do número x de quilogramas vendidos e do gasto com a plantação.
c) Para quantos quilogramas teremos $V_s(x) = V_f(x)$?
d) Se o agricultor pretende produzir 10.000 quilogramas, em qual das duas culturas (soja ou feijão) ele terá mais lucro?

TONELADA CANA-DE-AÇÚCAR	QUANTIDADE DE ÁLCOOL
1	
1,5	
2	
2,5	
3	
3,5	
4	

Figura 1: Atividade construída pelo professor participante E
Fonte: Dado da pesquisa

No âmbito da discussão, no grupo colaborativo, surgiram colaborações importantes para a aula em debate. Os trechos, que se seguem, ilustram as participações:

Professora D: Esse material vai ser xerocado e entregue?
Professor E: Sim, pois se eu for passar isso no quadro eu gasto a aula toda (risos)
Professor E: A gente estava falando sobre um vídeo. Até pensei na possibilidade, mas para organizar isso na sala de aula eu gastaria muito tempo e só temos 50 minutos.
Professora D: Aí eu vejo que você se preocupou o bastante em contextualizar, por exemplo, quando eu estava tratando deste assunto em outras turmas, foi na época da greve dos caminhoneiros, então joguei todo conteúdo para o preço da gasolina.
Pesquisador: O que vocês acham da ideia de colocar o texto todo em uma folha só e apresentar uma situação de cada vez?

Professor E: O problema é que essa xerox vai sair do meu bolso (risos)
Professor C: Eu acho uma boa ideia, pois assim eles conseguem chegar na lei de formação sozinhos.

Diante do exposto, notadamente, o professor E apresenta uma preocupação em relacionar a tríade currículo, ensino e sociedade. Tal fato se constitui no desenvolvimento do conhecimento no âmbito da faceta ecológica, pois esta refere-se ao conhecimento sobre o currículo de Matemática do nível educacional em que o estudo do objeto matemático é contemplado, suas relações com outros currículos e as relações que este tem com os aspectos sociais, políticos e econômicos, que apoiam e condicionam o processo de ensino e aprendizagem (Pino-Fan, Godino, 2015).

O professor E vai a campo e leciona a aula que foi debatida no grupo colaborativo
Após a discussão da proposta de aula do professor E, no âmbito do grupo colaborativo, ficou combinado que o pesquisador assistiria sua aula no dia seguinte. O distrito onde o professor E leciona fica a 27 km da sede do município no qual se localiza a instituição formadora.

Figura 2: Professor E lecionando
Fonte: Dado da pesquisa

O professor E iniciou sua aula cumprimentando os alunos e destacando os objetivos da aula. Em seguida, solicitou aos alunos que se organizassem em dupla para leitura do texto que abordava a temática de biocombustíveis, em especial, a produção de etanol. Foi disponibilizado, aos estudantes, um tempo de cinco minutos para a leitura do texto. Após este tempo iniciaram-se as discussões sobre a temática do texto. O professor mediou as discussões, promovendo o debate, fomentando perguntas que remetiam ao texto e ao contexto. Buscando aproximar o debate à realidade, o professor fez uma abordagem sobre a produção de azeite, oriundo da mamona, que é comum na comunidade local.

A reflexão sobre a aula

Na seguinte reunião do grupo, após o acompanhamento da aula do citado professor, foram debatidos os destaques da aula ministrada e, consequentemente, compartilhadas as experiências com os demais participantes.

Professor E: No que diz respeito à aula, os meninos vêm todos os dias, tirando um dia ou outro que eles estão mais agitados é daquela forma mesmo. Só na segunda-feira que para mim é um pouco mais complicado porque a aula é depois do recreio, aí eles chegam agitados. [...] no ano passado eu já fui professor deles no nono ano, eu gostei muito do desempenho das atividades porque eu consegui terminar tudo que eu tinha planejado [...]

No plano de aula, o professor E havia previsto avançar com os alunos até à construção do gráfico da função, porém, não foi possível, visto que os alunos apresentaram algumas incompreensões na adoção da escala. Contudo, segundo o professor, a atividade foi finalizada numa outra aula.

> *Pesquisador: Vocês lembram que o professor E tinha planejado o papel milimetrado? Acabou que não deu tempo, aí ficou para próxima aula.*
> *Professor E: E na hora que eu fui trabalhar com eles com o papel milimetrado eu não dava conta, pois eles usavam escalas diferentes. Aí toda hora eles me chamavam falando que o deles estavam diferentes dos outros colegas.*
> *Professora B: Eles construíram na folha normal de caderno?*
> *Professor E: Não, usaram a folha milimetrada (em outra aula).*

Na reunião de discussão do plano de aula do professor E foi sugerido, pelo grupo, que a tabela proposta aparecesse logo no início das atividades, pois, a partir dela, os alunos poderiam retirar conclusões e estabelecer conjecturas. A sugestão foi acatada sobre este fato, o seguinte trecho é ilustrativo:

> *Pesquisador: Aquela troca que a gente pediu o E para fazer [...] vocês lembram da tabela? Os alunos ficaram bastante empolgados ao preencher a tabela e começaram a perguntar, uns aos outros, a partir daí chegaram à fórmula geral da lei de formação.*
> *Professor E: Teve alguns alunos que na hora que eu entreguei, eles já terminaram, e percebi que tinha um aluno, no caso o aluno X (que sentava ao fundo da sala), ele já tinha a noção que uma tonelada era 80 toneladas, meia tonelada 40, e, logo, associava a 120 (1,5 tonelada). Agora tinha uma aluna, que na hora que eu estava entregando as fichas, eu percebi que ela tinha dúvida, ela sabia que uma tonelada era 80, ela sabia que meia dava 40, mas ela não associava os dois valores.*

Diante das dificuldades dos alunos, em relacionar os dados do problema, o professor realizou perguntas e orientou as resoluções. Importante destacar que a turma, na qual o professor E ministrou a aula, tinha estudado noções básicas de função quando cursavam o nono ano do ensino fundamental e, novamente, ideias preliminares, na forma de diagramas, no 1º ano do ensino médio (EM). Sobre tal fato, surgem os seguintes relatos:

> *Professor E: Tinha iniciado (no 1º ano do EM) um diagrama de dados dois conjuntos. Aquela menina mesmo (uma aluna participativa ao longo da aula), ela até me perguntou se podia fazer o gráfico em casa, ela teve muita dúvida sobre eixo x e eixo y, a gente usou a variável t como toneladas no gráfico, mas ela não conseguia relacionar que era o eixo x.*
> *Pesquisador: Eu vi isso mesmo, eles estavam esperando x e y.*
> *Professor E: Eu ia usar x e y, mas como foi a aluna que colocou a letra t, eu pensei, "vou levar para o quadro com esta variável" e ver se eles vão concordar, ou não, com o que ela tinha feito.*

A Professora D, demonstrando curiosidade pela realidade de atuação profissional do Professor E, promove o seguinte diálogo:

> *Professora D: Você costuma deixar atividades para casa?*
> *Professor E: Sim*
> *Professora D: E eles fazem?*
> *Professor E: Assim, é raro eles não fazerem, são mais aqueles casos onde um aluno falta e não pega atividade, ou falta na aula da atividade.*
> *Professora D: Porque o pouco tempo que eu trabalhei na zona rural, percebi que os meninos não tinham costume de fazer atividade.*

> *Professor E: Problema é que muitos destes alunos trabalham muito. Colocamos o ensino médio a tarde por causa disso mesmo. A turma é muito pequena. E nós perdemos muitos alunos do ano passado para cá.*

Neste diálogo, o professor E demonstra, novamente, conhecer a realidade de seus alunos, que são oriundos de famílias compostas por pequenos produtores rurais, logo, necessitam ajudar nas tarefas de plantação, colheita e cuidados diários com as propriedades rurais.

Considerações finais

A investigação realizada com os professores egressos do PIBID buscou conhecer suas práticas e como eles articulam seus conhecimentos no planejamento, execução e avaliação de suas aulas. Para este artigo, elucidamos parte das práticas do professor E em relação à faceta ecológica do CDM.

O professor E, em suas reflexões, aponta que o PIBID fomentou práticas de ensino, pesquisa e extensão. Em especial, ele citou a possibilidade de participação em eventos, em sua maioria, com apresentação de trabalhos oriundos de práticas desenvolvidas nas escolas parceiras do PIBID. Além disso, para o professor E, as atividades realizadas ao longo do PIBID foram fundamentais para o desenvolvimento de reflexões sobre diversos temas relacionados à Educação Básica, inclusive sobre todos os contextos que a envolvem.

Ao apresentar uma base de conhecimento sobre a realidade onde atua, o professor E destaca que o conhecimento da realidade profissional, enquanto era licenciando, foi importante para sua prática na atualidade. Pode-se apontar que as práticas de iniciação à docência substanciam uma melhor formação do professor de Matemática, em especial, sobre a tomada de consciência dos contextos sociais, culturais e econômicos que se fazem presentes no âmbito das escolas.

É importante salientar que as reflexões do professor E, ao longo de sua participação no grupo colaborativo, potencializaram o desenvolvimento da faceta ecológica do conhecimento didático-matemático, sendo essa revelada em sua atuação na aula. Em seu planejamento foi explícito o esforço para aproximar o conteúdo à realidade de seus alunos, bem como o interesse em estabelecer conexões com outras áreas do conhecimento.

Diante do exposto, pode-se inferir que as práticas vivenciadas e as reflexões que emergiram no percurso desta investigação estão em consonância com o proposto por Godino (2009), Pino-Fan, Godino, Font (2013), Pino-Fan e Godino (2015) e Silva, Pietropaolo, Font (2017) que destacam a importância de os planos curriculares dialogarem com os contextos que circundam o ambiente de ensino e aprendizagem da Matemática.

Ademais, é importante que investigações futuras se encarreguem de explorar outras facetas do CDM envolvendo egressos do PIBID, pois, conforme aponta Gatti (2019), esta política pública teve repercussões nas formas de organizações curriculares das licenciaturas, especialmente, na relação teoria e prática e na mobilização do acesso dos futuros professores ao campo de atuação profissional.

Finalmente, não podemos desconsiderar que a tarefa de formar professor tem se constituído um desafio, pois a complexidade da sociedade exige constantes reformulações curriculares (Tinti y Manrique, 2016). Tal contexto requer que os professores, em especial os de Matemática, tenham um repertório de conhecimento sólido, em especial, sobre como estreitar o diálogo entre os conteúdos e a realidade dos estudantes.

Referências

Fiorentini, D. (2004). Pesquisar Práticas Colaborativas ou Pesquisar Colaborativamente? In: *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. (47-76). Belo Horizonte: Autêntica.

Garnica, A.V.M. (2004). História Oral e Educação Matemática. En Borba, M.de C. e Araújo, J. de L, *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. (77-98). Belo Horizonte: Autêntica.

Gatti, B. A., Barretto, E. S. de S., Andre, M. E. D. A., Almeida, P. C. A. (2019). *Professores do Brasil: novos cenários de formação*. Brasília, DF: Unesco.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. *UNIÓN*, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, Berlín, 39(1), 127-135, enero.

Palanch, W. B., Manrique, A. L. (2016). Ações colaborativas universidade-escola: formação de professores que ensinam Matemática em espaços colaborativos. *Revista Eletrônica de Educação*, 10,188-202.

Pino-Fan, L. Godino, J.D. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Parte 1). *REVEMAT*, 8 (2), 1-49.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, 36(1), 87-109

Silva, J. F, Pietropaolo, R. C, Font, V. (2017). Estudio del conocimiento de futuros profesores de Matemática sobre el uso idóneo de recursos materiales. En Serna, Luis Arturo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (1208-1217). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Tinti, D. S., Manrique, A. L. (2016). Teoria e Prática na Formação de Professores que ensinam Matemática: que caminhos apontam experiências com o PIBID e OBEDUC? *Educação Matemática em Revista,* São Paulo, 49(2), 98-106.

¿QUÉ USO HACEN DE LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS LOS FORMADORES DE PROFESORES AL ENSEÑAR MATEMÁTICA? APORTES PARA REPENSAR LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES EN EL URUGUAY

WHAT TECHNOLOGICAL RESOURCES DO TEACHERS' TRAINERS USE WHEN TEACHING MATH? CONTRIBUTIONS TO RETHINK THE INITIAL TRAINING OF TEACHERS IN URUGUAY

Adriana Fajardo Berardi, Elena Freire Gard, Leticia Medina Uval
Consejo de Formación en Educación. (Uruguay)
adrifajardoberardi@gmail.com, elenafreiregard@gmail.com, leticiamedinauval@gmail.com

Resumen
Esta investigación en curso explora la inclusión de tecnología en el aula de un grupo de formadores de profesores de matemáticas de dos institutos de formación de profesores de Uruguay. A través de un estudio cualitativo basado en un estudio de casos, se explora cómo los formadores de profesores de matemática usan los recursos tecnológicos en sus prácticas de enseñanza. A través de entrevistas y observación en clase, se investiga qué recursos integran, cuáles son los propósitos de su inclusión, sus usos y la coherencia con los propósitos de su integración.

Palabras clave: tecnología educativa, formación inicial de profesores, prácticas docentes

Abstract
The present ongoing research explores technology inclusion in the classroom by a group of math teacher trainers from two Uruguayan teacher training institutions. Through a qualitative research, based on a case study, this paper explores how mathematics teacher trainers use technology resources in their teaching practices. The resources that are integrated, the purposes of their inclusion as well as the consistency between the uses and purposes of such integration, are researched through interviews and class observation.

Key words: educational technology, initial teacher training, teaching practices

Introducción

La irrupción de los modelos uno a uno que dotan a cada estudiante de un dispositivo móvil y la mejora de la conectividad de los centros educativos, han marcado la educación de las dos últimas décadas en la mayor parte de los países latinoamericanos y particularmente al Uruguay. No obstante, Téliz (2015) señala que existe un alto contraste entre las expectativas que se asocian a las potencialidades que los recursos tecnológicos ofrecen y los usos concretos que los docentes logran llevar a sus aulas. Por otra parte, si bien Heid (1997) afirma que la integración de recursos tecnológicos ofrece un camino para renovar las prácticas pedagógicas, este potencial no siempre es aprovechado por los docentes (Heid, 1997; Téliz, 2015, entre otros) aun cuando se cuente con la infraestructura necesaria para incluirlos en las prácticas de enseñanza.

Considerando que los recursos tecnológicos modifican la forma de enseñar, nos preguntamos: ¿cuáles son las experiencias que ofrecen los formadores de los futuros profesores, en relación con la integración de las tecnologías para aprender y enseñar matemática?

Buscando respuestas a la pregunta anterior se plantea como objetivo general de esta investigación caracterizar el uso de recursos tecnológicos para enseñar matemática por parte de los formadores de profesores de Matemática en dos centros de formación docente. Como objetivo específico este trabajo se plantea identificar qué recursos tecnológicos utilizan los formadores para enseñar matemática en las aulas de la formación inicial de profesores de matemática, qué propósitos guían la inclusión y cómo utilizan estos recursos.

Antecedentes

La revisión bibliográfica abarcó estudios que explicitan el potencial pedagógico de las tecnologías digitales y que identifican los principios que sustentan la incorporación de estos recursos tecnológicos por parte de los docentes. También se relevaron trabajos que evidencian inconsistencia entre el discurso de los profesores y sus prácticas de aula y estudios que señalan la importancia de vivenciar experiencias en el uso de recursos tecnológicos para enseñar matemática. Finalmente, el estudio de antecedentes incluye el reporte de estudios vinculados al uso de tecnologías en la formación docente.

A continuación, se reportan algunos de los estudios más relevantes para nuestro trabajo.

Heid (1997) identifica diferentes categorías relacionadas con el uso de la tecnología por parte de los docentes entre las que se destaca el potencial de los recursos tecnológicos para renovar las prácticas de aula. Entre los trabajos de investigación que analiza este autor identifica, que los docentes integran las tecnologías siguiendo alguno de los siguientes objetivos: enseñar matemática; facilitar oportunidades para experimentar y hacer matemática; promover la reflexión por parte del estudiante y finalmente, facilitar una redefinición de la autoridad epistemológica.

Por otra parte, Téliz (2015) realiza un estudio con profesores de enseñanza secundaria en Uruguay, en el que advierte que existe una contradicción entre los usos que los docentes declaran y los usos que efectivamente dan a las tecnologías en el aula. Señala que, a pesar de que los docentes que participan de su estudio presentan una visión positiva sobre el uso de las TIC, hay una baja integración de estos recursos y un escaso uso didáctico de ellos, incorporándolos mayoritariamente para practicar lo trabajado, para poner en funcionamiento un método o concepto aprendido o para buscar información.

Barboza y Torres (2010) evidencian bajos índices de formación en el uso de tecnologías en la formación de futuros profesores uruguayos, constatando que más de la mitad de la población estudiada no maneja programas educativos.

Evidenciaron que la integración de las TIC en las prácticas de enseñanza por parte de los profesores formadores es escasa y que en pocas ocasiones los estudiantes son invitados a realizar tareas colaborativas o autónomas.
Finalmente cabe considerar lo reportado por Rojas y Deulofeu (2015). Estos investigadores señalan que las creencias sobre la actividad matemática escolar de los futuros profesores surgen fundamentalmente de su experiencia como alumnos, y remarcan la importancia de que el cuerpo de formadores ofrezca a los futuros profesores oportunidades de aprender matemática tal como se espera que sus alumnos la aprendan.

Marco conceptual

En este estudio se consideran dos clasificaciones complementarias del uso de los recursos tecnológicos. Por un lado se toma una categorización de los principios que sustentan la incorporación de recursos educativos en el aula realizada por Heid (1997). Esta surge en el contexto específico de la Matemática Educativa y al identificar un conjunto de principios que sustentan la incorporación de recursos tecnológicos por parte de los docentes para enseñar matemática, aporta a este trabajo la especificidad necesaria para llevar a cabo esta investigación enmarcada en el ámbito de la Matemática Educativa. Por otra parte, también se incluye en el marco teórico de este trabajo una categorización de los usos de los recursos tecnológicos atendiendo a la variación o no de las prácticas pedagógicas realizada por Hughes (2005). Esta categorización no es específica del área de la matemática, brinda una mirada más amplia que la aportada por Heid y permite identificar con mayor detalle los posibles contrastes entre el discurso y los usos reales de los recursos tecnológicos. A continuación, se resumen las ideas aportadas por estos dos autores, que serán utilizadas para analizar e interpretar las evidencias recogidas por este estudio.

Heid (1997) analiza reportes de investigaciones en las que los docentes incorporan el uso de diferentes recursos tecnológicos para enseñar matemática e identifica cuatro principios en los que se basan las decisiones de incorporar tecnologías en el contexto educativo. Señala que los docentes incorporan el uso de estos recursos para: 1) enseñar matemática y centrar la enseñanza en el estudiante, 2) facilitar oportunidades para experimentar y hacer matemática; 3) promover la reflexión por parte del estudiante, al permitir externalizar las representaciones y proporcionar retroalimentación de una manera interactiva, y 4) facilitar una redefinición de la autoridad epistemológica. A medida que los estudiantes asumen más responsabilidades y autonomía en los procesos de enseñanza basados en un acceso constante a las herramientas tecnológicas, estos desarrollan mayor responsabilidad en el logro de sus aprendizajes.

Por otra parte, Hughes (2005) clasifica los diferentes usos de los recursos tecnológicos en relación a la variación en las pedagogías por la inclusión de la tecnología. En una primera categoría la tecnología funciona como *reemplazo*, sin cambiar las prácticas instruccionales, los procesos de aprendizaje del estudiante, los contenidos y los objetivos. Una segunda categoría señala el uso de la tecnología como *amplificador*, caracterizada por un aprovechamiento del potencial que la tecnología puede proporcionar para realizar tareas con mayor eficiencia y eficacia. Este uso facilita la realización de tareas o permite hacerlas más rápido, pero las tareas siguen siendo las mismas. La tercera categoría se refiere al uso de las tecnologías como *transformadora* de la enseñanza. En este caso el uso del recurso se vincula a un cambio de las rutinas de aprendizaje de los estudiantes, incluyendo una transformación de los contenidos a abordar, un cambio de los procesos cognitivos que realizan los estudiantes y un cambio en las prácticas de enseñanza del docente, incluyendo un cambio de los roles tradicionales del docente y de los estudiantes en el aula. Aquellos usos vinculados a la tercera categoría de la clasificación propuesta por Hughes (2005) ponen en evidencia el potencial del uso de la tecnología para innovar, mientras que en las dos primeras (remplazo y amplificador) el uso de recursos tecnológicos mantiene el statu quo de las prácticas educativas tradicionales.

Metodología

Considerando que los objetivos específicos de este estudio consisten en explorar cuáles son los recursos tecnológicos que integran los formadores de profesores de matemática, qué fines y propósitos guían esta incorporación y qué usos hacen de estos recursos en sus prácticas de aula, esta investigación se posiciona desde una perspectiva de investigación cualitativa. El método elegido se basa en estudio de casos, e implica "un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés" (Rodríguez, Gil y García, 1999, p. 92) que se adecua a los intereses de esta investigación.

La población de este estudio son todos los docentes a cargo de la enseñanza de disciplinas específicas de matemática en dos institutos de formación docente en Uruguay. Estos institutos son de nivel terciario no universitario, destinados a la formación de profesores en el nivel secundario, dependientes de la Administración Nacional de Educación Pública de Uruguay (ANEP).

En una primera etapa se estableció contacto con los veintiún docentes que conforman la población de este estudio. A través de un correo electrónico personalizado se informó a cada docente participante de esta investigación que en los siguientes meses se desarrollaría un estudio vinculado al uso de recursos tecnológicos en formación docente. Este correo permitió asimismo coordinar las entrevistas iniciales y posibilitó generar ciertos vínculos con los docentes que resultan fundamentales para la realización de las entrevistas y las observaciones de aula.

En una segunda etapa, tuvieron lugar veinte entrevistas semiestructuradas, que facilitaron conocer en forma global qué utilización se hace de los recursos tecnológicos en la formación inicial de profesores de matemática. Estas entrevistas también permitieron identificar a aquellos formadores que integran con mayor frecuencia los recursos tecnológicos en sus clases y que resultan de interés como casos de estudio. De los docentes que afirmaron utilizar tecnologías para enseñar matemática, se seleccionó como casos de estudio a todos aquellos formadores que se mostraron receptivos a colaborar en esta investigación.

En la tercera etapa, actualmente en curso, se establece contacto personal con cada docente que conforma los casos de estudio y se coordina la observación de una clase utilizando recursos tecnológicos para la enseñanza de la matemática. Asimismo, se informa a cada docente que la clase sería videograbada.

En la observación de aula participan dos de las investigadoras y utilizan una pauta de observación para estructurar y sistematizar el proceso de recopilación de información.
Los datos obtenidos en las entrevistas y a partir de la observación de aula están siendo analizados a la luz del marco teórico adoptado en este estudio.

Análisis de resultados

El análisis de las entrevistas permitió identificar algunos de los motivos que llevan a los docentes formadores a incorporar la tecnología en el aula. Los docentes participantes vinculan el uso de recursos tecnológicos a las siguientes acciones (nombradas en orden decreciente de frecuencia): visualizar, verificar, facilitar el aprendizaje o la enseñanza, representar, conjeturar, agilizar o acortar tiempos, calcular, mostrar, compartir materiales, evaluar, buscar información, analizar, interpretar, explorar e investigar, conceptualizar, comunicarse, redirigir el aprendizaje, motivar, acompañar el mundo tecnológico, promover la autonomía del estudiante, elaborar materiales, modelar situaciones y finalmente enseñar el uso didáctico de las tecnologías digitales.

Como evidencias de lo anterior presentamos extractos de las entrevistas realizadas a distintos formadores de profesores (FP):

"Porque el mundo de hoy y del mañana tiene que ver con la tecnología y la forma de pensar la tenemos que llevar a secundaria. Usan el celular para todo. La forma de pensar con los aparatos es distinta" (FP6).

"Tiene sus ventajas porque trabajamos en forma más ágil, porque podemos poner problemas más complejos, porque no dependemos que los cálculos sean sencillos…" (FP19).

"Cuando es mucho el trabajo para calcular una integral, se desdibuja el objetivo final, que es el contenido propio del problema de probabilidad. Para eso en mi caso el uso del recurso sería una gran ventaja" (FP19).

Los datos recabados a partir de las entrevistas y las observaciones de clase están siendo analizados según las categorizaciones de Hughes (2005) y Heid (1997).

Desde un análisis primario se observa que la mayor parte de los formadores percibe el uso de la tecnología como amplificador y en muy pocos casos la tecnología es vista en su carácter de transformadora de las prácticas de aula. Muchos docentes declaran reemplazar el pizarrón, el lápiz y papel, la calculadora, la regla y el compás por recursos tecnológicos, aludiendo al potencial de la tecnología para acortar los tiempos de aprendizaje, facilitar el aprendizaje de los estudiantes y las tareas de enseñanza. Uno de los docentes explicita esta idea de forma clara en su entrevista manifestando que "es muy útil para chequear resultados que son muy largos en el desarrollo, los chequean automáticamente con un software o con alguna página de Internet" (FP3).

Por otra parte, algunos docentes evidencian identificar el potencial transformador de los recursos tecnológicos, vinculando su uso a la promoción de la autonomía del estudiante, como lo ejemplifica la expresión de este docente (FP16):

> Creo que una de las principales ventajas del uso de la tecnología es que puede generar el trabajo autónomo de parte de los estudiantes. Imagino por ejemplo el trabajo en la plataforma PAM (Plataforma Adaptativa de Matemática), donde ahí está planteada la cuestión como para que cada uno avance a su ritmo, de acuerdo con las dificultades que se van generando.

Dentro de la indagación de cuáles son los recursos tecnológicos utilizados, se identificó que el software más utilizado es GeoGebra. Además, algunos formadores utilizan otros softwares específicos de la disciplina como ser Winplot, PolyPro y Probability Distribution. También señalan utilizar diversas plataformas como ser Schoology, Plataformas Adapativas para el aprendizaje, Edmodo o Moodle, y software no específico como Ed Puzzle, hojas de cálculo y presentaciones como por ejemplo Power Point.

La inclusión de los recursos tecnológicos desde las observaciones de aula

Hasta el momento de redacción de este reporte se han realizado tres observaciones de aula en oportunidades que los docentes que conforman los casos de este estudio incorporan la utilización de recursos tecnológicos para enseñar matemática. A continuación se sintetizan las principales impresiones de estas clases. Cabe acotar que aún no se ha realizado un análisis de estas clases a la luz del marco teórico.

Clase observada n°1

Previo a la clase el profesor designado como FP17 declara incorporar el uso de recursos tecnológicos para presentar el recurso GeoGebra a aquellos alumnos que aún no lo conocían. Su intención es mostrar las ventajas del software para representar de forma prolija, perfecta y sin errores y para conjeturar y para visualizar lugares geométricos. Por otra parte, también se propone enfrentar a los estudiantes a una plataforma que corrige de forma objetiva, imparcial, dicotómica las respuestas dadas a una serie de preguntas preestablecidas expresadas en el formato múltiple opción, argumentando que los estudiantes aceptan de mejor forma esta corrección que la corrección realizada por el docente.

Se observó una clase de 2 horas, en la que se trabajó inicialmente sin inclusión de un recurso tecnológico y luego con inclusión de dos recursos (GeoGebra y una plataforma con preguntas en formato múltiple opción), lo que permitió comparar la metodología de trabajo en ambas situaciones (con y sin inclusión del recurso) para un mismo docente.

La metodología de trabajo promovida por el profesor en la clase sin aplicación de recursos tecnológico se orientó a un trabajo en pequeños grupos, en la que los alumnos toman un lugar protagónico en el que exploran, resuelven, discuten, argumentan e incluso validan colectivamente las producciones obtenidas. El docente está presente como orquestador de las actividades y debates que se dan en la clase, orientando la búsqueda de respuestas a las dudas que surgen entre los estudiantes y promoviendo la participación y el debate.

En la clase con inclusión de recursos tecnológicos, se plantea una clase demostrativa, en la que la misma actividad abordada con lápiz y papel es resuelta con otra herramienta, GeoGebra. Un estudiante que no maneja este software es invitado a manipularlo para realizar una construcción geométrica y a mostrar por arrastre el lugar geométrico de un punto. En todo momento el docente brinda instrucciones explícitas sobre cómo proceder a la construcción y si bien se plantean nuevas situaciones matemáticas a resolver impuestas por el uso de la nueva herramienta, es el docente quien resuelve estas situaciones.

La integración del recurso en esta clase se corresponde con la descripción que Hughes (2005) realiza para el uso de la tecnología como amplificador en tanto que no se aprecia que la tecnología venga acompañada de un cambio positivo en las prácticas "tradicionales" solo se observa un interés por mejorar la exactitud de la construcción en GeoGebra y la visualización de los lugares geométricos.

Por otra parte, el uso de una plataforma de múltiple opción se mostró como herramienta para ejercitarse de forma autónoma, sin hacer explícitos los propósitos de la inclusión que el docente declaró a las investigadoras. Este uso se corresponde con la idea de proporcionar retroalimentación de una manera interactiva y que Heid vincula a la categoría "promover la reflexión por parte del estudiante".

Clase observada n°2

En esta clase se incluyeron dos recursos, GeoGebra y una presentación PowerPoint. El docente proyectó fragmentos de un libro de texto, utilizó presentaciones para exponer definiciones y proponer algunos problemas e intercaló el uso de GeoGebra para favorecer la visualización del concepto presentado.
Se aprecia que el profesor utilizó la tecnología como facilitadora de su tarea: la inclusión de una presentación en Power Point facilitó el intercambio de materiales con los estudiantes y apoyó el desarrollo del tema que se estaba presentando.

Por otra parte, el docente también utilizó la tecnología como facilitadora del aprendizaje de los estudiantes. A partir del uso de la herramienta "deslizador" del software GeoGebra se facilitó la comprensión de la definición de límite de una función en un punto con la intencionalidad de promover la construcción de un concepto y facilitar su comprensión.

Considerando la clasificación dada por Hughes (2005) el profesor utilizó los recursos tecnológicos como "reemplazo" sustituyendo el pizarrón y la tiza por una presentación en Power Point y como "amplificador" al visualizar el gráfico de una función.

Desde el análisis que realiza Heid (1997), en la clase observada los recursos tecnológicos permitieron enseñar matemática centrando la enseñanza en el estudiante, considerando que durante toda la clase se estableció un diálogo continuo con los estudiantes, atendiendo sus dudas pudiendo utilizar los dos recursos incluidos, ya sea para revisar o retroceder en las diapositivas y analizar lo escrito, generando nuevas preguntas para que el docente pudiera

cerciorarse si los estudiantes habían comprendido, intercalando con el uso del archivo GeoGebra a los efectos de comprender la escritura simbólica junto con el registro gráfico de una función.

Clase observada n°3

En esta clase el formador utiliza GeoGebra para introducir un nuevo concepto, experimentar, conjeturar y construir colectivamente una definición del mismo. Concretamente el docente introduce la noción de centro de masa entre dos puntos de peso t_1 y t_2 y plantea la relación inversa que existe entre la distancia de uno de los puntos al centro de masa en relación al otro punto y el centro de masa. Luego de analizar colectivamente el concepto de centro de masa para el caso de un triángulo, el recurso GeoGebra es utilizado por los propios estudiantes en modalidad libre para crear una definición de centro de masa de un cuadrilátero. A través del recurso tecnológico cada subgrupo de trabajo recorre su propio camino de investigación, desarrollando tres propuestas diferentes según la forma en la que fue abordado el problema, lo que genera una nueva interrogante sobre la equivalencia de las respuestas dadas.

Según la categorización de Hughes (2005), se interpreta que el uso de la tecnología permitió transformar de las prácticas tradicionales; el recurso no solo permitió aproximar al estudiante a la resolución de un problema que sería difícil abordar, también permitió experimentar de forma autónoma hasta encontrar un camino propio, validar las conjeturas realizadas sin necesidad de ser validadas por el docente, cambiar las hipótesis refutadas hacia una nueva hipótesis y hacerse cargo del rumbo de la clase desde un rol protagónico en el que son capaces de seguir razonamientos diversos, argumentar, debatir y validar sus producciones y las de sus pares. El recurso tecnológico facilitó la transformación de las prácticas pedagógicas tradicionales y hasta el propio docente se sorprendió de algunos de los razonamientos realizados por los estudiantes. El software facilitó llegar a construir las conjeturas planteadas por los estudiantes.

En esta clase la enseñanza estuvo centrada en el estudiante, los futuros docentes trabajaron de forma independiente sin transitar un camino dirigido por el docente, teniendo oportunidades para experimentar y hacer matemática. Al externalizar las representaciones y proporcionar retroalimentación de una manera interactiva la utilización del GeoGebra promovió la reflexión por parte del estudiante, y su autonomía, por lo que se interpreta que según la categorización de Heid (1997) la tecnología se utilizó atendiendo a los cuatro propósitos identificados por este autor: 1) enseñar matemática y centrar la enseñanza en el estudiante, 2) facilitar oportunidades para experimentar y hacer matemática; 3) promover la reflexión por parte del estudiante, y 4) facilitar una redefinición de la autoridad epistemológica.

Conclusiones

Si bien este estudio aún está en proceso, permite apreciar que los formadores de profesores de matemática participantes de este estudio identifican múltiples ventajas relativas al uso de recursos tecnológicos para enseñar matemática. Todos los docentes tienen una visión positiva respecto a la inclusión de la tecnología en el aula, haciendo énfasis en su potencial para facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje y para acortar los tiempos de este proceso.

Algunos docentes advierten que el uso de estos recursos viabiliza y potencia la elaboración de conjeturas, promueve los procesos de generalización y la verificación de propiedades, facilitando el "hacer matemática". Un grupo menor de formadores aprecia el potencial de la tecnología para redireccionar los procesos de enseñanza y los contenidos a enseñar. Argumentan que la tecnología permite profundizar el abordaje de aquellos contenidos matemáticos que resultan prioritarios para el curso y minimizar los aspectos instrumentales, acortando el tiempo dedicado a la realización de procesos rutinarios.

Los principios que guían a los docentes a incluir la tecnología para enseñar matemáticas son muy variados. Desde las entrevistas realizadas se observa que predomina la idea que incluir recursos tecnológicos facilita el proceso de aprendizaje de los estudiantes o las tareas de enseñanza. Desde su discurso, más de la mitad de los formadores declaran guiarse por los siguientes propósitos: visualizar, verificar, representar, conjeturar y agilizar. En este sentido y según la categorización propuesta por Hughes (2005) la tecnología es vista por la mayoría de estos profesores como reemplazo o como amplificador. Por otra parte, algunos docentes parecen apreciar el potencial transformador de la tecnología sobre las prácticas tradicionales de enseñanza, las señalan como un medio para redirigir el aprendizaje, para promover la reflexión y la autonomía.

En particular desde las entrevistas, se identificó que todos los docentes valoran el uso del software GeoGebra para enseñar matemática, aprecian su utilidad en el abordaje de asignaturas como geometría, análisis matemático, estadística y probabilidad. Un aspecto que destacan es el potencial de este recurso para trabajar la trasposición entre diferentes registros de representación. Asimismo, se evidenció que algunas temáticas dentro de la formación disciplinar del profesorado, resultan ser más permeables o facilitadoras de la inclusión de recursos tecnológicos, como por ejemplo límites, funciones, distribuciones de probabilidad y lugares geométricos.

A pesar de las ventajas que identifican los docentes sobre la inclusión de los recursos tecnológicos en el aula, muchos formadores declaran que no utilizan estos recursos con la frecuencia que desearían. Esto apoya lo evidenciado por Téliz (2015) quien señala un contraste entre el discurso de los profesores de matemática sobre el uso de la tecnología en las prácticas de aula y su inclusión efectiva.

Desde el discurso de los formadores se evidenció la necesidad de recibir preparación específica en el uso de recursos tecnológicos para enseñar matemática y la importancia de contar con una infraestructura adecuada que facilite su incorporación. Muchos docentes indican que se sienten inseguros o con poca formación en el uso de estos recursos y que eso los lleva a abstenerse de utilizar la tecnología en el aula. Por otra parte, la mayoría de los profesores entrevistados señalan que aún existen carencias de infraestructura que obstaculizan la incorporación de forma cotidiana de los recursos tecnológicos. Si bien en algunos casos la institución cuenta con dispositivos que pueden ser trasladados al aula por parte del docente, con previa reserva del equipo, el proceso requerido para disponer de estos recursos tecnológicos es visto por los docentes como un estorbo que los desmotiva y dificulta su incorporación.

Se observó la utilización del celular como uno de los dispositivos que los docentes declaran utilizar en sus aulas con mayor frecuencia para trabajar con sus alumnos dada su creciente disponibilidad. Algunos formadores argumentan que en sus clases cada vez más los estudiantes utilizan GeoGebra desde sus propios celulares y señalan que actualmente este dispositivo es uno de los recursos tecnológicos más utilizados en el aula.

En síntesis, este estudio ha permitido identificar que algunos docentes logran aprovechar el potencial de los recursos tecnológicos como el Geogebra para desarrollar prácticas pedagógicas acordes con las recomendaciones actuales que emergen de la Matemática Educativa. Sin embargo, también se pudo constatar que la inclusión de un recurso potente como el software GeoGebra no asegura una transformación positiva de las prácticas docentes.

La culminación de esta investigación permitirá profundizar en la identificación de los propósitos que llevan a los formadores a incorporar las tecnologías en el aula, cuáles son los recursos tecnológicos que incluyen y qué usos hacen de ellos. Se espera así contribuir a describir las características más relevantes de las prácticas que desarrollan los formadores al incluir tecnología para la enseñanza de la matemática.

Agradecimiento

A la Dra. Cristina Ochoviet, en el marco de la investigación promocionado por el Fondo Sectorial de Educación – modalidad "CFE – Investiga" por sus aportes como tutora de la investigación presentada.

Referencias bibliográficas

Barboza, L. y Torres, A. (2010). *Valoración del uso de TIC desde la experiencia de los estudiantes de Formación Docente.* Montevideo: IPES.

Heid, M. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of Education, 106*(1), 5-61.

Hughes, J. (2005). *The role of teacher knowledge and learning experiences in forming technology-integrated pedagogy*. *Jounal of technology and teacher education*, 13(2), 277-302

Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, J. (1999). *Metodología de la Investigación cualitativa*. Málaga, España: Ed. Aljibe.

Rojas, F., y Deulofeu, J. (2015). El formador de profesores de matemática: un análisis de las percepciones de sus prácticas instruccionales desde la "tensión" estudiante-formador. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 33*(1), 47-61.

Téliz, F. (2015). Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas: Estudio de las opiniones y concepciones de docentes de educación secundaria en el departamento de Artigas. *Cuadernos de investigación educativa, 6*(2), 13-31.

CONCEPCIONES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR. EL CASO DE LA FUNCIÓN Y SUS SISTEMAS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

UPPER MIDDLE EDUCATION MATHEMATICS TEACHER'S CONCEPTIONS; THE CASE OF THE FUNCTION AND ITS SEMIOTIC SYSTEMS OF REPRESENTATION

Augus Edoc Zaíra Molina Xerónimo, Noé Sanmartín Román.
Centro de Estudios Superiores en Educación, Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Estado de México. (México)
zairamolin@yahoo.com.mx, sanmandelbrotin@hotmail.com

Resumen
Esta investigación forma parte de una investigación cualitativa, la cual se realizó en 4 escuelas de Educación Media Superior, las cuales conforman la Zona Escolar BG44 en el Estado de México. El objetivo principal es identificar las concepciones que tienen los docentes sobre el concepto de función y sus sistemas semióticos de representación para saber si influyen en su práctica pedagógica. La muestra estuvo conformada por 16 docentes de Educación Media Superior de formación profesional indistinta. Se presentan las relaciones encontradas entre tales concepciones, asimismo se aportan indicadores que facilitan una caracterización más detallada del posicionamiento del profesor ante el concepto de función y sus sistemas semíticos de representación. Se realiza, también la descripción de la metodología empleada en el estudio.

Palabras clave: concepciones, función, sistemas semióticos

Abstract
This is part of a qualitative research, which was carried out in four upper middle schools, which make up the BG44 School Zone in the State of Mexico. Its main objective is to identify the conceptions that teachers have about the concept of function and its semiotic systems of representation, in order to know if these concepts influence on their pedagogical practice. The sample consisted of sixteen teachers of upper middle education of indistinct professional training. The relationships found among such conceptions are presented, as well as indicators that facilitate a more detailed characterization of the teacher's stance in the face of the concept of function and its semiotic representation systems. The description of the methodology used in the study is also made.

Key words: conceptions, function, semiotic systems

Introducción

En la década de los ochenta se publicaron investigaciones sobre concepciones y creencias de los docentes de matemáticas, con ellas se determinó la influencia de tales concepciones y creencias en su labor docente. Hoy día se siguen desarrollando trabajos alrededor del pensamiento docente que ratifican la necesidad de continuar investigando la formación docente y su ejercicio profesional concluyendo que las estrategias a utilizar en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas debe sustentarse en alguna percepción sobre la naturaleza de las matemáticas.

En muchas investigaciones sobre la enseñanza de la Matemática en Educación Media Superior (EMS) se resaltan las concepciones de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en particular, el objeto matemático función se concibe no solo como contenido fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de matemática en EMS, sino como uno de los más controvertidos y estudiados desde el punto de vista histórico, epistemológico, ontológico y didáctico. Aunque los reportes sobre el problema con el aprendizaje del concepto de función por parte de los estudiantes son numerosos y frecuentes, la prioridad en esta investigación fue estudiar y analizar las concepciones que tienen los docentes sobre dicho concepto.

Desde que el profesor de matemáticas tomó importancia para los investigadores en educación matemática, se han desarrollado investigaciones para proporcionar los elementos que permitan reconocer y comprender las necesidades requeridas para generar programas profesionales de formación inicial y continua en la docencia.

Los conocimientos del profesor de matemáticas fueron estudiados por McEwan y Bull (1991) y han generado debates sobre si se debe tomar en cuenta el dominio del conocimiento pedagógico de la matemática o el dominio del contenido específico de la misma. Las investigaciones de Llinares y Sánchez (1986) se preocuparon por el conocimiento del profesor y utilizaron diversas referencias para el dominio del contenido y los procesos cognitivos de los profesores, de donde surgieron aspectos importantes relacionados con el pensamiento de los profesores y sus concepciones, entre ellos están el significado que los docentes dan a los conceptos matemáticos que enseñan, la relación entre dichos conceptos, las estrategias metodológicas que utilizan para su enseñanza y la naturaleza de la información que obtienen para construir concepciones en torno a un objeto matemático. Algunos estudios sobre la enseñanza de la matemática en EMS fueron desarrollados por Solares y Sandoval (2013), allí se plantearon las necesidades de investigar procesos de construcción de conceptos, particularmente los relacionados no solo con la importancia de su conocimiento y sus respectivas representaciones, sino con las concepciones que tienen en torno a ello.

La función es un contenido fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en EMS, es el antecedente directo para el estudio del Cálculo Diferencial e Integral, por ello permite comprender el enfoque sobre la resolución de problemas y ha recibido especial atención en educación matemática, de donde surge el interés por estudiar y analizar las concepciones que tienen los docentes de matemáticas sobre dicho concepto.

El Plan y Programa de Estudio 2009 de los cursos de Matemáticas que se imparten en EMS, particularmente en las Escuelas Preparatorias del Estado de México, tienen como propósito lograr una comprensión clara y precisa de los conceptos algebraicos y el de función es uno de ellos. En estos cursos se espera que los estudiantes adquieran cierto dominio del conocimiento algebraico para que puedan emplear sus aplicaciones, sin embargo, se han notado dificultades para lograrlo. Este panorama local permite reconocer la existencia de dificultades intrínsecas al concepto que Brousseau (1998) llama obstáculos epistemológicos, y dificultades exteriores como el enfoque de enseñanza, la utilización de materiales y recursos didácticos, la influencia de los textos y lo que Thompson (1992) reconoce como las concepciones de los profesores, que también obstaculizan o incluso eliminan la comprensión del concepto, generando fracasos escolares en esos mismos cursos y en cursos de matemáticas superiores.

Con base a los conocimientos adquiridos, los docentes poseen determinadas concepciones sobre la función y sus sistemas semióticos de representación, estas se circunscriben a su práctica profesional o a procesos derivados de las interacciones que hacen constantemente en su entorno sociocultural. Dichas concepciones se manifiestan en la manera de abordar y desarrollar su quehacer docente y de argumentar acerca del proceso formativo en matemáticas de los estudiantes a su cargo, en este sentido se plantea como pregunta principal de investigación la siguiente, ¿Cuáles son las concepciones que tienen los docentes de EMS sobre el concepto de función y sus diferentes sistemas de representación semiótica?

De esta pregunta se derivan las siguientes preguntas particulares, ¿Cómo influyen en su práctica profesional las concepciones en torno a la función que tienen los docentes? y ¿Qué papel juegan los sistemas semióticos de representación en el concepto de función que manejan los docentes?

Las matemáticas tienen una importante repercusión en el proceso educativo, para los profesores son un instrumento relevante en su práctica y formación. Esta investigación se centró en el estudio de las concepciones que tienen los docentes, en particular sobre el objeto matemático función y sus sistemas semióticos de representación y parte de dos ámbitos. El primero es el empírico, donde es posible percibir que al no existir una institución que forme docentes en el área de matemáticas para la EMS, se recurra a docentes de profesiones distintas para impartir clases de matemáticas, por lo que resulta interesante investigar si las concepciones docentes, gestadas desde las diferentes formaciones profesionales, representa un factor determinante que influye de manera directa en la forma en que se enseña el concepto de función y sus sistemas semióticos de representación. El segundo es el teórico, con lo que se rescata la importancia que tiene la génesis del concepto función, el cual nace sin una definición propia y que al construirse gradualmente provocó concepciones divergentes para la que fue utilizada en su inicio, situación que, no obstante, el tiempo transcurrido prevalece en docentes de EMS.

Objetivos

La investigación pretende estudiar y analizar las concepciones de los profesores que imparten las asignaturas del campo disciplinar matemáticas y conocimiento científico en EMS mediante la manifestación algebraica, gráfica u otra que facilite dicho análisis. Para llevarla a cabo se planteó el siguiente objetivo general y objetivos específicos.

Objetivo general

Analizar las concepciones que tienen los docentes de matemáticas de EMS en torno al objeto matemático función y sus sistemas semióticos de representación.

Objetivos específicos

1. Identificar las concepciones de los docentes de EMS en torno al concepto de función y sus sistemas semióticos de representación.
2. Describir y categorizar las concepciones que tienen los profesores de EMS sobre la función y sus sistemas semióticos de representación.
3. Determinar la influencia que tienen las concepciones de los profesores de EMS sobre la función y sus sistemas semióticos de representación en su labor docente.

Marco teórico

Las concepciones

El término concepciones es usado frecuentemente, por ello resulta importante conocer cómo se originan y organizan, Sfard considera fundamental diferenciar concepto de concepción y establece lo siguiente.

> La palabra concepto (algunas veces reemplazada por noción), será mencionada cuando una idea matemática está considerada en su forma oficial −como un constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento ideal−; el grupo total de representaciones y asociaciones internas evocadas por el concepto −la contraparte del concepto en el interior y subjetivo universo del conocimiento humano− será llamada por nosotros una concepción. (Sfard, 1991 p. 3).

Las concepciones incluyen a las creencias porque obedecen a procesos mentales construidos y establecidos que al ser epistemológicos respetan un conocimiento sobre el programa o la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas. Al respecto, Moreno y Azcárate (2003) consideran que las concepciones son organizadores implícitos de conceptos cuya naturaleza es en esencia cognitiva e incluye creencias, significados, conceptos, preferencias, entre otras, que influyen en la percepción y los procesos de razonamiento.

Sobre la formación de creencias existe consenso en señalar que su origen esta en la experiencia, la observación directa, la información recibida y en ocasiones pueden ser inferidas de otras creencias a partir de su carácter dinámico. Para Pajares (1992) estas no son estáticas, cuando se adquieren gradualmente se van construyendo y transformando al pasar el tiempo.

Con respecto a su organización, son sistemas donde se establecen y ordenan las creencias de una manera no necesariamente lógica, por ello es posible que una persona sostenga simultáneamente creencias contradictorias entre sí sin que implique un conflicto, como refiere Pajares (idem), los sistemas de creencias no necesitan consensos ni consistencia interna, lo cual es un requisito esencial de los sistemas de conocimientos ya que están abiertos a la evaluación y a la crítica.

El concepto de función

La importancia de estudiar el concepto de función se justifica a partir de la interdependencia que se da entre los conceptos matemáticos y las situaciones reales. Tall (1996) y Kieran (1995) señalan que el propósito es representar como cambian las cosas, descubrir el mundo a partir del cambio y crear objetos donde las funciones puedan representar la dependencia de algo que varía libremente a algo que varía bajo ciertas restricciones.

El concepto de función como un auxiliar de interpretaciones reales es considerado por

Sierpinska (1992), quien establece que el entendimiento de un concepto matemático son las referencias de la noción con las que se trabaja, que particularmente para la noción de función son para x e y, mundos de cambio o de objetos cambiantes y para f, mundo de relaciones entre cambios, mundo de procesos, mundo de reglas, de patrones, leyes, etc. Para justificar el estudio de la función, es fundamental la formación matemática básica del estudiante, Eisenberg (1992) señala que la función es un concepto crucial en la comprensión de la matemática y permite desarrollar en los estudiantes una sensibilidad para las funciones, las cuales deben ser uno de los objetivos primordiales del currículum. Esta descripción, permite justificar la importancia de la función como concepto abstracto para expresar cambios mediante objetos variables. A pesar de ello, la búsqueda de relaciones funcionales y causales como expresiones humanas para entender y explicar los cambios, no parece ser suficiente para dar una respuesta a la forma en como debe ser enseñada, en este sentido, se puede decir que su enseñanza se convierte en un problema práctico.

Al hablar de funciones y sus gráficas debe hablarse de dos sistemas simbólicos muy diferentes que se articulan para construir y definir conjuntamente el concepto. La gráfica y la función son sistemas comunicativos y al mismo tiempo son una construcción y organización de ideas, esta característica provoca demandas al estudiante en términos de nuevas ideas, unicidad en la notación y correspondencias simbólicas no muy fáciles de entender.

A partir de la función se puede explicar la gráfica y a partir de la gráfica se puede explicar la función, percibiendo de una manera completamente diferente ambos lados. Uno de los aspectos más importantes del concepto de función es el que tiene que ver con una variedad de posibles enlaces entre registros de representación, aunque la representación matemática generalmente se da a partir de una regla de correspondencia algebraica a parejas ordenadas y a una gráfica, o a partir de una tabla de datos en forma de parejas ordenadas a una gráfica. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) analizan los tipos de actividades que se puede generar con las funciones y sus gráficas, la representación científica procede a partir de la observación, a un arreglo de datos, a pares ordenados de datos, a la selección de ejes, a la construcción de la escala, a la gráfica y por último a la función.

El estudio de las representaciones semióticas

La parte que fundamenta el estudio de las Representaciones Semióticas (RS) para esta investigación es la teoría de registros de representación semiótica, donde se establece el uso de sistemas de RS como esencial para el desarrollo del pensamiento matemático, de acuerdo con Duval (1993), no existe otra forma de acceder a los objetos matemáticos, sino por medio de las RS. Cada registro de representación es cognitivamente complemento de lo que representa, no debe limitarse en solo uno de los registros, sino que se debe propiciarse un tipo de traducción de la información de una representación a otra. En la teoría de registros de RS, la actividad relacionada con la producción de una representación es conocida como semiósis y a la aprehensión conceptual de los objetos matemáticos se le llama noesis.

Los registros de representación favorecen las tres siguientes actividades cognitivas.

1. La Formación de una Representación Identificable, relacionada con la expresión de una representación mental.
2. El Tratamiento o transformación interna de la representación en el mismo registro en el que está dada.
3. La Conversión, que es una transformación externa en un registro distinto al registro en el que fue dada.

Existen al menos dos aspectos de la acción cognitiva relacionada con las habilidades matemáticas, uno considera diferentes registros de RS que se han desarrollado de forma concreta para los procedimientos matemáticos y el otro que considera que los objetos matemáticos no son accesibles por medio de la visualización, tal y como sucede con la mayoría de los objetos. Con estos aspectos Duval (1999) plantea dos cuestiones fundamentales para el aprendizaje, ¿cómo se aprende el cambio de registros? y ¿cómo evitar confundir un objeto con la forma en cómo se representa?

La matemática relaciona procedimientos y conversiones, diferenciar los registros de representación y conversión entre ellos es un factor fundamental para su aprendizaje, las representaciones mentales son un conjunto de concepciones o imágenes mentales que el estudiante tiene sobre un objeto, las RS son las producciones constituidas por el uso de signos, es decir, son el medio del que se dispone para manifestar de forma concreta las representaciones mentales y hacerlas accesibles a otros, por ello las RS tienen un papel importante en la enseñanza de las matemáticas debido a que permiten el acceso a los objetos matemáticos.

Las RS tienen una función comunicativa y de objetivación, son necesarias para los procedimientos matemáticos, el funcionamiento cognitivo del pensamiento, el tratamiento de la información, la toma de conciencia y la comprensión. Según Duval (1992) dichas funciones se han desarrollado en el aprendizaje de la matemática y se ha demostrado que el cambio de representación resulta para los estudiantes un procedimiento generalmente difícil por

la omisión de correspondencia entre las unidades significantes en cada uno de los registros. La falta de interpretación global de gráficas en planos cartesianos junto a la propensión que tienen los estudiantes por mecanizar procedimientos en un solo registro, por lo general queda limitada a una única forma de representación.

Metodología

En la figura 1 se puede observar el orden seguido en las consideraciones necesarias para determinar las características del trabajo.

Figura 1. Características de la investigación.
Elaboración propia (2018)

La investigación es de corte cualitativo y se coloca en el paradigma constructivista. Su punto de articulación según Zuñiga (1993), es una epistemología descriptiva centrada en cómo se conoce y comunica lo que se sabe. La característica de esta epistemología permite pensar un mundo empírico compuesto de experiencias que no pretenden la obtención de verdad en el sentido de la correspondencia con la realidad ontológica. El interés radica en conocer las concepciones desde una perspectiva holística para comprender a los docentes dentro de su propio marco de referencia. Este estudio es descriptivo porque pretende hacer precisiones relevantes de las concepciones docentes al analizar sus producciones en torno al concepto de función, es decir, una descripción en términos cualitativos de las concepciones que tienen los docentes en torno a la función y sus sistemas semióticos de representación.

Con este tipo de investigación se observó, si los docentes mantienen una visión instrumental de la disciplina, es decir, si consideran a la matemática como un conjunto de reglas y procedimientos estrechamente relacionada con el fomento del aprendizaje en los estudiantes de forma repetitiva y memorística, con la práctica constante de ejercicios y el uso de palabras clave, entre otros.

Población y muestra

El estudio se llevó a cabo en la Zona Escolar de Bachillerato General (BG44) de EMS, en el municipio de Ciudad Nezahualcóyotl, en el Estado de México, México. La Zona Escolar BG44 está conformada por 4 escuelas. La población de docentes que imparten matemáticas está compuesta por 45 profesores, de los cuales 8 egresaron de la Escuela Normal, 5 son arquitectos, 14 ingenieros, 5 contadores, 3 matemáticos, 6 físicos, 3 químicos y 1 actuario. El 40% de esta población cuenta con una Maestría en Educación. Para la investigación se utilizó una muestra homogenea con características similares y representativa de un segmento de la población (no en un sentido

estadistico, sino de prototipo) La intensión era analizar valores, experiencias y significados en torno a las concepciones de esta muestra que, a partir del criterio de saturación teórica, se redujo a 16 profesores que imparten las diferentes asignaturas del campo disciplinar de matemáticas y razonamiento complejo.

Instrumentos utilizados

Para recuperar y analizar las creencias y concepciones de los docentes de matemáticas, se utilizaron 3 instrumentos. El guion de observación (observación no participante y directa), el cuestionario de preguntas de respuesta abierta y el cuestionario de situaciones.

El primero permitió recuperar las concepciones docentes sobre la función, dentro del contexto de la investigación, la observación se utilizó para recuperar evidencias que permitieron reconocer el tipo de concepciones que tienen los docentes en torno al concepto de función y con la narración relativa se explicaron acciones en torno a las experiencias profesionales. El segundo se centró en la definición de función, el cuestionario de preguntas de respuesta abierta se conformó con 5 preguntas que permitieron la recolección de información y generó en los docentes discusiones de sus ideas y concepciones en torno al objeto en cuestión, estas se enmarcaron en la propuesta de entrevista no estructurada centrada en el problema matemático de Inglis y Mejía-Ramos (2005). El tercero permitió recuperar las producciones escritas de los docentes en torno a las diferentes representaciones de la función, con lo que se reconocieron, a partir de las producciones escritas, las dificultades que tuvieron con el concepto de función.

La selección y adaptación del cuestionario de situaciones se centró, además del establecimiento de una categorización de concepciones y dificultades, en la observación, descripción y análisis de los conocimientos manifestados por los docentes. La tabla 1 muestra la intensión de cada una de las situaciones planteadas. La situación 1, como se ve en la figura 2A, propuso a partir de un diagrama sagital la representación de la relación entre dos conjuntos, los docentes debían determinar cuál representaba una función y justificar su elección.

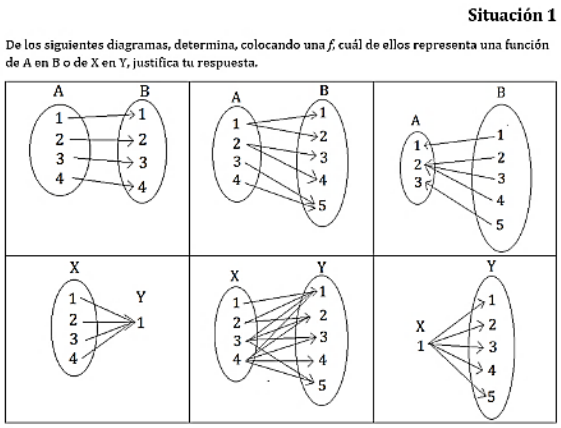


Figura 2A. Identificación de funciones a partir del diagrama sagital

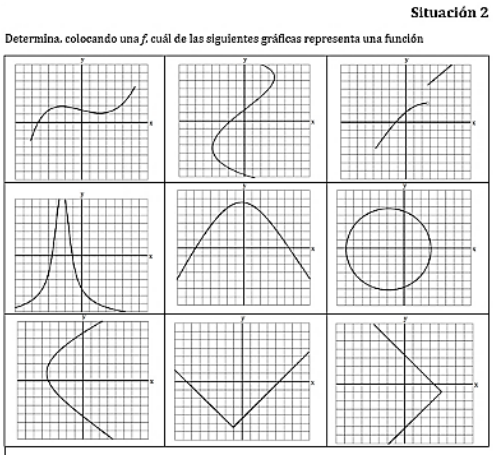


Figura 2B. Identificación de funciones a partir de la gráfica cartesiana

La situación 2 (ver figura 2B) solicitaba, a partir de la gráfica cartesiana de una función, determinar, con base en el conjunto de parejas (x, y) que pertenecen a la función $((x, y) \in f)$, cuál era una función. En la situación 3 se debía determinar que expresión algebraica corresponde a una función y conocer que el establecimiento de los conjuntos, donde x e y varían, permite determinar con mayor precisión el tipo de relación que determina una expresión algebraica, al igual que la situación 2, los docentes deberían tener conocimiento de los teoremas fundamentales para

el estudio de los lugares geométricos. Estas 3 situaciones fueron tomadas y adaptadas de Damaris Vanegas y María Escalona. Representaciones de funciones matemáticas de una variable, en Omnia, vol. 16, núm. 3, septiembre-diciembre, 2010, pp. 101-122 Universidad del Zulia Maracaibo, Venezuela.

Las situaciones 4, 5 y 6 fueron tomadas de Eugenia Marmolejo y Jesús A. Riestra. Modelo matemático del llenado de Recipientes, en *Modelling in Science Education and Learning* Volumen 6(2), No. 13, 2013. Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada. En estas situaciones los docentes debían proponer una función para explicar el fenómeno planteado y reconocer las funciones que tienen las variables que intervienen en la relación descrita con el problema planteado, como se muestra en la figura 3A y 3B.

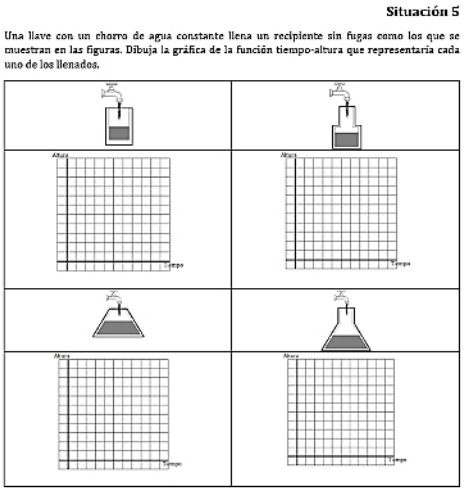


Figura. 3A El llenado de recipientes

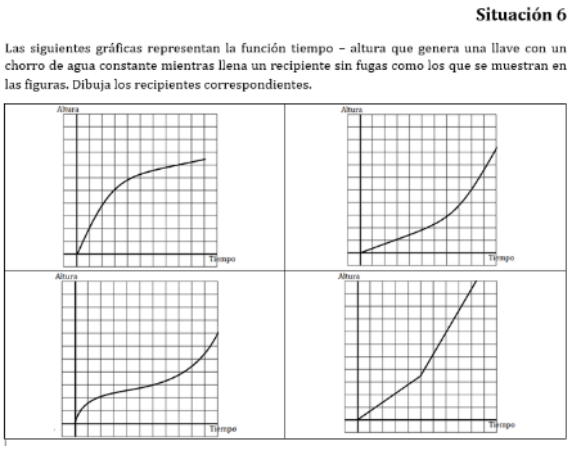
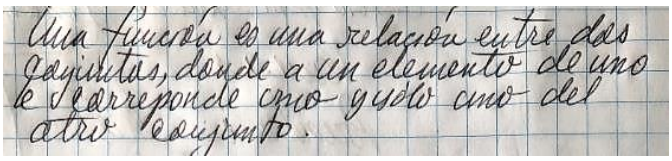


Figura. 3B La gráfica del llenado de recipientes

Resultados

El análisis de las producciones docentes se centró en sus producciones con la intensión de observar estrategias y procedimientos utilizados en la definición y las diferentes formas de representación, de igual forma se atendió la diversidad de argumentos y explicaciones dadas. Los profesores consideraron a los cuestionarios como una colección de problemas que requerían solución precisa, por ello fue posible detectar regularidades en sus respuestas, estas se organizaron en 3 categorías.

D1. Docentes con menos de 5 años de servicio y formación distinta a la docencia en matemáticas o ciencias. No establecieron con precisión posibles inconsistencias del problema, cuestionaron la representación algebraica de una función porque no se ajustó a la definición que dieron y no propusieron representaciones alternas a su definición. Recurrieron a la representación gráfica como posibilidad para asociar la definición con su representación, pero no proporcionaron por escrito ningún otro tipo de información, la figura 4 muestra una de las definiciones dadas.



Una función es una relación entre dos conjuntos, donde a un elemento de uno le corresponde uno y solo uno del otro conjunto.

Figura. 4 definición de función dada por un docente D1

Sin embargo, la representación gráfica propuesta por este docente no satisfizo dicha definición, ver figura 5

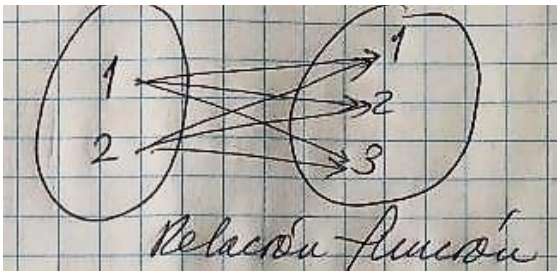


Figura. 5. Representación de una función

D2. Docentes entre 6 y 15 años de servicio y formación similar a la de matemáticas y ciencias. Al igual que los D1, no detectaron probables inconsistencias en el problema, la propuesta de definición la asociaron correctamente con su representación gráfica y casi con todas sus representaciones. En la interpretación de cantidades en problemas de variación no consiguieron proponer representaciones correspondientes, como se ve en la figura 6. La justificación planteada mostró poca información, en la mayoría de los casos los llevó a conclusiones equivocadas, como la definición conceptual de función y su respectiva correspondencia con la representación no algebraica.

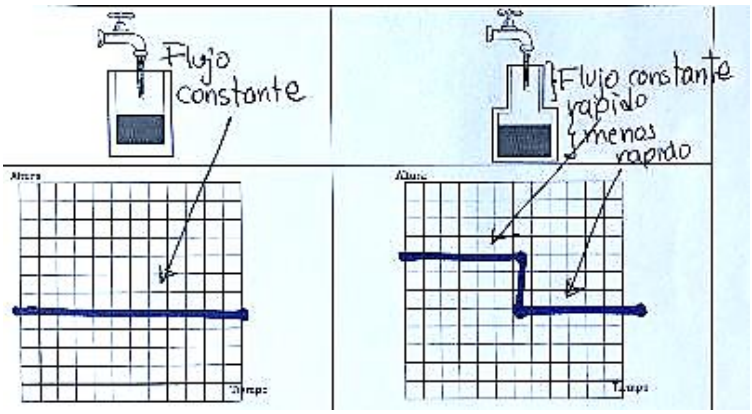
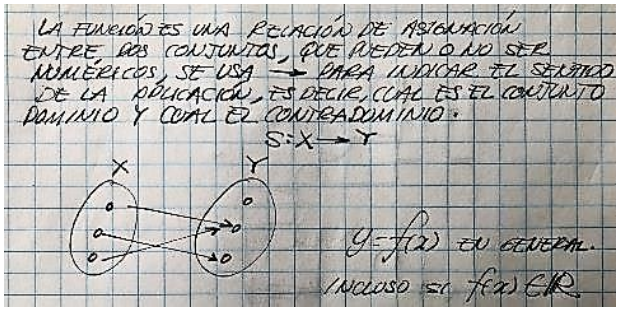


Figura. 6. Representación del llenado de recipientes

Se aseguraron de que la definición se ajustara en a la representación usada, propusieron como concepto de función una relación entre conjuntos, su representación fue una relación (sagital). Reconocieron la posibilidad de solución del problema, pero la justificación recurrió a información sin relación con la situación propuesta. Usaron recurrentemente la suposición de datos y los contrastaron con los que se proporcionaron en las situaciones, estuvieron conscientes de la existencia de la solución, pero al usar información equivocada propusieron soluciones parciales.

D3. Docentes con más de 15 años de servicio y formación matemática sólida. Su definición retomó adecuadamente las representaciones y no solo se redujo a la relación entre dos conjuntos. Mostraron conocimiento de las diferentes representaciones de la función y presentaron los procedimientos adecuados para llegar a ellas. Presentaron procesos de solución adecuados, sus planteamientos y conclusiones fueron correctos, usaron diferentes representaciones de la función, como se ve en la figura 7. El reconocimiento de las representaciones les permitió establecer generalidades en todos los niveles de representación de la función.



La función es una relación de asignación entre dos conjuntos, que pueden o no ser numéricos, se usa → para indicar el sentido de la aplicación, es decir, cual es el conjunto dominio y cual el contradominio
S:x→y

Figura. 7 Definición de función

Con esta clasificación fue posible notar de forma inicial las concepciones de los docentes. A partir de cuestionamientos de respuesta abierta, donde las funciones debieron tratarse como objetos de conocimiento, se identificó de forma general un tipo de representación de la función, que en la mayoría de los casos fue la sagital y poco se observó una asociación adecuada de la forma de una curva con su expresión algebraica (o de otro tipo) que recuperara un esquema que no fuera predominantemente figurativo.

Conclusiones

Lo encontrado enfatiza la fractura que se ha generado con las concepciones erróneas que se tienen de las bases del álgebra y el análisis de funciones, así como con todas aquellas áreas que retoman el conocimiento de las funciones como parte importante de su desarrollo. Las concepciones de los docentes llevaron al planteamiento de responsabilidades que se establecieron como fundamentales en el desarrollo didáctico del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en EMS, fue claro que en este desarrollo los docentes generaron influencia mutua sobre las concepciones de sus colegas con respecto a la formación que les otorgan a sus estudiantes, mucha de la cual consideraron esta reducida a una visión demasiado básica del concepto de función, donde frecuentemente se utiliza el registro algebraico, se obvian los procesos de articulación entre registros y se desconoce la importancia que tiene en el desarrollo de otros objetos matemáticos. En este sentido, dentro del desarrollo de la labor docente no se están diseñando situaciones que incorporen el uso de las conexiones entre diferentes registros de representación, otorgándoles poca importancia en la clase, lo cual coincide con lo establecido por Zúñiga (1993), quien considera que estos registros representan el componente fundamental en la generación de conocimiento matemático.

Con respecto al concepto de función, se concede importancia al desarrollo de la visualización, la cual es indispensable para la comprensión significativa de conceptos matemáticos complejos. Los resultados muestran que las dificultades que tuvieron los docentes mantienen relación con las formas de enseñanza y estructura de los contenidos curriculares, sin embargo, a pesar de la diferencia en el rendimiento de los docentes en el momento de aplicación del cuestionario, los resultados no constituyeron noticias nuevas. Durante el proceso de discusión con los docentes se enfatizó en el uso de diversos registros de representación semiótica, lo que debió conducir al entendimiento del concepto de función, esto evidenció que las propuestas de las situaciones para la enseñanza de la matemática en EMS rompieron con los esquemas que tradicionalmente los docentes han utilizado, en particular las actividades de modelación de fenómenos que permitieron el uso adecuado de diferentes representaciones de la función. Las diversas concepciones de los docentes indicaron que las diferentes representaciones aún están en construcción.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers, New York.

Duval, R., (1992), Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En E. Sanchez (Ed.), Antología en Educación Matemática, (pp. 125-139). México: Sección de Matemáticas Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37–65.

Duval, R. (1999). Representation visual and visualizacion: cognitive functions in Mathematical Thinking proceedings of the Annual Meeting of ther North American Chapter of the international group for the Psychology of mathematical Education.

Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sense for Functions, The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy, G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), MAA Notes Volume 25, 153 – 174

Inglis y Mejía Ramos (2005). The effect of authority on the persuasiveness of mathematical arguments. Dognition and Instruction. 27, 25-50.

Kieran, C. (1995), Functions, Graphing and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction in Integrating Research in the Graphical Representation of Functions, T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), Erlbaum Hillsdale, N.J. 189-237.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O y Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. Review of Educational Research, 60(1), 1-64.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1986) Las creencias sobre las Matemáticas en profesores de E.G.B. en formación, en Villar Angulo (Ed.), Pensamiento de los profesores y toma de decisiones, Universidad de Sevilla, Servicio de publicaciones.

Marmolejo E. y Riestra J. A (2013) Modelo matemático del llenado de Recipientes, en Modelling in Science Education and Learning Volumen 6(2), No. 13, Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada.

McEwan, H. y Bull, B. (1991). *The Pedagogic Nature of subject matter Knowledge.* American Educational Research Journal, 28(2), 316-334.

Moreno, M. y Azcárate Giménez, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las educaciones diferenciales. Enseñanza de las Ciencias.

Pajares, M.F. (1992). *Teachers' beliefs and educational research*: cleaning unp a messy contruct. Review of Educational Research Vol 62, nº 3, pp. 307-332.

Planchart, O. (2002). La Visualización y la Modelación en la Adquisición del Concepto de Función. Tesis Doctoral en Especialidad de Matemática Educativa. Universidad del Estado de Morelos.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics. Vol 22, Nº 4, pp. 1-32.

Sierpinska A. (1992), On Understanding the Notion of Function, The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy, G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), MAA Notes Volume 25, 25 &endash; 58

Solares, A. y Sandoval, I (2013). Investigaciones sobre Educación Media Superior. En Avila, A. (coord.), D. Block, A. Carvajal, P. Camarena, D. Eudave, I. Sandoval y A. Solares (2013). La investigación en educación matemática en México: 2002-2011. *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. México. COMIE/ANUIES, pp. 77-94.

Thompson, A.G. (1992). *Teacher's beliefs and conceptions*: a synthesis of the research. En D.A. Grouws, (Ed.), Handbook on mathematics teaching and learning. (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Tall, D. (1996). *Functions and calculus. En Bishop, A. J. et al. (eds), International Handbook of Mathematics Education*, 289-325 Netherlands; Kluwer.

Vanegas D. y Escalona M. (2010). Representaciones de funciones matemáticas de una variable, en Omnia, vol. 16, núm. 3, septiembre-diciembre, 2010, pp. 101-122 Universidad del Zulia Maracaibo, Venezuela.

Zuñiga, R. (1993). *La théorie et la construction des convictions en Travail social*, service social, vol. 42 n° 3, École de service social, Université Laval, p. 33-43. Conjointe département du développement.

ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS ACTITUDES QUE MANIFIESTAN HACIA LAS MATEMÁTICAS LOS PROFESORES EN FORMACIÓN DE CHILE, SEGÚN VARIABLES SOCIODEMOGRÁFICAS

A COMPARATIVE STUDY OF ATTITUDES TOWARDS MATHEMATICS SHOWN BY CHILEAN PROSPECTIVE TEACHERS; ACCORDING TO SOCIO-DEMOGRAPHIC VARIABLES

Marcelo Casis, Nuria Rico, Encarnación Castro.
Universidad Finis Terrae (Chile); Universidad de Granada (España)
mcasis@gmail.com, nrico@ugr.es, encastro@ugr.es

Resumen
Comparamos las diferencias actitudinales que manifiestan hacia las matemáticas los futuros profesores de Educación General Básica de Chile, respecto a cuatro variables sociodemográficas: semestre que cursa, género, nivel educativo de los padres y tipo de universidad (pública o privada). El cuestionario utilizado toma en consideración la componente Psico-Social de las actitudes y su carácter multidimensional, contemplando su aspecto cognitivo, afectivo y conativo. Comparamos los resultados conseguidos al medir las medias obtenidas en las escalas de motivación, ansiedad y autoconfianza. Se detectaron diferencias en la variable semestre y tipo de universidad, información que podría ser de utilidad a las instituciones formadoras.

Palabras clave: actitudes hacia las matemáticas, motivación, ansiedad, autoconfianza, matemáticas

Abstract
We compare the attitudinal differences that prospective teachers of General Basic Education show towards mathematics in Chile, with respect to four socio-demographic variables: semester they are attending, gender, parents' educational level, and type of university (public or private). The questionnaire used take into consideration the psycho-social component of their attitudes and their multidimensional nature; involving their cognitive, affective and conative aspect. We compare the results achieved when measuring the average obtained on the scales of motivation, anxiety and self-confidence. Differences were detected in the variables: semester and type of university; information that could be useful to teacher training institutions

Key words: attitudes toward mathematics, motivation, anxiety, self-confidence, mathematics

Introducción

Los datos utilizados para la confección del presente artículo, han sido obtenidos desde la tesis doctoral que el autor ha finalizado recientemente, los que no han sido divulgados ni publicados con anterioridad. Se estudian comparativamente descriptores actitudinales asociados a la dimensión personal de las actitudes en futuros profesores de Educación General Básica (EGB) de Chile, de acuerdo con variables sociodemográficas como tipo de universidad en donde cursan sus estudios (públicas o privada), nivel educativo de los padres, condición socioeconómica, entre otras. Los objetivos de este estudio son comparar dichas variables con descriptores actitudinales como son la motivación que presentan estos estudiantes hacia el trabajo matemático; el grado de autoconfianza que poseen hacia la tarea matemática, el nivel de ansiedad que les genera la disciplina, todo esto con la finalidad de comprender si los aspectos afectivos de estos estudiantes están condicionados desde las variables estudiadas.

Problema de investigación y objetivos

Se reconoce que los profesores chilenos recién egresados presentan falencias en su conocimiento profesional y disciplinar. Esta situación se ve reflejada en los resultados de la Evaluación Diagnóstica desarrollada por el Ministerio de Educación d Chile, llamada *Inicia* (2009, 2010, 2011, 2012 y 2013), y aplicada a los estudiantes de los últimos años o recién egresados de las carreras de pedagogía en educación general básica (primaria), parvularia (infantil) y media (Secundaria). La enseñanza de las matemáticas en la EGB (Educación General Básica) es una de las áreas a las que más tiempo le destina el currículum escolar, sin embargo, en la formación inicial de profesores de EGB, el tiempo destinado a la adquisición de conocimientos matemáticos resulta ser escaso. En promedio, el tiempo dedicado al aprendizaje de esta disciplina sólo alcanza el 7,2% del total de horas de formación (Casis, 2009a) y al hacer un análisis más detallado de ese porcentaje de horas se desprende que casi la totalidad de los programas de formación de profesores considera, en su malla académica, sólo aspectos teóricos y didácticos del conocimiento matemático, asignando poco o nulo interés a los que tienen relación con los elementos afectivos y socioculturales asociados al aprendizaje de las matemáticas (Casis, 2009b). Diversas investigaciones han puesto su interés en la importancia de los factores afectivos y socioculturales asociados a la educación matemática, dado que entregan información relevante respecto al fracaso escolar en la disciplina. Estos autores sostienen, que muchos de los malos resultados obtenidos por los estudiantes se deberían a factores afectivos y socioculturales, más que a factores cognitivos y que su detección temprana, sería el primer paso para abordar la problemática con eficacia (Caballero, Blanco y Guerrero, 2007; Casis, 2018; Gómez-Chacón, 2010; McLeod, 1989). En respuesta a esta problemática, indagamos sobre dos variables asociadas a ella: por una parte, la dimensión personal de las actitudes, determinada por la autoconfianza del individuo hacia la tarea matemática; la motivación que manifiesta al realizar tareas matemáticas y la ansiedad que le generan dichas tareas; y por otra, las características sociodemográficas de los individuos que cursaban la carrera de Educación Básica, como profesores en formación de Chile.

Con la finalidad de operacionalizar la problemática, nos hemos planteado un Objetivo General y una serie de Acciones Específicas, que detallamos a Continuación:

Objetivo General: “Observar diferencias actitudinales que pudieran existir entre las actitudes que manifiestan hacia las matemáticas los futuros profesores de EGB y las variables: año de carrera que cursa, género, procedencia escolar, nivel educativo de los padres, situación socioeconómica y universidad en la que cursa sus estudios.”.

Acciones Específicas: Estudiar el comportamiento de la muestra teniendo en cuenta en el estudiante:

a) el semestre que cursa
b) el género
c) el nivel educativo de los padres

d) el tipo de universidad donde estudia

Marco teórico

En el ámbito escolar y académico, se conoce que no son pocos los estudiantes que manifiestan su malestar por tener que cursar asignaturas matemáticas; otros estudiantes, en cambio, buscan cursarlas como formación complementaria a los estudios que desarrollan. Estas diferentes reacciones de agrado y desagrado han despertado, durante las últimas décadas, el interés de la comunidad científica en general y del área de didáctica de las matemáticas, en particular, en cuyo seno se han realizado trabajos de investigación relacionados con los elementos afectivos involucrados en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (p.g. Bermejo, Lago y Rodríguez, 2000; Bishop, 1988a, 1988b; Casis, Castro y Rico, 2014; Casis, Rico y Castro, 2017; Casis, 2018, 2019; Gómez-Chacón, 1997, 2000, 2010; Pérez-Tyteca, 2012; Reyes, 1984; Simon, 1982). Para los autores de esta línea de investigación, el dominio afectivo lo constituyen aquellos aspectos que van más allá de la cognición y que inciden en el aprendizaje de las matemáticas (McLeod, 1989) siendo sus descriptores más importantes las creencias, emociones, actitudes (McLeod, 1989, 1992) y valores (Bishop, 1996; Gómez-Chacón, 1997).

Las actitudes, uno de los descriptores del afecto, las entendemos como las predisposiciones que presenta un individuo frente a un objeto de actitud (en este caso las matemáticas escolares), y que se manifiesta a través de la conducta que éste aborde hacia ella (Casis, 2018). En la generación de actitudes, inciden por una parte los aspectos psicológicos individuales del individuo (motivación, autoconfianza, ansiedad, etc.), como los sociales del contexto (vínculo que establece con la asignatura a partir de la relación con individuos del contexto, como son sus familiares cercanos, profesores de matemáticas, compañeros de trabajo, etc.). En este trabajo mostramos los resultados asociados las diferencias existentes en los aspectos psicológicos individuales del individuo (que hemos delimitado como dimensión personal de las actitudes), respecto a cuatro variables sociodemográficas.

Durante largo tiempo la discusión en torno a los malos resultados que experimentan los estudiantes en educación matemática ha versado sobre aspectos cognitivos y problemáticas asociadas a los conocimientos disciplinares y didácticos que inciden en la calidad del aprendizaje matemático (Casis, 2018). Efectivamente, los elementos antes señalados tienen una incidencia directa en el fracaso escolar en matemáticas. Sin embargo, durante las últimas décadas diversas investigaciones en didáctica de las matemáticas han puesto su atención en los aspectos que van más allá de la cognición y que son determinantes en la calidad del aprendizaje matemático que adquieren los estudiantes (Mc Leod, 1989), elementos que han sido considerados como "dominio afectivo de la educación matemática" (McLeod, 1989; Mandler, 1989). Este dominio, considera como descriptores las actitudes, valores, creencias y emociones. Para Gómez-Chacón, las relaciones entre afectos y matemáticas es un tema difícil para el docente ya que debe estar preparado en aspectos relacionados con psicología y sociología para poder abordarlos adecuadamente (2010). La actitud hacia las matemáticas es considerada una variable que dirige el comportamiento de los individuos en su relación con esta materia. Están directamente relacionadas con el gusto por las matemáticas, por obtener placer cuando se trabaja con ellas y al temor a no llegar a los logros deseados. Las actitudes negativas que a veces muestran los estudiantes hacia las matemáticas se achacan a factores como no lograr entenderlas, falta de autoconfianza, ansiedad cuando han de trabajar en matemáticas y el comportamiento del profesor en su enseñanza (Casis, Rico y Castro, 2017).

De acuerdo con el marco asumido, hemos considerado la componente psicosocial de las actitudes que, por su carácter multidimensional, contempla la dimensión personal de las mismas. Nos ceñimos en este artículo a presentar los resultados del análisis de los datos aportados por los estudiantes a las preguntas relacionadas con la motivación, autoconfianza y ansiedad considerados descriptores de la dimensión personal de la actitud hacia las matemáticas, aceptando lo siguiente:

- La ansiedad matemática se puede entender como el temor del alumno ante las matemáticas y se define comúnmente como un sentimiento de tensión, miedo, miedo a no ser capaz de hacer la tarea o a fracasar en ella y que interfiere con rendimiento en matemáticas (Ashcraft, 2002). La ansiedad matemática afecta a cómo se sienten los estudiantes y se comportan (Pérez-Tyteca, Castro, Rico y Castro, 2011). Una persona que está ansiosa tiende a interpretar los sucesos como amenazas, asignándoles cierta peligrosidad (Pérez-Tyteca, 2012). Para algunos estudiantes, una ansiedad severa puede conducir a la adquisición de fobia a las matemáticas mientras que para otros puede conducir a una determinación por la consecución de mejorarla (Mutodi y Ngirande, 2014).

- La motivación se puede considerar como un sentimiento que anima a una persona a actuar o realizar una acción. La motivación inclina a las personas a hacer ciertas cosas y evitar hacer algunas otras (Hannula,2006). Un estudiante motivado hacia las matemáticas tendría tendencia hacia el estudio y utilización de las matemáticas. Aquellos estudiantes que están intrínsecamente motivados para aprender matemáticas se implican en la búsqueda y comprensión del conocimiento, participan en las tareas con las que disfrutan y el logro que obtienen repercute en su autoimagen en relación a su capacidad para enfrentarse a las tareas matemáticas (Mueller, Yankelewitz y Maher, 2011). La motivación produce emociones ya sean positivas (alegría, satisfacción, interés) o negativas (ira, tristeza, frustración).

- La autoconfianza, o confianza en uno mismo, es considerada uno de los motivadores más influyentes y los reguladores de la conducta en la vida cotidiana de las personas (Bandura, 2001). Términos tales como autoconfianza, autoeficacia, capacidad percibida y competencia percibida se han utilizado para describir la capacidad entendida por una persona para lograr un cierto nivel de rendimiento, creencia que tiene una persona en ser capaz de ejecutar una tarea específica con éxito (Druckman y Bork, 1994). La autoconfianza de una persona hacia las matemáticas puede ser provocada por la habilidad que tenga con las matemáticas (Castro de Bustamante, 2002).

Método

Este estudio es de tipo encuesta, como técnica de recogida de datos, para el que se ha realizado un diseño no experimental, transeccional o transversal de tipo exploratorio descriptivo que se desarrolla considerando las etapas señaladas por Colás y Buendía (1994).

Participantes

Los participantes son 703 estudiantes que en el año 2016 cursaban sus estudios en el primer año de la carrera Pedagogía en Educación Básica de Chile. Para dicha elección se ha aplicado un diseño muestral al total de estudiantes matriculados en el primer curso de dicha carrera, obteniendo el número de estudiantes indicado con un margen de error de ± 5%.

Instrumento

El instrumento utilizado para recoger los datos ha sido una escala de actitud tipo Likert. Estas escalas se han usado ampliamente para medir las actitudes y las creencias de los estudiantes en todos los niveles del currículo de matemáticas (Kalder y Lesik, 2011), siendo la escala de Fennema y Sherman (1976) la más utilizada.

Para este trabajo hemos construido una escala adaptada a nuestros propósitos a partir de tres escalas diferentes de actitud y la creación de algunos ítems nuevos. Las escalas consideradas han sido: escala de actitudes y matemáticas (Fennema y Sherman, 1976); escala de actitudes y emociones ante las matemáticas (Caballero, Blanco y Guerrero,

2007) y escala de factores asociados a la actitud hacia las matemáticas (Candia, Navarro y Jacobo, 2009). A partir de estos instrumentos, hemos construido nuestra escala con la que indagar sobre las actitudes hacia las matemáticas. Para ello, hemos tomado algunos ítems de las escalas antes mencionada y redactados otros, que satisficieran nuestros propósitos, respetando las etapas de elaboración de un instrumento (Donoso, Rico y Casis, 2013), como la confiabilidad y validez. El conjunto de ítems (enunciados la mitad en negativo) se clasificaron en función de la o las variables de actitud que interesaba medir que habían sido establecidas de acuerdo a los objetivos planteados en la investigación, y a las variables que de ahí surgieron

Análisis

Con los datos recogidos hemos identificado la puntuación media obtenida por los participantes, tanto en las escalas de cada categoría de la dimensión personal, como en la totalidad de la dimensión, con la finalidad de determinar la orientación que presentan las actitudes personales de los profesores de educación primaria en formación de Chile.

Para la interpretación de los resultados nos valemos de los tres elementos característicos de las actitudes (Carver y Scheiler, 1997), referidos al signo, dirección y magnitud (positivas o negativas). Para tal efecto, utilizamos el valor de media 3 como valor neutro o indiferencia del individuo respecto al descriptor actitudinal a medir. Cualquier puntuación mayor a 3 representaría una orientación positiva hacia el constructo. Cuanto más cercana a 5 esté la media, podemos inferir que más positiva e intensa es la manifestación del constructo. Del mismo modo, cualquier puntuación menor a 3 representaría una orientación negativa hacia el constructo, tal como lo muestra el rango de utilización de medias, usado por Casis, (2019) de la Figura 1. La herramienta escogida para implementar este análisis ha sido el paquete estadístico Statitiscal Package for the Social Sciences (SPSS) en su versión 20.

Detallamos a continuación los resultados obtenidos para la escala de la dimensión personal (autoconfianza, motivación y ansiedad), comparándolas con las variables semestre (si el estudiante cursa primer o último año); género; nivel educativo de los padres; y, tipo de universidad en que estudia (pública o privada). Comparamos las medias, mediante prueba no paramétrica (Kruskal Wallis), por tratarse de datos que no responden a hipótesis de normalidad.

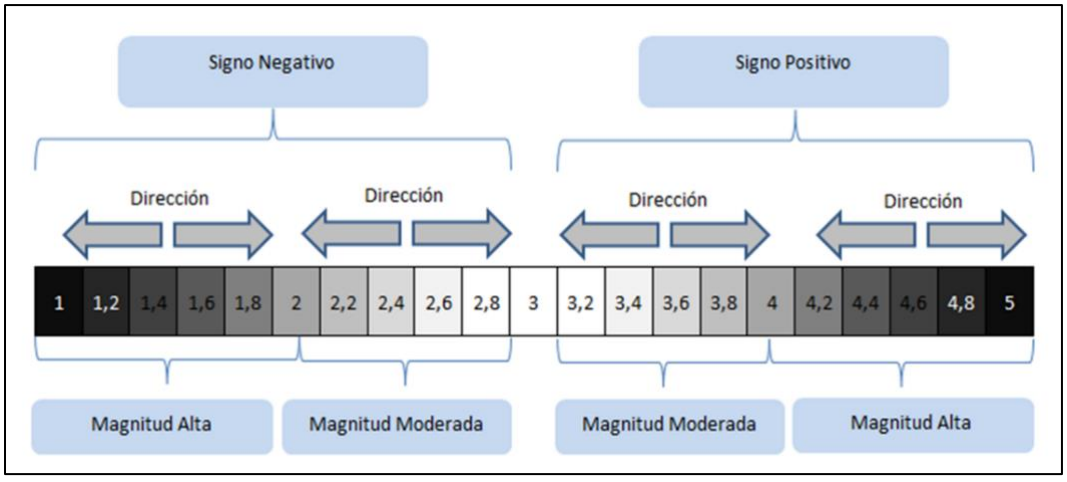


Figura 1: Rango de utilización de medias (Casis, 2019)

Resultados

Estudio de la Dimensión Personal, según Semestre

La dimensión personal está compuesta por las categorías autoconfianza, motivación y ansiedad. En la Tabla 1 y Figura 2 se muestran las medias obtenidas en las escalas asociadas a esta dimensión para el primer y último año de estudios. En la Tabla 1 mostramos también el p-valor obtenido al comparar la puntuación media. Los datos obtenidos nos permiten decir que no existen diferencias significativas en la categoría ausencia de ansiedad, entre los individuos de primer y último año. Sí se observan diferencias significativas en cuanto a la autoconfianza y a la motivación.

Tabla 1: Puntuaciones medias obtenidas en la dimensión personal en estudiantes de primer y último año y p-valores asociados al contraste sobre igualdad de medias.

Categoría	Media Primer Año	Media Último Año	Sig.
Autoconfianza	3,256	3,485	0,001
Motivación	3,594	3,807	0,002
Ausencia de ansiedad	3,242	3,323	0,273
D. Personal	3,376	3,538	0,009

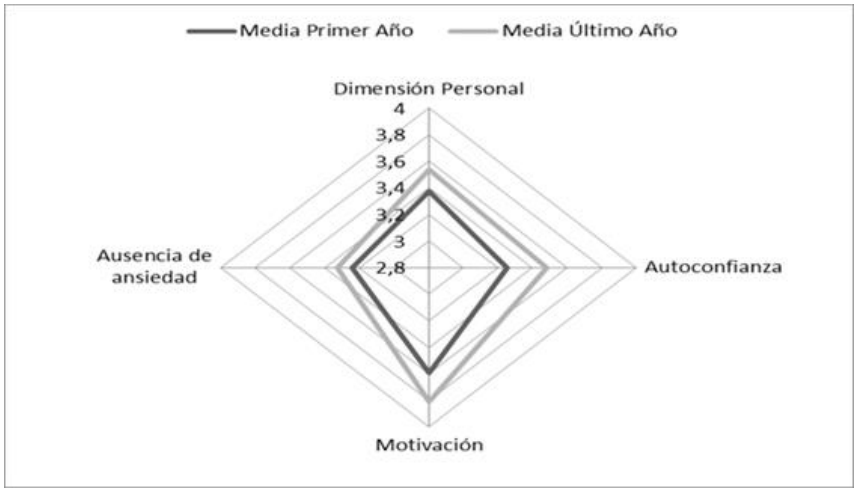


Figura 2: Gráfico puntuaciones medias dimensión personal

A partir de la información recogida, podemos afirmar que en las tres categorías los estudiantes de primer año puntúan más bajo que los de último año y que las diferencias son significativas para la autoconfianza y la motivación. En el estudio de la dimensión personal de la actitud se observa que también existe una diferencia significativa entre los estudiantes de primer y último año, siendo más positiva en aquellos que finalizan su formación profesional.

Estos resultados nos permiten inferir que los estudiantes para maestros chilenos, del último curso, tienen mejores valoraciones hacia las matemáticas que sus compañeros que inician su proceso formativo. Al respecto, conjeturamos que la formación académica, se hace cargo también de mejorar el aspecto afectivo hacia la disciplina del estudiante.

No tenemos información, si esto obedece a una acción premeditada de las casas de estudios o, se logra como consecuencia de un correcto trayecto formativo, interrogantes que nos permiten proyectar nuestro estudio a una futura investigación que indague sobre estos aspectos.

Estudio de la Dimensión Personal según Género

En la Tabla 2 y Figura 3 se muestran las medias obtenidas en las escalas de la dimensión personal y en cada una de sus categorías para mujeres y hombres. En la tabla mostramos también el p-valor obtenido al comparar la puntuación media. Los valores obtenidos nos permiten decir que tanto en la dimensión personal como en todas sus categorías (ansiedad, autoestima y motivación), puntúan más alto los hombres que las mujeres. La motivación presenta los valores más similares, y en la autoconfianza se observa la mayor diferencia en las medias obtenida. Sin embargo, estas diferencias no son significativas dado que en todas el p-valor es > 0,05.

Tabla 2: Puntuaciones medias obtenidas en la dimensión personal según género de los estudiantes y p-valores asociados al contraste sobre igualdad de medias.

Categoría	Mujer	Hombre	Sig.
Autoconfianza	3,355	3,535	0,077
Motivación	3,703	3,734	0,769
Ausencia de Ansiedad	3,270	3,391	0,269
D. Personal	3,450	3,553	0,267

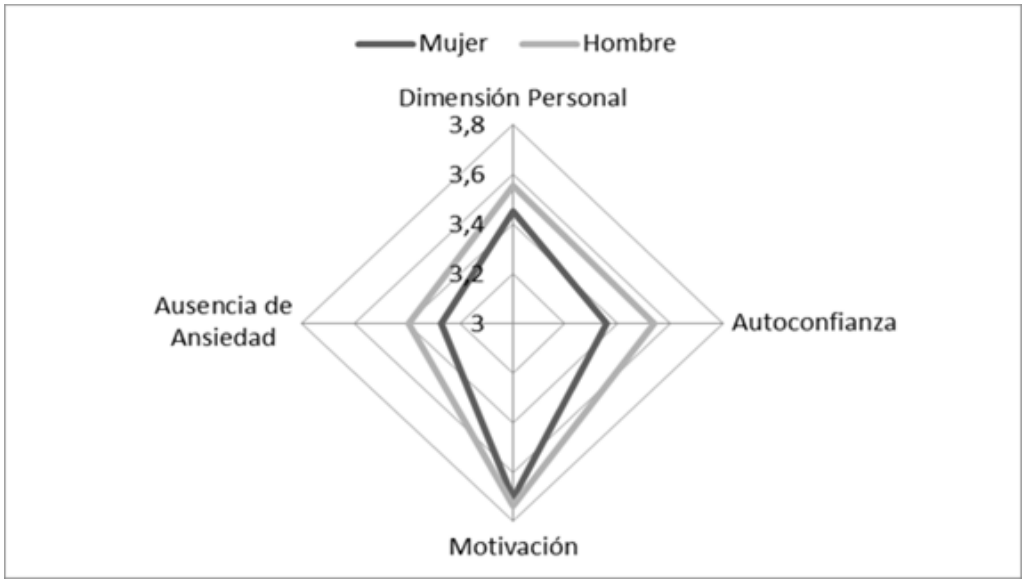


Figura 3: Gráfico puntuaciones media dimensión personal según género

Los resultados ponen de manifiesto que nuestro estudio, no logra determinar diferencias actitudinales entre hombres y mujeres, respecto a la educación matemática. Cabe destacar que nuestro estudio clasificó a los estudiantes dos conglomerados (hombre – mujer), lo que nos permite a futuro proyectar el trabajo en indagación de actitudes incorporando a la población transgénero.

Estudio de la Dimensión Personal, según Nivel Educativo de los Padres

Tabla 3: Puntuaciones medias obtenidas en la dimensión personal en estudiantes según procedencia escolar y p-valores asociados al contraste sobre igualdad de medias

Categoría	Media E. Básica.	Media E. Media	Media Univ Incomp.	Media Univ. Compl.	Sig.
Autoconfianza	3,376	3,335	3,263	3,490	0,150
Motivación	3,762	3,739	3,759	3,627	0,467
Ausencia de Ansiedad	3,361	3,252	3,166	3,362	0,347
D. Personal	3,502	3,455	3,396	3,491	0,814

En la Tabla 3 y la Figura 4 se muestran las medias obtenidas en la dimensión personal y de cada una de sus categorías al medirlas según el nivel educativo máximo que tienen los padres. Incorporamos también en la tabla señalada el p-valor obtenido al comparar la puntuación media. Los valores obtenidos nos permiten decir que los estudiantes cuyos padres (al menos uno de ellos) tienen el nivel más bajo de escolarización de todos los conglomerados comparados, son los que puntúan más alto en todos los constructos, menos en la autoconfianza. Los estudiantes cuyos padres tienen educación universitaria finalizada, puntúan más alto en autoconfianza y ansiedad, pero más bajo que el resto de los conglomerados en motivación. Sin embargo, ninguna de las diferencias que puedan observarse es significativa. Respecto a la dimensión personal, puntúan más alto los estudiantes cuyos padres tienen el nivel educativo de EGB, es decir lo que tienen más baja escolarización, luego los con padres con estudios universitarios completos. Más abajo los aquellos con educción media y finalizan el recuento los que cuentan con estudios universitarios incompletos. Las diferencias observadas no son significativas.

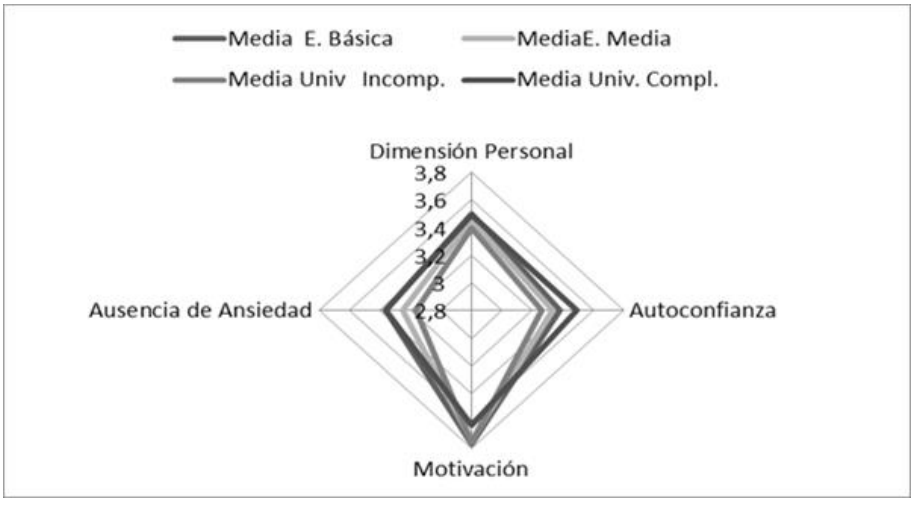


Figura 4: Gráfico puntuaciones media dimensión personal según nivel educativo de los padres.

Los resultados muestran que no logramos determinar diferencias actitudinales a partir del nivel educativo de los padres. Aunque si se observan en el descriptor ausencia de ansiedad, estas diferencias no pueden ser consideradas significativas.

Estudio de la Dimensión Personal según tipo de Universidad

Tabla 4: Puntuaciones medias obtenidas en la dimensión personal en estudiantes según el tipo de universidad al que pertenecen y p-valores asociados al contraste sobre igualdad de medias.

Categoría	Media Univ. Públicas	Media Univ. Privadas	Sig.
Autoconfianza	3,505	3,251	0,000
Motivación	3,797	3.619	0,010
Ausencia de ansiedad	3,437	3,134	0,000
D. Personal	3,580	3,347	0,000

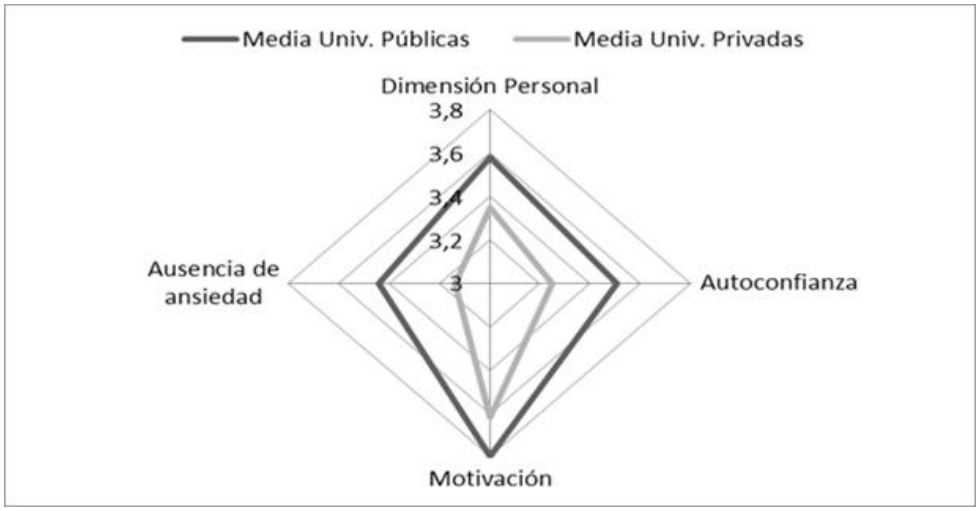


Figura 5: Gráfico puntuación media dimensión personal según tipo de universidad.

En la Tabla 4 y Figura 5 se muestran las medias obtenidas en las escalas de la dimensión personal y en cada una de sus categorías según el tipo de universidad al que pertenecen los estudiantes. En la Tabla mostramos también el p-valor obtenido al comparar la puntuación media. Los valores obtenidos nos permiten decir que en todas las escalas estudiadas los estudiantes de universidades públicas puntúan más altos que los de universidades privadas, tanto en la dimensión como en sus categorías. Al considerar el p-valor en estas comparaciones de medias, apreciamos que se observan diferencias significativas en todas las escalas estudiadas. El constructo que manifiesta la mayor diferencia es el de ausencia de ansiedad.

Inferimos con ello que los estudiantes de universidades públicas presentan niveles actitudinales significativamente más altos que los de universidades privadas. Esta información, debiera ser consideradas por este último tipo de instituciones, con la finalidad de revertir estos valores.

Conclusiones

Varios son los autores que sostienen, entre otros aspectos, que las actitudes pueden modificarse dado su carácter dinámico (Kelman, 1978), pese sus características de estabilidad y resistencia (Briñol, Falces y Becerra, 2007). En nuestro estudio por semestre, comparamos dos conglomerados diferentes, y a partir de los resultados obtenidos, estamos en condiciones de inferir ciertas cuestiones. En primer lugar, observamos diferencias actitudinales entre los estudiantes de primer año y los de último año, sin embargo, al ser muestras distintas, solo podemos hipotetizar que dichas diferencias podrían responder a cambios actitudinales que experimentan los estudiantes a medida que desarrollan su proceso formativo. En este sentido, los resultados obtenidos, concordarían con Sarabia (1992) en términos que "… el transcurso de experiencias a lo largo del tiempo y de situaciones diferentes, las actitudes de una persona van experimentando cambios" (p. 146). En nuestro estudio, se observan diferencias significativas en las categorías motivación y autoconfianza. Si bien, hay diferencias en la ausencia de ansiedad estas no son significativas.

Estos resultados nos permiten inferir que los estudiantes que finalizan su formación académica están más motivados y se sienten más seguros al realizar tareas matemáticas, por consiguiente, creemos que el proceso formativo fue relevante, en cuanto quienes inician su proceso formativo, muestran valores más descendidos en estos aspectos. Con la finalidad de comprender estas diferencias actitudinales, utilizamos lo que Kelman (1978), denomina la fuente de los cambios actitudinales. Dicha fuente está determinada por las discrepancias, comprendidas como la disyuntiva entre actitudes personales, arraigadas en el sujeto y asociadas al nivel de estabilidad, pero que discrepan con informaciones recibidas desde el entorno y aceptadas como válidas por el sujeto. Consideramos ese entorno, como la formación matemática recibida durante los años de formación, existiendo la posibilidad que existan otras fuentes de discrepancia provenientes de otros entornos. Una segunda discrepancia, según el autor, estaría determinada por las actitudes propias, y las de otras personas que al individuo le resultan significativas. En este grupo de "otras personas" podemos ubicar a los docentes encargados de propiciar los aprendizajes matemáticos, como sus compañeros de clases.

Finalmente, una tercera discrepancia está definida por las actitudes personales del estudiante, con las acciones propias del individuo, que según Kelman, esta forma de discrepancia sería la principal fuente de cambio actitudinal. A la luz de los resultados, creemos que estas acciones propias del individuo podrían relacionarse con las prácticas docentes. La totalidad de las carreras analizadas someten a los estudiantes a prácticas tempranas y progresivas, lo que permitiría relacionar el tercer tipo de discrepancia, con este aspecto formativo de las universidades chilenas. Si entendemos el cambio actitudinal para modificar la conducta del individuo (teoría de la persuasión), el éxito del mensaje persuasivo, que debiera haber tenido el proceso formativo estaría relacionado con la fuente o emisor del mensaje (credibilidad que le otorga el estudiante a sus profesores); contenido del mensaje (calidad de la enseñanza), contexto (el entorno socio afectivo en que se desarrollan las clases de matemáticas). Sin embargo, para que el mensaje persuasivo tenga éxito, dependerá del nivel en que el receptor de deje persuadir, entendido como la susceptibilidad (Castro, 2002; Hovland, 1959). El nivel de susceptibilidad estará influenciado por la edad, nivel educativo, afecto, entro otros.

En cuanto a la variable tipo de universidad, en diez (de catorce) de las categorías estudiadas se observaron diferencias significativas en las actitudes manifestadas de acuerdo al tipo de universidad en que se siguen los estudios. Es así como las universidades públicas siempre puntuaron significativamente más alto que los de las universidades privadas. Inferimos que en las universidades públicas, las carreras de pedagogía tienen larga data, las características de los docentes que allí desarrollan su labor, están asociadas a grados académicos y experiencia docente. Por otro lado, las universidades privadas, no siempre la docencia está asociada a una carrera académica y varias de estas universidades participantes del estudio, en la actualidad han cerrados sus programas. Este tipo de antecedentes, permiten concluir que efectivamente la calidad de los programas formativos, es un elemento que permite asociar calidad formativa con tipo de actitud desarrollada.

Respecto a las diferencias actitudinales entre hombre y mujeres, nuestros resultados se oponen a los obtenidos por Gil, Blanco y Guerrero (2006) por cuanto en sus estudios, ponen de manifiesto que las mujeres son más proclives a experimentar emociones negativas al momento de realizar una tarea matemática y los hombres mostrarían afectividad más positiva hacia las matemáticas que las mujeres Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios (2013). Nuestros resultados ponen de manifiesto que no habría diferencias significativas en ninguna categoría de ninguna de las dimensiones estudiadas. Los trabajos de Fennema y Sherman, 1976; Frost, Hyde y Fennema, 1994; Leder, 1995; Pérez-Tyteca, 2012, también mostraron cierta tendencia a catalogar a las mujeres como más ansiosas, con actitudes más negativas y con afectividad descendida respecto a los hombres, que a diferencia del nuestro, no logramos observar diferencias respecto al género. En la misma línea, Estrada, Batanero y Fortuny (2004), tampoco encontraron diferencias significativas entre futuros profesores y futuras profesoras de infantil, y primaria, resultados que estarían más en sintonía con los obtenidos en el presente estudio.

Enfatizamos que los resultados obtenidos proporcionan información relevante a las instituciones formadoras de profesores, dado que algunas de las diferencias detectadas, podrían minimizarse si los programas de formación inicial docente, consideraran dentro de la oferta formadora, la enseñanza explícita del dominio afectivo en sus estudiantes. También pueden hacerles reflexionar sobre la influencia que pueden ejercer los académicos en la formación de actitudes sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que a menudo, subestiman los afectos como parte integral de la formación matemática de los individuos (Aljaberi, 2014). Aspectos que pueden hacer más efectiva la gestión académica de una institución. En esta misma línea, estos resultados aportan al desarrollo del marco teórico, en expansión, del Dominio Afectivo, ya que cada uno de los trabajos empíricos que se elaboran a su amparo, son un claro aporte a su progreso, dentro de la Matemática Educativa.

Referencias bibliográficas

Ashcraft, M. H. (2002). Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences. *Current Directions in Psychological Science, 11*(5), 181-185.

Aljaberi, N. M. (2014). Pre-Service Elementary School Teachers' Level of Mathematical Thinking and their Attitudes toward Mathematics. *Journal of Education and Human Development, 3*(3), 181-195.

Bandura, A. (2001). Social cognitive theory. *Annual Review of Psychology, 52*, 1-26.

Bermejo, V; Lago, M y Rodríguez, P. (2000). Las creencias de los alumnos y profesores sobre las matemáticas. En Betián, J. (Cood*.), Intervención psicopedagógica y currículum escolar.* (pp.129-151). Madrid: Ediciones Pirámide.

Bishop, A. (1988a). *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bishop, A. (1988b). Aspectos sociales y culturales de la matemática. *Enseñanza de las ciencias, 6,* (2), 121-125.

Bishop, A. (1996). *How should mathematics teaching in modern societies relate to cultural values- some preliminary questions.* Paper presented at the Seventh Southeast Asian Conference on Mathematics Education, (june, 3-7), Hanoi, Vietnam.

Caballero, A., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2007). Las actitudes y emociones ante las Matemáticas de los estudiantes para Maestros de la Facultad de Educación de la Universidad de Extremadura. Comunicación presentada en el Grupo de Trabajo "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor", en el XI SEIEM. *Simposio de Investigación y Educación Matemática, celebrado en la Universidad de La Laguna*.

Candia, P., Navarro, L. y Jacobo, A. (2009). *Actitud hacia las matemáticas de estudiantes de ingeniería de un tecnológico del sur de Sonora*. Manuscrito no publicado. Instituto tecnológico superior de Cajeme. México.

Carver, Ch. y Scheier, M. (1997). *Teorías de la personalidad.* México: Prentice-Hall.

Casis, M. (2009a). *La etnomatemática en el currículo escolar chileno*. (Tesis de DEA). Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Universidad de Granada. Granada, España.

Casis, M. (2009b). *Presencia de la variable socio cultural de las matemáticas en la formación inicial del profesorado de educación general básica chileno*. (Tesis de Máster). Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. Granada, España.

Casis, M. (2018). *Dominio afectivo y educación matemática: claves para comprender la influencia de la afectividad y las actitudes en la construcción del conocimiento matemático.* Santiago: Ediciones Universidad Finis Terrae.

Casis, M. (2019). Actitudes que manifiestan hacia las matemáticas los profesores en formación de educación básica de Chile. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Casis, M., Castro E. y Rico N. (2014). Actitudes hacia las matemáticas de los futuros profesores de E.G.B. de Chile. Estudio de cuatro descriptores actitudinales. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27*, 1983-1991. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Casis, M., Rico, N. y Castro, E. (2017). Motivación, autoconfianza y ansiedad como descriptores de la actitud hacia las matemáticas de los futuros profesores de educación básica de Chile. *PNA, 11*(3), 181-203.

Castro de Bustamante, J. (2002). *Análisis de los componentes actitudinales de los Docentes hacia la enseñanza de la Matemática*. (Tesis doctoral). Universitat Rovira i Virgili. Tarragona, España

Colás, M. y Buendía, L. (1994). *Investigación Educativa*. Sevilla: Ediciones Alfacar.

Donoso, P., Rico, N. y Casis, M. (2013). Etapas de elaboración de un instrumento para indagar sobre actitudes hacia las matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 211-218). Granada, España: Comares.

Druckman, D. y Bork, R. A. (Eds.) (1994*). Learning, remembering, believing*. Washington, DC: National Academy Press.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(2), 263–274.

Fennema, E. y Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. *Catalogue of selected documents in psychology, 6*. 324-326.

Frost, L., Hyde, J. y Fennema, E. (1994). Gender, mathematics performance, and mathematics related attitudes and affect: a meta-analytic synthesis. *International Journal of Educational Research 21*, 373–385.

Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2,* 15-32.

Gómez-Chacón, I. M. (1997). Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Matemática Emocional. Los efectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M.M. Moreno, A Estrada, J, Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en educación matemática XIV* (pp. 121-140). Lleida: SEIEM.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: Goals reflected in emotions. Educational *Studies in Mathematics, 63*(2), 165-178.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T. y Palacios, A. (2013). Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero y J.A. Cárdenas (Eds.), *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas* (pp.217-242). Badajoz, España: DEPROFE.

Hovland, C. (1959). Reconcilling conflicting results derived from experimental and survey studies of attitude change. *American Psychologist, 14* (I), 8-17.

Kalder, R. S. y Lesik, S. A. (2011). A classification of attitudes and beliefs towards mathematics for secondary mathematics pre-service teachers and elementary pre-service teachers: An exploratory study using latent class analysis. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The journal, 5*.

Kelman, H. (1978). *A social international theory of emotions*. Nueva York. Wiley.

Leder, G. (1995). Equity inside the mathematics classroom: Fact or artifact. *New directions for equity in mathematics education*, 209-224.

Mandler, G. (1989). Affect and Learning: Reflections and Prospects. En D.B. Mc Leod y V.M Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving. A new perspective*. Springer-Verlag. New York, pp. 220-234.

McLeod, D. (1989): Beliefs, attitudes, and emotions: new view of affect in mathematics education. En D. B. McLeod & V.M. Adams (eds.). *Affect and mathematical problem solving:A new perspective.* (pp.245-258). New York: Springer-Verlang.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-598). New York: Macmillan.

Mueller, M., Yankelewitz, D. y Maher, C. (2011). Sense making as motivation in doing mathematics: Results from two studies. *The Mathematics Educator, 20*(2), 33-43.

Mutodi, P. y Ngirande, H. (2014). Exploring mathematics anxiety: Mathematics students' experiences. *Mediterranean Journal of Social Sciences, 5*(1), 283- 294.

Pérez-Tyteca. P. (2012). La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de la elección de carreras. (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. Granada.

Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 237-250

Reyes, L. (1984). Affective variables and mathematics education. *Elementary School Journal, 84*, 558-581.

Sarabia, B. (1992). El aprendizaje y la enseñanza de las actitudes. En P. Gil (Ed.). *Los contenidos en la reforma: Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes.* (pp. 133-198). Madrid: Santillana.

Simon, H. (1982). Comments. En M.S. Clark & S.T. Fiske (Eds.). *Affect and cognition* (pp. 333-342). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ANSIENDAD MATEMÁTICA Y SU RELACIÓN CON ALGUNAS VARIABLES EN FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA DE LA ZONA SUR DE COSTA RICA

MATHEMATICAL ANXIETY AND ITS RELATIONSHIP WITH SOME VARIABLES IN PROSPECTIVE PRIMARY TEACHERS OF THE SOUTHERN AREA OF COSTA RICA

Johan Espinoza González, Fabián Jesús Hernández Vargas
Universidad Nacional (Costa Rica)
jespinoza@una.ac.cr, fabian.hernandez.vargas@una.ac.cr

Resumen
Se presenta un estudio sobre la ansiedad matemática de 238 estudiantes para maestros de educación primaria de la zona sur de Costa Rica y su relación con las variables sexo, universidad en la que estudia, modalidad en la que se graduó de secundaria, lugar de procedencia, rendimiento académico, año que cursa la carrera y edad. Para ello, se empleó una metodología descriptiva transversal, en el que se aplicó una adecuación del instrumento "escala de actitudes hacia la matemática" elaborada por Fennema & Sherman (1976) a los sujetos de la muestra. Los resultados concluyen que los estudiantes poseen un nivel medio de ansiedad hacia la Matemática. Además, resultó que las mujeres, los estudiantes que tienen menor rendimiento académicoy que provienen de la Universidad Internacional San Isidro Labrador, sede Pérez Zeledón son los que presentan mayores niveles de ansiedad hacia la matemática.

Palabras clave: ansiedad matemática, maestros de primaria

Abstract
This paper presents a study on the mathematical anxiety of 238 elementary school prospective teachers of the south zone of Costa Rica; and its relationship with the variables: sex, university where they study, modality in which they graduated from secondary school, place of origin, academic performance, year of the degree they are studying, and age. With this aim in mind, a descriptive transversal methodology was used, by applying an adaptation of Fennema& Sherman's instrument, "scale of attitudes towards mathematics", to the subjects of the sample. The results show that students have a medium level of anxiety towards Mathematics. In addition, it turned out that women, and students with lower academic performance, who come from San Isidro Labrador International University, Perez Zeledón campus, are the ones with the greatest level of anxiety towards mathematics

Key words: mathematical anxiety, elementary school teachers

Introducción

La matemática es una disciplina que puede llegar a generar sentimientos negativos en los estudiantes, afectando su rendimiento académico y la percepción que estos tienen sobre dicha asignatura. De hecho, existen enfoques que explican la relación de las matemáticas con diferentes factores que afectan su desempeño en clase. Uno de ellos es la Ansiedad que los estudiantes presentan hacia esta asignatura. De acuerdo con Pérez-Tyteca & Castro (2011), la Ansiedad Matemática (AnMA) se concibe como la ausencia de confort que presenta un sujeto cuando se enfrenta a tareas matemáticas y que se manifiesta mediante síntomas como la tensión, nervios, preocupación, miedo, bloque mental, entre otros.

Varios estudios han abordado esta problemática con estudiantes de diferentes niveles educativos y concluyen sobre los efectos que ésta tiene cuando los estudiantes se enfrentan a tareas matemáticas. Sin embargo, la AnMa no es una cuestión exclusiva de esta población, sino que también es una actitud presente en docentes y aquellos que cursan una carrera universitaria para ser maestros de primaria (Guillory, 2009; Monje, Pérez-Tyteca, & Castro, 2012; Peker, 2009; Sánchez, 2013). Este hecho resulta preocupante porque ésta se mantiene presente aun cuando ejercen la profesión, lo que incide en el agrado que muestran hacia esta asignatura y en el desarrollo de su práctica docente (Çatlıoğlu, Gürbüz, & Birgin, 2014; Sánchez, 2013). Además, profesores con alto niveles de AnMa pueden producir en los estudiantes una serie de repercusiones como bajo rendimiento académico, concreción frecuente de errores en clases, desinterés por la materia y, en general, problemas de aprendizaje hacia esta disciplina (Pérez-Tyteca & Castro, 2011; Ureña, 2015).

Considerando esta situación, se hizo un estudio que analiza el nivel de AnMA que presentan una muestra de estudiantes para maestros de la zona sur de Costa Rica y su relación con variables como sexo, la universidad en la que cursa la carrera, la modalidad en que se graduaron de secundaria, el lugar de procedencia, su rendimiento académico en la última prueba de matemática, el año que cursan de la carrera y la edad. Este estudio forma parte de un proyecto de investigación más extenso que se realiza en la Universidad Nacional, Sede Regional Brunca, que analiza los niveles de ansiedad hacia la matemática y su enseñanza de futuros maestros de educación primaria en la zona sur de Costa Rica (Código SIA 0430-14).

En el siguiente apartado se presenta de forma breve un acercamiento a la conceptualización del término Ansiedad Matemática, así como las repercusiones de ésta en los estudiantes.

Marco teórico

La ansiedad matemática o ansiedad hacia las matemáticas es relativamente reciente y tiene sus orígenes en el estudio de Richardson & Suinn (1972), quién la describe como *"el sentimiento de tensión y ansiedad que interfieren en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas"* (p. 551). También es entendida como un miedo irracional que dificulta la realización de tareas matemáticas en diversas contextos de la vida académica y cotidiana del sujeto (Gresham, 2010) o como la impotencia y pánico que experimenta el sujeto al enfrentarse a tareas matemáticas (Bursal & Paznokas, 2006).

Wood (1988) también hace referencia a este constructo y menciona que consiste en *"la ausencia de confort que alguien podría experimentar cuando se le exige rendir en matemáticas"* (p. 11). De igual forma Tobias & Weissbrod (1980) afirman que *"la ansiedad matemática describe el pánico, indefensión, parálisis, y desorganización mental que surge cuando a un sujeto se le exige resolver un problema matemático"* (p. 65). Por último, Fennema & Sherman (1976) consideran que la ansiedad matemática consiste en *"una serie de sentimientos de ansiedad, terror, nerviosismo y síntomas físicos asociados que surgen al hacer matemáticas"* (p. 4).

En este estudio se toma como referencia la concepción dada en Pérez-Tyteca & Castro (2011), quienes la definen como un

> (…) estado afectivo caracterizado por la ausencia de confort que puede experimentar un individuo en situaciones relacionadas con las matemáticas tanto de su vida cotidiana como académica y que se manifiesta mediante un sistema de respuestas que engloban una serie de síntomas, como son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental (p. 472).

En relación con la AnMA y su repercusión en el desempeño docente, Tobias (1978) afirma que ésta repercute en la forma de desarrollar la asignatura, ya que disminuye las habilidades necesarias para enseñar y le incapacita para concentrarse en una situación matemática. Asimismo, Bursal & Paznokas (2006) y Swars, Daane, & Giesen (2006) (citados en Sánchez, 2013) consideran que los futuros maestros con menos AnMA tienen más confianza y eficacia para enseñar matemáticas elementales que sus compañeros que tienen mayores niveles.

Karp (1991) también afirma que los docentes con actitudes negativas hacia la matemática se centran sus clases en el uso de reglas y algoritmos, fomentando la memorización y el aprendizaje dependiente y pasivo por parte de los estudiantes; mientras que aquellos con actitudes positivas utilizan métodos que fomentan la iniciativa y la independencia, centrándose en el descubrimiento y las explicaciones de por qué los algoritmos funcionan y cómo las habilidades se interrelacionan.

Por último, un maestro con AnMA presenta generalmente ansiedad ante la enseñanza de la misma, lo que afecta su desempeño como docente y, por tanto, el proceso de enseñanza y aprendizaje (Brown, Westenskow & Moyer-Packenham, 2011). Este tipo de ansiedad se refiere a los sentimientos de tensión que siente el docente al enseñar conceptos, teorías, fórmulas matemáticas o la resolución de problemas (Peker, 2006). Algunos de sus síntomas son el nerviosismo extremo, la incapacidad de concentrarse y oír a los estudiantes, el sudor en las palmas de las manos, entre otros.

En Costa Rica, los autores de este trabajo hicieron un primer estudio sobre la AnMA en futuros maestros de primaria y resultó que este colectivo presenta un nivel medio, lo que evidencia un temor hacia dicha asignatura, que posteriormente pueden transmitir al enseñarla (Hernández & Espinoza, 2018).

Así, considerando estos contextos, se plantea la necesidad de estudiar la ansiedad matemática en los futuros maestros de primaria de la zona sur de Costa Rica, y la relación que existe entre las variables de índole social, demográfica y académicas.

Metodología

Se toma como referencia un muestreo probabilístico por conveniencia, en el que se utilizó una metodología no experimental, denominada en su conjunto como una investigación descriptiva, ya que se busca especificar las características o rasgos del grupo que se está analizando, así como observar fenómenos tal como se dan en su contexto natural (Hernández, Fernández & Batista, 2010). Además, corresponde a un estudio transversal (Cohen, Manion & Morisson, 2007), que analiza la AnMa de los sujetos en un momento temporal concreto.

Para lograr el objetivo planteado se aplicó una adecuación del instrumento "escala de actitudes hacia la matemática" elaborada por Fennema & Sherman (1976), a una muestra de 238 sujetos matriculados en cinco universidad de la región sur de Costa Rica. Dichos centros corresponden a la Universidad Internacional San Isidro Labrador (UISIL) en sus sedes de Pérez Zeledón, Buenos Aires y San Vito; La universidad de Costa Rica (UCR) sede de Golfito, y la Universidad Nacional (UNA) sede de Coto.

Al instrumento se le agregaron preguntas relacionadas con las variables sexo, universidad en la que cursa la carrera, rendimiento académico en su última prueba de matemática, modalidad en que se graduó de secundaria, lugar de procedencia, año que cursa de la carrera y edad. Es importante mencionar que la elección de estas variables surgen a partir de resultados de investigaciones previas, en las que se identificaron características de interés en el estudio de la AnMa (Delgado, Espinoza y Fonseca, 2017; Pérez-Tyteca, et al., 2009). Para la fiabilidad del instrumento se utilizó el alfa de Cronbach dando como resultado un valor de 0,823, el cual es considerado como un nivel de confiabilidad bueno (George y Mallery, 2003).

En relación con los niveles de AnMa, se tomó como referencia la escala establecida por Pérez-Tyteca (2012), que los define de la siguiente forma. Ansiedad matemática muy baja (puntuación media menor a 1.5), ansiedad matemática baja (puntuación media entre 1.5 y 2.49), ansiedad matemática media (puntuación media entre 2.5 y 3.49), ansiedad matemática alta (puntuación media entre 3.5 y 4.49), ansiedad matemática muy alta (puntuación media mayor o igual a 4.5). Para procesar los datos se utilizó el programa SPSS v22, en el que se aplicaron pruebas de normalidad e hipótesis y se estableció un nivel de confianza del 95% para confirmar si las diferencias encontradas eran estadísticamente significativas.

Análisis de resultados

En lo que respecta al nivel de ansiedad matemática, tal y como se muestra en la tabla 1, se observa que los futuros docentes de educación primaria de la muestra presentan un nivel medio de AnMA (2,90), evidenciando un nivel de ansiedad matemática significativo entre los futuros docentes de educación primaria.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática en términos generales.

Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
2,90	238	1,00	1,00	5,00

Fuente: Elaboración propia

Aunado a esto, el 65,90% de la muestra analizada presenta al menos un nivel de AnMa medio. Este porcentaje corresponde a una importante cantidad de futuros maestros de primaria en los cuales el nivel de AnMA es un factor que se debe considerar. En la siguiente tabla se muestran dichos resultados.

Tabla 2. Frecuencia y porcentaje de estudiantes en cada nivel de ansiedad matemática

Nivel de ansiedad matemática	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia absoluta acumulada "más de"	Frecuencia relativa acumulada "más de"
Ansiedad matemática muy baja	26	10,90	238	100
Ansiedad matemática baja	55	23,11	212	89,10
Ansiedad matemática media	86	36,10	157	65,90

Ansiedad matemática alta	59	24,80	71	29,80
Ansiedad matemática muy alta	12	5	12	5

Fuente: Elaboración propia

Con respecto el nivel de AnMa y el sexo de los entrevistados, resultó que las mujeres presentan un nivel mayor que los hombres. Específicamente ellas presentan un nivel de ansiedad medio (3,07), mientras que los hombres un nivel bajo (2,32). Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen de forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Por tanto, a partir de la prueba T, para la igualdad de medias, se constata que existen diferencias significativas, ya que el valor p-asociado es igual a 0,0.

Tabla 3. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según sexo.

Sexo	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Hombre	2,32	55	0,94	1,00	4,75
Mujer	3,07	183	0,95	1,00	5,00

Fuente: Elaboración propia

En la siguiente tabla se muestran los resultados con respecto a nivel de AnMa y la zona de procedencia.

Tabla 4. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según zona de procedencia

Zona	dia	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Rural	2,92	170	0,99	1,00	5,00
Urbana	2,85	61	1,07	1,00	5,00
No responde	2,75	7	0,71	2,00	3,75

Fuente: Elaboración propia

Como se muestra en tabla 4, tanto los estudiantes que provienen de una zona rural o urbana presentan un nivel de ansiedad medio. Además, se encontró que los provenientes de una zona rural tienen una puntuación media de AnMa igual a 2,92; mientras que los de zonas urbanas es de 2,85. Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen en forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Por tanto, a partir de la prueba T, para la igualdad de medias, se puede constatar que las diferencias encontradas no son estadísticamente significativas, ya que el valor p-asociado es igual a 0,5.

Con respecto a la edad, resultó que los docentes en formación más jóvenes (17 y 27 años), presentan una puntuación media de AnMa igual al 3,01, mientras que los más adultos, mayores de 37 años, presentan una puntuación de ansiedad matemática igual a 2,54. Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen en forma normal, ya

que el valor p-asociado es mayor 0,05. Seguidamente, al realizar el análisis de varianza ANOVA de este factor, resulta que el valor p-asociado es igual a 0,27. Por tanto, las diferencias encontradas en el nivel de AnMa y los grupos de edad no son estadísticamente significativas. En la tabla 5 se muestran los resultados obtenidos en esta variable

Tabla 5. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según edad

Edad	Media	N	Desviación típica	Máximo	Mínimo
De 17 A 22 años	3,01	76	1	5	1
De 22 A 27 años	3,01	58	0,99	5	1
De 27 A 32 años	2,70	43	0,91	4,17	1
De 32 A 37 años	2,88	25	1,09	5	1
Más de 37 años	2,54	15	1,03	4,75	1

Fuente: Elaboración propia

De igual forma, se analizó la relación entre el nivel de ansiedad matemática y el año que cursa de la carrera. Al respecto, la tabla 6 muestra que los sujetos de estudio que cursan segundo o tercer año presentan un nivel de AnMa similar; mientras que los estudiantes de primero año presentaron una puntuación media de AnMa de 2,95. Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen en forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Luego, se procede a realizar el análisis de varianza ANOVA de esta variable, obteniendo un valor p-asociado igual a 0,31. Por tanto, las diferencias encontradas en el nivel de AnMa y el año que cursa de la carrera no son estadísticamente significativas.

Tabla 6. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según nivel en el que se encuentra en la carrera.

Año	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Primero año	2,95	94	0,99	1,00	4,83
Segundo año	2,88	87	0,94	1,00	5,00
Tercer año	2,89	56	1,10	1,00	5,00
Cuarto año	1,08	1	NA	1,08	1,08

NA: no aplica

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 7 se muestran los resultados obtenidos de acuerdo con el nivel de AnMa y la modalidad educativa donde obtuvo el título de secundaria.

Tabla 7. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según la modalidad en que se graduó de secundaria

Modalidad	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Colegio diurno	2,85	97	0,99	1,00	5,00
Colegio nocturno	2,77	71	1,01	1,00	4,83
Colegio técnico	3,17	39	0,98	1,17	5,00
Otro	2,99	31	1,00	1,00	1,00

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la tabla 7, se observa que sin importar la modalidad en la que se graduaron los sujetos de la muestra, éstos presentan un nivel medio de AnMa. Además, resultó que los futuros docentes que obtuvieron su título de secundaria de un colegio técnico presentan una puntuación media de AnMa igual a 3,17, y los que provienen de otras modalidades (2,99). Al igual que en los casos anteriores, para establecer si estas diferencias son estadísticamente significativas, se utilizó el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, obteniendo como resultado que los datos se distribuyen en forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Por tanto, al realizar una prueba ANOVA, se concluye que no existen diferencias significativas entre la modalidad en la que se graduó el estudiante y el nivel de AnMa, ya que el valor p-asociado es igual a 0,2.

También se analizó la relación entre el nivel de AnMa y el tipo de colegio en el que se graduó de secundaria. En la siguiente tabla se muestras dichos resultados.

Tabla 8. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según el tipo de colegio del que se graduó de secundaria

Tipo	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Público	2,86	212	1,00	1,00	5,00
Privado	3,03	8	1,00	1,42	4,42
Bachillerato por madurez	3,28	17	1,06	1,00	5,00
Subvencionado	3,25	1	NA	3,25	3,25

NA: No aplica

Fuente: Elaboración propia

Con respecto a la tabla anterior, es posible ver que sin importar el tipo de colegio del que se graduaron, los futuros maestros presentan un nivel medio de AnMa. Además, la tabla muestra que los estudiantes que obtuvieron su título de secundaria mediante el bachillerato por madurez presentan, en términos absolutos, los niveles más altos de AnMa

(3,28), seguido de los que provienen de un colegio subvencionado (3,25). Al realizar el análisis estadístico mediante el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen en forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Por tanto, a partir de la prueba ANOVA correspondiente a este factor, se obtiene un valor p-asociado igual a 0,36. Por tanto, las diferencias encontradas en el nivel de AnMa y el tipo de colegio del que se graduaron no son estadísticamente significativas.

Al analizar la AnMa de acuerdo con el tipo de educación, pública o privada que reciben a nivel universitario (tabla 9), resultó que los que cursan la carrera en una universidad privada obtuvieron una puntuación media de AnMa igual a 2,94; mientras que quienes lo hacen en universidades públicas es de 2,79. Para analizar si estas diferencias son significativas, se realizó primero el contraste de hipótesis de Kolmogorov-Smirnov, con el cual se constata que los datos se distribuyen en forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Seguidamente, utilizando la prueba T, para la igualdad de medias, se concluye que no existen diferencias significativas entre dichas variables, debido a que el valor p-asociado es igual a 0,29.

Tabla 9. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según el tipo de universidad en donde cursa la carrera

Tipo	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Pública	2,79	70	1,01	1,00	5,00
Privada	2,94	168	0,99	1,00	5,00

Fuente: Elaboración propia

Como se mencionó anteriormente, se analizó el nivel de AnMa de los estudiantes matriculados en cinco universidades que imparten la carrera en la zona sur de Costa Rica. En la tabla 10 se observa que los estudiantes de la Universidad San Isidro Labrador, sede Pérez Zeledón y de la Universidad de Costa Rica, sede Golfito, son los que presentan los niveles más altos de ansiedad (3,15 y 2,95, respectivamente). Para estudiar si estas diferencias son estadísticamente significativas, se realizó un análisis estadístico de normalidad, contrastando la hipótesis mediante el método de Kolmogorov-Smirnov, resultando que las poblaciones se distribuyen en froma normal. Por tanto, se realizó un análisis ANOVA obtendiendo un valor p-asociado es igual a 0,0. Así, se constata que efectivamente las diferencias encontradas son estadísticamente significativas y los estudiantes matriculados en la UISIL, sede Pérez Zeledón, son los que presentan niveles más altos de AnMa.

Tabla 10. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según la universidad en donde cursa la carrera

Universidad	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
UISIL Pérez Zeledón	3,15	92	0,98	1,00	5,00
UISIL Buenos Aires	2,42	46	0,88	1,00	4,67
UISIL San Vito	2,75	30	0,91	1,08	4,50
UCR Golfito	2,95	55	0,95	1,08	5,00
UNA Coto	2,20	15	1,02	1,00	4,75

Fuente: Elaboración propia

Por último, para estudiar la AnMa y su relación con el rendimiento académico, se pidió a los sujetos de la muestra que indicaran la nota obtenida en la última prueba de matemática que realizaron, en donde se establecieron cuatro categorías a priori. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 11.

Tabla 11. Estadísticos descriptivos de la ansiedad matemática según el rendimiento académico

Note obtenida	Media	N	Desviación típica	Mínimo	Máximo
Menor a 50	4,39	4	1,05	3,17	5,00
De 50 menos de 70	3,4	22	0,72	2	4,75
De 70 menos de 85	3,13	110	0,90	1	5,00
De 85 a 100	2,49	102	0,99	1	4,67

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la tabla anterior, los estudiantes que tienen calificaciones altas, presentan el menor nivel de AnMa; mientras los que tienen notas inferiores a 50 son los que presentan mayor AnMa. Al realizar el contraste de hipótesis mediante la prueba de Kolmogorov-Smirnov para determinar normalidad, se concluye que los datos se distribuyen de forma normal, ya que el valor p-asociado es mayor 0,05. Por tanto, mediante el análisis de varianza ANOVA de este factor, se verificó que existen diferencias significativas, ya que el valor p-asociado es igual a 0,02. Por tanto, existe una relación inversa entre el nivel de AnMa y el rendimiento académico, de manera que a menor rendimiento académico en la asignatura, mayor ansiedad hacia la Matemática.

Conclusiones

En primera instancia, se concluye que existe un nivel importante de ansiedad matemática en los futuros maestros de primaria de la zona sur de Costa Rica, ya que más del 60% de la muestra analizada presenta un nivel medio o alto. Esta situación es preocupante porque podría afectar su desempeño como docente una vez que ejerzan su profesión o incluso transmitir dicha ansiedad a sus estudiantes, de manera que éstos a su vez muestren actitudes negativas hacia la disciplina, afectando su rendimiento académico.

De igual forma, este estudio permite concluir que existen diferencias estadísticamente significativas en los niveles de AnMa y las variables sexo, rendimiento académico y universidad en la que estudia. Con respecto a la primera, los niveles de AnMa es mayor en mujeres que en hombres. Este resultado coincide con estudios previos realizados en otros países e incluso con otros tipos de problación en los cuales se muestra que en general las mujeres presentan niveles más altos de ansiedad matemática que los hombres. El rendimiento académico es otra variable en la que otras investigaciones han establecido relaciones con la AnMa, ya que los estudiantes con mejores calificaciones en esta asignatura presentan menores niveles de AnMa. Con respecto a tipo de universidad en la que cursan la carrera, se concluye que los estudiantes de la UISIL, sede Pérez Zeledón, son los que presentan un nivel de AnMa más alto.

Estos hechos son relevantes porque identifican un grupo de futuros maestros de educación primaria que es necesario intervenir con el propósito de disminuir el nivel de AnMa que presentan. Esto podría provocar que dichos sujetos mejoren su práctica docente al momento de ejercer su profesión al cambiar las actitudes y temores que sienten hacia esta disciplina. Además, les ayudaría a desarrollar mejor sus clases y esto a su vez ocasionaría que los estudiantes se desenvuelvan mejor en el área de la Matemática.

En relación con el nivel de AnMa y las variables zona de procedencia, edad, año que cursa de la carrera, modalidad educativa, tipo de colegio y tipo de educación, no se encontraron diferencias estadísticamente significativas. Sin embargo, es relevante el hecho de que otros estudios realizados en Costa Rica ponen de manifiesto que los estudiantes de zonas rurales presentan menor rendimiento académico que los de zonas urbanas. Además, llama la atención que el nivel en que se encuentra en la carrera no tenga relación con la AnMa, ya que se considera que la formación que reciben, tanto pedagógica como en contenido matemático durante la carrera, podría influir en que los sujetos analizados presentaran menores niveles de AnMa.

De igual forma, los estudiantes provenientes de colegios técnicos podrían presentar niveles más altos de AnMa, ya que tienen una formación secundaria basada en el aprendizaje y dominio de conocimientos técnicos, que podría provocar deficiencias en cuanto a algunos conocimientos matemáticos y habilidades de índole pedagógico. Asimismo, los estudiantes graduados mediante la modalidad de bachillerato por madurez podrían presentar niveles más altos de AnMa, ya que ellos se preparan generalmente de forma individual con el libro de texto, que podría ser un factor a considerar en la AnMa.

Por último, se considera relevante replicar este estudio al mismo tipo de población, pero en otras regiones de Costa Rica, con el fin de contrastar los resultados obtenidos, así como tener una visión más clara de la actitud y posible ansiedad que presentan los futuros docentes de primaria en el país y como ésta se manifiesta al momento de desarrollar las lecciones de matemática, lo cual sin duda puede repercutir de forma negativa en la visión que tengan los estudiantes sobre la disciplina y los "sentimientos" que generen al trabajar con ella.

Agradecimientos

Este trabajo contó con el apoyo de la Universidad Nacional bajo el proyecto "Exploración de la Ansiedad hacia las matemáticas en futuros docentes de Educación Primaria en la zona sur de Costa Rica", código SIA 0430-17

Referencias bibliográficas

Brown, A. B., Westenskow, A., & Moyer-Packenham, P. S. (2011). Elementay pre-service teachers: Can they experience mathematics teaching anxiety without having mathematics anxiety? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, *5*, 1–14.

Bursal, M., & Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics*, *106*(4), 173–179.

Çatlıoğlu, H., Gürbüz, R., & Birgin, O. (2014). Do pre-service elementary school teachers still have mathematics anxiety? Some factors and correlates. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 110–127. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a06

Cohen, L. M., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*, (6th ed). London: Rougtledge Falmer

Delgado, I., Espinoza, J. & Fonseca J. (2017). Ansiedad matemática en estudiantes universitarios de Costa Rica y su relación con el rendimiento académico y variables sociodemográficas. *Propósitos y Representaciones, 5*(1), 275-300. Doi: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2017.v5n1.148

Fennema, E. & Sherman, J. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for research in Mathematics Education, 7*(5), 324-326. Doi: doi.org/10.2307/748467

George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference. 11.0 update* (4a ed.). Boston: Allyn & Bacon.

Gresham, G. (2010). A study exploring excepcional education preservice teacher mathematics anxiety. *Issues in*

the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal, 4, 1-14.
Guillory, M. (2009). *A study of pre-service teachers: Is it really mathematics anxiety?* (Tesis doctoral). Universidad de Massachusetts Amherst: Massachusetts. Descargado de http://scholarworks.umass.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1047&context=open_access_dissertations
Hernández, F. & Espinoza, J. (2018). Ansiedad matemática en estudiantes para maestros de primaria. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 31* (2), 1740-1747.
Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación.*
México: McGraw-Hill.
Karp, K. (1991). Elementary School Teachers Attitudes towards Mathematics: The Impact on Students Autonomous Learning Skills. *School Science and Mathematics*, *91*, 265–270.
Monje, J., Castro, E., & Pérez-Tyteca, P. (2013). Afecto y matemáticas. Diseño de una entrevista para acceder a los sentimientos de alumnos adolescentes. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, *4*, 65–82. Descargado de http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/55
Peker, M. (2006). Matematik öğretmeye yönelik kaygı ölçeğinin geliştirilmesi. *Eğitim Bilimleri ve Uygulam, 9*, 73–92.
Peker, M. (2009). Pre-Service Teachers' Teaching Anxiety about Mathematics and Their Learning Styles. *Eurasia Journal of Mathematics Science & Technology Education*, *5*(4), 335–345.
Pérez-Tyteca, P. (2012). *La ansiedad matemática como centro de un modelo causal predictivo de elección de carreras* (Tesis Doctoral) Granada: Universidad de Granada, España.
Pérez-Tyteca, P. & Castro, E. (2011). La ansiedad matemática y su red de influencias en la elección de carrera universitaria. *Investigación en Educación*, 471-480.
Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. & Cano, F. (2009). El Papel de la ansiedad matemática en el paso de la educación secundaria a la educación universitaria. *PNA, 4*(1), 23-35.
Richardson, F. C. & Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counselling Psychology, 19*(6), 551-554.
Sánchez, J. (2013). *Actitudes hacia la matemática de los futuros maestros de educación primaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.
Tobias, S. (1978). *Overcoming Math Anxiety.* New york: Norton.
Tobias, S. & Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review, 50*(1), 63-70.
Ureña, M.P (2015). *Ansiedad hacia las matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad de Jaen: Jaen.
Wood, E. F. (1988). Math anxiety and elementary teachers: What does research tell us? *For the Learning of Mathematics, 8*(1), 8-13.

NIVEL DE DESARROLLO DEL ESQUEMA GRÁFICO DE DERIVADA EN PROFESORES DE NIVEL MEDIO SUPERIOR

LEVEL OF DEVELOPMENT OF THE DERIVATIVE GRAPHIC SCHEME IN UPPER-MIDDLE EDUCATION TEACHERS

Gerardo Amaro Macuil, Lidia Aurora Hernández Rebollar, María Araceli Juárez Ramírez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, (México)
gerardo_1.9@hotmail.com, lhernan@fcfm.buap.mx, arjuarez@fcfm.buap.mx

Resumen
Esta investigación tiene como objetivo analizar el nivel de desarrollo de la comprensión gráfica del concepto de derivada de un grupo de profesores de matemáticas de nivel medio superior. El marco teórico utilizado fue la teoría del desarrollo de esquemas en el contexto de la teoría APOE, a través de los esquemas de intervalo y propiedades y las tres fases: Intra, Inter y Trans. El análisis de sus respuestas a un problema de derivada mostró que ellos fueron capaces de coordinar algunas propiedades de la derivada con algunos intervalos en los que se dividió el dominio, pero no en todos, lo cual coincide con lo que han reportado otros estudios aplicados a estudiantes de este nivel.

Palabras clave: teoría APOE, esquema gráfico, derivada

Abstract
This research is aimed at analyzing the level of development of the derivative concept graphic understanding by a group of upper- middle education mathematics teachers. The theoretical framework used was the theory of schema development based on APOS theory, through the interval and property schemas and the three phases: Intra, Inter and Trans phases. The analysis of their responses to a derivative problem showed that they were able to coordinate some properties of the derivative with some intervals in which the domain was divided, but not in all. It coincides with what have been reported by other studies applied to middle education students.

Key words: APOS theory, graphic scheme, derivative

Introducción

Varias investigaciones en Matemática Educativa se han centrado en analizar la comprensión de derivada que tienen los estudiantes (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Aspinwall, Shaw y Presmeg, 1997; Baker, Cooley y Trigueros, 2000; Borji, Font, Alamolhodaei y Sánchez, 2018). En particular, Baker et al (2000) estudiaron las conceptualizaciones de los estudiantes ante problemas gráficos de la función derivada (primera derivada, segunda derivada, continuidad y el valor de los límites de una función) y reportaron cómo los estudiantes coordinaron estos elementos para bosquejar la gráfica de una función. Ellos observaron que muchos estudiantes de cálculo son competentes en diferenciar una función y encontrar sus valores críticos, pero tienen dificultades con problemas donde el alumno tiene que realizar la gráfica de una función dadas ciertas condiciones analíticas; en este tipo de problemas demuestran dificultades para coordinar la información. En particular, las dos principales áreas de preocupación fueron la coordinación de la información superpuesta en intervalos contiguos en el dominio y la coordinación de las propiedades que se establecieron explícitamente en lugar de derivar de una fórmula. Los principales obstáculos que identificaron fueron los puntos cúspide, la tangente vertical y la segunda derivada.

Por otro lado, Asiala et al (1997) hallaron que estudiantes de ingeniería muestran una comprensión razonable de la relación entre la pendiente de la tangente y la derivada, pero tienen dificultades con la interpretación de la derivada en puntos específicos del dominio.

Sin embargo, aunque se han realizado varias investigaciones entorno a la comprensión gráfica de la función derivada que tienen los estudiantes, existen pocas investigaciones que analizan la comprensión de derivada que tienen los profesores de nivel medio superior. Es por ello que el objetivo de este trabajo es analizar la comprensión gráfica que tiene un grupo de 31 profesores de nivel medio superior, en relación con los conceptos de cálculo utilizados para resolver un problema que involucra a la gráfica de la derivada de una función.

Antecedentes

Comprensión de derivada

La comprensión del papel de la derivada se ha analizado en una variedad de estudios, por ejemplo, Ferrini-Mundy y Graham (1994) describieron las dificultades de los estudiantes para tratar de hallar la derivada de una función dada solo por su gráfica. Muchos estudiantes intentaron encontrar una representación algebraica de la función. Asiala et al (1997) en su informe sobre la comprensión gráfica de los estudiantes de la derivada, declararon que la mayoría de los estudiantes mostraron una comprensión razonable de la relación entre la pendiente de la tangente y la derivada.

También se ha estudiado la comprensión de las propiedades funcionales en relación con el aprendizaje de cálculo. En su artículo, Slavit (1997) comentó que los estudiantes no encuentran algunas propiedades funcionales, como las cúspides, hasta que llegan a los cursos de cálculo. Para estos estudiantes, la interiorización de las propiedades de la función está limitada por las clases de funciones que han estudiado.

Marco teórico

La teoría APOE

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una interpretación de la teoría constructivista, basada en el proceso de Abstracción Reflexiva planteado por Piaget para describir el pensamiento lógico de los

niños. Dubinsky (2002) extiende esta noción y la usa para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un determinado concepto o noción matemática en niveles más avanzados.

La teoría APOE posibilita la construcción de conceptos matemáticos siempre y cuando el sujeto tenga las estructuras previas necesarias, las transforme mediante la aplicación de Acciones o Procesos, de tal forma que pueda construir un nuevo Objeto que a su vez hará parte de un Esquema construido previamente o que dará lugar a la construcción de un nuevo Objeto (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).Esta teoría describe las estructuras y los mecanismos mentales con los cuales un individuo puede llegar a construir un concepto o noción matemática. Desde esta perspectiva el conocimiento matemático se describe en términos de estructuras que son motivadas por mecanismos mentales desarrollados por el individuo (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky y Vidakovic, 2008).

Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger (2004) plantean que las estructuras son construidas y conectadas por medio de mecanismos, de tal manera que pueden ser organizadas y estructuradas en marcos coherentes (esquemas). Estos esquemas son usados por los individuos para resolver un problema. De tal manera que la teoría APOE posibilita la construcción de conceptos matemáticos siempre y cuando el individuo posea las estructuras previas necesarias, las transforme mediante la aplicación de acciones o procesos, de tal forma que pueda construir un nuevo objeto que a su vez será parte de un esquema construido previamente o que dará lugar a la construcción de uno nuevo.

La teoría APOE ha sido ilustrada y elaborada en varios artículos (Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf, 1997; Dubinsky y McDonald, 2001) y en el libro de Arnon et al. (2014). Los esquemas, en particular, desempeñaron un papel importante en este estudio, por lo que discutimos este aspecto de la teoría APOE con cierto detalle.

Un esquema maduro es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas construidos previamente que son coordinados y sintetizados por el individuo para formar estructuras utilizadas en situaciones problemáticas (Dubinsky, 1991). Un individuo demuestra la coherencia del esquema al discernir qué está contenido dentro del esquema y qué no lo está. El individuo puede reflexionar sobre un esquema y transformarlo como un objeto para realizar nuevas acciones. A través de esta transformación, el esquema en sí puede convertirse en un objeto. Los objetos pueden transformarse mediante acciones de nivel superior, lo que lleva a nuevos procesos, objetos y esquemas para construir nuevos conceptos. Por lo tanto, la acción, el proceso y el desarrollo de objetos continúan reconstruyéndose en esquemas existentes.

Desarrollo de Esquemas

El desarrollo de esquemas es un proceso dinámico que cambia constantemente. Piaget y García (1983) propusieron que el conocimiento crece de acuerdo con ciertos mecanismos y que evoluciona en tres etapas, llamada tríada, que ocurren en un orden fijo. Ellos también plantearon la hipótesis de que estos niveles se pueden encontrar cuando se analiza cualquier esquema en desarrollo.

En la fase preliminar de la tríada, el nivel *intra*, los objetos particulares se analizan en términos de sus propiedades. Las explicaciones a este nivel son locales y particulares. Un objeto en este nivel no es reconocido por el alumno como necesario, y su forma es similar a la forma de una simple generalización. Por ejemplo, en el nivel *intra* del esquema de derivada, el estudiante interpreta la derivada como la pendiente de la línea tangente en puntos específicos, demostrando esta interpretación con los intervalos de aumento / disminución de una función o, alternativamente, resolviendo un problema de tasa de cambio. Sin embargo, el estudiante no puede hacer la conexión entre estos dos problemas. En la etapa *intra*, el estudiante se concentra en una acción u operación repetible, pero carece de la capacidad para relacionar la acción con un sistema de condiciones mediante el cual podría extender su aplicación e incluirla en un sistema de transformaciones interdependientes.

En el nivel *inter*, el estudiante es consciente de las relaciones presentes y puede deducir de una operación inicial, una vez que se entiende, otras operaciones que implica o que pueden coordinarla con operaciones similares. Este proceso lleva al sujeto a agrupar los sistemas, utilizando un método que incluye una nueva transformación. Por ejemplo, en la etapa *inter* del esquema de derivada, el alumno coordina la noción de derivada como la pendiente de la línea tangente con la idea de derivada como la tasa de cambio en un punto determinado. Él o ella pueden utilizar cualquiera de las dos ideas para describir la variación local en la función.

Cuando un sujeto reflexiona sobre estas relaciones y coordinaciones, nuevas estructuras evolucionan. A través de las síntesis de las transformaciones en el nivel *inter*, el estudiante construye un conocimiento de la integridad en el esquema, y en el nivel *trans*, el sujeto puede percibir nuevas propiedades globales que eran inaccesibles en los otros niveles. En la etapa *trans* del esquema de derivada, por ejemplo, el estudiante presenta la derivada como la pendiente o la tasa de cambio de una función en un punto dado y reconoce que todas las situaciones en las que está involucrada la variación están relacionadas con el concepto de derivada. El sujeto puede discriminar entre las relaciones que están incluidas y las que no, demostrando así la coherencia del esquema.

Según Piaget y García (1989), en cada etapa de la tríada, el sujeto reorganiza el conocimiento adquirido durante la etapa anterior. La progresión es gradual y no necesariamente lineal. En el proceso de aprendizaje se desarrollan diferentes esquemas y el cambio de nivel puede describirse usando la tríada. A medida que los conocimientos se desarrollan, la gente construye muchos esquemas existentes, todos los cuales están en constante cambio y varían en niveles de evolución. Cada esquema está compuesto por acciones, procesos, objetos y otros esquemas.

Según Baker et al. (2000), la teoría del desarrollo de esquemas en el contexto de la teoría APOE, a través de los esquemas de intervalo y propiedades y las tres fases: Intra, Inter y Trans, es una herramienta para analizar la composición del conocimiento de los estudiantes. Debido a que un estudiante puede avanzar a través de los niveles de una manera única y no lineal, la tríada, como herramienta, permite a los investigadores utilizar un enfoque detallado de una manera flexible. Utiliza las complejidades del problema, las relaciones entre ideas, las estructuras recién formadas y la coherencia, todos ellos, aspectos importantes en el desarrollo de las estructuras lógico-matemáticas.

Esquema bidimensional

Según Baker et al. (2000), el desarrollo del esquema gráfico de derivada se puede describir mediante la interacción de dos esquemas, a lo cual él llama el esquema bidimensional. En este esquema los datos o la información que proporciona el sujeto se describen con pares de niveles de la tríada de dos esquemas que se utilizan dentro del esquema gráfico de derivada. Los dos esquemas son el esquema de propiedad y el esquema de intervalo. Cada uno se describe por separado y luego se describe como un modelo de pares.

El desarrollo del esquema de propiedad

El esquema de propiedad involucra dos aspectos importantes: comprender cada condición analítica en relación con una propiedad gráfica de la función y coordinar estas condiciones. Las condiciones incluyen información sobre la primera y segunda derivada (ya sean positivas, negativas o cero), los límites de la función y la primera derivada y la continuidad de la función. La triada aplicada a este esquema particular se describe a continuación.

En el nivel *intra-propiedad*, el sujeto puede interpretar una condición aislada y relacionarla con una propiedad gráfica de la función. Un individuo en este nivel normalmente utiliza únicamente la condición de la primera derivada y, a menudo, conoce otras propiedades, pero no puede coordinarlas para producir un gráfico completo. Si dos propiedades se superponen, el sujeto describe el comportamiento del gráfico utilizando solo una propiedad. Si él o ella intentan usar más de una propiedad, este no puede completar su descripción y recurre a una sola propiedad.

En el nivel *inter-propiedad*, el sujeto comienza a coordinar dos o más condiciones simultáneamente. Esta coordinación, sin embargo, no se aplica en todas las condiciones de superposición.

En el nivel *trans-propiedad,* el sujeto puede coordinar todas las condiciones analíticas a las propiedades gráficas de la función en un intervalo. En este punto, el individuo expresa o demuestra una coherencia del esquema. Es decir, reconoce claramente qué comportamientos de una función pueden incluirse en la gráfica y qué no.

El desarrollo del esquema de intervalo

Los aspectos importantes del esquema de intervalo son comprender la notación del intervalo, conectar intervalos contiguos y coordinar la superposición de los intervalos. Distinguir diferentes secciones del dominio es un problema típico en el cálculo introductorio. La triada aplicada a este esquema en particular se describe a continuación.

En el nivel *intra-intervalo*, el sujeto trabaja solo en intervalos aislados. La información la describe intervalo por intervalo. La superposición de intervalos o la conexión de intervalos contiguos causa confusión.

En el nivel *inter-intervalo*, el sujeto comienza a coordinar dos o más intervalos simultáneamente. Esta coordinación, sin embargo, no la se aplica en todos los intervalos conectados.

En el nivel *trans-intervalo*, el sujeto puede describir la coordinación de los intervalos en todo el dominio. Él o ella pueden superponer intervalos y conectar intervalos contiguos. También demuestra coherencia en el esquema al describir qué manifestaciones en la gráfica estaban permitidas por la superposición y la conexión de los intervalos y cuáles no.
El esquema global de gráficos de derivada y sus dos dimensiones

A continuación, se describe el nivel de propiedad y el nivel de intervalo de la doble tríada en un esquema bidimensional que engloba los dos esquemas mencionado anteriormente.

En el nivel *intra-propiedad, intra-intervalo (intra-intra*), el sujeto puede producir una o unas pocas acciones aisladas en las propiedades dadas de una función. Las acciones resultan de la relación de una sola propiedad con los intervalos aislados de la gráfica. No hay coordinación entre intervalos ni entre múltiples condiciones en un solo intervalo.

En el nivel *intra-propiedad, inter-intervalo (intra-inter)*, el sujeto puede coordinar dos o más, pero no todos los segmentos contiguos de la gráfica usando una condición en intervalos.

En el nivel *intra-propiedad, trans-intervalo (intra-trans)*, el sujeto puede coordinar una sola propiedad de manera consistente en todo el dominio y dibujar una forma del gráfico.

En el nivel *inter-propiedad, intra-intervalo (inter-intra),* el sujeto puede coordinar algunas, pero no todas las propiedades en uno o más intervalos separados, pero no puede vincular intervalos contiguos en el dominio.

En el nivel *inter-propiedad, inter-intervalo (inter-inter),* el sujeto puede coordinar algunas propiedades en al menos dos intervalos contiguos del dominio. El estudiante no logró coordinar todas las propiedades en intervalos ni conectar todos los intervalos contiguos.

En el nivel *inter-propiedad, trans-intervalo (inter-trans),* el sujeto puede coordinar al menos dos, pero no todas, las propiedades en todo el dominio.

En el nivel *trans-propiedad, intra-intervalo (trans-intra)*, el sujeto debe poder coordinar todas las propiedades en intervalos aislados y debe ser consciente de qué gráficos se pueden esbozar con la coordinación de las propiedades. No puede lograr una relación entre los segmentos contiguos de la gráfica.

En el nivel *trans-propiedad, inter-intervalo (trans-inter)*, el sujeto puede coordinar todas las propiedades en al menos dos intervalos contiguos.

En el nivel *trans-propiedad, trans-intervalo (trans-trans)*, el sujeto puede coordinar todas las condiciones en todo el dominio del gráfico. En este nivel, el individuo pudo determinar, sobre la base de la coordinación de las propiedades y los intervalos contiguos, qué es y qué no está incluido en el gráfico.

En este trabajo utilizamos la teoría de APOE en términos del desarrollo de la tríada y el esquema como marco teórico para analizar las respuestas de los profesores ante un problema de graficación de la derivada de una función. El uso del modelo nos permitió comprender ciertos comportamientos de los profesores, causados por la interacción de dos esquemas, el esquema de intervalo y el esquema de propiedad.

Metodología

Participantes

En este estudio participaron 31 profesores de nivel medio superior que se encuentran frente a grupo, 17 de ellos cursaban una Maestría en Educación Matemática en una universidad pública. Los otros 14 fueron parte de un curso de enseñanza aprendizaje del concepto límite y derivada. Se informó a los docentes que las pruebas realizadas servirían para realizar una investigación y que sus resultados se mantendrían en confidencialidad.

El problema

A los profesores se les dio un problema que les requería graficar una función. Esta actividad fue propuesta por Asiala et al. (1997) y en ella se pide dibujar la gráfica de una función dadas sus propiedades analíticas (primera y segunda derivada, límites, concavidad, convexidad, continuidad) en intervalos específicos del dominio. La integración de los intervalos por parte de los sujetos es esencial para la construcción del gráfico. El problema es el siguiente:

Dibuje un gráfico de la función *h* que satisfaga las siguientes condiciones:

$$h\ es\ continua$$
$$h(0) = 2, \quad h'(-2) = h'(3) = 0, \quad y \quad \lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$$
$$h'(x) > 0 \ \ cuando \ \ -4 < x < -2, \quad y \ \ cuando \ \ -2 < x < 3$$
$$h'(x) < 0 \ \ cuando \ \ x < -4, \quad y \ \ cuando\ x > 3$$
$$h''(x) < 0 \ \ cuando\ x < -4, \quad cuando \ \ -4 < x < -2 \ \ y \ \ cuando \ \ 0 < x < 5$$
$$h''(x) > 0 \ \ cuando \ \ -2 < x < 0, \quad y \ \ cuando \ \ x > 5$$
$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \infty \quad y \quad \lim_{x\to \infty} h(x) = -2$$

Resultados

Se examinaron las respuestas de los profesores descartando los cuestionarios entregados en blanco. El lenguaje utilizado en la descripción de sus respuestas resalta lo que se observó y no prejuzga el conocimiento total que el sujeto pudo haber desarrollado en su esquema.
Las respuestas que dieron los profesores se agruparon de la siguiente manera:

- Se ubicaron a 23 profesores en el nivel intra-propiedad, intra-intervalo (intra-intra), porque ellos no realizaron la coordinación entre intervalos ni entre múltiples condiciones en un solo intervalo, tampoco coordinaron la información proporcionada en los intervalos con las propiedades de derivada de la función. Los profesores no lograron realizar un bosquejo completo de la función. En la figura 1 se muestra lo que realizó uno de los profesores que se encuentra en este nivel a manera de ejemplo, en su respuesta sólo identifica dos puntos en el dominio en los cuales la gráfica de la función tiene un máximo, haciendo referencia a la condición de la primera derivada, es decir, cuando $f'(-2)$ y $f'(3)$ son iguales a cero. Este profesor no logró graficar la concavidad y convexidad en los intervalos correspondientes, dadas por las condiciones de la segunda derivada, tampoco graficó el crecimiento o decrecimiento de la función dada por las condiciones de la primera derivada, para esbozar la gráfica solicitada.

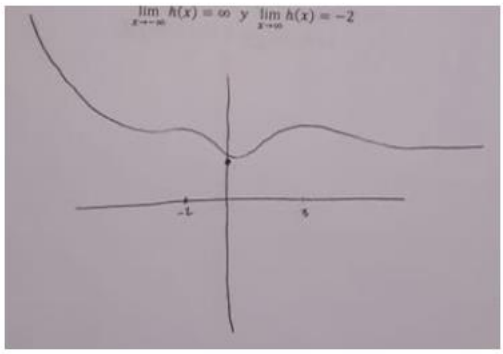


Figura 1. Gráfica realizada por un profesor que se encuentra en el nivel intra-intra

- Dos profesores se ubicaron en el nivel inter-propiedad, intra-intervalo (inter-intra); pueden coordinar algunas, pero no todas las propiedades en uno o más intervalos separados pero no pueden vincular intervalos contiguos en el dominio. Uno de los profesores realizó la gráfica de la función utilizando algunas de las propiedades, por ejemplo, en su gráfica muestra que la función es decreciente de -3 a infinito en el dominio (ver figura 2), también se observan las condiciones de concavidad y convexidad de la función, sin embargo, estas las aplica en intervalos que no corresponden a las condiciones que señala la actividad. Por último, el profesor no logra graficar una de las propiedades en el intervalo de $x = 0$ a $x = 3$, tampoco logra observar que en el punto $x = -4$ existe una cúspide. Con ello observamos que no logró vincular los intervalos contiguos en el dominio de la función.

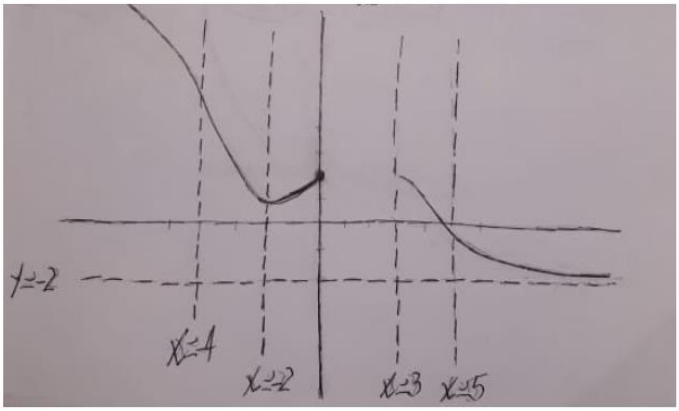


Figura 2. Gráfica realizada por un profesor que se encuentra en el nivel inter-intra

- Solo se detectó a un profesor en el nivel inter-propiedad, inter-intervalo (inter-inter), ya que pudo coordinar algunas propiedades en al menos dos intervalos contiguos del dominio, pero no pudo coordinar todas las propiedades en todo el dominio ni conectar todos los intervalos contiguos. En la figura 3 se observa como el docente puede coordinar las propiedades de la función, como el punto de inflexión en $x = -2$ y también el punto máximo en $x = 3$, además de representar en el gráfico en qué intervalos la función crece o decrece en varios intervalos, pero no logró coordinar todas estas propiedades en todo el dominio de la función.

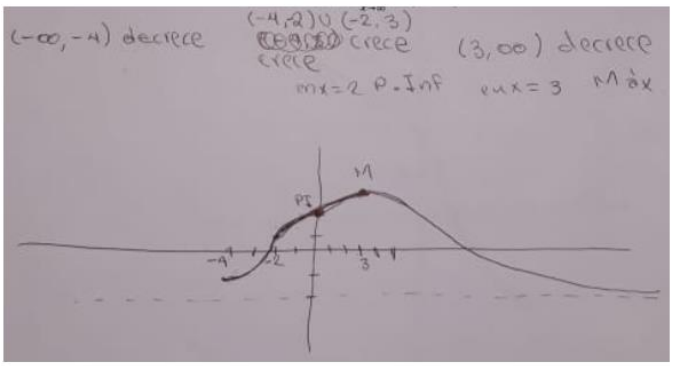


Figura 3. Gráfica realizada por un profesor que se encuentra en el nivel inter-inter

- Un profesor se encontró en el nivel de inter-propiedad, trans-intervalo (inter-trans), él logra coordinar al menos dos, pero no todas las propiedades en todo el dominio. En el dominio de la función, su gráfica fue consistente con algunas de las propiedades utilizadas, pero no con todas, ya que, por ejemplo, señaló que en el intervalo $(-\infty, 4)$ la función es creciente, cuando en realidad es decreciente según las condiciones dadas en la actividad. También tuvo dificultades para observar que, en el dominio, el punto $x = 4$ es un punto de inflexión. Todo esto se puede observar en la figura 4.

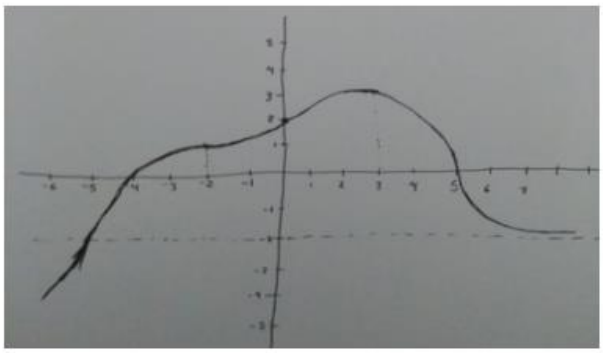


Figura 4. Gráfica realizada por un profesor que se encuentra en el nivel inter-trans

- Dos profesores se ubicaron en el nivel trans-propiedad, inter-intervalo (trans-inter), porque lograron coordinar todas las propiedades en al menos dos intervalos contiguos del dominio. Uno de los profesores vinculó algunos segmentos contiguos del dominio pero expresó dificultad en algunos puntos y esto lo podemos observar en la figura 5. En la gráfica muestra todas las propiedades de la función (puntos máximos y mínimos, puntos cúspide, puntos de inflexión, concavidad y convexidad, crecimiento y decrecimiento de la función y qué es lo que sucede cuando la derivada de la función es igual a infinito cuando x tiende a cero), pero tiene dificultades para graficar el punto de inflexión en $x = -2$.

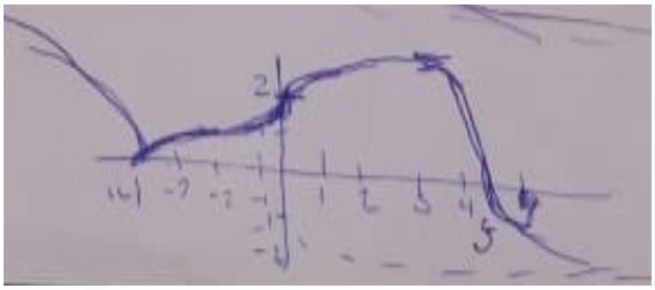


Figura 5. Gráfica realizada por un profesor que se encuentra en el nivel trans-inter

- Solo un profesor se colocó en el nivel de trans-propiedad, trans-intervalo (trans-trans), porque él pudo coordinar todas las condiciones en todo el dominio del gráfico, esto se puede observar en la figura 6. Él pudo determinar, sobre la base de la coordinación de las propiedades y los intervalos contiguos, qué sí y qué no está incluido en el gráfico.

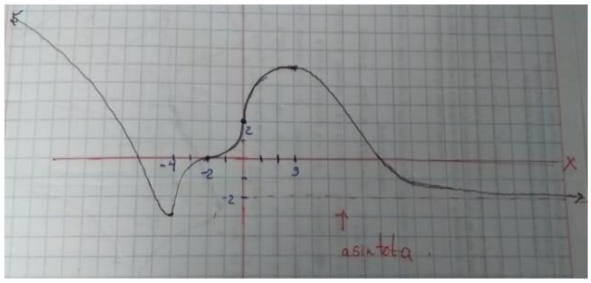


Figura 6. Gráfica realizada por un profesor que se encuentra en el nivel trans-trans

El problema en cuestión no es típico porque no se presentaba a la función con una ecuación sino como un conjunto de condiciones analíticas, y para resolverlo, los profesores debían coordinar intervalos y propiedades de la gráfica de la función. Varias condiciones consistentemente causaron dificultades particulares, incluyendo la cúspide en $x = -4$ y la tangente vertical en x = 0, es decir, cuando el límite de la derivada, cuando x tiende a infinito, es igual a cero. Un número significativo de profesores mostró, además de estas dificultades, una comprensión muy limitada de la segunda derivada y sus propiedades.

El número de profesores que se ubicó en cada uno de los niveles de desarrollo de comprensión se resume en la tabla 1.

Tabla 1. Número de profesores en cada uno de los niveles

	Intra- intevalo	Inter-intervalo	Trans-intervalo
Intra-propiedad	23	2	0
Inter-propiedad	1	1	2
Trans-propiedad	0	1	1

Conclusión

Este estudio indicó que la mayoría de los profesores participantes se ubicaron en el nivel Intra-Intra del esquema derivada de una función. Lo anterior significa que, al resolver el problema propuesto, ellos no lograron coordinar la información de la segunda derivada en intervalos del dominio, además tuvieron dificultades con el punto cúspide en $x = -4$ y la descripción de lo que sucede con la función cuando el límite de la derivada es igual a infinito cuando x tiende a cero. Los profesores clasificados en este nivel aplicaron adecuadamente algunas propiedades, pero otras no y lo hicieron en ciertos intervalos, por ejemplo, algunos lograron coordinar la información de la primera derivada y graficaban los intervalos en los que la función era creciente o decreciente y donde la función tenía un máximo o mínimo. Los profesores que se ubicaron en niveles de desarrollo más altos, como Inter-Inter, Trans-Inter, Inter-Trans y Trans-Trans del esquema derivada de una función lograron coordinar algunas de las propiedades de la función en al menos dos intervalos contiguos, también lograron señalar qué sucede con la gráfica de la función cuando el límite de la derivada de la función es igual a infinito cuando x tiende a cero, además algunos lograron observar que en el punto $x = 4$ existe una cúspide y pudieron graficarla. Sin embargo, estos docentes no lograron graficar todas las propiedades en todo el dominio porque tuvieron dificultades con la condición de la primera derivada y cometieron errores al graficar la función cuando es creciente o decreciente en ciertos intervalos.

Con este análisis podemos concluir que los profesores de nivel medio superior, que participaron en este estudio, presentaron una falta de comprensión de la derivada y sus propiedades relacionadas con el esquema gráfico. Los principales obstáculos que identificamos fueron el punto cúspide, el punto de inflexión, el límite de la derivada cuando x tiende a cero, la segunda derivada y la coordinación entre las propiedades de la derivada con los intervalos del dominio de la función. Además, mostraron una fuerte tendencia a usar la primera derivada para obtener la mayor parte de su información sobre el gráfico de la primera función. Realizando una comparación con el análisis que realizaron Baker et al. (2000) aplicando el mismo problema a 41 estudiantes universitarios de Ingeniería,

Matemáticas y Ciencias se puede observar que los profesores presentan dificultades similares a estos estudiantes. Sin embargo, estos investigadores observaron que el 14% de ellos está en el nivel intra-intra, 17% en el nivel intra-inter, 7% en el nivel intra-trans, 5% en el nivel inter-intra, 10% en el nivel inter-inter, 17% en el nivel inter-trans, 0% en el nivel trans-intra, 10% en el nivel trans-inter y 20% en el nivel trans-trans. Es decir, su población se distribuyó en varios de los niveles a diferencia de lo que encontramos en este análisis donde el 74% de los docentes se ubicó en el nivel intra-intra, el más bajo.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education. New York, USA: Springer Science & Business Media.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior*, 16, 399–431.

Aspinwall, L., Shaw, K.L., y Presmeg, N.C. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivate. *Educational Studies in Mathematics*, 33, pp. 301-317.

Baker, B., Cooley, L., y Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), pp. 557-578.

Borji, V., Font, V., Alamolhodaei, H., & Sánchez, A. (2018). Application of the Complementarities of Two Theories, APOS and OSA, for the Analysis of the University Students' Understanding on the Graph of the Function and its Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(6), 2301-2315.

Ferrini-Mundy, J., y Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 19-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In *Epistemological foundations of mathematical experience,* (pp. 160-202). Springer, New York, NY.

Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds.) *The teaching and learning of mathematics at university level,* (pp. 275-282). Springer, Dordrecht.

Dubinsky, E. (2002). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall D. (eds.) *Advanced mathematical thinking,* (pp. 95-126). Springer, Dordrecht.

Piaget, J., y García, R. (1983, 1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 259-281.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., y Vidakovic, D. (2008). A Search for a Constructivist Approach for Understanding the Uncountable Set. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(1), 93-125.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald y M., Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS*, 51(7), 741-750.

CONCORDÂNCIAS E COMPLEMENTARIDADES ENTRE O LESSON STUDY E A IDONEIDADE DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DA PRÁTICA REFLEXIVA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

AGREEMENTS AND COMPLEMENTARITIES BETWEEN LESSON STUDY AND DIDACTICAL SUITABILITY FOR THE DEVELOPMENT OF REFLECTIVE PRACTICE IN TEACHER TRAINING

Viviane Beatriz Hummes, Adriana Breda, Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona (España)
vivihummes@gmail.com, adriana.breda@ub.edu, vfont@ub.edu

Resumo
O objetivo deste trabalho é identificar algumas concordâncias e complementariedades entre os critérios propostos em um ciclo completo de *Lesson Study* e os e os critérios propostos pela teoria da Idoneidade Didática e argumentar como o uso combinado dos dois enfoques permite superar as limitações e ampliar as vantagens de ambas teorias para o desenvolvimento da reflexão sobre a própria prática na formação de professores. Os resultados mostram que os Critérios de Idoneidade Didática estão presentes nas diferentes etapas de um ciclo de *Lesson Study*. Além disso, realizar uma experiência de *Lesson Study* pode ser uma boa maneira de iniciar os dispositivos formativos que pretendem ensinar a ferramenta Critérios de Idoneidade Didática. Por outro lado, os Critérios de Idoneidade Didática podem ser uma ampliação da metodologia *Lesson Study* como uma pauta ampla e detalhada para organizar a reflexão dos docentes.

Palavras-chave: reflexão, *lesson study*, critérios de idoneidade

Abstract
The aim of this work is to identify some agreements and complementarities between the criteria proposed in a complete cycle of Lesson Study and the criteria proposed by the Didactical Suitability theory and to argue how the combined use of the two approaches allows to overcome the limitations and expand the advantages of both theories for the development of reflection on their own practice in teacher education. The results show that the Didactical Suitability Criteria are present in the different phases of a Lesson Study cycle. In addition, conducting a Lesson Study experiment can be a good way to start the training devices that intend to teach the Didactical Suitability Criteria. On the other hand, the Didactical Suitability Criteria can be an extension of the Lesson Study methodology as a broad and detailed agenda for organizing the reflection of teachers.

Keywords: reflexion, lesson study, didactical suitability

Introdução

Muitas tendências relacionadas à formação de professores, seja ela inicial ou continuada, sugerem a reflexão sobre a sua própria prática como elemento fundamental para o desenvolvimento profissional docente e o aperfeiçoamento do ensino. Dentro da área de Educação Matemática existem diferentes propostas que fornecem marcos conceituais relacionadas ao desenvolvimento da competência reflexiva, tais como: a competência de olhar com sentido (Mason, 2002), a mirada profissional (Llinares, 2012), a metodologia do estudo do conceito (Davis, 2008), o conhecimento matemático para um ensino de matemática de qualidade (Hill *et al.*, 2008), o *Lesson Study* (Fernández & Yoshida, 2004) e os Critérios de Idoneidade Didática (Godino, Batanero & Font, 2019).

A metodologia *Lesson Study* (LS a partir de agora) refere-se a uma atividade de pesquisa em sala de aula (Burghes & Robinson, 2010; Ponte, Baptista, Velez & Costa, 2012), pois oportuniza o desenvolvimento da competência reflexiva durante a realização da atividade docente. Já o Enfoque Ontossemiótico da Cognição e Instrução Matemática (EOS a partir de agora) (Godino *et al.*, 2019), nos proporciona os Critérios de Idoneidade Didática (CI a partir de agora), e seu desmembramento em componentes e indicadores, como uma ferramenta para estruturar a reflexão do professor. Nessa perspectiva, esses critérios podem servir para guiar os processos de ensino e aprendizagem da matemática e para avaliar a sua implementação. Tal como se vem fazendo em distintos processos de formação de alguns países (Pochulu, Font & Rodríguez, 2016; Seckel & Font, 2016). Assim, os CI são, em primeiro lugar, princípios que indicam como as coisas devem ser feitas e, em segundo lugar, auxiliam na avaliação e validação do processo de estudo realizado (Breda, Font & Pino-Fan, 2018). Cada uma dessas metodologias apresenta vantagens e limitações.

A LS (Isoda, Stephens, Ohara & Miyakawa, 2007) é uma metodologia utilizada para a melhoria da educação matemática, que ganhou espaço nos processos de formação e desenvolvimento profissional dos professores de matemática em exercício. A principal preocupação desse enfoque é que os professores que estão fora do contexto de estudo ou fora das comunidades escolares que estudam a lição "[…] adotam essas práticas sem nenhuma reflexão quando há deficiências em sua compressão, devido à falta de conhecimento matemático e pedagógico e poucas habilidades para observar e avaliar o aprendizado de seus alunos na sala de aula" (Yoshida, 2012, p. 141). Nesta declaração, há vários aspectos a serem considerados: 1) existem alguns geradores de boas práticas, comunidades que fazem LS; e 2) professores que assumem essas boas práticas. No segundo caso, o mecanismo pelo qual os professores assumem boas práticas é o princípio da autoridade especializada, que apoia a eficácia de certas práticas. Que critérios são considerados em um ciclo de uma LS para que se gere boas práticas? Esses critérios são acordos explícitos ou implícitos sobre certas normas que devem orientar a prática do professor, que têm ampla aceitação na comunidade interessada no ensino de matemática? Para responder a essa pergunta, é necessário investigar como os critérios que norteiam as práticas planejadas, implementadas e redesenhadas aparecem em um LS e, em particular, o papel que a reflexão desempenha na geração desses critérios.

Este trabalho é parte de uma pesquisa mais ampla que tem como objetivo geral investigar o desenvolvimento da competência reflexiva sobre a própria prática na formação de professores de matemática, através do desenho e implementação de um curso de formação que combina o uso da abordagem LS e os CI como ferramenta metodológica para organizar a reflexão do professor. Em particular, o trabalho que aqui se apresenta, busca identificar algumas concordâncias e complementariedades entre os critérios propostos em um ciclo completo de LS e os critérios propostos pela teoria da Idoneidade Didática.

Após essa introdução, na primeira seção deste trabalho, apresenta-se o referencial teórico utilizado e uma revisão da literatura a esse respeito: *Lesson Study* e Critérios de Idoneidade Didática. Na segunda seção, a metodologia utilizada é apresentada. Na terceira seção, faz-se uma reflexão sobre as concordâncias e complementaridades entre o LS e os CI e, na quarta, apresentam-se algumas considerações finais.

Marco teórico

Nesta seção, é apresentado o referencial teórico utilizado: a abordagem *Lesson Study* (LS) e a ferramenta Critérios de Idoneidade Didática (CI), e se faz uma breve revisão da literatura a respeito.

A abordagem Lesson Study (LS)

O *Lesson Study* (LS) surgiu no Japão como uma estratégia de desenvolvimento profissional docente. Centra-se na aprendizagem coletiva baseada na prática docente. Basicamente consiste no desenho colaborativo e minucioso de uma aula, sua implementação e observação direta em sala de aula, e uma análise conjunta subsequente (Fernández & Yoshida, 2004; Hart, Alston & Murata, 2011).

Uma das virtudes do LS é que ele coloca os professores no epicentro de sua atividade profissional: o planejamento, a implementação e o redesenho das propostas didáticas, com o objetivo de primeiro, entender melhor a aprendizagem dos alunos, com base em suas próprias experiências de ensino e, segundo, melhorar esse aprendizado. A ideia é que os professores se reúnam com uma dúvida em comum sobre o aprendizado de seus alunos, planejem uma sequência didática para o aluno aprender, e examinem e discutam o que observam na implementação dessa lição.

Uma LS se desenvolve de forma cíclica, dividida em diferentes fases, as quais estabelecem alguns critérios que devem ser considerados para realizar um ciclo de LS completo (Hurd & Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013).

Na primeira fase, *currículo e metas*, não se trata de produzir uma aula com base nos tópicos atuais do currículo, mas sim analisar como cada tópico do currículo é apresentado e se comporta com o uso de diferentes materiais nas diferentes etapas educacionais. Além de estudar como o aprendizado dos alunos é processado. Para isso, é essencial que o grupo de professores conheça o currículo praticado na instituição educacional na qual trabalha (currículo local), bem como o currículo regional e nacional. Também é importante ter em mente os currículos de outros países, pois isso pode ser uma fonte de inspiração para a aula planejada que será investigada (ou seja, a *Research Lesson* – RL a partir de agora) e através da comparação entre os currículos, o grupo de os professores escolhe a melhor maneira de que os alunos aprendam um conteúdo específico. A consulta não deve restringir-se apenas aos currículos, mas também aos diferentes materiais de ensino, profissionais especialistas no conteúdo do tema eleito e também pesquisas científicas que abordem o ensino deste tema. Nesta fase, três questões principais devem ser levadas em consideração: 1) quais são os entendimentos que os alunos devem ter para desenvolver determinado conteúdo e como devem desenvolvê-lo?; 2) como os currículos lidam com um determinado tema e quais são as vantagens e desvantagens de cada um? Quais são os impactos dos modelos de exemplos e abordagens utilizados em cada currículo? 3) O que a pesquisa nos diz sobre a compreensão dos alunos e como ela deve ser desenvolvida? Recomenda-se também que toda essa discussão seja registrada e, com a elaboração de uma tabela, sejam descritos os conceitos que devem ter sido previamente aprendidos pelos alunos (conhecimentos prévios) relacionados ao tópico a ser tratado em sala de aula. Esses estudos subsidiarão a formulação das metas de aprendizagem a serem propostas na próxima fase (planejamento da RL).

A segunda fase, *planejamento da lição*, deve começar com a escolha do tema da RL que o grupo de professores gostaria que seus alunos desenvolvessem. Por exemplo, o grupo de professores pode querer que a classe desenvolva o raciocínio geométrico nos alunos e que eles se tornem atentos às noções para gerar certos padrões em matemática. O grupo de professores deve estar convencido da importância do tema para o desenvolvimento de uma LS que justifique o esforço pessoal e coletivo. Além disso, nesta fase, as justificativas de como o planejamento dessa classe funcionará, as metas gerais definidas em todas as etapas da RL em construção devem ser explicitamente declaradas. Os próximos passos são a demarcação dos objetivos específicos da lição, por um lado, estudando os materiais que serão utilizados, por outro, determinando como e em que a avaliação será enfocada. A RL orientará a observação dos professores sobre a aprendizagem dos alunos.

O planejamento deve antecipar as reações e dúvidas dos alunos. Nesse sentido, o grupo de professores deve antecipar e detalhar a maneira pela qual o professor conduzirá a aula. Isso será feito com base na indagação. Dessa forma, o professor não pode responder pelo aluno nem fornecer algoritmos finalizados. O grupo de professores deve ter em mente que a classe será guiada por estímulos, para que os alunos construam seu próprio conhecimento e a maneira de estimulá-los deve ser feita por meio de perguntas. A RL é orientada por problematizações que direcionam o aluno para os objetivos pré-determinados de aprendizado. Literatura acadêmica, livros didáticos, especialistas e profissionais da educação podem conduzir o grupo de professores a que os estudantes possam produzir conhecimento sobre um determinado tema. Por exemplo, para trabalhar no conceito de fração no ensino básico, pesquisas acadêmicas sugerem que essa noção deve ser trabalhada com base em magnitudes e na reta numérica, por exemplo. Trabalhar frações apenas com a ideia de parte e todo é uma opção limitada e pode prejudicar a compreensão mais ampla do aluno sobre o conceito de fração, restringindo sua capacidade de resolver certos problemas e limitando-o a aprender algum conteúdo futuro.

No planejamento, o grupo também deve apresentar a distribuição das cadeiras no espaço da sala de aula, a organização do conteúdo no quadro, neste aspecto é importante que todas as diferentes soluções, justificativas e estratégias, ou seja, o produto de discussão em classe, deve estar disponível para todos os alunos. O tempo estimado e a síntese das ideias dos alunos também são considerados nesta fase.

Na terceira fase, *implementação e observação*, um professor ministra a aula enquanto os outros observam e registram o processo de ensino e aprendizagem. Esse professor deve concordar que outras pessoas possam testemunhar sua aula ao vivo. Nesta fase, a participação dos alunos é ativa em cada etapa da solução das questões propostas, desde a compreensão do problema, estabelecimento de estratégias e análise da resolução. Esta é uma etapa em que é dada muita importância ao processo de resolução de problemas, em particular o professor que implementa a aula deve estimular o momento em que os alunos, cuidadosamente orientados pelo professor, compartilham seus entendimentos, analisam, comparam e argumentam criticamente suas ideias.

Na quarta fase, *reflexão crítica*, seguida da aula implementada, o grupo que planejou, junto com outros profissionais convidados que a observaram, se reúne para analisar os impactos dessa aula no aprendizado dos alunos. Nesse momento, cada observador expõe suas impressões sobre a produção de conhecimento dos alunos. É importante que alguns pontos tenham sido observados e levados em consideração na discussão. Por exemplo: a aula fez com que os alunos gerassem conhecimentos sobre o tema? Quais foram as principais dúvidas dos alunos? Houve diversidade de pensamentos? O material escolhido pelo grupo de professores foi suficiente para incentivar o estimulo e a aprendizagem durante a aula? E o problema proposto cumpriu o papel de fio condutor da aprendizagem dos alunos? Após a reflexão em grupo, os professores podem fazer ajustes para uma aula futura sobre o mesmo tópico. Nesse aspecto, o planejamento deve ser alterado com ações direcionadas para a correção ou ajustes do que considerarem pertinente. Isso corresponde ao início de um novo ciclo, *redesenho e reimplementação*, localizado em uma etapa de maior maturidade, onde a aula replanejada pode ser aplicada em outras escolas ou com outros alunos, sempre incorporando as adaptações adequadas às novas situações.

Embora a literatura sobre *Lesson Study* seja extensa em todo o mundo, as pesquisas sob esse enfoque no Brasil ainda são escassas. A partir de uma revisão sobre estudos de LS realizados no Brasil, destacamos o de Felix (2010), que aponta as dificuldades na aplicação dessa metodologia junto ao corpo docente brasileiro, devido ao seu caráter marcadamente individualista. Coelho, Oliveira e Vianna (2014) que analisaram as contribuições da abordagem LS na formação inicial de professores e Utimura (2015) que analisou o potencial de um projeto de ensino com enfoque na LS implementado em uma turma do quinto ano da escola básica e destacou que os professores participantes da pesquisa evoluíram tanto em suas concepções matemáticas quanto didáticas e, assim, se sentiram mais confiantes para planejar e conduzir suas aulas.

Os Critérios de Idoneidade Didática (CI)

Os CI propostos no referencial teórico EOS, pretendem ser uma resposta parcial a seguinte questão: quais critérios devem ser utilizados para planejar uma sequência de atividades, que permitam avaliar e desenvolver a competência matemática dos alunos e quais mudanças devem ser feitas no seu redesenho para melhorar o desenvolvimento dessa competência?

Os CI podem primeiro servir para guiar os processos de ensino e aprendizagem de matemática e, segundo, para avaliar suas implementações. No EOS, os seguintes CI são considerados (Godino *et al.*, 2019): *idoneidade epistêmica*, para avaliar se a matemática ensinada é "boa matemática"; *idoneidade cognitiva*, para avaliar, antes de iniciar o processo de instrução, se o que se quer ensinar está a uma distância razoável daquilo que os alunos sabem, e após o processo, se as aprendizagens adquiridas estão próximas daquilo que se pretendia ensinar; *idoneidade interacional*, para avaliar se as interações resolvem as dúvidas e dificuldades dos alunos; *idoneidade mediacional*, para avaliar a adequação dos recursos materiais e temporais utilizados no processo instrucional; *idoneidade afetiva*, para avaliar o envolvimento (interesses e motivações) dos alunos durante o processo de instrução; *idoneidade ecológica*, para avaliar a adequação do processo instrucional ao projeto educacional do centro educativo, as diretrizes curriculares e as condições do entorno social e profissional.

A operacionalidade dos CI requer a definição de um conjunto de indicadores observáveis, que permite avaliar o grau de qualidade de cada um desses critérios. Por exemplo, há um consenso de que é necessário implementar "boa" matemática, mas é possível entender coisas muito diferentes sobre isso. Em Breda *et al.* (2018) se estabelece um sistema de indicadores que serve como uma guia para a análise e avaliação da Idoneidade Didática, que se destina a um processo instrucional em qualquer estágio educacional e explica como esses critérios foram gerados e seus respectivos componentes e indicadores. Os componentes dos CI estão detalhados a seguir (Breda, Font, Lima, & Pereira, 2018):

Quadro 1. Critérios e componentes de Idoneidade.

Critério de Idoneidade	Componente
Epistêmica	(IE1) Erros, (IE2) Ambiguidades, (IE3) Riqueza de processos, (IE4) Representatividade
Cognitiva	(IC1) Conhecimentos prévios, (IC2) Adaptação curricular às diferenças individuais, (IC3) Aprendizagem, (IC4), Alta demanda cognitiva
Interacional	(II1) Interação docente-discente, (II2) Interação entre discentes, (II3) Autonomia, (II4) Avaliação formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiais, (IM2) Número de estudantes, horário e condições da aula, (IM3) Tempo
Afetiva	(IA1) Interesses e necessidades, (IA2) Atitudes, (IA3) Afetividade
Ecológica	(IEC1) Adaptação ao currículo, (IEC2) Conexões intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidade sócio-laboral, (IEC4) Inovação didática

A noção de Idoneidade Didática teve um impacto relevante na formação de professores em diferentes países (Mallart, Font & Malaspina, 2015; Seckel & Font, 2015; Pochulu, *et al.*, 2016). Esse impacto está relacionado à

ideia de que um dos componentes do conhecimento e da competência didático-matemática do professor é aquele que permite avaliar e justificar a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem da matemática.

Metodologia

Para identificar algumas concordâncias entre os critérios estabelecidos entre as duas teorias, LS e CI, realizou-se um estudo aprofundado da literatura relacionada aos dois marcos. Em particular, a partir do estudo das obras publicadas por Hurd e Lewis (2011) e Lim-Ratnam (2013), que tratam de explicar um ciclo de LS passo a passo, realizou-se um quadro comparativo identificando quais CI estão presentes em cada uma das fases da LS. Especificamente, utilizaram-se os CI como categorias qualitativas prévias para classificar os critérios presentes em cada fase de um ciclo de LS.

Por outro lado, para estudar como a reflexão se desenvolve em cursos de formação que utilizam a metodologia LS, foi realizada uma busca por pesquisas que descrevem experiências de LS no Brasil. Além disso, consideraram-se resultados encontrados a partir da análise de dois vídeos relacionados a duas experiências de um ciclo completo de LS.

Na análise dos dois vídeos procurou-se selecionar as considerações usadas pelos professores participantes da experiência de LS e suas equipes para apoiar a sequência de atividades propostas em suas aulas. Nas análises realizadas, essas considerações foram assumidas como evidências do uso implícito de alguns dos componentes e indicadores dos CI (Hummes, Breda, Seckel & Font, 2020; Hummes, Breda & Seckel, 2019).

Para estudar como a reflexão se desenvolve em cursos de formação que utilizam os CI, considerou-se a revisão de literatura realizada em Kaiber, Lemos e Pino-Fan (2017) e a busca de pesquisas que usaram os CI em atividades de formação de professores. Como critério de seleção das pesquisas, consideraram-se os trabalhos que enfocaram na profundidade da reflexão dos professores que participavam dos cursos de formação (cursos de aperfeiçoamento docente, graduação e/ou pós-graduação).

Por fim, logo da escolha das pesquisas baseadas no âmbito da LS e dos CI, destacaram-se nos seus resultados, as limitações e as vantagens do uso de cada marco teórico no desenvolvimento da prática reflexiva dos professores participantes.

Lesson study e os critérios de idoneidade didática: concordâncias e complementariedades

Concordâncias entre os marcos LS e CI

A partir do exercício de identificar quais CI estão presentes nas fases de um ciclo de LS encontrou-se que a maioria dos CI são contemplados em um ciclo completo de LS. Em particular, os CI ecológico e cognitivo são evidenciados na fase de seleção do tema e estudo do currículo; os CI epistêmico, mediacional, cognitivo e interacional estão relacionados à fase de planejamento da lição; os CI cognitivo, epistêmico e emocional estão presentes na fase de implementação e observação e os CI cognitivo e mediacional estão presentes na fase de reflexão da observação, conforme aponta o Quadro 2. Contudo é importante salientar que, embora muitos critérios tenham sido comtemplados, nem todos os componentes foram considerados nas fases de um ciclo de LS.

Quadro 2. Concordâncias entre os critérios presentes em um ciclo de LS e os CI.

Fases do Lesson Study (Hurd & Lewis, 2011; Lim-Ratnam, 2013)	**Critérios de Idoneidade Didática** (Breda, *et al.*, 2018)
Escolha do tema e estudo do currículo ● Se está baseada nos tópicos do currículo vigente. ● Estudar como se processa a aprendizagem do estudante.	● Idoneidade Ecológica (adaptação ao currículo). ● Idoneidade Cognitiva (Conhecimentos prévios; adaptação curricular às diferenças individuais).
Planejamento da Lição ● Desenvolver o raciocínio matemático. ● Fazer o estudo dos materiais. ● Definir como e em que será enfocada a avaliação. ● Prever reações e dúvidas dos alunos. ● Trabalhar por meio da resolução de problemas. ● Fazer com que os alunos produzam conhecimento. ● Ter presente a distribuição das carteiras no espaço de aula e o tempo estimado da aula.	● Idoneidade Epistêmica (Riqueza de Processos). ● Idoneidade Mediacional (recursos materiais; condições da aula). ● Idoneidade Interacional (Interação docente-discente; avaliação formativa). ● Idoneidade Cognitiva (Aprendizagem).
Implementação e observação da Aula ● Considerar se a participação dos alunos é ativa em cada etapa de resolução das questões propostas, a partir da compreensão do problema, o estabelecimento de estratégias e análise da resolução. ● Observar o processo de resolução de problemas. ● Analisar, comparar e contrastar criticamente suas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança.	● Idoneidade Cognitiva (alta demanda cognitiva). ● Idoneidade Epistémica (Riqueza de processos). ● Idoneidade Afetiva (atitudes e emoções).
Reflexão da observação ● A aula gerou conhecimento por parte dos alunos? ● Quais foram as principais dúvidas dos alunos? Houve diversidade de pensamentos? ● O material escolhido pelo grupo de professores foi suficiente para fomentar o estímulo na aula?	● Idoneidade Cognitiva (aprendizagem, adaptação curricular às diferenças individuais). ● Idoneidade Mediacional (recursos materiais).

Complementariedades entre os marcos LS e CI

Para identificar algumas das complementariedades entre ambos marcos teóricos, através da busca de investigações e experiências formativas realizadas no âmbito da LS e dos CI, encontrou-se, em particular, o uso dos CI nas pesquisas sobre cursos formativos em que se observa o uso dos CI como conteúdo a ser explicado para organização da reflexão do professor sobre sua própria prática, tanto em cursos de graduação (Seckel, 2016; Seckel & Font, 2016) quanto em cursos de pós-graduação (Font, Breda, & Pino-Fan, 2017; Giacomone, Godino, & Beltrán-Pellicer, 2018; Morales, Durán, Perez, & Bustamante, 2019). O desenho e a implementação de ciclos formativos nessa modalidade levam em consideração os CI como um conteúdo a ser ensinado para ser utilizado como diretriz para organizar a própria prática do professor. Por exemplo, em Font *et al*. (2017) se explica um ciclo de formação que, ao invés de apresentar os CI como princípios já elaborados, criam-se espaços para sua geração como resultado do consenso no grupo. Nas experiências onde se ensinam os CI (Font *et al*., 2017), encontra-se que, embora a reflexão dos professores seja organizada através de uma pauta ampla e detalhada, se percebe a falta de um espaço onde os professores possam planejar e discutir a aplicação de uma sequência de atividades de forma mais aprofundada, em particular, de forma grupal, dialogada e crítica.

Por outra parte, na metodologia LS, de certa maneira, pode-se considerar que as etapas de reflexão são bastante amplas e que está orientada à melhora do processo de ensino e aprendizagem da matemática, por tanto, é de se esperar que na etapa de estudo do currículo e estabelecimento de metas; na de planejamento; na de observação; e na de reflexão e, posterior, redesenho orientado à melhora, os participantes usem de maneira implícita muitos dos indicadores e componentes dos CI para fazer avaliações positivas de alguns aspectos da experiência realizada. Por exemplo, em Felix (2010, p. 01) se afirma o seguinte:

> […] conseguimos estabelecer resultados positivos que refletem na pesquisa, que incluem: um maior interesse dos alunos na aula, mudança de postura na relação professor-aluno, menor índice de indisciplina, melhora gradual de notas dos alunos, participação efetiva de alunos com maiores déficits de aprendizagem, maior confiança dos alunos em relação ao resultado obtido por eles mesmos.

Podemos observar que o autor está realizando uma avaliação positiva de determinados aspectos observados na experiência de LS realizada. Concretamente está utilizando implicitamente o indicador “apresenta uma seleção de tarefas interessantes para os alunos” do componente “interesses e necessidades” do critério de idoneidade emocional, já que avalia positivamente o fato de haver conseguido aumentar o interesse dos alunos; ou o indicador “se facilita a inclusão dos alunos durante a dinâmica da aula evitando a exclusão” do componente interação professor-aluno do critério de idoneidade interacional, já que considera positiva a participação efetiva dos alunos com déficit de aprendizagem; ou o indicador "promoção da autoestima, evitando a rejeição, fobia ou medo da matemática” do componente emoções do critério de idoneidade afetivo, já que considera haver conseguido que os alunos tenham maior confiança neles mesmos.

Já, nos vídeos sobre um processo instrucional de uma aula com base na LS, cujas reflexões dos professores são analisadas em Hummes *et al*. (2019) e Hummes *et al*. (2020), evidencia-se que em uma aula baseada na metodologia da LS surge um consenso implícito entre o professor que desenvolve a aula e os demais professores participantes sobre aspectos que são positivamente valorizados, que podem ser reinterpretados em termos de indicadores e componentes de CI. Os resultados obtidos mostram como, nos estágios de planejamento e reflexão, alguns dos componentes e indicadores dos CI aparecem implicitamente nas reflexões dos participantes. Em particular, uma das vantagens de trabalhar com a dinâmica da LS é que, alguns aspectos que não estão presentes na reflexão do próprio professor, podem estar presentes na reflexão dos outros professores que participam do processo instrucional. Em outras palavras, a metodologia LS torna-se um tipo de dispositivo de formação que favorece que alguns dos indicadores e componentes da CI surjam como consenso na reflexão do grupo de professores. Este resultado sugere que, para investigar o desenvolvimento da reflexão sobre a própria prática na

formação de professores de matemática, um dispositivo interesante pode ser a concepção e implementação de um curso de formação que combine o uso da LS e dos CI como uma ferramenta metodológica para organizar a reflexão do professor (Seckel & Font, 2020; Hummes, Font, & Breda, 2019).

Com relação aos resultados obtidos em nossa pesquisa e àqueles que acabamos de comentar, um aspecto a explicar é a razão pela qual os CI implicitamente funcionam como regularidades no discurso dos professores sem terem sido ensinados a utilizar essa ferramenta para guiar sua reflexão. Uma explicação plausível (Breda *et al*., 2018) é que os CI refletem consensos sobre como o ensino de qualidade da matemática deve ser amplamente assumido na comunidade de educadores; e é plausível pensar que o uso implícito dos CI pelos professores se deve à sua formação e experiência anteriores, o que os torna participantes desse consenso.

Por tanto, a metodologia LS se pode converter em um tipo de dispositivo de formação que favorece que alguns dos indicadores e componentes dos CI surjam como consensos da reflexão do grupo de professores, o qual oportuniza a ampliação da LS com um ciclo formativo que introduza os indicadores, componentes e CI.

Considerações finais

Na expectativa de atender ao objetivo de encontrar concordâncias entre a LS e os CI, conclui-se que os CI estão presentes nas diferentes fases de um ciclo de LS. Concretamente, os critérios que os professores devem ter em conta para realizar cada etapa de um ciclo de LS convergem com os CI propostos pelo EOS. Uma explicação plausível para este fato é que tanto os CI como os critérios propostos em cada fase da LS foram gerados por um amplo consenso na comunidade de Educação Matemática sobre o que é considerado importante ter em conta para que se realizem os processos de ensino e aprendizagem da matemática. Contudo, a não presença de todos os componentes propostos pelos CI nas fases de LS, pode se dar pelo fato de que as pautas e critérios presentes nas fases da LS são mais gerais e, de certa forma, pouco detalhados.

Com relação aos dispositivos formativos que usam separadamente a metodologia LS e a ferramenta CI, se buscou compreender como em cada um deles está proposto o desenvolvimento da reflexão sobre a própria prática, buscando complementariedades entre ambos enfoques. Com relação aos que usam a metodologia CI nos processos formativos, embora a reflexão dos professores seja organizada através de uma pauta ampla e detalhada, faz-se falta de um espaço onde os professores possam planejar e discutir a aplicação de uma sequência de atividades de forma mais aprofundada, em particular, de forma grupal, dialogada e crítica. Já, com relação aos que usam a metodologia LS, a revisão da literatura e os vídeos analisados nos permitiram observar, que, nas reflexões realizadas pelos participantes, aparecem implicitamente alguns indicadores e componentes dos CI. Este fato nos leva a crer que realizar uma LS pode ser uma ótima maneira de iniciar os cursos de formação que pretendem ensinar a ferramenta CI como uma diretriz para organizar a reflexão dos professores.

Os dispositivos formativos que pretendem ensinar os CI, também partem da suposição de que estes podem ser ensinados como ferramenta para organizar a reflexão do professor e, por tanto, a maior parte do ciclo de formação se dedica a implementar um processo de ensino e aprendizagem dessas noções aos participantes. Por outro lado, nas LS não se realiza este processo de geração de uma pauta organizada em critérios, componentes e indicadores como ferramenta para organizar a reflexão. Por tanto, se a metodologia LS pode ser muito útil para melhorar a fase inicial da metodologia dos CI e proporcionar um espaço de reflexão conjunta (entre o professor e seus pares), esta última pode ser uma ampliação da metodologia LS para gerar uma pauta para organizar a reflexão do professor.
Desta forma, a metodologia LS pode ser convertida em um tipo de dispositivo de formação que favorece que alguns dos indicadores e componentes da CI surjam como consensos da reflexão do grupo de professores, o que leva à extensão da LS com um ciclo de formação para introduzir os indicadores, componentes e critérios de Idoneidade Didática.

Se a metodologia da LS pode ser muito útil para melhorar a fase inicial da Idoneidade Didática esta última pode ser uma extensão da metodologia da LS para gerar um padrão para organizar a reflexão do professor.

Agradecimentos

Trabalho realizado no âmbito dos projetos de pesquisa PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) e REDICE18-2000 (ICE-UB) e como o apoio do programa de Doutorado Pleno no Exterior da CAPES, processo número 88881.173616/2018-01.

Referências

Breda, A., Font, V., Lima, V. M. R., & Pereira, M. V. (2018). Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. *Transformación*, *14*(2), 162-176.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios Valorativos y Normativos en La Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. *Bolema*, *32*(60), 255-278. Doi: 10.1590/1980-4415v32n60a13.

Burghes, D. N., & Robinson, D. (2010). *Lesson study: enhancing mathematics teaching and learning*. CfBT Education Trust.

Coelho, F. G., de Oliveira, A. T., & Vianna, C. S. (2014). A metodologia da Lesson Study na formação de professores: uma experiência com licenciandos de Matemática. *VIDYA*, *34*(2), 1-12.

Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)*, *14*(2), 86-91.

Felix, T. F. (2010). *Pesquisando a melhoria de aulas de matemática segundo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study*). Tesis de maestria no publicada. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, Brasil.

Fernández, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah: Erlbaum.

Font, V., Breda, A., & Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, *44*(1), 1-21. Doi: 10.1590/s1678-4634201844172011.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37- 42.

Hart, L. C., Alston, A. S., & Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Netherlands: Springer.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

Hummes, V., Breda, A., Seckel, M., & Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el *Lesson Study***.** *Praxis & Saber, 11*(26), e10667. https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667

Hummes, V. B., Breda, A. & Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En Marbán, J. M.; Arce, M.; Maroto, A.; Muñoz-Escolano, J. M.; Alsina, A. (Eds.), Investigación *en Educación Matemática XXIII* (pp. 393-402). Valladolid, España: SEIEM.

Hummes, V. B., Font, V. & Breda, A. (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Didactic Suitability for

the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers. *Acta Scientiae*, *21*(1), 64-82.

Hurd, J., & Lewis, C. (2011*). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction.* EUA: Heinemann Educational Books.

Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y, & Miyakawa, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore: World Scientific.

Kaiber, T., Lemos, A., & Pino-Fan, L. (2017). Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS): um panorama das pesquisas na América Latina. *Perspectivas da Educação Matemática*, *10*(23), 531-552.

Lim-Ratnam, C. (2013). Lesson Study Step by Step: How Teacher Learning Communities Improve Instruction. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 2(3), 304-306. Doi: https://doi.org/10.1108/IJLLS-05-2013-0025.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2,* 53-70.

Mallart, A., Font, V., & Malaspina, U. (2015). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos, 38*(152), 14-30.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Morales, L.; Durán, R. E.; Pérez, C., & Bustamante, M. (2019) Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Revista Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pochulu, M., Font, V., & Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, *19*(1), 71-98. Doi: 10.12802/relime.13.1913.

Ponte, J. P. D., Baptista, M., Velez, I., & Costa, E. (2012). Aprendizagens profissionais dos professores de Matemática através dos estudos de aula. *Perspectivas da Educação Matemática*, *1*(1), 7-24.

Seckel, M. J. (2016). Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática. Tesis de doctora inédita. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

Seckel. M. J., & Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educacional, 11*(19), 55-75.

Seckel, M. J., & Font, V. (2016). El portafolio como herramienta para desarrollar y evaluar la competencia reflexiva en futuros profesores de matemática. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*(pp. 499-508). Málaga: SEIEM.

Seckel, M. J. & Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis*, *Revista Internacional de Investigación en Educación*, *12*(25), 127-144. Doi 10.11144/Javeriana.m12-25.crfp.

Utimura, G. (2015). *Docência compartilhada na perspectiva de estudos de aula (lesson study): um trabalho com as figuras geométricas espaciais no quinto ano*. Tesis de maestria no publicada. Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.

Yoshida, M. (2012). Mathematics lesson study in the United States: current status and ideas for conducting high quality and effective lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(2), 140-152.

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LAS FUNCIONES Y SU RELACIÓN CON EL SENO TRIGONOMÉTRICO

EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES IN FUNCTIONS AND THEIR RELATIONSHIP WITH THE TRIGONOMETRIC SINE

Percy Lujan Rosadio, Cintya Gonzales Hernández
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
percy.lujan@pucp.pe, cintya.gonzales@pucp.pe

Resumen
Durante el desarrollo de la noción de función se presentaron algunas formas de pensamiento que direccionaron la evolución de su concepción, y que se vieron reflejadas también en los cambios conceptuales que atravesó el seno trigonométrico. Resulta pertinente desde la Didáctica de la Matemática, y desde una perspectiva histórica epistemológica identificar los algunos obstáculos presentados alrededor de la concepción de función y su relación con el proceso de transición entre la razón seno y función seno; tarea que el presente trabajo desarrolla por medio de un análisis bibliográfico, y que identifica en la concepción estática, y la disociación existente entre magnitudes y número, las principales dificultades relacionadas al desarrollo de función reflejadas en la trigonometría.

Palabras clave: función, epistemología, seno trigonométrico

Abstract
When developing the notion of function, some ways of thinking that addressed the evolution of its conception arose; and they were also reflected in the conceptual changes that the trigonometric sine went through. It is relevant from the Didactics of Mathematics, and from an epistemological historical perspective to identify some obstacles shown around the conception of function and its relation to the process of transition between the sine ratio and sine function. Such task is developed in the present work by means of a bibliographic analysis, which allows identifying in the static conception, and the existing dissociation between magnitudes and number, the main difficulties related to the development of the function, and that are reflected in the trigonometry.

Key words: function, epistemology, trigonometric sine

Introducción

Dentro del proceso de investigación en educación matemática el análisis histórico de los objetos matemáticos puede favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, en tanto pueda profundizar en la naturaleza del concepto identificando los elementos que condicionaron su génesis y desarrollo, y relacionarlo con la construcción al momento de estudiarlo en las aulas escolares. En ese sentido, Buendía y Montiel (2009) indican que la historia en la investigación en matemática educativa no solo cumple una función informativa o motivacional, sino que permite identificar el contexto en el cual se gesta e institucionaliza un determinado saber, y además, analizar al hombre en contacto con las matemáticas dentro de un contexto dado, lo que en conjunto permite extraer elementos que contribuyan a la enseñanza de dicho saber.

El análisis histórico se convierte entonces en un recurso relevante dentro de la investigación en educación matemática, siendo una de las perspectivas donde se desenvuelve el análisis epistemológico, y dentro de ella la identificación de obstáculos epistemológicos; que resulta de gran importancia, pues como señala Sierpinska (1985) el conocimiento de las condiciones históricas donde un obstáculo ha sido reconocido y posteriormente superado permite comprender un obstáculo similar que se manifiesta en una secuencia didáctica con estudiantes, y viceversa.

En ese sentido, Brousseau en 1976 introduce en la investigación en enseñanza de las matemáticas, recogiendo los aportes de Bachellard, los obstáculos epistemológicos con la idea de denominar aquellas concepciones del estudiante que en un primer momento resultan válidas al momento de utilizarlas, pero que luego para prácticas matemáticas de mayor complejidad, estas concepciones fuerzan a errores o limitan el desarrollo de nuevos conocimientos.

Teniendo en cuenta ello, el presente estudio surge al profundizar la dimensión epistemológica del trabajo de tesis de maestría Luján (2019), referido a la de modelización de la función seno; en la que se realiza un primer análisis e identificación de los obstáculos asociados a la evolución histórica de la noción de función y que a su vez guardan relación con la noción de la función seno. Señalar estos obstáculos contribuyó a tener una mayor comprensión de la naturaleza del seno trigonométrico y fortalecer el diseño de nuestra actividad de estudio que fue implementada dentro de la investigación.

Fundamento teórico

La noción de Obstáculo fue introducida en la educación matemática por Brousseau en 1976 inspirado en los aportes de Bachelard y Piaget, y lo define en relación con las causas que provocan los errores en los estudiantes:

> el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso, o simplemente mal adaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos. Brousseau (1983, p. 4)

Lo expresado por Brousseau indica que algunos de los errores de los estudiantes, aquellos que son de interés para la investigación, se enmarcan dentro de una concepción anterior, el cual gozaba de validez para un momento determinado y para un campo determinado, pero que luego en un posterior contexto, resulta insuficiente para enfrentarse a nuevas situaciones, y hasta contraproducente cuando su uso habitúa una acción que induce al error.

Brousseau distingue tres tipos de obstáculos que se presentan en el sistema didáctico, estos son los ontogenéticos, didácticos y epistemológicos, el primero de ellos son los que se dan a partir de las condiciones neurofisiológicas en

el estudiante, los didácticos son aquellos que provienen de la enseñanza dentro de un sistema educativo, y los epistemológicos producidos debido a la naturaleza de la construcción del conocimiento dado.

Un ejemplo de este último caso podría darse cuando el estudiante comienza a estudiar el seno en el triángulo rectángulo y llega a considerar, verificar y convencerse que a mayor ángulo se obtiene un mayor valor para el seno, lo que resulta válido en ese marco, sin embargo, cuando el seno es estudiado para un ángulo mayor o igual que un ángulo recto, en posición normal o en la circunferencia trigonométrica, este conocimiento ya no resulta válido, y su afirmación constituiría un obstáculo para poder relacionar el carácter oscilante del seno fuera del triángulo rectángulo. A su vez este conocimiento enmarcado en el seno para el triángulo rectángulo podría devenir en otro error bastante usual, el cual consiste en utilizar las siguientes propiedades

$$sen(\alpha).\csc(\alpha) = 1$$
$$\cos(\alpha).\sec(a) = 1$$
$$tan(\alpha).cot\ (a) = 1$$

para resolver por ejemplo ecuaciones trigonométricas, sin reparar que, estas propiedades se cumplen de manera absoluta solo para ángulos agudos. Pues para ángulos cuadrantales algunas razones no estarán definidas al tener como cociente el cero.

El estudio de los obstáculos epistemológicos ha sido desarrollado también por otros autores, como es el caso de Artigue (1990) quien señala que el análisis epistemológico es necesario para el didáctico pues permite colocar a distancia y bajo control las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza, y superar la ilusión de transparencia, es decir, que el análisis epistemológico, reconociendo en primer lugar que los objetos matemáticos de enseñanza no son un conjunto de elementos ya resueltos y simples de arribar, permite al didacta identificar su naturaleza compleja, advirtiendo elementos del objeto en dónde es preciso esclarecer su concepción o construcción a fin de evitar conocimientos erróneos o limitados y poder interpretar racionalmente los hechos o fenómenos didácticos.

Por su parte Ruiz (1994) respecto a la noción de función, identifica desde el programa epistemológico, concepciones y obstáculos asociados a la evolución histórica del concepto de función, las cuales son mostradas a modo de síntesis incluyendo su clasificación en la siguiente tabla:

Tabla 1. Primeras concepciones y obstáculos en la evolución histórica de la noción de función

Primeras concepciones asociadas a la evolución histórica del concepto de función:	Primeros obstáculos asociados a la evolución histórica de la noción de función
1. Identificación de ciertas regularidades 2. Razón o proporción	I. Obstáculos de creencias y convicciones 1.1. Obstáculo de la concepción estática. 1.2. Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y número.

Fuente: Adaptado de Ruiz (1994)

Metodología

De acuerdo con Méndez (2008) la investigación bibliográfica constituye un proceso de recopilación y selección de estudios con el propósito de conformar un conocimiento sistematizado referido a un tema en particular, y cuya labor

es primordial en el proceso de investigación. Los autores indican también que la investigación bibliográfica suministra los fundamentos teóricos y el contexto histórico poniendo énfasis en el análisis relacional y contextual; y en el caso de la investigación cualitativa se procura encontrar el significado de los procesos, comportamientos y actos, más que una descripción de los hechos.

Los elementos generales que componen la investigación bibliográfica son: definir el tema de trabajo, acotar la necesidad de la información, recopilación, depuración y organización de la información, sistematización y redacción de los hallazgos. A su vez la investigación bibliográfica tiene diversas orientaciones dependiendo su propósito: informativa, promovedora y certificadora. La orientación promovedora es la que se asume en este artículo, pues tiene la finalidad de desarrollar el conocimiento y proponer nuevos argumentos, datos y evidencias mediante una cuidadosa indagación crítica.

Es así que tomando como referente los obstáculos de creencias y convicciones señalados por Ruiz (1998), se pretende realizar un estudio bibliográfico de aquellos trabajos que plantean una revisión histórica y epistemológica del seno trigonométrico, y en este proceso de análisis identificar algunos aspectos comunes, que de acuerdo al marco teórico, evidencien la presencia de formas de pensamiento presentes en la razón seno que se constituyeron en obstáculos para el arribo a la noción seno como función.

Una aproximación histórica

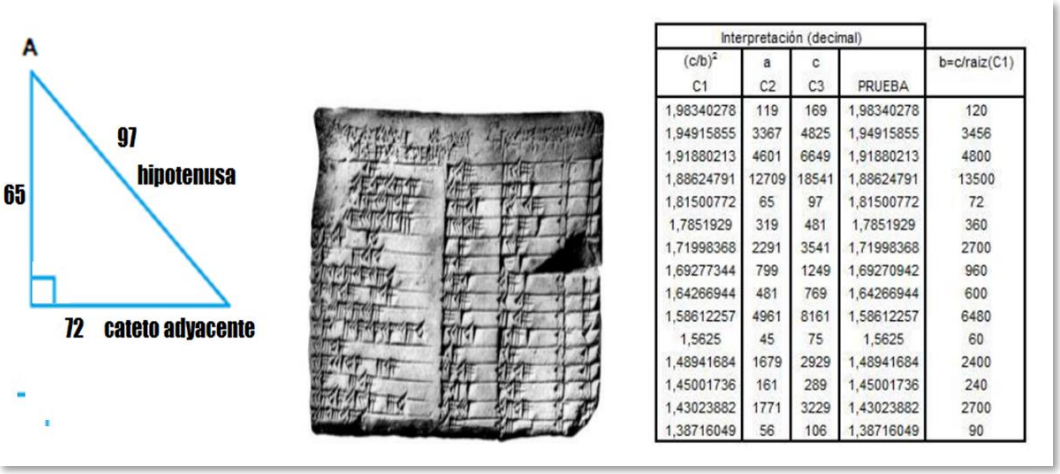
Es necesario para iniciar un análisis epistemológico del seno trigonométrico, podamos partir de una noción válida de la Trigonometría. Para dicho propósito recogemos lo expresado por De Morgan (1849) quien en su libro *Trigonometry and double algebra* refiere que en una figura como el triángulo existe una estrecha relación de dependencia única de los ángulos hacia las proporciones de los lados, y de las proporciones de los lados hacia los ángulos, esta estrecha relación existente entre los ángulos y las proporciones de los segmentos, los modos de expresión creados y los resultados obtenidos y aplicados son estudiados por la trigonometría. El autor también considera que la trigonometría se ocupa de estudiar la magnitud ondulante, entendida como aquella que se hace alternativamente mayor y menor, y que no se acerca permanentemente a un límite fijo, y añade que, el álgebra ordinaria no tiene tales funciones en sus formas finitas y aunque las puede poseer como series infinitas, no puede reconocer y establecer fácilmente la propiedad de ondulación.

Por su parte Van Brummelen (2009) inicia su definición de Trigonometría a partir de dos condiciones necesarias: Una medida cuantitativa estándar de la inclinación de una línea a otra, y la capacidad e interés en calcular longitudes de segmentos de línea. Así mismo Montiel (2013) indica que el desarrollo del pensamiento trigonométrico en los estudiantes posee dos dimensiones una relacional y otra funcional, la primera relacionada a identificación de la relación entre ángulos y cuerdas, y a la naturaleza de esta relación, sumado a la posibilidad de cuantificarla mediante razones proporcionales; mientras que en el segundo caso se da cuando dentro de un contexto de variación, en un comportamiento periódico-acotado, se la reconoce como una herramienta predictiva.

Podemos reconocer entonces que la Trigonometría tiene dos aspectos que lo pueden caracterizar y definir, uno de carácter relacional expresado como las razones trigonométricas y el otro funcional, donde se manifiestan las funciones trigonométricas, estas dos nociones se van a ver reflejadas en el proceso histórico de la trigonométrica.

Ya contando con una caracterización del objeto matemático se procede a realizar una revisión epistemológica del seno trigonométrico y de la trigonometría, de los cuales podemos decir que antes que se desarrollaran de manera explícita, éstas se manifestaban a través de actividades prácticas en las que cobraba mayor importancia el resultado que los conceptos y propiedades que estaban subyacentes. Podríamos llamar a estas actividades, como las que precedieron a la trigonometría y a la aparición de elementos conceptuales tales como el seno y coseno.

Es así que Farfán y García (2005) indican que dos civilizaciones de la antigüedad destacan en su trabajo con matemáticas: Babilonia y Grecia. En el caso de los babilonios, los registros indican que manejaron un concepto primitivo de función como respuesta a la necesidad de poder establecer regularidades de los datos obtenidos por la observación de fenómenos naturales. Así mismo, Tello (2016) señala que fue una necesidad para la clase dominante en babilonia comprender algunos fenómenos que se manifestaban en la naturaleza para poder organizar su sociedad desde los aspectos religioso, filosófico y social; en ese sentido, la astronomía les permitía cumplir este objetivo, al darles la posibilidad de poder predecir el movimiento y la posición de los astros, y a su vez la identificación de constelaciones, lo que conllevaría abordar a la noción de tiempo y a la noción de ángulo. Para concretar estas actividades diseñaron tablas que muestren relaciones entre diferentes medidas de ángulos y altitudes, un ejemplo lo constituye la tablilla Plimpton 322 con una antigüedad alrededor del 1900 a 1600 a.c., en la que se observa el uso de ternas pitagóricas.



Interpretación (decimal)				
$(c/b)^2$ C1	a C2	c C3	PRUEBA	b=c/raiz(C1)
1,98340278	119	169	1,98340278	120
1,94915855	3367	4825	1,94915855	3456
1,91880213	4601	6649	1,91880213	4800
1,88624791	12709	18541	1,88624791	13500
1,81500772	65	97	1,81500772	72
1,7851929	319	481	1,7851929	360
1,71998368	2291	3541	1,71998368	2700
1,69277344	799	1249	1,69270942	960
1,64266944	481	769	1,64266944	600
1,58612257	4961	8161	1,58612257	6480
1,5625	45	75	1,5625	60
1,48941684	1679	2929	1,48941684	2400
1,45001736	161	289	1,45001736	240
1,43023882	1771	3229	1,43023882	2700
1,38716049	56	106	1,38716049	90

Figura 1. *Tablilla de Plimpton 322.*
Fuente: Adaptado de Runza (2013, p.5)

En la figura 1 se muestra esta tablilla y su representación en el sistema decimal, además el triángulo con los datos de la fila 5, la relación entre esos datos mediante ternas pitagóricas y lo que sería equivalente desde una perspectiva actual el cuadrado de la secante.

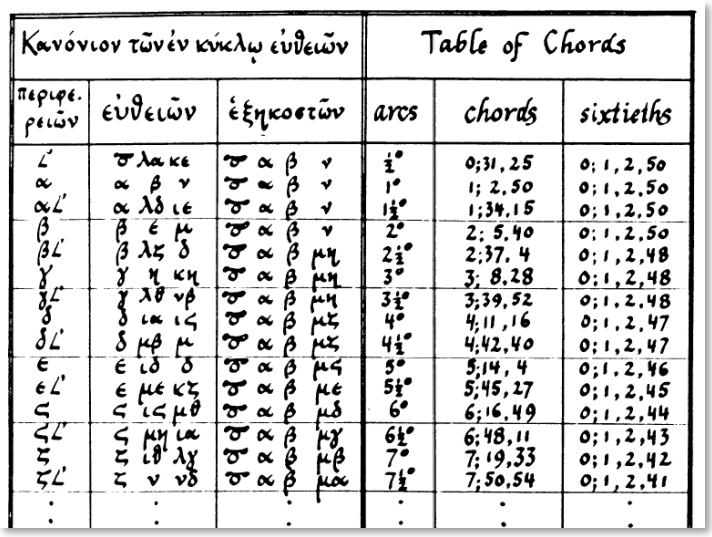
Al respecto Boyer (1986, p.66) señala que esta tabla podría ser tomada como registros de procesos comerciales, sin embargo, en un análisis mayor se identifica un profundo significado en la teoría de números, como un recurso auxiliar para medir las áreas de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo, y obtener ternas pitagóricas, y que tal vez se pueda relacionar con una especie de prototrigonometría. Además, respecto al uso de tablas en general, reconoce que al igual que los papiros egipcios, las tablas carecen de formulaciones generales; sin embargo, indica el autor indica también que la ausencia de una formulación general de estas tablas, no significaba necesariamente que la generalidad de dichas reglas o principios escapase al pensamiento babilónico, y añade que, si no estuviese presente una regla general sería difícil explicar la semejanza entre problemas de cientos de tabletas con ejercicios que debían ser resueltos con particulares métodos o reglas .

Por su parte, Sastre Vázquez, Rey, y Boubée (2008) manifiestan que si bien es cierto los babilonios no manejaron un concepto de función como tal, la noción de este concepto sí se encontraba implícita la en las tablillas astronómicas, al describir directamente mediante relaciones aritméticas, por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol.

Se observa en este primer contacto histórico, si bien es cierto los babilonios desarrollaron una matemática de carácter práctico, muestran un contexto favorable para la emergencia de la noción de función, por la regularidad que podrían guardar sus procedimientos de resolución a problemas, y por la regularidad de muchas de sus tablas. No obstante, en la civilización griega, y a pesar del alto desarrollo que alcanzaron logrando superar la matemática utilitaria de sus antecesores por una matemática teórica y demostrativa, se desatiende esta noción de función debido a formas de pensamiento fuertemente arraigados y que trascendió inclusive por muchos siglos posteriores.

Los griegos tenían una concepción en la que la matemática correspondía al mundo de las ideas, y como tal, debían mantener un carácter puro, ajena al contacto con situaciones reales o hechos cotidianos. Esta perspectiva de los griegos contribuyó significativamente en el desarrollo de campos de la matemática como la geometría y la aritmética, pasando de una incipiente matemática a una matemática mejor estructurada, con rigor teórico y respaldo en la demostración. Un ejemplo claro de ello está dado por la obra Los Elementos de Euclides, el cual reunía y sistematizaba los conocimientos matemáticos de la época de manera lógica, articulando un amplio cuerpo de proposiciones a partir de un pequeño grupo definiciones y axiomas.

En cuanto a la Trigonometría Griega, esta se manifestó dentro de la astronomía, en donde de acuerdo a Cruz-Márquez (2018) destacan las figuras de Apolonio quien propuso dos modelos geométricos, no predictivos, pero sí capaces de describir los movimientos de los astros; Aristarco, Eratóstenes e Hypsicles, introdujeron la noción de ángulo como cuantificación de la amplitud y la división del círculo en 360 unidades; Hiparco desarrolló la primera tabla trigonométrica posteriormente retomada por Ptolomeo, quien finalmente a mediados del siglo II mediante su obra el Almagesto estructura las ideas relacionadas a la astronomía, y aunque a la postre su planteamiento de geocentricidad y la circularidad de las trayectorias de los planetas resultaron inválidos, los argumentos matemáticos que utilizó para fundamentar este sistema y en especial su tabla trigonométrica, cuya sección se puede apreciar en la figura 2, constituyen las primeras evidencias concretas del nacimiento de nociones trigonométricas.



Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
½′	σ λα κε	σ α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	σ α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α½′	α λδ ιε	σ α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	σ α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β½′	β λς δ	σ α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	σ α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ½′	γ λθ νβ	σ α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	σ α β μς	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ½′	δ μβ μ	σ α β μς	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	σ α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε½′	ε με κζ	σ α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	σ α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς½′	ς μη ια	σ α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λχ	σ α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2,42
ζ½′	ζ ν νδ	σ α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Figura 2. Sección de la tabla de las cuerdas de Tolomeo
Fuente: Tomado de Montalvo (2012, p. 21)

Si bien es cierto, ya se gesta en la astronomía griega los primeros pasos de la Trigonometría, esta aún mantenía fuertes vínculos con la Geometría y el pensamiento filosófico griego de entonces. Al respecto, Montiel (2005) señala que una cualidad intrínseca en los griegos al matematizar la astronomía y en consecuencia a al desarrollar trigonometría clásica, los modelos obtenidos son de naturaleza geométrica estática. La astronomía griega recaía en prestar atención a la trayectoria de un astro como un arco correspondiente a una geometría estática.

Por su parte Tello (2016) indica que aunque Tolomeo recoge en su tabla una herramienta que le permite hallar las posiciones periódicas de los astros, la noción de una cantidad variable le era esquiva, en razón al pensamiento de los griegos que aún mantenía. Esto refleja que la trigonometría recayó en el triángulo y la circunferencia aplicada al estudio de la astronomía, se trataba de una trigonometría de cuerdas que se desenvolvía en el contexto estático de la geometría, y en la que se puso énfasis en hallar la medida de la semicuerda en función del ángulo central de una circunferencia.

En este mismo contexto se pueden puntualizar algunas formas de pensamiento procedentes principalmente del idealismo platónico y la filosofía pitagórica que constituyeron en la matemática griega obstáculos epistemológicos para concebir la noción de función y de manera particular la de función trigonométrica. De acuerdo con Ruiz (1994) dentro de los obstáculos de creencias y convicciones se incluye el obstáculo denominado concepción estática, el cual asentaba en los matemáticos griegos una perspectiva de carácter estático de los objetos matemáticos.

Autores como Ruiz (1994) y Farfán y García (2005) señalan que los griegos no eran ajenos a características ligadas íntimamente con los hechos y fenómenos de la realidad, tales como la concepción del cambio y el movimiento, pues incluso, dentro de la perspectiva aristotélica se presentaba el estudio de estos conceptos, sin embargo, desde su filosofía también, planteaban que el cambio y el movimiento se encontraban fuera de las matemáticas, y destinadas al estudio que se realiza dentro de la Física, es decir, se entendía la Física como la ciencia del movimiento, mientras que la matemática era estrictamente teórica, asumiendo que los objetos matemáticos no están sujetos al movimiento excepto aquellos a los que se refiere la astronomía. De esta manera se mantenía alejada la noción de cambio y variación en las matemáticas, y en la física y astronomía donde sí eran tratables se producían modelos de carácter geométrico estático lo que motivó que se ponga mayor atención a las incógnitas que a las variables, y en consecuencia a desarrollar ecuaciones y proporciones, relegando la noción de función.

Aunado a ello, se hace manifiesto también otro fuerte obstáculo epistemológico, y ubicado también dentro de la categoría de obstáculos de creencias y convicciones, denominado como la disociación entre magnitud y número, fortalecido en la escuela pitagórica, quienes concebían el número como elemento fundamental del universo, procuraron las comparaciones entre magnitudes sean expresado por proporciones sintetizado como un número.

Ruiz (1994) sostiene que esta concepción constituye un obstáculo epistemológico pues cuando los griegos trabajan las proporciones les era muy difícil distinguir la relación entre magnitudes de diferente tipo, ya que siempre comparaban cantidades de la misma naturaleza. Un ejemplo de ellos sería considerar que los griegos podrían pensar con naturalidad y simpleza, que el área total de un cubo es proporcional al área de la superficie de una de sus caras en relación de 6 a 1; sin embargo, lo que sí les costaría mucha dificultad sería afirmar que el área total de un hexaedro es proporcional a longitud de la arista, pues si se habla de la magnitud área no correspondería relacionarla a una magnitud diferente como la longitud de una arista. Quizá por ello los griegos lograron establecer proporciones admirables como la formulada por Arquímedes, quien a pesar de equilibrar el rigor matemático con el trabajo empírico y lograr formular una brillante relación entre volúmenes del cono, la esfera y el cilindro, lo realizó con prevalencia de lo proporcional entre magnitudes del mismo tipo.

Según René de Cotret (1985, en Farfán y García, 2005) las nociones de proporcionalidad, inconmensurabilidad y la disociación en el pensamiento entre número y magnitud fueron las más negativas pues limitaron el desarrollo del concepto de función e impidieron que en la edad media pueda concretarse los intentos de explicar cuantitativamente algunos fenómenos racionales. Así mismo, Ruiz (1994) señala que en el obstáculo disociación entre magnitud y número, los números se consideran enteros y discretos, sin embargo, las magnitudes son continuas, así mientras que la noción de número continuo no sea aceptada, será muy difícil construir la noción de función, ya que los números, así considerados, solo permitirían construir una representación discreta de los fenómenos de la naturaleza, enmascarando la continuidad existente en el carácter variable y continuo de los mismos.

Estos obstáculos particularmente descritos y señalados además de otros factores y condiciones políticas, sociales y filosóficas, ralentizaron la emergencia del concepto de función y en consecuencia también el concepto de función seno. Luego del trabajo de Tolomeo realizado en el siglo II d.c., tuvieron que pasar cerca de ocho siglos para que Abul Wefa introdujera el radio unitario llevando la circunferencia a una longitud de 2π, obteniendo relaciones entre seno, coseno y tangente, además propuso nuevas tablas trigonométricas con una precisión de 8 decimales, pero no es hasta alrededor del siglo XVII cuando se comienza a reconocer las propiedades periódicas en situaciones físicas las que darán las condiciones para posibilitar el seno trigonométrico con un carácter más analítico.

Al respecto Tello (2016) indica que fueron necesarios diferentes tipos de problemas para que la función trigonométrica se acerque al significado que tiene en la actualidad, aquellos problemas tenían la particularidad de buscar modelos que describieran fenómenos periódicos, entre ellos, el problema de la cuerda vibrante y la matematización del calor.

Un ejemplo de lo mencionado es el caso de la ley de Hoke publicada en 1678, en donde se busca describir el movimiento de un peso sobre un resorte estirado, por medio de un diagrama en el que la velocidad de este peso es como ciertas coordenadas en un círculo, consideradas como los senos de los arcos cortados. Aparece también el problema de la cuerda vibrante, problema que llevó a una ecuación diferencial y que tuvo también la oportunidad de generar el cálculo de la función seno. Este problema fue tratado en primer lugar por Taylor, quien como explica Katz (1987) se mostró más interesado en el tiempo periódico del movimiento de la cuerda sin llegar a expresar esta ecuación en términos del seno mismo.

Según Katz (1987), las funciones trigonométricas ingresaron al análisis en 1669 en De Analysi la Obra de Isaac Newton en donde plantea una serie de potencias para el seno, sin embargo, es en 1748 gracias a la intervención de Leonhard Euler mediante su trabajo Introductio in Analysin Infinitorum donde se trató estas funciones en el análisis matemático, al solucionar ecuaciones diferenciales lineales y posteriormente generar un método general para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Tello (2016) indica que en el capítulo VII de este libro, denominado On Trascendental Quantities Which Arise from the Circle Euler proporciona un tratamiento numérico para la función trigonométrica, abordando sus distintas propiedades, desprendidas ya del carácter geométrico estático el triángulo y en las cuerdas de un círculo.

Resultados

De acuerdo con el estudio bibliográfico realizado se ha encontrado que existe un profundo trabajo elaborado por Ruiz (1994) que identifica obstáculos epistemológicos ligados a la evolución histórica de la función, entre ellos los relacionados a las primeras concepciones históricas: los obstáculos de creencias y convicciones.

Se ha puesto de manifiesto también, producto del trabajo bibliográfico, que en un primer momento histórico los babilonios tenían condiciones favorables para poder arribar a la noción de función ligada a la regularidad de su práctica matemática. Además, se observa que distintos autores muestran en común el aspecto estático de la matemática griega, al cual estuvo ligado los primeros indicios y pasos de la trigonometría, lo que se vio reflejado en una matemática estructurada, teórica y capaz de realizar demostraciones, pero distante de una noción actual de función.

Consideraciones finales

Finalmente, el estudio bibliográfico realizado permite establecer una relación que involucra los obstáculos de la concepción estática y de la disociación existente entre magnitudes y número, presentes en la evolución histórica de

la noción de función; con un primer momento histórico donde la trigonometría se vincula a una astronomía y geometría estática, distante de la noción de función tal como la conocemos en la actualidad.

Atendiendo a estas consideraciones, un análisis didáctico para la enseñanza actual de la función seno, deber tomar en cuenta que se pueden presentar obstáculos análogos a la concepción estática y a la disociación entre magnitud y número, ligados al estudio de la geometría clásica principalmente al tratar el triángulo y la circunferencia.

Por consiguiente, se debe considerar que el abordaje de la función seno no puede verse ligada a la utilización de un medio estático, el triángulo rectángulo o la circunferencia; es necesario plantear una posible razón de ser, la cual puede involucrar un contexto donde sea necesario un proceso de modelización de un fenómeno periódico.

Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP, Escuela de Posgrado – Maestría Enseñanza de las Matemáticas, específicamente a la línea investigación Epistemología de las matemáticas en la didáctica de las matemáticas: la antropología del conocimiento matemático y el diseño de secuencias didácticas, por el apoyo brindado para concretar la presente investigación.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, *10,* (2.3), 241-286.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (4). 2, 164–198.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, 1287-1296. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cruz-Márquez, G. J. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* (Tesis de Maestría), Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Katz, V. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica*, *14*(4), 311-324. Recuperado de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086087900644?via%3Dihub [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Méndez, A. (2008). *La investigación en la era de la información, guía para realizar la bibliografía y fichas de trabajo*. México: Trillas.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica.* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, México.

De Morgan, A. (1849). *Trigonometry and double algebra*. Recuperado de https://archive.org/details/trigonometrydoub00demoiala/page/iv. [Consulta: 28 de mayo de 2019].

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. México D.F., Subsecretaría de Educación Media Superior. Recuperado de: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_del_pensamiento_trigonometrico_baja.pdf

Farfán, R. y García, M. (2005). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 489-494. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Luján, P. (2019). *Modelización de la función seno: un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo*. (Tesis de maestría en proceso de sustentación), Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.

Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*; *6*(1), 5-67.

Tello, J. (2016). *Surgimiento de la función trigonométrica: Aspectos histórico-epistemológicos*. (Tesis doctoral), Universidad del Valle, Santiago de Cali.

Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press.

DIÁLOGOS DISCENTES SOBRE O CURRÍCULO DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DA UFRJ

STUDENTS' DIALOGUES ON THE PRESERVICE TEACHER TRAINING CURRICULUM AT THE FEDERAL UNIVERSITY OF RIO DE JANEIRO

Cleber Dias da Costa Neto, Victor Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)
cleberneto@gmail.com, victor.giraldo@gmail.com

Resumo
Este trabalho investiga o currículo da formação inicial de professores de matemática a partir do olhar de estudantes desse curso. Nossa produção de dados se baseou em uma roda de conversa, com doze participantes, incluindo egressos e estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Empregamos uma metodologia de reestruturação que nos permitiu identificar alguns episódios. Estes foram reelaborados com personagens que são colocados em diálogos coletivos ficcionais, construídos e analisados sob um prisma teórico de narrativas, formação de professores e currículo. Com a descrição desse processo de análise e o destaque de alguns exemplos e resultados, procuramos revelar percepções, consensos e contradições dos participantes sobre o currículo da formação inicial de professores de matemática na instituição.

Palavras-chave: currículo, formação inicial de professores de matemática, narrativas, diálogos discentes

Abstract
This work investigates the curriculum of pre-service mathematics teachers' training from this course students' view. Our data production was based on a discussion group, with twelve participants, including graduates and undergraduate students of the Bachelor's degree of Mathematics Education at the Federal University of Rio de Janeiro. We used a restructuring methodology that allowed us to identify some episodes. These episodes were restructured with characters in collective fictional dialogues, which were constructed and analyzed under a theoretical lens of narratives, teachers' training, and curriculum. Through the description of this analysis process, and the highlighting of some examples and results, we aim to reveal participants' perceptions, consensus and contradictions about the curriculum of the pre-service mathematics teachers' training in the institution.

Key words: curriculum, pre-service mathematics teachers' training, narratives, students' dialogues

Introdução

Este trabalho é parte de uma pesquisa mais ampla, correspondente à tese de doutorado do primeiro autor com supervisão do segundo (Costa-Neto, 2019). O objetivo geral da tese é investigar o currículo do curso de formação inicial de professores de matemática[1] na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) desde a década de 1980, sob as perspectivas: (i) da instituição e seus documentos oficiais sobre a Licenciatura em Matemática; (ii) dos docentes desse curso, como potenciais influenciadores do currículo; e (iii) dos estudantes e egressos desse curso, como influenciados pelo currículo e como possíveis influenciadores do mesmo.

Este artigo enfoca a última perspectiva. As duas anteriores foram abordadas em trabalhos submetidos a periódicos e a outros eventos da área (e.g. Costa-Neto & Giraldo, 2019). Assim, investigamos aqui o currículo da formação inicial de professores de matemática da UFRJ a partir do olhar de sujeitos que foram ou que são estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, por entendermos que estes têm suas práticas docentes e concepções sobre a profissionalização da docência (no sentido de Tardif, 2013), influenciadas por seus percursos durante a formação inicial. Esta investigação, que compõe a trilogia instituição-docentes-discentes, foi realizada concomitantemente às pesquisas referentes aos documentos e aos docentes da instituição. Dessa forma, a ordenação que apresentamos acima não se configura em uma hierarquização entre as perspectivas investigadas, mas representa de maneira fiel a forma com que nosso interesse pela temática foi se desenvolvendo durante o período de construção do projeto da tese de doutorado.

Para discutir a perspectiva dos discentes em nossa pesquisa, utilizamos o instrumento metodológico *roda de conversa*, com um processo posterior de organização e reestruturação dos dados produzidos, da forma que detalharemos nas próximas seções. *O objetivo deste artigo está na apresentação desse processo de organização e reestruturação dos diálogos entre os discentes durante a roda de conversa*. Tal enfoque se justifica por se tratar de um procedimento que está inerentemente ligado à natureza narrativa presente em toda a pesquisa da tese, e porque se caracteriza como uma forma não usual de organização e análise de dados, merecendo, assim, ser sistematizado e publicizado. Em outro trabalho (Costa-Neto & Giraldo, 2020), destacamos e analisamos todos os episódios selecionados nesses diálogos. Antes de avançarmos no detalhamento do processo metodológico que utilizamos, apresentamos uma breve discussão teórica acerca de currículo, formação de professores e narrativas, nos campos da Educação e da Educação Matemática.

Discussão teórica

No Brasil, o debate sobre formação docente ocorre de maneira mais intensa desde os anos 1980 (e.g. Lüdke, 1983). No contexto da formação de professores de matemática na UFRJ, isso se evidencia nas reformas curriculares do curso de Licenciatura em Matemática, processo que assume características dos modelos representados pelas alcunhas *3+1* e *quase tricotomia* na literatura de pesquisa brasileira. Moreira (2012) descreve o modelo *3+1* como aquele segundo o qual a formação do professor se estrutura em blocos estanques correspondentes a conhecimentos específicos (matemáticos) e pedagógicos, separados, respectivamente, nos três anos iniciais e no ano final do curso. O termo *quase tricotomia* é proposto por Fiorentini e Oliveira (2013) como uma denominação para a reconfiguração do modelo 3+1 caracterizada pela separação em três blocos que obedecem também à lógica proporcional, agora entre formação matemática, formação didático-pedagógica e prática profissional. Ambos os termos se relacionam com a discussão e a proposição apresentadas por Shulman (1986) e desenvolvida por outros autores (e.g. Ball et al, 2008) acerca dos conhecimentos necessários ao professor para sua prática docente. Além disso, mais recentemente a *prática como componente curricular*, eixo estruturante da reformulação dos cursos de Licenciatura e que se encontra presente nos documentos oficiais relacionados a esse assunto (Brasil, 2005, 2015), passou a ocupar o centro das discussões sobre as políticas de formação de professores e, consequentemente, foi tema de debate em espaços e eventos nos quais se discutiu o currículo da Licenciatura em Matemática da UFRJ nos últimos anos (Costa-Neto,

2019). Relacionamos o debate sobre a *prática como componente curricular* com trabalhos que se referem à prática como um elemento importante da formação do professor, em uma perspectiva de profissionalização docente (Tardif, 2013), que considera o professor da educação básica como figura central (Nóvoa, 2009) e não dicotomiza os conhecimentos entre teóricos e práticos (Cochran-Smith e Lytle, 1999).

Entendemos, assim, que nos últimos 40 anos vem sendo formados professores de matemática pela UFRJ que têm suas práticas e concepções influenciadas pelos modelos *3+1* e *quase tricotomia*, e que as discussões mais recentes, mesmo sem se configurarem em novas grades curriculares, também podem exercer influência indireta na ação profissional desses sujeitos. Levando-se em conta aspectos de teorias de currículo, percebemos que esse movimento pendular na estruturação da formação de professores de matemática pode ter conexões com disputas políticas entre matemáticos e educadores matemáticos – que não se dão necessariamente pelo protagonismo na formação docente (em matemática), mas tendem a se relacionar com a existência de diferentes áreas de conhecimento envolvidas, com diferenças nos campos de atuação, no reconhecimento pela comunidade científica e na filiação a áreas de pesquisa (Gabriel, 2013). A literatura de pesquisa sobre currículo sugere que esse debate não pode ser reduzido ao binarismo entre matemáticos e educadores matemáticos, pois a sua complexidade transcende a esse tipo de análise, como destacam as teorias curriculares pós-críticas (Lopes, 2013). Além disso, como proposto por Silva (2014) ao destacar o currículo como *currere* (percurso), concepção em que se considera o protagonismo da ação e não do sujeito (Silva, 2014. p. 519), compreendemos que o currículo depende de várias variáveis e se realiza de formas diferentes para cada sujeito (estudante/futuro professor). Assim, consideramos fundamental que os discentes do curso de formação inicial de professores de matemática da UFRJ também figurem como protagonistas de nossa investigação.

Nesse sentido, a construção de narrativas que levem em consideração os elementos constitutivos desse cenário – discentes, seus percursos diversos e protagonismos – foi nossa escolha para a organização do trabalho que compõe a tese. Tal escolha ocorre por entendermos que textos como esses possibilitam que ocorra um processo de apropriação do conteúdo por parte do leitor (Cury et al, 2014), em que este pode se configurar em um vetor de uma nova narrativa repassada a terceiros. Neste caso, o conteúdo a que nos referimos é o currículo da formação inicial de professores de matemática, reconhecendo o currículo "como constituído de múltiplas narrativas" e possibilitando a desconstrução de "narrativas preferidas, como narrativas dominantes" (Silva, 2014, p. 525). Pretendemos aqui visibilizar o processo no qual estruturamos uma narrativa possível, não-dominante, sobre o currículo da Licenciatura em Matemática da UFRJ, neste caso, a partir dos diálogos entre discentes do curso em diferentes períodos e contextos. Assim, optamos por apresentar em conjunto, na próxima seção, a descrição da metodologia, alguns resultados e análises.

Metodologia, resultados e análise de dados

Descrevemos aqui o processo de estruturação da narrativa – sem, necessariamente, compartimentá-lo em fases sequenciais nas quais ocorrem coleta, tratamento e análise dos dados em momentos separados –, destacando os instrumentos metodológicos que utilizamos e a forma por meio da qual os dados foram organizados e apresentados. Entendemos, assim, que o procedimento de análise perpassa todas as etapas descritas a seguir.

Etapa 1 – A Roda de Conversa

Em setembro de 2018, organizamos uma roda de conversa, que se caracteriza como uma entrevista coletiva semiestruturada, em que se objetiva promover um diálogo envolvendo todos os participantes. Dessa, participaram doze indivíduos, sendo nove egressos e três estudantes que ainda cursavam a Licenciatura em Matemática na instituição. Os egressos foram estudantes do curso em momentos diversos, no período de 1984 a 2016. Os que ainda estavam cursando, na ocasião da entrevista, encontravam-se no 1º ano, 3º ano e no último ano da formação.

A roda de conversa foi mediada por nós, autores deste trabalho. Um aspecto metodológico fundamental da pesquisa é o fato de que ambos somos docentes da UFRJ, atuantes em unidades acadêmicas corresponsáveis pelo curso de Licenciatura em Matemática: no caso do primeiro autor, no Colégio de Aplicação (CAp-UFRJ), unidade de educação básica da instituição e que serve de campo de estágio prioritário para os estudantes de licenciatura; no caso do segundo autor, no Instituto de Matemática (IM-UFRJ), unidade em que está sediado o curso e que é responsável pela maior parte de seus componentes curriculares. Dessa maneira, não nos colocamos como externos e isentos ao tema da pesquisa. Ao contrário, assumimos esse enviesamento como parte constituinte da investigação e como aspecto metodológico central.

Os dados brutos produzidos na roda de conversa consistiram-se em quase três horas de áudio e vídeo gravados, gerados a partir do debate estimulado por um roteiro estruturado em cinco questões, conforme a tabela apresentada a seguir:

Tabela 1 – Questões do roteiro da roda de conversa

1 – Façam uma breve apresentação pessoal (nome, período no qual cursou, formação em pós-graduação, atuação profissional)
2 - O que acham do currículo da Licenciatura em Matemática da UFRJ que vocês cursaram ou cursam?
3 - Quais disciplinas da grade curricular vocês identificam como mais importantes para suas ações profissionais na docência (atuais ou futuras)? Por que?
4 - Existem disciplinas da grade curricular que vocês identificam como desnecessárias para a formação do professor de matemática? Se sim, quais?
5 - Como seria um currículo de Licenciatura em Matemática ideal para formar um profissional que ensina matemática na educação básica?

O intuito inicial era de que cada uma das cinco questões pudesse contar com falas de todos os participantes, porém isso só ocorreu na primeira. Cada uma das demais questões contou com intervenções de pelo menos sete dos participantes, evidenciando uma pluralidade de posicionamentos. Essas falas não ficaram limitadas às respostas para as perguntas, pois emergiram consensos, dissensos, rememorações e destaques que possibilitaram que os participantes interagissem entre si e não somente com os entrevistadores.

Etapa 2 – A organização dos dados

Após a realização da roda de conversa, procedemos uma aproximação aos dados brutos. Não utilizamos para tal a transcrição literal das gravações em áudio e em vídeo. Em primeiro lugar, esse procedimento envolveria consideráveis ações de ordem técnica, devido à complexidade da simultaneidade e ao atravessamento de falas. Sobretudo, a identificação de todas as falas de cada um dos participantes não seria consistente com nossas questões de pesquisa, cujo foco está no currículo do curso, a partir da trilogia instituição-docentes-discentes, e não nas concepções dos sujeitos em si. Isto é, nossa unidade de análise está na coletividade de discentes, e não nos indivíduos. Assim, lançamos mão de um procedimento de organização dos dados a partir da seleção de *eventos críticos*, ao ouvir e assistir as gravações de áudio e de vídeo da roda de conversa. Tal procedimento, sistematizado por Lima (2015), inclui seis fases: assistir aos vídeos, selecionar os eventos críticos, descrever os eventos críticos,

transcrever os eventos críticos, discutir os dados encontrados e limpar as transcrições. Não utilizamos aqui todas as fases da estratégia de trabalho na forma com que foi sistematizada pelo autor, mas nos inspiramos nessas ações. Após cumprirmos as duas primeiras fases, selecionamos 20 eventos críticos. Posteriormente, descrevemos cada um desses, conforme ilustra o exemplo a seguir:

Descrição do Evento Crítico 13

> *(1:35:30) Pergunto ao Egresso 1 onde está a parcela de responsabilidade do estudante no contexto do currículo do curso, após Egresso 1 ter apontado que a culpa é da instituição, dos professores e dos estudantes. Ele argumenta que o estudante do curso de Licenciatura em Matemática é muito passivo e relata um episódio que ilustra uma possibilidade de ação. (1:38:10)*

Por fim, passamos a transcrevê-los na íntegra como forma de obter os dados de maneira mais completa. Apresentamos, a seguir, a transcrição do *evento crítico 13*, que foi descrito acima:

Transcrição do Evento Crítico 13

Egresso 1: Mas eu acho que exatamente a ideia é a gente fazer o quê: a gente começar a olhar e falar que tem que ter um *mea culpa* da instituição, dos professores e dos alunos. Assim, todo mundo aqui está errado. Mas é verdade! A instituição está errada porque acontece o seguinte: "ah! eu fiz errado ali, então volta todo mundo pra cá, a gente conserta e joga de novo". Mas ela não se conserta. Tem professores lá, que ao invés de dar a ementa, dava o que estava afim.
[Burburinho com concordância de vários participantes]

Egresso 1: E não foi só um. E você tem que pensar também numa coisa: foi que nem o professor dela, do 5 e 10. Não adianta você pensar nisso. Por que depois você vai chegar num colégio e vai pegar uma prova e vai falar: "errou tudo, zero!"? Acabou.
[Vários participantes falando ao mesmo tempo]

Mediador 1: Vamos só acelerar. Eu só queria ouvir a última coisa: você falou que os três estão errados. Por acaso, minha pesquisa fala desses três lugares e aqui a gente está falando sobre esse terceiro, que é o estudante. Onde está o erro do estudante da licenciatura?

Egresso 1: Porque o aluno vê o erro, aceita o erro e continua reproduzindo esse erro. Ele continua se aceitando naquele lugar de que "eu não mudo, não adianta eu chegar com uma discussão porque eu não mudo". E isso é falso. Eu vou contar um caso.
[Vários participantes falando ao mesmo tempo, com discordâncias e concordâncias]

Mediador 1: Calma aí, gente. Tem gravação. Senão, não consegue captar.

Egresso 1: Quando eu estudava na graduação e tinha uma prova única nas disciplinas de Física.
[*É interrompido com falas explicativas simultâneas sobre o procedimento de prova única que ocorre atualmente*]

Egresso 1: Começou a acontecer que ninguém passava em Física. E isso acontecia porque eram vários professores corrigindo, ninguém conhecia ninguém. Você não tinha uma interação assim: "eu conheço esse cara aqui, esse cara conhece isso aqui, faz sentido e vou dar meio ponto aqui, porque sei que ele tá certo." Ou seja, a gente fez um movimento dentro do CT. Então fui eu da Matemática, representantes da Elétrica e da Mecânica, e fomos na Reitoria. A gente foi na Pró-Reitoria de Ensino.

Procedemos então a transcrição literal dos trechos selecionados dos eventos críticos, em que registramos todas as falas audíveis e indicamos os momentos em que o entendimento das falas não era possível. Por fim, as duas fases finais, apontadas no procedimento de Lima (2015), não foram realizadas por nós a partir de métodos usuais de análise, mas em um processo de reestruturação dos dados, que relatamos a seguir.

Etapa 3 – A Reestruturação dos dados

A partir desse mapeamento, iniciamos o processo de reestruturação dos diálogos que foram estabelecidos na roda de conversa e transcritos parcialmente após a seleção dos eventos críticos. Para isso, utilizamos elementos da *abordagem narrativa de re-storying* que consiste na construção de uma "história a partir dos dados originais" com base em "elementos narrativos como o problema, personagens, cenário, ações e resolução" (Nardi, 2016). No nosso caso, construímos, a partir da transcrição do material selecionado, uma nova história sobre o olhar discente acerca do currículo do curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ. Entendemos que toda forma de análise é uma releitura e, por isso, nessa nova história, contamos com diálogos entre personagens ficcionais: quatro discentes e um mediador. Os personagens discentes foram caracterizados levando em conta aproximações, percepções e entendimentos entre os participantes da roda de conversa. Suas falas foram construídas a partir do entrelaçamento das falas originais dos participantes. Já as enunciações do mediador foram inseridas no novo diálogo com o intuito de conectar falas dos demais personagens e também como forma de trazer elementos constitutivos das experiências e práticas profissionais dos autores como docentes da instituição. Nesse processo, não procuramos construir personagens isentos de contradições, por entender que narrativas, mesmo no discurso de um único participante, acessam sentidos e emoções que emergem no momento do debate (Barbosa, 2015, p. 359), fazendo com que não seja seguida uma linha única no discurso.

Assim, em lugar da usual determinação de categorias de análise, neste trabalho optamos por apresentar os dados produzidos por meio desse processo de reestruturação dos diálogos. A seguir, apresentamos as caracterizações dos personagens ficcionais discentes, bem como um pequeno recorte dos diálogos reestruturados, como exemplo. Esse recorte reúne majoritariamente informações provenientes do *evento crítico 13*. Como o foco deste artigo está nos procedimentos metodológicos de construção dos personagens ficcionais e dos diálogos reestruturados, e como todos os eventos críticos não caberiam na íntegra nas limitações de espaço deste texto, apresentamos apenas esse recorte, como forma de ilustração de tais procedimentos. Os demais episódios são relatados em outro trabalho (Costa-Neto & Giraldo, 2020).

Caracterização dos personagens discentes

Usamos, para os personagens discentes, os pseudônimos *Marta, Hélton, Roberto* e *Juninho*, sendo um feminino e os demais masculinos, conforme a proporção dos participantes na roda de conversa.

> *Marta* foi estudante do curso de 1987 a 1991, cursou Mestrado em Matemática e Doutorado em Educação Matemática. Lecionou em escolas públicas da cidade do Rio de Janeiro e atualmente é professora de escola pública federal.
> *Hélton* foi estudante do curso de 1996 a 2002 e cursou Mestrado em Educação Matemática. Atualmente, leciona em escolas particulares e públicas da cidade do Rio de Janeiro.
> *Roberto* foi estudante do curso de 2003 a 2010, quando migrou para uma instituição privada de ensino superior para concluir a formação inicial de professor de matemática. Atualmente, é professor e diretor de escola pública do Rio de Janeiro.
> *Juninho* é estudante do curso desde 2015, está no ano de conclusão e possui experiência em atividades de monitoria. É formado, em nível secundário, como professor dos anos iniciais da educação básica.

Cada um dos personagens apresenta uma multiplicidade de referências às identidades reveladas, isto é, não se refere a um único participante da roda de conversa. Na sequência, apresentamos o recorte dos diálogos reestruturados a partir dos dados obtidos no *evento crítico 13*. Porém, cabe destacar que informações provenientes de outros eventos críticos podem figurar como elementos constituintes desses diálogos e, assim como o conteúdo das falas do mediador, podem trazer considerações realizadas durante a roda de conversa ou representar análises posteriores nossas.

Diálogos reestruturados a partir do Evento Crítico 13

Mediador: Como seria um currículo de Licenciatura em Matemática ideal para formar um profissional que ensina matemática na educação básica?
Juninho: Difícil essa pergunta.
Hélton: É complexa a resposta, porque eu acho que, em relação ao currículo do curso, os professores e os alunos são tão responsáveis quanto à instituição.
Mediador: Têm o mesmo grau de responsabilidade?
Hélton: Praticamente. A instituição está errada porque quando percebe que a formação não está adequada aos desafios da docência, tenta resolver propondo uma nova grade curricular. Porém, esse novo currículo está dentro da mesma estrutura.
Marta: Isso é verdade. O currículo da minha época não tem muita diferença para o atual.
Hélton: Já os professores, ao invés de dar a ementa da disciplina, abordam o que estão afim, falam só sobre o que pesquisam ou mandam os estagiários de pós-graduação darem aulas por ele.
Marta: Existem vários que fazem isso, desde quando estudei lá.
Juninho: Tem até hoje. No último semestre mesmo, tive um caso desse. E o pior era que a correção das avaliações desse professor não tinha meio termo. Era tudo certo ou tudo errado.
Hélton: O problema é que depois o estudante, futuro professor, vai reproduzir essa lógica na escola.
Mediador: Mas é nesse ponto que está a responsabilidade do estudante da Licenciatura em Matemática com o currículo do curso?
Hélton: Um pouco, porque o aluno vê o erro, aceita e continua reproduzindo esse erro. Ele continua passivo nesse processo, o que não pode acontecer. Eu tenho um caso sobre isso pra narrar.
Roberto: Mas não é bem assim. Eu mesmo, depois de algumas situações complicadas, procurei reclamar. Acabei trocando de instituição pra terminar o curso...
Hélton: Também reclamei. Quando estudava na graduação, tinha uma prova única nas disciplinas de Física.
Mediador: Atualmente existe também nas disciplinas de Cálculo.
Hélton: E ninguém passava em Física. Isso acontecia porque eram vários professores corrigindo as provas. Eles não conheciam os estudantes e não levavam em consideração o que o estudante mostrava em sala ou em outras avaliações.
Roberto: Ah! Mas isso aí acontecia até quando não era disciplina unificada e o próprio professor que corrigia.
Hélton: É. Mas a gente fez um movimento com estudantes de outros cursos, de engenharia. Definimos um representante de cada curso e fomos até a Pró-Reitoria de Ensino para abrir uma reclamação formal no Conselho.
Marta: E deu certo?
Hélton: Sim. Deixou de ser nesse formato.
Juninho: Mas, agora, voltou a ser assim em Cálculo.

Nos diálogos reestruturados, como esse, procuramos proceder com a discussão dos dados obtidos em alguns eventos críticos, colocando-os, por vezes, no mesmo cenário. Assim, ao reconstruir os diálogos desse recorte, mantivemos o assunto principal descrito no evento crítico 13 e conectamos este com informações obtidas em outros eventos, com as análises dos autores, que ocorreram concomitantemente às etapas metodológicas, e a partir da caracterização dos personagens estudantes.

Conclusões provisórias

Apresentamos conclusões com respeito ao *processo de organização e reestruturação dos diálogos entre os estudantes,* que chamaremos de *provisórias* – por entendermos que, em virtude da natureza dos procedimentos metodológicos que narramos e, principalmente por levarmos em conta o processo de apropriação destacado por Cury et al (2014), é possível ao leitor formular interpretações diferentes daquelas que propomos aqui.

A escolha da *roda de conversa* como o instrumento metodológico foi, de certa forma, o disparador para a construção desse processo de organização e reestruturação dos dados, pois fez com que nos deparássemos com um cenário de muitas informações registradas a partir de várias fontes em um mesmo ambiente. Paralelamente, na pesquisa, realizávamos entrevistas individuais com docentes e fazíamos a transcrição literal das mesmas para utilização em outra etapa que compõe a tese. Dessa maneira, foi possível comparar a densidade do material dessas entrevistas com o da roda de conversa, e percebemos a dificuldade para transcrever tal material na íntegra. Assim, passamos a investigar sobre formas alternativas de organização e tratamento de dados, chegando ao procedimento descrito por Lima (2015) e combinando-o com elementos do *re-storying* (Nardi, 2016), que já vínhamos utilizando para apresentação e análise dos dados provenientes das entrevistas com docentes. A partir desse contexto, registramos que o percurso que utilizamos para a definição do processo de organização dos dados não foi linear, mas se modificou conforme as necessidades de nossa pesquisa e foi influenciado por nossas experiências profissionais e acadêmicas.

Dentro das fases do procedimento que enunciamos na Etapa 2, destacamos a importância da *descrição dos eventos críticos*, pois esta foi responsável pelo ponto de partida para a organização e análise dos dados de forma mais entrelaçada. Entendemos que esse fato se deveu ao processo de escrita de um pequeno texto sem o compromisso da transcrição literal dos dados acessados, o que nos permitiu ter maior liberdade para conectar episódios identificados na roda de conversa em um processo inicial de análise. Já a fase de *transcrição dos eventos críticos* nos permitiu acessar não só a íntegra das falas, mas também o que as mesmas geravam nos demais participantes por meio de concordâncias e divergências, presentes em burburinhos, falas sobrepostas e gestos verificados nos arquivos de áudio e de vídeo. Os registros de tais percepções foram peças-chave para a construção dos diálogos reestruturados por possibilitarem a inserção do contraditório dentro de uma sequência de falas que originalmente não contemplavam esse confronto de ideias de maneira explícita. Assim, reforçamos a ideia de que o processo metodológico que utilizamos tem ligação íntima com a natureza do conteúdo discutido na pesquisa, ao propiciar uma multiplicidade de narrativas ou ao dar protagonismo às ações, conforme defende Silva (2014) em relação à constituição e definição do currículo.

A caracterização dos personagens, que compõe o processo de reestruturação dos dados, nos possibilitou refletir sobre o quão complexa é a figura do estudante, seja pela multiplicidade, pela diversidade de seus percursos ou pelas contradições presentes nos discursos. Além disso, tal caracterização contribuiu para acessarmos influências do curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ na trajetória dos futuros professores ocorridas a partir de experiências em diferentes períodos e contextos. Nos diálogos reestruturados que usamos como exemplo, essas influências se evidenciam em novas falas, baseadas em alguns eventos críticos, que trazem à cena uma proximidade entre os dois modelos de formação inicial de professores apontados, respectivamente, por Moreira (2012) e Fiorentini e Oliveira (2013) como hegemônicos nos períodos pesquisados: *3+1* e Q*uase Tricotomia*. Também foi possível colocar em diálogo, dentro do conteúdo principal do evento crítico 13, pontos referentes às disputas entre os docentes do curso que se identificam como matemáticos e como educadores matemáticos. Isso ocorreu a partir do relato de que alguns professores não seguem ementas e estão mais preocupados com suas pesquisas, na direção do que Gabriel (2013) aponta em relação a tais disputas estarem relacionadas não só com a formação do professor.

Poderíamos ainda destacar outros pontos dos diálogos reestruturados que se relacionam com a literatura de pesquisa ou com análises que já realizamos na tese. Porém, o intuito nestas conclusões provisórias é apontar algumas características, não as únicas, do formato escolhido para apresentação dos dados, considerando o objetivo proposto para o artigo, de apresentar o processo de organização e reestruturação dos diálogos. Entendemos que as principais são as seguintes: *o entrelaçamento entre eventos* que se relacionam dentro da roda de conversa ou com os referenciais teóricos; *as múltiplas versões* sobre um mesmo episódio; *a inserção de inferências dos autores/mediadores* como elementos analíticos dos dados; *a não-linearidade* na execução do processo metodológico.

A partir desses apontamentos, desejamos com este trabalho publicizar uma forma de organização dos dados provenientes de diálogos discentes sobre o currículo da formação inicial de professores de matemática. Não almejamos que essa forma se configure em um modelo, mas sim que estimule a utilização de processos que se relacionem mais com a natureza do conteúdo da pesquisa – o que buscamos na concepção das narrativas que compõem a tese e que, por vezes, não se encontra em outros métodos de análise. Aos que se interessaram pela temática que trouxemos nos diálogos reestruturados, convidamos para compartilhar leituras e análises sobre nossos outros trabalhos resultantes da tese de doutorado em que este texto se insere (e.g. Costa-Neto & Giraldo, 2020).

Nota:

1. No Brasil, o curso universitário de formação de professores de matemática é chamado de Licenciatura em Matemática, enquanto o curso de formação de matemáticos denomina-se Bacharelado em Matemática.

Referências bibliográficas

Ball, D. L.; Thames, M. H.; & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, Washington, US, 59(5), 389-407.

Barbosa, J.C. (2015). Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática. In: D'Ambrosio, B.S.; Lopes, C.E. (Orgs). *Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática*. Campinas: Mercado de Letras.

Brasil. (2005). Resolução CNE-CES nº 15, de 2 de fevereiro de 2005. Esclarece sobre as Resoluções CNE/CP números 1 e 2 de 2002. Brasília: Conselho Nacional de Educação.

Brasil. (2015) Parecer CNE-CP nº 02, de 09 de junho de 2015. Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial e Continuada dos Profissionais do Magistério da Educação Básica. Brasília: Conselho Nacional de Educação.

Cochran-Smith, M.; & Lytle, S. (1999). Relationships of knowledge and practice: teacher learning in communities. *Review of Research in Education*, London: Sage, 24, 249-305.

Costa-Neto, C. D. (2019). *O Currículo do Curso de Formação Inicial de Professores de Matemática da UFRJ: Narrativas Possíveis* (Tese de doutorado não publicada). Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Costa-Neto, C. D.; & Giraldo, V. (2019). Do 3+1 à prática como componente curricular uma narrativa possível sobre o currículo da formação inicial de professores de matemática na UFRJ. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 8, 369-394.

Costa-Neto, C. D.; & Giraldo, V. (2020). Diálogos sobre o currículo da formação inicial de professores de matemática: narrativas discentes. *Ensino em Re-Vista* (no prelo).

Cury, F. G; Souza, L. A.; & Silva, H. (2014) Narrativas: um olhar sobre o exercício historiográfico na Educação Matemática. *Bolema* [online], 28(49), 910-925.

Gabriel, C. T. (2013). Conhecimento Científico e Currículo: Anotações sobre uma articulação impossível e necessária. *Revista Teias*, 14(33), 44–57.

Fiorentini, D., & Oliveira, A. T. C. C. (2013). O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema,* 27(47), 917–938.

Lima, F. H. (2015). Um método de transcrições e análise de vídeos: a evolução de uma estratégia. *Anais do VII Encontro Mineiro de Educação Matemática.* Disponível em: http://www.ufjf.br/emem/files/2015/10/UM-MÉTODO-DE-TRANSCRIÇÕES-E-ANÁLISE-DE-VÍDEOS-A-EVOLUÇÃO-DE-UMA-ESTRATÉGIA.pdf

Lopes, A. (2013). Teorias Pós-Críticas, Política e Currículo. *Educação, Sociedade e Culturas*, 39, 7-23.

Lüdke, M. (1983). O educador: um profissional? *Revista da Faculdade de Educação da UFF*, 1(1), 11-22, 1983.

Moreira, P.C. (2012). 3+1 e suas (in)variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em matemática. *Bolema*, 26, 1137-1150.

Nardi, E. (2016). Where form and substance meet: Using the narrative approach of re-storying to generate research findings and community rapprochement in (university) mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 92(3), 361-377.

Nóvoa. A. (2009) Para uma formação de professores construída dentro da profissão. *Professores: imagens do futuro presente*. Lisboa: Educa, 25-46.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Silva, M. A. (2014) Currículo como *Currere*, como Complexidade, como Cosmologia, como Conversa e como Comunidade: contribuições teóricas pós-modernas para a reflexão sobre currículos de matemática no ensino médio. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, 28(49), 516-535.

Tardif, M. (2013). A profissionalização do ensino passados trinta anos: dois passos para a frente, três para trás. *Educ. Soc.* [online], 34(123), 551-571.

SECCIÓN 5

USO DE RECURSOS TECNOLÓGICOS EN EL PROCESO DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

USO DE SOFTWARE LIBRE EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

USE OF FREE SOFTWARE IN GEOMETRIC I NTERPRETATION OF LINEAR ALGEBRA CONCEPTS

Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra, Miguel de Nazareth Pineda Becerril
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM. (México)
coropeza96@hotmail.com, joejade@hotmail.com, mnazarethp@gmail.com

Resumen
La intención principal del trabajo es reportar evidencias que destacan la importancia de incluir el uso de software libre para estudiar la interpretación geométrica de algunos conceptos de álgebra lineal, a través del análisis visual de su comportamiento particular. Se reconoce en diversas investigaciones que dan cuenta de complicaciones inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, que resulta significativo instrumentar otras propuestas que permitan explorar situaciones didácticas para fortalecer y consolidar los conceptos que se incluyen en el estudio. En el proyecto que se ha venido desarrollando desde hace varios años con estudiantes de ingeniería se incluye la interpretación de los resultados analíticos desde una perspectiva geométrica y el reforzamiento de éstos a través de utilizar tecnología, este hecho se ha traducido en nuestra comunidad de estudiantes como una estrategia que permite generar una oportunidad de desarrollo. Seguimos explorando también con ejemplos de traslación y rotación de objetos utilizando transformaciones lineales.

Palabras clave: software libre, interpretación, álgebra lineal

Abstract
This work is mainly intended to report on evidences that highlight the significance of including free software use to study the geometric interpretation of some linear algebra concepts through the visual analysis of its specific behavior. In several research works that show complexities inherent in the teaching-learning process of linear algebra it is recognized that it is significant to implement other proposals that allow exploring didactic situations to strengthen and consolidate the concepts included in this study. The project that has been carrying out with engineering students for several years includes: the interpretation of analytic results from a geometric perspective, and their reinforcement by using technology; this fact has been recognized in our students' community as a strategy that allows creating a development opportunity. We also keep on investigating with examples of movement and rotation of objects using linear transformations.

Key words: free software, interpretation, linear algebra

Introducción

Al reconocer y distinguir que la tecnología aparece sistemáticamente en nuestro entorno cotidiano, y que lentamente ha sido incorporada en la escuela bajo una estrategia determinada, o bien, de manera arbitraria entra súbitamente e irrumpe en el salón de clase de la escuela tradicional por decisión de alguien, este hecho se han provocado grandes cambios. En el estudio de las matemáticas se cuenta con una gama amplia de enfoques, entre otros el que tiene que ver con el uso de la tecnología. Sin embargo, una de las metas generales del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina consiste en promover que los alumnos desarrollen un conocimiento flexible, competitivo y aplicable. De manera particular se ha reconocido que al estudiar álgebra lineal resulta complicado comprender los conceptos que se involucran en su análisis esto se debe a la naturaleza abstracta de la asignatura. En la actualidad también se hace necesario replantear estrategias alternas que permitan revitalizar y regenerar dicho conocimiento adaptándolo a nuevas situaciones didácticas. Las generaciones que ingresan a la escuela de ingeniería en donde se ha realizado el proyecto, cuentan con un nivel aceptable con respecto al uso de la tecnología. Este hecho ha sido una de las justificantes que dieron origen a las estrategias que se incluyen en el estudio. Al inicio las exploraciones se realizaron utilizando el software Maple, pero surgió un aspecto limitante y es que para su uso se necesita contar con una licencia cuyo costo nos dejó fuera de su alcance y por ello optamos ahora utilizar software libre: incluido entre estos Geogebra, aplicaciones para el teléfono celular (Matway, Math42) y páginas de internet como matrixcal.org., etc.

Por otra parte, se ha reflexionado y se afirma que el docente aunque reconoce el diario evolucionar de la sociedad debido los múltiplos cambios en las formas de comunicación tendrá que adaptarse y hacerle frente a una nueva orientación de su profesión. En este entorno social de cambio, el deberá tener una nueva actitud, una disposición a aprender, a innovar tanto desde el punto de vista de la educación, como desde el punto de vista tecnológico, deberá tener la mente abierta, probar ideas nuevas y buscar nuevas formas de organizar sus actividades y la enseñanza en su aula y su comunidad. En consecuencia, el profesor también es un agente de cambio por lo que la transformación y actualización de la escuela en parte le corresponde. Sin embargo, en algunos espacios educativos lo que se experimenta es una gran resistencia al cambio y el proceso de actualización se da de manera muy lenta o en los casos extremos resulta casi imposible que se produzca dicho cambio.

Fundamento teórico

Recientemente se ha reconocido que debido al desarrollo de las sociedades en cuanto a la modernidad se refiere y la cantidad de información vertida sobre los medios de comunicación, se ha venido incrementando las habilidades visuales en el ser humano o al menos con respecto a la necesidad de utilizarla. Este hecho tiene que ver con la cantidad extraordinaria de información que en todos los ámbitos se difunde de manera global, es decir, los especialistas se han dado a la tarea de utilizar el recuso visual como una estrategia importante que de manera natural predomina en cualquier sociedad.

En relación al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, se han considerado diversas estrategias alternas de análisis entre las que destaca la incorporación del uso de significados de corte geométrico y el tránsito entre distintos registros de representación. En ese sentido la importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el diseño de actividades didácticas en esta asignatura. Es decir dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten la ilustración de proposiciones, la exploración de resultados de situaciones no convencionales, por ejemplo encontrar el significado de base en el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas o la interpretación gráfica de un cambio de base en tercera dimensión.

En el proyecto que el grupo de trabajo del departamento de matemáticas ha desarrollado por varios años con estudiantes de ingeniería, la visualización juega un rol determinante y se define como “el producto y proceso de

creación, interpretación y reflexión sobre dibujos e imágenes" (Arcavi, 2003, p. 215), mismo que está ganando una mayor aceptación en el análisis de conceptos matemáticos y en la enseñanza de éstos.

En esa misma dirección, Duval (1993) afirma que la lectura de representaciones gráficas presupone distinguir las variables visuales de las variaciones correspondientes en la escritura algebraica mediante una interpretación global, contraria a la práctica de la lectura de puntos asociados a una pareja de números. Además, comenta que en la interpretación global de las propiedades de una representación gráfica está presente una imagen correspondiente a un "objeto" descrito por una expresión algebraica. Una modificación de la imagen conduce a un cambio en la interpretación de la expresión algebraica lo que implica construir una variable visual facilitando la interpretación de la gráfica. Lo anterior nos conduce a un análisis de congruencia entre dos registros que representan al mismo objeto de estudio, situación que permite identificar todos los cambios posibles de la imagen en función de los cambios en la escritura algebraica.

Sobre esta perspectiva, Rojano (2000) argumenta:

> Es difícil encontrar ejemplos de su implementación en los sistemas educativos. Este acercamiento que posibilita reformular a fondo lo que hay que enseñar, cómo enseñarlo y el rol del profesor, ha entrado en conflicto en algunos países con la cultura escolar existente, generada en buena medida por el currículo conservador que no da espacio a un alumno que ha adquirido cierta autonomía en el aprendizaje a través de un uso intensivo de las TIC fuera de la escuela. (p. 138).

En su trabajo, da Ponte (2000) afirma que el profesor:

> Tiene que ser un explorador capaz de percibir lo que le puede interesar y aprender por sí sólo o junto con sus colegas más próximos a sacar partido de las respectivas potencialidades. Tal como el alumno, el profesor acaba por tener que estar siempre aprendiendo. De ese modo, se aproxima a sus propios alumnos. Deja de ser autoridad [que todo lo sabe] para pasar a ser, muchas veces, aquel que menos sabe (o que está lejos de constituir una modificación no menor de su papel profesional). (p. 76).

Metodología

El estudio realizado se caracteriza desde una perspectiva cualitativa, pues ha sido un proceso que se ha retroalimentado sistemáticamente con las aportaciones de las puestas en escena de los diseños de actividades que se han realizado durante varios semestres. "En un estudio cualitativo, las decisiones respecto al muestreo reflejan las premisas del investigador acerca de lo que constituye una base de datos creíble, confiable y válida para abordar el planteamiento del problema". (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 382).

El proyecto de utilizar una resignificación de los objetos matemáticos con fundamentos visuales incluidos en el estudio se ha monitoreado cada semestre en dos o tres grupos de aproximadamente 40 alumnos cada uno. En la puesta en escena de las actividades se les pide a los participantes trabajar en equipos de cuatro o cinco personas durante sesiones de dos horas cada una, ellos plantean sus soluciones y al final se discuten las soluciones de manera grupal y se utiliza software como instrumento verificador de resultados y de los análisis gráficos correspondientes.

Resultados

En este estudio se proporcionan dos ejemplos representativos de nuestro proyecto el cual considera la interpretación de los resultados analíticos desde una perspectiva geométrica y el reforzamiento de éstos a través del uso de la

tecnología, en el caso particular que nos ocupa se propone utilizar el software libre Geogebra en el estudio del concepto de combinación lineal de matrices y polinomios. Los dos objetos matemáticos seleccionados tienen una característica en común, su análisis de corte geométrico no aparece en los libros de texto recomendados en las escuelas de ingeniería en México. En consecuencia, consideramos que describir una estrategia alterna de solución podría aportar elementos para continuar explorando otros ejemplos que permitan llegar a una generalización.

En el primer ejemplo se analiza la combinación lineal de un conjunto de matrices, se resuelve de manera analítica por el método de Gauss Jordan y se verifica el resultado a partir de sustituir los valores correspondientes en la ecuación inicial. Además, se agrega la imagen de la página de internet que resuelve paso a paso el sistema de ecuaciones resultante.

Ejemplo 1. Verificar de manera analítica y gráfica si el siguiente vector $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Solución. Para resolver en forma analítica este ejemplo, el proceso inicia al plantear la ecuación que nos conduce a la solución, esto es: $\boldsymbol{A = c_1 B + c_2 C}$ **.**

Después se sustituyen los términos incluidos en la ecuación, se simplifican los productos de escalar por vector, se simplifica la suma de vectores y de la igualdad final entre vectores se forma un sistema de ecuaciones lineales (ver Figura 1) el cual se resuelve por el método de Gauss Jordan y se comprueba el resultado (Figura 2).

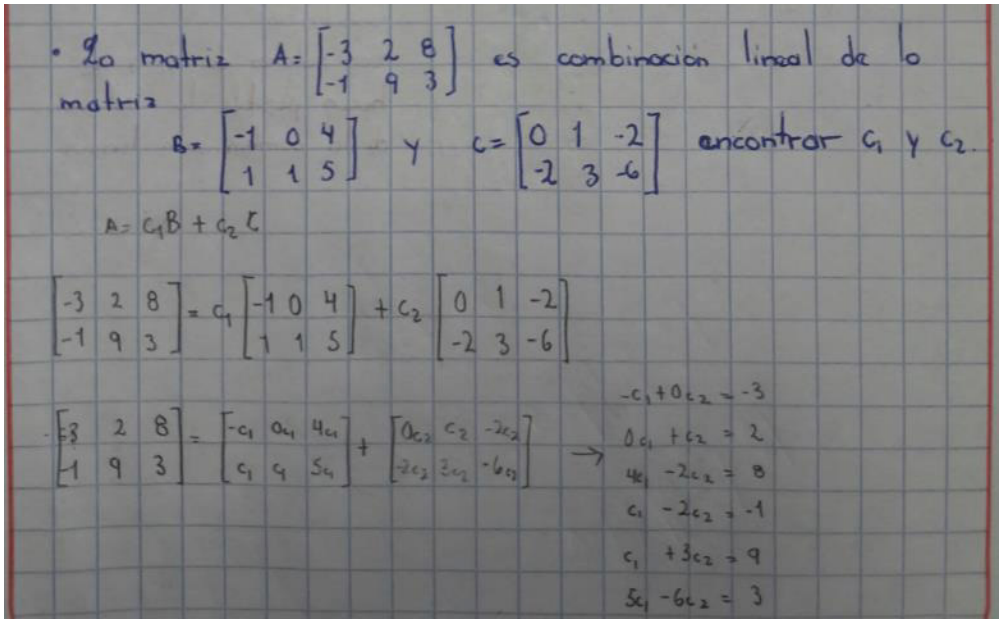


Figura 1. Sistema de ecuaciones resultante.

Los equipos de estudiantes participantes con frecuencia comentan que el tipo de sistema resultante en el ejemplo no es convencional para ellos, otros invierten bastante tiempo para darse cuenta de que si es posible resolverlo.

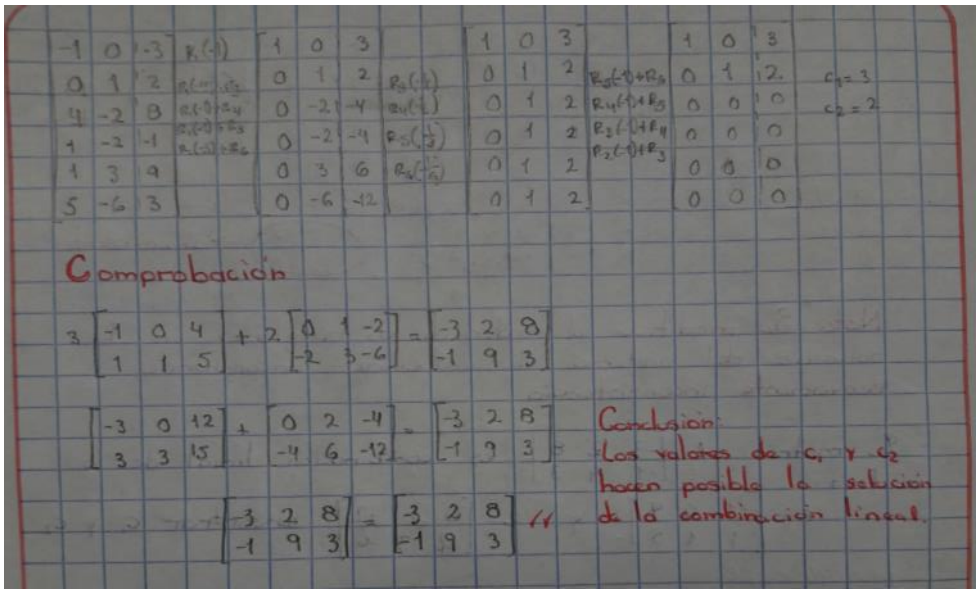


Figura 2. Solución del sistema de ecuaciones y su correspondiente comprobación.

Otra forma de verificar la solución del sistema de ecuaciones es a través de utilizar la página matrixcalc.org.

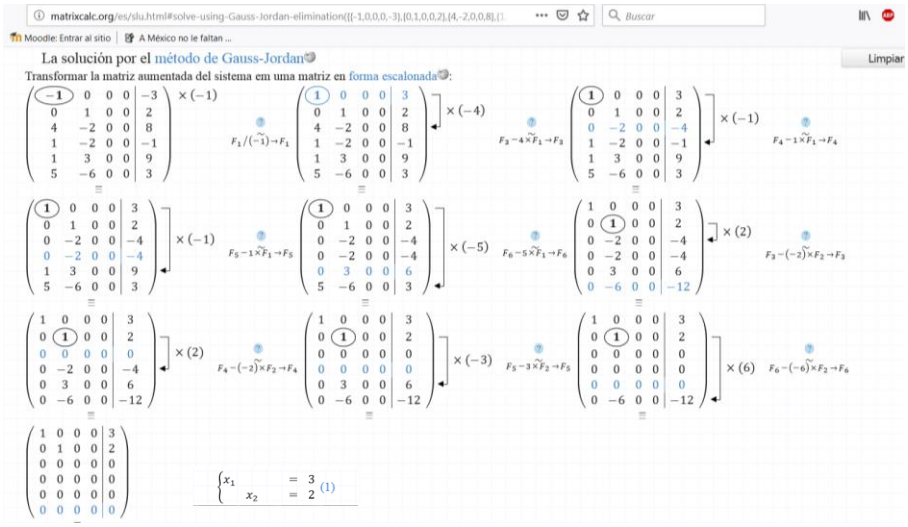


Figura 3. Solución del sistema de ecuaciones utilizando tecnología.

En el proyecto que hemos implementado incluye utilizar diversos recursos tecnológicos en la Figura 3 se puede identificar con precisión la aplicación del método de Gauss Jordan paso a paso, esta estrategia complementaria ha sido aceptada con beneplácito por los estudiantes pues argumentan que ya no es necesario esperar a que el profesor revise sus procedimientos, con el uso de la tecnología ellos mismos se pueden darse cuenta si es que llegaron a resultados correctos o no. Con respecto a la construcción de la gráfica se recomienda utilizar papel milimétrico, regla, escuadras, colores para identificar los componentes de cada una de las matrices. Como se puede apreciar en la Figura 4 se colocan los tres ejes (el primero representa el número del renglón, el segundo indica la columna y el tercero corresponde al valor posicional de cada elemento de la matriz).

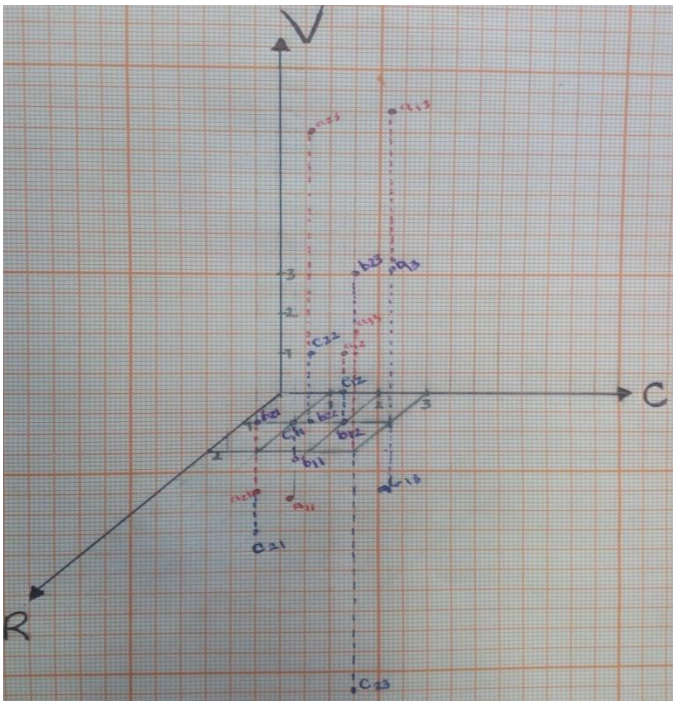


Figura 4. Solución que incluye la interpretación geométrica de la combinación lineal de matrices.

Una segunda alternativa para realizar el análisis del resultado gráfico y que se incluye en la solución de las actividades, consiste en utilizar el apoyo que ofrece el software libre Geogebra como se indica en la Figura 5, la ventaja que puede ser potenciada con dicho software tiene que ver con la parte animada que se aplica a la gráfica y se logra con solo deslizar el dedo sobre la pantalla lo cual permite visualizar diferentes ángulos de la misa.

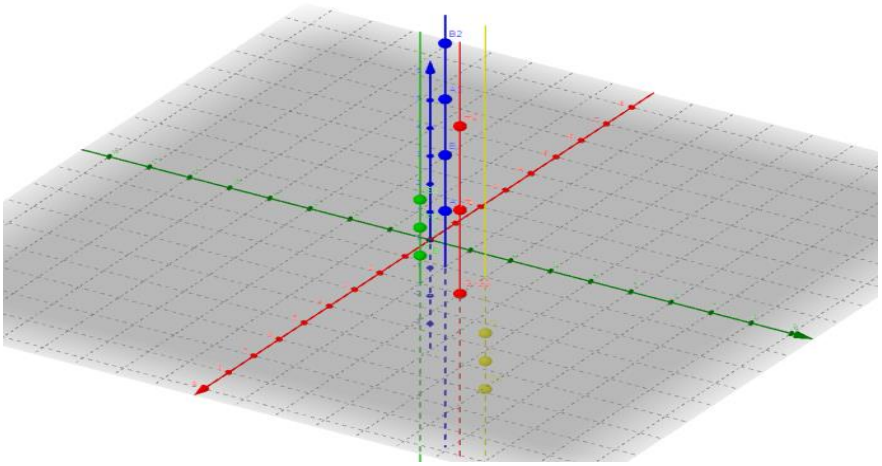


Figura 5. Interpretación geométrica de la combinación lineal de matrices con el apoyo de software.

Análisis gráfico. En la Figura 4 se puede observar que la gráfica de una matriz considera tres parámetros el renglón, columna y el valor posicional del término a_{ij}. Este tipo de representación gráfica se convierte con frecuencia en un problema para los estudiantes pues el sistema de referencia es solo una representación de la tercera dimensión, en realidad los trazos se realizan en el plano y el parámetro de profundidad no es claro. Otro aspecto por destacar y

que en ocasiones provoca inconvenientes tiene que ver con el uso de las escalas proporcionadas en cada uno de los ejes y el manejo del equipo de medición.

En el segundo ejemplo se analiza la combinación lineal de un conjunto de polinomios de segundo grado, primero se solicita una solución en forma analítica la parte central consiste en resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por medio del método de Gauss Jordan y se realiza la comprobación del resultado. Con respecto a la verificación de los valores calculados se agrega la imagen de la página de internet que resuelve paso a paso el sistema resultante. En las evidencias proporcionadas se incluye las gráficas a color correspondientes al conjunto de polinomios y su representación equivalente como vectores flecha.

Ejemplo 2. Sean los siguientes vectores $P_1 = 2 + x + 4x^2$, $P_2 = 1 - x + 3x^2$ y $P_3 = 3 + 2x + 5x^2$. Comprobar si P es una combinación lineal de P_1, P_2 y P_3; considerar que $P = -9 - 7x - 15x^2$.

Solución. De manera similar que el ejemplo anterior, en este caso la ecuación que conduce a la solución es: $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = P$.

Sustituir términos $-9 - 7x - 15x^2 = C_1\left(2 + x + 4x^2\right) + C_2\left(1 - x + 3x^2\right) + C_3\left(3 + 2x + 5x^2\right)$.

Simplificar los productos según sea el caso

$$-9 - 7x - 15x^2 = 2C_1 + C_1x + 4C_1x^2 + C_2 - C_2x + 3C_2x^2 + 3C_3 + 2C_3x + 5C_3x^2.$$

Asociar los términos semejantes

$$-9 - 7x - 15x^2 = \left(2C_1 + C_2 + 3C_3\right) + \left(C_1 - C_2 + 2C_3\right)x + \left(4C_1 + 3C_2 + 5C_3\right)x^2.$$

De la igualdad entre vectores (en este caso polinomios), se dice que dos polinomios son iguales si término a término son iguales en consecuencia se produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2C_1 + C_2 + 3C_3 &= -9 \\ C_1 - C_2 + 2C_3 &= -7 \\ 4C_1 + 3C_2 + 5C_3 &= -15 \end{aligned}$$

Ahora se procede a resolver el sistema resultante por el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & 3 & -9 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array}\right] (-2)R_1 + R_2 \to R_2,\ (-4)R_1 + R_3 \to R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{3}R_2 \to R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{array}\right] (1)R_2 + R_1 \to R_1,\ (-7)R_2 + R_3 \to R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \left(-\frac{3}{2}\right)R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \left(-\frac{5}{3}\right)R_3 + R_1 \rightarrow R_1 \text{,} \qquad \left(\frac{1}{3}\right)R_3 + R_2 \rightarrow R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \begin{array}{l} C_1 = -2 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -2 \end{array}$$

Para realizar Comprobación:

$$\begin{aligned} -9-7x-15x^2 &= -2\left(2+x+4x^2\right)+1\left(1-x+3x^2\right)-2\left(3+2x+5x^2\right) \\ -9-7x-15x^2 &= -4-2x-8x^2+1-x+3x^2-6-4x-10x^2 \\ -9-7x-15x^2 &= \left(-4+1-6\right)+\left(-2x-x-4x\right)+\left(-8x^2+3x^2-10x^2\right) \\ -9-7x-15x^2 &= -9+\left(-7x\right)+\left(-15x^2\right) \\ -9-7x-15x^2 &= -9-7x-15x^2 \end{aligned}$$

Otra forma de verificar la solución del sistema de ecuaciones es a través de utilizar la página matrixcalc.org (Ver Figura 6).

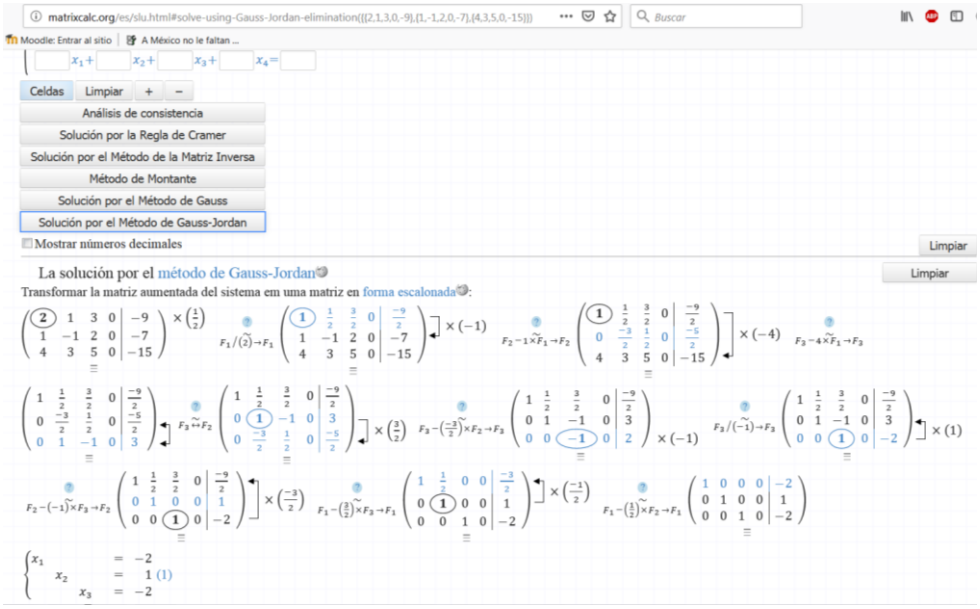


Figura 6. Solución del sistema de ecuaciones utilizando tecnología.

Para realizar el análisis del resultado gráfico se incluyen dos imágenes elaboradas con el apoyo que ofrece el software libre Geogebra. Como se puede apreciar en la Figura 7, el uso de colores juega un papel determinante en la identificación de cada uno de los polinomios, sin embargo, su representación gráfica como parábolas se convierte en una complicación en su manipulación de parámetros que los estudiantes deben superar para alcanzar un resultado apropiado.

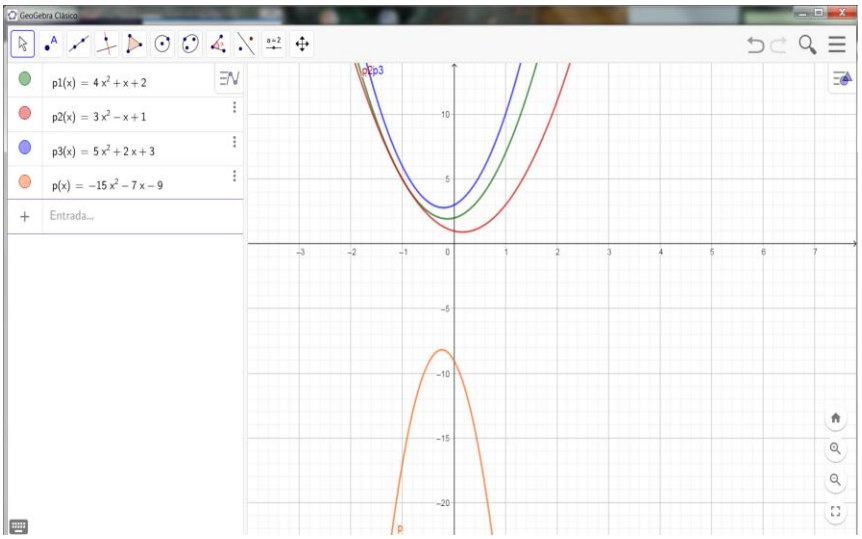


Figura 7. Interpretación geométrica de la combinación lineal de polinomio con el apoyo de software.

Una vez que se tiene la gráfica en su forma polinomial, se transforman éstos a partir del isomorfismo en su forma vectorial, en consecuencia, se producen tres vectores (v_1, v_2 y v_3). Nuevamente haciendo uso del software Geogebra, se grafican los vectores en tercera dimensión. Los resultados obtenidos han demostrado que los estudiantes pueden graficar vectores en R^3 de manera más sencilla que un polinomio de segundo grado. En la Figura 8 se muestra una representación geométrica isomorfa del polinomio y se puede distinguir que se hace más sencilla la comprobación de la combinación lineal a través de esta estrategia. Recordar que por este medio se puede incorporar la animación que ayuda a tener mayor precisión de las características de los vectores.

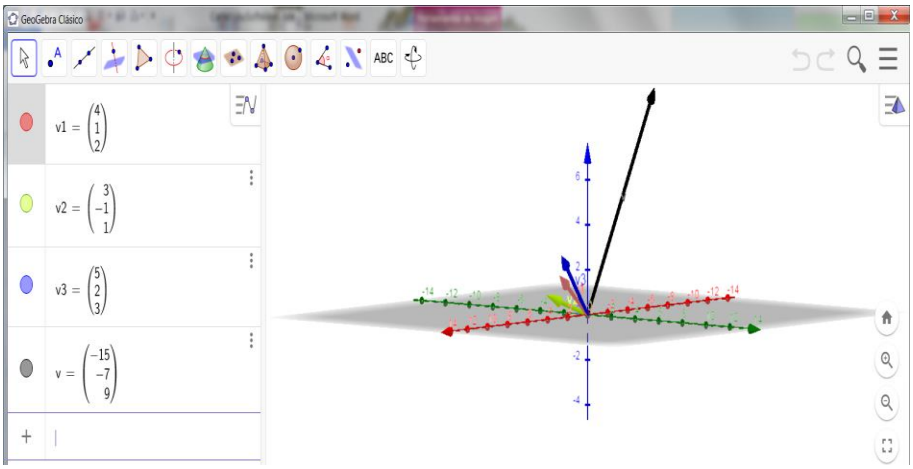


Figura 8. Interpretación geométrica de la combinación lineal de polinomio de segundo grado isomorfo con vectores en tercera dimensión.

Reflexiones o conclusiones

Algunas de las regularidades que se han derivado de los análisis realizados a los resultados obtenidos en la parte experimental de la propuesta son los siguientes: Con respecto al tratamiento de corte geométrico de las matrices, se tiene que es posible determinar tanto una combinación lineal entre ellas o la dependencia lineal a partir de verificar

la relación que guardan los valores de los elementos a_{ij}. En el caso de los polinomios, se puede realizar el análisis gráfico con respecto a la altura correspondiente a cada valor de las abscisas que se decidan utilizar y los productos resultantes de los escalares calculados.

Como se puede observar en las evidencias incluidas en este trabajo, las soluciones que emplean el uso de la tecnología permiten visualizar el resultado a partir de los rasgos geométricos de los vectores. En el caso de las matrices se pueden comparar las unidades representadas como puntos que identifican a cada componente a_{ij} de esta y procesar estas magnitudes para darle un significado a los valores calculados de manera analítica.

Sin embargo, en algunas ocasiones sucede que al momento en que los estudiantes deben desarrollar actividades donde las gráficas juegan un rol determinante, se observa que varios de ellos se encuentran bastante lejos de poder acceder a sus enormes posibilidades y en muchos casos, por el contrario, le asocian propiedades que no le corresponden o llegan incluso a no ver nada significativo en ellas. Por otra parte el uso de la tecnología en sus diversas formas ha resultado para los estudiantes una estrategia significativa que de manera natural les permite incluso mostrar una actitud positiva en el estudio de conceptos relacionados con álgebra lineal.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3).

Da Ponte, J. P. (2000). Tecnologías de informação e comunicação na formação de profesores: ¿qué desafios?, Monográfico: Tic en la educación, *Revista Iberoamericana de Educación, 24*, 63-90.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotica et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique el de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*, 135-165.

MATEMÁTICA EDUCATIVA EN LA ERA DIGITAL: PROYECTOS DE ALCANCE REGIONAL REALIZADOS POR LA COMUNIDAD GEOGEBRA LATINOAMERICANA

MATHEMATICS EDUCATION IN THE DIGITAL ERA: REGIONAL REACH PROJECTS CARRIED OUT BY THE LATIN AMERICAN GEOGEBRA COMMUNITY

María Ivete Basniak, Horacio Sóstenes, Daysi García-Cuéllar, Sergio Rubio-Pizzorno
Universidade Estadual do Paraná (Brasil). Servicios Educativos Integrados al Estado de México (México). IREM-PUCP (Perú). Instituto GeoGebra Internacional (Mexico-Chile).
basniak2000@gmail.com, hssg_33@hotmail.com, garcia.daysi@pucp.pe, sergio.rubio@cinvestav.mx

Resumen
Los objetivos del grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital* son visibilizar los aportes en integración de prácticas y de tecnologías digitales a la Matemática Educativa que se realizan en nuestra región, así como explorar opciones para propiciar una articulación permanente de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. En consecuencia, a estos objetivos, en esta edición del grupo se presentan cuatro proyectos que contribuyen a avanzar en los objetivos ya mencionados, puesto que corresponden a instancias de trabajo colaborativo entre miembros de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana de diferentes países de la región, que trabajan aunados por propósitos en común.

Palabras clave: era digital, GeoGebra, comunidad GeoGebra latinoamericana, educación abierta

Abstract
The discussion group *Mathematics Education in the Digital Era aims to* visualize the contributions in the integration of practices and digital technologies to mathematics education in Latin America, as well as to search for options to lead to a continuous connection of the Latin American GeoGebra Community. In correspondence with these objectives, in this edition, the group presents four projects which contribute to make progress in the already mentioned objectives, as they go with collaborative work requests among the members of the Latin American GeoGebra community from different countries of the region, which work together for purposes in common.

Key words: digital era, GeoGebra, latin american GeoGebra community, open education

Introducción

Como se ha reportado anteriormente (Rubio-Pizzorno, León Salinas, León Ríos, Córdoba-Gómez y Abar, 2018; Rubio-Pizzorno, León Salinas, García-Cuéllar y Prieto, 2019), es posible encontrar desde hace muchos años diversos esfuerzos individuales o locales a lo largo de Latinoamérica sobre el uso educativo de GeoGebra, ya sean en aspectos técnicos, en la práctica educativa, el trabajo con profesores, la academia o el funcionamiento de la comunidad. No obstante, y a pesar de lo numeroso de estos esfuerzos en la región, existe una escasa visibilización de estos esfuerzos, lo cual provoca un gran desconocimiento respecto de lo que hacen los colegas alrededor de GeoGebra en otros países de la región diferentes al propio. Ejemplo de esta situación es el Congreso Latinoamericano de GeoGebra que ha tenido sólo tres ediciones hasta el momento (2013 en Argentina, 2014 en México y 2016 en Colombia) y ha perdido su continuidad, ya que desde hace cuatro años que no se lleva a cabo.
Reconocemos la complejidad de organizar un evento a nivel latinoamericano, sobre todo si la comunidad a la cual está dirigido adolece de una fuerte articulación. Es por este tipo de situaciones, que un grupo de miembros de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana (CGL) se propusieron aportar a su articulación mediante la conformación de proyectos que, de manera progresiva y constante, pudieran aportar a conformar redes locales y regionales. Uno de estos proyectos es el grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital*, el cual busca ser un espacio de encuentro cada año entre los miembros de la CGL, donde puedan compartir ideas, reflexionar sobre el estado de la comunidad y trazar nuevas rutas de desarrollo.

Sumado al grupo de discusión, la CGL ha venido desarrollando otros proyectos, los cuales emergen como producto de la conformación de nuevos espacios de articulación entre los miembros de la comunidad. Dado este contexto en el presente escrito se comparten algunos proyectos de alcance regional realizados por la CGL, para reflexionar respecto de los aportes que cada uno de ellos está realizando al desarrollo de la Educación en Latinoamérica desde una perspectiva abierta: el proyecto *Construcción de animaciones y de simuladores con el software GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática*, en el cual participan investigadores de Brasil, Venezuela, Chile y Perú; el proyecto *Elaboración de recursos para dispositivos móviles con GeoGebra*, en el cual participan investigadores de Colombia, Perú y México; el proyecto *GeoGebra Mapuche* en el cual participan profesoras e investigadores chilenos, articulados con el equipo central de GeoGebra en Austria; y el *Coloquio GeoGebra de la CGL*, un evento que se ideó a partir de las discusiones del grupo *Matemática Educativa en la Era Digital* para atender la necesidad de crear un espacio para compartir y discutir sistemáticamente entre educadores matemáticos de toda Latinoamérica.

Elaboración de diseños didácticos para dispositivos móviles con GeoGebra

En el año 2017, en el marco del primer *Encuentro de Jóvenes Investigadores de Relme* realizado en Lima - Perú, un grupo de colegas de Colombia, México y Perú interesados en la investigación en Matemática Educativa con tecnología digital se propusieron colaborar para desarrollar proyectos en esta área, con el propósito de lograr aportes e impacto positivo en la comunidad. De esta manera se constituye el *Grupo de Investigación en Tecnologías en Matemática Educativa - TicMatEDU* (García-Cuéllar, sf.).

Luego de constituir su grupo y de regresar a sus países, se comienzan a organizar para desarrollar sus proyectos de investigación. Principalmente se reúnen a través de videollamadas, debido a la facilidad para comunicarse por este medio, no importando que se encuentren geográficamente distantes. Sin embargo, un aspecto de logística importante es la coordinación del horario de tales reuniones, ya que, debido a las ocupaciones personales y académicas de cada miembro y las distintas zonas horarias entre los países, es complejo encontrar un horario que se acomodara a todas estas condiciones.

Luego de llevar a cabo las reuniones se plantearon como primeros proyectos de investigación la elaboración de diseños didácticos con el uso de la versión móvil de GeoGebra, la cual se puede usar en teléfonos inteligentes o tabletas. Este aspecto es muy relevante a la hora de considerar la realidad de los estudiantes latinoamericanos, ya

que la mayoría cuenta con un teléfono inteligente que le permite instalar alguna de las aplicaciones de GeoGebra en sus dispositivos (Granados, 2015).

Concretadas las reuniones, el grupo TicMatEDU comienza a desarrollar un proceso de investigación iniciando con una revisión de literatura, armando su marco teórico y elaborando diseños didácticos sobre temas matemáticos. Como resultado de este proceso de investigación han concretado dos proyectos, uno para la enseñanza de la geometría (García-Cuéllar, Martínez-Miraval, Sostenes y Parra-Zapata, 2018) y otro para el estudio gráfico de la función lineal afín (ver figura 1) (Sostenes, García-Cuéllar y Martínez-Miraval, 2019). En las referencias de cada proyecto están disponibles los diseños didácticos construidos.

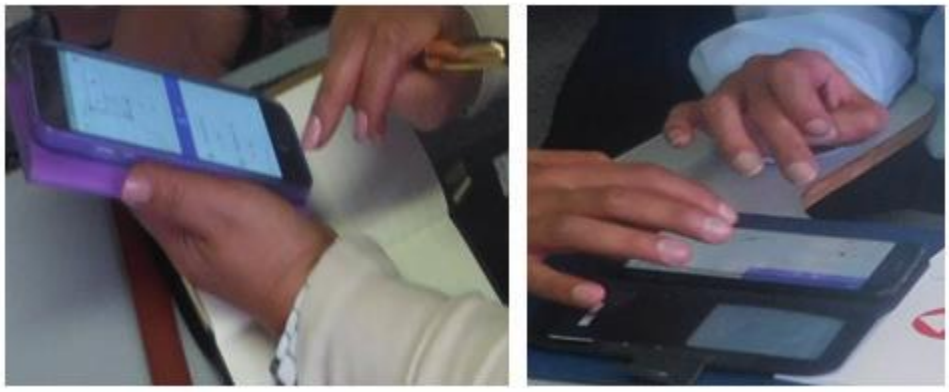


Figura 1. Construcción de un modelo dinámico de la función lineal afín en el GeoGebra móvil. Fuente: Sostenes et al. (2019).

Una característica principal de los proyectos del grupo TicMatEDU es la difusión que realizan de sus proyectos y diseños didácticos, lo cual han realizado mediante talleres y ponencias en diferentes eventos de la región, específicamente en el IX Congreso Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas realizado en 2018 en Perú y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme) 32 realizada en 2018 en Colombia. En ambos congresos realizaron talleres en los cuales trabajaron con profesores en el estudio de los diseños didácticos y su desarrollo. Esta dinámica de difusión mediante el trabajo directo con los profesores propicia que estos últimos se apropien del diseño mediante su desarrollo y estudio de sus fundamentos, para que así puedan adaptarlo técnica, didáctica y administrativamente a sus necesidades y exigencias locales, es decir, a las condiciones reales de clases con sus alumnas y alumnos.

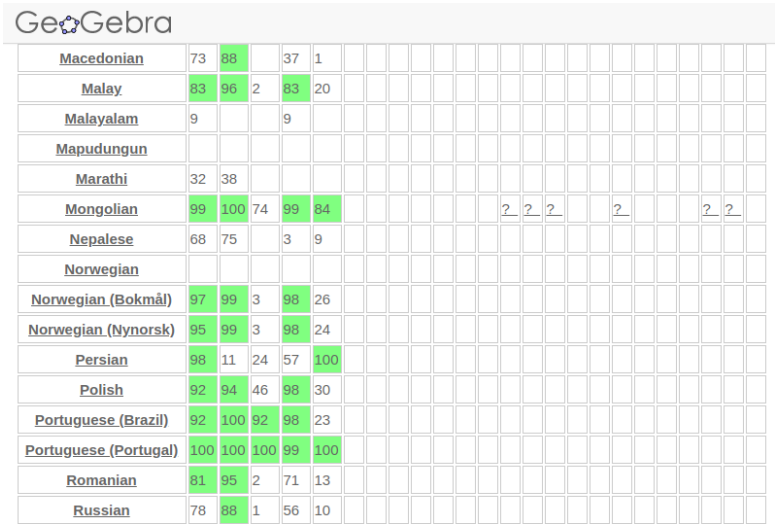
Con la exitosa experiencia de ambos proyectos, el grupo TicMatEDU continúa trabajando en el desarrollo de propuestas para el estudio y análisis de contenidos matemáticos en las aulas de clase integrando el uso de GeoGebra. Estas propuestas se caracterizan por querer comprender mejor y dinamizar un tema en cuestión, y es ahí donde se presenta el impacto a la Comunidad GeoGebra Latinoamericana, al contribuir para acercar contenidos con una mirada dinámica a docentes y a estudiantes.

GeoGebra Mapuche

En el año 2018 un grupo de profesores chilenos comenzaron a organizarse para desarrollar el primer proyecto de carácter intercultural relacionado con GeoGebra en Latinoamérica. La idea inicial era traducir el *software* GeoGebra al mapudungún, idioma del pueblo originario más importante en Chile, el pueblo Mapuche. A partir de esta idea detonadora se comenzó a indagar la posibilidad de hacer esto de manera oficial con el Instituto GeoGebra

Internacional (IGI), a través de Sergio Rubio-Pizzorno, uno de sus miembros, y a conformar el equipo de trabajo, encabezado por el Dr. Eduardo Carrasco.

En cuanto a IGI, una de sus características es la apertura hacia los proyectos que cada uno de los miembros de su comunidad quiera realizar. En cuanto a la traducción de GeoGebra, actualmente hay 90 proyectos de traducción a diferentes idiomas, entre los cuales se encuentran los siguientes: esperanto, gaélico (o irlandés), catalán, vietnamita, hebreo, español de España, español internacional, portugués de Brasil, portugués de Portugal, entre muchos otros. Es importante notar respecto de la traducción de GeoGebra, que no es necesario que la lengua a la cual se quiere traducir sea un idioma oficialmente reconocido por algún país. El único requisito es que exista un grupo de personas interesadas en traducir GeoGebra a su idioma local. Dadas estas condiciones de apertura del IGI, fue muy sencillo obtener los permisos para hacer esta traducción y, en consecuencia, la habilitación del espacio de trabajo asociado a la traducción al mapudungún (ver figura 2) de *todo* lo relacionado con GeoGebra. No sólo el *software,* sino también las aplicaciones para dispositivos móviles, los comandos, el sitio web, las herramientas de autor (actividades, libros y grupos), entre otros.


GeoGebra

Macedonian	73	88		37	1
Malay	83	96	2	83	20
Malayalam	9			9	
Mapudungun					
Marathi	32	38			
Mongolian	99	100	74	99	84
Nepalese	68	75		3	9
Norwegian					
Norwegian (Bokmål)	97	99	3	98	26
Norwegian (Nynorsk)	95	99	3	98	24
Persian	98	11	24	57	100
Polish	92	94	46	98	30
Portuguese (Brazil)	92	100	92	98	23
Portuguese (Portugal)	100	100	100	99	100
Romanian	81	95	2	71	13
Russian	78	88	1	56	10

Figura 2. Registro de los proyectos de traducción de GeoGebra. Fuente: dev.geogebra.org/ggbtrans/props/status/.

Al tener disponible todo GeoGebra para realizar la traducción, fue necesario decidir por dónde comenzar y así, organizar el proyecto en fases. Para lo cual fue de gran ayuda reconocer que las matemáticas mapuches son diferentes de las matemáticas occidentales, lo cual se puede explicar por las diferentes cosmovisiones de ambas culturas. De esta manera, para comenzar a traducir el *software*, necesitábamos personas que pudieran invertir mucho tiempo en el proyecto para comenzar a establecer un diálogo entre la cultura mapuche, su cosmovisión y sus matemáticas, con la cultura matemática occidental representada en el *software* GeoGebra. Debido a que se necesitaba invertir mucho tiempo en esta área del proyecto, se decidió comenzar por la traducción del sitio web, ya que es un área que nos permite visibilizar los resultados del proyecto a corto plazo.

No obstante, reconocer la diferencia entre las culturas y matemáticas mapuches de las occidentales dejó una enseñanza valiosa al grupo, que permitió delinear el rumbo de todo el proyecto. De esta manera, se adoptó una perspectiva de trabajo intercultural para la traducción de GeoGebra al mapudungún, la cual busca "producir un diálogo entre las culturas con el objeto de aprender y reconstituirnos a partir de la pluralidad epistemológica de los diversos sistemas de conocimientos que coexisten en nuestras sociedades" (Peña, 2016, p. 41). De esta manera, el grupo se dio cuenta que no se estaba buscando una mera traducción literal al mapudungún de las palabras y frases

relacionadas con GeoGebra, sino que se quería buscar un punto de encuentro y entendimiento entre ambas culturas expresado a través de las palabras.

Luego de encontrar y adoptar una perspectiva de trabajo que reflejaba las intenciones del grupo, y de disponer de la plataforma técnica para realizar la traducción, se comenzó una búsqueda de personas que tuvieran el interés y los conocimientos para aportar al proyecto. De esta manera, el Dr. Eduardo Carrasco invitó a las profesoras Lidia Melipil y Gloria Melipil a integrarse al equipo para ayudar con la traducción, ya que ellas son parte del pueblo mapuche y hablan tanto mapudungún como español. Sumado a esto, ellas dan clase en el sistema educativo chileno, en la región de la Araucanía, donde se concentra la mayor población mapuche en Chile. También se sumó al equipo el profesor Osvaldo Baeza, quien es experto en el uso de GeoGebra y en general del uso educativo de las tecnologías digitales.

Con el grupo completamente constituido se comenzó a organizar el trabajo para realizar la traducción del sitio web de GeoGebra y el rol de cada uno de los integrantes del grupo. En el caso de Sergio, como parte del IGI es el único miembro del equipo que tiene acceso a la plataforma de traducción de GeoGebra, por lo que descargó las 691 frases a traducir correspondiente al sitio web, las cuales organizó en una hoja de cálculo para compartir con el resto del equipo. Cada fila de la hoja corresponde a una frase a traducir desde el español, acompañada de su código (identificador web), categoría (de frases de la web), la traducción al mapudungún y la interpretación al español de la frase en mapudungún (ver figura 3).

Nº	#	Categoría	Código	Español	Mapudungún	Interpretación en español
1	583	stable - website	401_msg	No tienes autorización para acceder a esta página. Por favor, identifícate para continuar.		
2	318	stable - website	401_title	Sin autorización		
3	487	stable - website	403_msg	No tienes autorización para ver esta página.		
4	132	stable - website	403_title	Sin autorización		
5	402	stable - website	404_link_msg	Te pueden resultar útiles los siguientes enlaces:		
6	408	stable - website	404_msg	No podemos encontrar la página que buscas.		
7	598	stable - website	404_title	Página no encontrada		
8	621	stable - website	410_link_msg	Por favor, prueba lo siguiente:		
9	93	stable - website	410_msg	Está página fue movida.		
10	210	stable - website	410_title	Página movida		
11	607	stable - website	500_headline	Error interno del servidor		

Figura 3. Hoja de cálculo elaborada por Sergio para realizar la traducción de GeoGebra del español al mapudungún. Fuente: Elaboración propia.

La decisión de tener una columna para la interpretación del español de la frase en mapudungún fue tomada por el grupo, a partir de los primeros trabajos de traducción que se realizaron. Estos consistían en proponer frases en mapudungún que comunicaran el significado de la palabra o frase en español, para luego de discutir entre todo el grupo la frase que interpretaba de mejor manera la palabra o frase en español, a la luz de la cultura mapuche. Por ejemplo, la palabra *perfil* en el sitio web de GeoGebra se refiere a la cuenta personal que cada persona puede crear en tal sitio web, sin embargo, en mapudungún no existe una palabra para traducir de manera literal tal término, por lo cual las profesoras Lidia y Gloria propusieron la frase en mapudungún *ta ñi pegelgeken*, cuya interpretación en español es *como me ven (los otros)*. Esta frase cumple con interpretar el significado del término *perfil* en español, interpretándolo de tal manera que se reconozca la relación de la persona con los otros, característica fundamental de la cultura mapuche.

Con esta estrategia de trabajo, el grupo se organizó por parejas para realizar la traducción al mapudungún y la interpretación al español de las frases del sitio web de GeoGebra, de tal manera que cada pareja estuviera constituida por una profesora que habla mapudungún y un profesor que tiene experiencia en el uso de GeoGebra y los medios

web, quedando organizadas así: Lidia junto a Eduardo y Gloria junto a Osvaldo. En cuanto a Sergio, él se encarga de registrar las traducciones en el sistema de GeoGebra.

En la Tabla 1 se muestra un ejemplo del trabajo realizado por el grupo, con algunas frases, su traducción al mapudungún y su interpretación en español:

Tabla 1. Traducción e interpretación de frases del sitio web geogebra.org, del español al mapudungún

Español	Mapudungún	Interpretación en español
Inicio [*home* de geogebra.org]	Yitun mew zugu	Donde se inicia algo
Perfil	Ta ñi Pegelgeken	Como me ven (los otros)
Sin autorización	Pepikonlayaymi	No tiene acceso a algo
No tienes autorización para ver esta página	Elugelaymi ta mi pegeal tufachi zugu	No tiene permiso para ver esto
Por favor, prueba lo siguiente:	Furenean güneytuge tufa	Por favor, tantea por aquí
Está página fue movida.	Tufachi txoy zugu gewetulay	Estuvo pero no está

Fuente: Elaboración propia

Este proyecto en curso, puede servir como ejemplo a seguir para la Comunidad Latinoamericana que quieran traducir GeoGebra, en tanto *software* y herramientas web, a diferentes idiomas de los pueblos originarios de nuestra región, desde una perspectiva intercultural, en el sentido de Peña (2016).

Construcción de animaciones y simuladores con GeoGebra

Desde 2014 el *Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática* (Getiem) de la Universidade Estadual do Paraná (Unespar) ha llevado a cabo diversos proyectos de investigación integrando GeoGebra, tales como, la publicación de libros de texto para el estudio de contenidos matemáticos escolares (Basniak y Estevam, 2014; 2017), la creación de simuladores para trabajar con niños con altas habilidades/superdotados (Boruch y Basniak, 2018) y la resignificación de conocimientos profesionales del profesor de matemáticas mediante la problematización de la tecnología digital en su práctica docente (Basniak y Estevam, 2018).

Dada la gran experiencia del grupo Getiem, en el año 2018 su directora la Dra. Maria Ivete Basniak, asiste a la Relme 32 para difundir sus resultados. Así también participa como asistente del grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital*, en el cual comparte en la segunda sesión algunos resultados de las investigaciones de su grupo, teniendo una gran recepción por parte de los autores y los asistentes del grupo de discusión.

A raíz de esta exitosa experiencia y, la convergencia de objetivos en cuanto a la investigación integrando GeoGebra y de aportar al conocimiento generado en la región, por parte del grupo Getiem y los autores del grupo de discusión, la Dra. Basniak invita a estos últimos a participar del proyecto de investigación *Construcción de animaciones y de simuladores con el software GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática*. El objetivo de este proyecto es investigar el potencial de la construcción de animaciones y simuladores en GeoGebra para la enseñanza

y el aprendizaje de las matemáticas para la Educación Básica, Media y Superior, en diferentes países de Latinoamérica (Brasil, Chile, México, Perú y Venezuela).

Como primera etapa del proyecto, a inicios de 2019 se comienza con la discusión del marco teórico a utilizar para fundamentar la elaboración de las construcciones y las simulaciones con GeoGebra. Debido a la rico discusión, se plantea realizar una mesa en la cual se expongan las diferentes perspectivas teóricas representadas por los miembros del proyecto, lo cual permita entablar un diálogo académico que permita construir el marco teórico definitivo del proyecto y aprovechar para difundir esta discusión en un espacio más amplio. De esta manera se concreta la mesa de discusión *Perspectivas Teóricas em Pesquisas que envolvem Tecnologia na Educação Matemática*, realizada en el marco del Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de la Unespar.

A la luz de este contexto, el presente proyecto pretende aportar a la CGL productos didácticos (construcciones y simuladores) con base en la investigación, que al estar creados con GeoGebra y alojados en su plataforma web, tienen la característica de ser de tipo Recursos Educativos Abiertos (REA), lo cual permite compartirlos de manera libre con todas las personas interesadas, quienes a su vez están facultadas para adaptarlos a sus propias necesidades. Además, con la participación y el aporte de los colegas de diferentes países de Latinoamérica se espera que estos REA puedan ser usados de manera efectiva en los sistemas educativos de la región. Sumado a lo anterior, en el marco de este proyecto también se están generando productos de difusión académica, como la mesa de discusión y el presente escrito, los cuales aportan al diálogo académico y docente de la Matemática Educativa de Latinoamérica.

Coloquio GeoGebra de la CGL

El Coloquio GeoGebra tiene como objetivo ser un espacio para compartir y discutir sistemáticamente entre profesoras, profesores, investigadoras, investigadores, estudiantes y entusiastas de GeoGebra de Latinoamérica, sobre las formas en que la educación en la región se está relacionando, interactuando y construyendo en su vínculo con la cultura digital y, específicamente, con GeoGebra.

La idea del Coloquio GeoGebra nació de la reflexión realizada por las y los participantes de la segunda edición del grupo de discusión *Matemática Educativa en la Era Digital* (Rubio-Pizzorno et al., 2019), en el marco de la Relme 32, realizada en julio del 2018 en la ciudad de Medellín - Colombia. Las y los asistentes manifestaban la necesidad de constituir un espacio que permitiera estar en contacto académico permanente, para sumar los esfuerzos que se realizan una vez al año en el grupo de discusión en la Relme. Además, se aludió al gran esfuerzo económico que realizan los asistentes y autores del grupo de discusión para movilizarse cada año a un país diferente para asistir al evento y participar del grupo de discusión. De esta manera, se consensuó la opción de constituir un espacio para compartir de manera periódica entre los miembros de la comunidad, que fuera en modalidad online, lo cual permite sortear la barrera económica y de movilización en la región, y que ayudara a centrarse en fortalezas como son el lenguaje común, la resiliencia, la creatividad y la solidaridad, todas ellas características del pueblo latinoamericano.

De esta manera se procedió a convocar a miembros claves de la comunidad para constituir el Coloquio GeoGebra de la CGL, cuyas sesiones se realizan mensualmente y de manera online, sin costo ni necesidad de registro. Cada mes se invita a un miembro de la comunidad para que comparta una reflexión académica, técnica o docente sobre su uso de GeoGebra en la educación (Comunidad GeoGebra Latinoamericana, sf.).

En primera instancia se convocó a miembros claves de la comunidad, desde diferentes países de Latinoamérica, para que pudieran compartir conferencias y ayudar en la moderación de las sesiones. Producto de esta convocatoria se organizó el calendario para el primer semestre del Coloquio GeoGebra, las cuales tuvieron buena recepción por parte de los miembros de la comunidad. Esto último se ha manifestado a través de las consultas para poder participar en el Coloquio GeoGebra compartiendo una conferencia, a raíz de lo cual se completó el calendario para todo el 2019 (ver Tabla 2).

Cabe destacar que para el equipo de la CGL, quienes organizan el Coloquio GeoGebra, así como el grupo de discusión Matemática Educativa en la Era Digital en la Relme, es de gran relevancia realizar acciones que puedan ser de ayuda e interés para todos los miembros de la comunidad, eso incluye a las personas de habla hispana y portuguesa, lo cual se ha traducido en ocho sesiones en español y dos en portugués del Coloquio GeoGebra, y en seis ponentes de habla hispana y dos ponentes de habla portuguesa en el grupo de discusión. En términos de cobertura, los conferencistas, los moderadores y el presentador del Coloquio GeoGebra representan a países del norte, del centro y del sur de América (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, México, Panamá, Perú y Uruguay).

Tabla 2. Sesiones del Año 1 del Coloquio GeoGebra de la CGL

Sesión	Conferencista		Moderador(a)	
1	Colombia	William Jiménez	Perú	Daysi García-Cuéllar
2	Argentina	Laura del Río	Colombia	William Jiménez
3	México	Clara Moncada	Argentina	Laura del Río
4	Uruguay	Gustavo Aguilar	Panamá	Keila Chacón
5	Costa Rica	William Poveda	Colombia	Camilo Súa
6	Brasil	Maria Ivete Basniak	Perú	Daysi García-Cuéllar
7	Brasil	Celina Abar	Perú	Daysi García-Cuéllar
8	Colombia	Freddy Villamizar	Argentina	Mariana Torres
9	Ecuador	Fredy Rivadeneira	Argentina	Karina Rizzo
10	México Australia	Juan Carlos Ponce Campuzano	México	Francisco Anaya-Puebla

Fuente: *elaboración propia.*

Debido al éxito del Coloquio GeoGebra en su primer año, se desarrollaron tres proyectos derivados: la publicación de un número en una revista científica, la creación de las Memorias del evento y la planeación del segundo año del Coloquio GeoGebra.

La CGL y el Instituto GeoGebra de São Paulo realizaron una alianza para elaborar el número 1 del volumen 9 de la Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, dedicado al primer año del Coloquio GeoGebra. El número de la revista está compuesto por una editorial, un artículo de reflexión sobre el aporte de la CGL a la educación abierta en Latinoamérica, y un artículo sobre cada una de las conferencias del primer año del Coloquio GeoGebra (Rubio-Pizzorno y García-Cuéllar, 2020). Cabe destacar que todos los artículos están disponibles en acceso abierto.

La CGL se encargó de crear las Memorias del evento (Comunidad GeoGebra Latinoamericana, 2019), donde se dispone de todos los recursos asociados al Coloquio GeoGebra de manera abierta, es decir, las imágenes de difusión

de cada sesión, la semblanza de la o el conferencista, el resumen de la conferencia, la presentación en PDF, el video íntegro de la sesión, los REA usados durante la conferencia y algunos que recomiende el o la conferencista, y el artículo asociado a la sesión, publicado en la Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo.

Finalmente, la CGL decidió continuar con el Coloquio GeoGebra por segundo año consecutivo, incorporando algunas modificaciones a propósito de los logros alcanzados. En primer lugar, el Coloquio GeoGebra pasa a ser temático, con la intención de focalizar las conferencias en temas de interés para la comunidad. Específicamente, cada semestre del segundo año del Coloquio GeoGebra tiene su propia temática, a saber:

- Semestre 1 - 2020 (de marzo a julio): Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría con GeoGebra.
- Semestre 2 - 2020 (de agosto a diciembre): Educación STEM con GeoGebra.

En segundo lugar, las y los conferencistas serán escogidos de dos formas: por invitación y por convocatoria abierta. Los invitados presentan en las primeras dos sesiones de cada semestre, es decir, los invitados para hablar de enseñanza y aprendizaje de la geometría con GeoGebra presentan en marzo y abril, y para hablar de Educación STEM con GeoGebra en agosto y septiembre. El resto de las conferencias de cada semestre serán impartidas por miembros de la comunidad que se postulen a través de la convocatoria abierta, con un total de seis conferencistas por convocatoria abierta.

En tercer lugar, y con la intención de incluir a toda Latinoamérica y abordando temas de diversidad, las dos primeras ponencias de cada semestre cumplirán las siguientes características: una ponencia será en español y la otra en portugués; además serán impartidas por una mujer y la otra por un hombre.

Aporte de la CGL a la Matemática Educativa desde la perspectiva de la educación abierta

A partir de la reflexión que proponen los proyectos presentados en este escrito es posible dar cuenta de la gran amplitud del campo de acción de la CGL, en tanto sus proyectos e iniciativas atienden áreas como la práctica educativa, los aspectos técnicos, el trabajo con profesores, la academia y el funcionamiento de la comunidad (Rubio-Pizzorno et al., 2019, p. 1921).

Esto lo realiza mediante la elaboración de REA que atiendan las necesidades locales y de los sistemas educativos regionales, aunada a su consecuente estrategia de apropiación de estos por parte de profesores; la difusión de experiencias y productos en medios escritos y eventos académicos; la intención de llegar a todos los rincones de Latinoamérica a través de instancias en español y portugués, y así también en idiomas indígenas de nuestra región; y la constitución de espacios de articulación de la CGL permanentes y esporádicos, tanto en espacios físicos como digitales.

Es importante destacar que cada uno de estos proyectos e iniciativas tienen un matiz muy especial, el cual se relaciona con los movimientos apertura y cultura libre, por ejemplo, mediante el uso de licencias abiertas (Creative Commons) para declarar la manera de compartir los REA, las traducciones de GeoGebra o el uso y reproducción de los videos del Coloquio GeoGebra. De esta manera, cada uno de los proyectos presentados en este escrito y los diferentes campos de acción de la CGL son elementos que aportan a promover la cultura libre mediante el desarrollo de la educación abierta en Latinoamérica. Como se menciona en la Declaración de Panamá, la educación abierta es uno de los 10 elementos esenciales para la ciencia abierta de la región, junto al acceso abierto; los datos abiertos de investigación; la ciencia ciudadana; la investigación abierta, reproducible y replicable; la evaluación abierta; las herramientas abiertas: política de software y hardware libres; las infraestructuras abiertas; la innovación de código abierto; y las licencias libres (Declaración de Panamá, 2018).

Sumado a esto, se reconoce también la importancia del desarrollo de la educación abierta en tres frentes: la creación de recursos educativos abiertos, el funcionamiento de prácticas educativas abiertas y la constitución de comunidades

educativas abiertas (Rubio-Pizzorno, 2020). Cada uno de estos aspectos están siendo abordados por la Comunidad GeoGebra Latinoamericana a través de los diversos proyectos que realiza e impulsa, por lo cual se puede concluir que la CGL está aportando al desarrollo de la educación abierta en la región de manera amplia y robusta.

Referencias bibliográficas

Basniak, M. I. y Estevam, E. (2014). *O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: Frações, Círculo e Circunferência*. Curitiba, Brasil: Ithala.

Basniak, M. I. y Estevam, E. (2017). *O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica: Números Inteiros, Equações, Matemática Financeira, Ângulos e Razões Trigonométricas*. Curitiba, Brasil: Ithala.

Basniak, M. I. y Estevam, E. (2018). Conhecimento Tecnológico e Pedagógico de Matemática revelado por professores quando relatam suas práticas. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, 14*(31), 03-21.

Boruch, I. G. y Basniak, M. I. (2018). Animações no GeoGebra e o Ensino de Matemática: uma experiência com alunos com altas habilidades/superdotação. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, v. extra*, p. 1-8. ISSN: 2323-0126. Recuperado de https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/9028

Comunidad GeoGebra Latinoamericana (sf). Fanpage de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana en Facebook. Recuperado de https://facebook.com/geogebralatino

Comunidad GeoGebra Latinoamericana (2019). *Memorias del Coloquio de la CGL - Año 1 [Libro GeoGebra]*. Rescatado de https://www.geogebra.org/m/zavpecwu

Declaración de Panamá sobre Ciencia Abierta (2018). Rescatado de https://hiperderecho.org/2018/11/conoce-la-declaracion-de-panama-de-ciencia-abierta

García-Cuéllar, D. (sf.) Grupo de Investigación en Tecnologías en Matemática Educativa - TicMatEDU. Recuperado de https://www.researchgate.net/lab/Grupo-de-Investigacion-en-Tecnologias-en-Matematica-Educativa-TicMatEDU-Daysi-Garcia-Cuellar

García-Cuéllar, D.; Martínez-Miraval, M.; Sostenes, H. y Parra-Zapata, M. (2018). Uso del Geogebra para teléfonos móviles en la enseñanza de la geometría. En C. Gaita, J. Flores, F. Ugarte y C. Quintanilla (Eds.), *Acta del IX Congreso Internacional sobre la enseñanza de las matemáticas,* (pp. 382-394). Huancavelica, Perú: Universidad Nacional de Huancavelica. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/327741047

Granados, O. (2015). *O milagre da multiplicação dos celulares na América Latina*. El país. Recuperado de https://brasil.elpais.com/brasil/2015/08/27/economia/1440698867_622525.html

Peña, Pilar (2016). *Influencias de una experiencia didáctica intercultural en las creencias matemáticas docentes*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada del Instituto Politécnico Nacional. México, Distrito Federal.

Rubio-Pizzorno, S. (2020). Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la
Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9*(1), (pp. 10-25). DOI: 10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

Rubio-Pizzorno, S. y García-Cuellar, D. (2020). Coloquio de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. En *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, 9*(1). Rescatado de https://revistas.pucsp.br/IGISP/issue/view/2277/showToc

Rubio-Pizzorno, S.; León Salinas, C.; León Ríos, J.; Córdoba-Gómez, F. y Abar, C. (2018). Matemática Educativa en la Era digital: visibilización y articulación de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. En L. A. Serna y D. Páges (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 31*(2), (pp. 1917-1923). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rubio-Pizzorno, S.; León Salinas, C.; García-Cuéllar, D. y Prieto G., J.L. (2019). Matemática Educativa en la Era digital: visibilización y articulación de la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), pp. 1917-1923. Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sostenes, H.; García-Cuéllar, D. y Martínez-Miraval (2019). Caracterización y análisis gráfico de las variables de una función lineal afín con GeoGebra móvil. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(1), (pp. 733-741). Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

ANÁLISIS DEL DESARROLLO DE HABILIDADES DIGITALES A TRAVÉS DEL LIBRO DE TEXTO GRATUITO DE EDUCACIÓN BÁSICA EN MÉXICO

ANALYSIS OF DIGITAL SKILL DEVELOPMENT THROUGH THE BASIC EDUCATION FREE TEXTBOOK IN MEXICO

Horacio Saúl Sostenes González
Escuela Secundaria Técnica No. 83 (México).
hssg_33@hotmail.com

Resumen
El desarrollo de habilidades digitales (HD) en educación básica es uno de los rasgos deseables del perfil de egreso. El libro de texto gratuito para educación básica al ser uno de los principales recursos para la enseñanza, promueve el uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje, mismos que propician las HD cuando se usan adecuadamente. Al indagar en los libros de texto gratuitos de matemáticas de primaria nos damos cuenta que no se incluyen actividades que propicien las HD. En los libros de secundaria consultados se incluyen actividades que promueven las HD en cada lección, los principales recursos que promueven son la consulta de links, el uso de un software y el uso de la calculadora. El desarrollo de HD en forma global se desarrolla a través de actividades que propician la ejercitación, la ejemplificación, la introducción de un tema y como complemento.

Palabras clave: habilidades digitales, libro de texto gratuito, aprendizaje de matemáticas

Abstract
The development of digital skills in basic education is one of the desirable aspects of the graduation profile. The free textbook for basic education, as one of the main resources for teaching, promotes the use of technological resources for learning; the ones that foster digital skills when used properly. When inquiring in the primary school mathematics free textbooks, we realize that they do not include activities that propitiate digital skills. Secondary school books consulted include activities that promote digital skills in each lesson; the main resources they promote are: the consultation of links, the use of software, and the use of the calculator. The global development of digital skills is carried out through activities that encourage exercise, exemplification, the introduction of a topic and their use as a complement.

Key words: digital skills, free textbook, mathematics learning

Introducción

La investigación en matemática educativa se difunde a través de varias vías entre las que se encuentran los congresos y simposios, las publicaciones de revistas, memorias, y libros de texto, entre otros. Por otro lado, el conocimiento matemático que se acerca a los estudiantes de educación básica tiene varias vías de difusión para su estudio, principalmente a través de la intervención docente y de los libros de texto que se brindan gratuitamente a cada estudiante de preescolar, primaria y secundaria de las escuelas públicas de México.

Los libros de texto son considerados como la herramienta más importante de aprendizaje para los estudiantes, ya que logran una incidencia considerable dentro y fuera del aula (Rezat, 2009., Reyes y Rodríguez, 2014). El libro de texto gratuito (Ltg) se vuelve entonces un recurso de relevancia para el aprendizaje de los estudiantes de educación básica. Cada libro presenta énfasis distintos que corresponden a las visiones de cada autor y editorial, sin embargo, los libros de Matemáticas para educación básica convergen con un enfoque de aprendizaje a través de la resolución de problemas matemáticos.

Para el ciclo escolar 2018-2019, la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg) distribuyó 186.6 millones de libros para educación básica en México, mientras que para el ciclo 2019-2020 se estima la impresión de 220 millones de libros (Poy, 2019). Esta cantidad de impresión de libros que se difunden nacionalmente en las escuelas mexicanas de educación básica, nos hace considerar anticipadamente que se presenta un gran impacto tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de Matemáticas, donde la demanda de libros de texto para la formación de los estudiantes va en incremento.

Para el ciclo escolar 2018-2019 se imprimieron 35.9 millones de libros de texto únicamente para secundaria, donde se aprobaron 33 editoriales que fueron las encargadas de proveer del material para cubrir la demanda. Cada libro de texto está diseñado para cubrir los temas que se establecen en los planes y programas de estudio del nivel educativo, sin embargo, cada editorial prioriza un aspecto a través de la visión de sus autores como la mejor manera de acercar el contenido matemático a los estudiantes.

Tanto en el marco del Programa de estudio 2011, de Educación básica (SEP, 2011) como en la nueva propuesta del Plan y programas de estudio para la educación básica 2017 (SEP, 2017), el desarrollo de habilidades digitales para todos (HDT) es uno de los ámbitos del perfil de egreso de la educación básica. Las HDT impulsan el uso de las tecnologias de la información y comunicación para diversificar los materiales tanto de maestros como de alumnos a fin de apoyar el aprendizaje de los estudiantes, ampliar sus competencias y favorecer su inserción en la sociedad.

Considerando lo anterior, el desarrollo de HDT por los estudiantes, se ve fuertemente influenciada por las actividades que los libros de texto de Matemáticas sugieren o presentan a través de las secuencias de trabajo. Esto lleva a plantear la pregunta de investigación ¿Qué tipo de Habilidades Digitales se propician y qué recursos son los que principalmente se utilizan para desarrollar las actividades de los libros de texto gratuitos de Matemáticas en educación básica?

De forma más puntual el propósito de investigación es reportar, categorizar y caracterizar los recursos y actividades que se establecen a través de los libros de texto de Matemáticas, de educación básica en primaria y secundaria, distribuidos por la Conaliteg, y que propician el uso de recursos tecnológicos para el desarrollo de HDT en la clase de Matemáticas (visto desde el enfoque de la resolución de problemas). Esto permitirá valorar las estrategias de desarrollo de HDT desde la visión de los libros de texto, a fin de visualizar los primeros aciertos y dificultades, hecho que representa la primera parte de la investigación en curso. La segunda etapa se enfocará en el análisis de varias clases de aula donde se espera observar el trabajo del docente durante la implementación de actividades donde se usen los recursos tecnológicos para el aprendizaje de los estudiantes.

Marco conceptual

Los libros de texto tienen varias características, usos y modelos de enseñanza, sin embargo, convergen en dirigirse a un público quien aprenderá matemática escolar. Para el contexto mexicano los Ltg se dirigen a estudiantes de educación básica. Para situar la noción de libro de texto retomamos la noción de Gómez (2000) quien considera al libro de texto como una publicación especializada que surge en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza a través de un modelo de enseñanza simultáneo. Como vemos en Castañeda, González y Mendo-Ostos (2017) los libros de texto son materiales que acompañan a los profesores y estudiantes en los cursos, pero se apegan a los estándares curriculares y los enfoques didácticos definidos en los programas de estudio.

Los libros de texto con el paso de los años y como consecuencia de adecuaciones inminentes producto de decisiones académicas y políticas han propiciado que se presenten métodos de presentación de contenido distintos, los cuales se presentan aún en los libros de texto, sin embargo, al enunciarlos no pretendemos descartar o mencionar alguno de ellos como el óptimo. A saber, los métodos de presentación de contenido son el reglado, el razonado, el de repeticiones, el intuitivo, el de actividades y el orientado a la estructura.

> El método reglado es aquél que enfatiza el aprendizaje sobre ejemplos ilustrativos sin hacer mención a argumentaciones que se parezcan a lo que hoy entendemos por justificaciones o fundamentos. El método razonado es aquél que pone de manifiesto la lógica de las reglas y hace el análisis de los principios que las sustentan. No hay demostraciones, en el sentido formal. El método de las repeticiones es aquél que busca el aprendizaje mecánico. El método intuitivo es aquél apoyado en imágenes concretas que huye del formalismo abstracto. El método de actividades es aquél que introduce actividades que no son complementarias, sino que forman parte del proceso de aprendizaje. En la enseñanza orientada a la estructura se enfatizan los conceptos básicos de los procedimientos y las relaciones estructurales sobre las que se basan (Gómez, 2000, p.79).

El uso dinámico del libro de texto presenta un fuerte impacto en las actividades de aprendizaje matemático, así el modelo del tetraedro didáctico (Figura 1) propuesto por Rezat (2009, p.1261) cobra sentido al explicar que los profesores usan el libro tanto para planear como al desarrollar una lección, durante el desarrollo de la lección se media el uso del libro, y visto desde otro ángulo los estudiantes aprenden del libro de texto.

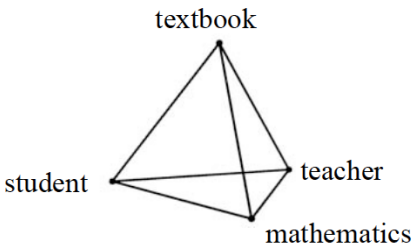


Figura 1. Modelo de tetraedro de uso de los libros de texto propuesto en Rezat (2009).

El libro de texto tiene diversos usos y papeles en el aula de matemáticas, entre ellos como objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como colección de ejercicios propuestos y problemas a resolver (González y Sierra, 2004), pero el uso depende de quién lo utilice. Aunque el libro de texto está diseñado para el uso del estudiante, el profesor es un actor escolar que suele utilizarlo en distintos momentos. Brown (2009) realizó tres categorías o momentos de uso del libro de texto en los que interactúa el docente y dirige el trabajo con los estudiantes, estos usos son: descarga, adaptación e improvisación.

El primer uso al que se llama descarga, se refiere al uso de los libros de texto siguiendo las actividades planteadas de forma más puntual evitando alejarse lo más posible de los contenidos y actividades sugeridas. El uso adaptativo de los libros de texto se refiere a un uso más adaptable y flexible, los maestros siguen parcialmente los contenidos, y donde consideran prudente realizan adecuaciones tanto en el contenido como en la presentación didáctica. La forma improvisada de uso del libro de texto generalmente se refiere al uso que dan los maestros, teniendo como características la flexibilidad y la innovación, se logran integrar efectivamente ajustes espontáneos en el proceso de enseñanza, siendo un vaivén en las actividades.

Los libros de texto de matemáticas de educación básica presentan distintas estructuras en cuanto a su contenido, Rezat (2006) ha realizado la comparación de los elementos estructurales de distintos libros de texto de Matemáticas, concluyendo que la mayoría de las microestructuras de los libros de texto de Matemáticas alemanes comprenden cinco elementos: tareas introductorias, exposición, núcleo o esencia, ejemplos trabajados y ejercicios. Las características de estos cinco elementos pueden verse en la Tabla 1

Tabla 1. Características de los elementos estructurales en los libros de texto de Matemáticas

element / characteristic	introductory tasks	exposition	kernels	worked examples	exercises and problems
characteristics in terms of content	situations	new material, procedures, theorems, definitions	results, definitions, theorems	details the execution of a particular algorithm or solution strategy	routine tasks; differentiated tasks; open tasks; applications; problems
liguistical characteristics		language that is appropriate for students and for their age group	concise		
visiual characteristics			boxed, clearly structured	somehow highlighted	distinct markings indicate different ability levels
pedagogical characteristics	Engage the student actively; recalling relevant past ideas; preparatory to the new material; assistance in order to approach the new material	explanatory, development of new ideas, introduction of new concepts	overview, consolidation	paradigmatic	engage the student actively; consolidation, provide opportunities to practice and acquire particular skills
situative conditions	lesson, students try, puzzle and discover on their own		also for private study; to be used like a reference book	consulted by students who need assistance to do the exercise	

Fuente: Rezat (2006, p. 484).

Sobre las habilidades digitales

El impacto inminente de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) en los distintos ámbitos de la vida ha propiciado que distintos organismos nacionales como internacionales dirijan programas para la transformación de la sociedad de la información en una sociedad del conocimiento donde se tenga un énfasis en la diversidad cultural y lingüística en las diferentes formas de conocimiento y cultura que caracterizan a la sociedad a través del progreso tecnológico.

Desde este posicionamiento el sistema educativo (SEP, 2011) se ha dado a la tarea de propiciar el desarrollo de habilidades digitales tanto en alumnos como en docentes, las cuales deben adquirirse durante la formación académica.

> En la Educación Básica el esfuerzo se orienta a propiciar el desarrollo de habilidades digitales en los alumnos, sin importar su edad, situación social y geográfica, la oportunidad de acceder, a través de dispositivos tecnológicos de vanguardia, de nuevos tipos de materiales educativos, nuevas formas y espacios para la comunicación, creación y colaboración, que propician las herramientas de lo que se denomina la Web 2.0.
> Para acercar estas posibilidades a las escuelas de educación básica, se creó la estrategia Habilidades Digitales para Todos (HDT), que tiene su origen en el Programa Sectorial de Educación 2007-2012 (PROSEDU), el cual establece como uno de sus objetivos estratégicos impulsar el desarrollo y la utilización de tecnologías de la información y la comunicación en el sistema educativo para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, ampliar sus competencias para la vida y favorecer su inserción en la sociedad del conocimiento. (SEP, 2011, p.68)

Dentro del plan y programa de estudios 2018 (SEP, 2017) se establece como perfil de egreso de la educación básica distintos rasgos que los estudiantes deben lograr al concluir cada nivel educativo. Así para preescolar dentro del ámbito de habilidades digitales se establece que al término de este nivel los estudiantes deben estar familiarizados con el uso básico de las herramientas digitales a su alcance. Al término de la educación primaria deben identificar una variedad de herramientas y tecnologías que utilizarán para obtener información, crear, practicar, aprender, comunicarse y jugar. Por su parte al término de la educación secundaria los estudiantes deben analizar, comparar y elegir los recursos tecnológicos a su alcance y aprovecharlos con una variedad de fines, de manera ética y responsable, además aprender diversas formas para comunicarse y obtener información, seleccionarla, analizarla, evaluarla, discriminarla y organizarla.

Para valorar los logros en las habilidades digitales en educación básica se han dispuesto Estándares Curriculares de Habilidades Digitales los cuales "presentan la visión de una población que utiliza medios y entornos digitales para comunicar ideas e información, e interactuar con otros. Implican utilizar herramientas digitales para resolver distintos tipos de problemas" (DOF, 2011, p.56). Se organizan a partir de seis campos, los cuales son ejemplificados en la siguiente tabla (Tabla 2) junto con los descritores de secundaria:

Tabla 2. Estándares de habilidades digitales.

Campo	Descripciones de los estándares de habilidades digitales para secundaria
Creatividad e innovación.	Implica demostrar el pensamiento creativo, el desarrollo de productos y procesos innovadores utilizando las TIC y la construcción de conocimiento.
Comunicación y colaboración.	Requiere la utilización de medios y entornos digitales que les permitan comunicar ideas e información a múltiples audiencias, interactuar con otros, trabajar colaborativamente, incluyendo el trabajo a distancia, para apoyar el aprendizaje individual y colectivo, desarrollando una conciencia global al establecer la vinculación con alumnos de otras culturas.
Investigación y manejo de información.	**Implica la aplicación de herramientas digitales que permitan a los alumnos recabar, seleccionar, analizar, evaluar y utilizar información, procesar datos y comunicar resultados.**

Pensamiento crítico, solución de problemas y toma de decisiones.	Requiere el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico para planear, organizar y llevar a cabo investigaciones, administrar proyectos, resolver problemas y tomar decisiones sustentadas en información, utilizando herramientas digitales.
Ciudadanía digital.	Requiere de la comprensión de asuntos humanos, culturales y sociales relacionados con el uso de las TIC y la aplicación de conductas éticas, legales, seguras y responsables en su uso.
Funcionamiento y conceptos de las TIC	Implica la comprensión de conceptos, sistemas y funcionamiento de las TIC para seleccionarlas y utilizarlas de manera productiva y transferir el conocimiento existente al aprendizaje de nuevas TIC.

Fuente: Elaboración propia basados en DOF 2011.

Como vemos en Reyes (2016, p.40): Las posibilidades que ofrecen estas tecnologías digitales en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas van desde brindar acceso a una biblioteca de videos con explicaciones sobre conceptos matemáticos, el cálculo de expresiones aritméticas, encontrar las soluciones numéricas o simbólicas de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, la creación de gráficas de funciones reales, la creación de modelos dinámicos que utilicen más de una ventana gráfica, hasta otros más avanzados que incluyen el uso de sistemas especializados.

Sin embargo, las posibilidades que podemos obtener a través de un recurso dependen del que sea elegido, ya que no es lo mismo contar con una calculadora científica a contar con dispositivo móvil y acceso a internet, pero también depende de la tarea o problema que se pretenda resolver. Algunos brindarán mayores herramientas, pero requerirán de mayor tiempo para aprender a usarlos, otros pueden ser muy sencillos y resultar útiles en el momento, pero ser ineficientes al querer resolver múltiples tareas.

Cuando se trata de resolver situaciones problema utilizando como medio o como apoyo un recurso tecnológico, la tecnología ayuda a encontrar diversas maneras de resolver los mismos problemas y extenderlos (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2009). Sin embargo, esto no quiere decir que por contar con los recursos tecnológicos siempre se podrán encontrar varias maneras de resolver el problema, ya que entre otros factores que determinaran hallar múltiples estrategias se encuentra el dominio del recurso, los recursos mentales y conocimientos de los que disponga cada sujeto.

Más bien el uso de la tecnología puede ofrecer a los estudiantes una ventana importante para observar y examinar las conexiones y las relaciones que se vuelven relevantes durante el proceso de resolución de un problema matemático (Santos-Trigo, 2004).

Método

Para llevar a cabo el análisis se realizó una revisión y análisis cualitativo al catálogo de libros de texto de Matemáticas comprados por la Conaliteg para el ciclo escolar 2018-2019 (https://www.gob.mx/conaliteg/acciones-y-programas/preguntas-frecuentes-91283). Se determinó realizar la revisión de los libros de texto de primaria, así como de secundaria. Para los primeros, al ser únicos e invariantes a nivel nacional (Exceptuando los libros para educación especial) no tuvo que determinarse un criterio de selección, se consideraron los libros de Matemáticas de primero a sexto grado.

Para los libros de secundaria se eligieron únicamente dos editoriales de las que se retomaron los libros de primero a tercer grado, de los cuales se realizó el análisis respectivo. Las editoriales consideradas fueron Pearson y SM de Ediciones. De acuerdo a las estadísticas de distribución de libros de texto en el ciclo escolar 2018-2019, SM se encuentra como la editorial con mayor presencia de sus libros de texto a nivel nacional, mientras que Pearson se encuentra entre las 6 principales editoriales con mayor presencia.

Las revisiones se realizaron en tres momentos, teniendo distintos focos de interés cada una, tal como puede verse en la tabla 3:

Tabla 3. Momentos de análisis de los libros de texto.

	Primera revisión	Segunda revisión	Tercera revisión
¿Qué se revisó?	La estructura de los libros de texto y se registraron las páginas que contenían actividades tecnológicas.	El recurso electrónico que promovía. Se crearon categorías del tipo de recurso tecnológico sugerido.	Se revisó cada actividad tecnológica a fin de analizar las características de las actividades y la habilidad matemática que promovía así como los estándares de habilidades digitales.

Fuente: Elaboración propia.

Resultados y discusión

A partir de la primera revisión de los libros de texto de educación primaria y secundaria se presentan los primeros hallazgos relevantes. Al revisar los libros de texto gratuitos de educación primaria, Matemáticas, de primero a sexto grado, éstos no contienen actividades, vínculos o sugerencias de programas que favorezcan el desarrollo de habilidades digitales. Se presentan únicamente situaciones que hablan de circunstancias de la realidad, donde indirectamente se analizan problemas sobre instrumentos creados tecnológicamente, entre ellos la calculadora, los autos, los juegos de la feria.

Al no contener actividades que promuevan las habilidades digitales el perfil de egreso de educación básica se ve incompleto desde la mirada de los libros de texto. Sin embargo, no podemos generalizar que esta habilidad no se desarrolle en los estudiantes, en las instituciones se suelen promover actividades donde los docentes promueven el uso de recursos tecnológicos, o a través de proyectos institucionales como suele ser computación, donde los estudiantes tienen los primeros acercamientos al desarrollo de habilidades digitales desde el ambiente escolar.

Por su parte al tener la primera revisión de los libros de secundaria de las editoriales Pearson (Mancera y Basurto, 2013, 2014 y 2018) y SM (Castañeda y González, 2016, 2018., Moreno, 2016) se visualiza que todos los libros de texto incorporan actividades complementarias donde sugieren el uso de las TIC. Sin embargo, la naturaleza de las actividades no se enfoca en incorporar el uso de recursos tecnológicos a través de una secuencia didáctica que permita tratar desde el inicio un tema en particular, las actividades con uso de TIC se presentan en recuadros en el borde de la página o en la parte culminatoria de cada tema en un sentido de complemento a la lección.

A partir de la revisión de las actividades, se crearon grupos de acuerdo al uso del recurso digital que se promovía en cada libro de texto, los cuales fueron en un primer momento anotados individualmente, pero para su presentación se agruparon por el recurso o acción que promovían. En la tabla 4 se aprecian los recursos.

Tabla 4. Recursos digitales promovidos en los libros de texto.

Grado y libro	Cantidad de actividades	Recurso digital que promueve
1º Secundaria Mancera y Basurto (2018). Editorial: Pearson	19	Sugiere consultar direcciones web
	2	Sugiere el uso de la calculadora
	13	Promueve el uso de la hoja electrónica de cálculo
	3	Sugiere el uso de una calculadora online
	5	Sugiere el uso de GeoGebra para realizar una breve actividad.
	1	Link de páginas electrónicas dirigidas a los estudiantes, hay una breve explicación de cada link.
2º Secundaria Mancera y Basurto (2013). Editorial: Pearson	29	Sugiere consultar direcciones web
	3	Propone una breve actividad donde se usan distintos softwares (thatquiz, signos, poly, geogebre)
	2	Sugiere el uso de la calculadora
	2	Sugiere el uso de la calculadora online
	4	Promueve el uso de la hoja electrónica de cálculo
	2	Link de sitios de internet sugeridos para el alumno y el profesor
3º Secundaria Mancera y Basurto (2014). Editorial: Pearson.	38	Sugiere consultar direcciones web
	2	Sugiere el uso de GeoGebra para realizar una breve actividad.
	2	Promueve el uso de la hoja electrónica de cálculo
	2	Link de sitios de internet sugeridos para el alumno y el profesor
Castañeda, A. y González, R (2018). Matemáticas 1. Secundaria. Soy protagonista. México: SM de Ediciones.	26	Sugiere consultar una dirección web para practicar.
	5	Sugiere buscar, observar imágenes en internet.
	2	Lección para experimentar con las gráficas en hojas de cálculo
	1	Lección para consultar en el INEGI y analizar y experimentar con estadísticas.
	1	Lección con GeoGebra para experimentar con Geometria dinámica.
	2	Sugiere el uso de la calculadora online

Castañeda, A. y González, R (2016). Matemáticas 1. Retos Matemáticos 2. México: SM de Ediciones.	49	Sugiere consultar una dirección web para practicar.
	2	Bibliografía electrónica para el alumno
Moreno, J. (2016). Retos Matemáticos 3. México: SM de Ediciones.	51	Sugiere consultar una dirección web para practicar.
	1	Bibliografía electrónica para el profesor

Fuente: Elaboración propia

Los recursos tecnológicos que se presentan como sugerencia para el trabajo en cada lección de los libros de texto los categorizamos en un primer momento en tres grandes grupos: actividades que promueven la consulta de direcciones web, actividades que promueven el uso de la calculadora y actividades que promueven el uso de software o programas específicos. En forma predominante se proponen vínculos a páginas de internet para practicar ejercicios sobre el tema. Las actividades que se visualizan también presentan como sugerencia el uso de algún software, entre los que se encuentra Excel, GeoGebra, Thatquizz, Poly, sin embargo, de éstos, el único que tiene un uso dentro de los tres grados de secundaria es GeoGebra. Se puede prever que las actividades al ser esporádicas requieren de tiempo y práctica constante para poder utilizar el software de forma óptima. Se presentan también algunas actividades aisladas donde se requiere el uso de la calculadora convencional, y en algunos casos el uso de la calculadora online.

Al realizar una revisión más precisa a cada actividad que se promueve en los libros de texto nos damos cuenta de que dentro de los métodos de presentación de contenido (Gómez, 2000) que se promueven a través de las actividades tecnológicas, los métodos con mayor presencia son *el método de actividades y el de repeticiones*. Sin embargo, este último dista de la concepción original ya que las actividades buscan practicar, y complementar los ejercicios y problemas sugeridos en el libro de texto.

El método de actividades se visualiza en gran número de páginas sugeridas en los libros de texto consultados, donde las actividades no solo sirven de complemento sino contribuyen a la comprensión del tema en cuestión. Estas actividades tienen como característica principal ser interactivas y manipulables en un entorno amigable. Es decir, no se presentan como un texto plano, más bien utilizan imágenes haciendo las actividades atractivas y en algunos casos manipulables para propiciar un mayor contacto con el entorno de aprendizaje haciendo partícipe al alumno. A manera de ejemplificación veanse la figura 2:

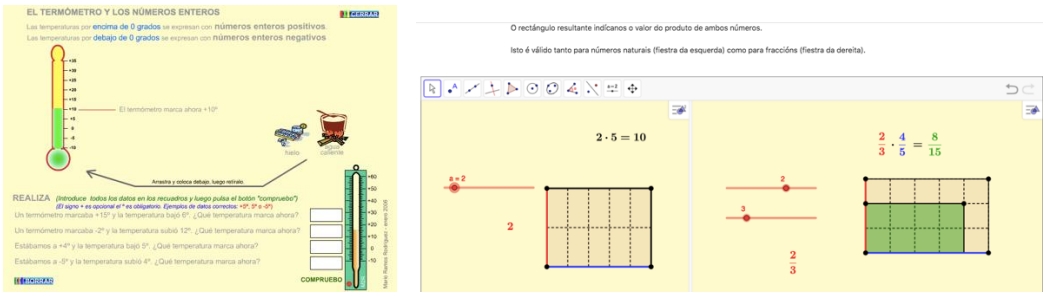


Figura 2. Actividades sugeridas por los libros de texto.
Fuente: Elaboración propia a partir de los links retomados del libro de texto de Castañeda y González (2018).

Ahora bien, considerando las características de los elementos estructurales en los libros de texto de Matemáticas (Rezat, 2006) y retomándolas en el contexto de esta investigación que se centra únicamente en las actividades que promueven las habilidaded digitales, nos damos cuenta que las actividades se presentan como tareas introductorias, como explicación del tema, se vuelven el nucleo de análisis, se presentan como ejemplos y ejercitación; en otras palabras los cinco elementos estructurales estudiados en Rezat (2006) se encuentran presentes en cada uno de los libros de texto consultados pero en distintos momentos, es decir sin ser de manera secuenciada. Sin embargo, de forma más precisa se tiene la tendencia de incluir estructuralmente mayor cantidad de ejercicios y problemas dentro de las actividades tal como comentamos arriba.

Por último, retomando los campos y descripciones de los estándares de habilidades digitales de secundaria (DOF, 2011) para explicar los tipos de habilidades digitales que se propician a través de las actividades de los libros de texto, nos damos cuenta que dada la naturaleza de la presente investigación, las actividades planteadas a través de los libros de texto se apegan más al campo de Investigación y manejo de información, debido a que las actividades se enfocan en recabar, analizar y procesar información. También el campo de Funcionamiento y conceptos de las TIC se encuentra presente debido a que para llevar a cabo una actividad es necesario el conocimiento del funcionamiento de las TIC.

Por otro lado, no podemos afirmar que el resto de los campos no se desarrollen a través de las actividades de los libros de texto, más bien se necesitaría un estudio más a detalle que permitiera realizar una valoración o cualificación de lo que propicia cada actividad para determinar si propician la colaboración, el pensamiento crítico, entre otras.

Conclusiones

Los libros de texto son un recurso de alto impacto en el aprendizaje de los estudiantes, así su adecuado uso puede propiciar distintas habilidades en los estudiantes, entre ellas las habilidades digitales, las cuales son uno de los rasgos del perfil de egreso de los estudiantes de educación básica mexicana. A partir de la revisión realizada a los libros de texto gratuitos de primaria y, a los libros de texto de secundaria de Matemáticas de dos de las editoriales con mayor difusión nacional es que se presentan los resultados.

En educación primaria existen proyectos que buscan promover el desarrollo de las HDT, sin embargo, centrándonos desde la revisión de los libros de texto gratuitos de Matemáticas en primaria, de primero a sexto grado, nos damos cuenta de que éstos no presentan actividades o secuencias que promuevan el uso de un recurso tecnológico, es decir no promueven el desarrollo de las habilidades digitales.

Por su parte, los libros de Matemáticas para secundaria que fueron analizados presentan breves secuencias y en su mayoría anexos dentro de cada secuencia, los cuales son claramente identificables como actividades que promueven el uso de las tecnologías de la información y comunicación. La actividad que mayormente se promueve en todos los libros de texto revisados es la sugerencia de consulta de una dirección URL, la cual lleva a diversas actividades como videos, páginas web de ejercitación, lecturas, páginas web para realizar construcciones, entre otros.

Se presentan también actividades que promueven el uso de la calculadora clásica y la online, actividades que sugieren el uso de la hoja electrónica de cálculo, y actividades que promueven el uso de software o programas específicos. Es destacable que al usar un programa específico no se plantea su uso paulatino o a través de una secuencia didáctica, se presentan actividades aisladas relacionadad con un tema, ignorando el tiempo necesario para adquirir un dominio básico del programa y así poderle dar el mejor uso.

Las actividades en forma de anexo dentro de cada lección no juegan el mismo rol, su uso es variable y no es secuenciado, así, presentan actividades que concuerdan los elementos estructurales de los libros de texto

identificados en Rezat (2006), hay actividades de ejercitación, para ejemplificar, para introducir, o para complementar la esencia del tema.

Por otro lado, los estándares de habilidades digitales que se visualizan claramente como producto de las actividades promovidas dentro de los libros de texto analizados son la investigación y el manejo de información, y el Funcionamiento y conceptos de las TIC.

Por último, es relevante comentar que las actividades de los libros de texto consultados que promueven el uso de las TIC no se presentan desde un enfoque de resolución de problemas, más bien se enfocan en complementar un apartado teórico y en acercar a los estudiantes distintos ejercicios en forma de práctica. Hecho que concuerda con los dos componentes de los libros de texto visualizados en Usiskin (2013), la teoría dosificada y los problemas y ejercicios para profundizar.

Referencias bibliográficas

Brown, M. W. (2009). The teacher-tool relationship: Theorizing the design and use of curriculum materials. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction (pp. 17–36). New York: Routledge.

Castañeda, A. y González, R. (2016). Retos matemáticos 2. México: SM de Ediciones.

Castañeda, A. y González, R. (2018). Matemáticas 1. Secundaria. México: SM de Ediciones.

Castañeda, A., González, J. C. y Mendo-Ostos, L. (2017). Libros de Matemáticas para primer grado de secundaria en México: problemas y estrategias de solución. Revista Electrónica de Investigación Educativa, 19(4), 97-111. https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.4.1173

DOF (2011, agosto 19). ACUERDO número 592 por el que se establece la Articulación de la Educación Básica. Disponible en https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/9721849d-666e-48b7-8433-0eec1247f1ab/a592.pdf

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. Revista Números, 43-44. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros/numeros/43-44/Articulo14.pdf.

González, M. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Enseñanza de las Ciencias, 22(3), 389-408.

Mancera, E. y Basurto, E. (2013). Matemáticas 2. Serie Saberes. México: Pearson

Mancera, E. y Basurto, E. (2014). Matemáticas 3. Serie Saberes. México: Pearson

Mancera, E. y Basurto, E. (2018). Interacciones. Matemáticas 1. México: Pearson

Moreno, J. (2016). Retos Matemáticos 3. México: SM de Ediciones.

Poy, L. (26 de abril de 2019). Libros de texto gratuitos estarán a tiempo en las escuelas: SEP. *La Jornada*. Recuperado de https://www.jornada.com.mx/ultimas/2019/04/26/inicia-impresion-de-220-millones-de-libros-de-texto-gratuitos-sep-9749.html

Reyes, I. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales.* (Tesis de doctorado no publicada). Cinvestav, México.

Reyes, L. E., Rodríguez, F. M. (2014). Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 543-551). Salamanca: SEIEM.

Rezat, S. (2006b). The Structure of German Mathematics Textbooks. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(6), 482-487.

Rezat, S. (2009). The utilization of mathematics textbooks as instruments for learning. Proceedings of CERME 6, Lyon France.

Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009). Towards the construction of a Framework to deal with routine problems to foster mathematical inquiry. PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergratuade Studies, 19 (3), 260-279.

Santos-Trigo, M. (2004). The role of technology in students' conceptual constructions in a sample case of problem solving. Focus on Learning Problems in Mathematics, 26(2), 1–17.

SEP (2011). Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro Educación Básica, Secundaria, Matemáticas. México: SEP.

SEP (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica*. México: SEP.

Usiskin, Z. (2013). Studying textbooks in an information age-a United States perspective. *ZDM Mathematics Education, 45*, 713-723.

EXPLICACIONES DE TIPO VARIACIONAL: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

VARIATIONAL-TYPE EXPLANATIONS: A STUDY WITH EIGHTH-GRADE STUDENTS

Luisa Fernanda Moreno Patiño
Universidad Pedagógica Nacional (Colombia)
p.lufemoreno@gmail.com

Resumen
El propósito de este documento es interpretar y describir las categorías de análisis implícitas en las explicaciones de tipo variacional, analizadas en cuatro estudiantes de grado octavo (12 a 14 años), cuando identifican, describen, interpretan, cuantifican y predicen consecuencias de la situación de variación y cambio (depredación lobos – ovejas) presentada en el simulador NetLogo versión 4.1.3. El estudio reveló que los estudiantes emplean explicaciones relacionadas a la idea básica de covariación, es decir en las primeras categorías. Entonces parece evidente razonar, en futuras investigaciones, acerca de las situaciones de aprendizaje que median en la conceptualización de la razón; se considera que este estudio es un primer acercamiento al concepto

Palabras clave: variación, explicaciones de tipo variacional, simulación, fenómeno depredador lobos – ovejas

Abstract
This paper is aimed at interpreting and describing the analysis categories implicit in the variational- type explanations, analyzed in four eighth-grade students (aged 12-14), when they identify, describe, interpret, quantify and predict consequences of the situation of variation and change (wolf-sheep predation) presented in Net Logo simulator, version 4.1.3. This study showed that students use explanations related to the basic idea of co-variation, i.e. in the first categories. Then, it seems evident to think, in future research, about the learning situations that mediate in reason conceptualization. This study is a first approach to the concept.

Key words: variation, variational-type explanations, simulation, wolves - sheep predator phenomenon

Introducción

En los últimos años el Ministerio de Educación Nacional [MEN] a través de los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Matemática, han suscitado propuestas acerca del desarrollo de los diferentes tipos de pensamiento matemático mediante la conexión entre el conocimiento matemático informal de los estudiantes con los saberes propios de la matemática, atendiendo a su entorno social, cultural, entre otros. Desde esta perspectiva, se caracteriza del pensamiento variacional a través de situaciones problemáticas que constituyen el concepto de variación, como eje rector para el aprendizaje de las matemáticas.

Asimismo, diversas investigaciones (Castiblanco, Urquina, & Acosta, 2004; Posada et al., 2006; Serrano, García, & Salamanca, 2000) analizan el estudio del pensamiento variacional en la Educación Matemática, otras (Ávila, 2005; Cantoral, Molina, & Sánchez, 2005; Cantoral & Reséndiz, 2003; Carlson et al., 2002; Díaz, 2005; Nájera, 2009; Reséndiz, 2006) caracterizan las actuaciones de los estudiantes o profesores, entorno al desarrollo o discusión de ideas variacionales, como resultado de estas investigaciones se reflexiona acerca del papel de la variación en el aprendizaje del Cálculo, desde los primeros niveles de escolaridad hasta la Educación Superior. Estos autores nos permitieron reflexionar sobre el estudio del pensamiento variacional en el grado octavo.

Basado en estas reflexiones, se propone una secuencia de situaciones de variación y cambio centradas en el fenómeno de depredación lobos – ovejas (empleando el simulador NetLogo versión 4.1.3), con el fin identificar, describir y comprender el tipo de explicaciones variacionales usadas por cuatro estudiantes de grado octavo. Con el fin de categorizar estas explicaciones se emplearon como referente el Pensamiento Variacional y Sistemas algebraicos y Analíticos (MEN, 2006). De acuerdo con el problema planteado la pregunta de investigación fue: *¿Qué tipo de explicación variacionales usan los estudiantes de grado octavo cuando se enfrenta al fenómeno de variación, depredación lobos – ovejas?*

Marco teórico

Basados en las propuestas establecidas en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1997), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y el Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales, (Castiblanco et al, 2004) inferimos que se desarrolla el Pensamiento Variacional, cuando se da significado y sentido a la Variación mediante el estudio de situaciones de variación y cambio, referentes a contextos de dependencia entre variables, contextos donde una misma cantidad varia, relaciones funcionales, entre otros. En la Figura 1 se presenta la interpretación de estas propuestas:

Figura 1. Propuesta acerca del desarrollo del Pensamiento Variacional

Para presentar el acercamiento al concepto de variación, inicialmente exponemos diferentes concepciones acerca de cambio, variación y covariación para compararlos y determinar sus semejanzas y diferencias. Luego, se describe la situación de variación y cambio de Depredador Lobos – Ovejas

Tabla 1. Concepciones de los constructos teóricos: cambio, variación y covariación

	Cambio	Variación	Covariación
Serrano et al, 2000	Una situación expresada en términos de la noción de cambio, permite anticipar que la pregunta problema, cuantifica el estado final, el resultado de la acción. Las expresiones asociadas*: Ganar, perder, regalar, grande…*	Una situación expresada en términos de la noción de variación, permite anticipar una pregunta en relación al aumento o disminución en un ***tiempo*** transcurrido. Las expresiones asociadas: *Aumentar, disminuir… …*	

Cantoral et al, 2005	La noción de cambio denota la *modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de conducta de un cuerpo, de un sistema u objeto.*	*Estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejerce nuestro entendimiento para conocer cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado,* es decir analizar cualitativa y cuantitativamente el cambio de un sistema.	
Posada et al, 2006		*La variación implica apreciar que dos o más cantidades de variable covarían, de tal forma que el cambio en una o algunas, determina cambio(s)en la(s) restante(s),* es decir	Se infiere que estos autores, interpretan la noción covariación como un sinónimo de variación porque se analizan los cambios de una variable durante el transcurso del tiempo.
Ávila, 2005		Toma como referente el concepto de variación propuesto por Cantoral	*Considera la covariación como "la relación entre las variaciones simultáneas de dos cantidades. (Ferrari citado en Ávila 2004)*

Dada la comparación de las diferentes propuestas acerca del significado de la variación, el cambio y la covariación, en el marco de las características propias de este estudio, se establece que:

- Existe una diferencia de grado entre cambio y variación, es decir en un evento se presenta, inicialmente, un movimiento que va de un estado a otro (la noción de cambio) posteriormente al analizar este movimiento en términos cualitativos y cuantitativos surge la noción de variación.
- Para esta investigación, la variación y la covariación son equivalentes debido a que en las situaciones de aprendizaje propuestas, a los estudiantes, se analiza la variación del tamaño de una población respecto al tiempo, lo que implica atender a la covariación

A continuación, explicamos la situación de cambio y variación, Depredación Lobos – Ovejas. Cuando la población de la presa incrementa su tamaño, los depresores obtienen más alimentos y se aumenta su población; lo que reduce la población de la presa, hace escaso el alimento para el depredador, declina su población; esto favorece a la población de la presa que ahora crece lentamente otra vez y puede generar que el patrón de cambios en los tamaños de poblaciones se repita.

Para analizar el comportamiento de las poblaciones en esta situación de variación, se utiliza la simulación "Wolf Sheep Predation" presentada en la biblioteca de NetLogo 3.1.4., que modela la interacción entre depredador-presa (lobo y oveja) en un ecosistema.

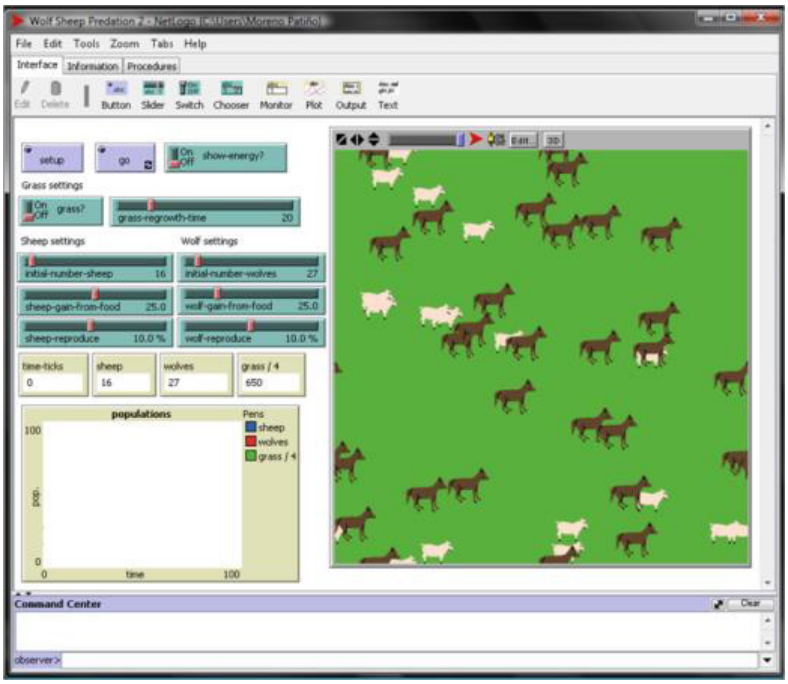


Figura 2. Wolf Sheep Predation– NetLogo 4.1.3.

Se describe la noción de Explicaciones de tipo variacional para caracterizar su relación con los niveles de razonamiento de Carlson et al (2004). La noción de *Explicación de tipo Variacional* se determina mediante la relación dialéctica entre los conceptos de *Explicación* y *Argumentos Variacionales*, propuestos por el grupo de Investigación de Ricardo Cantoral (es un matemático educativo, catedrático, investigador, editor y científico mexicano). Cabe destacar, que este estudio se basa en las explicaciones proporcionadas por los estudiantes hacia el profesor o el compañero.

Explicación de tipo variacional. Emerge como un recurso discursivo propio del análisis cualitativo y cuantitativo del cambio; cuando se pretende enseñar, convencer, requerir una orden, entre otros aspectos utilizados en la caracterización de la situación de variación y cambio. Esta propuesta se plantea teniendo en cuenta los siguientes constructos:

- Explicación: "se entiende aquellos recursos discursivos que tienden a comprender una noción o idea, un hecho, un objeto, fenómeno, tratan de encontrar las causas que lo provocan o permiten entenderlo" (Cantoral, 2003, 139)
- Argumento Variacional: "cuando se hace uso de maniobras, ideas, técnicas o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cualitativo y cuantitativo del cambio en el sistema" (Cantoral, 2006, 464)

A continuación, en el siguiente esquema se presenta una síntesis del acercamiento a la noción de Explicaciones de tipo variacional

Figura 5. Explicaciones de tipo variacional

Teniendo como referente los niveles de razonamiento de Carlson et al (2003) se propone la clasificación de las Explicaciones de tipo variacional, excepto la categoría 1. El nombre de los niveles y sus correspondientes comportamientos, se toman de referencia para categorizar los cinco tipos de estas explicaciones.

- Nivel 1 (N1). Coordinación
- Nivel 2 (N2). Dirección
- Nivel 3 (N3). Coordinación Cuantitativa
- Nivel 4 (N4). Razón Promedio.
- Nivel 5 (N5). Razón Instantánea

En cada categoría se detallan los siguientes aspectos: función de la categoría, nociones o conceptos propios del pensamiento variacional, aspectos característicos del pensamiento variacional, los indicadores con sus respectivas *explicaciones de tipo variacional*, posiblemente usadas los estudiantes. En este último aspecto, se presenta un tabla para relacionar los indicadores con sus correspondientes explicaciones de tipo variacional, que hipotéticamente creemos utilizan los estudiantes. Para cada explicación (*E1, E2, E3…)* se proponen ejemplos que nos permitirán identificar y diferenciar cada categoría en el análisis.

Metodología

Esta investigación se ajusta a un *estudio de caso*, debido a que describe las actuaciones de un grupo de 4 estudiantes, de grado octavo del sector rural del municipio de Pacho (Cundinamarca, Colombia), particularmente las que manifiestan el uso de explicaciones de tipo variacional, con base a las categorías de análisis establecidas. Además, es de carácter participativo por que el profesor–investigador se integra al grupo e interactúa directamente.
Se utilizan técnicas y procedimientos para recolectar información, característicos de un estudio de caso, mediante los métodos de observación y grabaciones de audio y video. Además, se organiza la información en transcripciones, luego se editan para determinar los episodios representativos que se analizan.

Durante todas las implementaciones se realizaron grabaciones de audio y video, acerca de las discusiones que se sucintaban en cada grupo respecto al cuestionario, (actividades escritas, centradas en el estudio de la variación) y al programa NetLogo, donde se simulaba el fenómeno de depredación-presa de lobos y ovejas, en un ecosistema.

Al terminar las sesiones de cada actividad, y por la observación del profesor-investigador, se elaboraban notas "resumen", acerca de lo sucedido. Las notas y la visualización "rápida" del video, eran discutidas con el asesor para ajustar la siguiente actividad.

Finalmente, para verificar los posibles datos, se implementó una entrevista, la cual se registró en video (por problemas técnicos no se pudo grabar en audio); al finalizar, se desarrolló una nota "resumen" de la misma y se discutió con el asesor.

Organización, administración, edición y depuración de la información

Se elaboraron transcripciones de la información, registradas en audio y video, de las situaciones de introducción, situación 1, situación 2 y la entrevista, teniendo en cuenta la Tabla 2:

Tabla 2. Esquema para las transcripciones.

Numeral Intervención	**¿Quién interviene?**	**¿Qué dicen? [*¿Qué hacen?*]**	**Observaciones del investigador**

Para organizar la información se desarrolló una matriz en relación a los momentos que la componían.

Momento 1: Identificar y describir el fenómeno.
Momento 2: Interpretar la información representa en el fenómeno para establecer predicciones y verificar sus consecuencias acerca del fenómeno.
Momento 3: Comparar, interpretar y cuantificar la información representada en el fenómeno, además analizar los cambios en el tamaño de las poblaciones en intervalos iguales de -tiempo para caracterizar la noción de "razón"

Estos momentos se relacionan con los aspectos que caracterizan el pensamiento variacional: identificación del fenómeno, descripción, interpretación, predicción de sus consecuencias y cuantificación (Castiblanco, Urquina y Acosta,2004). Cada momento se resalta de un color para organizar e identificar el tipo de explicación usada por los estudiantes en cada uno.

Posteriormente, se clasificaba cada pregunta que realizaba el profesor, según su propósito en algún momento y las actuaciones que se esperaba realizaran los estudiantes. Luego se comparaba con las actuaciones realizadas y se determinaban las explicaciones usadas en cada característica. Cada tipo de pregunta tiene como objetivo, indagar sobre las actuaciones de los estudiantes en su correspondiente momento.

En conclusión, los episodios de la entrevista para analizar las actuaciones de los estudiantes en cada momento.

A continuación, se presenta (Tabla 3) con la descripción del proceso de codificación de los datos, posteriormente se ilustra el proceso mediante un ejemplo.

Tabla 3. Proceso de Codificación

C #. I #. E#		
C *número* ***C1, C2, C2, C3, C4 Y C5***	**I *número*** ***I1, I2, I3 Y I4***	**E *número*** ***E1, E2, E3, E4, E5, E6, …***
Inicialmente, se coloca la letra C acompañada de un número, los cuales representa los tipos de categorías entre las que se encuentran: identificación de las variables **(C1)**, coordinación **(C2)**, dirección **(C3)**, coordinación cuantitativa **(C4)**, razón promedio **(C5)** y razón instantánea **(C6)**.	Enseguida se escribe la letra I acompañada de un número que representa el indicador al que está haciendo énfasis. Cada categoría se subdivide en Indicadores. La Categoría 1 se subdivide en dos indicadores que representa: el análisis de las variables (I1) y de las constantes (I2). Para las Categorías 2, 3, 4 y 5, se subdivide en la relación entre las variables: número de lobos – tiempo **(I1)**, Número de ovejas – tiempo **(I2)**, número de ovejas – número de lobos **(I3)**, el tamaño de la población – otros aspectos (reproducción, alimentación, muerte, enfermedad, etc) **(I4)** Para la categoría 6 no se proponen indicadores, debido a que no se espera que los estudiantes utilicen este tipo de explicaciones variacionales.	Finalmente, se escribe la letra E con un número que representa el tipo de explicación usada por el estudiante. Para determinar cuándo una explicación es de tipo variacional, se proponen varios ejemplos de cada una. Cada ejemplo caracteriza una afirmación que manifieste el uso de la variación de los estudiantes, cuando justifican o describe el fenómeno.

Análisis de resultados

El análisis se centra en el uso, de este tipo de explicaciones, por parte de los estudiantes de cada grupo, durante el desarrollo de los dos momentos en lo que se dividió la situación 2; para verificar la información de los momentos 1 y 2, y complementar los datos del momento 3, que se centra en las categorías 4 y 5, se tiene en cuenta la entrevista.

En resumen, la mayoría de los estudiantes:

- Identificaron las variables involucradas en el fenómeno, específicamente describieron la importancia de la variable, tiempo, durante la interacción de las especies (Categoría 1).
- Describieron e interpretaron el aumento o disminución del tamaño de una especie en relación a su reproducción y alimentación (Categoría 3), usualmente, las explicaciones que usaban pertenecían al tipo C3.I4.E2.
- No establecen predicciones, aunque proponen un comportamiento de las poblaciones a futuro pero, aparentemente, se basan en la interpretación de las simulaciones conocidas.
- Manifestaron explicaciones de tipo C4.I3.E2, cuando determinan la cantidad de cambio mediante la diferencia del estado final menos el estado inicial (Categoría 4). Sin embargo, en algún momento de la entrevista esta deducción fue inducida, inconscientemente, por la profesora.
- Tuvieron dificultad para dar explicaciones de la Categoría 5, debido a que al comparar las cantidades de cambio en una de las poblaciones a través de intervalos iguales de tiempo, establecían que el tamaño de una población cambia más, cuando la inclinación de los segmentos de recta que forma la “curva” tienden a ser

una gráfica "más parada" o cuando la gráfica presenta más oscilaciones, sin atender a la conceptualización de la "razón". Cabe destacar, que se esperaba esta situación debido al nivel de escolaridad de los estudiantes, pero se indagó al respecto para reflexionar sobre el primer acercamiento, de los estudiantes, al concepto de razón de cambio, como base para futuras investigaciones.

Estos resultados respaldan el trabajo de Carlson et al (2002) que revelaron hallazgos similares en relación con los niveles de razonamiento, que para este estudio se asocian a cada categoría de análisis.

En el marco de los Estándares Básicos de Matemáticas (MEN, 2006, p.85), los estudiantes al comenzar el grado octavo deben describir y representar situaciones de variación, relacionando diferentes representaciones (Categoría 2) además, analizar las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables en contexto (Categoría 4); en este sentido, los resultados de este estudio revelaron aspectos característicos de esta propuesta.

Conclusiones

El estudio reveló que los estudiantes emplean explicaciones relacionadas a la idea básica de covariación, es decir en las primeras categorías, particularmente identifican y describen el fenómeno en términos de la categoría 1; En general se describen e interpreten el aumento o disminución del tamaño de una especie en relación con su reproducción y alimentación (Categoría 3); se les dificulta establecer predicciones acerca de las consecuencias del fenómeno.

Para futuras investigaciones, se propone ahondar en los siguientes aspectos: diseño e implementación de situaciones de aprendizaje que median en la conceptualización de la razón; reflexión acerca de la continuidad de las situaciones de aprendizaje durante las clases de matemáticas, debido a que el desarrollo del pensamiento variacional implica un arduo y continuo trabajo; el uso del recurso tecnológico NetLogo para caracterizar las diferentes representaciones; determinación del tipo de explicaciones variacionales acordes a la Categoría 6; caracterización de este estudio desde los aspectos sociales, culturales, históricos e institucionales.

En general, esta investigación aporta a la comunidad académica, la tipología de las explicaciones variacionales usadas por los estudiantes cuando se enfrentan a un evento dinámico.

En relación con los objetivos propuestos, se puede afirmar que se cumplió con el objetivo general de la investigación debido a que se describieron e interpretaron el tipo de explicaciones usadas por los estudiantes cuando emplean la variación para identificar, describir, interpretar, cuantificar y establecer predicciones acerca de un fenómeno depredación lobos – ovejas.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. XVII*, págs. 1-9. Mexico: CLAME.

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variacion en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *RELIME, Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., VI*(2), 133-154.

Cantoral, R., Molina, J., & Sánchez , M. (s.f.). Socioepistemología de la Predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 18*, págs. 463-468. Mexico: Cinvestav IPN, Cicata IPN.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education,, 33*(5), 352-378.

Castiblanco, A., Urquina, H., & Acosta, E. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia.* Bogotá D.C., Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ávila, J. (2005). Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas. *Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa* . México: Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia. Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Araújo, J. d. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educaçao matemática crítica. *Revista de Educaçâo em Ciência e Tecnologia*.

Blomhøj, M. (2004). *Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica.* Suecia: National Center for Mathematics Education.

Bassanezi. (1994). Modelling as a Teaching - Learning Strategy. For the Learning of Mathematics.

Berrío, M. d. (2011). *Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo del café.* Medellín.

Biembengut, M., & Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clase de matemáticas. *V Festival Internacional de Matemática.* Costa Rica.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners´s Modeling Behavior. *Journal für Mathematik - Didaktik*.

Bossio, J. L. (2014). Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales. Medellín.

Díaz, L. (2005). Profundizacion en los entendimientos estudiantiles de variacion. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa., 8*(002), 144-168.

Gabardo, L. (2006). Modelación matemática y ontología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (págs. 317-323). México.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). *Introducción a la Investigación de Operaciones* (9na ed.). México: McGraw-Hill.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas.* Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Santafé de Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L. (2009). Construccion de la nocion de variable asociada a la variacion mediante el uso de simulaciones para estudiantes de grado octavo. *Tesis de Licenciatura en Educacion Matematica*. Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Nájera , V. (2009). Construcción de significados de variación y variable en ambientes dinámicos y entornos físicos. *Tesis para obtener el grado de Doctor en matemática educativa, informática educativa y ciencias de la cognición educativa*. Mexico: Universidad Autonoma del Estdo de Morelos .

Posada, F., Gallo, G., Gutierrez, J., Jaramillo, C., Monsalve, O., Múnera, J., . . . Vanegas, M. (2006). *Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico.* Colombia: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Ministerio de Educacion Nacional. .

Rendon, P. (2009). Conceptualizacion de la razon de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprension. *Tesis para obtener el titulo de Magister en Educacion.* Medellin: Universidad de Antoquia.

Reséndiz, E. (2006). La variacion y las explicaciones didacticas de los profesores en situacion escolar. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa., 9*(3), 435-458.

Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Serrano, C., García, G., & Salamanca, J. (2000). El estudio de la variación en la Educación Básica. *XVII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística* (págs. 1 - 24). Santafé de Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. *Tesis para obtener el grado de: Maestro en Ciencias*. México: Instituto Politécnico Nacional.

Universidad de las Ciencias Informáticas. (2014). *Modelo del profesional del Ingeniero en Ciencias Informáticas.* La Habana.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas.* Bogotá: República de Colombia, Ministerio de Educación Nacional.

SERIES GEOMÉTRICAS DESDE UNA PERSPECTIVA VARIACIONAL CON APOYO DE GEOGEBRA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

GEOMETRIC SERIES FROM A GEOGEBRA-SUPPORTED VARIATIONAL PERSPECTIVE IN UNIVERSITY STUDENTS

Franklin Mejía Ochoa, Marvin Mendoza Valencia
Universidad Tecnológica de Honduras CEUTEC – La Ceiba - Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Universidad Nacional Autónoma- TEC Danlí.
frankmejia1993@hotmail.com, mmendoza@unah.edu.hn

Resumen
En esta investigación hemos adoptado la perspectiva del pensamiento variacional, partiendo de las ideas pre matemáticas que traen los estudiantes al ingresar al nivel educativo superior. Puesto que, nuestros estudiantes poseen experiencias vividas en diferentes situaciones, estas podrían constituirse en una construcción de conocimiento formal. Este trabajo tiene sus bases en la construcción de objetos matemáticos (series geométricas) con apoyo de GeoGebra. La metodología fue cualitativa de corte interpretativo con diseño fenomenológico. Se analizaron las producciones escritas de los estudiantes, generando como conclusiones manifestaciones de pensamiento variacional de acuerdo con un primer nivel de análisis provisto por el enfoque ontosemiótico.

Palabras clave: superior, pensamiento variacional, serie geométrica, ontosemiotico

Abstract
In this research, we have adopted the perspective of variational thinking, based on the pre-mathematical ideas that students have when they enter higher education. Since our students have had experiences in different situations, these could become a formal knowledge construction. This work has its bases on the construction of GeoGebra-supported mathematical objects (geometric series). We used a qualitative interpretative-type methodology with phenomenological design. The written productions of the students were analyzed, generating, as conclusions, forms of variational thinking according to a first level of analysis provided by the onto-semiotic approach.

Key words: higher level, variational thought, geometric series, onto-semiotic approach

Introducción

El Pensamiento Variacional constituye una línea de investigación en Educación Matemática que tiene su génesis en el análisis y reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal, en los que el cambio se consideró un punto importante en aras de responder a diferentes necesidades de la época, de brindar solución a problemas de movimiento que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas (Mendoza, 2013). Este pensamiento se orienta a desarrollar habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, sean estas cercanas o no al sujeto, bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor sin importar el contexto en que nos situemos.

No obstante, este trabajo pretende ser el resultado de una investigación que oriente a la interacción didáctica, y construcción de series geométricas mediante tecnología y analizadas desde la perspectiva del cambio y la variación. Las tecnologías actuales han dado condiciones y características favorables en torno al desarrollo de habilidades visuales, cognitivas, como, por ejemplo, la visualización. Esta habilidad cognitiva trasciendo a lo estrictamente visual, vinculándose además con otras exigencias cognitivas que requiere el pensamiento matemático avanzado, específicamente el variacional. Por tanto, en este estudio se reporta algunos resultados obtenidos de como la implementación de sesiones de trabajo utilizando el software GeoGebra, y donde se analizan fenómenos de cambio y variación para desarrollar el pensamiento variacional y la estructuración de los registros de representación semiótica contribuyen a la construcción del concepto de series geométricas.

Marco teórico

El pensamiento y lenguaje variacional estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida (Cantoral, 2004, p. 1). Este pensamiento es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos. Se afirma que uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 1998); y a situaciones que involucran variación en contextos, ya sean estos, realistas, fantasiosas, o matemáticos. Un gran desafío actual es encontrar maneras de utilizar este conocimiento acumulado, en distintos espacios de enseñanza y aprendizaje.

Desde esta mirada Cabezas y Mendoza (2016), consideran que pensar variacionalmente desde es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables y expresada en un soporte material (ostensivo). Por lo reportado en la literatura, el pensamiento variacional exige para su desarrollo combinar distintas áreas y contenidos matemáticos.

No obstante, un saber no se estudia únicamente desde lo cognitivo, ya que las creaciones humanas, las matemáticas en este caso, se han desarrollado en contextos históricos, culturales y sociales situados, y es a través de las prácticas sociales que los seres humanos le dan sentido a lo que hacen, comparten códigos, utilizan diferentes estructuras y lenguajes (Cantoral y Farfán, 2003). De otras investigaciones en esta perspectiva del Pensamiento Variacional (Maury et A, 2012) se desprende que este pensamiento involucra elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación.

Series Geométricas

Las series son como una de las bases del principio de la historia de las matemáticas donde se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética. El origen de las series, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. Las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, aparecieron alrededor del siglo XVI a. C. Una serie geométrica es una sucesión de números en la que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término anterior por una constante r. La constante r se llama razón común. Ahora una serie geométrica infinita es una serie de la forma $a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^{n-1} + ...$ (Stewart, Redlin y Watson, 2012).
La fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita puede, dependiendo del valor de r, extenderse para producir una fórmula para la suma de una serie geométrica infinita

Teoría de las representaciones semióticas

En el aprendizaje de la matemática diversos enfoques teóricos describen el papel de los sistemas de representación en acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales, considerando que los cambios entre los sistemas de representación de los objetos matemáticos pueden facilitar la eventualidad de dichos objetos en los estudiantes (Contreras y Font, 2002). La formación del pensamiento, particularmente en matemática, está junto al desarrollo de simbolismos específicos para representar a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos. En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los objetivos de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. Respecto a las representaciones semióticas Duval (1999) señala que:

> Son producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Existen distintos tipos de registros de representaciones semióticas: registro de la lengua natural, gráfico, figural, algebraico (p.14).

Por ello, Duval considera que las diferentes maneras de representación evidencian ser fundamentales para la comprensión de conceptos.

Software dinámico: Geogebra

GeoGebra es un software de matemáticas desarrollado por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo, proporciona la vinculación de las matemáticas con el álgebra, la geometría y el cálculo al incluir tanto la geometría dinámica como las herramientas de álgebra computacional (Hohenwarter y Preiner, 2007). El asistente matemático GeoGebra integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y calculo en un ambiente dinámico potenciando entre otros, el desarrollo del pensamiento variacional (Ruiz ; Ávila y Villa-Ochoa, 2013). Actualmente algunos estudios de los autores antes citados evidencian que GeoGebra puede asumirse como una herramienta dinámica - didáctica que proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos conceptos o procedimientos matemáticos dando aportes significativos al desarrollo del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional hace énfasis en la habilidad que tiene una persona para identificar estados de cambio de una o más “variables” y relaciones entre ellas, patrones existentes en secuencias, así como el manejo y creación de funciones como representaciones de situaciones de variación. En este sentido GeoGebra al recrear ambientes

dinámicos, permite a los usuarios la visualización y representación de relaciones de covariación. (Ruiz et al., 2013, p. 447).

Metodología

El enfoque de este estudio es cualitativo. El objetivo de este tipo de investigación es "describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (Sampieri, 2014: 41). No obstante, la investigación en este tipo permite observar qué características están presentes en el desarrollo del pensamiento variacional asociados al cambio y la variación. Se desarrollo durante el Tercer período comprendido entre los meses de enero a marzo del 2019.

De igual manera los objetivos de investigación enmarcan que el estudio debe tener un alcance descriptivo – interpretativo. Estos estudios buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Esto es recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos a las que se refieren (Hernández y Baptista, 2010:81). En cuanto al diseño de investigación, este es el plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea (Hernández y Baptista, 2010:120). El diseño es fenomenológico ya que su propósito principal es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias. Posteriormente se recolectaron los datos y se analizaron en un tiempo específico. En nuestro caso la investigación se desarrolló con estudiantes de un curso de Calculo II de CEUTEC – UNITEC la Ceiba.

Se recolecto información cualitativa por medio del muestreo no probabilístico bajo el método de muestreo intencional, el cual, para Hernández, et al (2008:328) el objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad. Los estudiantes se constituyeron en grupos de estudio aleatorio lo que significó que todos los grupos tenían el mismo número de alumnos, entre 4 y 5 integrantes de una muestra de 17 en total. Los grupos se formaron para la realización de trabajos en las sesiones de estudio y hojas de trabajo los que eran evaluados con nota, de acuerdo con la participación activa de los alumnos. No obstante, es relevante recalcar que la validación del contenido de los instrumentos de recolección de datos; no se evalúa cuantitativamente, para ello, se estima de manera subjetiva empleando el denominado Juicio de Expertos (Corral, 2009). De igual forma Hernández y Baptista (2010:204), define que "La validez de expertos se denomina al grado en que un instrumento de medición mide la variable en cuestión, de acuerdo con personas expertas en el tema.

Las sesiones de trabajo aplicadas fueron analizadas desde el primer nivel de análisis del Enfoque Ontosemiótico. Según (Godino, Batanero y Font, 2008) el EOS es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Para Mendoza (2016) un primer nivel de análisis didáctico atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas que realizan los estudiantes de manera individual o grupal, ya sean estas mediadas por sus conocimientos previos o por otra entidad externa que puede ser de carácter institucional, curricular, bibliográfica, u otra.

Resultados

El siguiente apartado alude al análisis de una de las actividades implementadas durante la investigación (sesiones de trabajo #1) mediante el análisis sistémico desde un primer nivel de análisis que nos proporciona EOS.

Sesión #1

La presente sesión de trabajo muestra una figura construida con el apoyo de geogebra. Está formada por una sucesión de cuadrados construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la fig. 4.1.

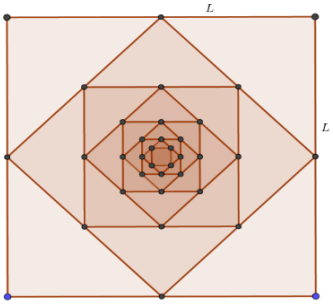


Figura 4.1. Cuadrados Inscritos

Análisis Ontosemiótico

A continuación, se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

Fase 1: Se responde a las preguntas

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados? ¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figural que muestra sucesión de cuadrados construidos, cada uno en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La actividad plantea que los cuadrados se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

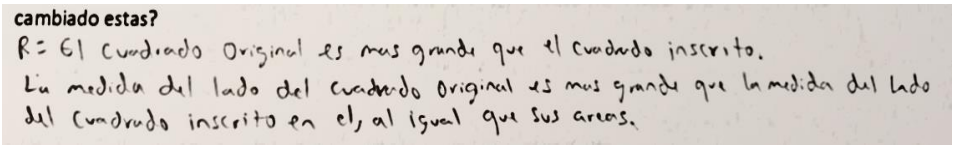
La situación problema trata de analizar si en el desenvolvimiento de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea. Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de GeoGebra, y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

Descripción de las notaciones

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.
Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

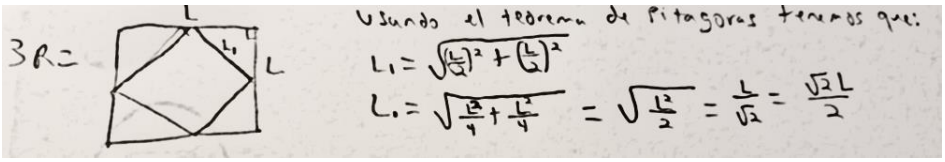
Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son característicos y representativos.

G3N1: “Observamos que es un cuadrado”.
G3N1: “Cada uno de sus lados tienen la misma magnitud, y es una figura geométrica”.
G3N1: “Pensamos que podríamos sacar magnitudes con el teorema de Pitágoras, pero no tenemos una diagonal”.
G1N1: “Toda la figura mide los mismo, es un cuadrado”.
G4N2: “El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente”. G1N2:


cambiado estas?
R= El cuadrado Original es mas grande que el cuadrado inscrito.
La medida del lado del cuadrado Original es mas grande que la medida del lado del cuadrado inscrito en el, al igual que sus areas.

Fuente: Elaboración propia

G1N2: "Se forma un cuadrado dentro de otro cuadrado".
G1N2: "Las medidas de la figura inscrita son la mitad de la primera figura".
G3N2: "Su área es menor respecto a la figura inicial. Mediante Pitágoras obtuvimos la magnitud del segundo cuadrado y para obtener su área elevamos su lado al cuadrado y la respuesta es un medio de L^2 ".
G1N2: "Su lado es menor que la primera figura".



Fuente: Elaboración propia

G1N2: " $A = area$ de la primer figura, $A_1 = area$ de la segunda figura

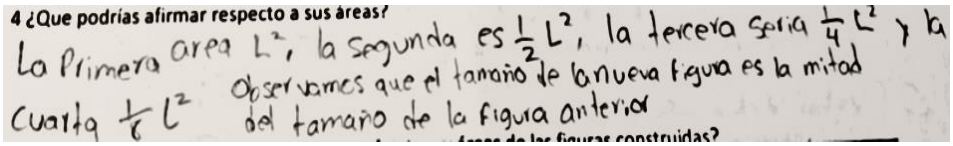
$A = L^2$, $A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}L\right)^2 = \frac{L^2}{2}$, su área es más pequeña que la primer figura".

G4N3: "Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad".
G4N3: "El valor de la longitud del lado de la tercera figura es de 1/2L el cual se obtuvo usando la fórmula de Pitágoras".
G4N3: "Con la observación de los datos anteriores se demuestra que el valor del perímetro ha ido cambiando; $P_1 = 4L$, $P_2 = 2\sqrt{2}L$, $P_3 = 2L$ ".
G2N3: "Si, por que se va reduciendo la medida de las figuras mediante se agrega una figura dentro de otra".
GIN3: "El tercer cuadrado inscrito es más pequeño que el segundo cuadrado inscrito, y el segundo es más pequeño que el primer cuadrado."
GIN3: "Se aprecian tres cuadrados uno dentro de otro".
GIN3: "El cuadrado original es más grande en su área y perímetro respecto a los cuadrados inscritos."
G3N3: "Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos".
G3N3: "Si, podemos precisar las magnitudes del 3 cuadrado conociendo las magnitudes del 2do, sabiendo que estas magnitudes se reducirán".

GIN3: "sea $P_2 = perimetro$ de la tercer figura entonces $P_2 = \frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{2}+\frac{L}{2} = 2L$, el perímetro si se ha modificado respecto a la segunda figura ya que es menor".
G4N4: "Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área".

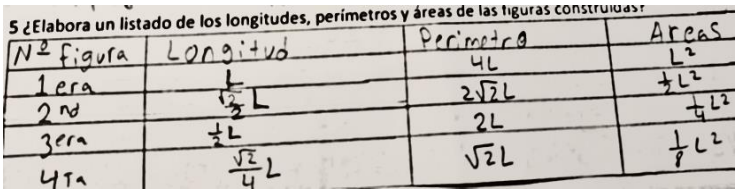
G4N4: "La longitud del lado de la primera seria L, la segunda es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ L, la tercera es $\frac{1}{2}$ L y la cuarta es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ L,… obtenemos un patrón $P=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$".

G4N4:



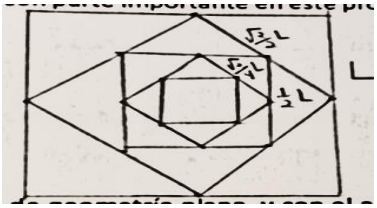
Fuente: Elaboración propia

G4N4: "La primera área L^2, la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior".
G4N4: "Entre más figuras aparecen más se reduce. En el perímetro podemos ver que hay relación entre la figura 1 y la figura 2 ya que es la mitad y cada relación entre la figura 3 y la cuarta ya que también se va reduciendo".
G1N4: "Si por que el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas."
G2N4: "Si se puede realizar por que existe una secuencia de patrones mediante una fórmula".
G2N4: "Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura".
G4N4:



Fuente: Elaboración propia

G3N4: "Si podría realizarse porque existe un patrón que mediante la fórmula tiende a infinito".
G3N4: "Sus áreas se van reduciendo a medida se van agregando más figuras".
G1N4: "El lado de cada cuadrado inscrito es más pequeño que el del cuadrado anterior, el perímetro de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior, y el área de cada cuadrado es la mitad del anterior".
G1N4:



Fuente: Elaboración propia

G1N4: “Por tanto sus áreas van decreciendo a medida de van inscribiendo más cuadrados”.

Fase 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo

- *Lenguaje previo:*

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Sucesión, cuadrados, polígono regular, longitud, medida, construcción, lado, series, puntos medios, áreas, figura inscrita, perímetro.

- *Lenguaje emergente:*

Términos y expresiones usadas para aludir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica: Cuadrado interno, fractal, pequeño, reduciendo, patrón, infinito, triángulos reducidos, teorema, insertando (dentro de otra figura), diagonal, figura geométrica, patrones, construcción (de n figuras inscritas), mitad, secuencia (de patrones mediante una fórmula), medida, datos, formula, profundidad, externo, decreciendo, indefinidamente.

Fase 4: Situaciones de problemas emergentes

Los estudiantes se circunscribieron a realizar lo solicitado en la consigna. En sus desarrollos no aparece un problema nuevo que ellos hayan creado.

Fase 5:

a) Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo.
El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente.
Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

Con la observación de los datos anteriores se demuestra que el valor del perímetro ha ido cambiando; $P_1 = 4L,\ \mathrm{P}_2 = 2\sqrt{2}L,\ \mathrm{P}_3 = 2L$.

Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área.
Se forma un cuadrado dentro de otro cuadrado.
Su lado es menor que la primera figura.

La longitud del lado de la primera seria L, la segunda es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ L, la tercera es $\frac{1}{2}$ L y la cuarta es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ L,… obtenemos un patrón $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$.

La primera área L^2 , la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior.

Entre más figuras aparecen más se reduce. En el perímetro podemos ver que hay relación entre la figura 1 y la figura 2 ya que es la mitad y cada relación entre la figura 3 y la cuarta ya que también se va reduciendo.

El lado de cada cuadrado inscrito es más pequeño que el del cuadrado anterior, el perímetro de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior, y el área de cada cuadrado es la mitad del anterior.

Si se puede realizar porque existe una secuencia de patrones mediante una fórmula.
Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura.

Su área es menor respecto a la figura inicial. Mediante Pitágoras obtuvimos la magnitud del segundo cuadrado y para obtener su área elevamos su lado al cuadrado y la respuesta es un medio de L^2.

Si por que el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas.

Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos.

Si podría realizarse porque existe un patrón que mediante la fórmula tiende a infinito.

b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo.
Visual-deductivo, referido por la observación de la figura propuesta y la deducción de las propiedades y características variacionales:
Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área. La primera área L^2, la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior. Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura (…), también se va formando más triángulos reducidos.

Los estudiantes utilizan argumentos geométricos: El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente. Entre más figuras aparecen más se reduce. (…) y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

También argumentan que la figura es un fractal por que el proceso de construcción de cuadrados inscritos es indefinidamente.

Algunos estudiantes hacen relación del registro algebraico con la representación geométrica cuando utilizan el cálculo de lados y áreas y al hacer cálculos vía Teorema de Pitágoras:
Argumentan que mediante el teorema de Pitágoras van obtenido la magnitud del lado de cada cuadrado que se va inscribiendo, y así calcular el área de cada cuadrado que se va formando en la construcción.

Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo

Previas:
En relación a los objetos matemáticos involucrados en el planteamiento de las sesiones de trabajo, tales como cuadrado, sucesión, construcción (de una figura), lado, perímetro, medida, longitud, áreas, figura inscrita, los estudiantes tienen una buena comprensión de ellos; y les permite abordar la sesión sin dificultades.

Emergentes:
Fractal:
Los estudiantes tienen concepciones vagas sobre este objeto. No obstante, la aprehensión viene de lo que explicitan como construcción indefinida (de las figuras presentadas en la sesión de trabajo y que tiene vínculo con la noción de construcción infinita), la cual proviene de objetos matemáticos producto de procesos infinitos, que son

producidos por construcciones formadas por sucesiones infinitas sin que quede clara la concepción que tienen del mismo.

La mayoría de estudiantes muestran que comprendieron los procedimientos de construcción ya que explicitaron que siempre existe un patrón de construcción de una nueva figura que indica que su magnitud (área) se reduce a la mitad con cada construcción. En el mismo orden de ideas los estudiantes atestiguan que la construcción de cuadrados es infinito.

Algunos grupos de estudiantes hicieron cálculos, encontraron un patrón en las longitudes de los cuadrados inscritos, G4N4 encuentra los primeros 4 términos de un patrón aritmético y logrando establecer una formula algebraica general acercándose a una relación funcional del lado, para cualquier cuadrado inscrito en términos de lado $n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$.

Los estudiantes utilizaron con cierta propiedad el empleo de geometría plana que involucra las propiedades de paralelogramos, haciendo uso de articulaciones entre el registro algebraico y el referente geométrico.

Los estudiantes usan como medio el software geogebra para realizar procesos de visualización, donde tal empleo visibiliza o complementa un acercamiento a una construcción geométrica.

Por tanto, las diferentes sesiones de trabajo aplicados fueron analizadas desde el primer nivel de análisis del Enfoque Ontosemiótico. En particular, los estudiantes destacan en sus producciones el uso del lenguaje y las correctas concepciones de los elementos previos que demuestran tener, sería una base importante para estimular el desarrollo del pensamiento variacional de manera formal.

Conclusiones

Las producciones estudiantiles mostraron que la herramienta de GeoGebra contribuye de manera positiva en el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior (análisis, síntesis, desarrollo lógico, visualización, entre otras), también en el fortalecimiento del pensamiento variacional en algunos casos y en otros al desarrollo de este pensamiento. No obstante, con las sesiones de trabajo implementadas, se adecuo un cimiento para estimular el desarrollo del pensamiento variacional. Es así que se evidencia que los educandos utilizan un lenguaje que involucra distintos conceptos en matemáticas tales como pequeño, disminuye, crece, decrece, cambia, varia y otros términos que indican evidencias de un pensamiento variacional inicial. Sus argumentos son de tipo visual y contienen ciertos elementos dinámicos, no obstante, entrando en una etapa de argumentación más formal, no se ve en su totalidad las concepciones dinámicas mostrada en la etapa de visualización. El uso del lenguaje y las correctas concepciones matemáticas que demuestran tener, son un aporte significativo para estimular el desarrollo del pensamiento variacional de manera formal el cual contribuye a la compresión y a la adquisición de un conocimiento significativo y reflexivo. Por tanto, es importante realizar actividades, sesiones de trabajo, uso de software en donde surja la mayor cantidad de recursos, ya que por medio de ellos la captación de un objeto matemático puede ser más significativa para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Cabezas, C. y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. Formación universitaria, 9(6), 13–26. https://doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vison of its evolution. Educational Studies in Mathematics. 53(3): 255 – 270.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon, No. 42, 353 – 369.

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Ponencia (mesa redonda): Confrontación de marcos teóricos. XVIII Jornadas del SI-IDM. Castellón, 2002. Obtenido el 18 de abril de 2007 desde http://www.ugr.es/~jgodino/ siidm/castellon_2002/contreras_vicen.doc.

Duval, R. (1999). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-78.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Publicaciones, 38, 25-48.

Gutiérrez R. (2009). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior*. (Tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México, D. F.

Hernández, S. R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P.(2010) *Metodología de la Investigación.* Perú: Mc Graw Hill.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and its Applications, Volume 7. Article ID: 1448.

Maury Mancilla, Erwin, Palmezano Sarmiento, Gregorio, & Cármaro Barrios, Sandro. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de Educación Básica Primaria. En: Escenarios, Vol. 10 No. 1, 7-16.

Mendoza, M. R. (2016). Pensamiento variacional emergente: una experiencia en cálculo inicial desde una primera categoría de análisis del enfoque ontosemiótico (Tesis). Universidad de los Lagos, Santiago, Chile.

Ruiz, M.; Ávila, P.; Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas (pp. 446-454). Medellín: Fondo Editorial ITM.

Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional, la modelacion y las nuevas tecnologías. Didáctica de las matemáticas*: Artículos selectos (págs. 134 - 148). Santa Fe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

EMPLEO DE LAS TECNOLOGÍAS PARA CONTRIBUIR AL DESARROLLO DE LA HABILIDAD MODELACIÓN DESDE LA ASIGNATURA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

USE OF TECHNOLOGIES TO CONTRIBUTE TO MODELING SKILLS DEVELOPMENT FROM THE SUBJECT *RESEARCH OF OPERATIONS*

Lester González López, Valentina Badía Albanés
Universidad de las Ciencias Informáticas, Universidad de La Habana. (Cuba)
lester@uci.cu, valia@matcom.uh.cu

Resumen
La sociedad del conocimiento demanda de nuevas formas para desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje, haciendo énfasis en la tecnología educativa. A partir de deficiencias identificadas en la habilidad de modelación en la asignatura de Investigación de Operaciones de la Universidad de Ciencias Informáticas, se propone el empleo de las tecnologías. En la propuesta se emplea un entorno virtual, un software de creación propia para la resolución de los modelos, varias herramientas para la creación de objetos de aprendizajes, y finalmente se hace una valoración de la propuesta a través de un pre-experimento y el test de satisfacción de Iadov.

Palabras clave: habilidad modelación, tecnología educativa, entorno virtual de aprendizaje

Abstract
Knowledge society demands for new ways to develop the teaching-learning process, emphasizing educational technology. From some inadequacies identified in modeling skill in the subject “Research of Operations” at Computer Science University, the use of technologies is proposed. This proposal involves the use of a virtual environment; an own creation software for the solution of models, and various tools to create learning objects. Finally, the proposal is assessed through a pre-experiment and “Yadov” satisfaction test.

Key words: modeling skill, educational technology, virtual learning environment

Introducción

La Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI), fue creada en el año XXI, para responder a los retos que el logro de la informatización de la sociedad cubana demandaba. Los graduados de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas (ICI) deben ser profesionales integrales capaces de contribuir al "desarrollo de la industria de software nacional, a las transformaciones de procesos en las entidades, para asumir su informatización y garantizar el soporte necesario para su mantenimiento" (Universidad de las Ciencias Informáticas, 2014).

Es por eso que los estudiantes deben incorporar durante la carrera un sistema de conocimientos y habilidades para que una vez egresados, puedan desempeñarse bien en su profesión. Una de las disciplinas que contribuye significativamente a esto es la Matemática Aplicada, que, según el modelo del profesional, tiene entre uno de sus objetivos: modelar matemáticamente la estructura de un problema y las relaciones de los datos para descubrir la información útil, llegar al conocimiento del problema y representar problemas de toma de decisión. En el Programa se declara que dentro de las habilidades a desarrollar está "modelar y aplicar métodos de solución a problemas de Sistemas de Servicio".

La asignatura Investigación de Operaciones (IO) forma parte de esta disciplina y tiene entre sus objetivos generales el de "formular modelos matemáticos asociados a problemas de Programación Lineal y Programación Discreta, y a problemas de redes". Luego la modelación matemática, entendida como la forma de describir o representar la interrelación entre el mundo real y las matemáticas, es una de las principales habilidades a dominar por los educandos para la solución de los problemas de la asignatura y de la vida real.

Problemática y contexto

El análisis de los informes semestrales de la asignatura Investigación de Operaciones de los últimos cinco años (cursos 2013 - 2014, 2014 - 2015, 2015 - 2016, 2016 – 2017 y 2017-2018), los resultados de las encuestas realizadas a profesores y estudiantes que han trabajado la asignatura, así como las percepciones de los autores de esta investigación permitieron identificar determinados problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje (PEA) de la IO en la UCI, entre los que se encuentran: limitaciones para poder traducir del lenguaje natural en que se describen los problemas, al lenguaje matemático; dificultades para identificar los diferentes elementos del modelo matemático; baja comprensión de los enunciados de los problemas, deficiencias en la selección de la información que puede ser relevante y necesaria para modelar el problema y limitaciones para verificar e interpretar los resultados obtenidos en el contexto del problema.

Las deficiencias encontradas permiten corroborar la existencia de una contradicción entre el insuficiente desarrollo de la habilidad modelación de problemas de los estudiantes y la necesidad del dominio de esta habilidad, para que estén preparados para solucionar los problemas reales de su actividad como futuro profesional.

Esta contradicción conlleva al problema científico: ¿Cómo contribuir al desarrollo de la habilidad modelación de problemas desde la asignatura Investigación de Operaciones en los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas?

Para dar respuesta al problema enunciado se realizó una investigación que se planteó como objetivo general: elaborar una estrategia didáctica que haciendo uso de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, contribuya al desarrollo de la habilidad modelación de problemas desde la asignatura Investigación de Operaciones en los estudiantes de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas. En el presente artículo no nos centraremos en la construcción y descripción de la estrategia didáctica, que puede encontrarse en Sánchez (2017) y González

(2018), sino en los elementos de la misma que están vinculados a la caracterización general y contextualización de la habilidad modelación, así como en las acciones que, desde el uso de las tecnologías, contribuyen a su desarrollo.

La actualidad de la investigación viene dada por la creciente demanda en la formación de profesionales que sean capaces de llevar los problemas de la realidad a un modelo, con el fin de aplicar métodos matemáticos para la búsqueda de soluciones.

Marco teórico

La investigación usa como marco teórico referencial los postulados del enfoque histórico cultural de Vigotsky y sus seguidores, pues se concibe al estudiante como protagonista del proceso de enseñanza aprendizaje, guiado por el maestro y bajo la influencia del entorno social en condiciones históricas concretas, lo que garantiza no solo la asimilación de los conocimientos por parte del individuo, sino su desarrollo y crecimiento como ente histórico y social. Se fundamenta en la necesidad de transformar el estilo de aprendizaje de los estudiantes en el contexto universitario actual, de desarrollar habilidades de manera progresiva con un uso intensivo de las tecnologías.

La modelación matemática está siendo fuertemente defendida, en el ámbito de la educación matemática, como método de enseñanza en diversos países y en todos los niveles educativos, debido a que permite no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones de otras ciencias y del mundo real.

La modelación permite enriquecer la comprensión de fenómenos *extramatemáticos*, pues proporciona diversas representaciones de dichos fenómenos y por otra parte, dota de sentido las diferentes actividades matemáticas.

Para Bassanezi (1994) el uso de la modelación en la enseñanza conduce al aprendizaje de contenidos matemáticos que están conectados a otras formas de conocimiento. El trabajo con la modelación matemática no intenta simplemente ampliar el conocimiento, sino desarrollar una forma particular de pensar y actuar: produciendo conocimiento, interconectando fenómenos, aunando abstracciones, procesos empíricos y formalizaciones, considerados como situaciones problemáticas.

Según Blomhøj (2004) las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir conceptos matemáticos. Así mismo, la modelación tiene como finalidad describir y analizar algún fenómeno de la vida real con el fin de motivar el trabajo con las matemáticas y experimentar la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria.

Gabardo (2006) afirma que la modelación en la enseñanza contribuye a transitar desde un enfoque de la matemática ya construida y acabada, cuyo funcionamiento se debe aprender por medio de la práctica de ejercicios, a una matemática que puede ser utilizada, identificada, reconstruida, o inclusive construida, cuando se quiere conocer, comprender y actuar sobre la realidad de la cual se forma parte.

Sadovsky (2005) por su parte propone que, desde un punto de vista didáctico, se debe pensar el trabajo de modelación en la clase como vía para que los alumnos tengan una experiencia de producción de conocimientos en el marco de cierto dominio matemático, experiencia que permita además enriquecer la conceptualización teórica en dicho dominio.

Otros argumentos a favor de la modelación matemática, como elemento central en la enseñanza general de la Matemática, son:

- Existencia de un nexo bien fuerte entre la experiencia de la vida diaria de los estudiantes y la Matemática, lo cual motiva al aprendizaje de la misma, contribuye al desarrollo cognitivo de las conceptualizaciones de los estudiantes y recrea la cultura matemática.
- Las competencias de establecer, analizar y criticar modelos matemáticos son de vital importancia para el desarrollo de sociedades altamente tecnológicas.
- La modelación contribuye a la formación de una actitud crítica, a la construcción de significados y conceptos matemáticos por los estudiantes a partir de la creación de raíces cognitivas sólidas, lo cual resulta motivador y relevante en el proceso de aprendizaje.

Metodología

La investigación desarrollada se acoge a un paradigma de investigación mixto, que combina el enfoque cuantitativo y el cualitativo. Es educativa, pues se caracteriza y se actúa sobre el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura. También es aplicada, pues se proponen y se ponen a disposición del claustro y los estudiantes, métodos y herramientas para la solución de dificultades existentes en el desarrollo de la habilidad modelación en el contexto de la asignatura IO.

Para el desarrollo de la investigación se emplearon métodos teóricos, como el análisis – síntesis, para analizar el objeto de la investigación y realizar una síntesis de aquello que constituya medular para la definición e implementación de la estrategia; el histórico-lógico, para analizar la evolución de las concepciones teóricas sobre la habilidad-modelación de problemas; el enfoque de sistema, la inducción-deducción, y la modelación.

Como métodos empíricos se utilizaron el análisis documental, la entrevista a profesores para constatar las características de los estudiantes en cuanto a sus habilidades para la modelación matemática, la encuesta, realizada a estudiantes y profesores, la prueba pedagógica, para determinar el nivel de desarrollo de la habilidad modelación de problemas en la asignatura IO; la observación pedagógica, enfocada a precisar las dificultades de los estudiantes durante las clases prácticas para desarrollar ejercicios de modelación de problemas de manera independiente; el pre-experimento, para constatar la validez de la estrategia didáctica presentada .

Además, se usó la estadística descriptiva, para mostrar los resultados obtenidos al aplicar los diferentes instrumentos. Como población se seleccionó a los 87 estudiantes del tercer año de la carrera ICI de la Facultad 2 de la UCI del curso 2017 – 2018, y como muestra los 19 estudiantes del grupo 2304. Esta muestra es no probabilística intencional, la cual fue seleccionada por ser el grupo al cual el investigador principal le impartió clases.

La habilidad modelación de problemas de Programación Lineal y sus indicadores

En la literatura se encuentran múltiples acepciones del término “modelación matemática”, que difieren en aspectos teóricos y epistemológicos. El punto de partida de la modelación debe ser una situación problemática real, la cual debe ser simplificada, idealizada, sujeta a condiciones y suposiciones que deben precisarse de acuerdo a los intereses del que resuelve el problema. Esto conduce a una formulación del modelo matemático que responda a la situación original, el cual debe ser resuelto a través de los métodos de solución para llegar a obtener ciertos resultados matemáticos. Estos deben ser validados, es decir, se deben volver a trasladar al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original. Cuando se valida el modelo pueden ocurrir discrepancias que conlleven a tener que cambiar o modificar el modelo. Si se consigue un modelo satisfactorio, el mismo serviría para la toma de decisiones. Ello significa que resulta importante la interpretación del modelo y las soluciones encontradas, para analizar si se ajusta o no a la situación original.

En la asignatura Investigación de Operaciones que se imparte en la UCI, la construcción de modelos de Programación Lineal constituye un eslabón fundamental del programa de la asignatura. La Programación Lineal (PL) utiliza un modelo matemático para describir el problema. En este contexto, un modelo es una representación simplificada de un sistema de la realidad. El adjetivo lineal significa que todas las funciones matemáticas del modelo (función objetivo y restricciones) deben ser funciones lineales. La PL involucra la planeación de actividades para obtener un resultado óptimo; esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada, entre todas las alternativas factibles.

En un problema de PL se encuentran:

Variables de decisión: son las incógnitas (o decisiones) que deben determinarse resolviendo el modelo.
Parámetros del modelo: son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y función objetivo. Pueden ser determinísticos o probabilísticos.
Restricciones del problema: conjunto de ecuaciones o inecuaciones que restringen los valores de las variables de decisión a aquellos considerados como factibles.
Función objetivo: define la medida de efectividad del sistema como una función. La solución óptima será aquella que produzca el mejor valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones. Es una función lineal a ser maximizada o minimizada.

El modelo de PL es entonces un modelo matemático que puede expresarse como el problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se optimice la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas.

Según la metodología utilizada en clases de IO, los pasos para la modelación de problemas de PL son (Hillier & Lieberman, 2010):

- Determinar las variables de decisión y expresarlas algebraicamente.
- Determinar las restricciones y expresarlas como ecuaciones o inecuaciones dependiendo de las variables de decisión.
- Expresar todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables.
- Determinar la función objetivo.

Luego la habilidad *modelación de problemas de PL*, será considerada como un sistema de habilidades, que según el programa analítico de la asignatura IO, son:

1. Interpretar los supuestos de la PL.
2. Reconocer las variables de decisión de un problema de PL.
3. Clasificar problemas de PL según el dominio de las variables de decisión.
4. Identificar los diferentes tipos de restricciones que se pueden presentar en un problema de PL.
5. Formular las restricciones de un problema de PL.
6. Determinar la función objetivo de un problema de PL.

Teniendo en cuenta lo anterior, en la etapa de planificación de la estrategia didáctica se realizó la operacionalización de la habilidad modelación de problemas de PL: se definieron los indicadores para medir el nivel de desarrollo de la habilidad alcanzada por cada estudiante con la estrategia didáctica y se determinaron las escalas para medirlos.

Los nueve indicadores pueden apreciarse en la tabla 1. Los mismos se agruparon en tres dimensiones fundamentales: preparación del modelo, formulación del modelo y comprobación del modelo.

Tabla 1. Indicadores para evaluar el nivel de desarrollo de la habilidad de modelación

Dimensiones	Indicadores	
Preparación del modelo	1.	Interpretar los supuestos de la Programación Lineal
	2.	Definir las variables de decisión del problema de PL
	3.	Establecer las dimensiones de cada variable de decisión
Formulación del modelo	4.	Identificar las restricciones del problema de PL
	5.	Expresar todas las condiciones implícitamente establecidas por la naturaleza de las variables
	6.	Expresar en lenguaje matemático las restricciones básicas del problema de PL
	7.	Expresar en lenguaje matemático restricciones con la introducción de variables binarias
	8.	Determinar la función objetivo del problema de PL
Comprobación del modelo	9.	Verificar si el modelo escrito corresponde con la situación práctica del problema

Las escalas utilizadas para medir cada indicador quedaron establecidas como sigue:

Bajo: el nivel de desarrollo del indicador es casi nulo, presentando errores graves en los ejercicios que impiden la solución al problema.
Medio: el nivel de desarrollo del indicador es aceptable, aunque persisten errores que, aunque menos graves impiden la correcta modelación del problema.
Alto: el nivel de desarrollo alcanzado es muy bueno, demostrando el estudiante que domina la habilidad específica para la solución del problema.

Tareas docentes para el PEA de IO con empleo de las TIC

Las tareas elaboradas tienen diferentes niveles de complejidad, lo que permite el tránsito de los estudiantes desde las más sencillas (informativas, pasivas, reproductivas y simples) hasta las más difíciles para comprender y cumplimentar (productivas, de desarrollo y análisis de los modelos).

A partir de identificar los recursos del entorno virtual (foro, video, láminas, evaluación y otros) que tienen mayor aceptación por parte de los estudiantes, además de que sean mejor dominados por ellos, se asocia cada tarea a los diferentes recursos.

La tecnología mayormente empleada fue el audiovisual. Cada problema fue dividido en partes según las diferentes situaciones a modelar, y para cada una se realizó un video de cómo el profesor ejecuta la modelación. Por último, se utilizó el entorno virtual de enseñanza aprendizaje (EVEA), como plataforma para colocar todos los recursos educativos abiertos (REA) de la asignatura. El entorno utilizado es Zera en su versión 2.0 que se encuentra instalado en la Universidad, y los estudiantes estás familiarizados con este ambiente de trabajo colaborativo en la red.

Además, se elaboró una colección de problemas de modelación para ser resueltos en el EVEA, teniendo en cuenta diferentes grados de complejidad, y que el contexto de los ejercicios tuviese relación con la problemática socioeconómica del país y los planes de desarrollo de la economía. Esta colección está incluida en González (2018),

la cual contiene problemáticas diferentes a las trabajadas en años anteriores, contextualizados a la situación nacional y de la profesión, son nuevos, y no aparecen en libros de textos. Otro aporte significativo es la creación del software *SimplexSoft* para facilitar la resolución de los modelos de programación lineal, así como el empleo de la herramienta *ScreenRecorder* para la creación de los audiovisuales.

Descripción de una secuencia de actividades con la utilización de las tecnologías para el desarrollo de la habilidad de modelación

En este epígrafe se describe una secuencia de actividades con el empleo de recursos educativos abiertos para que los estudiantes desarrollen la habilidad de modelación.
Primeramente, se abre un *foro de discusión* con el objetivo de motivar y estimular en los estudiantes el interés por el estudio de la modelación. Este permanece abierto hasta que las actividades no sean evaluadas y discutidas en clase con el profesor.

Después se ponen a disposición en el EVEA láminas y audiovisuales donde se explican diferentes situaciones de la vida real, las cuales pueden presentarse en un problema de modelación a realizar en clase. A estas situaciones las llamaremos *Casos de estudio*. En esta ocasión se subieron dos escenarios diferentes de modelación, los cuales responden a habilidades diferentes que el estudiante debe adquirir: varios valores en la parte derecha de las restricciones, y restricciones alternativas. Notar que, se les presenta el modelo con las restricciones elementales, pues resulta de interés en esta tarea que el estudiante avance en la comprensión y asimilación de otro tipo de situaciones, donde para modelar sea necesario la introducción de variables binarias.

En la Figura 1 se muestra un modelo, publicado en una lámina en el EVEA:

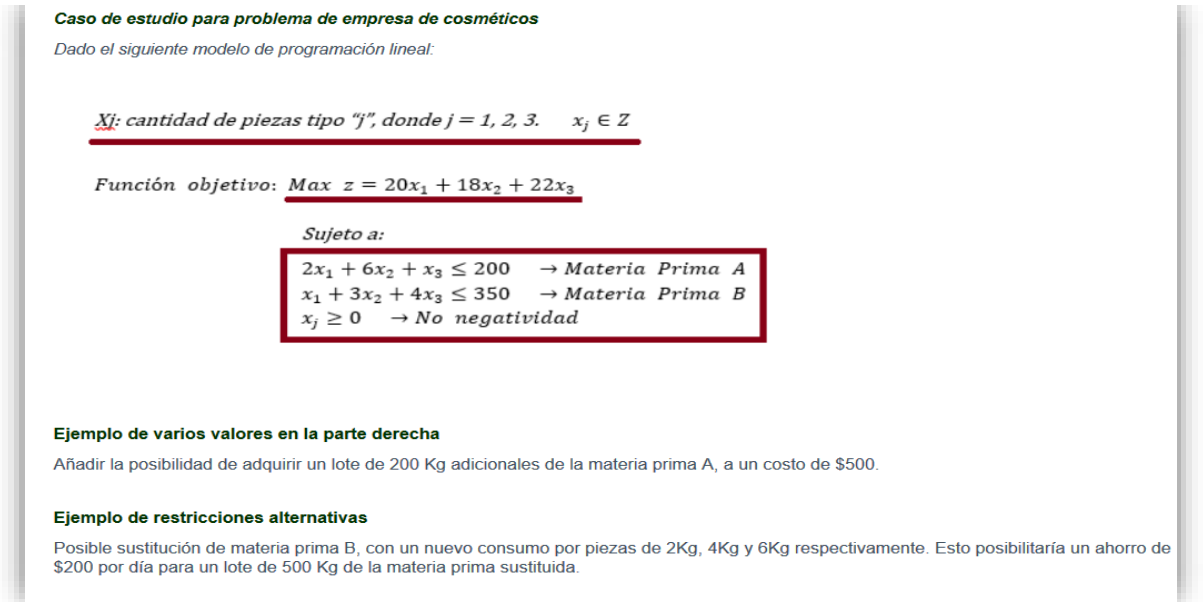


Figura 1. Caso de estudio para problema "Empresa de cosméticos"

Los nuevos escenarios de modelación del ejemplo son explicados por el profesor a través de un video, donde se muestra detalladamente cómo llegar a la solución. Estos videos son subidos también al EVEA.

En un tercer momento se orienta la *actividad* a realizar, consistente en el problema de modelación, la cual debe corresponderse con escenarios similares del ejemplo anterior, teniendo cada actividad un ejemplo que sirva de guía

y referencia para que de forma autodidacta el estudiante avance a la zona de desarrollo próximo e incorpore la habilidad. Para esto se utiliza el recurso educativo "Tarea" del EVEA (Figura 2), lo que permite que cada estudiante pueda subir la solución que dio a la modelación del ejercicio, en el tiempo establecido por el profesor, siendo el mismo ejercicio para todos, pues existen muchas maneras para la modelación, aunque en ocasiones pudiera diferenciarse ejercicios para subgrupos de estudiantes.

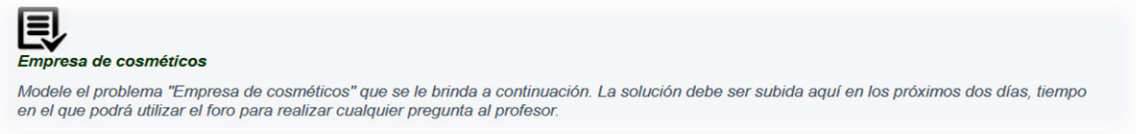


Figura 2. Orientación del problema con el REA "Tarea"

Un ejemplo de enunciado del problema es:
Una empresa productora de cosméticos desea abrir una nueva línea de producción de perfumes para hombres, los cuales se envasarían en frascos según su gama: baja, media y alta, y que se comercializarán a 5, 9 y 15 pesos, respectivamente. Para la elaboración de los perfumes se necesitan esencias, alcohol etílico (como disolvente), agua y envases de 100ml. El consumo de estas materias primas para cada frasco y para cada tipo de perfume, así como la disponibilidad de los recursos cada mes, se resumen en la siguiente tabla:

Materia Prima	Baja	Media	Alta	Disponibilidad (L)
Esencia	5	15	20	15
Alcohol	60	70	75	120
Agua	35	15	5	Ilimitada

Se tiene una disponibilidad suficiente de frascos para cumplir el plan de producción mensual. El perfume, una vez envasado, se debe dejar en reposo en sus respectivos envases por un tiempo determinado en refrigeración, según gama. Por esta razón en el mes se pueden producir 1650 de gama baja ó 1500 de gama media ó 1200 de gama alta o cualquier combinación factible. Debido a razones comerciales, se deben producir al menos 2000 frascos en total en dicho periodo.

a) Obtenga el modelo de programación lineal que permita representar la situación anterior, con el objetivo de obtener el máximo ingreso cada mes para la empresa.
b) A partir del modelo anterior, realice las transformaciones necesarias al mismo, teniendo en cuenta las situaciones siguientes:

i. Existe la posibilidad de adquirir 20 litros más de alcohol con un costo adicional de $350.00
ii. Por razones financieras se deberá adquirir la misma cantidad de otro tipo de esencia como materia prima, pero esto implica un cambio en los consumos unitarios de la misma en cada tipo de perfume. Ahora cada frasco de perfume de gama baja, media y alta requerirá 8ml, 12ml y 18ml de la nueva esencia, respectivamente.

Como se puede observar el inciso b) es el que corresponde con las diferentes situaciones de modelación donde se deben introducir variables binarias, pues el primer inciso ya debe ser de dominio de los estudiantes, pues fueron situaciones abordadas con anterioridad en otras tareas docentes desde la clase.

Durante el tiempo que tienen los estudiantes para cumplimentar la tarea, pueden utilizar bibliografía y otros materiales de los que dispone la plataforma. También pueden solicitar ayuda al profesor o a otros estudiantes a través del foro, donde se garantiza la atención diferenciada del profesor.

Cuando el tiempo se termina, una vez que los estudiantes suben la solución al EVEA, comienza la *evaluación de la Tarea:* el profesor revisa todas las respuestas, y publica en el EVEA otros audiovisuales con la solución del problema para que los mismos estudiantes puedan revisar lo que hicieron y proponerse una evaluación. También se orienta la revisión de cada tarea a otro estudiante, de manera que se pueda practicar la coevaluación. Finalmente, en el aula se realiza una *discusión grupal* conducida por el profesor que realiza un análisis del ejercicio, viendo diferentes variantes de modelación que pudieron emplear los estudiantes, escucha de cada estudiante su autoevaluación, la corrobora con el otro estudiante que le correspondió evaluarlo, y finalmente emite la calificación final, que tiene en cuenta lo anterior, además de la revisión hecha por el profesor. En algunas ocasiones también se realiza una pregunta escrita para constatar que el estudiante logró independencia a la hora de realizar la tarea. A los estudiantes con mayor dificultad se les orienta realizar otro ejercicio con similar escenario a modelar.

Análisis de resultados

A partir de las orientaciones ofrecidas por el profesor, los estudiantes fueron realizando las tareas en el EVEA de forma sistemática, durante la impartición de la asignatura. Al principio se observaron dificultades de los alumnos para cumplir con las tareas que les fueron orientadas, en lo fundamental por las insuficiencias que presentaban en aspectos relacionados con los contenidos matemáticos precedentes y en ocasiones por desconocimiento de cómo interactuar con la plataforma.

Se propició en todo momento un ambiente de discusión bueno ante determinadas situaciones en cuanto a los diferentes criterios de los estudiantes para la modelación de un mismo problema, así como la coevaluación y la autoevaluación. Para cada tarea, se empleó un tiempo en el análisis de la respuesta, además, con los audiovisuales los estudiantes comprobaban la solución de los problemas de modelación, y para brindar diferentes niveles de ayuda se utilizaba el foro. Incluso, cuando se necesitaba una atención más personalizada se concertaba una videoconferencia o consulta.

De manera general, se observó un cambio de actitud en los estudiantes frente a la modelación de problemas de programación lineal, sintiéndose más motivados por las actividades de la asignatura.

En todo momento primaron las reflexiones, partiendo de criterios cualitativos hasta llegar a lo cuantitativo, pero de manera que cada cual aceptara sus dificultades y las asumiera como un reto para vencerlas. Se propició el respeto por los criterios que emitían los demás estudiantes, lo que determinó la presencia de la crítica y la autocrítica.
Se tuvieron en cuenta las evaluaciones emitidas por otros estudiantes, y la autoevaluación de cada uno. También se realizaron evaluaciones frecuentes en clases, con el fin de medir el nivel de desarrollo que iban alcanzando los estudiantes. Se hizo una prueba parcial sobre el tema de modelación.

En la figura 3, se muestra una gráfica comparativa de los resultados alcanzados por los distintos grupos en la prueba parcial en la cual se evaluó la modelación de problemas de PL. Se aprecia que los resultados en el grupo del pre-experimento (2304) fueron muy superiores.

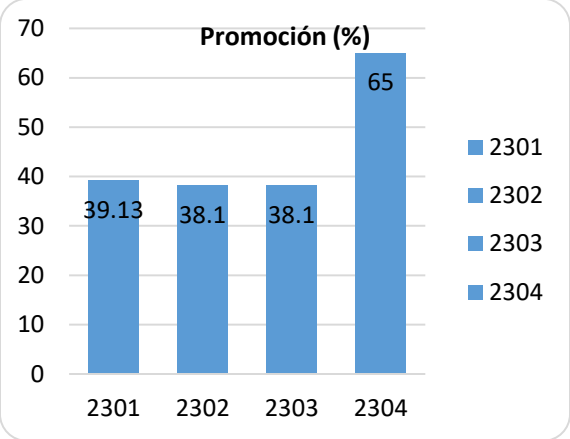


Figura 3: Comparación de los resultados de la prueba parcial entre los grupos docentes

En el examen final el desarrollo de la habilidad se pudo medir a través de la pregunta correspondiente al tema de la modelación de problemas de PL. Para la obtención de la información se compararon los resultados del grupo del pre-experimento (2304) con otro elegido al azar (2303). Fueron evaluados para cada estudiante de cada grupo, los indicadores que tributan a la habilidad modelación de problemas según la escala de alto, medio y bajo definida en la etapa de planificación de la estrategia. En la figura 4 la gráfica de barras brindada indica para cada grupo (siempre aparece en segundo lugar el grupo en que fue aplicada la estrategia) la proporción de estudiantes en grados porcentuales que son ubicados en las diferentes escalas para cada indicador. Puede apreciarse que en todos los indicadores hay más estudiantes que alcanzaron el nivel alto en el grupo del pre-experimento, con amplio margen porcentual, en la mayoría de los indicadores. Además, que el tercero, cuarto, séptimo y noveno fueron los indicadores en que se alcanzó comparativamente más desarrollo. Todos los elementos discutidos anteriormente tributan a que en el grupo 2304 se alcanzó un mayor desarrollo de la habilidad modelación de problemas de PL, lo que se justifica plenamente con la aplicación de la estrategia. Luego se concluye que la estrategia propuesta contribuye al desarrollo de la habilidad modelación de problemas de PL en estudiantes de ICI de la UCI.

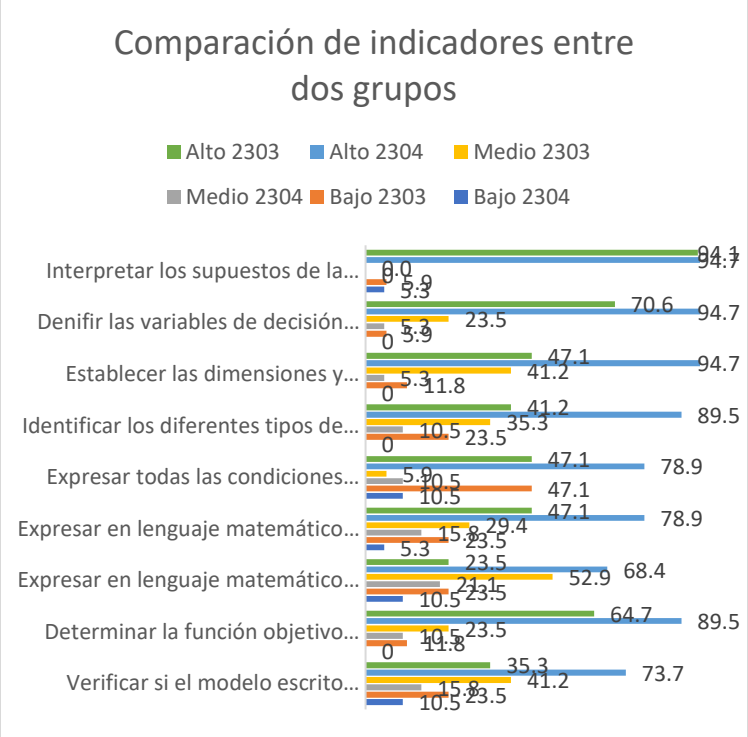


Figura 4. Comparación del nivel de desarrollo de la habilidad de modelación por cada indicador entre dos grupos (2304 y 2303).

Para saber el grado de satisfacción de los estudiantes del grupo donde se realizó el pre-experimento con la estrategia didáctica, se aplicó el test de satisfacción de Iadov.

El cuadro lógico de Iadov referente a los 19 encuestados mostró: 13 estudiantes con el máximo de satisfacción; 4 más satisfechos que insatisfechos, 2 no definidos, ningún estudiante más insatisfecho que satisfecho y ninguno con la máxima insatisfacción.
Teniendo en cuenta este resultado, se calcula el índice de satisfacción grupal que resultó ser de 0,789, lo que evidencia que existe una alta satisfacción.

En la encuesta aplicada para conocer la satisfacción había preguntas que aportaron consideraciones sobre el PEA de la asignatura IO, tales como: los estudiantes consideran el audiovisual como el recurso utilizado que más les motivó y ayudó en el desarrollo de habilidades para la modelación de problemas; corroboran que los ejercicios de modelación tenían relación con la práctica, y que su descripción precisa, así como la desagregación de los mismos de pequeña a alta complejidad, les ayudó a ejecutar un plan de solución.

Entre los principales elementos que justifican el gusto de los estudiantes por el empleo de las tecnologías en el aprendizaje están: se sienten motivados y atraídos, pueden estudiar en cualquier momento y desde cualquier lugar, tienen respuesta inmediata a sus inquietudes y dudas, logran mayor concentración y pueden escuchar la explicación del profesor tantas veces como lo necesiten.

En resumen, la validación de la estrategia didáctica mediante la técnica de Iadov, arrojó resultados que evidencian la factibilidad de su aplicación, expresado cuantitativamente en el alto índice de satisfacción grupal y cualitativamente en los criterios emitidos.

Conclusiones

Los referentes teóricos-metodológicos de la investigación, fundamentan la importancia del desarrollo de la habilidad modelación de problemas con el empleo de las tecnologías. De manera general se cumplió el objetivo del trabajo, pues con la concepción y aplicación de la estrategia didáctica haciendo uso de las tecnologías, se consiguió el desarrollo de la habilidad modelación, lo cual se demostró con el pre-experimento realizado y el test de satisfacción de Iadov. Durante la realización de la investigación se generó un conjunto de recursos educativos para la asignatura, como tareas y audiovisuales, así como un software de resolución de problemas de Programación Lineal para comprobar los modelos, los cuales quedan a disposición del claustro como recursos y medios de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. XVII, págs. 1-9. Mexico: CLAME.

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variacion en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. RELIME, Revista Oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C., VI(2), 133-154.

Cantoral, R., Molina, J., & Sánchez , M. (s.f.). Socioepistemología de la Predicción. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. 18, págs. 463-468. Mexico: Cinvestav IPN, Cicata IPN.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study. Journal for Research in Mathematics Education,, 33(5), 352-378.

Castiblanco, A., Urquina, H., & Acosta, E. (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia. Bogotá D.C., Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Ávila, J. (2005). Representaciones estudiantiles de la variación. Un estudio con bitácoras reflexivas. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa . México: Instituto Politécnico Nacional. Centro de Investigación en Ciencia. Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

Araújo, J. d. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educaçao matemática crítica. Revista de Educaçâo em Ciência e Tecnologia.

Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. Suecia: National Center for Mathematics Education.

Bassanezi. (1994). Modelling as a Teaching - Learning Strategy. For the Learning of Mathematics.

Berrío, M. d. (2011). Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. El caso del cultivo del café. Medellín.

Biembengut, M., & Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clase de matemáticas. V Festival Internacional de Matemática. Costa Rica.

Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners´s Modeling Behavior. Journal für Mathematik - Didaktik.

Bossio, J. L. (2014). Un proceso de modelación matemática desde una situación en el contexto del cultivo de plátano con estudiantes de grado décimo al generar modelos lineales. Medellín.

Díaz, L. (2005). Profundizacion en los entendimientos estudiantiles de variacion. RELIME, Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa., 8(002), 144-168.

Gabardo, L. (2006). Modelación matemática y ontología. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (págs. 317-323). México.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones (9na ed.). México: McGraw-Hill.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares Matemáticas. Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Santafé de Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moreno, L. (2009). Construccion de la nocion de variable asociada a la variacion mediante el uso de simulaciones para estudiantes de grado octavo. Tesis de Licenciatura en Educacion Matematica. Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Nájera , V. (2009). Construcción de significados de variación y variable en ambientes dinámicos y entornos físicos. Tesis para obtener el grado de Doctor en matemática educativa, informática educativa y ciencias de la cognición educativa. Mexico: Universidad Autonoma del Estdo de Morelos .

Posada, F., Gallo, G., Gutierrez, J., Jaramillo, C., Monsalve, O., Múnera, J., . . . Vanegas, M. (2006). Módulo 2. Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico. Colombia: Secretaría de Educación para la Cultura de Antioquia. Ministerio de Educacion Nacional. .

Rendon, P. (2009). Conceptualizacion de la razon de cambio en el marco de la Enseñanza para la Comprension. Tesis para obtener el titulo de Magister en Educacion. Medellin: Universidad de Antoquia.

Reséndiz, E. (2006). La variacion y las explicaciones didacticas de los profesores en situacion escolar. RELIME, Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa., 9(3), 435-458.

Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy: Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Serrano, C., García, G., & Salamanca, J. (2000). El estudio de la variación en la Educación Básica. XVII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística (págs. 1 - 24). Santafé de Bogotá: Universidad Pedagogica Nacional.

Torres, A. (2004). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. Tesis para obtener el grado de: Maestro en Ciencias. México: Instituto Politécnico Nacional.

Universidad de las Ciencias Informáticas. (2014). Modelo del profesional del Ingeniero en Ciencias Informáticas. La Habana.

Vasco, C. (2002). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Bogotá: República de Colombia, Ministerio de Educación Nacional.

EL AULA INVERTIDA Y LAS REGLAS DE DERIVACIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

THE FLIPPED CLASSROOM AND THE DERIVATION RULES: SOME CONSIDERATION FROM THE ONTO-SEMIOTIC APPROACH

Cristian Camilo Fúneme Mateus, Publio Suárez Sotomonte
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Colombia)
cristian.funeme@uptc.edu.co, psuarez2002@hotmail.com

Resumen
Se analiza la implementación del "Aula invertida" en tres clases de cálculo diferencial, en primer semestre universitario, abordando el concepto matemático derivada desde sus reglas básicas: derivación de una función constante, función potencia, derivada de suma, producto y cociente de funciones. El análisis se realiza a partir de grabaciones en video y audio de los episodios de clase, los cuales son transcritos y sistematizados a través de herramientas propias del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS), como la configuración de objetos primarios y el hexágono de idoneidad didáctica; además, se describen los aspectos positivos y negativos encontrados en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje desarrollados. Con lo anterior se reveló que la metodología de clase estudiada permite alcanzar un grado alto de idoneidad mediacional, interaccional y epistémica, mientras que en las facetas cognitiva, afectiva y ecológica se detectaron aspectos a mejorar.

Palabras clave: aula invertida, derivada, universidad, tecnologías

Abstract
This article analyzes the implementation of the "inverted classroom" in three sessions of differential calculus, in the first semester of the university. It tackles the mathematical concept derived from its basic rules: derivation of a constant function, power function, sum derivate, product and quotient of function. The analysis is carried out based on video and audio recordings of the class episodes, which are transcribed and systematized through tools of The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, such as the configuration of primary objects and the hexagon of didactic suitability. Besides, the positive and negative aspects found in relation to the developed teaching and learning processes are described. So, it revealed that the class-methodology studied allows reaching a high degree of mediation, interaction and epistemic suitability; meanwhile in the cognitive, affective and ecological facets, aspects to be improved were detected.

Key words: Inverted classroom, derived, university, technologies

Introducción

Pensar en nuevas estrategias para enseñar las matemáticas es una labor cada vez más necesaria para los docentes, más aún hoy en día cuando la sociedad se ha visto envuelta por avances tecnológicos que ponen a disposición de los estudiantes miles de fuentes de información de manera casi instantánea. Por lo cual la simple transmisión de información en el aula de clase puede generar desinterés en los estudiantes.

Entre las nuevas alternativas de enseñanza que se han propuesto en la comunidad educativa aparece el "Flipped Classroom" o "Aula invertida", la cual es una metodología de clase que busca delegar la trasmisión de información a sesiones de trabajo virtual. Esto con el fin de que el tiempo en el aula de clase sea destinado a trabajo que el profesor considere significativo para el estudiante, ya sea solucionar inquietudes, realizar actividades de construcción de conocimiento, trabajo colaborativo, etc.

Esta metodología ha sido implementada en diferentes áreas, como cursos en programas de educación (Monteagudo, Gómez y Miralles, 2017), informática, física, telecomunicaciones (Mestre, Fita, I., Fita, A. y Monserrat, 2015), matemáticas (Madrid, Armenta, Fernández, Olivares y Prieto, 2018), entre otras, las cuales exponen diferentes resultados positivos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, al ser una metodología tan general, se hace necesario indagar qué aspectos pueden potenciarse y cuales no con su implementación en áreas específicas, siendo la preocupación principal en esta investigación: describir lo que sucede con esta metodología en la enseñanza del cálculo a nivel universitario.

El análisis se hace desde la educación matemática, en particular desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemática (EOS), el cual presenta diversas herramientas para evaluar la idoneidad didáctica de procesos desarrollados en la clase de matemáticas, considerando diferentes facetas, como lo son la cognitiva, mediacional, epistémica, ecológica, interaccional y emocional. Este análisis permitió describir el proceso de aprendizaje de los estudiantes y presentar los aspectos positivos y negativos encontrados en la implementación del Aula invertida.

Marco teórico

Esta investigación sigue los fundamentos del Aula invertida y del constructo teórico del EOS. El Aula invertida (*AI*) o "Flipped Classroom" es un estrategia o metodología de clase que tiene sus origines en Estados Unidos, inspirada en propuestas como el Peer Instruction de (Mazur, 1997), el Just-in-Time Teaching (JiTT) (Novak, Patterson, Gavrin y Christian, 1999) y el Inverted Classroom (Lage, Platt y Treglia, 2000), estrategias que fueron tomadas por Bergmann y Sams (2012) para proponer el Aula invertida. Sobre los aspectos específicos del origen de esta metodología se pueden consultar trabajos detallados como el desarrollado por W. Martinez, J. Martinez y Esquivel (2014).

Aunque para el *AI* aún no hay un consenso sobre su definición, para Bergmann y Sams (2014) debe ser vista como:

> Un enfoque pedagógico en el que la instrucción directa mueve al estudiante desde un espacio de aprendizaje colectivo a un espacio de aprendizaje individual, y el espacio de aprendizaje colectivo resultante, se transforma en un ambiente de aprendizaje dinámico e interactivo, donde el docente guía a los estudiantes a medida que él aplica los conceptos y participa creativamente en el tema. (p.1)

Por su parte, Christensen, Hor y Staker (2013) sostienen que el *AI* encaja en los entornos mixtos, al ser una metodología en la cual el estudiante aprende a través de recursos en línea, controlando de manera significativa aspectos como el tiempo, lugar de estudio, dedicación o esfuerzo, pero también debe desarrollar parte de su proceso

de aprendizaje de manera presencial en el salón de clases, entrelazamiento que ha sido denominado como Blended learning.

Sus creadores agregan que es el *AI* es una estrategia que transfiere algunos procesos de aprendizaje fuera del aula mediante clases que el profesor graba previamente para que el estudiante las vea en casa, dejando el tiempo de clase para que el profesor pueda facilitar y potenciar otros aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes, convirtiéndose el profesor en un tutor que puede brindar apoyo más personalizado (Bergmann y Sams, 2012) y proponen además que esta estrategia se debe desarrollar en las etapas que se presentan en la figura 1.

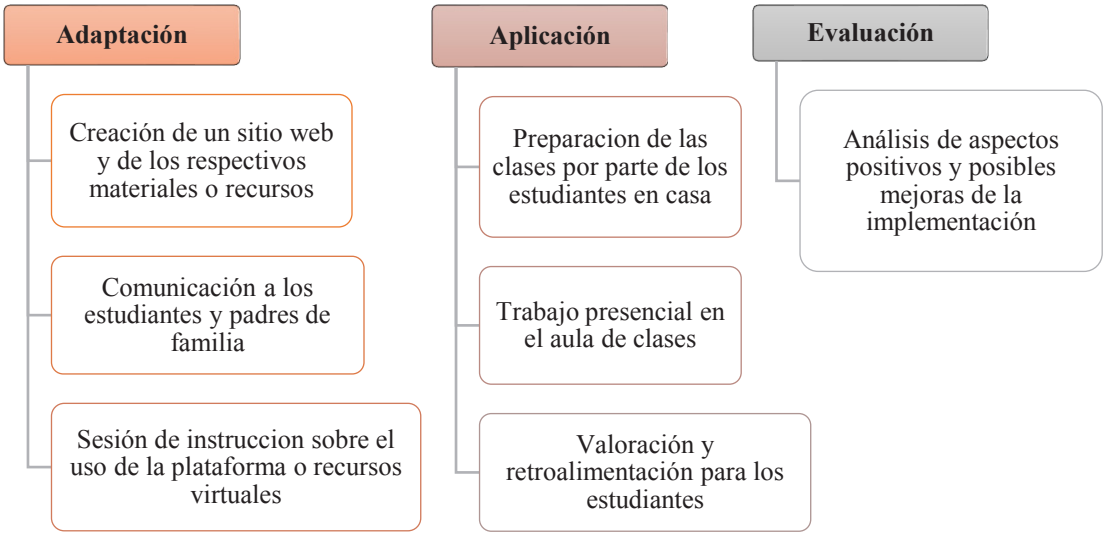


Figura 1. Etapas del Aula Invertida (Adaptado de Bergmann y Sams, 2012)

Por otra parte, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) es definido por sus creadores en su página web como "un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza" (EOS, 2019), planteando que la investigación de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se puede realizar a partir de una serie de conceptos fundamentales denominados entidades primarias: prácticas matemáticas, objetos matemáticos, procesos y funciones semióticas.

Las *practicas matemáticas* son consideradas como "toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas." (Godino y Batanero, 1994, p.8) siendo posible que sean desarrolladas por una o varias personas. En estas prácticas aparecen una serie de entidades que pueden ser tomadas de manera independiente, como por ejemplo las definiciones, propiedades, procedimientos, argumentaciones, etc. los cuales son denominados como *objetos matemáticos*.

Además, cuando se desarrolla una práctica matemática la persona pone en marcha una serie de procesos, de los cuales el EOS toma como fundamentales a los megaprocesos de la resolución de problemas, modelación, abstracción y comprensión, también a los procesos de carácter dual: generalización-particularización, institucionalización-personalización, representación-significación, descomposición-reificación, idealización-materialización y finalmente a los procesos asociados a los objetos matemáticos: comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización. Dentro de la teoría del EOS no se busca dar una definición de proceso debido a la amplia existencia de clases de procesos (Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2009);

sin embargo, una detallada descripción de cada uno de los procesos mencionados es expuesta por Font y Rubio (2017).

En cuanto a la *función semiótica* Godino (2017) plantea que "se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia" (p.6).

A partir de estos conceptos fundamentales el EOS propone que el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje se puede realizar en torno a seis facetas: Cognitiva, en donde se analiza si es razonable lo que se pretende enseñar y hasta qué punto se logra esto que se buscaba enseñar; ecológica, relacionada con la adaptación de lo propuesto al currículo; epistémica, en la cual se aborda que tan correcta es la matemática abordad; interaccional, que permite la exploración de la comunicación entre el docente, el estudiante y el conocimiento; emocional, como faceta que valora la implicación de los alumnos; y la faceta mediacional, para valorar los recursos y materiales implementados.

Estas facetas se pueden estudiar específicamente desde la *Configuración Ontosemiótica* (que permite analizar las dimensiones epistemológica y cognitiva desde las prácticas, objetos y procesos), la configuración didáctica (que aborda el problema del diseño instruccional), la dimensión normativa (normas que regulan el proceso de enseñanza y aprendizaje) y el análisis de la idoneidad didáctica (permite estudiar el grado de idoneidad alcanzado en un proceso de instrucción). Una descripción precisa de estos aspectos se puede encontrar en el trabajo de Godino (2017).

Para esta investigación se hace uso en particular de tres herramientas de análisis, la primera de ellas es la configuración de objetos primarios, en donde se organizan los objetos matemáticos que surgen en las prácticas matemáticas desarrolladas (Font y Godino, 2006, p.69); los indicadores de idoneidad didáctica (Godino, 2013), que permiten evaluar una a una las seis idoneidades a partir de componentes relacionados con cada una de ellas; el hexágono de idoneidad (Godino, Batanero y Font, 2007), cuyo objetivo es presentar de manera gráfica y sintética los resultados de la valoración de cada faceta; y la radiografía de clase, en donde se realiza una ubicación temporal del surgimiento de cada objeto matemático en las prácticas matemáticas (Badillo, Figueiras, Font y Martínez, 2013).

Metodología

Esta investigación es fundamentalmente de carácter cualitativo; ya que, se busca describir lo que ocurre en el aula de clase en una situación y condiciones específicas; sin embargo, conserva algunos elementos de aspecto cuantitativo al considerar la asignación de valores numéricos para establecer el grado alcanzado en los indicadores de idoneidad didáctica.

Las sesiones de clase son desarrolladas en el curso de cálculo diferencial de una universidad colombiana con un grupo de 25 estudiantes de primer semestre académico, con edades entre los 17 y 19 años al momento de la investigación, siendo ellos de diferentes programas académicos: ingeniería civil, ingeniería mecánica, ingeniería de sistemas y administración de empresas. La información y resultados se obtienen de la planeación y grabación en video y audio de tres sesiones de clase, cada una de 120 minutos, en las cuales se trabajan las reglas básicas de derivación: derivación de una función constante, función potencia, producto y cociente de funciones.

Para desarrollar los temas, y siguiendo el modelo de Aula invertida, se usó la plataforma de EDMODO (plataforma social educativa) para poner a disposición de los estudiantes videos de la temática, foros, actividades y hacer un seguimiento en tiempo real del trabajo y calificaciones de cada estudiante.

Los videos fueron realizados por el docente y publicados para los estudiantes antes de cada clase, dejando a disposición de ellos nueve videos de explicación y ejemplos del tema, doce videos con ejemplos adicionales y enlaces a videos y páginas con más información de otras fuentes, siendo estas verificadas previamente por el profesor. Cada video diseñado tiene una duración aproximada de cinco minutos y en ellos se presentan pausas para que los estudiantes resuelvan breves preguntas de lo que se va explicando en cada uno de ellos. Antes de cada clase los estudiantes debían observar por lo menos los tres videos de la explicación del tema correspondiente a cada clase.

Una vez en el aula, la sesión es grabada para luego ser transcrita y analizada con las herramientas del EOS, específicamente se revelaron todas las prácticas, los objetos y los procesos que surgieron en la clase y seguido a esto se organizaron en la configuración de objetos primarios. Posteriormente, se determinan los procesos que los estudiantes desarrollaron y se construyó la radiografía de clase. Con estos instrumentos, se procede a evaluar la idoneidad del proceso de instrucción a partir de los indicadores de idoneidad del EOS, los cuales otorgan una valoración que se presenta de manera sintetizada en el hexágono de idoneidad. Este proceso se realizó con cada una de las tres sesiones de clase desarrolladas.

A modo de ejemplo de lo realizado, se describen las construcciones resultantes de la primera sesión de clase. Para la configuración de objetos primarios (Figura 2) se observó la grabación en video de la sesión de clase, seleccionando un grupo de trabajo de 3 estudiantes y transcribiendo su conversación, además de tomar los registros escritos que entregaron al profesor.

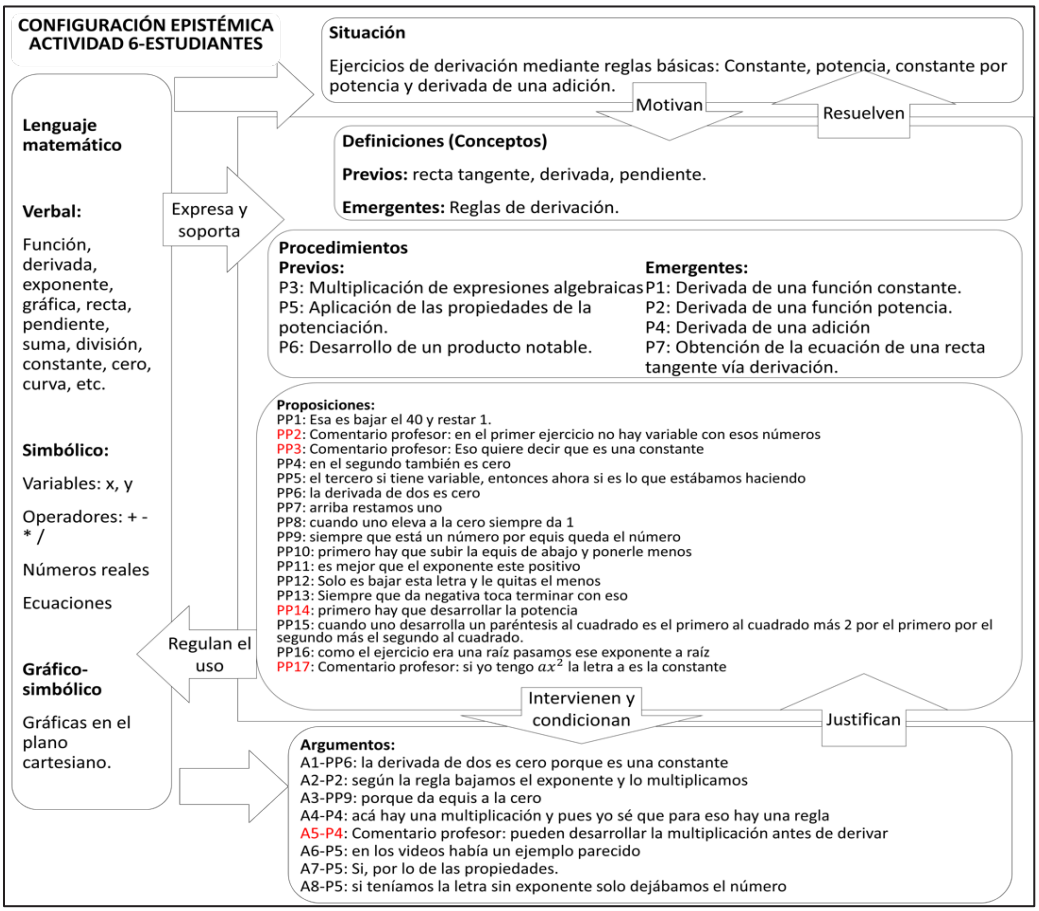


Figura 2. Configuración de objetos primarios (Adaptado de Font y Godino, 2006)

De la observación se encontró que los estudiantes hicieron uso de 13 proposiciones y 7 argumentos en el desarrollo de su diálogo, los cuales buscaban justificar 4 procedimientos emergentes en su práctica matemática: derivación de una función constante, de una potencia, de la suma de funciones y la determinación de la ecuación de una recta tangente. En este dialogo los estudiantes recurrieron en dos ocasiones al apoyo del profesor, esto se hace evidente en dos proposiciones y un argumento utilizados por el docente (resaltadas en color rojo), las cuales hacen explicita la dificultad inicial de los estudiantes en el reconocer variables y constantes en las expresiones algebraicas que se proponían para derivar.

La argumentación desarrollada es basada en ejemplificaciones (argumentos 1, 2, 3, 6, 7 y 8) y un contraejemplo dado en el argumento 4. El argumento 5 aunque fue utilizado por el profesor para evidenciar un error en el desarrollo de algunas derivadas, el cual está relacionado con el manejo inadecuado del conocimiento previo: multiplicación de expresiones algebraicas, pues lo estudiantes no distribuían de forma correcta los términos, en específico, expresiones como $f(x) = (x + 1)(x - 2) = x^2 - 2$, evidenciaban la falta de manejo de ese procedimiento. Este argumento permitió al grupo de estudiantes una posterior evaluación y reconsideración de otros ejercicios en los que no se daban uso adecuado a las propiedades de la potenciación en la multiplicación de expresiones algebraicas, el cual era otro procedimiento previo (P6) considerado, por ejemplo, expresaban la función $f(x) = (x + 1)^2$ como $f(x) = x^2 + 1$, lo cual llevaba a un resultado equivocado en la derivación.

Por otra parte, en la radiografía de clase (Figura 3) se determina que mientras los estudiantes desarrollan sus prácticas matemáticas, ponen en marcha 6 procesos matemáticos: problematización, comunicación, enunciación, argumentación, algoritmación y generalización.

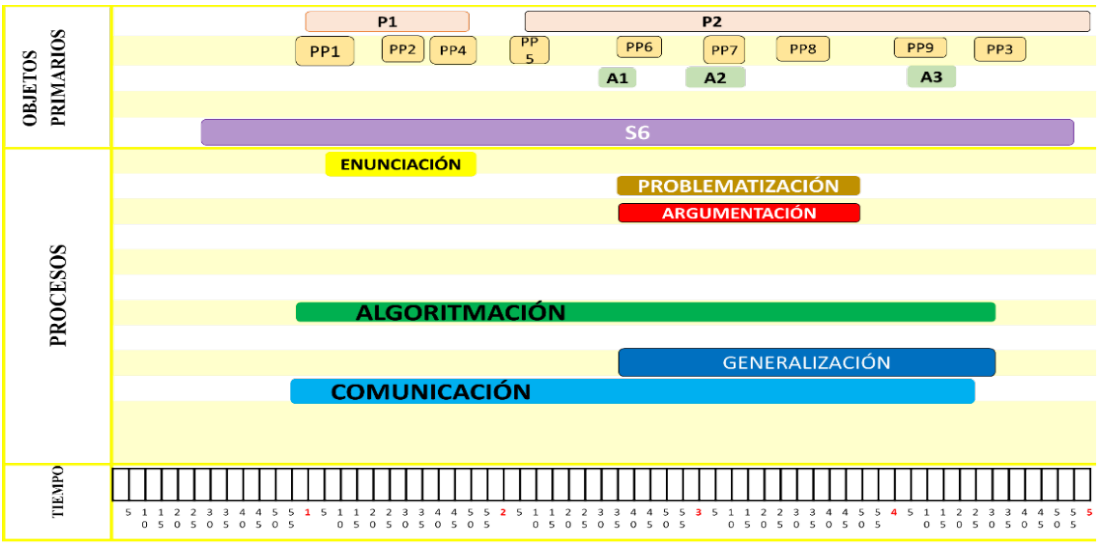


Figura 3. Fragmento de radiografía de clase (Elaboración propia)

El desarrollo de la actividad tomó aproximadamente 35 minutos, tiempo en donde el gran protagonista es el proceso de algoritmación, alrededor del cual surgen algunas proposiciones y los 5 procedimientos de derivación ya mencionados. En esta actividad no aparecen muchos puntos críticos. Sin embargo, en los minutos 3 y 9 se genera una problematización de los resultados, debido a que lo obtenido por los estudiantes no coincide con las respuestas otorgadas por el profesor, generándose un análisis de los procedimientos implementados y un replanteamiento de las ideas.

A partir de esta descripción de objetos y procesos se procede a la evaluación de las 6 facetas propuestas por el EOS desde los indicadores de idoneidad (Godino, 2013). Para este proceso de evaluación se analizan cada uno de los

indicadores, estableciendo si están presentes en la sesión de clase en un nivel nulo (0), bajo (1), medio (2), alto (3) o totalmente idóneo (4). Al realizar este proceso se encuentra que la idoneidad epistémica obtuvo una valoración alta, al promoverse en la actividad de manera correcta el uso del lenguaje, reglas y argumentos, así como la generación de problematización que permitió relacionar los objetos matemáticos.

En cuanto a las idoneidades interaccional y mediacional, también alcanzaron un grado alto de idoneidad al ser una actividad que cedió espacio de forma equitativa para el trabajo autónomo y para la comunicación con el docente, desarrollando además un correcto uso de espacio, tiempo y materiales.

Por otra parte, las facetas cognitiva, afectiva y ecológica solo lograron un grado de idoneidad medio. En la faceta cognitiva se encontró que varios estudiantes no contaban con los conocimientos previos necesarios y, además, la evaluación de la actividad no contemplo diferentes tipos de nivel de evaluación de competencias, lo cual se vio reflejado en insuficientes elementos para analizar la comprensión situacional de los estudiantes.

La evaluación de la faceta afectiva arrojó como resultado que las actividades propuestas, en particular en esta sesión, no capto el interés de los estudiantes, siendo esto asociado a que los ejercicios no reflejan las cualidades de estética y precisión de la matemática, lo anterior va en contravía de disminuir el rechazo o fobia a la matemática; sin embargo, se promovió la participación, perseverancia, responsabilidad e igualdad.

Finalmente, en la faceta ecológica, aunque se trabajaron de manera correcta aspectos como la integración de nuevas tecnologías y el aporte a la formación socio-profesional, se encontraron falencias en la promoción del pensamiento crítico, la innovación basada en la investigación y la relación con contenidos intra o interdisciplinares. Esta evaluación se puede ver organizada en el hexágono de idoneidad (Figura 4).

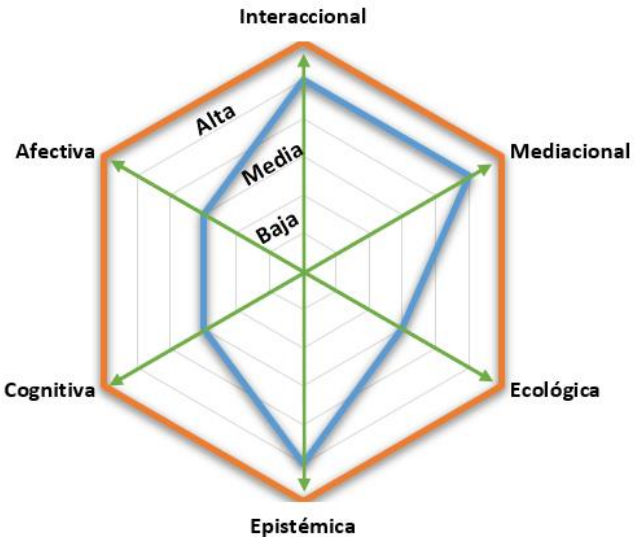


Figura 4. Hexágono de Idoneidad didáctica de sesión de clase de reglas de derivación (Adaptado de Godino, Batanero y Font, 2007)

Resultados

Al analizar las tres sesiones de clase en un conjunto se encontró que los estudiantes utilizaron 67 proposiciones y 38 argumentos en el desarrollo de sus diálogos, justificando 16 procedimientos emergentes en su práctica matemática, asociados a las reglas de derivación y la solución de problemas de aplicación de razones cambio, la

argumentación desarrollada se basó en ejemplificaciones, contraejemplos, generalizaciones y deducciones. De estas proposiciones 14 resultaron erradas y 12 argumentos fueron dados de manera inadecuada, en este aspecto resulta especialmente significativa la dinámica que ofrece el aula invertida, pues el docente tiene el tiempo y el espacio para prestar atención al surgimiento de estos errores y de esta forma puede intervenir, dinamizar o cuestionar lo que ocurre de forma que los estudiantes puedan identificar y superar las equivocaciones.

Por otra parte, de las radiografías de clase se determinó que la actividad propició la puesta en marcha de ocho procesos matemáticos: problematización, comunicación, enunciación, argumentación, descomposición, institucionalización, algoritmación y generalización, siendo la algoritmación la mayor trabajada y la problematización la principal promotora de puntos críticos en el desarrollo de las practicas matemáticas.

De la evaluación de los indicadores de idoneidad didáctica del EOS se encontró que la idoneidad epistémica, mediacional e interaccional alcanzaron un grado alto de idoneidad, esto se puede asociar a dos factores primordiales, las ventajas que ofrece el AI en cuanto a la incorporación de nuevas tecnologías, materiales diseñados y revisados minuciosamente para garantizar el uso correcto del contenido que se pretende enseñar y los espacios de comunicación en el aula a partir de situaciones de aprendizaje significativas.

Las facetas cognitiva, afectiva y ecológica solo lograron un grado de idoneidad medio. En la faceta cognitiva se encontraron dificultades en el acoplamiento de conocimientos previos, en la faceta afectiva se reflejó una falta de interés de los estudiantes por algunas actividades y en la faceta ecológica se determinó que la promoción de habilidades propias de la investigación no se trabajó adecuadamente. Todo esto indica que ocurrió una falla en la planeación de las actividades para la fase de trabajo en el aula, pues el AI requiere el diseño de actividades que capten la atención de los estudiantes para generar un aprendizaje significativo y además deben despertar la necesidad de indagar e ir más allá del conocimiento presentado por el profesor.

A partir de lo anterior se determina que la implementación del aula invertida resultó con un grado de idoneidad medio, evaluación que no logró ser superior al encontrar falencias en la planeación de las clases, en específico el desconocimiento de los intereses de los sujetos a quienes se dirigían, y en los conocimientos previos de los estudiantes, especialmente el manejo de operaciones entre expresiones algebraicas como la multiplicación y el desarrollo de productos notables.

De la metodología se encontró como indicadores altos la promoción del trabajo autónomo, la gestión del desarrollo de diversos procesos matemáticos, en especial la comunicación y argumentación, que posee una gran adaptabilidad curricular y que da espacio para una mayor interacción entre estudiantes y docente. Por aspectos a mejorar se determinó que se tiende a generalizar los intereses y las necesidades de los estudiantes, por lo cual se puede perder el interés de algunos de ellos; ahora, si bien es de gran dificultad establecer una estrategia en que esto no ocurra, lo que se pretende con esta afirmación es mostrar que el AI no escapa de esta dificultad que en general atañe a la educación en la actualidad.

Además, se considera que con la implementación del AI en la sesión de clase se deja a un lado el hecho de que el aprendizaje de cada persona se logra de forma diferente, por ejemplo, aquellos estudiantes cuyo aprendizaje es poco visual encontraron mayor dificultad en esta metodología. Esto sugiere, que para obtener mejores resultados con el AI se deben vincular actividades que permitan a cada estudiante utilizar en su proceso de aprendizaje aquellas habilidades que posee, tal es el caso de alternativas como el aprendizaje basado en problemas o la gestión del manejo de diversas representaciones semióticas para abordar de manera más completa los objetos matemáticos que se buscan enseñar.

Conclusiones

La implementación del aula invertida permitió desarrollar los contenidos temáticos pretendidos en los tiempos y espacios curriculares previstos, respondiendo de esta forma a las exigencias básicas institucionales en el desarrollo de las clases, dando además un manejo más significativo del tiempo de trabajo en el aula.

De la evaluación de idoneidad didáctica se determinó que la metodología guarda un grado de idoneidad medio, el cual puede ser superado al intervenir en aspectos específicos como un trabajo continuo sobre el correcto manejo de las fuentes de información, el trabajo inter-disciplinario, incluir a los estudiantes en la planeación del curso y una mayor vinculación de las familias en el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Este último aspecto se destaca debido a que algunos estudiantes manifestaban no contar con un entorno adecuado en sus hogares para el estudio previo de las temáticas, lo cual es un requerimiento esencial en el AI.

De la metodología se destaca que la vinculación de videos y el internet atrae a los estudiantes, quienes ven en el profesor alguien moderno que se adapta a sus necesidades y cotidianidad; esto resulta especialmente útil para contrarrestar la apatía hacia las clases de matemáticas y el distanciamiento entre profesor y estudiante.

Finalmente, se considera por parte de los investigadores que la implementación de esta metodología en la clase de matemáticas resulta valiosa si es considera como una alternativa y no como un todo, esto teniendo en cuenta que la educación, como la sociedad en general, es dinámica y por tanto los retos y dificultades son diversos y requieren de una gran variedad de alternativas para abordarlas.

Referencias bibliográficas

Badillo, E., Figueiras, L., Font, V. y Martínez, M. (2013). Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 207-225.

Bergmann, J. y Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach every student in every class every day*. United States of America: International Society for Technology in Education.

Bergmann, J. y Sams, A. (2014). *What Is Flipped Learning? Flipped Learning Network (FLN)*. Disponible en: https://flippedlearning.org/wp-content/uploads/2016/07/FLIP_handout_FNL_Web.pdf

Christensen, C., Horn, M., y Staker, H. (2013). *Is K-12 blended learning disruptive: An introduction of the theory of hybrids*. Disponible en: http://www.christenseninstitute.org/wp-content/uploads/2013/05/Is-K-12-Blended-Learning-Disruptive.pdf

EOS. (2019). Enfoque Ontosermiótico del conocimiento y la instrucción Matemáticos. Granada, España. Recuperado de: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matematica Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 8*(11), 111-132.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. Gea, B. Giacomone y M. López (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-20). Disponible en: enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Lage, M., Platt, G., y Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education*, *31*(1), 30-43.

Madrid, E., Armenta, J., Fernández, M., Olivares, K. y Prieto, M. (2018). Implementación de aula invertida en un curso propedéutico de habilidad matemática en bachillerato. *Apertura, 10(1),* 24-39.

Martinez, W., Martinez, J. y Esquivel, I. (2014). Aula Invertida o Modelo Invertido de Aprendizaje: origen, sustento e implicaciones. En I. Esquivel (Ed.), *Los Modelos Tecno-Educativos, revolucionando el aprendizaje del siglo XXI* (pp. 143-160). Mexico: DSAE-Universidad Veracruzana.

Mazur, E. (1997). *Peer Instruction. A User's manual*. New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall, Inc.

Mestre, E., Fita, I., Fita, A. y Monserrat, G. (2015). Aula Inversa en estudios tecnológicos.
En A. Fidalgo, M. Sein-Echaluce y F. García (Eds.), *La sociedad del aprendizaje. Actas del III Congreso internacional sobre aprendizaje, innovación y competitividad* (pp. 329-334). Madrid: Fundación general de la Universidad Politécnica de Madrid.

Monteagudo, J., Gómez, C. y Miralles, P. (2017). Evaluación de diseño e implementación de la metodología Flipped-classroom en la formación del profesor de ciencias sociales. *Revista de educación a distancia, 19(55),* 2-26.

Novak, G, Patterson, E., Gavrin, A., y Christian, W. (1999). *Just-In-Time Teaching: Blending Active Learning with Web Technology*. Upper Saddle River, New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall, Inc.

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA VARIACIÓN DE MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

CONSTRUCTING THE FUNCTION CONCEPT FROM THE VARIATION OF GEOMETRIC MAGNITUDES

María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora. (México)
tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen
Se discuten los resultados de una experiencia de clase con estudiantes universitarios, en la cual se implementó un diseño preliminar de actividades didácticas para el estudio de la función. El diseño y el análisis de los datos obtenidos se fundamentan en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). El propósito del diseño fue dar una introducción a la función desde un punto de vista dinámico, en un medio geométrico de variación creado con GeoGebra, pues en los cursos de cálculo se tiende presentar la función de manera estática a través de representaciones algebraicas y gráficas, pero sin estudiar realmente cómo las variables varían de manera conjunta. Los resultados obtenidos muestran la riqueza de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes en las actividades didácticas, así como la potencialidad de las herramientas del EOS para describir el proceso de instrucción realizado.

Palabras clave: función, GeoGebra, variación, magnitudes geométricas

Abstract
This paper presents the results of a class experience with university students, where a preliminary design of didactic activities for studying the concept of function was implemented. The design and analysis of the data obtained are based on the Onto-semiotic Approach. The design was aimed at introducing the function from a dynamic viewpoint, in a geometric environment of variation created with GeoGebra; since in calculus courses, the function tends to be presented statically through algebraic and graphic representations, but without really studying how the variables vary together. The results obtained show the richness of the mathematical practices carried out by the students in the didactic activities, as well as the potential of the Onto-semiotic Approach to describe the instructional process carried out.

Key words: function, GeoGebra, variation, geometric magnitudes

Introducción

El cálculo es considerado una disciplina central y fundamental en la educación universitaria. En México, su estudio se realiza en los primeros semestres de carreras de áreas diversas, desde ciencias exactas e ingeniería hasta las ciencias biológicas y económico-administrativas. Sin embargo, los cursos de cálculo no solo sobresalen por su importancia en la educación superior, sino también por la compleja problemática que tiene lugar en torno a su enseñanza y aprendizaje; problemática que ha sido y sigue siendo ampliamente estudiada, siendo el tema central de revistas como *El cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática* del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional; de grupos de discusión en eventos internacionales como el Grupo 16 Sobre Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo en ICME-13 (Bressoud, Martínez-Luaces, Ghedamsi y Törner, 2017); y diversos trabajos de investigación que cuestionan la forma actual como se concibe el cálculo en la enseñanza y en la investigación educativa (Ímaz y Moreno, 2010; Moreno-Armella, 2014; Thompson y Carlson, 2017) o que documentan dificultades de los estudiantes en los curso de cálculo (Artigue, 1998; Kouropatov y Dreyfus, 2014; Robles, del Castillo y Font, 2012), por mencionar algunos.

Los trabajos de Ímaz y Moreno (2010) y Moreno-Armella (2014) sostienen que la enseñanza del cálculo está fuertemente influenciada por la estructura lógica y formal del análisis matemático, lo cual puede percibirse en la manera como los contenidos de los cursos de cálculo se organizan en torno a los conceptos estáticos y aritmetizados de función y límite. Es usual que los cursos de cálculo diferencial inicien con el estudio de los números reales y sus propiedades para introducir la función como "regla de correspondencia" entre conjuntos de números reales, la cual se expresa algebraicamente y luego se ilustra gráficamente como conjunto de puntos en el plano cartesiano que obedecen la fórmula algebraica dada. Posteriormente, se estudian los diferentes tipos de funciones y sus gráficas. Se continúa con el estudio y definición del límite de una función y de función continua. Después, se define a la derivada como un límite y se presentan las reglas de derivación. Finalmente, se arriba al estudio de los problemas de optimización. Esta organización del cálculo para su enseñanza esconde la esencia de las nociones básicas del cálculo ligada a los procesos de variación y deja a un lado el estudio de los procesos de modelación de los fenómenos de variación que están involucrados en estos problemas. Ante esta situación, los estudiantes que finalizan sus cursos de cálculo pueden aplicar algoritmos con base en la manipulación de expresiones algebraicas, pero no desarrollan un significado de los objetos matemáticos estudiados que puedan poner en uso al resolver problemas no rutinarios.

Si se analiza con detenimiento la manera típica como se define la noción de *función* en los textos de cálculo, se puede concluir que su estudio en estos textos es estático, no variacional. Por ejemplo, en el libro El Cálculo (Leithold, 1998) se define a la función como:

> Un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de contradominio de la función. (pp. 3-4)

En esta definición, los símbolos x y y no se refieren a magnitudes que están en un proceso de cambio o variación, sino a los representantes de dos conjuntos de números o valores, interpretación que se refuerza con la explicación "intuitiva" y la ilustración que el Leithold plasma en aras de facilitar la comprensión del concepto función:

> El número real y del conjunto Y es una *función* del número x del conjunto X, si existe una regla mediante la cual se asocia un solo valor de y a un valor de x. Esta regla se expresa frecuentemente por medio de una ecuación. Por ejemplo, la ecuación $y = x^2$. (Leithold, 1998, p.2)

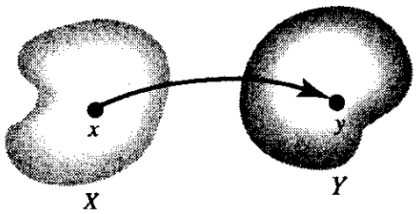


Figura 1. Ilustración de la correspondencia entre los conjuntos X y Y (Leithold, 1998, p.2).

La definición de función y la interpretación intuitiva de ésta que propone Leithold (1998) enfatizan la correspondencia (estática) de un valor de x con un valor de y; pero no el hecho de que la variable x varía, así como también lo hace la variable y, ni tampoco resaltan que su variación sucede de manera conjunta.

Ante esta problemática, se propone en este trabajo un tratamiento introductorio para la función, que pretende apoyar el desarrollo de un significado de este objeto matemático vinculado a la variación. Como punto de partida para el estudio de la función se eligieron fenómenos de variación donde las magnitudes que varían son magnitudes geométricas, considerando que las nociones de perímetro, área y longitud son familiares para los estudiantes por ser temas presentes en el currículo de matemáticas desde la educación básica. El tratamiento introductorio que proponemos para la función está materializado en un diseño que se encuentra en fase preliminar, el cual consiste de actividades didácticas fundamentadas en la teoría de significados y de configuraciones de objetos primarios del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Las actividades se desarrollan con la mediación de GeoGebra y parten de la manipulación de construcciones dinámicas. Se pretende que el estudiante desarrolle sistemas de prácticas matemáticas ligadas a la variación de magnitudes geométricas presentes en fenómenos geométricos dinámicos, las cuales contribuyan al desarrollo de un significado de función como modelo de la variación conjunta de magnitudes variables.

Elementos teóricos

Para fundamentar tanto el diseño de las actividades como el análisis de los datos emanados de su implementación con estudiantes, se retoman herramientas teóricas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Particularmente se consideran las nociones de *práctica matemática, significado* y *objetos matemáticos primarios*, que permitirán describir y analizar a detalle las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los estudiantes al abordar las actividades didácticas del diseño preliminar implementado con ellos.

En el EOS la noción de *significado* es relativa al sujeto y está anclada a la acción sistemática de dicho sujeto al resolver un mismo tipo de situaciones problema, es decir, el significado de un objeto está intrínsecamente ligado al sujeto, a las situaciones problema y a las prácticas matemáticas que el sujeto realiza. Por ello, el *significado* que tiene un sujeto sobre un objeto matemático se define como el sistema de prácticas matemáticas (operativas o discursivas) realizadas por el sujeto ante la resolución de un mismo tipo de situaciones-problema en las que dicho objeto interviene (Pino-Fan, Font y Godino, 2014). Se puede decir que el significado es todo aquello que el sujeto pueda decir del objeto o hacer con el objeto al abordar un mismo tipo de problemas. Dentro del EOS, el significado se puede concebir desde diferentes perspectivas, dependiendo de si se quiere referir al significado promovido por un diseño didáctico, un profesor o una institución (significado institucional) o bien el significado desarrollado por un estudiante o sujeto (significado personal). Como herramienta para caracterizar con mayor detalle el sistema de prácticas matemáticas desarrolladas por un sujeto (o al seno de una institución), el EOS propone seis entidades a las cuales denomina *objetos matemáticos primarios*, los cuales son elementos que intervienen o son empleados durante la realización de las prácticas matemáticas, o bien, emergen de ellas. Estos objetos son (Godino, Batanero

y Font, 2007): *Situación problema, lenguaje* (verbal, algebraico, etc.), *concepto-definición, proposición* (propiedades de los objetos, teorema, corolario, etc.), *argumento y procedimiento* (algoritmos, técnicas, etc.).

Las actividades didácticas

El diseño que se describirá está en proceso de refinamiento y ampliación. Como parte de este proceso, se realizó una prueba experimental con estudiantes para explorar el sistema de prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes al ser involucrados en un proceso de instrucción matemática guiado por las actividades diseñadas. Se experimentaron cinco actividades didácticas que trataron sobre: 1) Variación lineal, 2) variación lineal y variación no lineal, 3) obtener la función de pendientes de funciones cuadráticas y cúbicas, 4) construir las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$ y 5) obtener la función de pendientes de estas funciones trigonométricas. Las actividades parten de fenómenos geométricos dinámicos modelados con GeoGebra, como los siguientes: estiramiento de un rectángulo de altura constante, crecimiento de un cuadrado, movimiento de un punto variable sobre la gráfica de una función, y movimiento de un punto sobre un círculo. Las *prácticas matemáticas* que estas actividades pretendían promover son las siguientes:

- Identificar magnitudes variables que intervienen en el fenómeno modelado con GeoGebra (como en el cuadrado de la Figura 2: tiempo, longitud del lado, área, perímetro, longitud de la diagonal, punto medio del lado, altura, etc.).
-

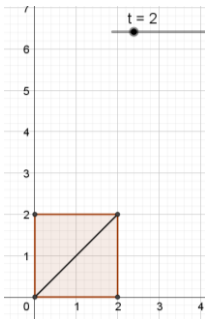


Figura 2. Cuadrado que crece.

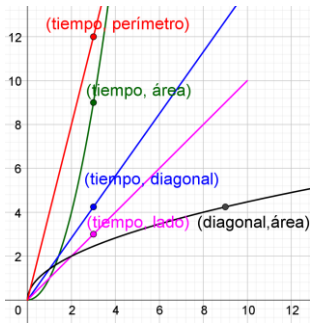


Figura 3. Gráficas generadas por la covariación de diferentes parejas de magnitudes geométricas variables.

- Describir cualitativamente el cambio de las magnitudes, identificando elementos en común o diferentes en la forma como cambian, y determinar los valores que pueden tomar.
- Describir cualitativamente cómo varían éstas con respecto al tiempo y explorar cuantitativamente su variación conjunta para caracterizar la variación lineal.
- Construir en GeoGebra (Figura 3) el par ordenado variable (x, y) que concentra los valores de las magnitudes covariantes, como antecedente de la gráfica de la función y construir la gráfica de la función lineal (Figura 3) mediante el rastro del punto (x, y).
- Construir pares ordenados y gráficas donde se relacionen distintos pares de magnitudes variables, no solo con respecto al tiempo, de manera que surjan tipos de variación distintos a la variación lineal (Figura 3).
- Caracterizar cualitativa y cuantitativamente la variación no lineal.
- Asociar las coordenadas de un punto variable con magnitudes geométricas e identificar la pendiente como magnitud variable.
- Elaborar gráficas que representen la covariación de la coordenada x de un punto variable y otras magnitudes geométricas (pendiente, ángulo, etc.).

La experiencia de clase

La prueba experimental de las actividades didácticas se llevó a cabo con diez estudiantes del del área de Arquitectura y Diseño de una universidad pública de México, distribuida en cuatro sesiones no consecutivas de tres horas cada una. Los estudiantes cursaban por segunda vez una asignatura de matemáticas muy densa en contenido, pues abarca temas de Geometría Analítica, Cálculo diferencial y Cálculo integral. La investigadora fue la diseñadora de las actividades y profesora responsable del grupo. Para guiar el desarrollo de las actividades, como parte del diseño, se elaboraron hojas de trabajo en papel, así como hojas de trabajo virtual y applets en la plataforma virtual de GeoGebra. Los estudiantes no tenían experiencia con el uso de GeoGebra. Cada uno de los estudiantes trabajó de manera individual en sus hojas de trabajo y se realizaron discusiones grupales guiadas por la profesora/investigadora en diferentes momentos de las actividades para la negociación de significados personales mediante la socialización de prácticas matemáticas y objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes en éstas (procedimientos, propiedades, conceptos, etc.).

Al terminar las sesiones correspondientes a los temas de geometría analítica, la profesora dio inicio al estudio de la función, comenzando con la siguiente tarea: Escribir brevemente qué es una función. Dos de las respuestas representativas que se obtuvieron en el grupo de estudiantes fueron "$F(x) =$ a tal valor del cual depende" (Figura 4) y "recuerdo que llevaba $f(x) =$ antes de la ecuación" (Figura 5). Estas respuestas ponen de manifiesto un significado de función vinculado a prácticas matemáticas realizadas en un lenguaje algebraico.

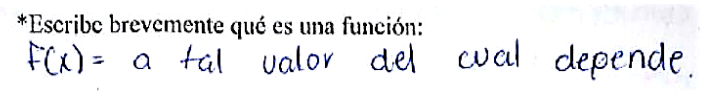


Figura 4. Función como expresión algebraica de una variable. Respuesta de un estudiante.

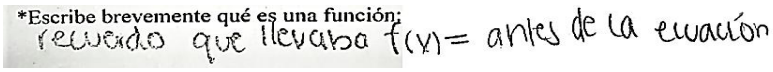


Figura 5. Función como ecuación. Respuesta de otro estudiante.

La primera actividad, correspondiente a la variación lineal, fue fundamental para el desarrollo del sistema de prácticas matemáticas pretendidas por el diseño. Es por ello que su implementación será descrita con mayor detalle que las restantes. Esta actividad inició con la observación de un fenómeno geométrico modelado con GeoGebra (Figura 6): un rectángulo que cambia sus dimensiones conforme pasa el tiempo durante 10 segundos, excepto su altura que es constante. El estudiante puede pausar e iniciar la animación en el momento que lo requiera para estudiar el fenómeno.

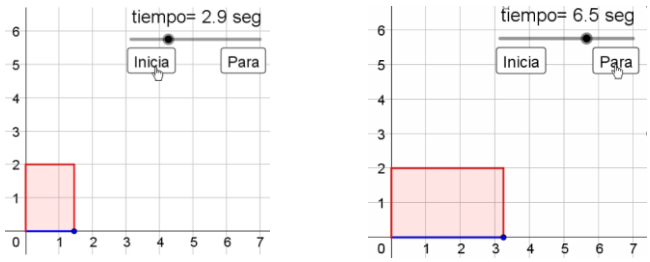


Figura 6. Rectángulo de altura constante que se estira.

La situación problema que se planteó para detonar la realización de prácticas matemáticas de los estudiantes fue la siguiente: ¿De qué maneras podemos modelar el fenómeno geométrico observado? Para resolver esta situación problema, se guio a los estudiantes con preguntas en sus hojas de trabajo, donde se les solicitó: 1) enlistar todas las magnitudes que observaran en la animación de GeoGebra y 2) clasificarlas en dos tipos: las que varían y las que permanecen constantes. En la Figura 7 se muestran las respuestas de uno de los estudiantes. Se pueden identificar como objetos matemáticos intervinientes en las respuestas del estudiante: el *lenguaje* verbal para nombrar las magnitudes y como *propiedades* la cualidad de las magnitudes de variar o permanecer constantes.

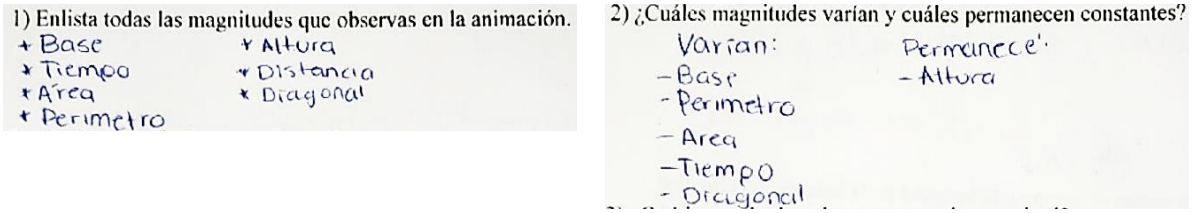


Figura 7. Identificación de magnitudes variables: tiempo, área, perímetro, diagonal, (longitud de la) base.

Con la mediación del applet de GeoGebra, los estudiantes exploraron los valores que toman algunas de las magnitudes (Figura 8). La escritura en forma de intervalos (lenguaje institucional) se llevó a cabo con la intervención de la profesora/investigadora. Posteriormente, se les preguntó en la hoja de trabajo cuál magnitud crece más rápido y cuál crece más lento. Los estudiantes intentaron hacer esta distinción únicamente observando el applet; sin embargo, no lo lograron. Durante la discusión grupal, algunos estudiantes afirmaron que las magnitudes cambiaban igual y otros mencionaron que las magnitudes iban creciendo proporcionalmente y que por lo tanto todas crecían igual de rápido (Figura 8). Sin embargo, al preguntarle a los estudiantes a qué se referían con "proporcionalmente" no pudieron dar una explicación.

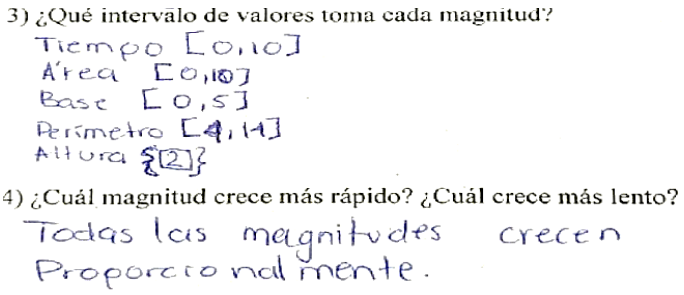
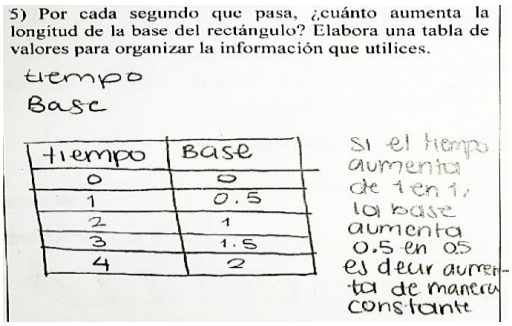


Figura 8. Intervalos de valores de las magnitudes y descripción de cómo cambian. Respuesta de un estudiante.

En las preguntas 3 y 4 de la primera actividad, se identifican como objetos primarios: *lenguaje* verbal, numérico y notación de intervalos; como *conceptos* el de intervalo de valores (que es el germen del concepto de dominio) y, como *propiedades,* que las magnitudes crecen proporcionalmente. Posteriormente, en la hoja de trabajo se guio al estudiante a que realizara una exploración numérica del fenómeno geométrico tomando datos numéricos, pausando y reanudando la animación del rectángulo. La respuesta de los estudiantes sugiere que parte de sus prácticas matemáticas desarrolladas en su educación matemática previa incluía la elaboración de tablas de valores con dos variables, pues no tuvieron problemas para elaborarla. Los estudiantes concluyeron que a aumentos constantes del

tiempo corresponden aumentos constantes de la base. Un ejemplo de estas respuestas fue "Si el tiempo aumenta de 1 en 1, la base aumenta de 0.5 en 0.5, es decir, aumenta de manera conste" (Figura 9).


5) Por cada segundo que pasa, ¿cuánto aumenta la longitud de la base del rectángulo? Elabora una tabla de valores para organizar la información que utilices.

tiempo
Base

tiempo	Base
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2

Si el tiempo aumenta de 1 en 1, la base aumenta 0.5 en 0.5 es decir aumenta de manera constante

Figura 9. Descripción de la variación de la longitud de la base, respecto al tiempo. Respuesta de un estudiante.

En la Figura 9, se pueden identificar como objetos primarios:
Lenguaje variacional verbal (aumenta, aumenta de manera constante, de 1 en 1, de 0.5 en 0.5), numérico y tabular; *procedimientos* como elaborar tablas de datos y calcular incrementos; *propiedades* sobre las magnitudes (si una aumenta, la otra también, aumentos constantes de una producen aumentos constantes de la otra).

Posteriormente se trabajó con incrementos del tiempo distintos de 1. Luego, la profesora/investigadora pidió a los estudiantes consultar en Internet qué significa que dos magnitudes sean proporcionales, uno de ellos compartió con el grupo la descripción que encontró, quedado plasmada en la pizarra del aula y luego copiada a la hoja de trabajo de uno de ellos (Figura 10) de la siguiente manera: "Dos magnitudes son proporcionales si al dividir una con otra, el resultado es la misma constante". Empleando este *concepto-definición* de proporcionalidad, durante una discusión grupal, se llegó a la conclusión de que el tiempo y la base no eran proporcionales uno a otra; sino que "El cambio en el tiempo (Δt) es directamente proporcional al cambio en la base (ΔB), $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.5$" (Figura 10), es decir, la proporcionalidad existía entre los cambios de la base y los cambios del tiempo. De esta manera, a través de la noción de proporcionalidad entre los incrementos de dos magnitudes variables, se define la variación lineal conjunta de las magnitudes. Cabe mencionar que en la discusión grupal la profesora introdujo el símbolo "Δ" para denotar a los incrementos de las magnitudes.

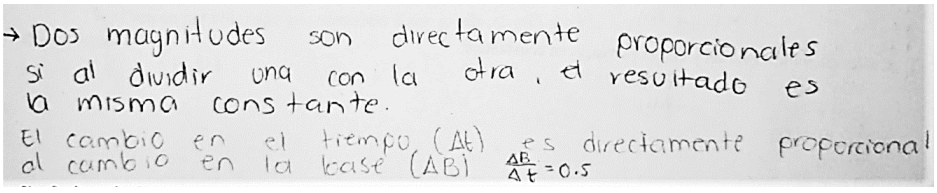

→ Dos magnitudes son directamente proporcionales si al dividir una con la otra, el resultado es la misma constante.
El cambio en el tiempo (Δt) es directamente proporcional al cambio en la base (ΔB) $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.5$

Figura 10. Proporcionalidad entre el cambio de la base y el cambio en el tiempo. Respuesta de un estudiante.

Las prácticas matemáticas y objetos primarios desarrollados por los estudiantes al explorar cómo varía la base del rectángulo cuando varía el tiempo, fueron extendidas al estudio de la variación conjunta de otras magnitudes, como el perímetro y el tiempo. En la Figura 11 se muestran los *procedimientos* seguido por un estudiante al explorar la variación del perímetro con respecto al tiempo: elabora una tabla de datos con incrementos constantes del tiempo, calcula la constante de proporcionalidad entre los incrementos del perímetro y el tiempo mediante un cociente y, al

calcular el cociente entre valores del perímetro y el tiempo concluye que estas magnitudes no son directamente proporcionales (*propiedad*).

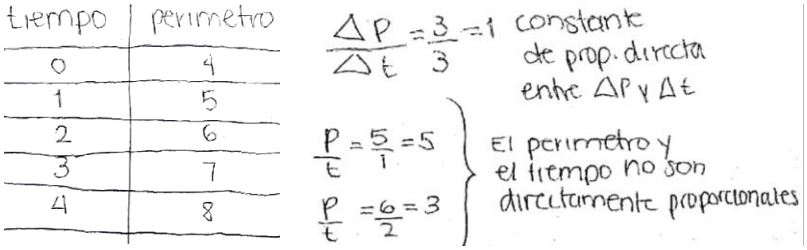


Figura 11. El estudiante emplea las prácticas matemáticas en el estudio de otro par de magnitudes.

Una vez realizada esta exploración numérica de la variación, se procedió a la obtención de expresiones algebraicas que representaran los datos de las tablas ($B = t/2$ para la base con respecto al tiempo y $P = t + 4$ para el perímetro con respecto al tiempo). Posteriormente, se pasó a un estudio gráfico y dinámico en GeoGebra de la covariación de las magnitudes. En un applet de GeoGebra se presentaron dos puntos variables, uno en el eje de las abscisas representando al tiempo y otro en el eje de las ordenadas representando a la longitud de la base. Luego de observar cómo variaban cada uno de los puntos en los ejes, la profesora preguntó a los estudiantes cómo graficarían los datos de la tabla y ellos indicaron que colocarían un punto con coordenadas x y y, siendo x el tiempo y y la base. La profesora indicó a los estudiantes que entonces los puntos serían del tipo (t, B) y dado que $B = \frac{t}{2}$, el punto o par ordenado podría escribirse también como $\left(t, \frac{t}{2}\right)$. Los estudiantes teclearon en GeoGebra el punto $\left(t, \frac{t}{2}\right)$ y al pulsar el botón inicio el punto comenzó a moverse. Al activar el rastro del punto en GeoGebra, los estudiantes pudieron observar la gráfica generada por la variación conjunta de los puntos sobre los ejes que representaban las magnitudes variables tiempo y base. Los estudiantes aplicaron esta estrategia para graficar par ordenado variable que generar la gráfica del perímetro con respecto al tiempo (Figura 12).

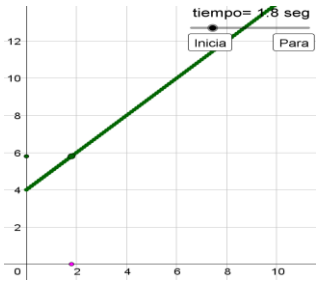


Figura 12. Gráfica del perímetro con respecto al tiempo con el par ordenado variable (t ,$t + 4$).

Una vez representada la gráfica del perímetro y la base, ambas con respecto al tiempo, las siguientes propiedades de la función lineal se enriquecieron con la representación gráfica del fenómeno: “Es directamente proporcional a la diferencia del tiempo y perímetro”, “tienen pendiente constante, y la pendiente es la constante de proporcionalidad” (Figura 13).

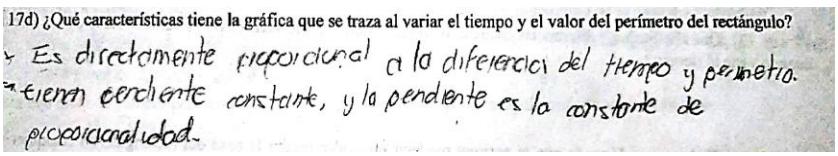


Figura 13. Propiedades de la función lineal

En general, las prácticas matemáticas de la actividad 1 se pueden resumir como sigue: Identificar magnitudes variables, describir cómo cambian, elegir una magnitud de referencia, explorar numéricamente cómo varía una con respecto a la de referencia, crear en GeoGebra el par ordenado variable y la gráfica, y determinar una expresión algebraica que relacione a las magnitudes. Estas prácticas matemáticas, así como la situación problema de partica, son distintas a las prácticas típicas en el estudio de la función lineal en los cursos de cálculo.

En la actividad 2 se realizó el estudio de un fenómeno que incluía magnitudes que crecen de manera uniforme y una magnitud que crece cada vez más rápido. Este fenómeno geométrico fue el crecimiento de un cuadrado conforme pasa el tiempo. Los estudiantes se aproximaron al problema mediante las prácticas matemáticas desarrolladas en la actividad 1 y encontraron que los incrementos del área no son proporcionales a los incrementos del tiempo. Al construir los pares ordenados con la mediación de GeoGebra observaron que la gráfica de la generada por el área con respecto al tiempo no era una recta. Este caso dio pie al estudio de la variación que no crece de manera constante, sino acelerada. La profesora/investigadora promovió durante varias sesiones el establecimiento de una relación entre la noción de velocidad y la noción de pendiente de una recta, mediante el estudio de problemas de movimiento rectilíneo uniforme. De manera que posteriormente se pudiera pasar al estudio de las "funciones de pendientes" asociadas a la gráfica de una función dada.

En la actividad 3, comenzando con el caso de la parábola como gráfica de la posición con respecto al tiempo en GeoGebra, se colocó un punto variable A sobre la gráfica y se realizó un estudio de la pendiente de la parábola en ese punto mediante la herramienta de *zoom* de GeoGebra, que permitió a los estudiantes observar que localmente la parábola es recta y por lo tanto tiene localmente una velocidad constante. Sin embargo, al variar el punto A en torno al cual se hace zoom, la velocidad es distinta, por lo tanto, la velocidad del movimiento representado en la parábola es variable. Como la parábola es localmente recta, y las rectas tienen pendiente, esa pendiente se puede medir, entonces se puede relacionar con la noción de magnitud variable estudiada previamente en la actividad 1.

La profesora indicó a los estudiantes que emplearan la herramienta "recta tangente" de GeoGebra para trazar una recta tangente a la gráfica en el punto variable que fue colocado sobre esta. Los estudiantes observaron cómo la recta tangente cambiaba su inclinación al cambiar el punto variable. Luego, al hacer zoom a la gráfica en torno al punto variable, observaron que la recta tangente y la gráfica eran idénticas localmente, por lo cual tenían la misma pendiente. De esta manera, surgió la idea de establecer un par ordenado que asociara el punto variable con la pendiente (variable) de la recta tangente para medir la velocidad variable del movimiento representado por la parábola. La profesora sugirió a los estudiantes que emplearan la herramienta de GeoGebra para medir la pendiente de una recta y que una manera de crear el par ordenado variable que ellos querían era asociar la coordenada x del punto variable (que se escribe $x(A)$ en GeoGebra) con el valor de la pendiente, calculado con GeoGebra. Los estudiantes crearon el par ordenado $(x(A), m)$ y generaron la gráfica de la recta asociada a la parábola, su función de pendientes. Después de esto, graficaron un polinomio de grado 3, colocaron un punto variable sobre su gráfica, trazaron la recta tangente, midieron su pendiente, crearon el par ordenado variable $(x(A), m)$ y trazaron la gráfica de la función de pendientes del polinomio de grado 3, la cual resultó ser una parábola (Figura 14).

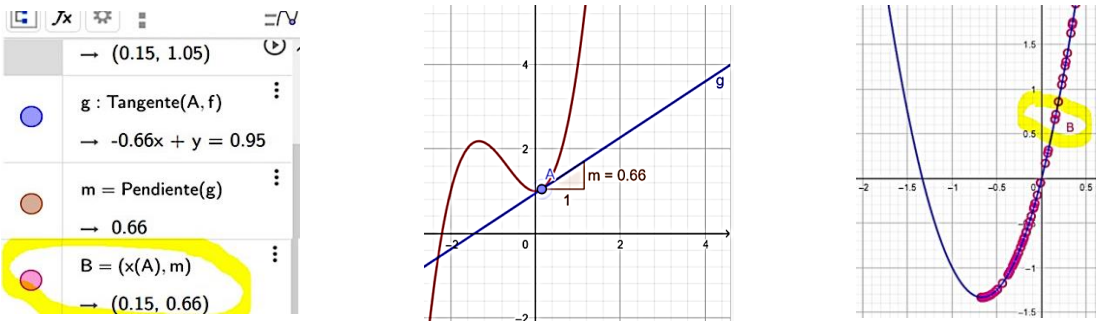


Figura 14. Función de pendientes. Construcciones de un estudiante en la hoja de trabajo virtual.

En la actividad 4, la construcción de las funciones trigonométricas seno y coseno se realizó mediante el estudio del círculo trigonométrico, observando un punto A que giraba sobre la circunferencia. Los estudiantes identificaron como magnitudes variables en este fenómeno al ángulo con el que giraba el punto A y las coordenadas del punto mismo. El applet mostraba posteriormente los valores de las coordenadas x y y del punto A asociadas a longitudes de los catetos en un triángulo como se muestra en la Figura 15. Al construir un par ordenado que asociara el ángulo α con con el que gira el punto A y el valor de la coordenada x del punto A, se trazó la gráfica de la función coseno y los estudiantes se sorprendieron al ver cómo se generaba la curva que les era familiar del curso de matemáticas que habían cursado sin éxito. De manera similar generaron la gráfica de la función seno (Figura 15).

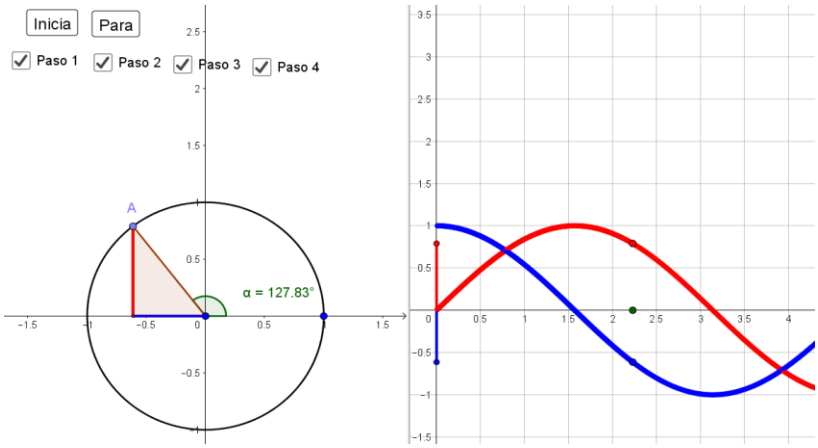


Figura 15. Funciones seno y coseno.

En la actividad 5, tendiendo como antecedente la actividad donde construyeron las funciones de pendientes de los polinomios de grado 2 y 3, los estudiantes procedieron a elaborar las gráficas de las funciones de pendientes asociadas a las funciones seno y coseno (Figura 16). Nuevamente los estudiantes se sorprendieron con las gráficas obtenidas y comenzaron a darse cuenta de que las funciones de pendientes tenían relación con la derivada que habían aprendido mecánicamente en el curso previo, pues expresaron proposiciones como: "¡Ah! ¡La derivada de seno es coseno!".

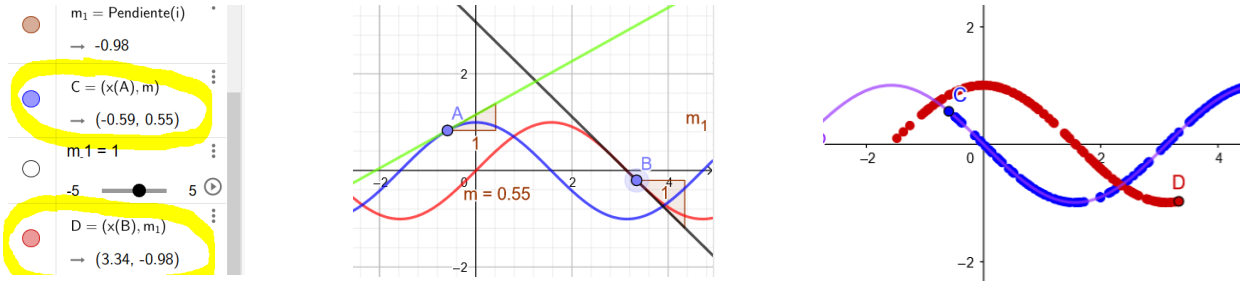


Figura 16. Función de pendientes de seno y coseno, realizadas por un estudiante en la hoja de trabajo virtual.

Conclusiones

El análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes durante la puesta en escena del diseño didáctico, así como la identificación de los objetos matemáticos personales manifestados en tales prácticas, permiten

concluir que las actividades propuestas, aunque requieren modificaciones, tienen el potencial para iniciar el desarrollo de un significado personal para la noción de función como modelo de un fenómeno geométrico dinámico donde intervienen magnitudes variables. Este significado es más robusto (en prácticas y objetos matemáticos) que aquel manifestado por los estudiantes al inicio del curso, el cual se restringía a un proceso de sustitución de valores en una fórmula o expresión algebraica. De una actividad didáctica a otra, los estudiantes se fueron apropiando de prácticas matemáticas como: identificación y elección de magnitudes variables en los fenómenos geométricos presentados; exploración de la variación de éstas a través del estudio de los valores obtenidos mediante las herramientas de GeoGebra para la medición de segmentos, tangentes, etc.; distinción entre variación lineal y no lineal usando la noción de proporcionalidad; establecimiento de una relación entre dos magnitudes formando un par ordenado variable que generaba de la gráfica de la función; entre otras.

El sistema de prácticas promovido con las actividades diseñadas favoreció que la gráfica de la función emergiera, gradualmente, como la representación de una relación que se puede establecer entre dos magnitudes que están variando de manera conjunta en un fenómeno, se tenga o no una expresión algebraica dada. Además, fue un elemento de discusión que la elección del par de magnitudes a relacionar, así como la elección de la magnitud que sería considerada variable independiente, condicionan la gráfica que resultará. Aunque durante la puesta en escena del diseño didáctico no se realizó una discusión profunda sobre las propiedades definitorias de una relación funcional, es importante resaltar que los applets diseñados tienen el potencial de proveer al estudiante un espacio de reflexión sobre tales propiedades, pues permiten poner en relación diferentes pares de magnitudes y elegir de diferente manera cuál será la variable independiente, lo cual permite al estudiante explorar las consecuencias de estas elecciones al trazar la gráfica con el par ordenado variable. Una consecuencia interesante de estas elecciones es que la gráfica obtenida al relacionar dos magnitudes variables podría no representar una función.

Una característica positiva del diseño didáctico es que la derivada de una función pudo ser introducida de manera temprana, como una función obtenida a partir del estudio de fenómenos geométricos donde la pendiente de una recta era una magnitud variable. Una posible ampliación del diseño podría incluir naturalmente el estudio de fenómenos geométricos donde sea una magnitud variable el área delimitada por la gráfica de una función y el eje x, en un intervalo variable (variando el extremo derecho del intervalo), de manera que se pueda introducir la integral como "función de área" de manera dinámica, y no de manera estática como valor correspondiente al área fija de una región dada. Es importante, sin embargo, resaltar que el tratamiento que se propone en este diseño didáctico para la derivada y la integral, como funciones que emergen como modelos de fenómenos geométricos de variación, es limitado en el sentido de que la "función de pendientes" y la "función de área" son solamente una pequeña parte del significado de estas nociones matemáticas que puede ser estudiado en los cursos de cálculo. Un estudio más robusto de la derivada y la integral, desde un punto de vista genuinamente variacional, escapa de los alcances de este diseño didáctico, pues su propósito central es proponer una introducción a la noción de función. Sin embargo, las prácticas matemáticas promovidas en las actividades 1 y 2 (como la identificación de magnitudes variables y la caracterización de la variación lineal) pueden ser retomadas en el estudio de fenómenos de variación en contextos extramatemáticos y ser redirigidas hacia el estudio de la variación y la acumulación.

Por último, se resalta la utilidad del EOS tanto para la formulación del diseño como para el análisis de los datos emanados de su implementación. Por un lado, las nociones de práctica matemática y de objeto matemático primario del EOS permitieron caracterizar con detalle el significado (institucional) de la noción de función que el diseño buscaría desarrollar en los estudiantes. Por otro lado, estas herramientas permitieron también dar cuenta del trabajo matemático realizado por los estudiantes al abordar las actividades didácticas del diseño propuesto, mediante la descripción de la diversidad de prácticas matemáticas y objetos matemáticos personales manifestados por ellos en las tareas propuestas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1*(1),44-55.

Bressoud, D., Martinez-Luaces, V., Ghedamsi, I. y Törner, G. (2017). Topic Study Group No. 16: Teaching and Learning of Calculus. En G. Kaiser (Ed) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (pp. 447-452). Springer, Cham.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Ímaz, C., y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 69-75). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge accumulation. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7a. ed.). México: Oxford University Press.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Pino-Fan, L., Font, V. y Godino J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: Pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137-151). México, DF: Ediciones DDS y Universidad Autónoma de Guerrero.

Robles, M. G., del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática, 24*(1), 35-71.

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

AVATARES NO ENSINO DE MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E LIMITAÇÕES NA EDUCAÇÃO DE SURDOS

AVATARS IN MATHEMATICS TEACHING: POSSIBILITIES AND LIMITATIONS IN DEAF STUDENTS' EDUCATION

Renata da Silva Dessbesel, Maria Ivete Basniak, Sani de Carvalho Rutz da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Brasil). Universidade Estadual do Paraná (Brasil). Universidade Tecnológica Federal do Paraná (Brasil).
renatadessbesel@utfpr.edu.br, basniak2000@yahoo.com.br, sani@utfpr.edu.br

Resumo
Nesteestudo, investigamos as possibilidades e limitações do uso de avatares no ensino de Matemática para estudantessurdos. Utilizamos revisão sistemática da literatura emartigosdisponíveisnas bases de dados Scopus, Web Of Science, IEEE e Advanced Technologies &AerospaceIndex por meio dos descritores: avatars, tecnologia, matemática, surdez, realidade aumentada e STEM. Os resultados revelaram a oportunidade de crianças surdas aprenderem Matemática por mídiainterativa, emsualíngua materna, além de beneficiar tambémprofessores e intérpretes quantoaoacessoaos termos matemáticos técnicos e despertar o interesse e consequentemotivação dos alunossurdos e ouvintes.

Palavras-chave: tecnologia, surdez, pesquisa qualitativa, avatar

Abstract
In this study, we do research into the possibilities and limitations of the use of avatars in Mathematics teaching for deaf students. A literature systematic review was made in articles available in Scopus, Web of Science, IEEE(Institute of Electrical and Electronics Engineers) and Advanced Technologies & Aerospace Index databases through the following key words: avatars, technology, mathematics, deafness, increased reality and STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). The results showed deaf kids' possibilities to learn mathematics through interactive media, in their mother tongue, as well as the benefits to teachers and interpreters to have access to technical mathematics terms and to arouse deaf students and audience's interest and, consequently, their motivation.

Key words: technology, deafness, qualitative research, avatar

Introdução

Este estudo decorre de uma pesquisa em torno da tecnologia e a educação de surdos no ensino de Matemática, utilizando como fonte os artigos publicados nas bases de dados: *Scopus*, *Web Of Science*, IEEE e *Advanced Technologies & Aerospace Index*. Na educação de surdos, a inserção de recursos tecnológicos possibilita o acesso ao currículo, a ampliação dos modos de comunicação e vocabulários (Zirzow, 2015).

Estudos têm apontado para as dificuldades que os alunos surdos encontram na aprendizagem de Matemática, mostrando um desempenho inferior quando comparados aos pares ouvintes (Pagliaro e Kritzer, 2013; Barbosa, 2014). Desta forma Adamo-Villani e Hayward (2017) apontam que as barreiras são derivadas dentre outros fatores, da comunicação inadequada e da falta de acessibilidade à aprendizagem.

Os avatares, como personagens animados para comunicação por meio de sinais, apresentam-se como uma possibilidade de tornar os conteúdos digitais acessíveis aos alunos surdos por um baixo custo (Adamo-Villani e Hayward, 2017). Nesse sentido, Barbosa (2014) traz que o ensino de Matemática para pessoas surdas deve fazer uso de recursos visuais, além do processo de aprendizagem ocorrer em língua de sinais.

Desta forma o problema de pesquisa foi: Quais as 92osibilidades e limitações do uso de avatares no ensino de matemática para estudantes surdos? Trata-se de um estudo teórico de revisão da literatura sobre o assunto, cujo quadro teórico discutimos brevemente na seção que segue.

Marco teórico

No ensino de matemática emerge a necessidade de superar as abordagens de testes padronizados e compreender a matemática como ferramenta para o desenvolvimento da sociedade (D'Ambrosio, 2018). Nesse sentido, as tecnologias no ambiente educacional provocaram mudanças no paradigma pedagógico, de modo a atender as demandas atuais de formação de pessoas críticas, criativas e com habilidades de resolução de problemas.

As tecnologias na educação de surdos constituem um importante apoio no processo de ensino e aprendizagem, em especial no ensino de matemática, ao permitir a exploração das atividades por meio de vídeos e imagens mediados em língua de sinais (Rodrigues e Geller, 2016). Martino et al. (2017) trazem que a partir de estratégias pedagógicas adequadas os recursos tecnológicos permitem acesso às atividades dentro e fora da sala de aula, flexibilizando o tempo de forma apropriada para que os alunos construam seus conhecimentos a partir dos conteúdos abordados.

Na educação de surdos uma das barreiras enfrentadas é a falta de contato com a Matemática do cotidiano desde a infância, como em situações de contar brinquedos e contar nos dedos (Pagliaro e Kritzer, 2013). Em outras palavras, situações que para crianças ouvintes acontecem de forma natural, mas para crianças surdas, a falta de conhecimento da língua de sinais pode impedir este desenvolvimento. Adamo-Villani e Hayward (2017) elencam duas barreiras na educação de surdos: a) falta de comunicação de modo interativo precocemente e; b) falta de acesso à aprendizagem incidental, que segundo as autoras é a exposição a diversas fontes de informação, como as mídias.

Com os softwares tradutores de língua de sinais, os alunos surdos passam a ter a possibilidade de acesso a um universo de informação por meio da internet, que antes era inviável, o que favorece também acompanhar o material escrito durante as aulas, da mesma forma que os ouvintes, gerando motivação e melhorando o desempenho desses estudantes (Martino et al., 2017). Assim, no ambiente escolar, as tecnologias constituem meio facilitador da aprendizagem, do diálogo e da resolução das tarefas de modo acessível, permitindo a ampliação do vocabulário (Rocha, Lima e Queiroz, 2018). Neste sentido, os avatares apresentam potencial para ultrapassar os obstáculos da comunicação, fornecendo eficiência na tradução para língua de sinais (Adamo-Villani e Hayward, 2017).

Avatares são personagens animados em 3D que permitem a comunicação em língua de sinais, por meio de gestos, expressões faciais e movimentos de corpo (Adamo-Villani e Hayward, 2017). No Brasil, o Vlibras é um exemplo de avatar que permite a tradução automática do português para a Língua Brasileira de Sinais (Libras), a partir de um personagem 3D que traduz textos, legendas e aúdios (Freitas, Medeiros e Sousa, 2017).

Carvalho e Manzini (2017) realizaram um estudo com o software Libras R.A., que consiste em um programa de ensino de um grupo de palavras em Libras com a utilização da tecnologia de realidade aumentada. O estudo foi realizado com oito estudantes surdos, e de acordo com Carvalho e Manzini (2017) o desempenho foi satisfatório, de modo que melhorou a apropriação das relações e ampliou o repertório comunicativo. O uso de realidade aumentada em ambientes inclusivos traz benefícios para a aprendizagem na educação de surdos, como também para o ensino de Libras aos ouvintes (Carvalho e Manzini, 2017).

De acordo com Adamo-Villani e Hayward (2017) os avatares podem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de conceitos quando incorporados a jogos educacionais e ambientes virtuais de aprendizagem, de modo a proporcionar a interação na língua natural das pessoas surdas. O uso deste recurso, de modo planejado, desenvolve a motivação e traz benefícios para o desempenho dos estudantes surdos (Martino et al., 2017).

O ensino de matemática no contexto da educação de surdos deve explorar as diversas metodologias, valorizando os aspectos visuais da comunicação e a abordagem por meio da língua de sinais. Desta forma ao uso de recursos tecnológicos em ambientes imersivos, como ambientes virtuais de aprendizagem e uso da realidade aumentada favorecem a aprendizagem de conceitos de matemática.

Metodologia

Este estudo trata-se de uma revisão sistemática, definida por Sampaio e Mancini (2007, p. 84) como: "[...] uma forma de pesquisa que utiliza como fonte de dados a literatura sobre determinado tema". A abordagem de pesquisa é qualitativa e situada na interface da educação de surdos, ensino de matemática e tecnologia digital.

O estudo segue as orientações de Galvão, Sawada e Trevisan (2004) a partir de sete fases que guiam os procedimentos de coleta e análise dos dados: construção do protocolo, definição da pergunta, busca dos estudos, seleção dos estudos, avaliação crítica dos estudos, coleta de dados e síntese dos dados. Como apresentamos a seguir, adaptado de Galvão et al. (2004):
Fase 1 - Construção do protocolo: Etapa inicial da pesquisa em que se definiu a questão de pesquisa, as bases de dados, os critérios de inclusão e exclusão, e a análise.

Fase 2 – Definição da pergunta: ¿Quais as possibilidades e limitações do uso de avatares no ensino de matemática para estudantes surdos?

Fase 3 – Busca dos estudos: A busca foi realizada nas bases Scopus, Web Of Science, IEEE e Advanced Technologies & Aerospace Index, a partir dos descritores: a) "technology education" AND math* AND deaf*; b) avatar* AND math* AND deaf*; c) avatar* AND "sign language" AND math*; d) "STEM" AND deaf* AND avatar*; e) "augmented reality" AND math* AND deaf*. Foram encontradas 26 estudos na Scopus, 8 estudos na IEEE, 9 Web Of Science e 67 estudos na Advanced Technologies & Aerospace Index, totalizando 110 estudos.

Fase 4 – Seleção dos estudos: Para seleção dos estudos foram estabelecidos critérios de inclusão e exclusão. Critérios de inclusão: a) estudos que apresentavam contribuições para sala de aula b) pesquisas na Educação Especial. Critérios de exclusão: a) duplicados b) estudos que não apresentavam uma relação com o ensino e aprendizagem de matemática c) estudos que não eram com estudantes surdos. Após a aplicação dos critérios, dos 110 estudos 32 foram excluídos por duplicidade, 60 estudos que não abordavam o ensino e aprendizagem de

matemática e 9 estudos que não estavam direcionados a educação de surdos. Resultando em 9 artigos como amostra final desta pesquisa.

Fase 5 – Avaliação crítica dos estudos: A avaliação dos estudos encontrados foi realizada de acordo com as questões e objetivo de pesquisa, com a leitura do título, resumo e palavras-chave, ainda quando necessário a leitura do texto na íntegra.

Fase 6 – Coleta dos dados: Com base na questão de pesquisa, na coleta dos dados, foram selecionados os participantes, o avatar proposto e os resultados da intervenção.

Fase 7 – Síntese dos dados: Os dados foram analisados e descritos em uma abordagem qualitativa, com relação as suas possibilidades e limitações no uso de avatares na educação de surdos.

Na próxima seção apresentamos análise e descrição dos dados selecionados, assim como os resultados a partir do problema de pesquisa.

Resultados

Os recursos tecnológicos direcionados para a aprendizagem de alunos surdos, estabelecem um rol de estratégias que podem ser exploradas no ambiente escolar (Carvalho e Manzini, 2017). Rodrigues e Geller (2016, p. 131) afirmam que é importante a escolha dos recursos digitais que são utilizados na sala de aula: "É importante que esse material possibilite a interação do aluno e lhe permita verificações e possibilidades de tomadas de decisões".

Na educação de surdos, um fator que precisa ser considerado é a diversidade de situações, com relação ao contato e fluência em língua de sinais, que estes estudantes chegam à escola. As dificuldades em matemática, em muitos casos, têm relação com a falta de oportunidades de aprendizagem fora da escola (Kritzer e Pagliaro, 2013). Diante disso, as tecnologias podem trazer contribuições, proporcionando aos estudantes surdos acesso aos conteúdos e ampliação do vocabulário, como também contato com a língua de sinais extra classe, com uso de softwares e jogos virtuais.

Neste artigo, foram selecionados nove estudos situados na interface ensino de matemática, educação de surdos e tecnologias digitais. Na tabela 1, apresenta-se o recurso tecnológico e os participantes de cada trabalho. Atribuiu-se códigos aos estudos para identificá-los no decorrer da análise.

Tabela 1 – Estudos selecionados para análise

Código	Referência	Recurso tecnológico	Participantes
E1_2004	*Adamo-Villani, N., Doublestein, J. y Martin, Z. (2004). The Mathsigner: na interactive learning tool for american sign language K-3 mathematics. Banisi, E. et al. (Ed.), Proceedings, Eighth International Conference on Information Visualisation (pp. 713-716). London: IEEE Computer Society.*	*SigningAvatar™ by Vcom3D e* o Mathsigner	*Não aplicado*

E2_2006	Adamo-Villani, N., Carpenter, E. y Arns, L. (2006). 3D Sign language mathematics in immersive environment. Hamza,M. M. (Ed.)*Proceedings of ASM 2006 - 15th International Conference on Applied Simulation and Modeling*, (pp. 382-388). Rhodes, Greece: Acta Press.	Adaptação dos caracteres Mathsigner ™ para exibição em um ambiente de imersão total e desenvolvimento de um mundo virtual de fantasia.	Testado com adultos surdos, professores e alunos com conhecimento em linguagem de sinais.
E3_2008	Adamo-Villani, N.& Wilbur, R. (2008). Two novel tecnologies for acessible math and science education. *IEEE MultiMedia* 15(4), 38-46.	Mathsigner e SMILE	Crianças nível K-4 com 21 participantes (7 surdas e 14 ouvintes)
E4_2010	Adamo-Villani, N. & Wilbur, R. (2010). Software for math and science education for the deaf. *Disability and Rehabilitation Assistive Technology*, 5(2), 115-124.	Mathsigner ™ (não imersiva) e a SMILE (imersivo)	Crianças surdas com idade entre 6 e 11 anos (16 participantes)
E5_2013	Andrei, S., Osborne, L. y Smith, Z. (2013). Designing na American Sign Language Avatar for Learning Computer Science Concepts for Deaf of Hard-of-Hearing Students and Deaf Interpreters. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 22(3), 229-242.	Avatar da Signatário da Universidade de Lamar (LUSA).	Teste do protótipo: equipe de estudantes (usuários nativos de ASL) do Departamento de Estudos de Surdos e Educação de Surdos.
E6_2013	Vesel, J. & Robillard, T. (2013). Teaching mathematics vocabulary with na interactive signing math dictionary. *Journal of research on technology in education*, 45 (4), 361-389.	Signing Math Dictionary (SMD)	Aplicado em 8 turmas. 39 participantes ao todo (8 professores e 31 alunos) das séries K-4 à K-8.
E7_2015	ZIRZOW, N. K. (2015) Signing Avatars: using virtual reality to support students with hearing loss. *Rural Special Education Quarterly*, 34 (3), 33-36.	SMILE; Mathsigner; CopyCat; SignTutor	Não aplicado
E8_2017	Adamo-Villani, N. & Anasingaraju, S. (2017). Holografic signing avatars for deaf education. In: G. Vicentini et al. (Eds), *E-Learning, E-Education and Online Training, Third International Conference (*pp. 54-61), Springer.	Sistema de realidade aumentada holográfico (uso de óculos de RA) que permite criar avatares	5 estudantes surdos do K-6; 2 pais ouvintes e 2 professores de matemática do K-6.

		animados em 3D.	
E9_2018	Hansen, E. G., Loew, R. C., Laitusis, C. C., Kushalnagar, P., Pagliaro, C. M. y Kurz, C. (2018). Usability of American Sign Language Videos for Presenting Mathematics Assessment Content. *Journal of Deaf Studies and Deaf Education*, 1 (11), 284-294.	Versão humana x versão de avatar (usando Vcom3D)	Comparação entre a sinalização em ASL por um avatar e a sinalização humana.

Fonte: Elaborado pelos autores

Os estudos desta análise, apresentados na Tabela 1, trazem propostas com tecnologias digitais para melhorar o acesso ao conhecimento e o ensino e aprendizagem de Matemática para estudantes surdos. A partir dos dados observa-se que entre os nove estudos selecionados, cinco deles são do mesmo grupo de pesquisadores, com ênfase em dois softwares, o *Mathsigner* e o *Smile*, o que mostra a preocupação no aprimoramento desses recursos tecnológicos.

O *Mathsigner* é um software interativo com atividades direcionadas para estudantes do ensino fundamental, com conceitos matemáticos em língua de sinais para crianças surdas; o SMILE é um ambiente virtual de aprendizagem imersivo para crianças surdas desenvolverem conceitos de STEM (ciência, tecnologia, engenharia e matemática) com uso da Língua Americana de Sinais (ASL) por meio de um avatar animado em 3D (Adamo-Villani e Hayward, 2017).

De acordo com Freitas et al. (2017) as tecnologias assistivas proporcionam acesso à informação, como também aos conteúdos escolares, contribuindo para o desempenho dos alunos em sala de aula. Na Tabela 2 sintetizamos as possibilidades e limites dos nove estudos selecionados nesta análise, a partir da leitura dos textos.

Tabela 2 – Possibilidades e limitações dos estudos com avatares

Código	Possibilidades	Limitações
E1_2004	i) Meio interativo de baixo custo para adicionar linguagem de sinais à mídia; ii) Aborda a necessidade de aumentar a eficácia dos pais (ouvintes) em ensinar matemática às crianças surdas e a oportunidade de as crianças surdas aprenderem aritmética por meio da mídia interativa.	i) Incapacidade de representar a língua de sinais com fluidez e realismo, de modo a melhorar a auto-imagem.

E2_2006	i) Alto realismo/ fluidez do movimento de sinalização dos personagens 3D; ii) Interação complexa em tempo real entre avatares, o estudante e o ambiente; iii) Avatares em 3D interagem com o usuário enquanto se deslocam dentro do espaço virtual e podem ser vistos de diferentes pontos de vista, apoiando assim a sensação de imersão; iv) Comunicação natural entre os usuários e aplicação por meio de um sistema simples de controle por gestos baseado em luva; v) O aluno surdo pode navegar pelo ambiente, pegar objetos e responder a perguntas usando apenas gestos com as mãos.	i) Pequeno número de formas de mão ASL (Língua de Sinais Americana) que podem ser inseridas e reconhecidas pelo sistema; ii) Alto custo do equipamento; iii) Potenciais problemas de saúde e segurança associados ao uso de dispositivos imersivos.
E3_2008	i) No ambiente virtual SMILE os alunos podem explorar a cidade de Smileville, manipular objetos, construir novos objetos e interagir com os personagens; ii) No software interativo Mathsigner a animação em 3D, baseado em ASL, apresenta tarefas matemáticas classificadas por conceitos e dificuldades de nível de série; iii) Em ambos os programas destaca-se a motivação e os desafios; iv) Todas as crianças puderam se envolver e concluir as tarefas em ambos os sistemas de teste.	i) Necessidade de soluções que permitam aos usuários surdos comunicarem-se e interagir em um ambiente livre de preconceitos, estigmas, barreiras tecnológicas ou outros obstáculos; ii) Não descrito as limitações específicas dos softwares.
E4_2010	i) No Mathsigner, software interativo baseado em ASL de animação 3D, as tarefas são elaboradas para conceitos de sinais (nível K-6) e correspondendo a terminologia em inglês para crianças surdas, pais e professores; ii) No SMILE, ambiente de aprendizagem virtual imersivo (AVA) as crianças surdas e ouvintes aprendem conceitos de STEM e terminologia de ASL, apresenta um design virtual atraente e envolvente; iii) Redução no tempo de conclusão das atividades.	i) No Mathsigner a comparação entre o formato dos avatares mostrou que o formato dos dedos teve diferenças na sinalização, sendo que um deles foi considerado melhor entre os usuários que avaliaram; ii) No SMILE dois alunos apresentaram desconforto com o uso dos óculos; iii) Diversas características afetam o design do software, de modo que os projetistas precisam estar atentos a isso.
E5_2013	i) O LUSA permite ao instrutor apresentar efetivamente material STEM (ciência, tecnologia, engenharia e matemática) de uma maneira relativamente uniforme para ambos os alunos surdos e seus pares ouvintes; ii) A animação respeita a gramática ASL correta e tem uma interpretação suave; iii) Traz benefícios a	i) Necessidade de melhorar o aspecto do avatar quanto a sinalização realista e fluência em ASL; ii) Ponto frágil é as expressões faciais na sinalização do avatar em ASL; iii) O avatar de sinalização exibe comportamentos não manuais precisos de ASL, isto é, referenciamento espacial, inclinações de

	estudantes, professores e intérpretes de alunos surdos.	cabeça/corpo que parecem ser desafiadoras.
E6_2013	i) Acesso dos estudantes surdos e deficientes auditivos ao vocabulário matemático; ii) Os recursos interativos do dicionário promovem instrução individualizada para uma ampla variedade de alunos com diferentes níveis de perda auditiva e desafios de aprendizado; iii) Maior independência; iv) Aumento da instrução individualizada para uma variedade de alunos; v) Maior aquisição de vocabulário para teste padronizado; vi) Maior alfabetização em inglês; vii) Maior motivação para aprender matemática; viii) Maior acesso a sinais padronizados.	i) Dificuldade de generalizar os resultados para todos os alunos surdos ou com deficiência auditiva ou para todos os seus professores, o que segundo os autores requer uma nova pesquisa com uma amostra aleatória maior e mais representativa de casos.
E7_2015	i) Aplicativos de realidade virtual com sinalização de avatares podem ajudar educadores regulares, educadores especiais e educadores surdos a cumprir sua responsabilidade compartilhada de atender às necessidades educacionais exclusivas dos alunos de surdos e deficientes auditivos.	i) Melhorar a fluidez e as habilidades expressivas de sinalização dos avatares; ii) Com relação a educação especial, necessidade de inclusão e a integração de estudantes surdos e deficientes auditivos e seus pares ouvintes.
E8_2017	i) Melhora o acesso a materiais educacionais de K-6 para crianças surdas e a aprendizagem de conceitos matemáticos; ii) Facilita a tradução da língua de sinais; iii) Os avatares 3D holográficos poderiam ser usados em muitos outros domínios, como entretenimento e redes sociais, para remover as barreiras de comunicação atuais; iv) Na avaliação dos professores os avatares eram precisos e fluídos.	i) Para que o potencial do sistema seja plenamente realizado deve passar do desenvolvimento e teste de laboratório para testes de campo e uso; ii) Pais mostraram interesse em usar os óculos em casa para aujar os filhos nas lições de matemática, mas preocupados com o custo; iii) Alguns alunos mostraram desconforto com os óculos; iv) Óculos grandes projetados para adultos.

E9_2018	i) O uso de um avatar pode economizar custos com relação a uma versão humana, principalmente na situação em que são precisos ajustes e correções na tradução; ii) Não houve significativa diferença na usabilidade entre o avatar e as versões humanas sinalizadores dos itens matemáticos.	i) Tamanho da amostra pequeno e o pequeno número e variedade de itens limitam a interpretação de alguns dos resultados do estudo; ii) Dificuldade para traduzir as versões sinalizadas para o inglês, devido a falta de compreensão de matemática dos tradutores e intérpretes de língua de sinais; iii) estudantes usam a ASL socialmente, mas cuja educação matemática tem sido em inglês, podem ter dificuldade em compreender conteúdo cotidianos de matemática quando é apresentado na ASL. iv) Nos avatares falta expressão facial e linguagem corporal.

Fonte: Elaborado pelos autores

O processo de ensino e de aprendizagem de Matemática deve contemplar na educação de surdos o uso de um vocabulário numérico e quantitativo, estabelecendo relações entre a língua e a formação de conceitos de matemática (Barbosa, 2013). A autora complementa que o uso da língua de sinais neste processo traz benefícios aos estudantes surdos, como também a exploração de materiais concretos e visuais no desenvolvimento de habilidades matemáticas. Desta forma, ao observarmos os estudos da Tabela 2, as possibilidades são diversas e significativas, de modo a tornar a apropriação do conhecimento acessível, dinâmico e motivador para estes estudantes.

O uso de Realidade Aumentada (RA) também foi explorada em conjunto com os avatares, trazendo além da tradução em língua de sinais, possibilidades para a sala de aula, com o uso de cenários imersivos, em que os alunos resolvem tarefas de matemática. Essa tecnologia pode promover e facilitar a aprendizagem: "O emprego da tecnologia de RA possibilita a manipulação de elementos virtuais que passam a fazer parte do espaço real" (Carvalho e Manzini, 2017, p. 216). Isto é observado nas pesquisas E2_2006, E3_2008, E4_2010, E7_2015 e E8_2017 em que os autores exploram cenários de aprendizagem com uso da RA.

De acordo com Adamo-Villani e Wilbur (2010) no ambiente imersivo SMILE os estudantes têm contato com o conteúdo em um contexto significativo, ao explorar a "*SmileVille*" e manipular os objetos, além disto as atividades são direcionadas a aprendizagem e conteúdos de STEM que se pretende abordar. Os autores apontam que esta é uma inovação tecnológica que combina o conteúdo educacional com um design atraente para os alunos.

Com relação as limitações, os estudos apontam as questões de custos da tecnologia do avatar e a superação de obstáculos com relação a ampliação do vocabulário de matemática no software e as expressões faciais e corporais importantes para a sinalização, tornando o avatar mais realista. A aprendizagem de conteúdos de matemática não foi apresentada como foco principal da maioria dos estudos, mas sim a descrição das tecnologias utilizadas. Mostrando assim, a necessidade de mais pesquisas que explorem as aplicações diretas no ensino de matemática e suas contribuições para sala de aula.

Desta forma, salientamos a necessidade de mais pesquisas que explorem tais recursos tecnológicos, como também o aprimoramento dos avatares, em especial no Brasil, pesquisas que abordem o uso de avatares no contexto da Educação Matemática.

Conclusão

Os resultados revelaram a oportunidade das crianças surdas aprenderem Matemática por mídia interativa, em sua língua materna, além de beneficiar também professores e intérpretes quanto ao acesso aos termos matemáticos técnicos e despertar o interesse e consequente motivação dos alunos surdos e ouvintes, graças a possibilidade de atendimento individualizado e instrução direta a esses alunos, diminuindo o tempo de conclusão das tarefas. Como limitações, foram evidenciadas a dificuldade da tradução correta dos conteúdos de matemática e a dificuldade de abordagens relacionadas a tecnologia utilizada pelo avatar.

Percebe-se desta forma a dualidade controversa das conclusões quanto ao uso de avatares no ensino de matemática a alunos surdos, isto porque enquanto alguns avatares se mostraram eficientes ao traduzirem a linguagem matemática e atender às diferentes necessidades dos alunos, outros se revelaram incapazes de atingir o objetivo. Isto nos leva a concluir que, a escolha do avatar, e da consequente tecnologia a ser utilizada, podem fazer toda a diferença na aprendizagem dos alunos. Ao explicitar essas possibilidades e limitações acreditamos contribuir para a escolha apropriada dessa tecnologia.

Agradecimentos

À UTFPR pelo apoio no desenvolvimento da pesquisa.
O presente trabalho foi realizado com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Brasil. Bolsista do CNPq, Brasil.

Referencias bibliográficas

Adamo-Villani, N. & Wilbur, R. (2010). Software for math and science education for the deaf. *Disability and Rehabilitation Assistive Technology*, 5(2), 115-124.

Adamo-Villani, N.; Hayward, K. (2017) Signing Avatars. Hai-Jew, S. *Virtual Immersive and 3D Learning Spaces*: Emerging Technologies and Trends. New York: Information Science Reference. p. 249- 267.

Barbosa, H. H. (2014). Conceitos matemáticos iniciais e linguagem: um estudo comparativo entre crianças surdas e ouvintes. *Educação e Pesquisa*, 40(1), 163-179.

Carvalho, D. de & Manzini, E. J. (2017) Aplicação de um programa de ensino de palavras em Libras utilizando tecnologia de realidade aumentada, Revista Brasileira de Educação Especial, Marília, 23 (2), 215-232.

D'Ambrosio, U. (2018) To think in a New Way in Mathematics Education. In: Riberio, A. J.; Healy, L.; Borba, R. E. de S. R.; Fernandes, S. H. A. A. (Eds.). Mathematics Education in Brasil, Springer, pp. 1-20

Galvão, C. M., Sawada, N. O., Trevizan, M. A. (2004). Revisão Sistemática: recurso que proporciona a incorporação das evidências na prática da enfermagem. *Revista Latino-Americana de Enfermagem*, Ribeirão Preto, SP, 12 (3), 549 - 556.

Freitas, V. A., Medeiros, S. N. de., Sousa, H. de M. (2017). Importância do software Vlibras no processo de aprendizagem de pessoas com deficiência suditiva. In: Sanchez, j. (Ed.) Nuevas Ideas em Informática Educativa, pp.578-581, Santiago do Chile.

Martino, J. M. de. et al. (2017). Signing avatars: making education more inclusive. Universal Access in the Information Society, 16(3), 793-808.

Pagliaro, C. M. & Kritzer, K. L. (2013). The math gap: A description of the mathematics performance of preschool-aged deaf/hard-of-hearing children. *Journal of deaf studies and deaf education*, 18(2), 139-160.

Rodrigues, R. da S. & Geller, M. (2016) Alunos surdos dos anos iniciais do ensino fundamental e a construção do número. Interfaces da Educação, Paranaíba, 7(19), 126-145.

Sampaio, R.F. & Mancini, M. C. (2007) Estudos de revisão sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. Revista Brasileira de Fisioterapia, São Carlos, 11(1), 83-89.

Zirzow, N. K. (2015). Signing avatars: using virtual reality to support students with hearing loss. *Rural Special Education Quarterly*, 34 (3), 33-36.

Principios:

La revista Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (en lo sucesivo ALME), es uno de los proyectos académicos del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – CLAME, en el que se conjuga el respeto a la pluralidad de formaciones, tradiciones y acercamientos educativos, concebida y desarrollada con la función de difundir la Matemática Educativa en un marco en el que pueden relacionarse autores que comparten este interés común, además de nuclear investigadores y profesores de Latinoamérica, y a partir de su divulgación, promover acciones que fomenten la investigación, la actualización, el perfeccionamiento y la profesionalización para el desarrollo científico y social de la región.

La revista ALME se configura como el instrumento de la CLAME para la difusión de trabajos de carácter científico, experiencias, convocatorias e información bibliográfica, dentro del ámbito de la enseñanza/aprendizaje en matemática educativa en sus diferentes formulaciones y presentaciones.

La revista ALME es una revista científica arbitrada por pares y que se atiene a los estándares internacionales de calidad propios de las publicaciones científicas de prestigio.

Misión y objetivos:

La misión de la revista ALME es la difusión de la investigación relativa a la Matemática Educativa, persiguiendo los siguientes objetivos:

- ✓ Difundir, preferentemente en lenguas española y portuguesa, relevantes y rigurosos trabajos de carácter científico, en el ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Ofrecer experiencias innovadoras, siempre relativas al ámbito de la matemática educativa.
- ✓ Potenciar la accesibilidad y visibilidad del conocimiento, favoreciendo el entorno de acceso abierto a la literatura científica en matemática educativa.

Política editorial:

- ✓ *Idioma de los trabajos*. Podrán presentarse trabajos en lengua española, portuguesa e inglesa.
- ✓ *Trabajo original*. Los trabajos enviados a ALME para su publicación deberán constituir una colaboración original no publicada previamente en soporte alguno, ni encontrarse en proceso de publicación o valoración en cualquiera otra revista o proyecto editorial.
- ✓ *Normas de redacción y presentación*. Los trabajos deberán atenerse a las normas de redacción y presentación de carácter formal de ALME. Las colaboraciones enviadas a ALME que no se ajusten a ellas serán desestimadas.
- ✓ *Recepción de originales*. Los editores de ALME acusarán la recepción del manuscrito enviado por el autor/es. El Comité editorial revisará el artículo enviado informando al autor/es, en caso necesario, si se adecua al

campo temático de la revista y al cumplimiento de las normas y requisitos formales de redacción y presentación. En el caso de que todos los aspectos sean favorables, se procederá a la revisión del artículo.

- ✓ *Proceso de revisión.* Los artículos propuestos serán evaluados en forma "ciega" por dos integrantes del comité de científico. En el proceso de evaluación se garantizará tanto el anonimato de los autores, así como de los evaluadores.
- ✓ *Información*. Los editores de ALME informarán a los autores de la decisión de aceptación, modificación o rechazo de cada uno de los artículos.
- ✓ *Política de privacidad*. Se mantendrá y preservará en todos los casos y circunstancias el anonimato de los autores y el contenido de los artículos desde la recepción del manuscrito hasta su publicación. La información obtenida en el proceso de revisión y evaluación tendrá carácter confidencial.
- ✓ *Fuentes*. Los autores citarán debidamente las fuentes de extracción de datos, figuras e información de manera explícita y tangible tanto en la bibliografía, como en las referencias. Si el incumplimiento se detectase durante el proceso de revisión o evaluación se desestimará automáticamente la publicación del artículo.
- ✓ *Responsabilidad*. ALME no se hará responsable de las ideas y opiniones expresadas en los trabajos publicados. La responsabilidad plena será de los autores de los mismos.
- ✓ *Formatos*. ALME se presentará en dos formatos, electrónico y CD, que contendrán idénticos contenidos en cada número. El formato electrónico se ofrece desde la página oficial de Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (https://clame.org.mx/actas.html) y será de acceso libre y gratuito.
- ✓ *Periodicidad.* ALME tendrá una periodicidad semestral.
- ✓ *Secciones:* Las secciones de la revista ALME son las siguientes:

  1. Análisis del discurso matemático escolar
  2. Propuesta para la enseñanza de las matemáticas
  3. Aspectos socioepistemológicos en el análisis y el rediseño del discurso matemático escolar
  4. El pensamiento del profesor, sus prácticas y elementos para su formación profesional
  5. Uso de recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas

Directrices generales para los autores:

1. El trabajo correspondiente debe haber sido expuesto durante RELME 33. Es por ello que se solicita **enviar el certificado de la ponencia escaneado**, una vez que ya ha sido presentado para ingresar el escrito al proceso de evaluación por pares.
2. Todo trabajo debe ser inédito y no estar en proceso de evaluación de ninguna otra revista u órgano editorial.
3. Todos los artículos deberán estar escritos en procesador de texto Microsoft Office Word 2007 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 12, interlineado sencillo márgenes superior: 2,5 cm; inferior: 2,5 cm; izquierdo: 3,5 cm; derecho: 2,5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el **editor de ecuaciones**.

4. Extensión: máximo 12 cuartillas en hoja tamaño carta. Las páginas deben estar **sin numerar**.
5. Las referencias (deben aparecer bajo ese título, por orden alfabético) habrán de colocarse en estilo APA, 6ª edición (American Psychological Association).
6. Las figuras, tablas e imágenes que se incluyan en el artículo deben ser claras, legibles e incluir epígrafes con fuente Times New Roman tamaño 10 que indiquen referencia de las mismas.
7. La estructura base del artículo debe dar cuenta de: Un planteamiento del problema, revisión de literatura de Matemática Educativa, indicaciones generales sobre la estructura teórica (marco teórico o conceptual o fundamentos teóricos), metodología implementada, desarrollo de algunos ejemplos, análisis de los resultados, conclusiones y referencias bibliográficas. Cabe aclarar, que si lo que se está reportando es una investigación en curso, se debe hacer explícito en el escrito para que esto sea considerado en el momento de hacer la evaluación del documento.
8. También se podrán publicar artículos que no son productos de investigaciones, como puede ser: reporte de experiencia en aula, curso corto, taller, grupo de discusión o de laboratorio. Para los casos anteriores la estructura del escrito debería de reportar mínimamente: introducción, desarrollo del tema en donde se hará mención del planteamiento de un problema, así como los fundamentos teóricos y las conclusiones. El artículo deberá mostrar evidencia de revisión de referencias bibliográficas de Matemática Educativa.
9. No se aceptarán trabajos con notas a pie de página.
10. Cada uno de los manuscritos recibidos, pasa por una evaluación doblemente ciega (se retiran los nombres y datos de filiación de los autores de los documentos) y se envía a dos árbitros de nuestra comunidad, cuyos resultados, de manera anónima, son devueltos a los autores. En caso haya controversia entre los dos árbitros, se dará la propuesta a un tercer árbitro. La decisión de los árbitros es inapelable. Las evaluaciones pueden tener tres resultados posibles: Aceptado, Aceptado condicionado a modificaciones o Rechazado.

Normas para la publicación del artículo:

- ✓ Primer renglón: Título del trabajo en mayúscula en español o portugués (**sin punto al final**).
- ✓ Segundo renglón: Nombre de los autores separados por comas si hay más de un autor
- ✓ (**Nombre y Apellido** en ese orden, **sin títulos de grado**).
- ✓ Tercer renglón: Nombre de la institución y país al que pertenecen. **(No se considera válido el uso exclusivo de siglas).**
- ✓ Cuarto renglón: Dirección electrónica de los autores, separados por coma si hay más de uno y **sin hipervínculos**.
- ✓ Quinto renglón: Resumen de no más de 10 renglones de extensión en fuente Times New Roman, tamaño 10.
- ✓ Sexto renglón: palabras clave (a lo sumo cinco). Si son frases, verificar de no extenderse de las cinco palabras.
- ✓ Séptimo renglón: Abstract en inglés, en fuente Times New Roman tamaño 10.

- ✓ Octavo renglón: key words, traducción al inglés de las palabras clave.
- ✓ Noveno primer renglón: Inicia la primera sección del documento.
- ✓ Consideración para citaciones:

Citas dentro del texto. Las referencias a artículos o libros figurarán en el texto entre paréntesis, indicando el apellido del autor y el año, separados por una coma (Peters, 2001). En el caso de que en una misma referencia se incluyan varios libros o artículos, se citarán uno a continuación del otro por orden alfabético y separados por un punto y coma (García Aretio, 2002; Sarramona, 2001). Si en la referencia se incluyen varios trabajos de un mismo autor bastará poner el apellido y los años de los diferentes trabajos separados por comas, distinguiendo por letras (a, b, etc.) aquellos trabajos que haya publicado el mismo año (Casas Armengol, 1990, 1995, 2000a, 2000b, 2002, 2004). Si el nombre del autor forma parte del texto sólo irá entre paréntesis el año de publicación [Keegan (1992) afirmó que...].

Citas textuales. Las citas textuales con una extensión menor de 40 palabras irán entrecomilladas y, a continuación y entre paréntesis, se indicará el apellido del autor del texto, el año y la página o páginas de la que se ha extraído dicho texto. Ejemplo: "por educación a distancia entendemos [...] contacto ocasional con otros estudiantes" (Blanco, 1986, p. 16). Si el nombre del autor forma parte del texto, sería así: Como Martínez Sanz (2001, p. 102) señalaba "...". Las citas de 40 o más palabras deberán aparecer en un bloque de texto independiente, sin comillas y ajustado a la misma altura que la primera línea de un nuevo párrafo. Al final se indicará entre paréntesis, el autor, año y página/s.

- ✓ Consideración para referencias:

Únicamente se incluirán aquellas que se citan en el texto y deberán ordenarse por orden alfabético en un solo listado, tanto las de formato impreso como electrónico.

El formato será el siguiente:

- *Libro:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del libro. Lugar de publicación: Editorial.

  Brzezinski, Z. (1970). La era tecnotrónica. Buenos Aires: Paidós.

- *Revistas:* Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. Nombre de la Revista, número o volumen (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista, si es que existen.

  García Aretio, L. (1999). Historia de la educación a distancia. RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 2 (1), 11-40.

- *Capítulo o artículo en libro*: Apellidos del autor, Iniciales. (Año). Título del artículo o capítulo. En Iniciales. Apellidos del autor/es, (Ed. o Coord., si es el caso), Título del libro. (páginas que comprende el artículo o capítulo dentro del libro). Ciudad: Editorial.

  Oettinger, A. G. (1971). Compunications in the national decision-making process. En M. Greenberger, (Ed.), Computers, communication, and the public interest (73-114). Baltimore: Johns Hopkins Press.

Referencias de formatos electrónicos:

- *Documentos electrónicos:* autor/es (fecha publicación). Título [tipo de medio]. Lugar de publicación: editor. Recuperado de: especifique URL.

  Martín, S. (2011). Educación Aumentada: Realidad o Ficción. Blog CUED. Recuperado de http://goo.gl/w46mpA.

- *Artículos en publicaciones periódicas electrónicas* (Revistas electrónicas)

  Apellidos del autor/es, Iniciales. (Año). Título del artículo. *Nombre de la Revista*, número o volumen y (número), páginas que comprende el artículo dentro de la revista. DOI o en su defecto, recuperado de URL

✓ La información actualizada sobre la forma de citación puede ser consultada en la página de APA (American Psycological Association).

✓ Los esquemas, gráficos, tablas y fotografías deberán ser claros y se presentarán titulados, numerados e insertos en el cuerpo del texto.

Clame Comite Latinoamericano de Matematica Educativa